Алгебра

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ПРОСВЕЩЕНИЕ
МОСКОВСКИЙ УЧЕБНИК

Учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики

Под редакцией Н.Я. Виленкина

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

$\sin\alpha$

$\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha$

$y = f(x+2)$

$y = |x|$

$y = 2f(x)$

$B \subset A$

$(ab)^p = a^p \cdot b^p$

$a_{n+1} = a_n + d$

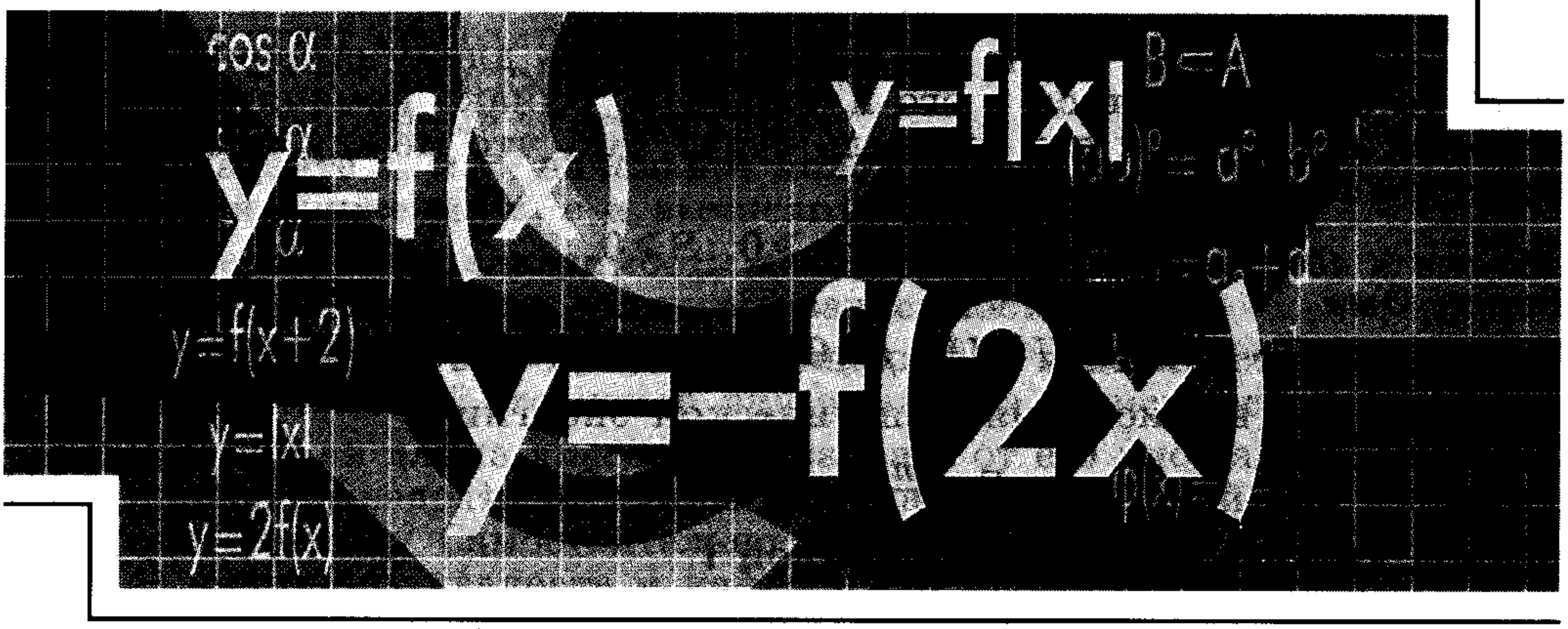
$b_n = b_1 q^{n-1}$

$\varphi(x) = \frac{1}{\dots}$

7-е издание

«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
ОАО «Московские учебники»
Москва 2006

Глава VIII



ФУНКЦИИ

В этой главе будет изучено одно из основных понятий математики — понятие функциональной зависимости.

§ 1. ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

1. ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Нас окружает множество изменяющихся величин. Изменяется скорость движущихся автомашин и летящих самолетов, меняется высота солнца над горизонтом и положение планет на их орбитах, изменяется температура воздуха, сила ветра и величина атмосферного давления, изменяется объем и площадь поверхности куба, если меняется его ребро, и т. д. Многообразие меняющихся величин крайне велико. Некоторые из этих величин очень тесно связаны между собой.

Так, если мы знаем, что материальная точка движется равноускоренно по прямой с начальной скоростью v_0 м/с и ускорением a м/с^2, то между двумя изменяющимися величинами — временем движения t и пройденным путем s — существует зависимость:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},\ t \geqslant 0,\ s \geqslant 0. \quad (1)$$

Эта зависимость позволяет нам по известному времени движения t найти величину пройденного за это время пути s. К примеру, если

$v_0=20$ м/с, $a=4$ м/с^2, то за $t=10$ с пройден путь

$$s=20\cdot 10+\frac{4\cdot 10^2}{2}=400\ (\text{м}).$$

Другие примеры. Если мы будем изменять длину стороны квадрата a, то будет меняться и его площадь S. Однако изменяться длина стороны квадрата и его площадь будут так, что между ними всегда будет выполняться зависимость

$$S=a^2,\ a\geqslant 0,\ S\geqslant 0. \tag{2}$$

Закон Ома

$$U=IR,\ I\geqslant 0,\ R\geqslant 0,\ U\geqslant 0, \tag{3}$$

формула для вычисления кинетической энергии

$$E=\frac{mv^2}{2},\ v\geqslant 0,\ E\geqslant 0, \tag{4}$$

период колебания маятника длиной l

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ l\geqslant 0,\ T\geqslant 0, \tag{5}$$

скорость равноускоренного движения

$$v=v_0+at,\ t\geqslant 0,\ v\geqslant v_0 \tag{6}$$

и многие другие законы физики дают многочисленные примеры переменных величин, в которых знание одних величин однозначно определяет величину других.

Другие изменяющиеся величины не так тесно связаны между собой, а некоторые и вовсе не связаны. Так, каждый понимает, что вес человека зависит от его роста, но никто не скажет, каков вес человека, если известно, что его рост составляет 180 см. Точно так же известно, что урожай любой культуры зависит от количества внесенных минеральных удобрений, но вряд ли кто-либо возьмется предсказать, например, величину урожая картофеля, если ему сообщат, что на каждый квадратный метр внесено 100 граммов удобрений. Ну, а такие изменяющиеся величины, как средняя температура в какой-либо точке Тихого океана и ежедневная добыча угля в какой-либо шахте, практически не связаны между собой.

В дальнейшем будем изучать только такие переменные величины, между которыми существуют зависимости, позволяющие определить единственное значение одной из них, как только станут известны значения остальных. Именно такими свойствами обладали описанные выше зависимости (1) — (6).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Тело находится в точке на расстоянии s_0 м от точки $s=0$ и начинает равномерное прямолинейное движение со скоростью v_0 м/с (рис. 1).

а) Существует ли зависимость между временем движения t и пройденным за это время путем s? Если ответ утвердительный, то напишите эту зависимость и найдите путь, пройденный за время $t=50$ с.

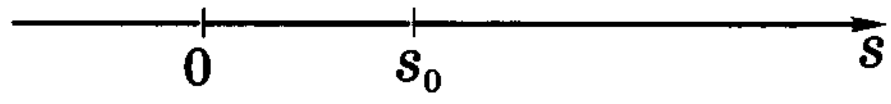


Рис. 1

б) Задайте s_0 м — начальное положение тела, его скорость v_0 м/с, время движения t_0 с и вычислите пройденный путь.

2. Существует ли зависимость между длиной a ребра куба и его объемом v? Какой вид имеет эта зависимость?

3. Зависит ли объем куба от площади его поверхности? Если ответ положительный, то какой вид имеет эта зависимость?

4. Зависит ли длина диагонали квадрата от его площади? Зависит ли площадь квадрата от длины его диагонали? Какой вид имеют эти зависимости? Самостоятельно задайте:
а) диагональ квадрата и найдите его площадь;
б) площадь квадрата и найдите его диагональ.

5. Зависит ли длина окружности l от ее радиуса R? Какой вид имеет эта зависимость? Какова длина окружности, если $R=5$ м?

6. Зависит ли площадь круга от его радиуса R? Какой вид имеет эта зависимость? Определите площадь круга радиуса $R=10$ м.

7. Предположим, что прыгун в длину производит разбег с постоянной скоростью v_0 м/с. Зависит ли длина прыжка от скорости v_0? Пусть спортсмен разбегается со скоростью 9 м/с. Можете ли вы предсказать точную длину его прыжка?

8. Такой же вопрос, как и в задаче 7, но для прыгуна в высоту и прыгуна с шестом.

9. При изменении радиуса круга R меняется площадь S вписанного в круг квадрата. Определите:
а) существует ли зависимость между R и S;
б) чему равна площадь S при радиусе R, равном 2 см;
в) при каком радиусе R площадь S равна 18 см^2.

10. Приведите несколько примеров изменяющихся величин, которые зависят друг от друга, но так, что в одном случае знание значения одной из них полностью определяет значение другой, а в другом случае это не так.

2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

В предыдущем пункте проанализированы различные зависимости между изменяющимися величинами. Теперь обобщим ту ситуацию, когда знание одной из переменных и множества, которому она принадлежит, полностью определяет значение другой переменной и множество, которому принадлежат все ее значения. Именно так было в соотношениях (1) — (6) и в упражнениях 1, 2, 3, 5, 6, 9.

Пусть X и Y — заданные множества.

Определение. ***Функцией f*** **называют правило, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in Y$.**

Например, если каждому положительному числу x поставить в соответствие число x^3 — объем куба с ребром x, то получим функцию f, для которой множества X и Y — множества положительных чисел.

Обычно x называют *аргументом функции* (или независимой переменной). Элемент $y_0 \in Y$, соответствующий фиксированному значению аргумента x_0, называют *значением функции* и обозначают через $f(x_0)$: $y_0 = f(x_0)$. При изменении аргумента x значения функции $y = f(x)$, как правило, также изменяются, и поэтому y часто называют зависимой переменной.

Множество X называют *областью определения функции* f и обозначают $D(f)$.

Множество всех значений функции f, которые она принимает на элементах множества X, называют *множеством значений функции* f (или *областью ее значений*) и обозначают $E(f)$.

В рассмотренном выше примере значение $f(x)$ равно x^3: $f(x) = x^3$. Областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех положительных чисел. Это же множество будет множеством ее значений $E(f)$.

В математике для функций используют различные обозначения. Их обозначают одним символом f или φ и говорят: «Рассмотрим функцию f» или «Рассмотрим функцию φ». Наряду с этим используют обозначение $f(x)$ и говорят: «Рассмотрим функцию $f(x)$». Например, если значения функции вычисляются с помощью выражения x^2+1, то мы будем говорить: «Рассмотрим функцию x^2+1», или «Рассмотрим функцию $f(x) = x^2+1$», или «Рассмотрим функцию $y = x^2+1$». (Обозначение функции $y = f(x)$ мы будем использовать очень редко.)

Наряду с буквой x аргумент функции обозначают иногда и буквами t, s, u, v и т. д. Саму функцию, кроме букв f, φ, обозначают иногда буквами g, ψ, F, Φ, G и т. д.

Понятие функции — это очень общее понятие, с которым мы встречаемся на каждом шагу, не всегда даже отдавая себе в этом отчет. Приведем примеры.

Пример 1.

В качестве множества X и множества Y рассмотрим множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Пусть k — фиксированное положительное число. Каждому $x \in \boldsymbol{R}$ поставим в соответствие число $f(x) = kx \in \boldsymbol{R}$. Это известная прямая пропорциональная зависимость.

Пример 2.

Пусть X — множество многоугольников на плоскости, Y — множество положительных действительных чисел. Каждому многоугольнику $x \in X$ поставим в соответствие число $f(x) \in Y$, равное его площади.

Пример 3.

В качестве множества X рассмотрим множество слов русского языка, а в качестве множества Y — русский алфавит. Каждому слову русского языка $x \in X$ поставим в соответствие его первую букву $f(x) \in Y$. Именно так поступают при составлении словарей.

Пример 4.

Пусть X — множество живущих на Земле людей, Y — множество, состоящее из четырех элементов: I, II, III и IV — группы крови. Каждому человеку $x \in X$ поставим в соответствие $f(x) \in Y$ — его группу крови.

Всюду в дальнейшем в качестве множеств X и Y будем брать числовые множества. В этом случае функции называют *числовыми функциями*. Такова функция в примере 1. В дальнейшем слово «числовая» будем опускать. Если множество X или множество Y числовыми не являются, то такие функции в математике чаще называют отображениями. Таковы функции в примерах 2, 3 и 4.

Приведем еще несколько примеров функций.

Пример 5.

Если один конец балки жестко закреплен, а на другом конце балки прикреплен груз, то под действием веса груза балка изгибается. Величина прогиба y балки в точке, находящейся на расстоянии x от ее левого конца, выражается формулой

$$y = \alpha P\left(\frac{x^3}{3} - lx^2\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad -\frac{2Pl^3}{3}\alpha \leqslant y \leqslant 0,$$

где l — длина балки, P — действующая сила, α — постоянный коэффициент (рис. 2). Эта формула определяет y как функцию от аргумента x, область определения этой функции — отрезок $[0; l]$, множество значений — отрезок $\left[-\frac{2Pl^3}{3}\alpha; 0\right]$.

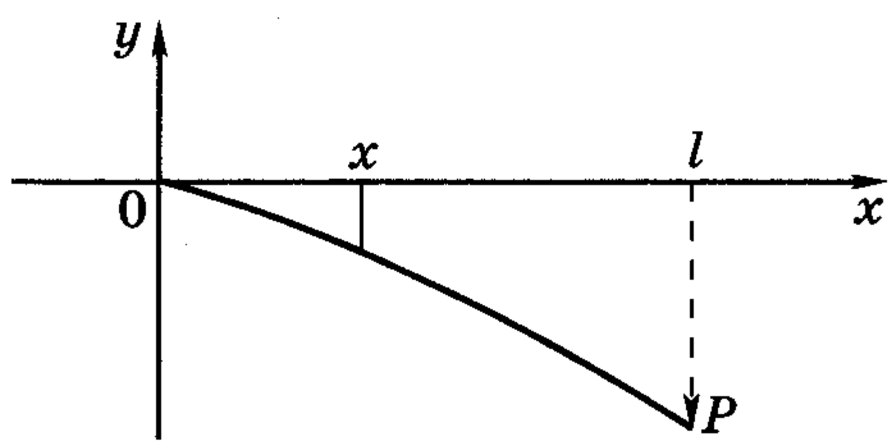


Рис. 2

1а*

Пример 6.

Если в банк положена сумма в a тысяч рублей и банк начисляет на эту сумму P % ежегодно, то через n лет величина вклада будет равна

$$f(n)=a\left(1+\frac{P}{100}\right)^n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots .$$

Эта зависимость показывает, что каждому натуральному числу n — количеству лет, в течение которых вклад лежит в банке, ставится в соответствие число $f(n)$ — величина вклада, в которую через n лет превратится первоначальная сумма в a рублей.

Пример 7.

Возьмем струну длиной l в положении равновесия, лежащую вдоль оси Ox и закрепленную в точках $x=0$ и $x=l$. Для того чтобы она начала колебаться и издавать звуки, ее нужно вывести из положения равновесия. Для этого возьмем ее, например, за середину и поднимем на небольшую высоту h (рис. 3). Струна примет форму ломаной OAl. Обозначим через y величину отклонения от положения равновесия точки струны, имеющей абсциссу x. Выразим y как функцию от x.

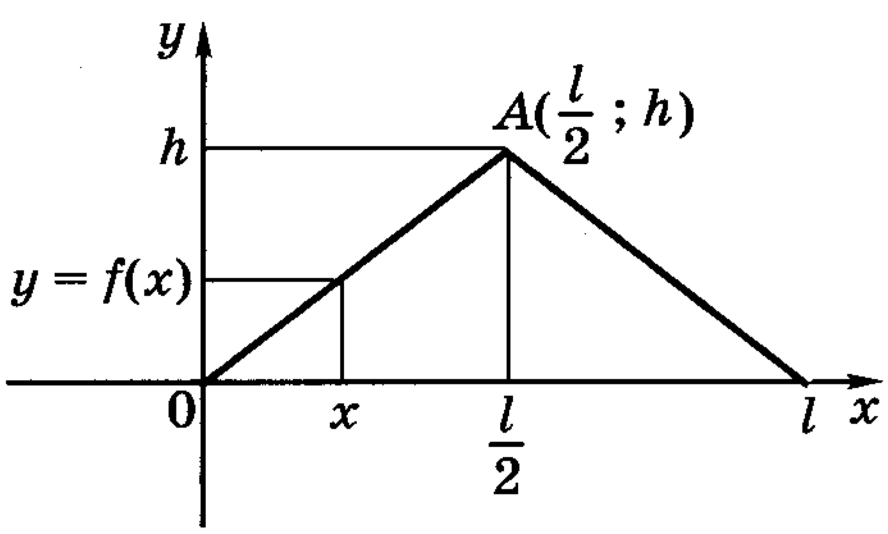


Рис. 3

Уравнение прямой OA имеет вид $y=\frac{2h}{l}x$, а уравнение прямой Al — вид $y=-\frac{2h}{l}x+2h$.

Таким образом,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2h}{l}x, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant \frac{l}{2},\\ -\frac{2h}{l}x+2h, \text{ если } \frac{l}{2}<x\leqslant l.\end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

11. Каждому действительному числу x поставим в соответствие число y — приближенное значение x с точностью до 0,001 с недостатком. Будет ли y функцией от аргумента x? Если да, то каковы область определения и множество значений этой функции? Найдите $f(\sqrt{2})$, $f(\pi)$, $f\left(10\frac{1}{4}\right)$, $f\left(-121\frac{1}{3}\right)$.

12. В круг радиуса R вписан прямоугольник, одна из сторон которого равна x. Является ли площадь прямоугольника S функцией от x? Если да, то найдите область определения и множество значений этой функции. Найдите S при $x=\frac{R}{3}$; $\frac{4R}{3}$.

13. В круг радиуса R вписан равнобедренный треугольник со стороной x. Является ли его площадь S функцией от x? Если да, то найдите область определения этой функции и ее значения при $x=R$; $R\sqrt{2}$.

14. Парашютист прыгает из самолета, причем t_0 секунд он падает свободно, затем он раскрывает парашют и t_1 секунд падает с постоянной скоростью v_0 м/с. Выразите путь парашютиста с момента прыжка из самолета как функцию времени t.

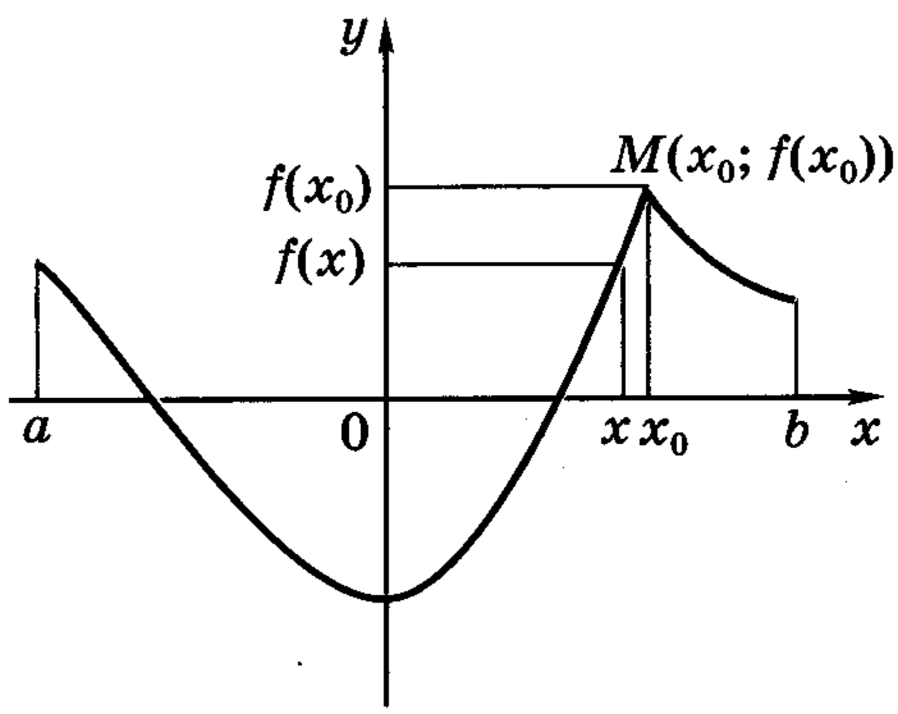


Рис. 4

3. ГРАФИК ФУНКЦИИ

Для наглядного изображения функций используют их графики. Если задана функция f с областью определения $D(f)$, то каждому значению аргумента $x \in D(f)$ соответствует значение функции $y=f(x)$ (рис. 4).

По двум числам x_0 и $y_0=f(x_0)$ можно построить на координатной плоскости точку $M(x_0;\ f(x_0))$. Совокупность всех таких точек образует *график функции* f.

Пример 1.

Графиком функции $2x+1$ является прямая, изображенная на рисунке 5, *а*. Равенство $y=2x+1$ является уравнением этой прямой.

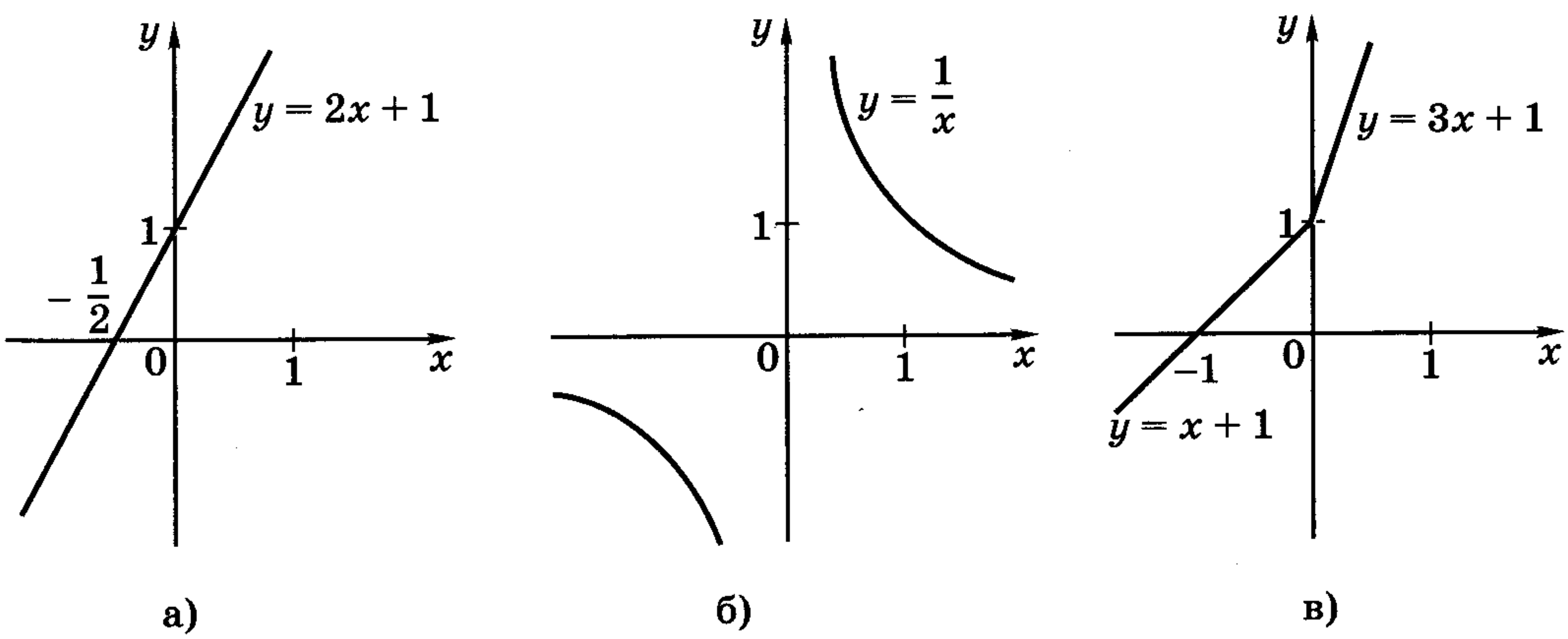


Рис. 5

Пример 2.

График функции $\frac{1}{x}$ состоит из двух отдельных кривых и показан на рисунке 5, *б*. Равенство $y = \frac{1}{x}$ — уравнение гиперболы.

Пример 3.

График функции $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 3x+1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$ показан на рисунке 5, *в*.

Равенство $y = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 3x+1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$ является уравнением ломаной, изображенной на рисунке 5, *в*.

Отметим, что далеко не каждая кривая на плоскости является графиком некоторой функции. Для того чтобы кривая Г была графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждая вертикальная прямая $x = a$ пересекала кривую Г не более чем в одной точке. Пусть это условие выполнено. Тогда кривая Г является графиком следующей функции f: если прямая $x = a$ пересекает кривую Г в точке $(a; b)$, то полагаем $f(a) = b$; если прямая $x = a_1$ не пересекает кривую Г, то в точке $x = a_1$ функция f не определена. Рисунок 6 иллюстрирует это соглашение.

УПРАЖНЕНИЯ

15. На рисунке 7 приведены различные кривые. Какие из них являются графиками функций?

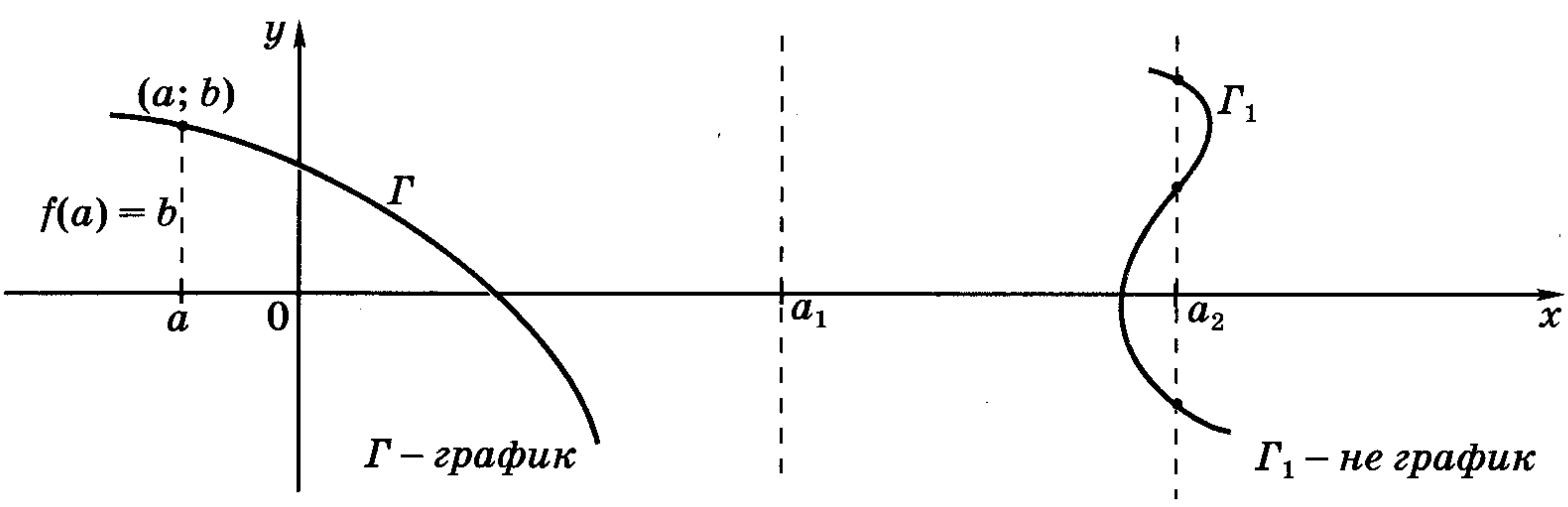


Рис. 6

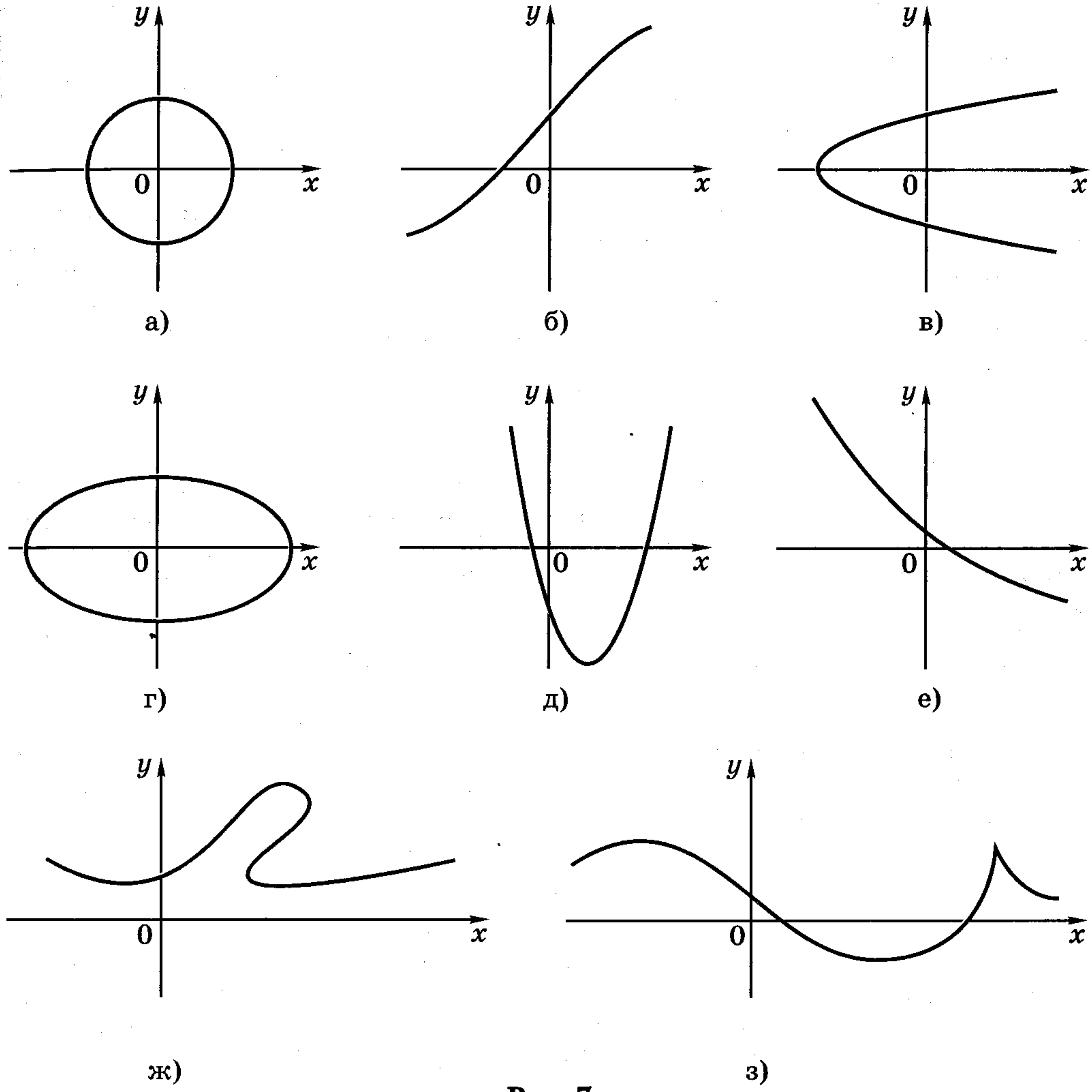


Рис. 7

4. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

В определении функции говорится о том, что по заданному значению аргумента x с помощью некоторого правила находится соответствующее значение функции $f(x)$. Задавать это правило можно различными способами.

Например, его можно задать таблицей, где перечисляются значения аргумента x и соответствующие им значения $f(x)$. Так, функция, которая по величине x — диаметра окружности определяет ее длину $l(x)$, задается таблицей:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$l(x)$	3,142	3,456	3,770	4,084	4,399	4,713	5,027

Этот способ задания функций, называемый *табличным*, широко распространен: результаты наблюдений за какой-либо характеристикой изучаемого процесса (температурой, давлением, влажностью, объемом и т. д.) приводят к табличному заданию изучаемых функций. Однако область определения функции чаще всего содержит бесконечное множество значений, и поэтому задать функцию с помощью таблицы в этом случае невозможно.

Другим способом задания функции является ее задание с помощью графика — *графический* способ.

Приведем примеры.

На рисунке 8 изображен график изменения ускорения силы тяжести g в зависимости от расстояния r до центра Земли (Земля принята за однородный шар радиуса R). На рисунке 9 представлены две кардиограммы. Первая из них показывает работу здорового сердца, вторая — больного.

Графический способ задания функции позволяет увидеть функцию целиком всю сразу и наглядно представить ее свойства. Многочисленные сейсмограммы, кардиограммы, осциллограммы представляют примеры графического задания функции.

Во многих случаях функции задаются с помощью формул (аналитических выражений). Например: $2x^3+1$, $f(x)=3-5x^2$ и т. д. Такой способ задания функции называется *аналитическим*. В дальнейшем мы в основном будем изучать функции, заданные именно таким образом.

Если функция f задана с помощью формулы и при этом не указана ее область определения $D(f)$, то областью определения такой функции будем считать множество всех значений x, при которых данная формула имеет смысл. Поэтому нам необходимо уметь находить области определения и области значений функций, заданных аналитически, при этом отметим, что над функциями можно производить арифметические операции и умножать их на действительные числа.

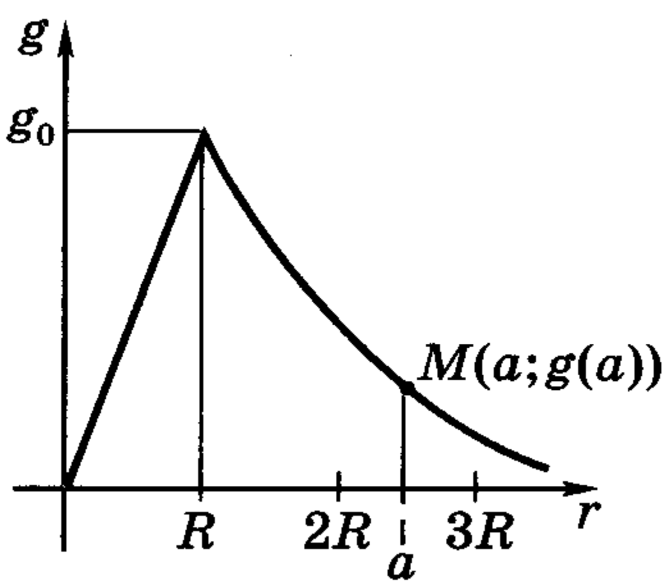


Рис. 8

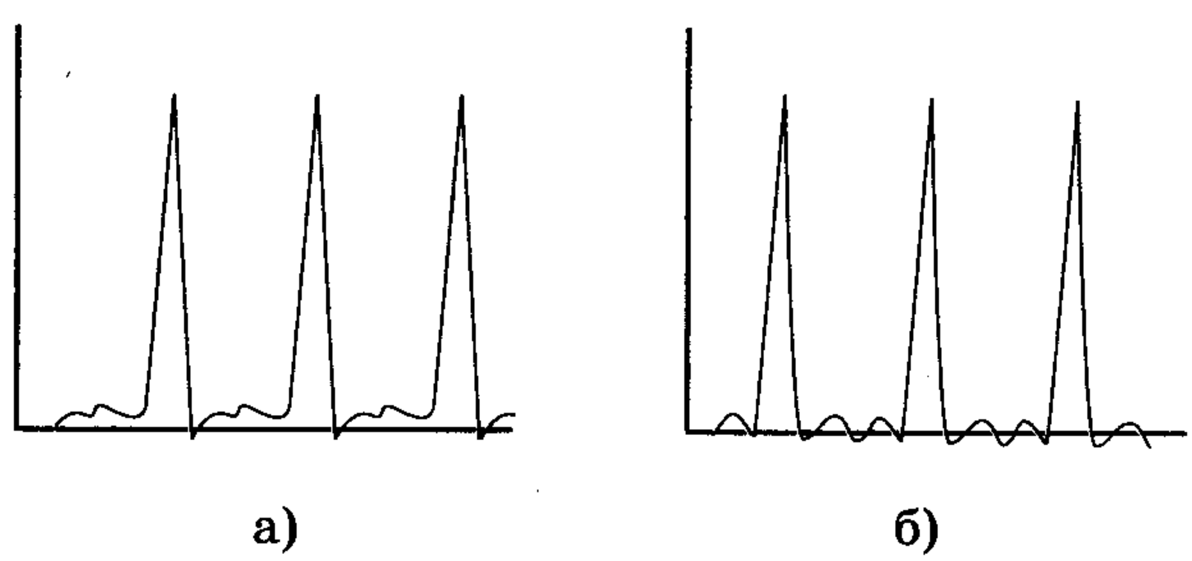


Рис. 9

Если заданы две функции f и g с областями определения $D(f)$ и $D(g)$, то на множестве $D=D(f)\cap D(g)$ определены сумма $f+g$, произведение $f\cdot g$ функций:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in D,$$

и частное функций $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ для тех значений $x\in D$, для которых $g(x)\neq 0$.

Если a — действительное число, то на множестве $D(f)$ определена функция $(a\cdot f)(x)=af(x)$.

Две функции f и g считаются *равными*, если они имеют одну и ту же область определения D и для любого $x\in D$ их значения совпадают: $f(x)=g(x)$.

Пример 1.

Рассмотрим функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ и $g(x)=\sqrt{5-x}$.

Области определения этих функций представляют множества $D(f)=(3;\ +\infty)$ и $D(g)=(-\infty;\ 5]$.

На пересечении множеств $D(f)\cap D(g)=(3;\ 5]$ можно рассматривать новые функции:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-x}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-3}}$

и функцию $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{\sqrt{x-3}\sqrt{5-x}}$ для $x\in D(f)\cap D(g)$ и таких, что $g(x)\neq 0$, т. е. для $x\in(3;\ 5)$.

Пример 2.

Найдем область определения функции $\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}}+\sqrt{x^2-2}$.

Решение. Квадратные корни можно извлекать только из неотрицательных чисел, поэтому данная функция определена для тех значений x, для которых выполнено условие

$$\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+1}\geqslant 0,\\ x^2-2\geqslant 0.\end{cases}$$

Эту систему неравенств решим методом интервалов (см.: Алгебра-8, гл. VII). Ее решением является множество

$$D(f)=\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\ +\infty\right).$$

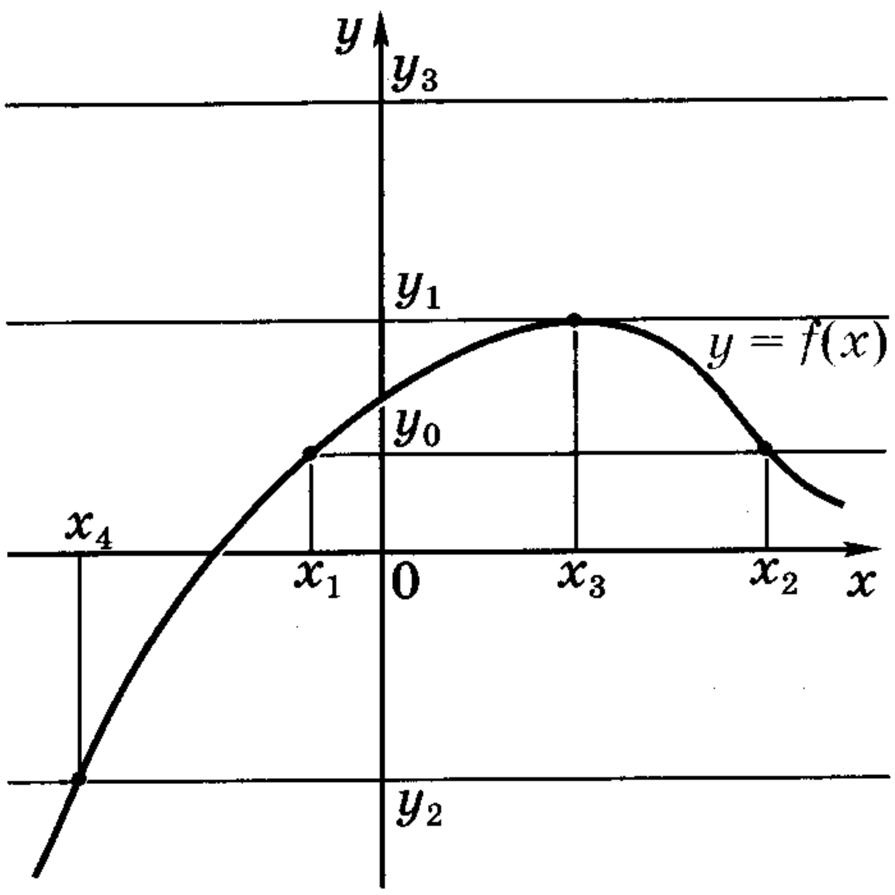


Рис. 10

Нахождение множества значений $E(f)$ функции f при $x \in D(f)$ связано с решением уравнений. Действительно, для того чтобы число y_0 являлось значением функции f, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $y_0 = f(x)$ имело корень $x \in D(f)$. Это уравнение в зависимости от значения y_0 может иметь одно решение, несколько решений или не иметь их совсем. Рисунок 10 иллюстрирует это утверждение: значение y_0 функция f принимает в двух точках x_1 и x_2; значение y_1 — в одной точке x_3; значение y_2 — в одной точке x_4; значение y_3 функция f не принимает совсем.

Пример 3.

Найдем множество $E(f)$ значений функции $\frac{4x+8}{x^2+5}$.

Решение. Функция $\frac{4x+8}{x^2+5}$ определена для всех действительных значений x, так как знаменатель $x^2+5 \neq 0$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Поэтому нам достаточно найти множество тех значений y_0, при которых

$$y_0 = \frac{4x+8}{x^2+5} \qquad (1)$$

имеет решение $x \in D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$y_0 x^2 - 4x + 5y_0 - 8 = 0. \qquad (2)$$

Если $y_0 \neq 0$, то уравнение (2) — квадратное уравнение, имеющее решение тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен. Имеем

$$D = (-4)^2 - 4y_0(5y_0 - 8) = -20y_0^2 + 32y_0 + 16.$$

Решая неравенство $-20y_0^2 + 32y_0 + 16 \geqslant 0$, получим $y_0 \in \left[-\frac{2}{5};\ 2\right]$.

Но $y_0 \neq 0$ по предположению, поэтому $y_0 \in \left[-\frac{2}{5};\ 0\right) \cup (0;\ 2]$.

Если $y_0 = 0$, то уравнение (2) принимает вид $4x + 8 = 0$.

Оно имеет решение $x = -2$. Таким образом, $y_0 = 0$ тоже принадлежит множеству значений функции $\frac{4x+8}{x^2+5}$. Окончательно получаем $E(f) = \left[-\frac{2}{5};\ 2\right]$.

УПРАЖНЕНИЯ

16. Дана функция $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

а) Какое значение принимает эта функция при $x=7$; $\dfrac{3}{2}$; -4; $\dfrac{1}{t}$; $2t-1$?

б) Существуют ли значения x, при которых $f(x)=1$; $f(x)=2$; $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$?

17. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-2x}$, $x\neq 0$, $x\neq\pm\sqrt{2}$.

а) Какое значение эта функция принимает при $x=-1$; $x=0{,}3$?
б) Найдите $f(2x)$, $f(x+1)$, $f(x^2)$, $f(2t+3)$, $f^2(x)$.
в) Справедливо ли равенство $f(-x)=-f(x)$?

18. Рассмотрим функцию $\varphi(u)=\dfrac{2u+1}{3u-1}$, $u\neq\dfrac{1}{3}$.

а) Чему равно $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(-4)$; $\varphi(5u)$; $\varphi\left(t-\dfrac{1}{2}\right)$?

б) Принимает ли данная функция значение 1; значение 2?

19. Для каких значений x определена функция $\dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}+\sqrt{1-x}$?

20. Найдите область определения функции:

а) $\dfrac{1}{u^3-1}+\sqrt{u+1}-\sqrt{5-2u}$; б) $\dfrac{1}{x^2+x-2}+\sqrt{\dfrac{x+3}{5-3x}}$.

21. Найдите область определения функции:

а) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}$; 1) $(-1;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $[-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 3) $(-1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; 4) $(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$;

б) $\dfrac{4x+3}{\sqrt{x^2-2x-8}}$;

в) $\sqrt{15-2x-8x^2}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}}$;

д) $\sqrt{2x^3-5x^2+4x-1}$;

е) $\sqrt{4-|x|+\dfrac{1}{x-1}}$;

ж) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\sqrt{5-2x}$;

з) $\dfrac{3x-4}{x-2}+\dfrac{1}{3x-10}+\sqrt{x-3}$.

22. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-1}$.

а) Для каких значений x определена эта функция?

б) Пусть α — фиксированное число. Принимает ли функция значение α? Если да, то при каком x это происходит? Существует ли значение α, которое функция $f(x)$ не принимает?

23. Найдите множество значений функции:

а) $\dfrac{2x+1}{x^2+6}$; б) $\dfrac{1+x^2}{2+x}$, $x \geqslant 0$; в) $\dfrac{2x+3}{x-2}$; г) $\dfrac{x-3}{x^2+x+4}$.

Существует ли среди значений функции самое большое и самое малое? Если да, то в каких точках функция принимает эти значения?

24. Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2}$, $\varphi(x)=\dfrac{x-x^2}{2}$. Докажите, что:

а) $f(1+x)+\varphi(1-x)=x$;

б) $f(-x)+\varphi(1+x)=0$;

в) $f(x^2+1)+\varphi(1-x^2)=x^2$.

25. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Докажите справедливость соотношений:

а) $f(x)-f(x+1)=f(x)\cdot f(x+1)$;

б) $f(x^2+1)-f(x^2+2)=f(x^2+1)\cdot f(x^2+2)$.

26. Найдите $f(x)$, если:

а) $f(x^2)=\dfrac{1}{2x}$, $x>0$; б) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$; в) $f(x^3)=3x^6-2x^3$.

5. КУСОЧНОЕ ЗАДАНИЕ ФУНКЦИИ

Задать функцию с помощью одного аналитического выражения удается не всегда. Иногда для ее задания приходится использовать не одну, а две-три, а то и более формул. Такая ситуация встречается довольно часто. В этом случае говорят о *кусочном* задании функции. Так, в примерах 7 п. 2 и 3 п. 3 функции были заданы именно таким способом. Приведем еще несколько примеров.

Пример 1.

Из физики известно, что при равномерном прямолинейном движении сила трения F постоянна по величине и направлена в сторону, противоположную скорости: $F=\begin{cases} -h, \text{ если } v>0, \\ h, \text{ если } v<0. \end{cases}$

Пример 2.

Экспериментально установлено, что ветер, дующий со скоростью v_0, действует на парус площадью S с силой F, равной:

$$F=\begin{cases} \alpha S\dfrac{(v_0-v)^2}{2}, \text{ если } v<v_0, \\ -\alpha S\dfrac{(v_0-v)^2}{2}, \text{ если } v>v_0, \end{cases}$$

где v — скорость парусника, α — постоянный коэффициент.

УПРАЖНЕНИЯ

27. Прогиб балки длиной l, оба конца которой свободно лежат на опорах, под действием нагрузки P, сосредоточенной в центре балки, выражается формулами

$$f(x)=\begin{cases}\alpha Pl^3\left(\dfrac{3x}{l}-\dfrac{4x^3}{l^3}\right), \text{ если } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{2},\\ \alpha Pl^3\left(\dfrac{3(l-x)}{l}-4\,\dfrac{(l-x)^3}{l^3}\right), \text{ если } \dfrac{l}{2}< x\leqslant l.\end{cases}$$

а) Убедитесь, что при $x=\dfrac{l}{2}$ оба выражения дают одинаковый результат.

б) Вычислите величину прогиба при $x=\dfrac{l}{4}$ и $x=\dfrac{3l}{4}$. Каков физический смысл этого результата?

28. Экспериментально установлено, что скорость (в м/с) автомобиля меняется по следующему закону:

$$v(t)=\begin{cases}20t \text{ при } 0\leqslant t\leqslant 15,\\ 300 \text{ при } t>15.\end{cases}$$

Определите (в км/ч) скорость автомобиля при $t=12$ с, $t=30$ с.

§ 2. ГРАФИКИ ПРОСТЕЙШИХ ФУНКЦИЙ

6. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Напомним, что линейной функцией называется функция вида $kx+b$, где k и b — действительные числа. Ее графиком является прямая $y=kx+b$ (рис. 11, *а*). Число $k=\operatorname{tg}\varphi$ называется *угловым коэффициентом* прямой, число b равно ординате точки пересечения прямой $y=kx+b$ с осью Oy.

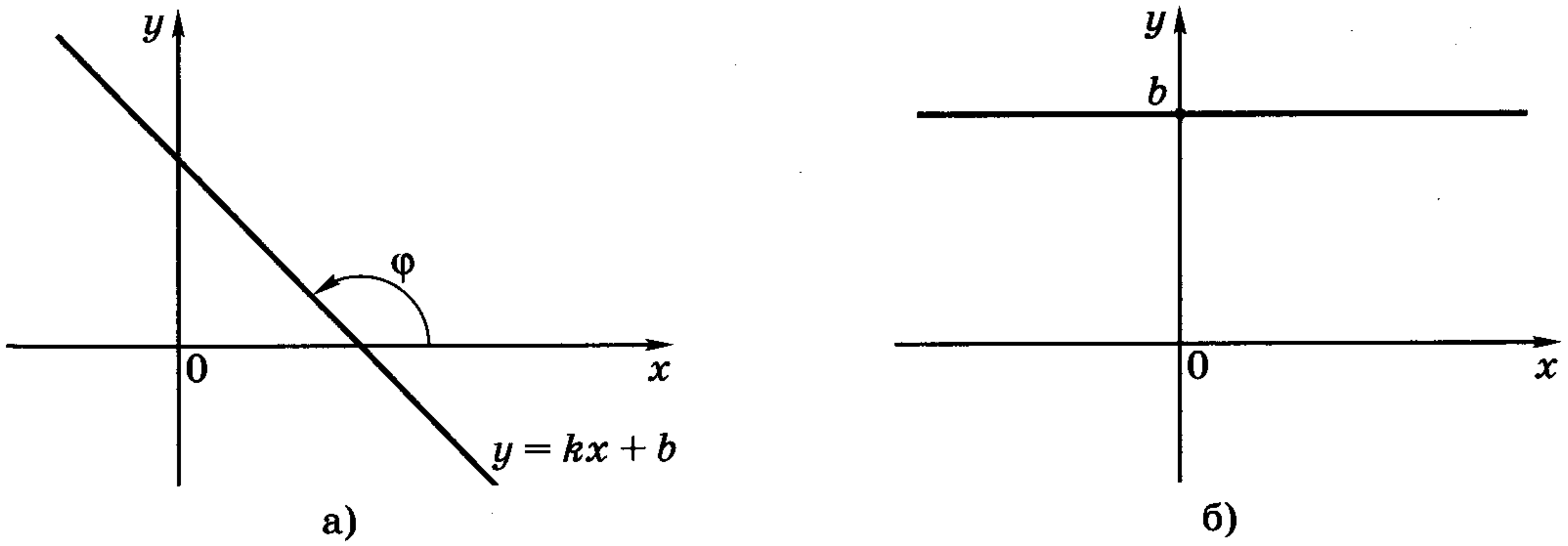


Рис. 11

Если $b=0$, то график функции $y=kx$ проходит через начало координат.

Если же $k=0$, $b \neq 0$, то графиком функции является прямая, параллельная оси Ox (рис. 11, *б*).

Положение прямой полностью определяется заданием двух любых ее точек, поэтому для задания линейной функции достаточно знать ее значения только для двух значений аргумента,— это позволит нам найти величины k и b.

Пример.

Линейная функция при $x=-3$ принимает значение $y=2$, а при $x=-2$ — значение -5. Найдем эту функцию.

Решение. Для нахождения значений k и b получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -3k+b=2, \\ -2k+b=-5. \end{cases}$$

Ее решение: $k=-7$, $b=-19$. Следовательно, искомая линейная функция имеет вид $-7x-19$.

Из многочисленных применений линейной функции рассмотрим ее использование при решении линейных неравенств.

7. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Из рассуждений, проведенных в пункте 5 главы VII, следует, что прямая $y=kx+b$, или $y-kx-b=0$, делит точки плоскости на три множества:

I. Точки плоскости, лежащие на прямой $y-kx-b=0$.

II. Точки плоскости, лежащие выше точек прямой $y-kx-b=0$(верхняя полуплоскость).

III. Точки плоскости, лежащие ниже точек прямой $y-kx-b=0$ (нижняя полуплоскость).

Для того чтобы узнать, каким неравенствам удовлетворяют координаты точек, лежащих в той или иной полуплоскости, используем метод *пробных точек*. Возьмем пробную точку $M(x_0;\ y_0)$ и подставим ее координаты в выражение $y-kx-b$. Если при этом окажется, что $y_0-kx_0-b>0$, то точка M лежит в верхней полуплоскости; если же $y_0-kx_0-b<0$ — то в нижней.

Пример 1.

Изобразим на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y-2x+3 \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим прямую $y-2x+3=0$. Возьмем точку $O(0;\ 0)$. После подстановки ее координат в уравнение прямой получаем верное неравенство $3 \geqslant 0$. Это означает, что искомой полуплоскостью будет та, которая содержит начало координат, т. е. верхняя полуплоскость. (На рисунке 12 эта область отмечена стрелками.) Таким образом, искомым множеством является множество всех точек плоскости, лежащих выше прямой $y-2x+3=0$ и на самой прямой.

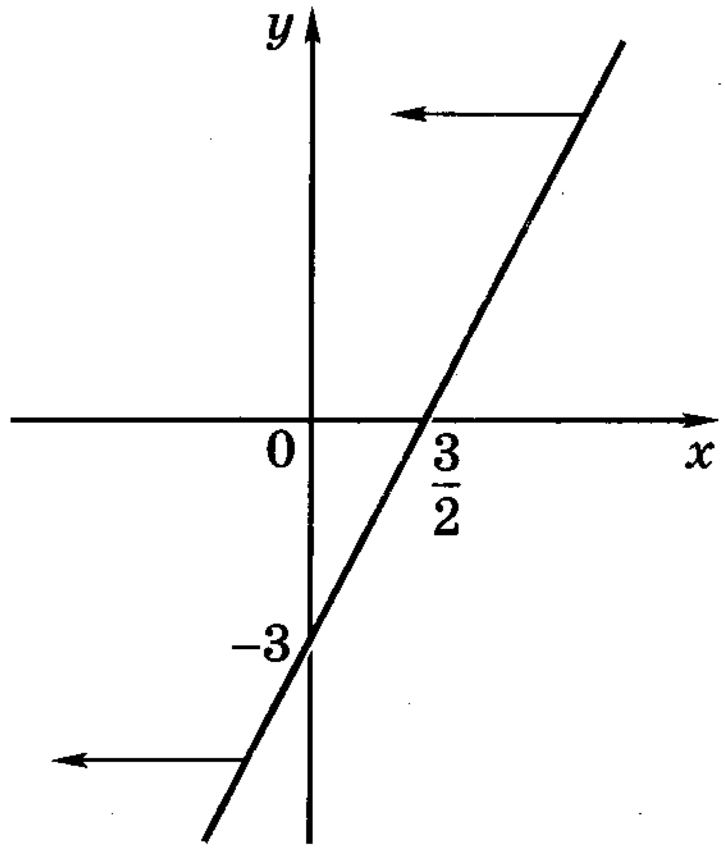


Рис. 12

Пример 2.

Изобразим на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2y-3x-7 \leqslant 0, \\ x+3y-5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим прямые $2y-3x-7=0$ и $x+3y-5=0$. Для нахождения точки их пересечения решим систему

$$\begin{cases} 2y-3x-7=0, \\ x+3y-5=0. \end{cases}$$

Получим $x=-1$, $y=2$. Это значит, что прямые пересекаются в точке $A(-1;\ 2)$. Для нахождения искомого множества строим прямые $2y-3x-7=0$ и $x+3y-5=0$ (рис. 13). Теперь определим, в какой из полуплоскостей выполнено неравенство $2y-3x-7 \leqslant 0$. Подставим сюда координаты точки $O(0;\ 0)$ и получим $-7 \leqslant 0$. Это верное неравенство, следовательно, искомой полуплоскостью будет та,

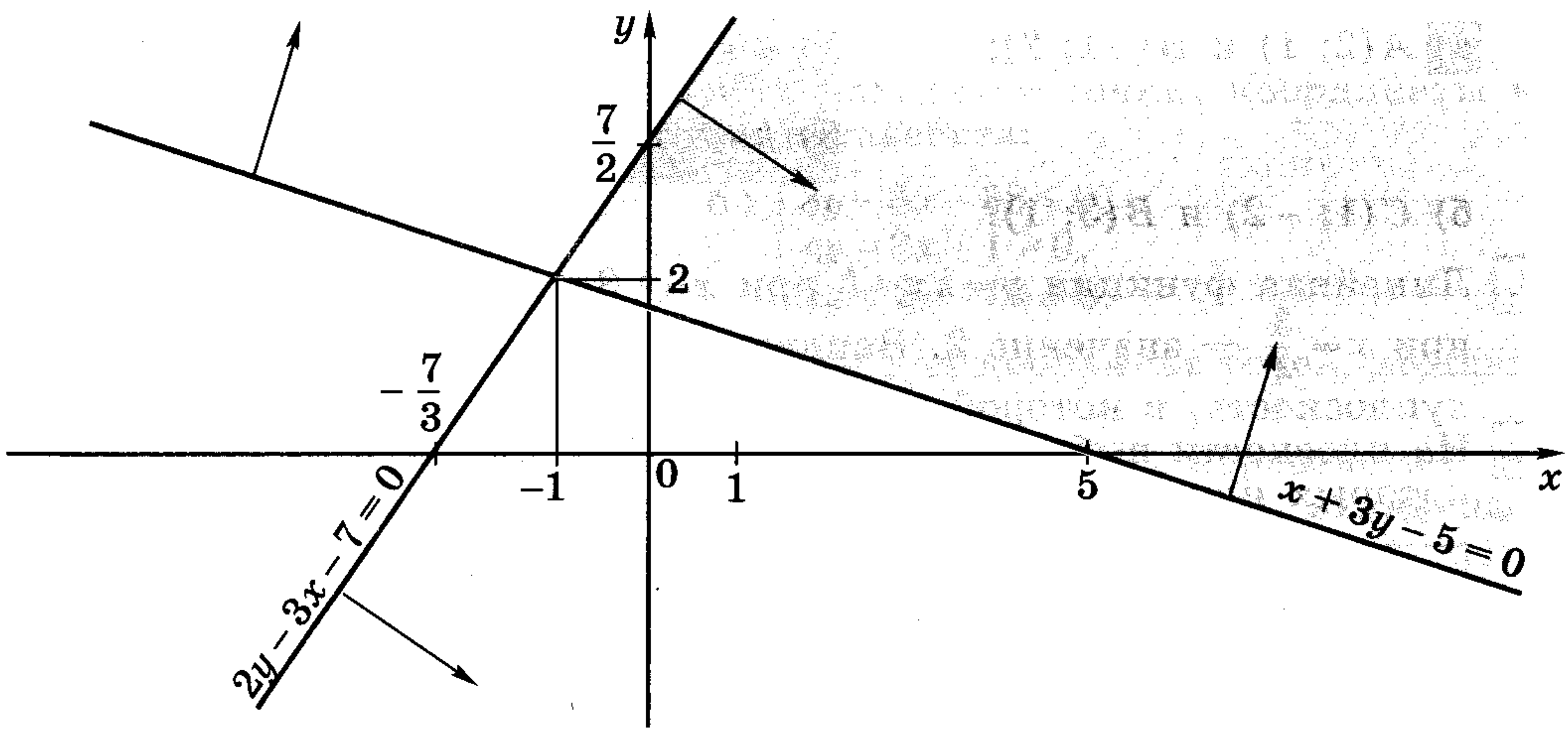


Рис. 13

которая содержит начало координат, т. е. нижняя полуплоскость (она помечена стрелками вниз). К полученному множеству следует добавить и точки, лежащие на прямой $2y-3x-7=0$.

Аналогично, подставляя координаты точки $O(0;\ 0)$ в неравенство $x+3y-5\geqslant 0$, получаем $-5\geqslant 0$. Это утверждение неверно, поэтому искомой полуплоскостью будет та, которая точку $O(0;\ 0)$ не содержит, т. е. верхняя полуплоскость (она помечена стрелками вверх). К ней следует добавить и точки прямой $x+3y-5=0$. Искомое множество закрашено на рисунке 13 (включая точки, лежащие на сторонах закрашенного угла).

УПРАЖНЕНИЯ

29. Постройте прямую, проходящую через точку $A(2;\ 1)$ и имеющую угловой коэффициент k, равный:

а) 1; б) -2; в) 0; г) $-\frac{1}{3}$; д) 4.

Напишите уравнения этих прямых.

30. Подберите значение углового коэффициента k таким образом, чтобы прямая $y=kx+6$ прошла через точку:

а) $A(2;\ -1)$; б) $B(4;\ 1)$; в) $C\left(-3;\ \frac{1}{2}\right)$; г) $D\left(\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}\right)$.

31. Определите значение b таким образом, чтобы прямая $y=3x+b$ прошла через точку:

а) $A(-2;\ 1)$; б) $B\left(-\frac{1}{3};\ 1\right)$; в) $C(-3;\ -1)$.

32. При каких значениях k и b прямая $y=kx+b$ проходит через точки:

а) $A(2;\ 1)$ и $B(-1;\ 2)$;

1) $k=\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{3}$; 2) $k=-\frac{1}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$;
3) $k=-1$, $b=5$; 4) $k=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{5}{3}$;

б) $C(1;\ -2)$ и $B(3;\ 1)$?

33. Линейная функция $y=kx+b$ при $x=-3$ принимает значение -1, а при $x=\frac{3}{4}$ — значение 2. Найдите эту функцию и заштрихуйте полуплоскость, в которой выполняется неравенство $y-kx-b>0$.

34. На плоскости выбрано пять точек A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5, координаты которых приведены в таблице:

Точка $A(x;\ y)$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
x	0	2	-1	1	2
y	1	6	2	5	4

а) Найдите линейную функцию, график которой проходит через точки A_2 и A_3.
б) Проверьте, лежат ли на построенной прямой точки A_1, A_4, A_5. Если нет, то в какой из полуплоскостей они расположены?

35*. Докажите, что функция $\sqrt{3}x+1$ не принимает целых значений ни при одном целочисленном значении x.

36. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству с двумя переменными:

а) $2x+3y-6\geqslant 0$; в) $3y-x-1\geqslant 0$;
б) $y-4x+6\leqslant 0$; г) $-2x-3y-9\geqslant 0$.

37. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3x+2y-8\geqslant 0, \\ 2x-y-3\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y+2\geqslant 0, \\ 2x-y+3\geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-2y-5\leqslant 0, \\ 2x-3y-7\leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+2y-10\leqslant 0, \\ -x+3y+8\geqslant 0. \end{cases}$

38. Составьте самостоятельно систему двух линейных неравенств и изобразите на плоскости множество ее решений.

39*. Две пересекающиеся прямые делят плоскость на четыре части.
1) Определите, в какой из них находятся точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3y-2x-4\geqslant 0, \\ y+x-3\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-3x-4\leqslant 0, \\ 2y+x-1\leqslant 0. \end{cases}$

2) Какие неравенства справедливы для координат точек, лежащих в оставшихся частях плоскости?

40. Три прямые, попарно пересекающиеся в различных точках, делят плоскость на семь частей.
1) Определите, в какой из них находятся точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3y-5x+17\geqslant 0, \\ 5y+3x-17\geqslant 0, \\ 4y-x-17\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y-8x-28\leqslant 0, \\ 4y-3x+1\geqslant 0, \\ 5y+2x-16\geqslant 0. \end{cases}$

2) Какие неравенства справедливы для координат точек, лежащих в оставшихся частях плоскости?

41*. Задайте самостоятельно систему трех линейных неравенств с двумя переменными и найдите на плоскости множество, являющееся ее решением.

42. Существует ли линейная функция $y=kx+b$, которая точки 2; 5; 8; 11; 29; 32 переводит в точки 4; 9; 14; 19; 44; 49?

43. Найдите линейную функцию, которая при $x=x_1$ принимает значение $y=y_1$, а при $x=x_2$ — значение $y=y_2$.

8. ФУНКЦИЯ $|x|$

Напомним, что в математике через $|x|$ обозначают абсолютную величину, или модуль числа x. Абсолютная величина числа x равна этому числу x, если $x>0$, равна противоположному числу $-x$, если $x<0$, и равна нулю, если $x=0$. Таким образом, функция $|x|$ определена для всех $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Множество ее значений совпадает с множеством неотрицательных чисел.

Итак,

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Например, $|5{,}2|=5{,}2$; $|-3{,}4|=-(-3{,}4)=3{,}4$; $|-3|=3$; $|0|=0$.

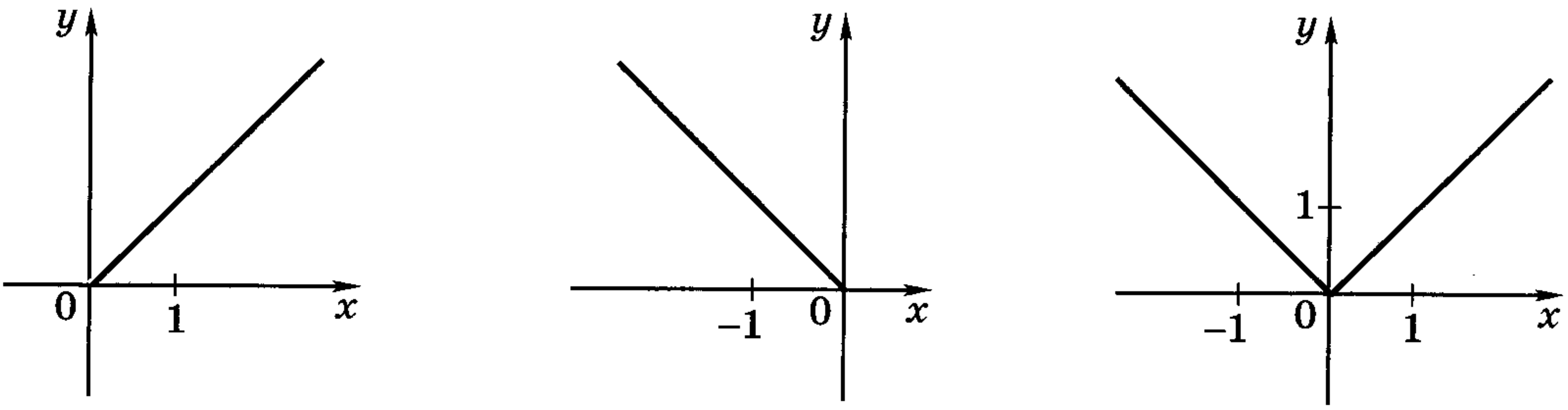
Построим график функции $|x|$.

Если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$ и графиком этой функции является биссектриса I координатного угла (рис. 14, *а*). Если же $x<0$, то $|x|=-x$ и графиком этой функции является биссектриса II координатного угла (рис. 14, *б*). Объединяя случаи «а» и «б», получим график функции $|x|$ (рис. 14, *в*) для $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Пример 1.

Построим график функции $|2x-1|$.

Решение. Выражение $2x-1$ обращается в нуль при $x=\frac{1}{2}$ и на интервалах $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ сохраняет постоянный знак. Это замечание позволит нам освободиться от знака абсолютной величины. Рассмотрим $x\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда $2x-1\leqslant 0$ и $|2x-1|=1-2x$, и поэтому для $x\leqslant\frac{1}{2}$ график данной функции совпадает с графиком функции $1-2x$ (рис. 15, *а*). Если же $x\geqslant\frac{1}{2}$, то $2x-1\geqslant 0$, а значит $|2x-1|=2x-1$, и поэтому для



а) $y=|x|,\ x\geqslant 0$ б) $y=|x|,\ x<0$ в) $y=|x|,\ x\in R$

Рис. 14

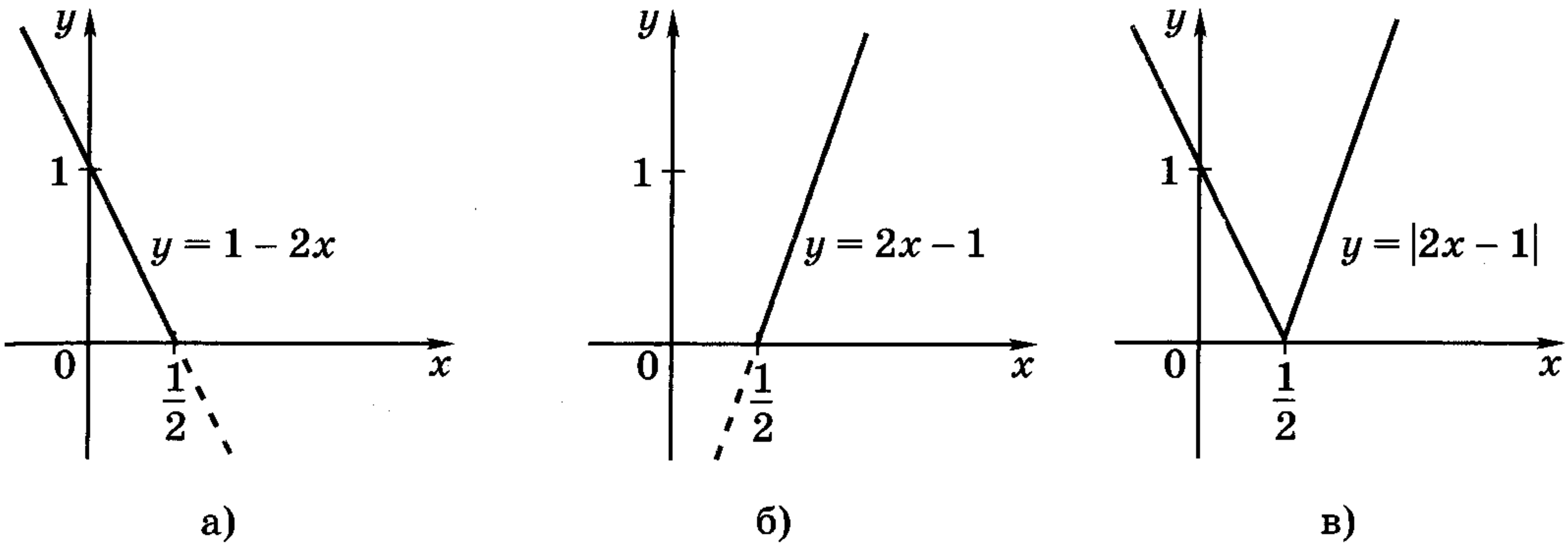


Рис. 15

$x \geqslant \frac{1}{2}$ график данной функции совпадает с графиком функции $2x-1$ (рис. 15, *б*). Итак,

$$|2x-1|=\begin{cases}1-2x, & \text{если } x \leqslant \frac{1}{2},\\ 2x-1, & \text{если } x > \frac{1}{2}.\end{cases}$$

График этой кусочно заданной функции изображен на рисунке 15, *в*.

Пример 2.

Построим график функции $f(x)=|1-2x|-|x-2|$.

Решение. Найдем точки, в которых обращается в нуль каждое слагаемое: $1-2x=0$ при $x=\frac{1}{2}$, $x-2=0$ при $x=2$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$, $(2; +\infty)$. Исследуем их.

На промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$:

$$1-2x \geqslant 0 \text{ и } |1-2x|=1-2x;$$
$$x-2<0, \text{ и поэтому } |x-2|=2-x,$$

т. е.

$$f(x)=1-2x-(2-x)=-x-1.$$

На промежутке $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$:

$$1-2x<0 \text{ и } |1-2x|=2x-1;$$
$$x-2 \leqslant 0, \text{ и поэтому } |x-2|=2-x,$$

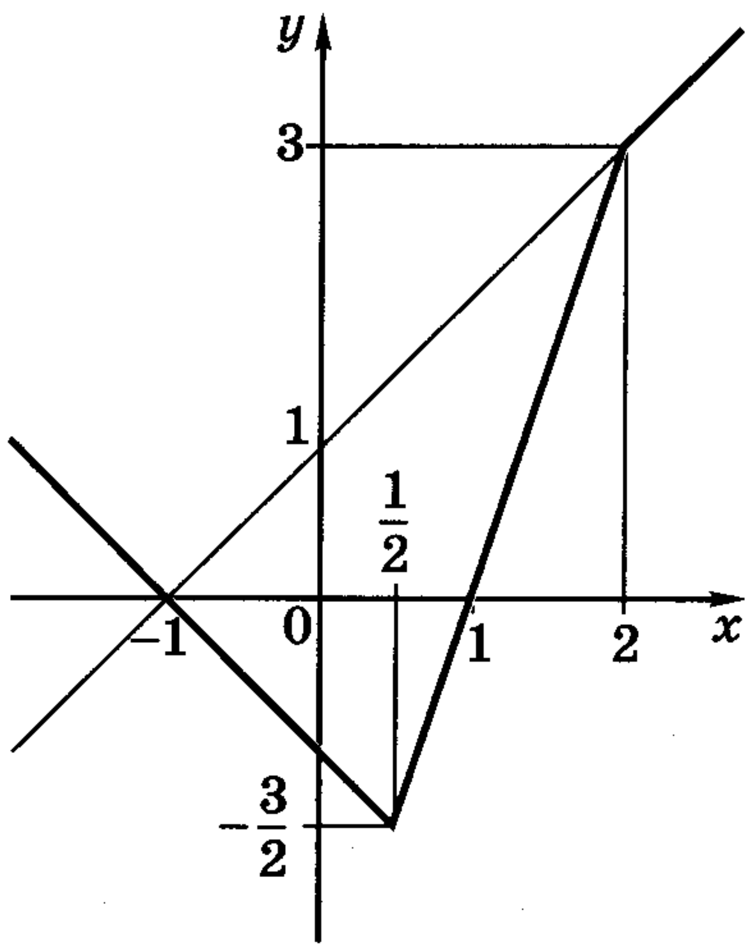


Рис. 16

т. е.

$$f(x) = 2x - 1 - (2 - x) = 3x - 3.$$

На промежутке $(2;\ +\infty)$:

$$1 - 2x < 0 \text{ и } |1 - 2x| = 2x - 1;$$

$$x - 2 > 0, \text{ и поэтому } |x - 2| = x - 2,$$

т. е.

$$f(x) = 2x - 1 - (x - 2) = x + 1.$$

Окончательно получаем

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ если } x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right], \\ 3x - 3, \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2};\ 2\right], \\ x + 1, \text{ если } x \in (2;\ +\infty). \end{cases}$$

Теперь понятно, что график функции состоит из частей трех прямых и имеет вид, изображенный на рисунке 16.

УПРАЖНЕНИЯ

44*. Докажите неравенство $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

45. Запишите выражение без знака модуля и постройте график функции:

а) $|x - 4|$;
б) $|x - 2| + |2x - 1|$;
в) $|1 - 2x| + |2x + 3|$;
г) $|2x - 3| + |1 - x|$;
д) $|1 + x| - |1 - 2x| + |3 - x|$;
е) $|1 - |x||$;
ж) $|2 - |x - 1||$.

46*. Запишите выражение без знака модуля и постройте график функции $f(x) = |1 + 2x| - |x - 3|$.
Ответьте на следующие вопросы:
а) Существуют ли значения x, при которых $f(x) = 0$?
б) Имеет ли точки пересечения график функции f с прямой $y = -5$? $y = -3{,}5$? $y = 4$?
в) Найдите промежутки, на которых $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.
г) Для каких значений α прямая $y = \alpha$ имеет хотя бы одну точку пересечения с графиком данной функции?

47*. Ответьте на вопросы упражнения 46 для функции:

а) $f(x) = |2 - 3x| - |3 - 2x|$;
б) $f(x) = |2x - 3| + |x - 2| - |x|$.

48. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $y-3|x-1|-2\leqslant 0$; в) $y-\sqrt{(x+4)^2}\leqslant 0$; д) $2|x|+|y|\leqslant 2$.
б) $|y+1|=4x-2$; г) $|y+1|-2|x-3|>0$;

49. Существует ли среди значений $f(x)$ самое большое значение M? самое маленькое значение m?

а) $f(x)=x+|x+2|+|2x-1|$; в) $f(x)=|3x+1|-|2-x|$;
б) $f(x)=-|1-2x|+|x-1|$; г) $f(x)=|1-3x|+|3-2x|$.

9. ФУНКЦИЯ $[x]$

Для любого действительного числа x символом $[x]$ обозначают *целую часть числа* x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Пример.

Вычислим $[x]$, если x принимает значения: 2,3; 0,15; 4; 10,9; $-0{,}3$; $-2{,}5$; -5; $-8{,}01$.

Решение. Из определения $[x]$ следует, что

$$[2{,}3]=2;\ [0{,}15]=0;$$
$$[4]=4;\ [10{,}9]=10;$$
$$[-0{,}3]=-1;\ [-2{,}5]=-3;$$
$$[-5]=-5;\ [-8{,}01]=-9.$$

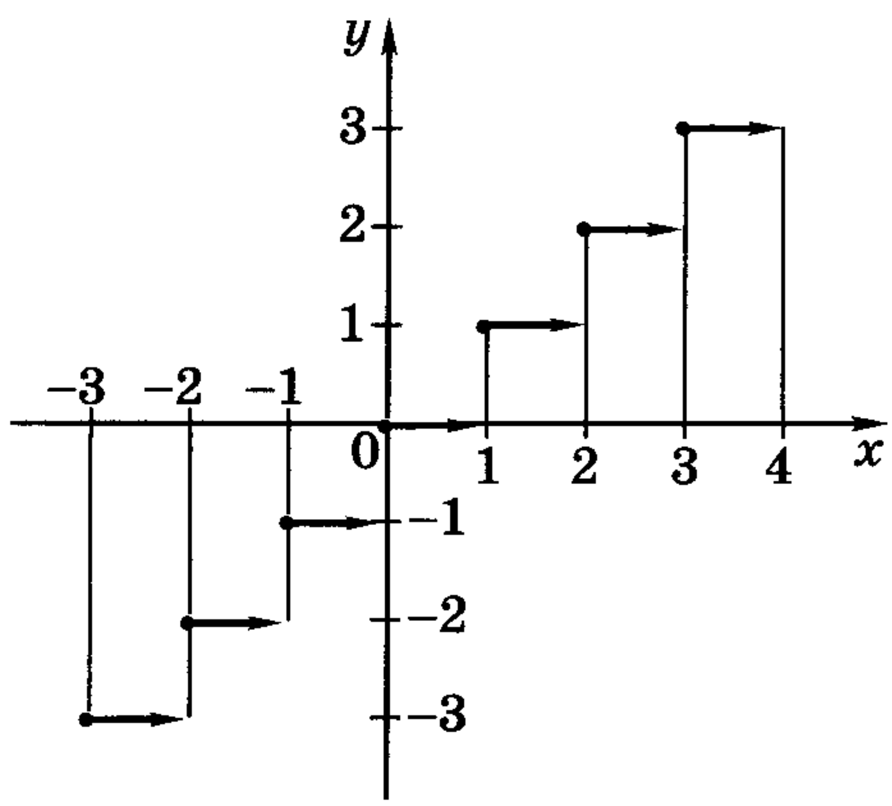


Рис. 17

Если n — целое число, то $[n]=n$.

Функцию, ставящую каждому x в соответствие число $[x]$, называют целой частью числа x и обозначают символом $[x]$. Она определена для всех $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Множеством значений этой функции является множество целых чисел. График функции $[x]$ изображен на рисунке 17. Стрелки означают, что правые концы этих отрезков не принадлежат графику, а левые концы принадлежат — они выделены точками.

УПРАЖНЕНИЯ

50. Найдите $[x]$, если x принимает значения: 0,25; $-0{,}31$; $3\frac{1}{9}$; 5; $-4\frac{8}{9}$; -7; $-12{,}04$.

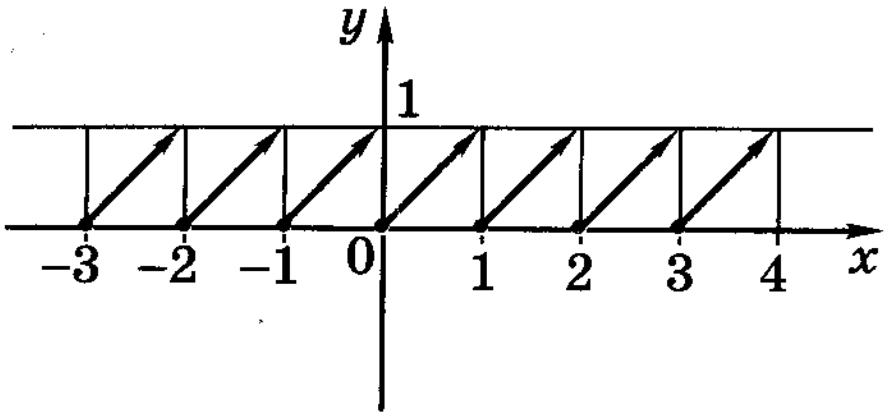


Рис. 18

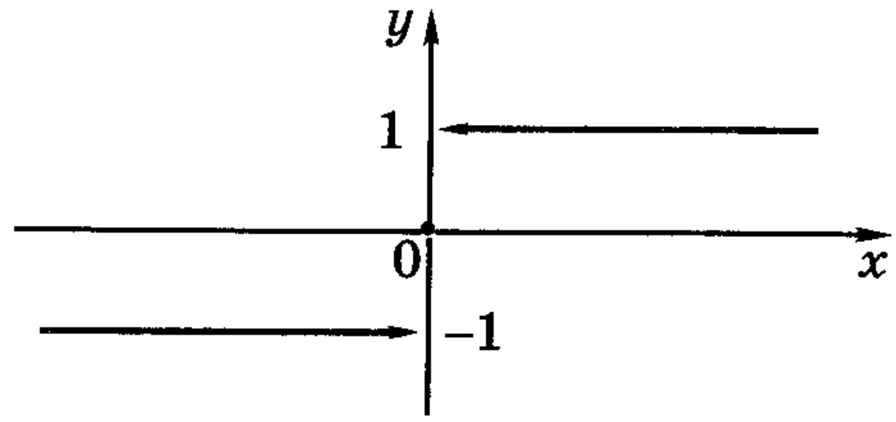


Рис. 19

10. ФУНКЦИЯ $\{x\}$

Для любого действительного числа x символом $\{x\}$ обозначают *дробную часть числа* x. Если $[x]$ — целая часть числа x, то полагают:

$$\{x\} = x - [x].$$

Пример.

Вычислим $\{x\}$, если x принимает значения:

$$5{,}47;\ 4\ \frac{1}{9};\ 0{,}23;\ 5;\ -7{,}29;\ -3\ \frac{4}{11};\ -6.$$

Решение. Из определения $\{x\}$ следует, что

$$\{5{,}47\} = 0{,}47;\ \left\{4\ \frac{1}{9}\right\} = \frac{1}{9};\ \{0{,}23\} = 0{,}23;\ \{5\} = 0;$$

$$\{-7{,}29\} = -7{,}29 - [-7{,}29] = -7{,}29 + 8 = 0{,}71;$$

$$\left\{-3\ \frac{4}{11}\right\} = -3\ \frac{4}{11} - \left[-3\ \frac{4}{11}\right] = -3\ \frac{4}{11} + 4 = \frac{7}{11};\ \{-6\} = 0.$$

Если n — целое число, то $\{n\} = 0$.

Таким образом, имеем функцию, которая ставит в соответствие каждому $x \in (-\infty;\ +\infty)$ дробную часть этого числа.

Функция $\{x\}$ определена для всех $x \in (-\infty;\ +\infty)$, а множеством ее значений является промежуток $[0;\ 1)$. Ее график изображен на рисунке 18. Смысл стрелок и выделенных точек такой же, как на графике функции $[x]$[1].

УПРАЖНЕНИЯ

51. Найдите $\{x\}$, если x принимает значения: $0{,}39;\ -0{,}43;\ -4\ \frac{1}{7};\ 5\ \frac{4}{9};\ -3;\ 7;\ 1{,}41;\ -2{,}97$.

---

[1] Вспомним легенду о царе Сизифе, который за обман бога смерти Таната и властителя душ умерших Аида был осужден вкатывать громадный камень на высокую крутую гору. Как только он добирался до вершины горы, камень срывался и снова оказывался внизу. График на рисунке 18 очень напоминает график работы Сизифа!

11. ФУНКЦИЯ $\operatorname{sgn} x$

Символ $\operatorname{sgn} x$ читается: сигнум икс, обозначает знак числа x (от латинского слова signum — знак). Этим символом обозначается и функция, которая каждому числу $x \in (-\infty; +\infty)$ ставит в соответствие число 1, если $x > 0$, число -1, если $x < 0$, и число 0, если $x = 0$, т. е.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $\operatorname{sgn} x$ определена для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Множество ее значений состоит из трех чисел: -1, 0, 1.

Например: $\operatorname{sgn}(1000) = 1$, $\operatorname{sgn}(-3451) = -1$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

График этой функции представлен на рисунке 19.

Пример.

Вычислим $\operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)$.

Решение. Функция $x^2 - 4x + 3$ принимает положительные значения при $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, отрицательные — при $x \in (1; 3)$ и обращается в нуль при $x = 1$ и $x = 3$. Поэтому

$$\operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in (1; 3), \\ 0, & \text{если } x = 1 \text{ или } x = 3, \\ 1, & \text{если } x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty). \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

52. Вычислите:

а) $\operatorname{sgn}\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)$, $x \neq 2$;

б) $\operatorname{sgn}(15x^2 - 13x + 2)$;

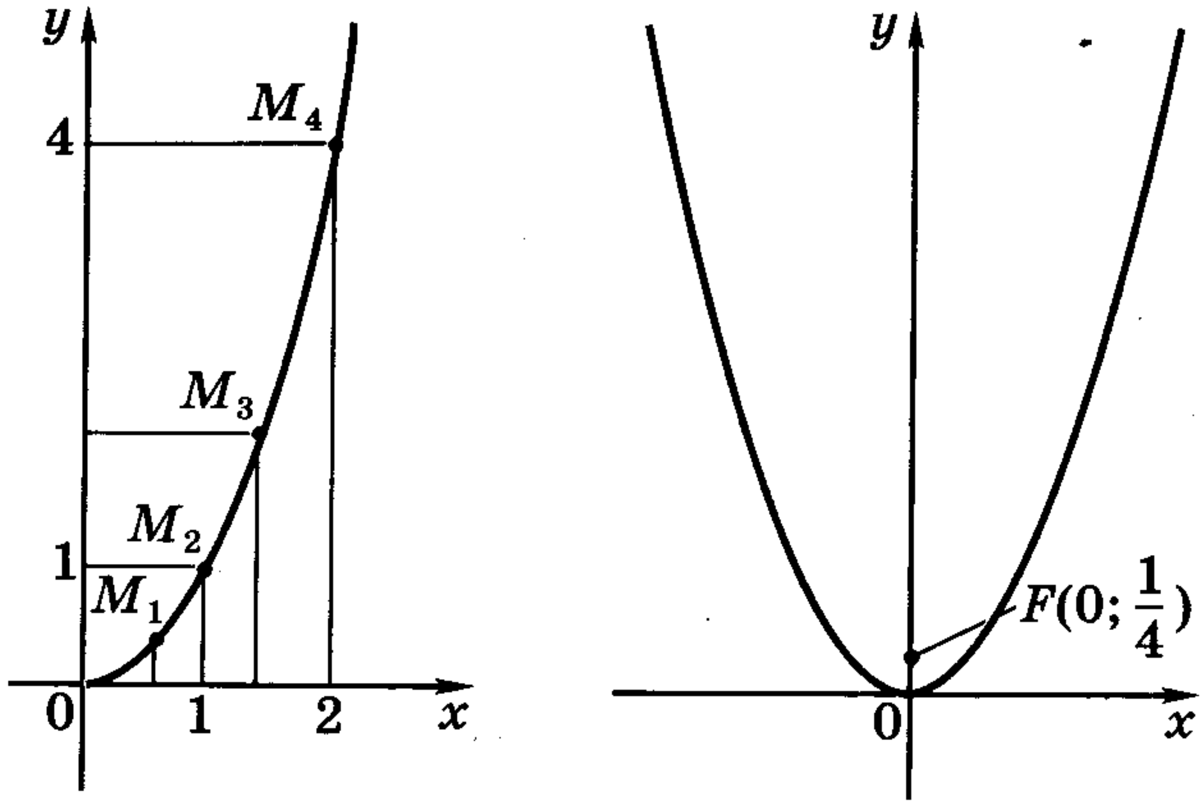
в) $\operatorname{sgn}(x^3 - 2x^2 - x + 2)$;

г) $\operatorname{sgn}(2x^3 + 15x^2 + 36x + 27)$.

§ 3. ФУНКЦИИ x^2, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{k}{x}$ И ИХ ГРАФИКИ

12. ФУНКЦИЯ x^2

Областью определения функции x^2 является вся числовая ось $x \in (-\infty; +\infty)$. Поскольку все значения функции x^2 — неотрицательные числа, т. е. принадлежат лучу $[0; +\infty)$, то все точки графика функции x^2, для которых $x \neq 0$, находятся в верхней полуплоскости. Если же $x = 0$, то $x^2 = 0$ и поэтому график функции проходит через начало координат $O(0; 0)$. Далее, из равенства $x^2 = (-x)^2$ вытекает, что значения функции x^2 в точках x и $-x$ одинаковы, следовательно, точки $A(x; x^2)$ и $B(-x; (-x)^2)$ графика расположены симметрично относительно оси Oy, а поэтому и весь график будет сим-



а) б)

Рис. 20

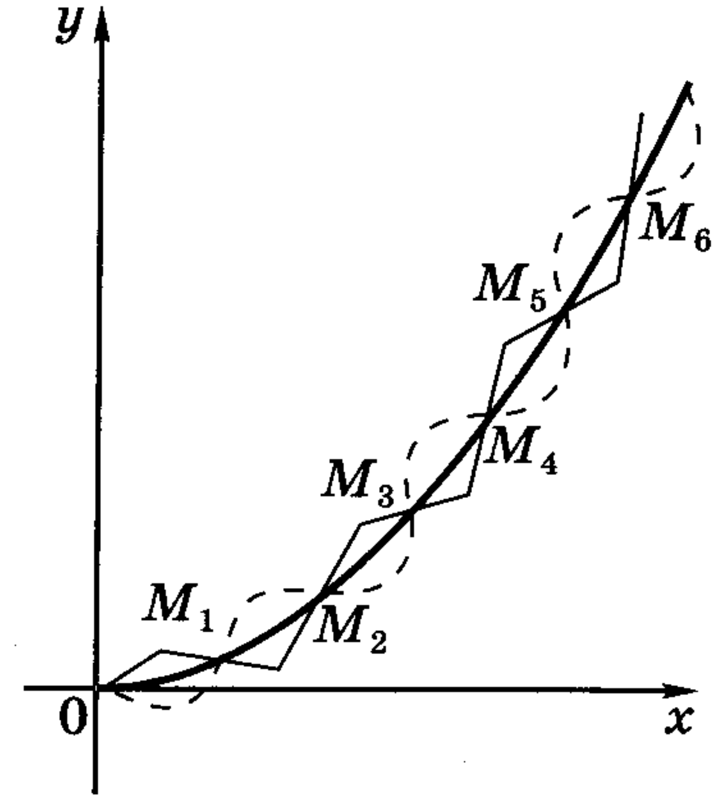


Рис. 21

метричен относительно этой оси. Отсюда следует, что график функции x^2 достаточно построить только для неотрицательных значений x. Для отрицательных значений x график построим с помощью симметрии относительно оси Oy. Для более точного выяснения вида искомого графика найдем координаты нескольких точек, принадлежащих ему.

Составим таблицу значений функции x^2:

x	0	0,5	1	1,5	2
x^2	0	0,25	1	2,25	4

Мы получили точки $O(0;\ 0)$, $M_1(0{,}5;\ 0{,}25)$, $M_2(1;\ 1)$, $M_3(1{,}5;\ 2{,}25)$, $M_4(2;\ 4)$, которые принадлежат искомому графику. Нанесем эти точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 20, *а*). С помощью симметрии относительно оси Oy мы получим кривую, изображенную на рисунке 20, *б*. Эта кривая и является графиком функции x^2.

График функции x^2 называется *параболой*, точка $O(0;\ 0)$ — *вершиной* параболы, ось Oy — *осью* параболы, а равенство $y = x^2$ — *уравнением* параболы.

Замечание.

Через точки O, M_1, M_2, M_3 и M_4 (рис. 21) можно провести бесконечное множество кривых (на рисунке 21 изображены три из них). Заранее сказать, какая из этих кривых является графиком заданной функции, мы не можем, однако ниже с помощью дополнительного исследования убедимся, что мы правильно «угадали» вид графика (рис. 20, *б*). Это замечание относится к любому другому графику, который строится по отдельным точкам, ему принадлежащим.

Парабола обладает рядом замечательных свойств. Точка $F\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$ (см. рис. 20, *б*) называется *фокусом* (от латинского слова focus — очаг). При вращении параболы вокруг оси симметрии получается поверхность, называемая *параболоидом вращения* (рис. 22). Если в фокус такого зеркального параболоида поместить источник света, то лучи света, отразившись от параболоида, пойдут пучком, параллельным его оси симметрии (рис. 23). Этим свойством широко пользуются при изготовлении различных прожекторов. Аналогичным образом параболические зеркала применяют в зеркальных телескопах: свет далекой звезды, идущий параллельным пучком, упав на зеркало телескопа, собирается в фокусе F (рис. 24).

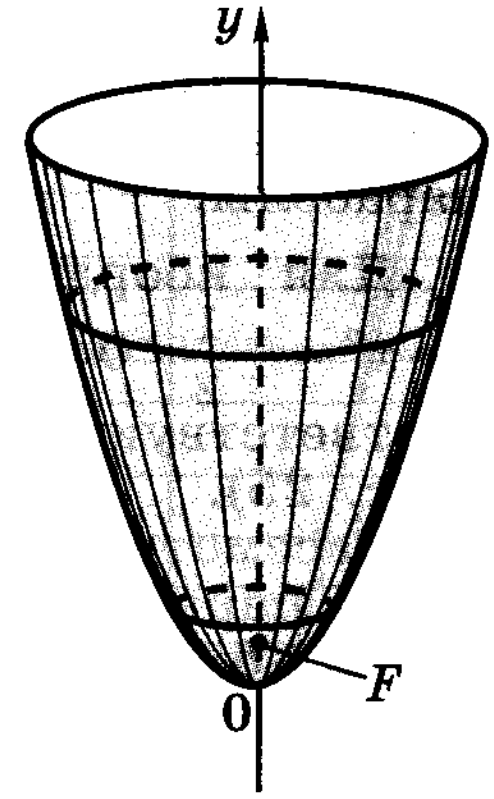


Рис. 22

Парабола $y=x^2$ делит точки плоскости на три множества.

I. Точки плоскости, лежащие на параболе $y=x^2$. Координаты $(x;\ y)$ этих точек удовлетворяют уравнению $y=x^2$.

II. Точки плоскости, лежащие выше соответствующих точек параболы. Координаты $(x;\ y)$ этих точек удовлетворяют неравенству $y>x^2$.

III. Точки плоскости, лежащие ниже соответствующих точек параболы. Координаты $(x;\ y)$ этих точек удовлетворяют неравенству $y<x^2$.

Пример 1.

Выясним, как расположены на плоскости относительно параболы $y=x^2$ точки $A(2;\ 4)$, $B(-1;\ 2)$, $C\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Подставляем координаты точек A, B и C в выражение $y-x^2$.

Для координат точки A выполняется равенство $y-x^2=0$, т. е. точка лежит на заданной параболе.

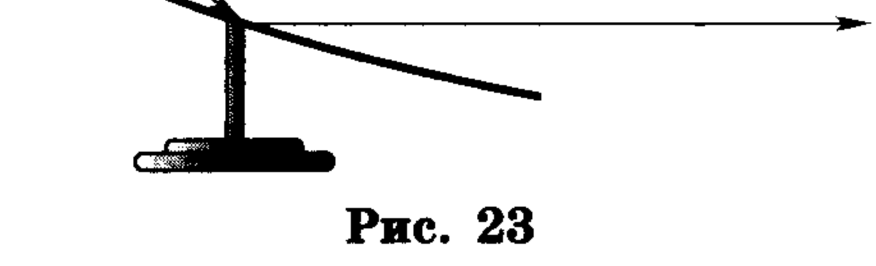


Рис. 23

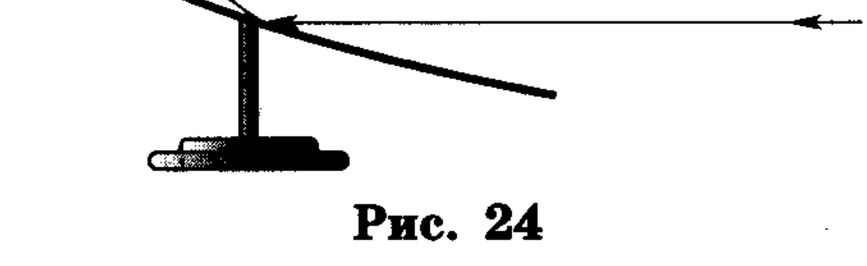


Рис. 24

Для координат точки B получаем $y - x^2 = 1 > 0$, следовательно, точка B лежит выше соответствующей точки параболы.

Для координат точки C имеем $y - x^2 = -\frac{1}{2} < 0$ — точка C лежит ниже соответствующей точки параболы (рис. 25).

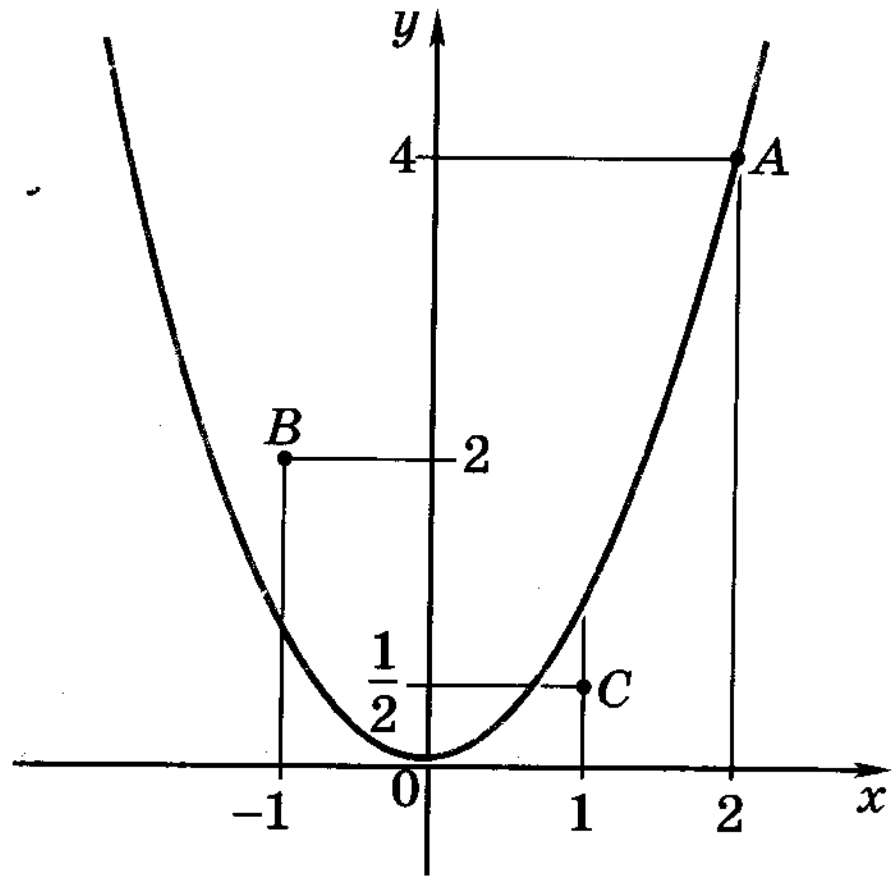


Рис. 25

Рассмотрим взаимное расположение параболы $y = x^2$ и прямой $y = kx + b$. В зависимости от значений k и b они могут иметь либо две точки пересечения, либо одну, либо не иметь их совсем. Координаты точек пересечения являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = kx + b. \end{cases} \quad (1)$$

Пример 2.

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой: а) $y = 4x - 3$; б) $y = x - 2$; в) $y = 4x - 4$.

Решение. Для решения примера необязательно строить параболу и прямую. Достаточно решить систему уравнений (1).

а) Решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4x - 3. \end{cases}$ Имеем $x^2 - 4x + 3 = 0$. Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Теперь $y_1 = 1$, $y_2 = 9$. Таким образом, в этом случае есть две точки пересечения: $A(1;\ 1)$ и $B(3;\ 9)$ (рис. 26, *а*).

б) Система уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x - 2 \end{cases}$ сводится к уравнению $x^2 - x + 2 = 0$, которое не имеет решений. Следовательно, в этом случае парабола и прямая не пересекаются (рис. 26, *б*).

в) Система уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4x - 4 \end{cases}$ имеет единственное решение $x = 2$, и поэтому парабола и прямая имеют единственную общую точку $A(2;\ 4)$ (рис. 26, *в*).

УПРАЖНЕНИЯ

53. Какие из точек $A(2;\ 1)$, $B\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$, $D(2;\ 4)$ лежат на параболе $y = x^2$? Как расположены по отношению к точкам параболы те из заданных точек, которые на ней не лежат?

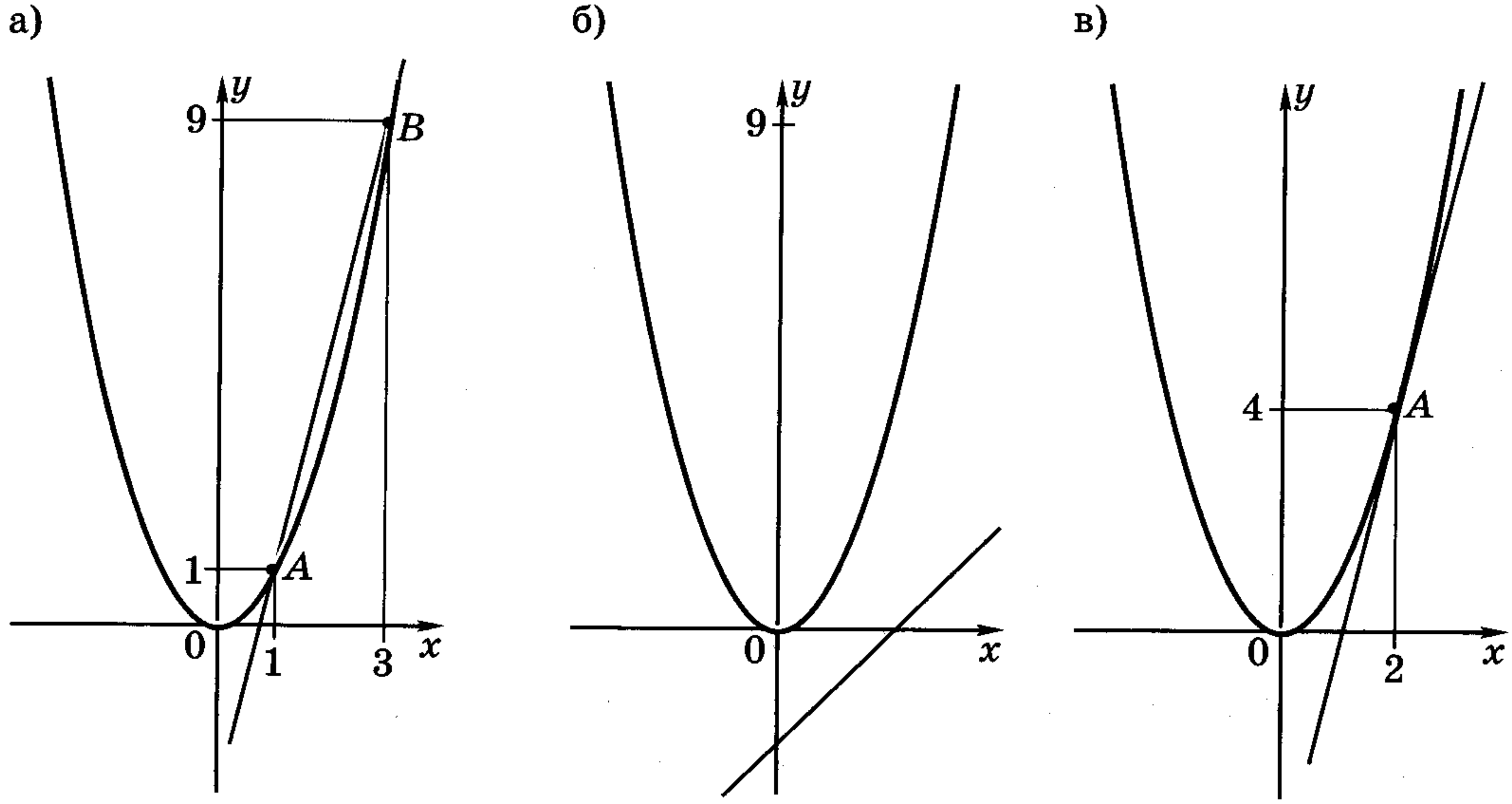


Рис. 26

54. Пересекаются ли парабола $y=x^2$ и прямая:

а) $y=2x+8$; б) $y=2x-3$; в) $y=-x-0{,}25$; г) $y=-x+4$?

Если пересекаются, то найдите координаты точек пересечения.

55. При каких значениях k прямая $y=kx-6$ и парабола $y=x^2$:
а) имеют две точки пересечения;
б) имеют одну точку пересечения;
в) не имеют точки пересечения?

56. На параболе $y=x^2$ выбрана точка $M(2;\ 4)$ и через нее проведена секущая с угловым коэффициентом k. Выразите через k абсциссу второй точки пересечения параболы и секущей. При каком значении k обе точки пересечения сольются, т. е. прямая коснется параболы?

57. Выберите самостоятельно точку, лежащую на параболе $y=x^2$, и ответьте на вопросы упражнения 56.

58. При каких значениях k парабола $y=x^2$ и прямая $y=kx-3$ имеют общую точку, абсцисса x которой равна:

а) $x=4$; б) $x=-1$; в) $x=3$; г) $x=\sqrt{3}$?

Существуют ли еще и другие точки пересечения?

59. При каком соотношении между k и b прямая $y=kx+b$ и парабола $y=x^2$ имеют единственную точку пересечения?

1) $k^2+b=0$; 2) $k^2-b=0$; 3) $k^2+4b=0$; 4) $k^2-4b=0$.

13. ФУНКЦИИ $\frac{1}{x}$ И $\frac{k}{x}$

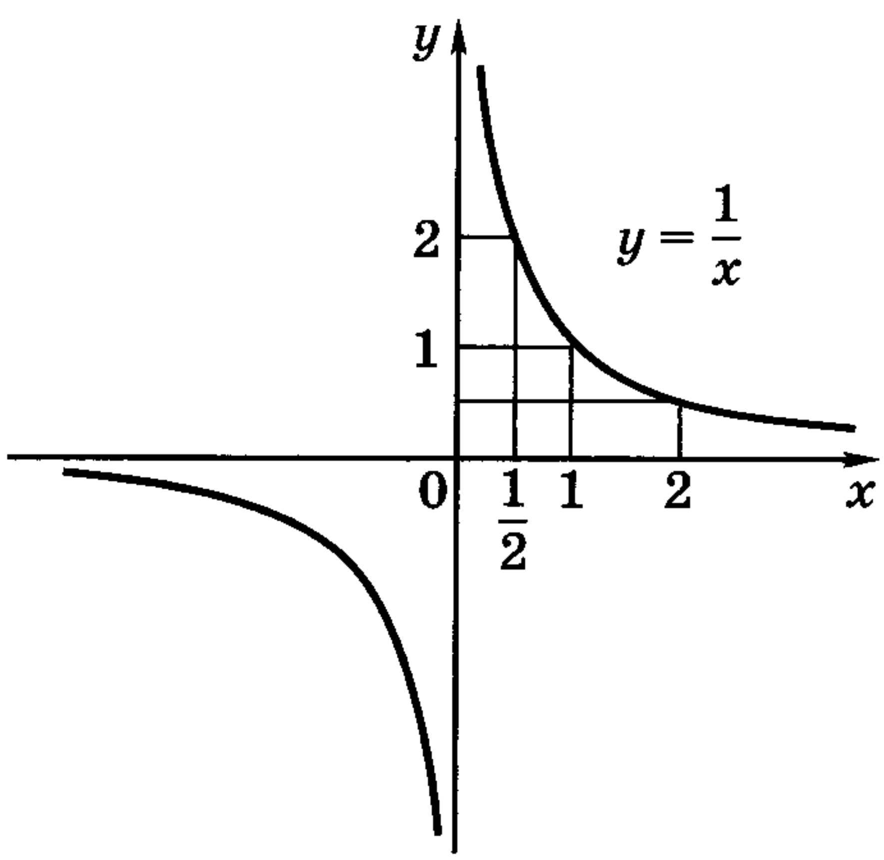
В 8 классе изучалась обратная пропорциональная зависимость между величинами x и y, задаваемая соотношением

$$y=\frac{k}{x},\ x\neq 0.$$

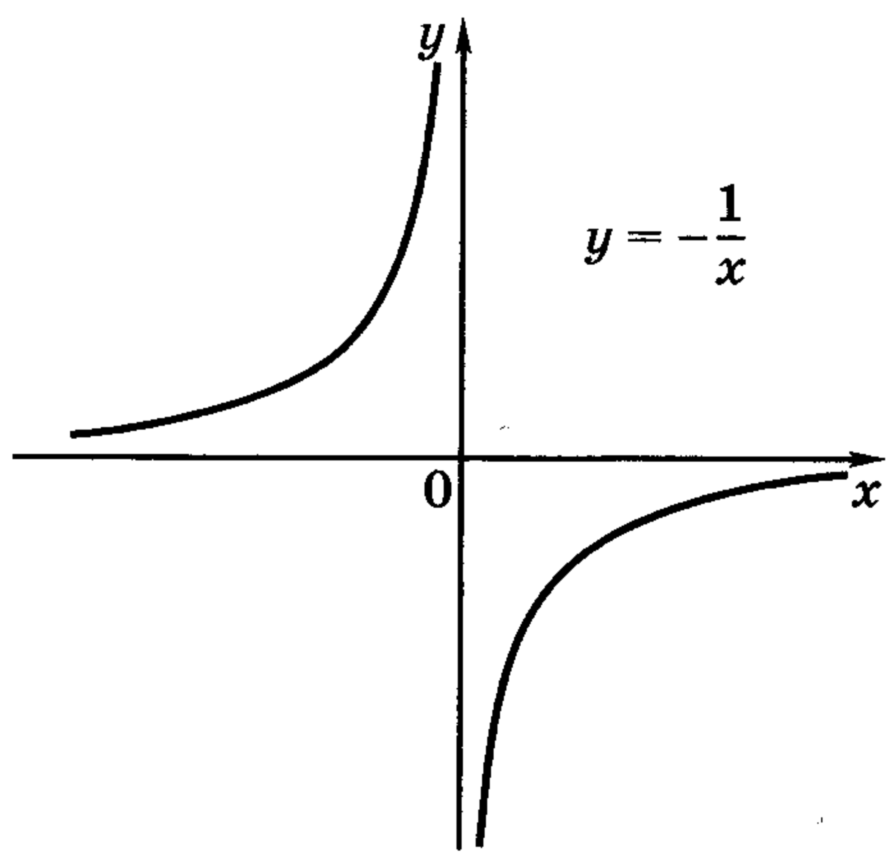
Там же был построен график обратной пропорциональной зависимости, т. е. график функции $\frac{k}{x}$, который при $k=1$ и $k=-1$ имеет вид, изображенный на рисунке 27, *а*, *б*.

Напомним, что график функции $\frac{k}{x}$ называют *гиперболой*, а точку $O(0;\ 0)$ — *центром гиперболы*. Ось Oy называют *вертикальной асимптотой*. К ней неограниченно приближается график функции $\frac{k}{x}$, когда x неограниченно приближается к значению $x=0$. Ось Ox называют *горизонтальной асимптотой*. К этой прямой приближается неограниченно график функции $\frac{k}{x}$, когда значения x становятся неограниченно большими по абсолютной величине.

Уравнение $y=\frac{k}{x}$ называется *уравнением гиперболы*. Графики функций $\frac{k}{x}$ при различных значениях $k>1$ представлены на рисунке 28. Функция $\frac{k}{x}$ зависит от параметра k. Для того чтобы определить его значение, достаточно знать координаты одной точки, лежащей на ее графике.



а)



б)

Рис. 27

Пример 1.

Определим, при каком значении k гипербола $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Подставляем координаты точки A в уравнение гиперболы и получаем $\frac{1}{3}=-\frac{k}{2}$. Отсюда $k=-\frac{2}{3}$ и гипербола $y=-\frac{2}{3x}$ проходит через точку A.

Рассмотрим на плоскости гиперболу $y=\frac{k}{x}$ и прямую $y=ax+b$. В зависимости от величин k, a и b число их общих точек будет изменяться от нуля до двух. Для их нахождения достаточно решить систему уравнений $\begin{cases} y=\frac{k}{x}, \\ y=ax+b. \end{cases}$

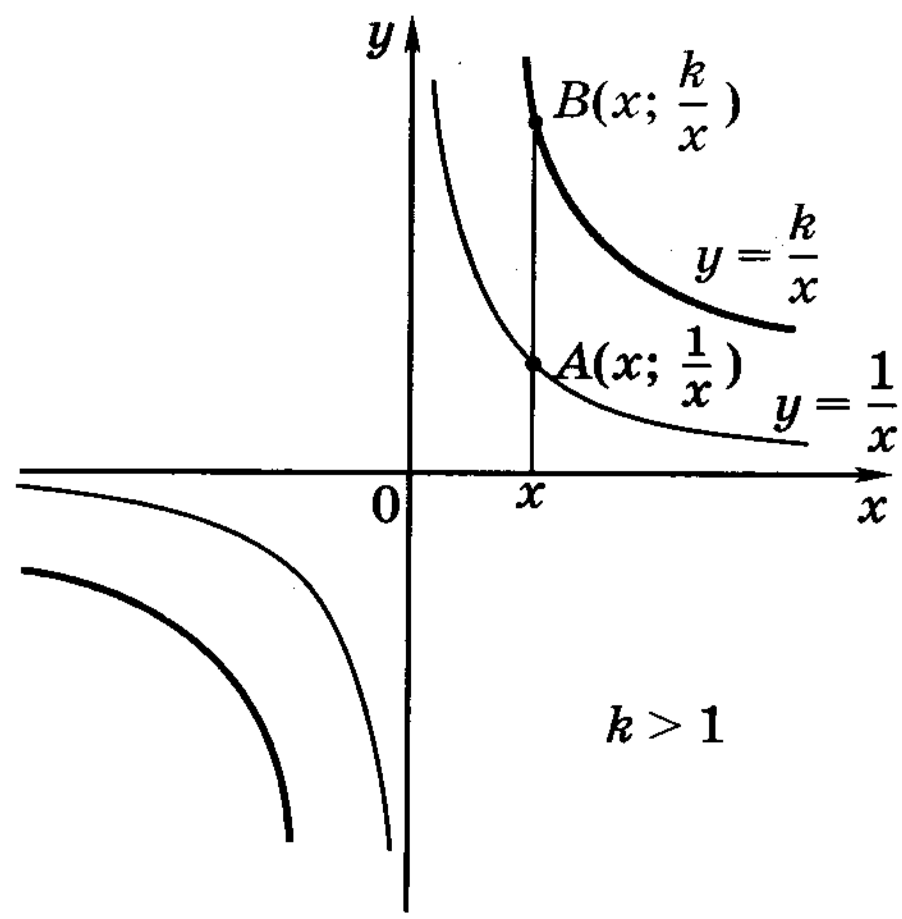


Рис. 28

Пример 2.

Выясним, при каких значениях a гипербола $y=\frac{2}{x}$ и прямая $y=ax-1$, $a\neq 0$:

а) имеют две точки пересечения;

б) имеют одну точку пересечения;

в) не имеют точки пересечения.

Решение. Решим систему уравнений $\begin{cases} y=\frac{2}{x}, \\ y=ax-1. \end{cases}$

Отсюда $ax^2-x-2=0$. Дискриминант $D=1+8a$.

а) Если $D>0$, т. е. $a\in\left(-\frac{1}{8};\ 0\right)\cup(0;\ +\infty)$, то $x_1=\frac{1-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{D}}{2a}$. Теперь из уравнения $y=\frac{2}{x}$ находим y_1 и y_2: $y_1=\frac{4a}{1-\sqrt{D}}$, $y_2=\frac{4a}{1+\sqrt{D}}$. В этом случае исходная система имеет два решения и, следовательно, заданные гипербола и прямая (рис. 29, *а*) имеют две точки пересечения: $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.

б) Единственное решение системы, а следовательно, и единственная точка пересечения гиперболы и прямой (рис. 29, *б*), будет в том случае, когда $D=0$, т. е. $a=-\frac{1}{8}$. Тогда $x_1=x_2=-4$, $y_1=y_2=-\frac{1}{2}$ и точка $C\left(-4;\ -\frac{1}{2}\right)$ искомая.

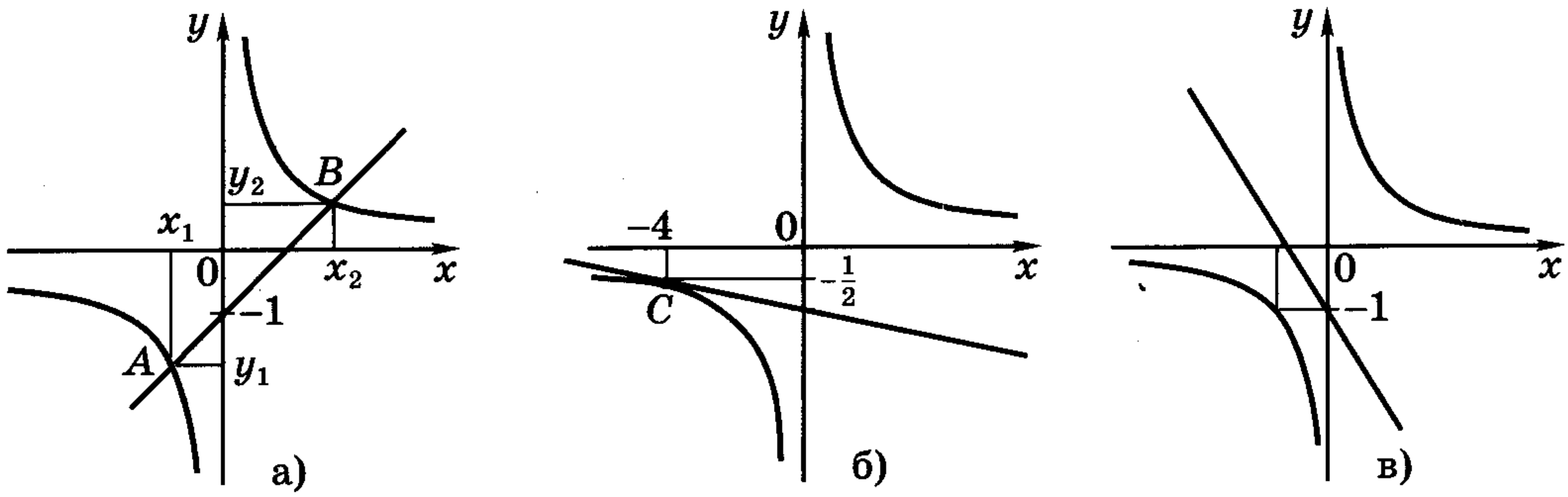


Рис. 29

в) В том случае, когда $D<0$, т. е. $a<-\frac{1}{8}$, система не имеет решения, следовательно, заданные гипербола и прямая не пересекаются (рис. 29, *в*).

УПРАЖНЕНИЯ

60. Постройте на одном чертеже графики функций и сравните их взаимное расположение: а) $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{3x}$, $\frac{2}{x}$; б) $-\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{2x}$, $-\frac{3}{x}$.

61. Найдите значение k, если известно, что гипербола $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку: а) $A\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$; б) $B\left(-\frac{1}{3};\ -1\right)$; в) $C(2;\ 4)$; г) $D\left(3;\ -\frac{1}{4}\right)$.

62. Существуют ли общие точки у прямой $y=kx+b$ и гиперболы $y=\frac{2}{x}$? Если существуют, то найдите их координаты:

а) $k=1,\ b=1$;
б) $k=3{,}5,\ b=6$;
в) $k=2{,}5,\ b=4$;
г) $k=-5,\ b=5$;
д) $k=-1,\ b=4$;
е) k, b (значения k и b выберите самостоятельно).

63. Рассмотрите параболу $y=x^2$, гиперболу $y=\frac{1}{x}$ и прямую $y=kx+b$. Для каких значений k и b прямая $y=kx+b$ имеет ровно по одной точке пересечения как с гиперболой, так и с параболой?

1) $k=-4,\ b=1$; 2) $k=-3,\ b=4$; 3) $k=b=-4$; 4) $k=b=4$.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ

В математике существуют различные способы построения графиков функций. Ниже мы познакомимся с некоторыми из них. Один из способов построения графиков состоит в том, что если известен график функции f, то с помощью геометрических преобразований можно построить графики многих других функций, связанных с функцией f.

14. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС (СДВИГ ГРАФИКА)

Обозначим буквой Г известный нам график функции f. Тогда соотношение $y=f(x)$ будет уравнением кривой Г. Будем предполагать, что если $x \in D(f)$, то $x+a \in D(f)$. Сделаем параллельный перенос графика Г на вектор $\overline{a}=(a;\, b)$, т. е. каждую точку $A(x;\, y)$, где $y=f(x)$, графика Г переведем в точку $A_1(x+a;\, y+b)$ (рис. 30, *а*). При этом преобразовании график Г функции f перейдет в множество Γ_1. Выясним, графиком какой функции будет это множество. Рассмотрим точку $B_1(x;\, y)$, принадлежащую множеству Γ_1.

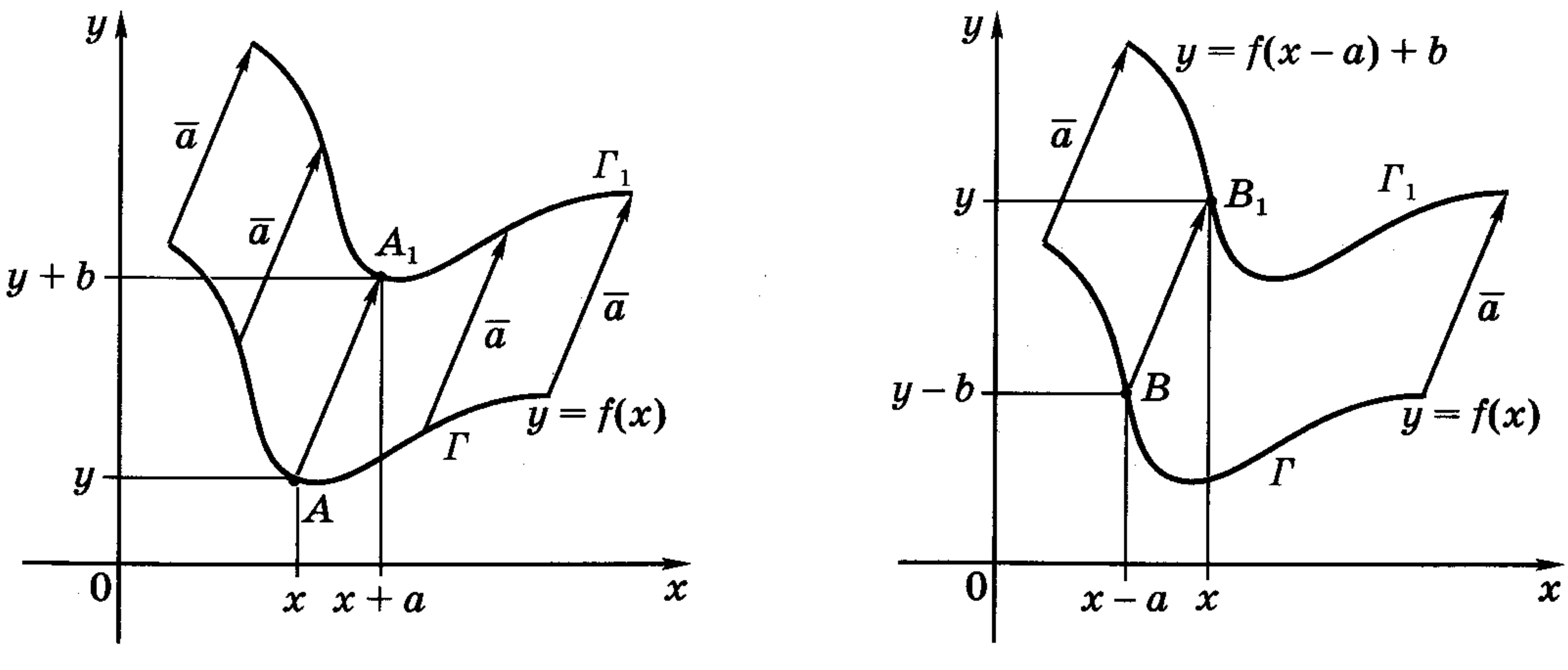
Очевидно, что при рассматриваемом параллельном переносе в эту точку перейдет точка $B(x-a;\, y-b)$, лежащая на графике Г функции f (рис. 30, *б*). Но тогда ее координаты связаны соотношением $(y-b)=f(x-a)$, или

$$y=f(x-a)+b. \qquad (1)$$

Таким образом, координаты точки B_1 удовлетворяют уравнению (1), а это означает, что множество Γ_1 является графиком функции (1). Итак, график функции $f(x-a)+b$ получается из графика функции $f(x)$ с помощью параллельного переноса на вектор $\overline{a}=(a;\, b)$. Другими словами, график функции $f(x-a)+b$ получается из графика функции $f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на a единиц и сдвигом вдоль оси Oy на b единиц (рис. 30, *б*). При этом:

если $a>0$, сдвиг по оси Ox вправо, а при $a<0$ — влево;

если $b>0$, то сдвиг по оси Oy происходит вверх, если же $b<0$ — вниз;



а) б)

Рис. 30

2*

если $a=0$, то сдвиг по оси Ox отсутствует и при $b\neq 0$ график функции сдвигается только по оси Oy;
если же $b=0$, но $a\neq 0$, то сдвиг происходит только по оси Ox.

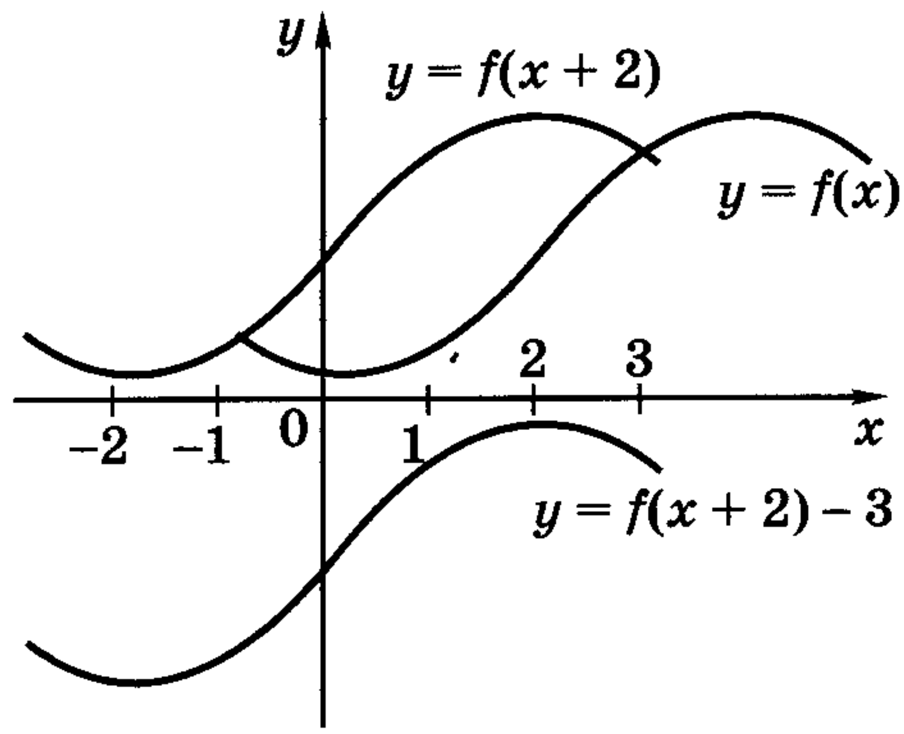


Рис. 31

Пример.

Задан график функции $f(x)$. Построим график функции $f(x+2)-3$.

Решение. В нашем случае $a=-2$, $b=-3$. Поэтому для получения графика функции $f(x+2)-3$ следует график функции $f(x)$ перенести влево на 2 единицы по оси Ox и на 3 единицы вниз по Oy (рис. 31).

УПРАЖНЕНИЯ

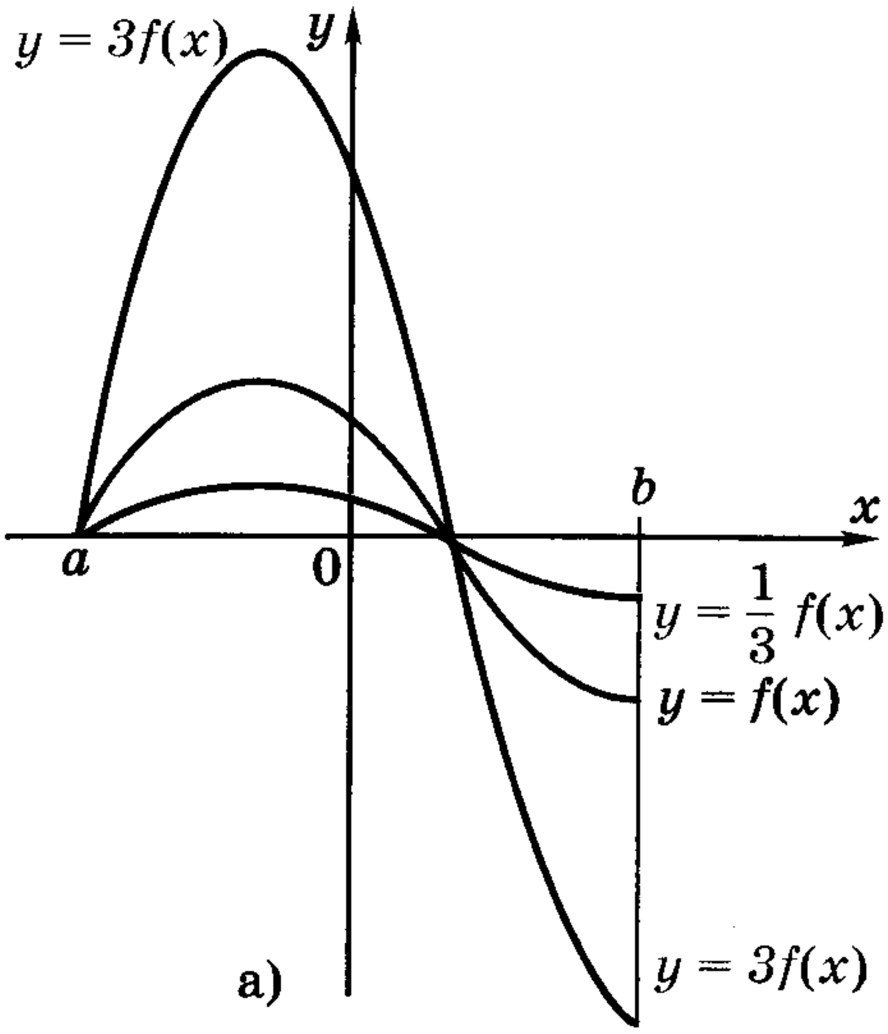
64. Исходя из графика функции x^2, постройте график функции:
а) $(x-2)^2+3$; б) $(x+1)^2-2$; в) $(x-3)^2-1$; г) $(x+2)^2+4$.

65. Исходя из графика функции $\frac{2}{x}$, постройте график функции:
а) $\frac{2}{x-1}$; б) $\frac{2}{x+3}$; в) $\frac{2}{x+1}-3$; г) $\frac{2}{x+4}+2$.

66. Исходя из графика функции $|x|$, постройте график функции:
а) $|x-2|-1$; б) $|x+1|-2$; в) $|x+3|+1$; г) $|x-2|+1$.

15. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ГРАФИКА ВДОЛЬ ОСИ Oy

Пусть задан график функции f, $x\in D(f)$. Построим график функции $k\cdot f$, $k\neq 1$. Уравнение $y=f(x)$ является уравнением графика функции f, а уравнение $y=kf(x)$ — уравнением графика функции $k\cdot f$. Сначала будем считать, что $k>0$. Тогда ордината каждой точки, лежащей на графике функции kf, получается умножением на k ординаты соответствующей точки, лежащей на графике функции f. Такое преобразование называется *растяжением вдоль оси Oy* с коэффициентом k. Иногда такое преобразование называют *растяжением от оси Ox* с коэффициентом k. При этом если $k>1$, то речь идет действительно о растяжении в k раз. Если же $0<k<1$, то вместо растяжения речь идет о сжатии в $\frac{1}{k}$ раз.



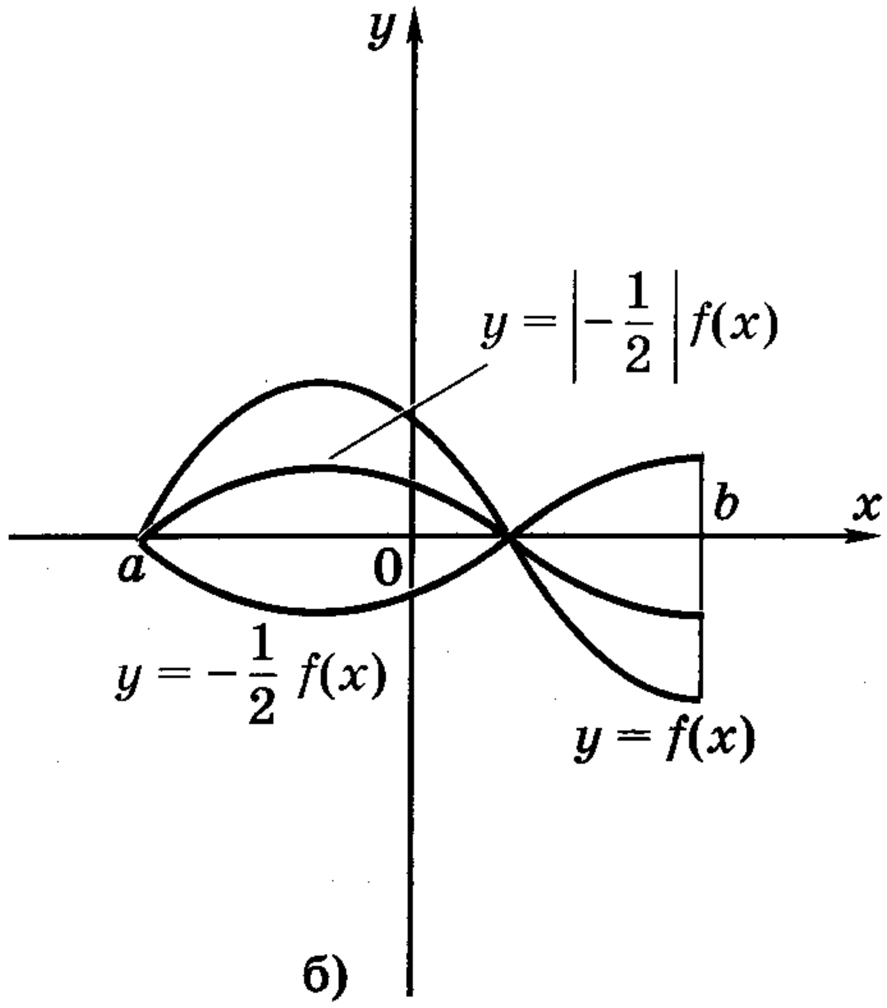


Рис. 32

Если $k < 0$, то $kf = -|k| \cdot f$ и поэтому по графику функции f нужно сначала получить график функции $|k| \cdot f$, а затем произвести симметрию относительно оси Ox.

Пример.

На рисунке 32, *а*, *б* изображен график функции $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (черным цветом). Построим график функции: а) $3f(x)$; б) $\frac{1}{3}f(x)$; в) $-\frac{1}{2}f(x)$.

Решение.

а) Ординаты точек графика функции $f(x)$ умножаем на 3 и получаем график функции $3f(x)$ (рис. 32, *а*).

б) Ординаты точек графика функции $f(x)$ умножаем на $\frac{1}{3}$ и получаем график функции $\frac{1}{3}f(x)$ (см. рис. 32, *а*).

в) Сначала ординаты точек графика функции $f(x)$ делим на 2 и получаем график функции $\left|-\frac{1}{2}\right| f(x)$, а затем производим симметрию относительно оси Ox (рис. 32, *б*).

УПРАЖНЕНИЯ

67. Рассмотрите график функции x^2, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, и постройте график функции:

а) $-\frac{1}{2}x^2$; б) $-2x^2$; в) $1{,}5x^2$; г) $\frac{1}{3}x^2$.

68. Рассмотрите график функции $|x|$ и постройте график функции:

а) $3|x|$; б) $-\frac{1}{3}|x|$; в) $\frac{1}{2}|x|$; г) $-2|x|$.

16. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ГРАФИКА ВДОЛЬ ОСИ Ox

Пусть по-прежнему известен график функции $f(x)$ и нужно построить график функции $f(\alpha x)$, $\alpha \neq 1$. При этом предполагаем, что если $x \in D(f)$, то $\alpha x \in D(f)$.

Пусть $\alpha > 0$. Сравним между собой значения функций $f(x)$ и $f(\alpha x)$ при $x = x_0$. Очевидно, что значение функции $f(\alpha x)$ в точке x_0: $f(\alpha x_0)$ — совпадает со значением функции $f(x)$, но в точке αx_0, которое также равно $f(\alpha x_0)$.

Таким образом, ордината точки графика функции $f(\alpha x)$ в точке x совпадает с ординатой точки графика функции $f(x)$ в точке αx. Это значит, что график функции $f(\alpha x)$ получается из графика функции $f(x)$ *сжатием с коэффициентом* α *вдоль оси* Ox. Иногда такое преобразование называют *растяжением от оси* Oy. При этом если $\alpha > 1$, то речь идет о сжатии в α раз, а при $0 < \alpha < 1$ речь идет о растяжении в $\frac{1}{\alpha}$ раз. При $\alpha < 0$ имеем $f(\alpha x) = f(-|\alpha| x)$. Отсюда следует, что график функции $f(\alpha x)$ в этом случае может быть получен из графика функции $f(x)$ сжатием вдоль оси Ox с коэффициентом $|\alpha|$ и последующей симметрией относительно оси Oy.

Пример.

На рисунках 33 и 34 изображены графики функций $f_1(x)$ и $f(x)$ (черным цветом). Построим график функции:

а) $f_1\left(\frac{1}{3}x\right)$; б) $f(2x)$; в) $f(-2x)$.

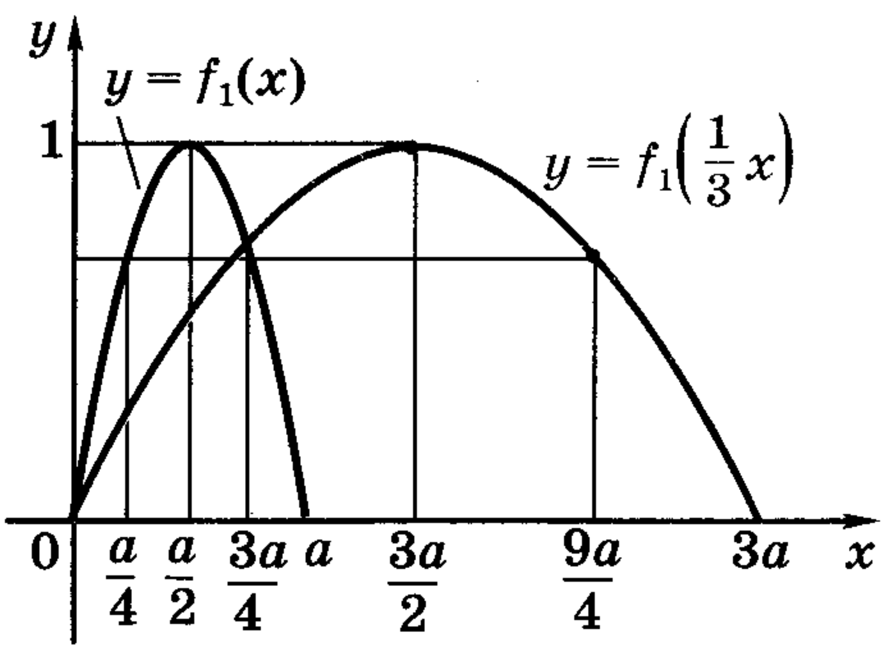


Рис. 33

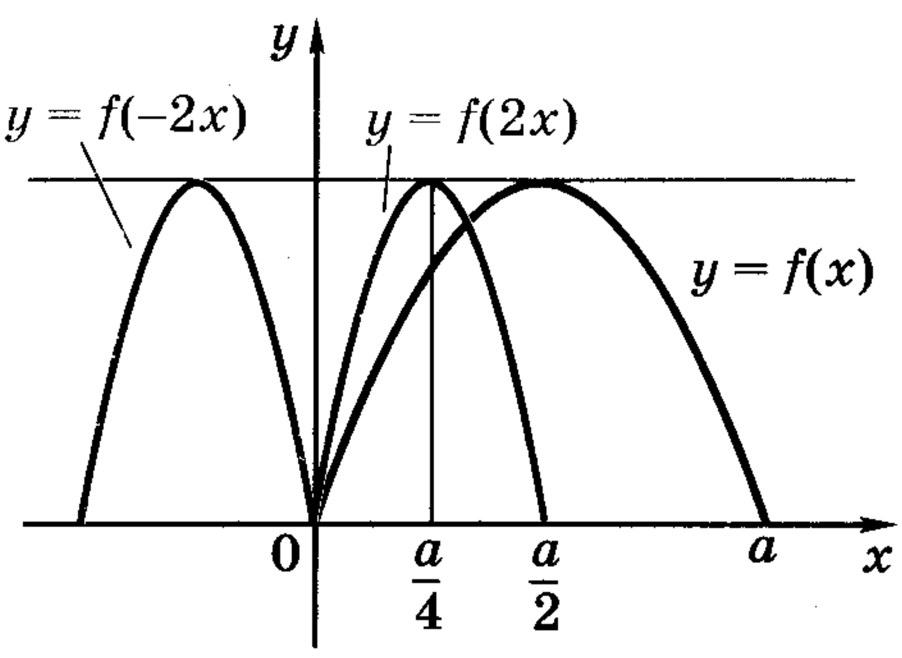


Рис. 34

Решение. а) Растягиваем график функции $f_1(x)$ в 3 раза вдоль оси Ox, т. е. значения, которые функция $f_1(x)$ принимает в точке x_0, функция $f_1\left(\frac{1}{3}x\right)$ будет принимать в точке $3x_0$ (рис. 33).

б) Сжимаем график функции $f(x)$ в 2 раза вдоль оси Ox, т. е. значения, которые функция $f(x)$ принимает в точке x_0, функция $f(2x)$ будет принимать в точке $\frac{x_0}{2}$ (рис. 34).

в) График функции $f(-2x)$ получается из графика функции $f(2x)$ с помощью симметрии относительно оси Oy (см. рис. 34).

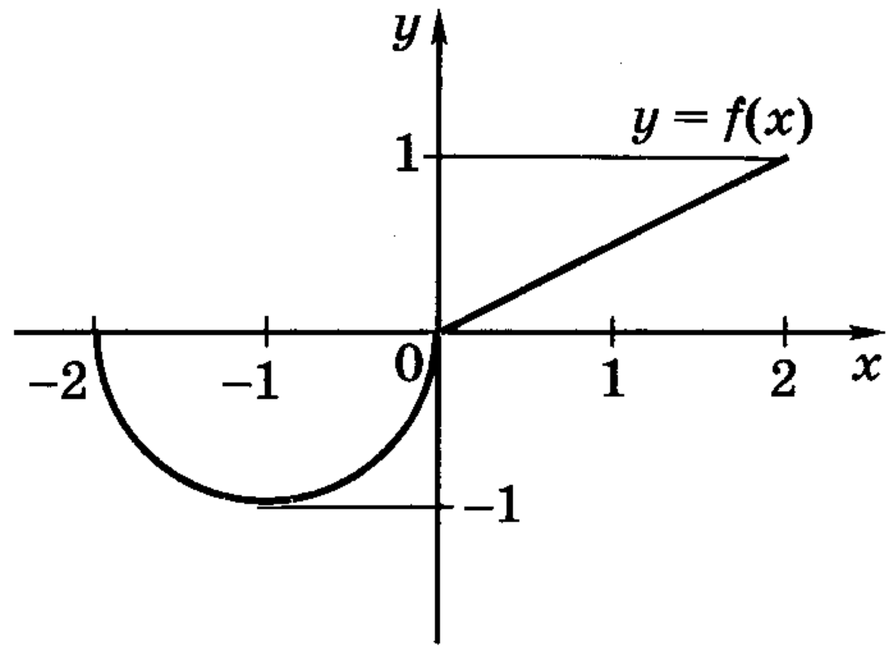


Рис. 35

УПРАЖНЕНИЯ

69. На рисунке 35 изображен график функции $f(x)$. Постройте график функции:

а) $f(x)+2$; г) $f(2x)$; е) $f(2x-1)$;

б) $f(x-3)$; д) $f\left(-\frac{1}{2}x\right)$; ж) $1+2f(3x-6)$.

в) $-2f(x)$;

17. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

В предыдущих разделах уже встречались конкретные функции, содержащие знак модуля. Покажем, как с помощью симметрии по известному графику функции $f(x)$ построить графики функций $|f(x)|$ и $f(|x|)$.

1. Пусть известен график функции f, $x \in D(f)$. Для построения графика функции $|f|$ воспользуемся определением абсолютной величины. Тогда

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ для тех } x, \text{ для которых } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) \text{ для тех } x, \text{ для которых } f(x) < 0. \end{cases}$$

Поэтому график функции $|f|$ совпадает с графиком функции f на тех промежутках, на которых $f(x) \geqslant 0$, а на тех промежутках, где $f(x) < 0$, график $|f|$ получается из графика функции f с помощью симметрии относительно оси Ox.

На рисунке 36, *а* изображен график функции x^3-3x, а на рисунке 36, *б* — график функции $|x^3-3x|$.

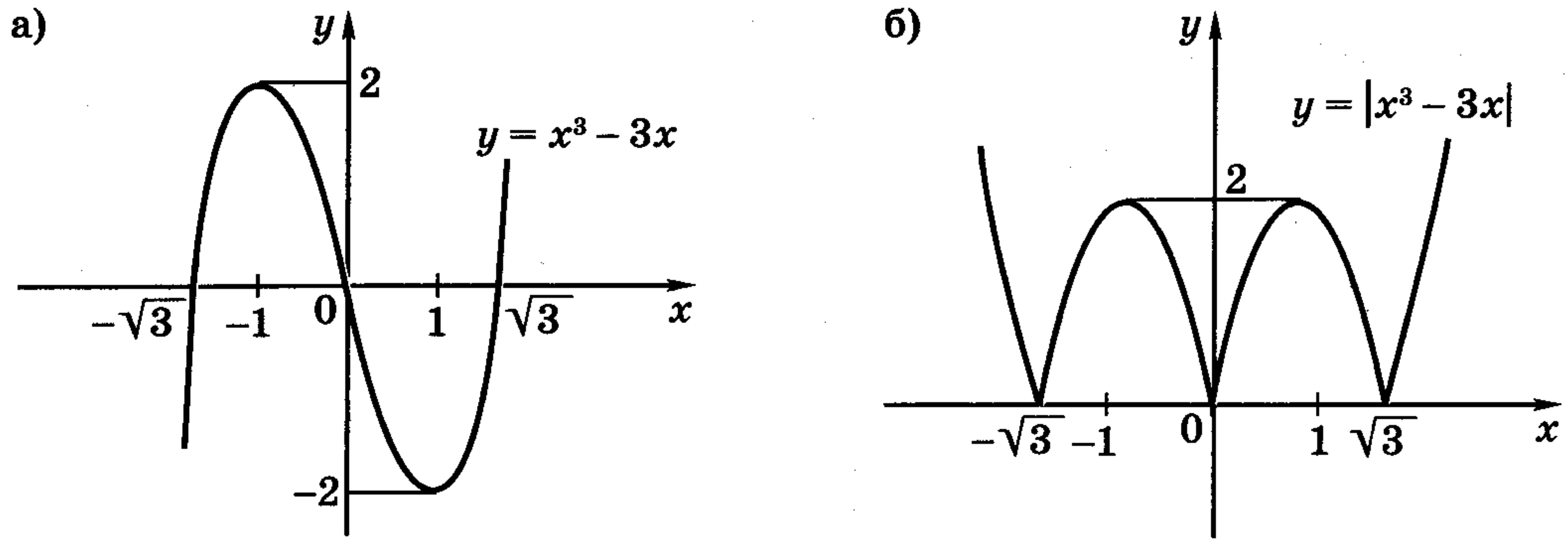


Рис. 36

2. Построим теперь по графику функции $f(x)$ график функции $f(|x|)$.

При $x \geqslant 0$ $|x| = x$, поэтому

$$f(|x|) = f(x),$$

т. е. графики функций $f(|x|)$ и $f(x)$ совпадают между собой.

Поскольку

$$f(|-x|) = f(|x|),$$

то график функции $f(|x|)$ для $x < 0$ получается с помощью симметрии относительно оси Oy.

На рисунке 37 показано, как из графика функции $x^2 - 6x + 5$ (рис. 37, *а*) получен график функции $|x|^2 - 6|x| + 5$ (рис. 37, *б*).

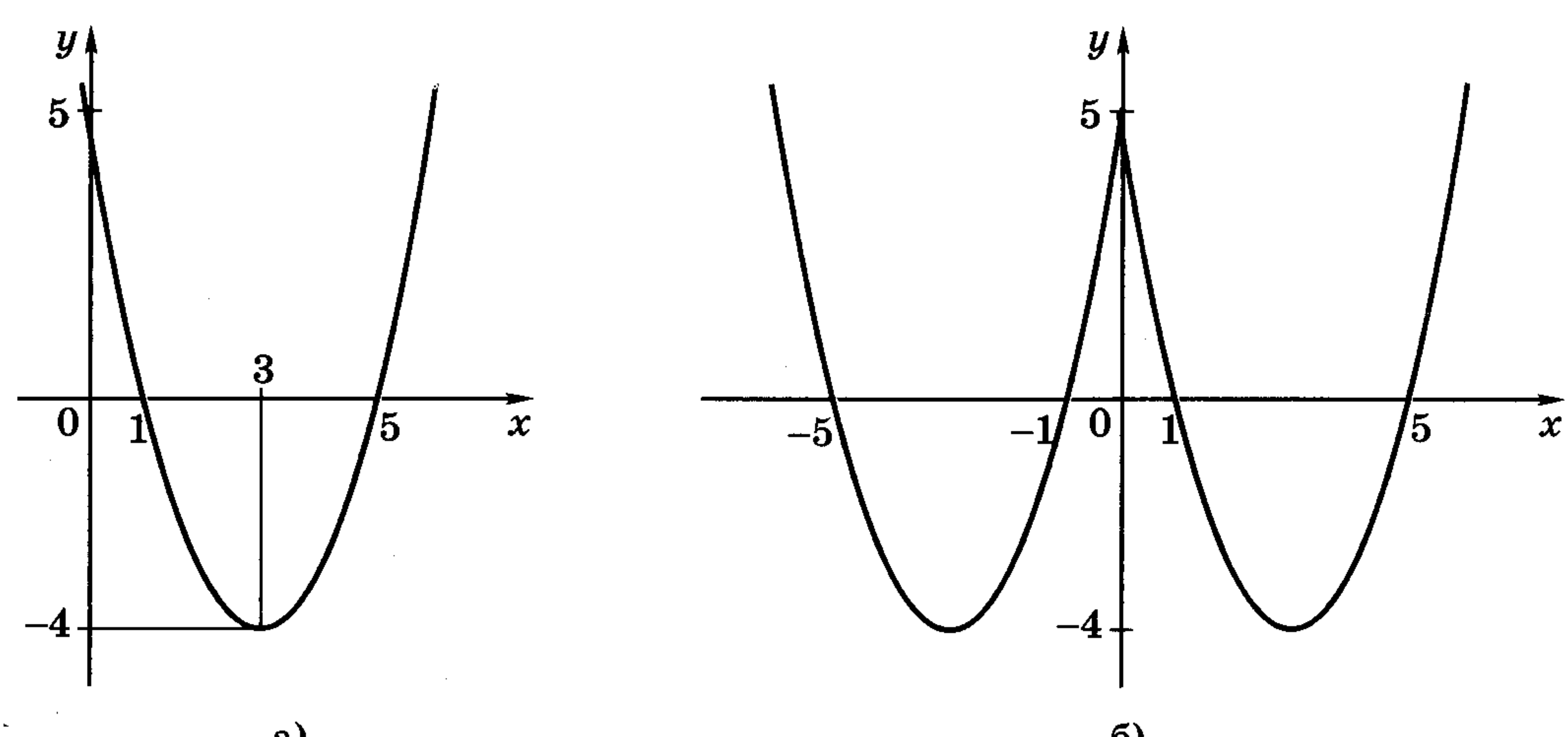


Рис. 37

УПРАЖНЕНИЯ

70. Постройте график функции:

а) $|4x-7|$; д) $\left|\frac{3x+5}{4-|x|}\right|$; и) $\frac{1}{|3x+1|+|x|}$;

б) $\left|\frac{2x-3}{4x+5}\right|$; е) $\left|\frac{2x-5}{3-2x}\right|$; к) $\frac{1}{|x-2|+|x|-3}$.

в) $|2x+3|+2|x|$; ж) $\frac{4|x|+1}{2|x|+3}$;

г) $||x|+4|$; з) $\frac{|x|-4}{|x|-2}$;

71. Постройте график функции:

а) $|x+1|-2|x-2|$; г) $3(|x|+1)+|x-5|$;

б) $|x-1|-2|x|+3|x+2|$; д) $||x-1|-2|x|+3|x+2||$;

в) $|3|x+1|-2|$; е) $||x+1|-2|x-2||$.

С помощью графика установите, для каких значений a уравнение $f(x)=a$ имеет решение, и укажите их число.

Принимает ли функция свое наибольшее значение M и свое наименьшее значение m?

Опишите множество значений функции.

72. Постройте на плоскости множество точек $M(x;\, y)$, для координат которых выполняется соотношение:

а) $|x|+|y|\leqslant 4$; г) $2x+|x|\leqslant y+2|y|$;

б) $2|x|+3|y|\leqslant 2$; д) $|x-1|+|2y-3|=1$;

в) $3|x|-4|y|>3$; е) $|2x+3|+|y-1|\geqslant 2$.

Принадлежит ли начало координат построенному множеству?

§ 5. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

18. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Функцию ax^2+bx+c называют *квадратичной*, если a, b, c — действительные числа и $a\neq 0$. Выражение ax^2+bx+c называют *квадратным трехчленом*. Квадратичная функция часто встречается в различных задачах. Например, если тело подброшено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 и в начальный момент находилось на расстоянии s_0 до поверхности Земли, то в момент времени t его расстояние

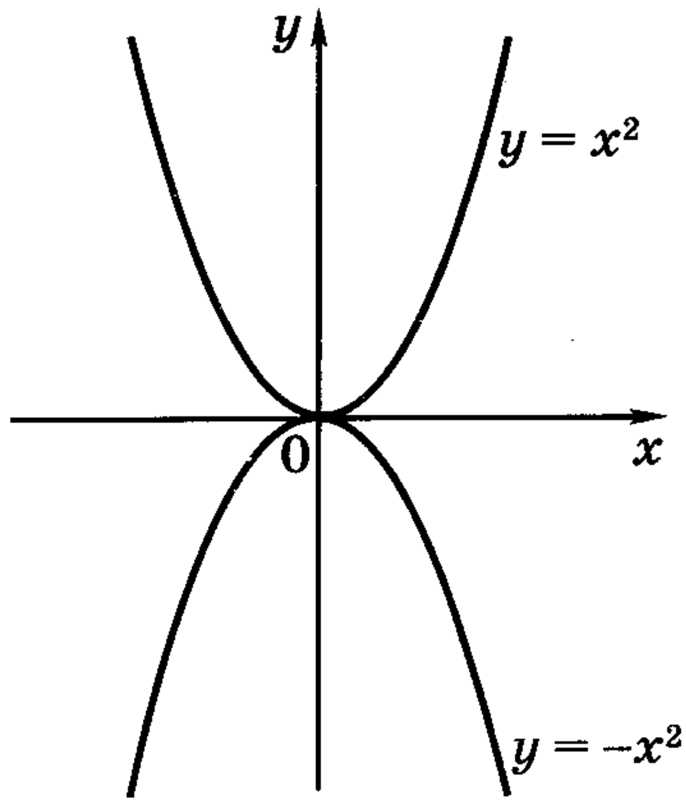


Рис. 38

$s(t)$ до поверхности Земли определяется по формуле

$$s(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Выражение $-\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$ является квадратичной функцией, где $a = -\frac{g}{2}$, $b = v_0$, $c = s_0$, а вместо переменной x употреблена переменная t. График функции x^2 был построен в п. 12. В п. 15 мы показали, что график функции ax^2 получается из графика функции x^2 с помощью растяжения вдоль оси Oy с коэффициентом a. Если $a<0$, то к растяжению в $|a|$ раз добавляется преобразование симметрии относительно оси Ox. На рисунках 38—40 изображены графики функций ax^2 при различных значениях a.

После этого замечания перейдем к построению графика квадратичной функции. Для этого из трехчлена $ax^2 + bx + c$ выделим полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Отсюда следует, что для построения графика квадратичной функции $ax^2 + bx + c$ следует осуществить параллельный перенос графика функции x^2 на вектор с координатами $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ и сделать затем растя-

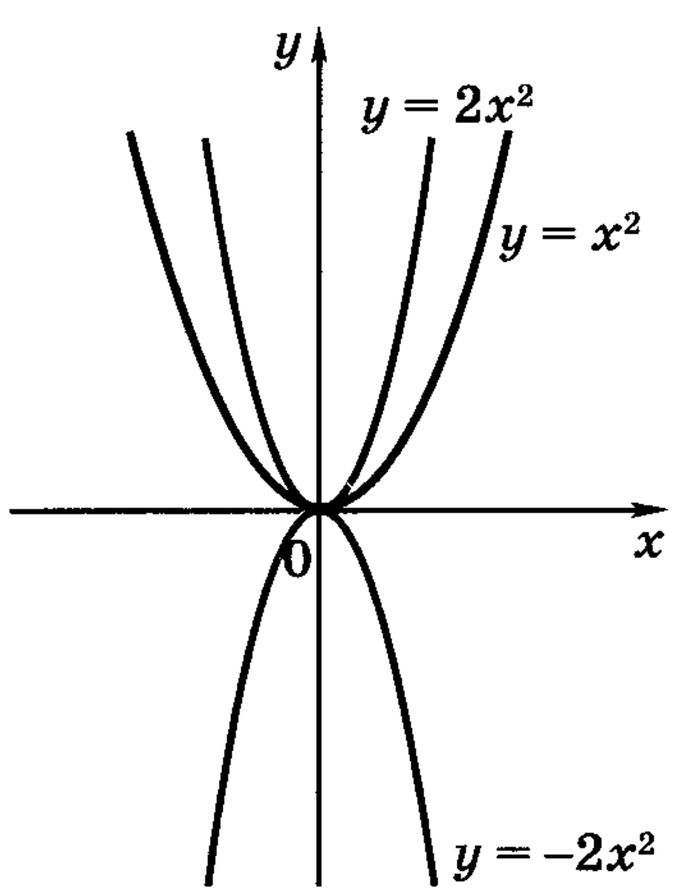


Рис. 39

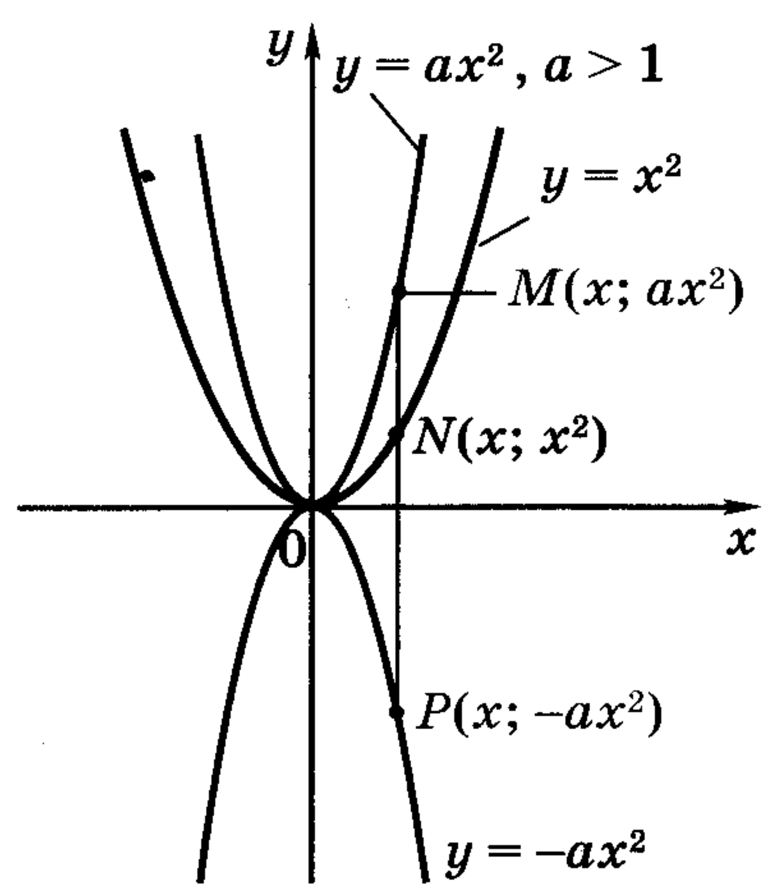
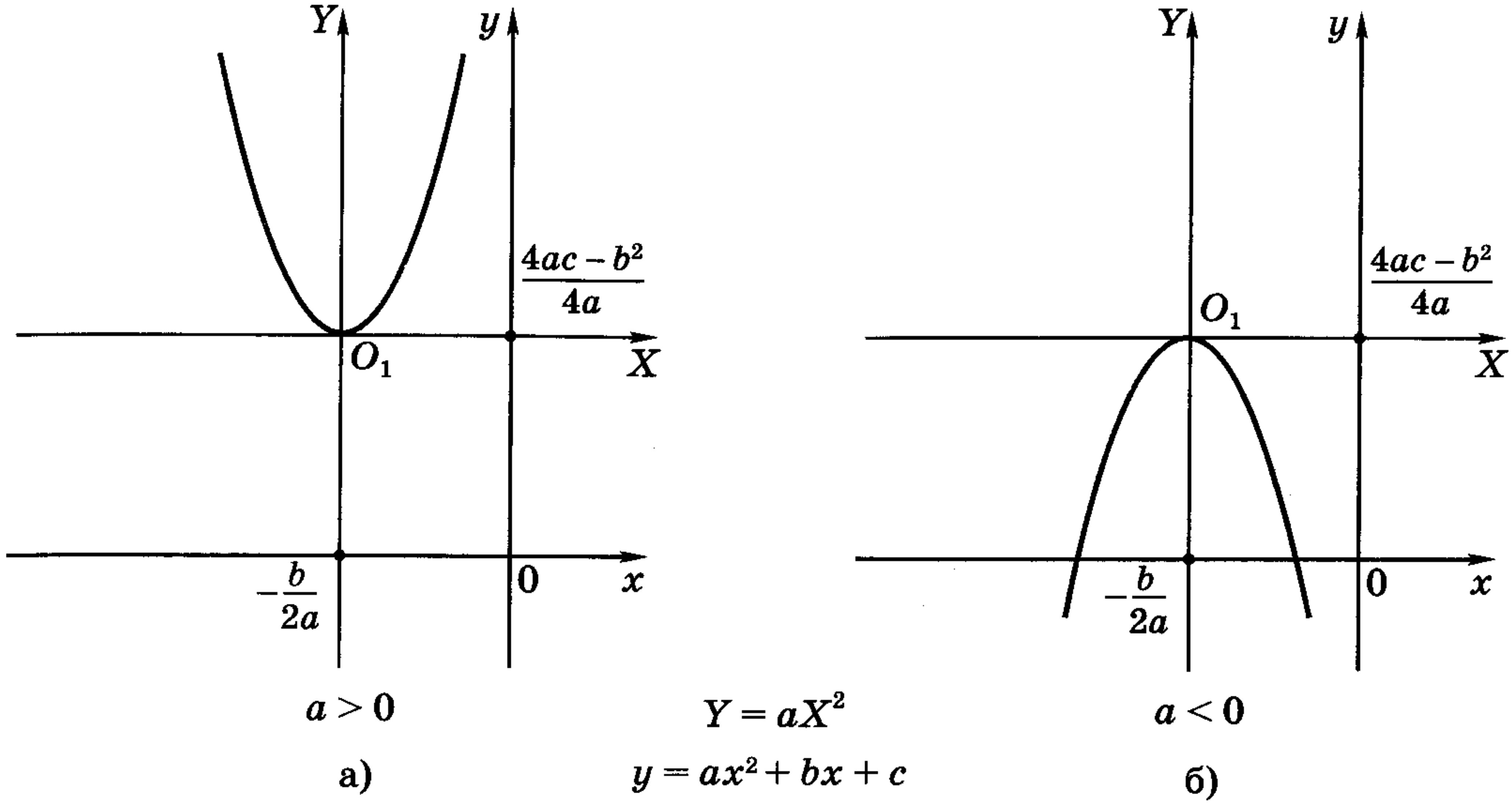


Рис. 40



$Y = aX^2$

$y = ax^2 + bx + c$

Рис. 41

жение вдоль оси Oy с коэффициентом a. Практически для построения графика функции ax^2+bx+c поступают следующим образом: через точку $O_1\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ проводят вспомогательные оси координат O_1X и O_1Y, параллельные исходным осям и одинаково с ними направленные. В этих новых осях строят сначала график функции X^2, а затем график функции aX^2. График функции aX^2 в новых осях координат и будет графиком функции ax^2+bx+c в исходных осях координат (рис. 41).

График функции ax^2+bx+c называется *параболой*, точка графика $O_1\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ — *вершиной* параболы, а прямая $x=-\frac{b}{2a}$, параллельная оси Oy,— *осью симметрии* параболы. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх (рис. 41, *а*), при $a<0$ — вниз (рис. 41, *б*). Величина $|a|$ показывает «крутизну» параболы — чем больше $|a|$, тем круче поднимаются вверх (опускаются вниз) ее ветви. Уравнение $y=ax^2+bx+c$ называется уравнением параболы.

Пример 1.

Построим график функции $3x^2+6x+5$.

Решение. Выделим полный квадрат:

$$3x^2+6x+5=3(x^2+2x+1)+2=3(x+1)^2+2.$$

Теперь ясно, что вершина параболы находится в точке $O_1(-1;\ 2)$. Проводим через эту точку вспомогательные оси координат O_1X и

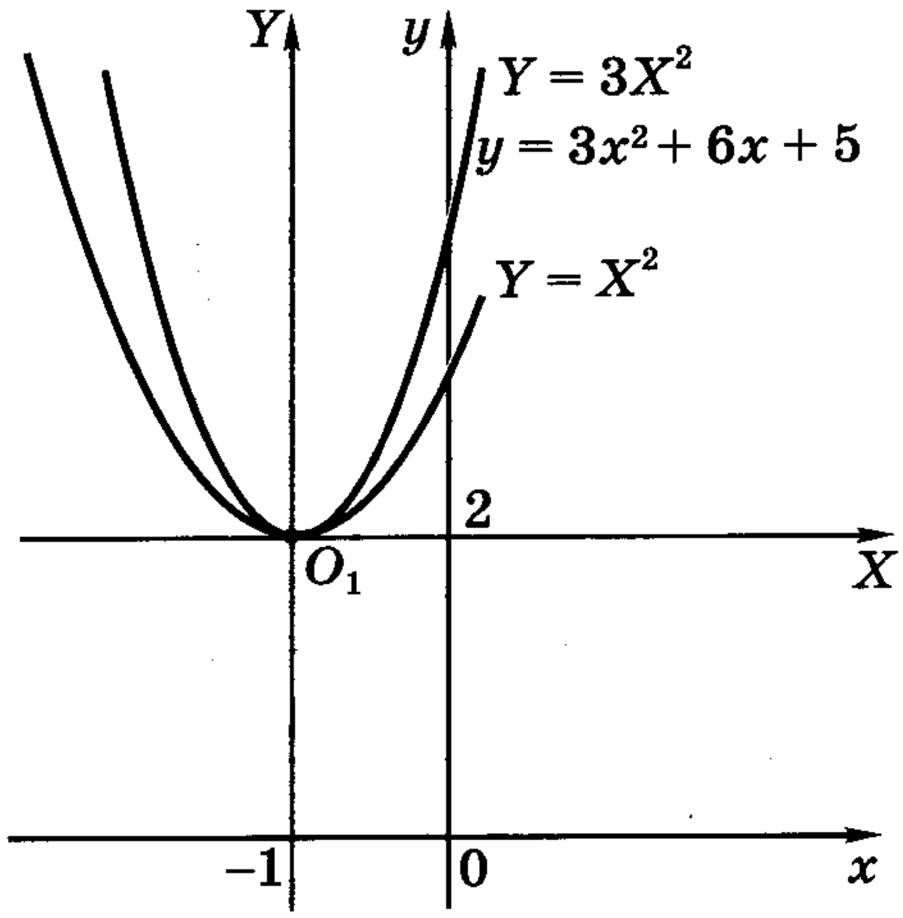


Рис. 42

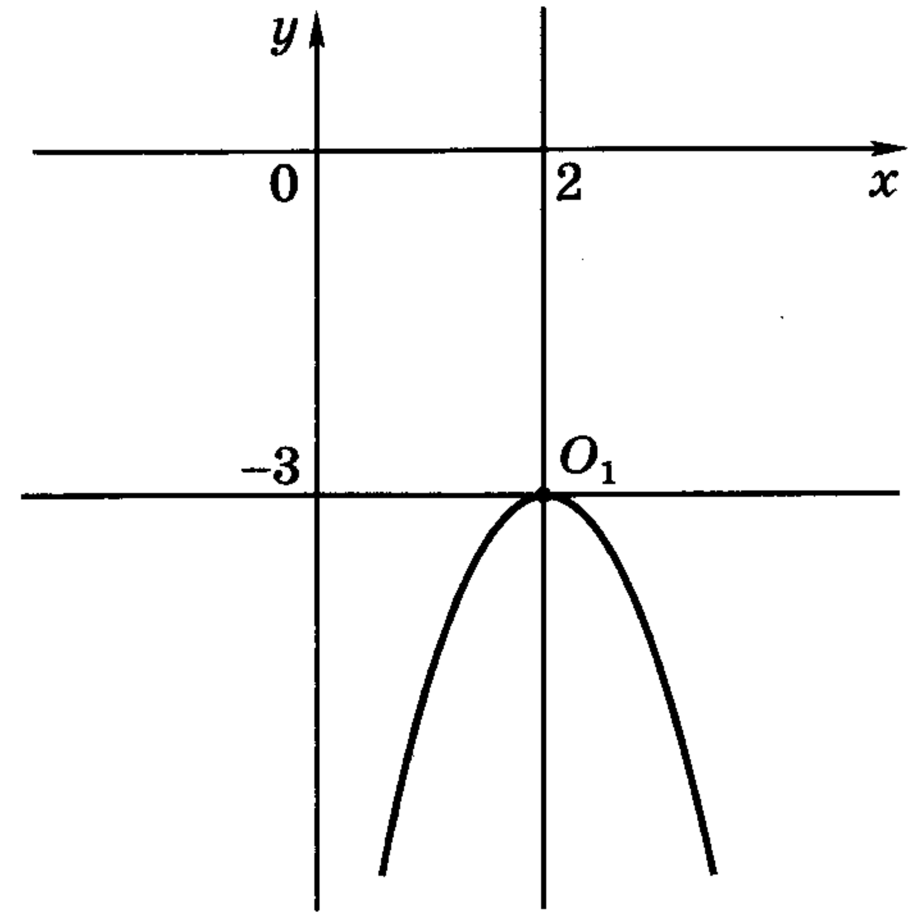


Рис. 43

O_1Y и в этих осях строим график функции $3X^2$. График этой функции будет искомым (рис. 42).

Пример 2.

Построим график функции $-2x^2+8x-11$.

Решение. В нашем случае $a=-2$, $b=8$, $c=-11$. Поэтому $-\frac{b}{2a}=2$, $\frac{4ac-b^2}{4a}=-3$ и вершина параболы находится в точке $O_1(2;\ -3)$, а ее ветви направлены вниз, так как $a<0$. Проводим через точку O_1 перпендикулярные прямые и строим в этих новых осях график функции $-2X^2$. Он и будет искомым (рис. 43).

УПРАЖНЕНИЯ

73. Постройте график функции:

а) $x^2-8x+20$; г) $6x-1-3x^2$; ж) $-2x^2+6x+1$;
б) $2x^2-10x+5$; д) $6-x^2$; з) x^2-4x+4;
в) $4x-x^2$; е) $4x^2+5$; и) $-4x^2-12x-9$.

74. Постройте график функции:

а) $|x^2+6x+5|$; г) $|-3x^2-5x-18|$;
б) $|-x^2+5x-6|$; д) $|-4x^2-4x-1|$.
в) $|x^2+4x+5|$;

75. Парабола $y=ax^2+bx+1$ проходит через точки $A(1;\ 6)$ и $B(-1;\ 0)$. Постройте эту параболу.

19. КОРНИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ. ОБЩИЕ ТОЧКИ ПАРАБОЛЫ И ПРЯМОЙ

Число $x \in D(f)$, такое, что $f(x)=0$, называют *нулем функции* f.

Нули квадратичной функции находятся из уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

т. е. они совпадают с корнями квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c.$$

Поэтому нули квадратичной функции называют ее *корнями*.

При $D=b^2-4ac>0$ квадратичная функция имеет два корня $x_1 \neq x_2$ и ее график имеет две общие точки с осью Ox.

При $D=0$ корни квадратичной функции совпадают ($x_1=x_2$) и ее график имеет единственную общую точку с осью Ox.

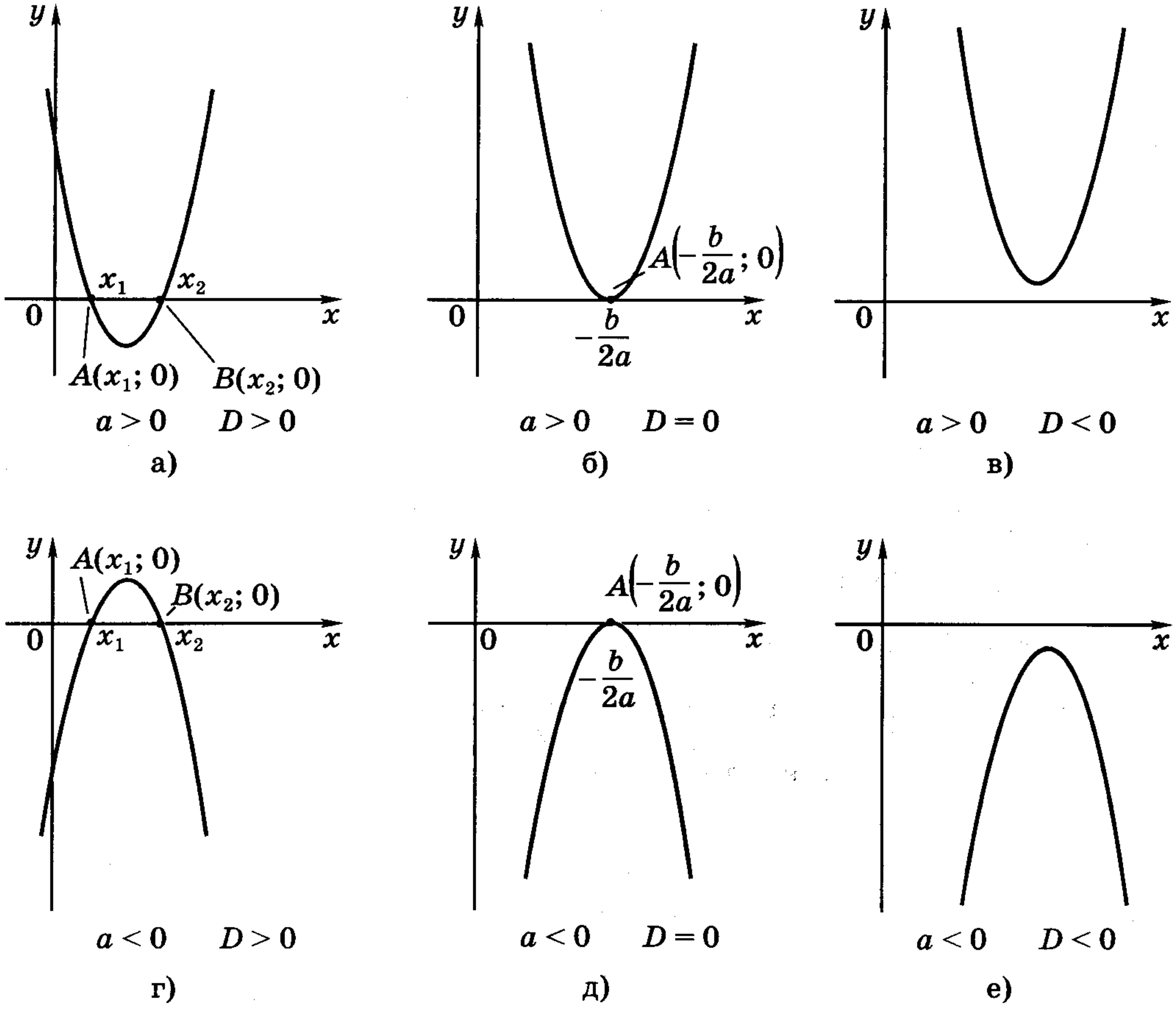


Рис. 44

При $D<0$ квадратичная функция корней не имеет и ее график не пересекает ось Ox.

Схематически обзор возможных случаев в зависимости от знака a и величины D представлен на рисунке 44.

Пример 1.

Не находя корней квадратного трехчлена $2x^2+5x+p$, подберем значения параметра p так, чтобы его корни x_1 и x_2 удовлетворяли неравенству $x_1^2+3x_1x_2+x_2^2 \leqslant 6$.

Решение. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-\frac{5}{2},\ x_1 \cdot x_2=\frac{p}{2}. \qquad (1)$$

Многочлен $x_1^2+3x_1x_2+x_2^2$ выразим через $\sigma_1=x_1+x_2$ и $\sigma_2=x_1 \cdot x_2$.

Имеем

$$x_1^2+3x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2+x_1x_2=\sigma_1^2+\sigma_2.$$

Используем (1): $\sigma_1=-\frac{5}{2}$, $\sigma_2=\frac{p}{2}$ — и получаем $x_1^2+3x_1x_2+x_2^2=\frac{25}{4}+\frac{p}{2}$.

Решим теперь неравенство $\frac{25}{4}+\frac{p}{2} \leqslant 6$. Получим $p \leqslant -\frac{1}{2}$. Из условия $D \geqslant 0$ имеем $25-8p \geqslant 0$ или $p \leqslant \frac{25}{8}$. Таким образом, искомые значения p удовлетворяют условиям $p \leqslant \frac{25}{8}$ и $p \leqslant -\frac{1}{2}$. В итоге имеем $p \leqslant -\frac{1}{2}$.

Отметим, что квадратичная функция ax^2+bx+c зависит от трех параметров a, b, c. Для их определения достаточно указать три точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, лежащие на параболе $y=ax^2+bx+c$. Тогда для определения величин a, b, c мы получим систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Пример 2.

Найдем уравнение параболы, проходящей через точки $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$ и $C(2;\ 1)$, и построим ее график.

Решение. Подставляем координаты точек A, B и C в уравнение параболы $y=ax^2+bx+c$. Имеем

$$\begin{cases} c=1, \\ a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $a=1$, $b=-2$, $c=1$, и уравнение параболы имеет вид $y=x^2-2x+1$, или $y=(x-1)^2$; ее график изображен на рисунке 45.

Если на плоскости рассматриваются одновременно парабола $y=ax^2+bx+c$ и прямая $y=kx+p$, то количество точек их пересечения зависит от значений a, b, c, k и p и определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c, \\ y=kx+p. \end{cases} \qquad (2)$$

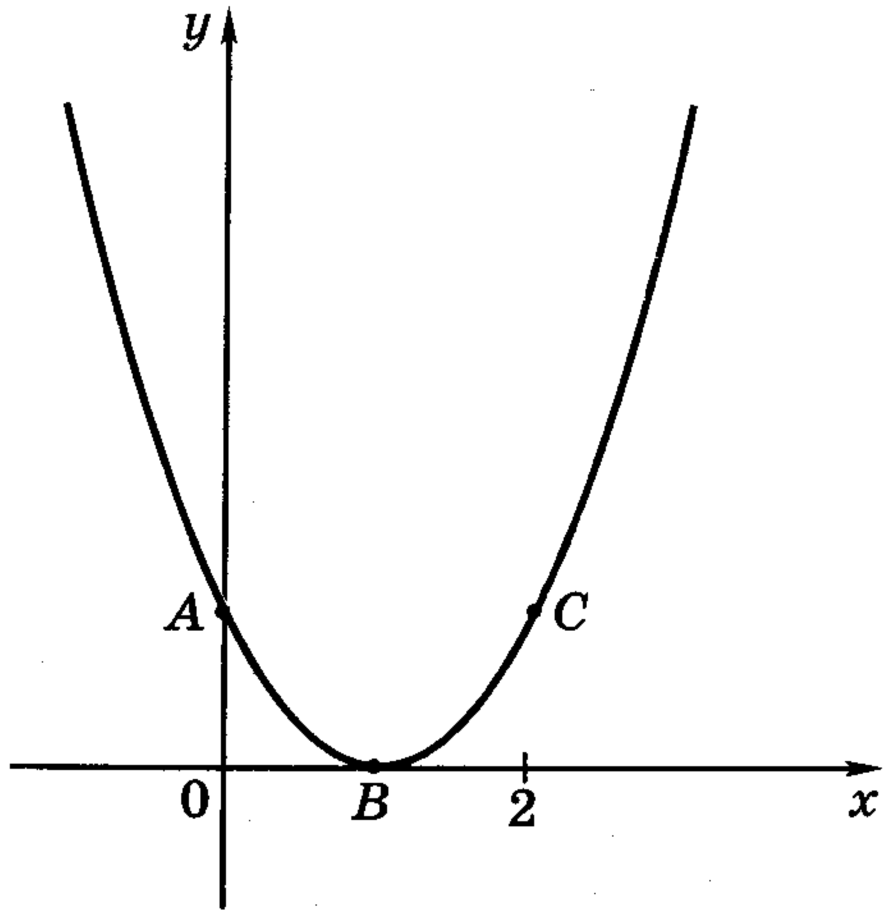


Рис. 45

Пример 3.

Исследуем, сколько общих точек в зависимости от значений параметра a имеет парабола $y=ax^2+6x+7$ и прямая $y=4x+2$. Найдем координаты этих точек.

Решение. Составим систему уравнений (2):

$$\begin{cases} y=ax^2+6x+7, \\ y=4x+2. \end{cases}$$

Отсюда $ax^2+2x+5=0$.

Если $D>0$, т. е. $4-20a>0$, $a<\frac{1}{5}$, то полученное уравнение будет иметь два различных корня: $x_1=\frac{-1-\sqrt{1-5a}}{a}$ и $x_2=\frac{-1+\sqrt{1-5a}}{a}$. Соответствующие значения y_1 и y_2 находим по формулам $y_1=4x_1+2$ и $y_2=4x_2+2$.

Таким образом, при $a<\frac{1}{5}$, $a\neq 0$, имеется две общие точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. Если $a=\frac{1}{5}$, то $D=0$, $x_1=x_2=-5$, поэтому $y_1=y_2=-18$ и единственной общей точкой будет точка $C(-5;\ -18)$. Если же $a>\frac{1}{5}$, то действительные корни отсутствуют, значит, общих точек не будет — парабола и прямая не пересекаются.

УПРАЖНЕНИЯ

76. Постройте параболу, проходящую через точки:

а) $A(1;\ 2)$, $B(-1;\ 2)$, $C(0;\ 1)$;
б) $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(-4;\ 1)$;
в) $A(1;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(-2;\ -3)$;
г) A, B, C (координаты точек выберите самостоятельно).

77. При каком значении a точка $M(2;\ -5)$ лежит на параболе $y=ax^2+x+2$? Лежат ли на этой параболе точки $N(1;\ 2)$ и $M(0;\ 2)$?

78. Найдите точки пересечения (если они существуют) параболы $y=ax^2+bx+c$ с осью Ox. На каких промежутках функция ax^2+bx+c сохраняет постоянный знак?

а) $y=2x^2-5x+2$;
б) $y=-3x^2-4x+1$;
в) $y=-4x^2+12x-9$;
г) $y=3x^2+x+5$;
д) $y=-x^2-4x-8$;
е) $y=\frac{9}{4}x^2+3x+1$.

79. Найдите точки пересечения параболы и прямой:

а) $y=x^2-5x+7$, $y=2x-5$;
б) $y=2x^2-6x+2$, $y=-3x+4$;
в) $y=x^2-3x+1$, $y=-x+3$;
г) $y=x^2+4x+1$, $y=2x-6$;
д) $y=4x^2+x-3$, $y=-3x-4$;
е) параболу и прямую выберите самостоятельно.

80. В зависимости от значений $p\,(p\neq 0)$ определите число точек пересечения параболы $y=px^2$ и прямой $y=2x+3$. Найдите координаты этих точек.

$\boxed{81.}$ Найдите значения p так, чтобы парабола $y=-4x^2$ и прямая $y=-2x+p$ имели единственную общую точку.

82. Подберите несколько значений a, k и b так, чтобы при этих значениях парабола $y=ax^2$ и прямая $y=kx+b$:
а) имели две различные точки пересечения; б) имели единственную общую точку; в) не имели точки пересечения.

83. Исследуйте, сколько общих точек в зависимости от значений p имеют парабола и прямая:

а) $y=2x^2-8x+5$, $y=4x+p$;
б) $y=-3x^2-12x+6$, $y=-2x+p$;
в) $y=4x^2+4x+1$, $x+y=p$;
г) $y=9x^2-6x-1$, $2x+3y=p$;
д) параболу и прямую, уравнение которой зависит от p, выберите самостоятельно.

$\boxed{84^*.}$ Не находя корней квадратного трехчлена, найдите значение p так, чтобы корни x_1 и x_2 заданного квадратного трехчлена удовлетворяли указанному неравенству:
а) $3x^2+6x+p$; $x_1^2+x_1x_2+x_2^2\leqslant 10$;
б) $2x^2+4x-4p-1$; $x_1^2+4x_1x_2+x_2^2\geqslant -12$;
в) $4x^2-12x+2p+1$; $x_1^3+x_1x_2+x_2^3\geqslant 3$;
$\boxed{\text{г)}}$ $3x^2-15x+p+5$; $x_1^3+x_2^3\leqslant 50$;

1) $\left[10;\ \frac{55}{4}\right]$; 2) $\left[1;\ \frac{55}{4}\right]$; 3) $\left[10;\ \frac{55}{8}\right]$; 4) $\left[-10;\ -\frac{55}{4}\right]$.

20*. ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ x^2+px+q ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ p И q

До сих пор квадратичная функция x^2+px+q рассматривалась при условии, что ее коэффициенты p и q являются постоянными числами. Однако если изменять значения p и q, то мы получим множество квадратичных функций, имеющих различные свойства. Так, например, если положить $p=-6$, $q=5$, то получится функция

x^2-6x+5, корни которой 1 и 5. Если же выбрать $p=1$, $q=3$, то квадратичная функция x^2+x+3 в нуль никогда не обращается. Пару чисел $(p;\ q)$ можно рассматривать как координаты точки на координатной плоскости pOq. В связи с этим изучим множество тех точек плоскости pOq, для которых квадратный трехчлен x^2+px+q имеет два действительных корня, либо он имеет один действительный корень, либо действительных корней нет.

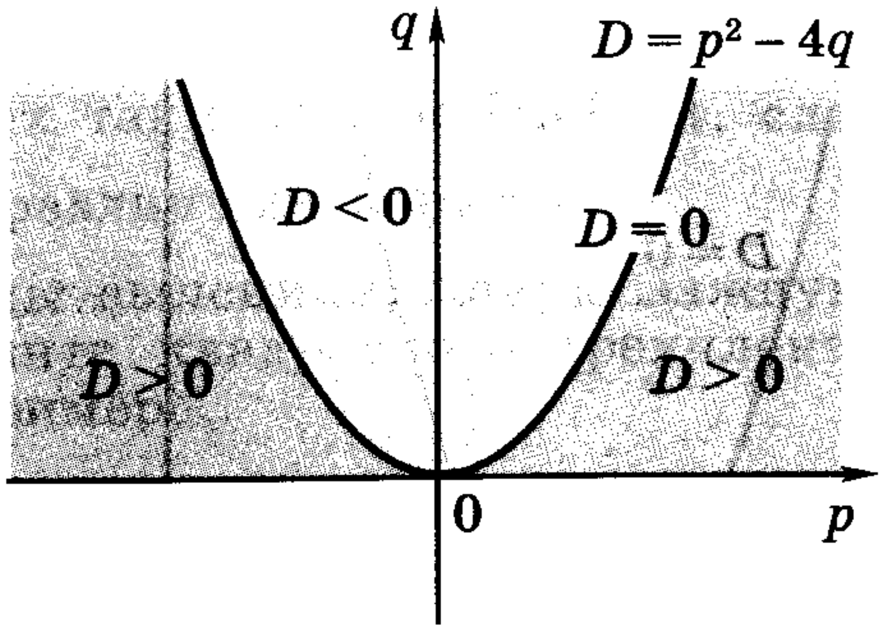


Рис. 46

Для решения этой задачи рассмотрим дискриминант $D=p^2-4q$.

Начнем рассмотрение со случая $D=0$. Тогда $p^2-4q=0$, или $q=\frac{1}{4}p^2$. Мы уже знаем, что точки плоскости pOq, координаты которых связаны соотношением $q=\frac{1}{4}p^2$, располагаются на параболе с вершиной $O(0;\ 0)$, осью симметрии — осью Oq и ветвями, направленными вверх (рис. 46).

Используя результаты п. 12 § 3, мы теперь можем утверждать, что для всех точек, лежащих выше точек параболы $q=\frac{1}{4}p^2$, выполняется неравенство $D=p^2-4q<0$, а для всех точек, лежащих ниже точек параболы,— неравенство $D>0$. Поставленная задача решена: если точка $(p;\ q)$ лежит на параболе $q=\frac{1}{4}p^2$, то $D=0$ и корни квадратичной функции x^2+px+q совпадают между собой; если же точка $(p;\ q)$ лежит в области, где выполняется неравенство $q>\frac{1}{4}p^2$ (на рисунке 46 она закрашена светлее), то $D<0$ и квадратичная функция в нуль не обращается; если же точка $(p;\ q)$ лежит в области, где справедливо неравенство $q<\frac{1}{4}p^2$ (она закрашена темнее), то $D>0$ и квадратичная функция имеет два действительных корня.

Пример 1.

На плоскости pOq выделим множество точек $(p;\ q)$, для которых квадратный трехчлен $x^2+(p+4)x+q-1$ имеет: а) единственный корень; б) имеет два корня; в) не имеет корней.

Решение. Рассмотрим дискриминант $D=(p+4)^2-4(q-1)$ и множество точек на плоскости pOq, в которых он обращается в нуль.

Имеем $(p+4)^2-4(q-1)=0$, или $q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$.

Это — уравнение параболы с вершиной в точке $(-4;\ 1)$, ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $p=-4$, параллельной оси Oq (рис. 47). Теперь получен ответ на вопрос задачи:

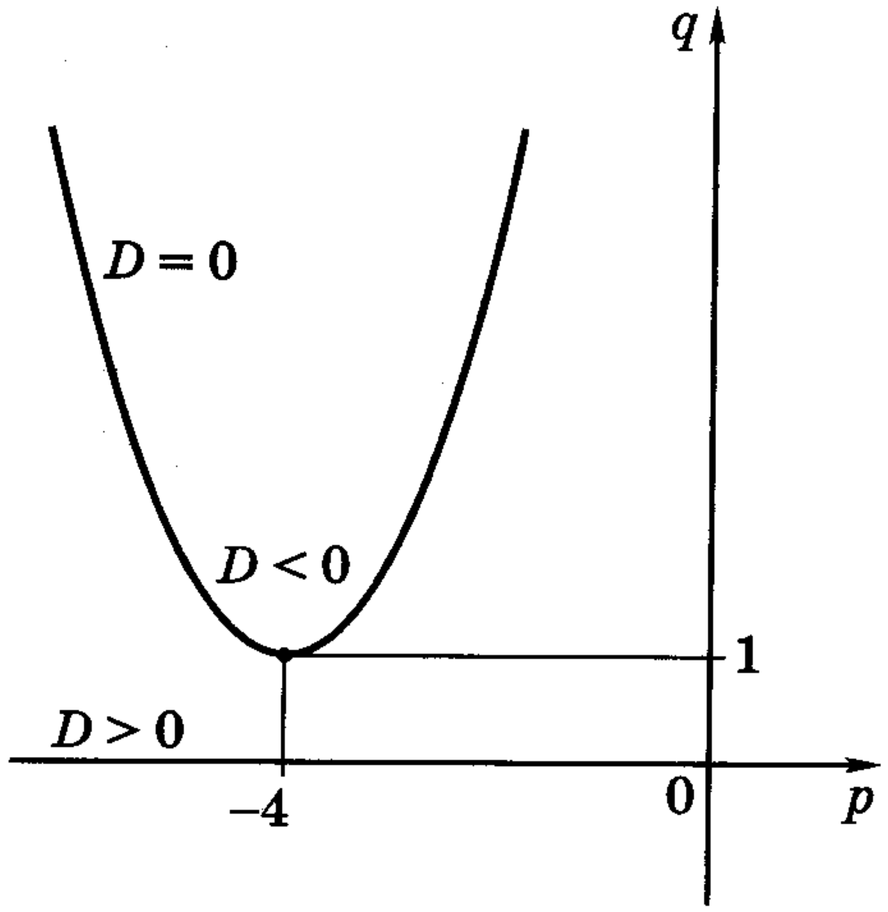


Рис. 47

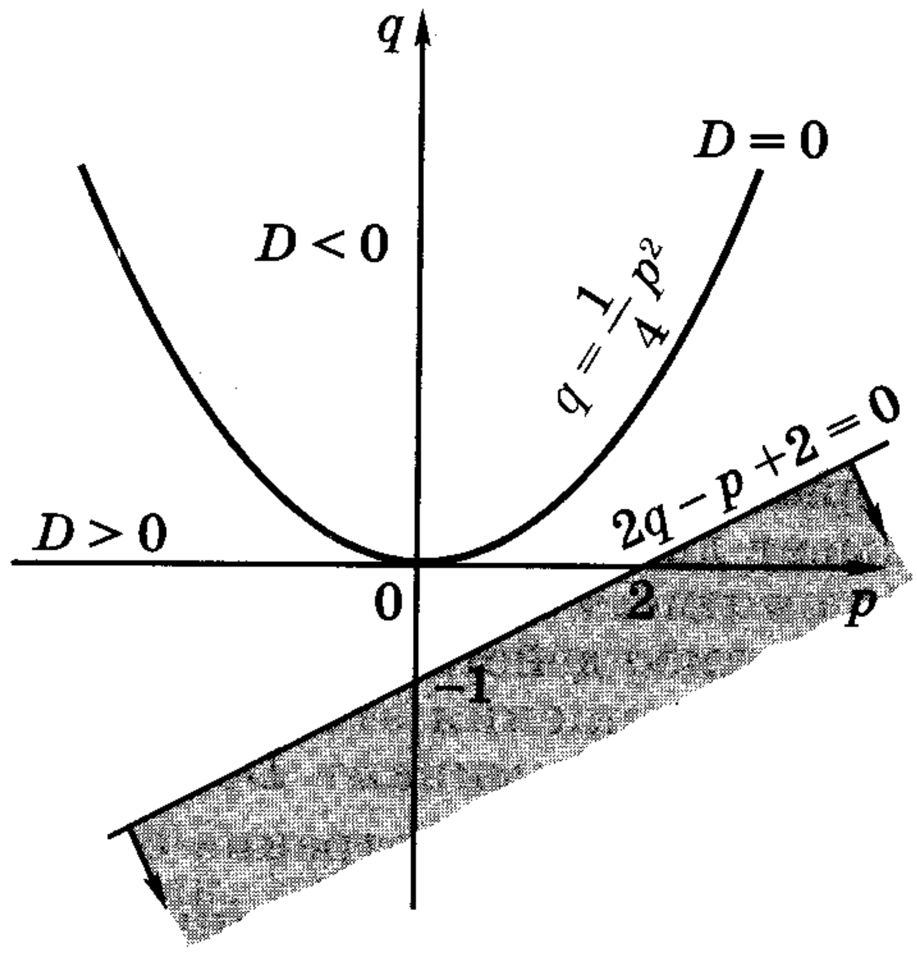


Рис. 48

а) для всех точек, лежащих на параболе $q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$, дискриминант $D=0$ и корни квадратного трехчлена $x^2+(p+4)x+q-1$ совпадают между собой;

б) в области, где $q<\frac{1}{4}(p+4)^2+1$, дискриминант $D>0$ и квадратный трехчлен имеет два действительных корня;

в) в области, где $q>\frac{1}{4}(p+4)^2+1$, дискриминант $D<0$ и поэтому действительные корни отсутствуют.

Пример 2.

Определим, сколько корней имеет квадратный трехчлен x^2+px+q, если коэффициенты p и q удовлетворяют неравенству $2q-p+2\leqslant 0$.

Решение. Множество точек $(p;\ q)$ плоскости pOq, координаты которых удовлетворяют неравенству $2q-p+2\leqslant 0$, лежат в нижней полуплоскости, определяемой прямой $2q-p+2=0$, и на самой прямой (рис. 48). Приравняем нулю дискриминант $D=p^2-4q$ и выясним, пересекаются ли парабола $q=\frac{1}{4}p^2$ и прямая $2q-p+2=0$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} q=\frac{1}{4}p^2, \\ 2q-p+2=0. \end{cases}$$

Уравнение $p^2-2p+4=0$ действительных корней не имеет, парабола и прямая не пересекаются. Следовательно, все точки $(p;\ q)$, лежащие в указанной полуплоскости, будут лежать ниже точек параболы $q=\frac{1}{4}p^2$, но, как мы знаем, для всех таких точек $D>0$, и, следовательно, трехчлен будет иметь два различных корня.

При рассмотрении примеров 1 и 2 мы выяснили, какую важную роль играет исследование дискриминанта квадратного трехчлена. Проиллюстрируем это еще на одном примере.

Пример 3.

Рассмотрим семейство парабол, зависящих от параметра α:

$$y=x^2+\alpha x+\alpha^2,\ \alpha\in(-\infty;\ +\infty).$$

а) Найдем множество точек на плоскости xOy, через которые не пройдет ни одна парабола заданного семейства.

б) Определим, пересекаются ли параболы семейства с кривой, ограничивающей указанное выше множество.

в) Найдем кривую, на которой лежат вершины всех парабол семейства.

Решение.

а) Рассмотрим фиксированную точку плоскости $A(x;\ y)$. Если через нее не проходит ни одна парабола семейства $y=x^2+\alpha x+\alpha^2$, то ни при каком значении $\alpha\in(-\infty;\ +\infty)$ равенство

$$x^2+\alpha x+\alpha^2-y=0 \qquad (1)$$

не выполняется. Но (1) — квадратное уравнение относительно α, и если оно не имеет корней ни при каком значении α, то это означает, что его дискриминант (зависящий от x и y) отрицателен, т. е. $D=x^2-4(x^2-y)<0$, или

$$-3x^2+4y<0. \qquad (2)$$

Таким образом, координаты тех точек плоскости, через которые не проходит ни одна парабола заданного семейства, удовлетворяют неравенству (2). Но мы знаем, что такие точки расположены ниже точек параболы $y=\frac{3}{4}x^2$ (рис. 49).

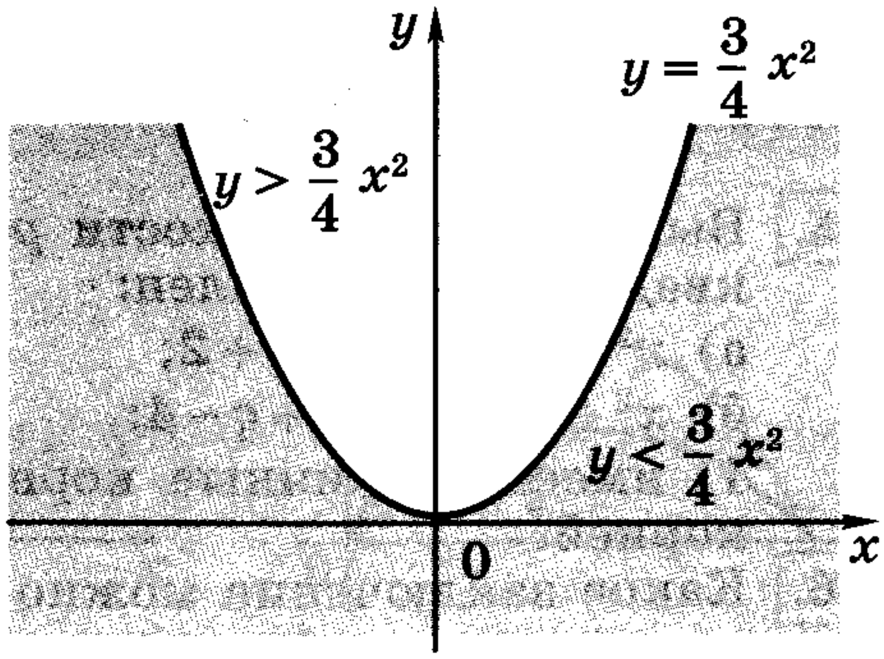


Рис. 49

Отметим далее, что точки параболы $y=\frac{3}{4}x^2$ в найденное множество не включаются и эта парабола является его границей.

Итак, ни через одну точку $A(x;\ y)$, которая лежит ниже точек параболы $y=\frac{3}{4}x^2$, не пройдет ни одна из парабол заданного семейства.

б) Найдем координаты точек пересечения каждой параболы заданного

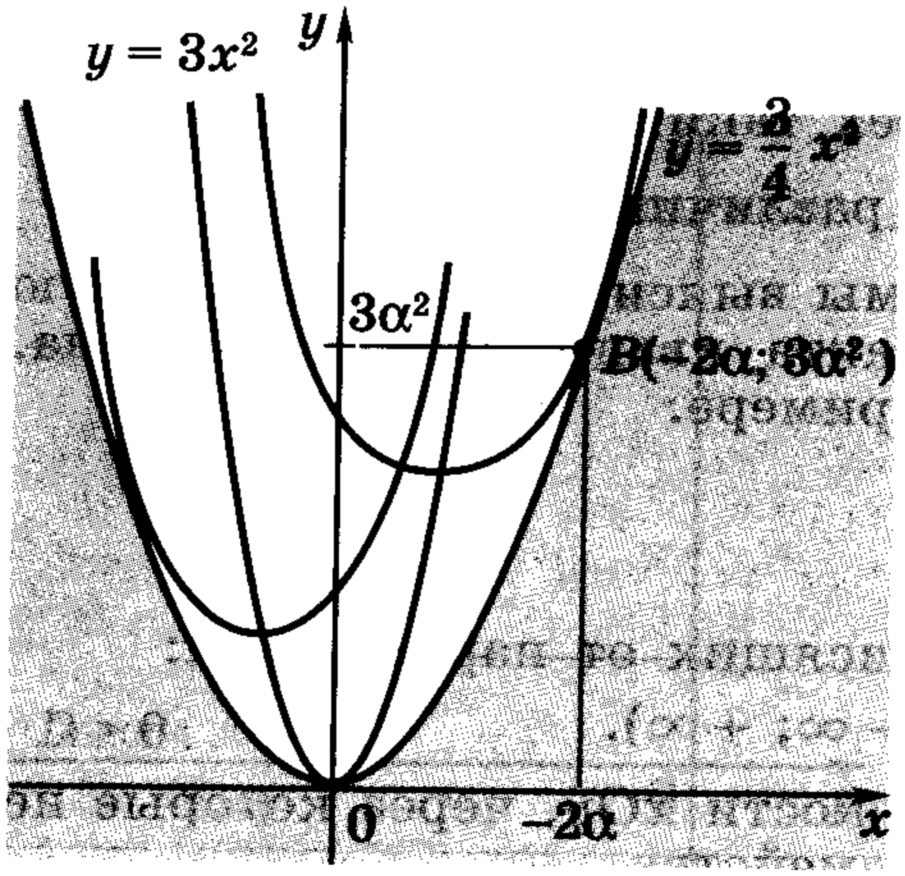


Рис. 50

ного семейства и найденной параболы $y=\frac{3}{4}x^2$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x^2, \\ y=x^2+\alpha x+\alpha^2. \end{cases}$$

Отсюда получаем $x^2+4\alpha x+4\alpha^2=0$, или $(x+2\alpha)^2=0$, т. е. $x=-2\alpha$. При этом $y=3\alpha^2$. Значит, каждая парабола семейства имеет единственную общую точку $B(-2\alpha;\ 3\alpha^2)$ с параболой $y=\frac{3}{4}x^2$, т. е. парабола $y=x^2+\alpha x+\alpha^2$ касается параболы $y=\frac{3}{4}x^2$ в точке $B(-2\alpha;\ 3\alpha^2)$.

Итак, все параболы заданного семейства лежат в незакрашенной области на рисунке 50 и каждая из них касается параболы $y=\frac{3}{4}x^2$.

в) Известно, что вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ имеет координаты $O_1\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. В нашем случае $a=1$, $b=\alpha$, $c=\alpha^2$. Поэтому вершина параболы $y=x^2+\alpha x+\alpha^2$ находится в точке $O_1\left(-\frac{\alpha}{2};\ \frac{3}{4}\alpha^2\right)$.

Найдем зависимость между абсциссой $x=-\frac{\alpha}{2}$ вершины O_1 и ее ординатой $y=\frac{3}{4}\alpha^2$. Имеем $\alpha=-2x$, и тогда

$$y=\frac{3}{4}\alpha^2=\frac{3}{4}(-2x)^2=3x^2.$$

Это означает, что вершины всех парабол семейства лежат на параболе $y=3x^2$, которая расположена в незакрашенной области. На рисунке 50 изображены все фигурирующие в решении параболы.

УПРАЖНЕНИЯ

85. Выделите на плоскости pOq множество точек $(p;\ q)$, для которых квадратный трехчлен:

а) $x^2+(p-1)x+q+2$;

б) $x^2+(2p+3)x+q-4$;

в) $x^2+(2-p)x+1-2q$

1) имеет различные корни; 2) имеет равные корни; 3) не имеет корней.

86. Какое заключение можно сделать о количестве корней квадратного трехчлена x^2+px+q, если его коэффициенты p и q удовлетворяют неравенству:

а) $2q-p+1\leqslant 0$; в) $q-2p-4\leqslant 0$;
б) $2q+p+6\leqslant 0$; г) $2p-4q+3\geqslant 0$?

87. Задано семейство парабол:
а) $y=x^2+\alpha x+(\alpha^2+1)$; в) $y=x^2+(\alpha+1)x+(\alpha^2+1)$;
б) $y=2x^2+2\alpha x+\alpha^2-2$; г) $y=x^2+(2\alpha+1)x-\alpha^2$.
1) Найдите множество точек на плоскости xOy, через которые не пройдет ни одна парабола заданного семейства.
2) Определите, пересекаются ли параболы семейства с кривой, ограничивающей указанное выше множество.
3) Найдите кривую, на которой лежат вершины всех парабол семейства.
Выполните чертежи.

88. Рассмотрите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $y-x^2+4x-7\geqslant 0$ и $y-x-3\leqslant 0$. При каких значениях a прямая $y=-2x+a$ с этим множеством: а) имеет одну общую точку; б) имеет бесконечное множество общих точек; в) не имеет общих точек?

21. ПРИМЕРЫ ЗАВИСИМОСТЕЙ, ВЫРАЖАЮЩИХСЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В природе и технике многие переменные связаны между собой с помощью квадратичной функции. Рассмотрим некоторые из них.

1. Количество тепла, выделяемого за 1 с при прохождении тока в проводнике с постоянным сопротивлением R Ом и силой тока I ампер, выражается квадратичной функцией $Q=0{,}24RI^2$ (калорий). Графиком этой функции является правая ветвь параболы с вершиной в начале координат (рис. 51, *а*).

2. Груз, сброшенный с самолета на высоте h с начальной скоростью v_0, при своем падении описывает правую ветвь параболы (рис. 51, *б*):

$$y=h-\frac{gx^2}{2v_0^2}. \qquad (1)$$

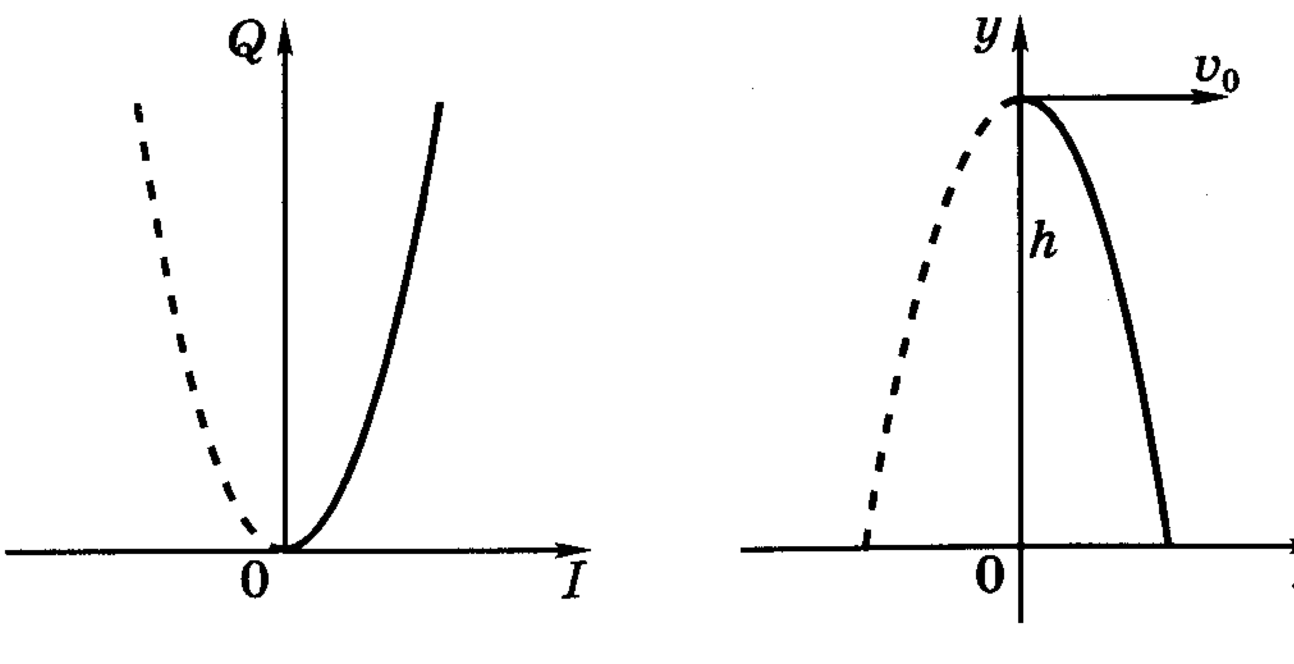


Рис. 51

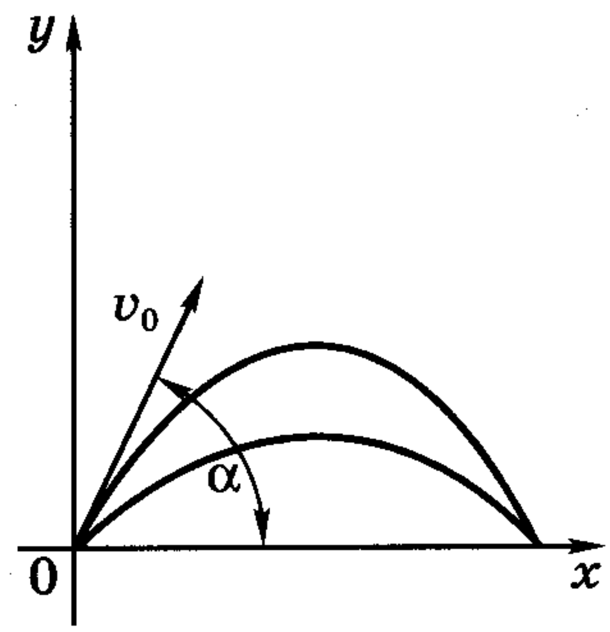


Рис. 52

Так, например, при $h=3000$ м, $v_0=280$ м/с, $g=10$ м/с^2, $x=5600$ м получим $y=3000-\frac{10\cdot 5600^2}{2\cdot 280^2}=1000$ м. Таким образом, пролетев в горизонтальном положении 5,6 км, груз будет еще оставаться на высоте 1 км.

3. Тело, брошенное под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 м/с (без учета сопротивления воздуха), летит по кривой (рис. 52):

$$y=x\cdot \operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

Например, пусть $\alpha=30°$, $v_0=100$ м/с, $g=10$ м/с^2. На какой высоте будет находиться тело, если оно удалилось от начала координат на расстояние $x=600$ м?

По формуле (2) имеем

$$y=600\cdot \operatorname{tg} 30°-\frac{10\cdot 600^2}{2\cdot 100^2\cdot \cos^2 30°}\approx 106 \text{ м}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

89. На каком расстоянии от оси Oy упадет груз, падающий по закону (1)?

90. Каковы координаты вершины параболы (2)?

91. Какова наибольшая высота подъема груза, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0?

92. Какова дальность полета снаряда, выпущенного из пушки с начальной скоростью v_0 под углом α?

§ 6. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Дробно-линейной функцией называется функция $\frac{ax+b}{cx+d}$. Она определена для всех $x\neq-\frac{d}{c}$. Если $c=0$, но $d\neq 0$, то дробно-линейная функция превращается в линейную $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$, графиком которой является прямая; если же $c\neq 0$, но $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, то дробно-линейная функция

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}$$

для всех $x\neq-\frac{d}{c}$ является постоянной и ее график вновь прямая!

Эти два случая изучены, и в дальнейшем мы будем считать, что $c \neq 0$ и $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$.

Покажем, что в этом случае график дробно-линейной функции получается из графика функции $\frac{1}{x}$ с помощью растяжения и параллельного переноса. График функции $\frac{1}{x}$ представлен на рисунке 53. График функции $\frac{k}{x}$, $k \neq 0$, $k \neq 1$, получается из графика функции $\frac{1}{x}$ растяжением вдоль оси Oy с коэффициентом k. При $k<0$, кроме растяжения в $|k|$ раз, добавится преобразование симметрии относительно оси Ox. На рисунке 53 представлены графики функции $\frac{k}{x}$ при различных значениях k. Чтобы построить график функции $\frac{ax+b}{cx+d}$, выделим из дроби целую часть и остаток. Произведем деление $ax+b$ на $cx+d$.

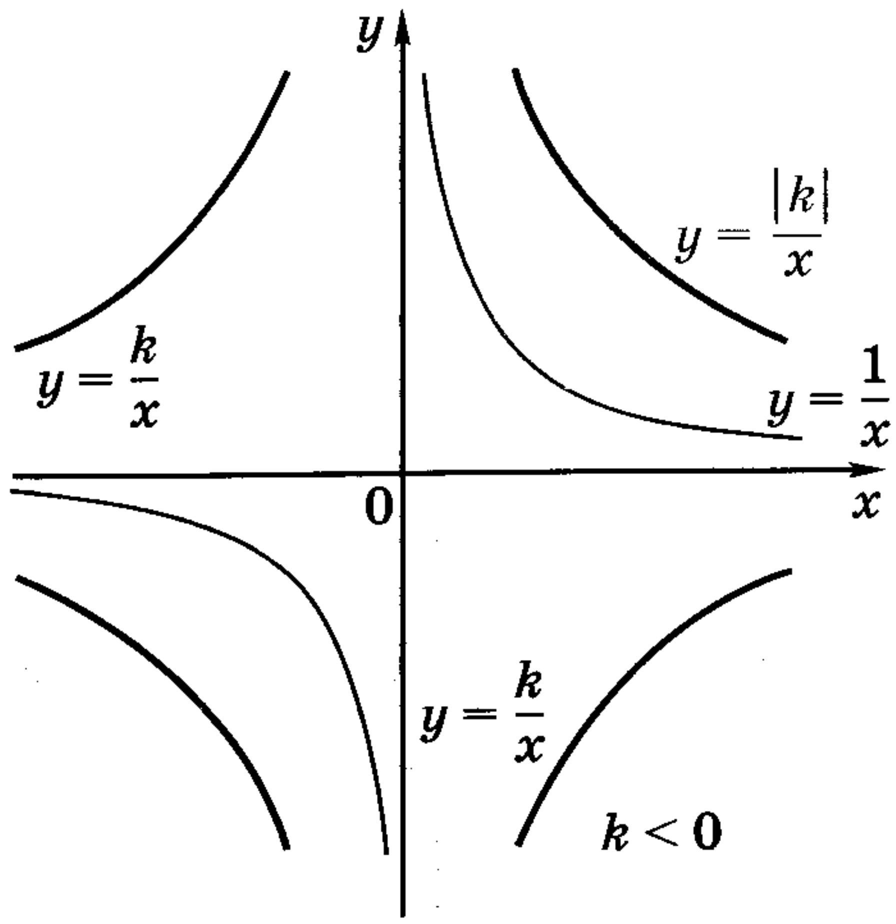


Рис. 53

Имеем

$$\begin{array}{r|l} -\;ax+b & cx+d \\ ax+\frac{ad}{c} & \frac{a}{c} \\ \hline b-\frac{ad}{c} & \end{array}$$

Значит,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}.$$

Обозначим

$$\alpha = -\frac{d}{c},\ \beta = \frac{a}{c},\ k = \frac{bc-ad}{c^2}. \qquad (1)$$

Теперь дробно-линейная функция запишется в виде

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x-\alpha}. \qquad (2)$$

Из представления (2) следует, что график дробно-линейной функции получается из графика функции $\frac{k}{x}$ с помощью параллельного переноса на вектор с координатами $(\alpha;\ \beta)$, где α и β определены равенством (1). Для построения графика выбирают вспомогательные оси координат O_1X и O_1Y с началом в точке $O_1(\alpha;\ \beta)$ и в этих осях строят

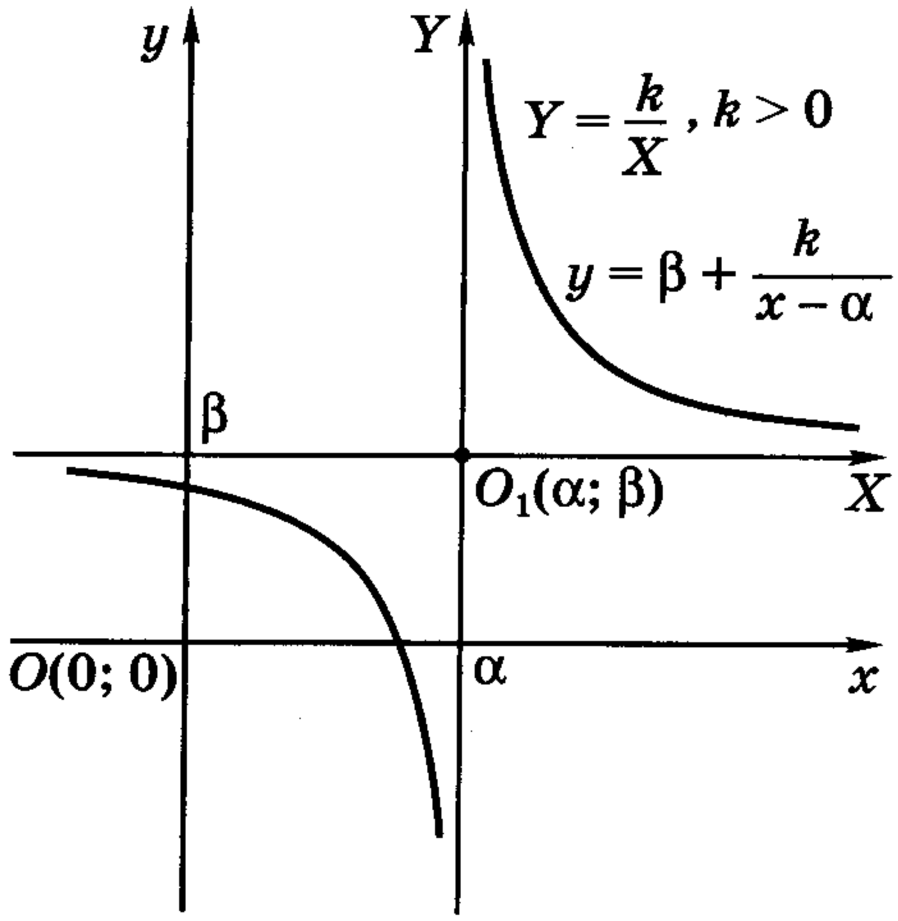


Рис. 54

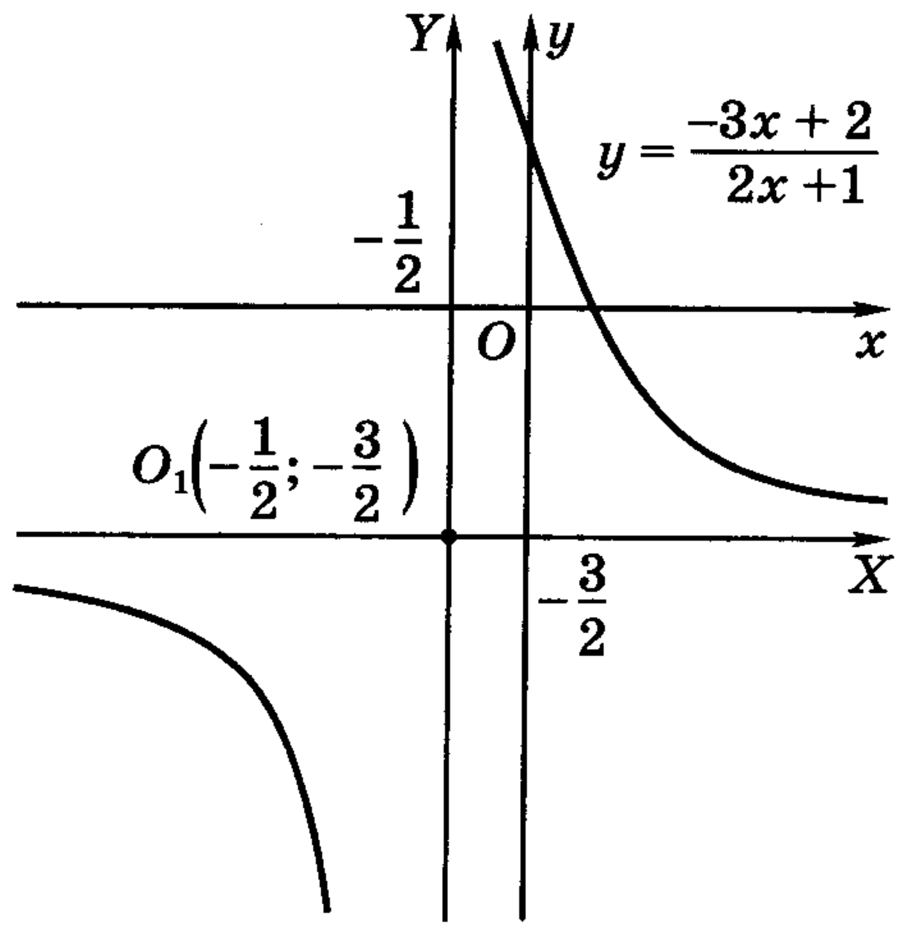


Рис. 55

сначала график функции $\frac{1}{X}$, а затем график функции $\frac{k}{X}$. В координатах x и y (рис. 54) этот график будет искомым.

Пример 1.

Построим график функции $\frac{2-3x}{2x+1}$.

Решение. Имеем:

$$-\frac{3x-2}{2x+1}=-\frac{3}{2}+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}} \qquad \left(\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{3}{2},\ k=\frac{7}{4}\right).$$

Теперь через точку $O_1\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$ проводим вспомогательные оси O_1X и O_1Y, в которых строим график функции $\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{X}$. Этот график и является графиком заданной функции (рис. 55).

График дробно-линейной функции называют *гиперболой*, а точку $O_1\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$ — ее центром. Прямую $x=-\frac{d}{c}$ называют *вертикальной асимптотой гиперболы* — к этой прямой неограниченно приближаются точки гиперболы, когда x приближается к значению $-\frac{d}{c}$. Прямую $y=\frac{a}{c}$ называют *горизонтальной асимптотой* — к ней неограниченно приближаются точки гиперболы, когда x неограниченно увеличивается по абсолютной величине. Равенство $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ называют *уравнением гиперболы*.

Определение интервалов знакопостоянства дробно-линейной функции связано с решением неравенств $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ и $\frac{ax+b}{cx+d}<0$. Эти неравенства решаются методом интервалов (Алгебра-8, гл. VII, п. 2).

Пример 2.

Найдем промежутки, на которых дробно-линейная функция $\frac{5x+4}{3-2x}$ сохраняет постоянный знак.

Решение. Точки $x_1=-0,8$ и $x_2=1,5$, в которых обращаются в нуль числитель и знаменатель, разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty;\ -0,8)$, $(-0,8;\ 1,5)$ и $(1,5;\ +\infty)$. С помощью пробных точек убеждаемся, что

$$\frac{5x+4}{3-2x}<0 \text{ при } x\in(-\infty;\ -0,8)\cup(1,5;\ +\infty)$$

и

$$\frac{5x+4}{3-2x}>0 \text{ при } x\in(-0,8;\ 1,5).$$

В общем случае интервалы знакопостоянства дробно-линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$ зависят от коэффициентов a, b, c, d. Пусть, например $ac>0$ и $bc-ad>0$. Рассмотрим точки $x_1=-\frac{b}{a}$ и $x_2=-\frac{d}{c}$. Их разность $x_2-x_1=-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}=\frac{bc-ad}{ac}>0$. Поэтому $x_1<x_2$. Из равенства $\frac{ax+b}{cx+d}=$ $=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}$ следует, что на промежутках $\left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c};\ +\infty\right)$ заданная функция положительна, а на промежутке $\left(-\frac{b}{a};\ -\frac{d}{c}\right)$ — отрицательна. В таблице 1 (с. 74) рассмотрены все другие случаи соотношения между коэффициентами a, b, c, d.

УПРАЖНЕНИЯ

93. Найдите асимптоты, интервалы знакопостоянства и постройте график функции:

а) $\frac{2x+3}{3x-4}$; б) $\frac{-3x+5}{4x-1}$; в) $\frac{x-4}{1-5x}$; г) $\frac{2-3x}{4-x}$;

д) выберите дробно-линейную функцию самостоятельно.

94*. Постройте график функции $\frac{ax+b}{cx+d}$, если известны координаты точек A, B, C, через которые он проходит:

а) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ -1)$, $C(-1;\ 2)$;

б) $A(0;\ 2)$, $B\left(1;\ -\frac{1}{4}\right)$, $C\left(-2;\ -\frac{4}{5}\right)$.

95. Найдите значения параметров a и k, если известно, что парабола $y=ax^2$ и гипербола $y=\frac{k}{x}$ пересекаются в точке:

а) $A(2;\ -1)$; б) $B(3;\ 2)$; в) $C\left(-\frac{1}{2};\ 4\right)$; г) $D\left(-\frac{1}{3};\ 1\right)$; д) E (координаты точки E выберите самостоятельно).

96. Найдите все значения k, при которых у гиперболы $y=\frac{k}{x}$ и прямой $y=1-x$: а) две точки пересечения; б) единственная точка пересечения; в) общих точек нет.

97. Сколько общих точек имеют парабола и гипербола? Найдите их координаты.

а) $y=x^2-3$, $y=\frac{2}{x}$;

б) $y=x^2-10$, $y=-\frac{3}{x}$;

в) $y=x^2+8x+12$, $y=\frac{15}{x}$;

г) $y=x^2+3$, $y=-\frac{14}{x}$.

98. Заданы гипербола $y=\frac{k}{x}$ и парабола $y=ax^2+bx+c$. Пересекаются ли эти кривые и если да, то найдите координаты всех точек пересечения.

а) $y=\frac{9}{x}$, $y=x^2-7x+15$;

б) $y=\frac{4}{x}$, $y=2x^2+x-8$;

в) $y=\frac{9}{x}$, $y=-2x^2+x+18$;

г) $y=\frac{12}{x}$, $y=x^2+3x-4$;

д) $y=-\frac{1}{3x}$, $y=x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}$.

§ 7. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Знание различных качественных особенностей изучаемых функций позволяет получить более точную информацию о тех процессах, которые эти функции описывают. В этом параграфе изучим некоторые общие свойства функций, знание которых позволит строить графики широкого класса функций.

22. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию f, область определения $D(f)$ которой симметрична относительно точки $x=0$, т. е. если $x \in D(f)$, то и $-x \in D(f)$.

Определение 1. Функция f называется *четной*, если при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т. е.

$$f(-x)=f(x).$$

Рассмотрим точки $A(x;\ f(x))$ и $B(-x;\ f(-x))$ на графике функции $f(x)$. Если функция f четная, то $f(x)=f(-x)$ и поэтому точки A и B расположены симметрично относительно оси Oy (рис. 56). Отсюда следует, что *график четной функции симметричен относительно оси Oy*.

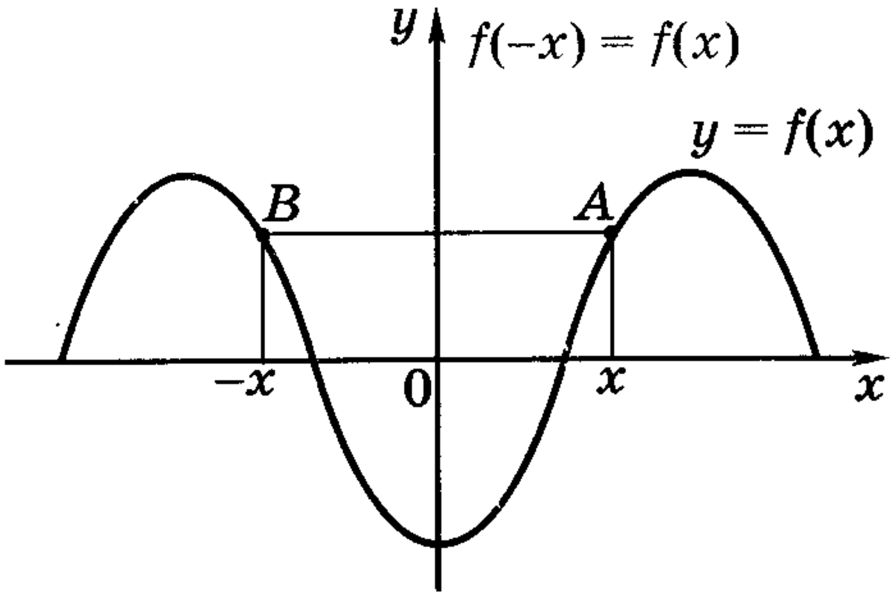


Рис. 56

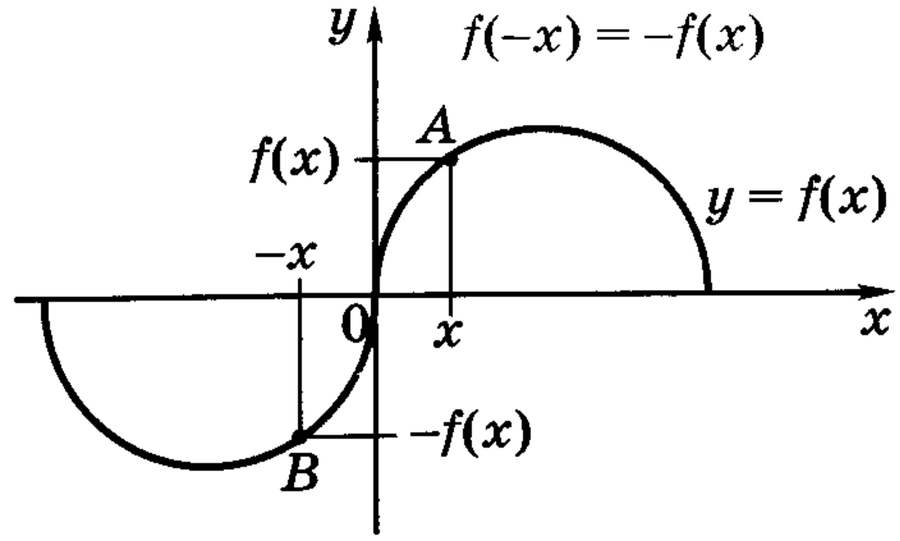


Рис. 57

Примером четной функции является функция x^2, рассмотренная выше. Действительно, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

График этой функции — парабола, симметричная относительно оси Oy.

Пример 1.

Выясним, будет ли четной функция $\frac{2x^4-3x^2}{x^2+4}$, $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Область определения данной функции — множество $(-\infty;\ +\infty)$, симметрична относительно точки $x=0$. Рассмотрим

$$f(-x)=\frac{2(-x)^4-3(-x)^2}{(-x)^2+4}=\frac{2x^4-3x^2}{x^2+4}=f(x).$$

Значит, исследуемая функция является четной.

Определение 2. Функция f называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента значение функции изменяет только знак, т. е.

$$f(-x)=-f(x).$$

Точка $B(-x;\ -f(x))$ симметрична точке $A(x;\ f(x))$ относительно начала координат (рис. 57), поэтому *график нечетной функции симметричен относительно начала координат.*

Например, функция $\frac{k}{x}$, $x\neq 0$, нечетная, так как $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$. Ее график симметричен относительно начала координат. Это свойство мы отмечали уже при построении графика функции $\frac{k}{x}$.

Пример 2.

Выясним, будет ли нечетной функция $\frac{2x^3-x}{x^2+1}$, $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Область определения функции — множество $(-\infty; +\infty)$, симметрична относительно точки $x=0$. Рассмотрим

$$f(-x)=\frac{2(-x)^3-(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-2x^3+x}{x^2+1}=-\frac{2x^3-x}{x^2+1}=-f(x).$$

Этим доказано, что функция нечетная.

Пример 3.

Функция x^3, $-\infty<x<+\infty$, нечетная, так как $f(-x)=(-x)^3=-x^3=$ $=-f(x)$.

Не следует думать, что функции делятся на четные и нечетные. Это не так. Например, функция $f(x)=x^2+x$ не является ни четной, ни нечетной:

$$f(-x)=x^2-x\neq f(x)=x^2+x, \qquad f(-x)=x^2-x\neq -f(x)=-x^2-x.$$

УПРАЖНЕНИЯ

99. Какие из функций являются четными, нечетными или ни теми, ни другими?

а) $3-x^2+x^4$; г) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $x\neq\pm1$; ж) $\begin{cases} x+1, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x-1, \text{ если } x<0; \end{cases}$

б) $\frac{x-1}{x^2+1}$; д) $\frac{|x|}{1+x^2}$; з) $\begin{cases} 2x^2+1, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -2x^2-1, \text{ если } x<0; \end{cases}$

в) $\frac{1}{x^4+5}$; е) $\frac{x^3-2x}{x^2+1}$; и) $\begin{cases} 2-x, \text{ если } x\geqslant 0, \\ x^2+2, \text{ если } x<0. \end{cases}$

Обладают ли их графики симметрией и если да, то какой?

100*. Докажите следующие теоремы и приведите примеры, их иллюстрирующие. (Предполагается, что функции f и φ определены на одном и том же промежутке I, симметричном относительно начала координат.)

Теорема 1. Если f и φ — четные функции, то функции $f+\varphi$, $f-\varphi$, $f\cdot\varphi$ также являются четными функциями.

Теорема 2. Если f и φ — нечетные функции, то $f+\varphi$ и $f-\varphi$ также являются нечетными функциями. Произведение $f\cdot\varphi$ является четной функцией.

Теорема 3. Если функция f является четной (соответственно нечетной) и не равна нулю ни в одной точке, то функция $\frac{1}{f}$ также будет четной (соответственно нечетной).

101. Какие из функций, графики которых изображены на рисунках 58—66, являются четными? нечетными? ни четными и ни нечетными?

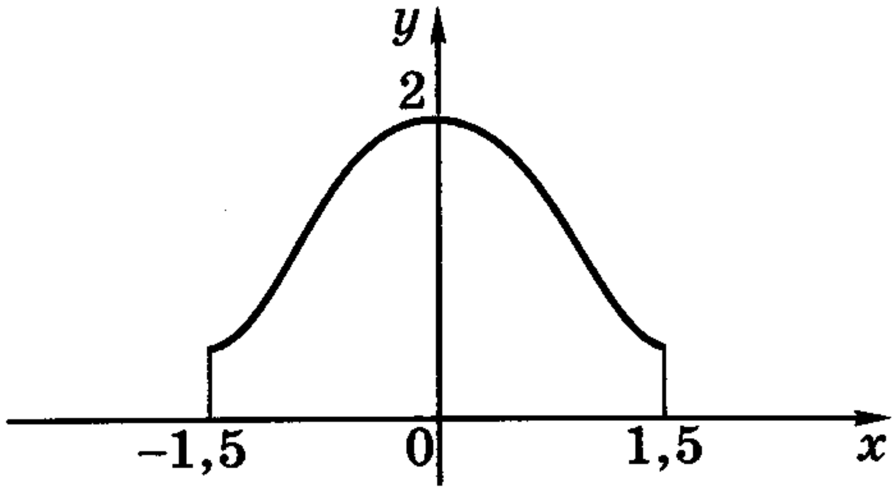


Рис. 58

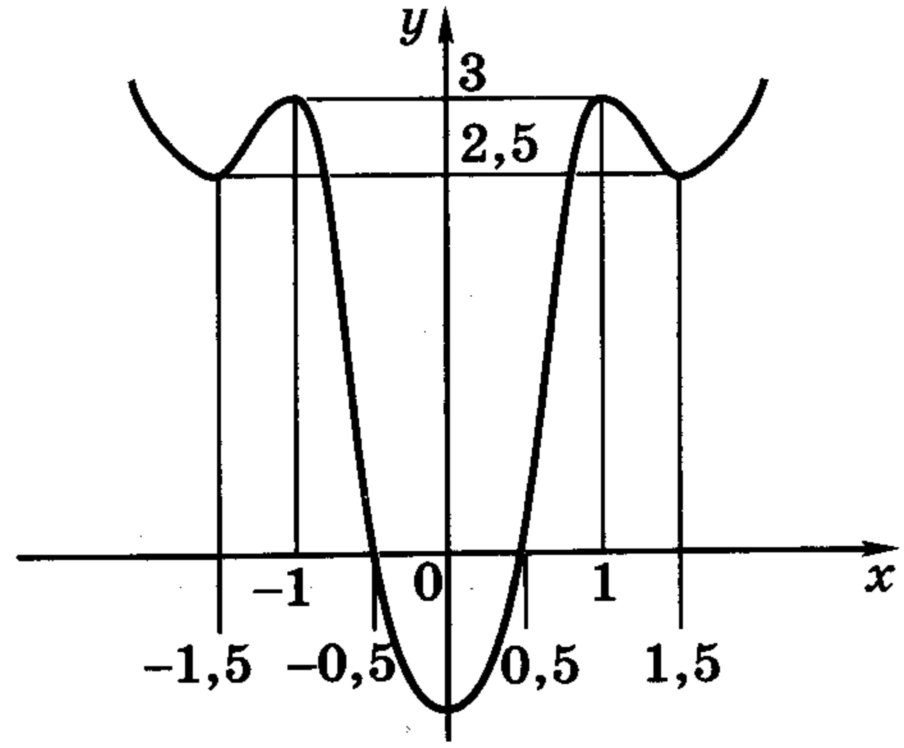


Рис. 59

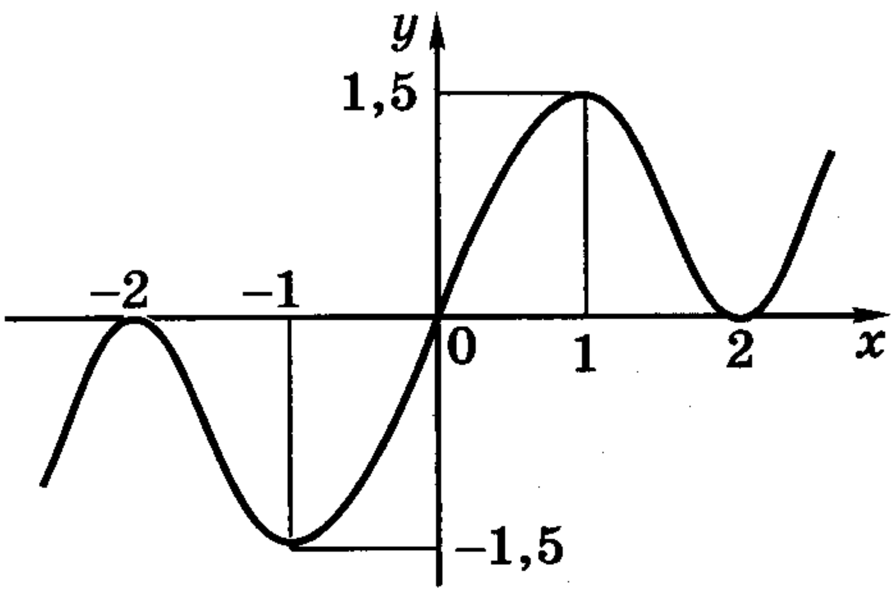


Рис. 60

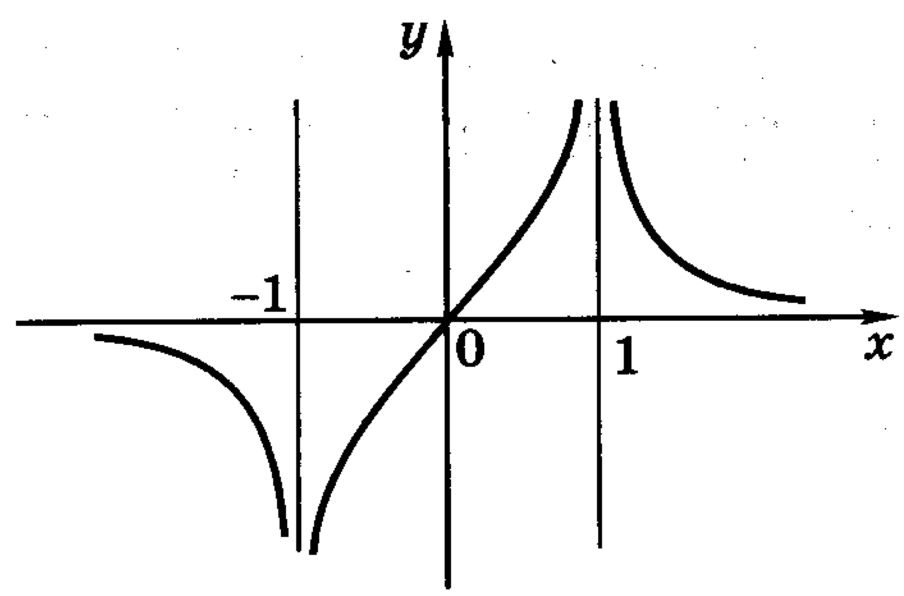


Рис. 61

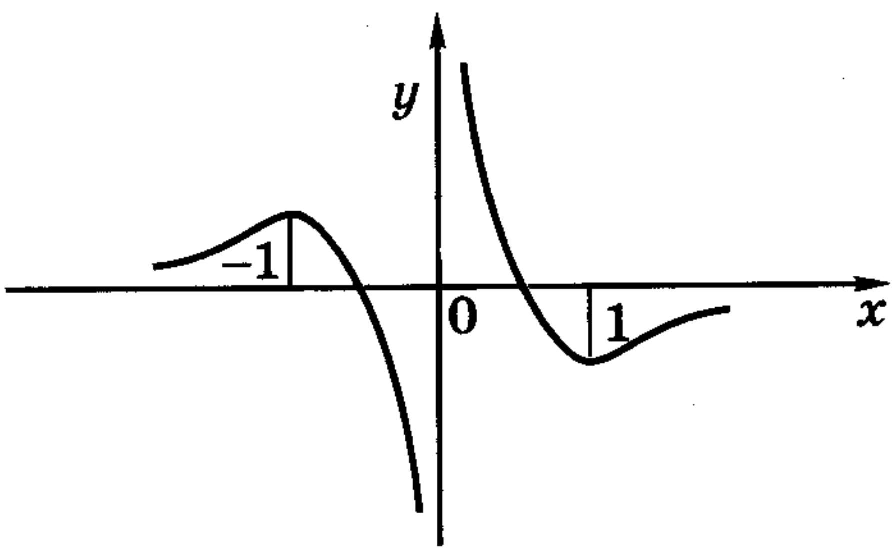


Рис. 62

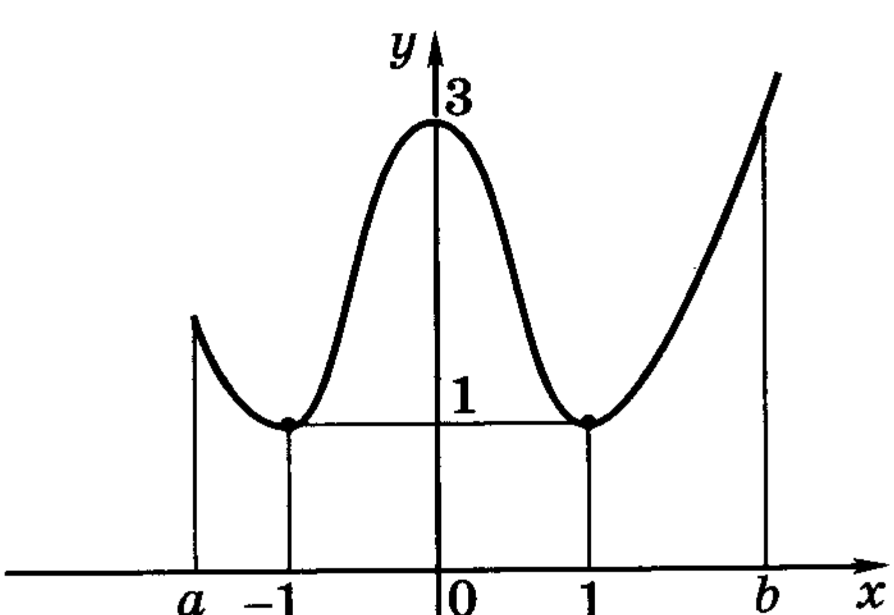


Рис. 63

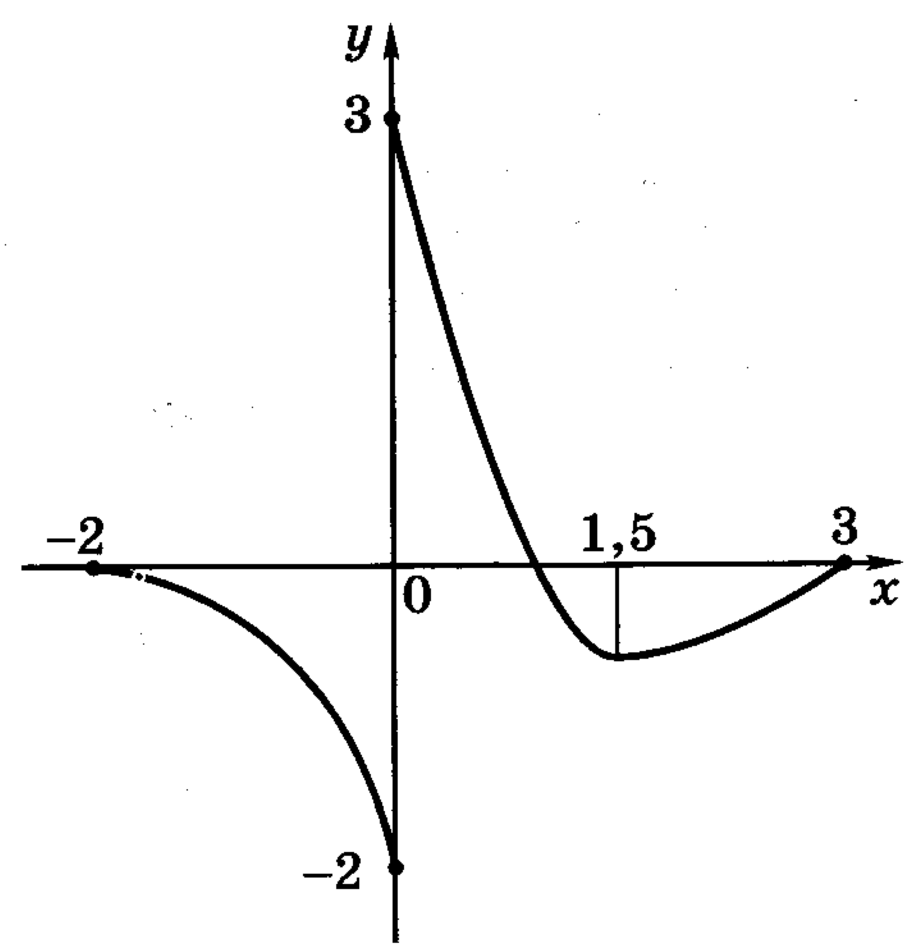


Рис. 64

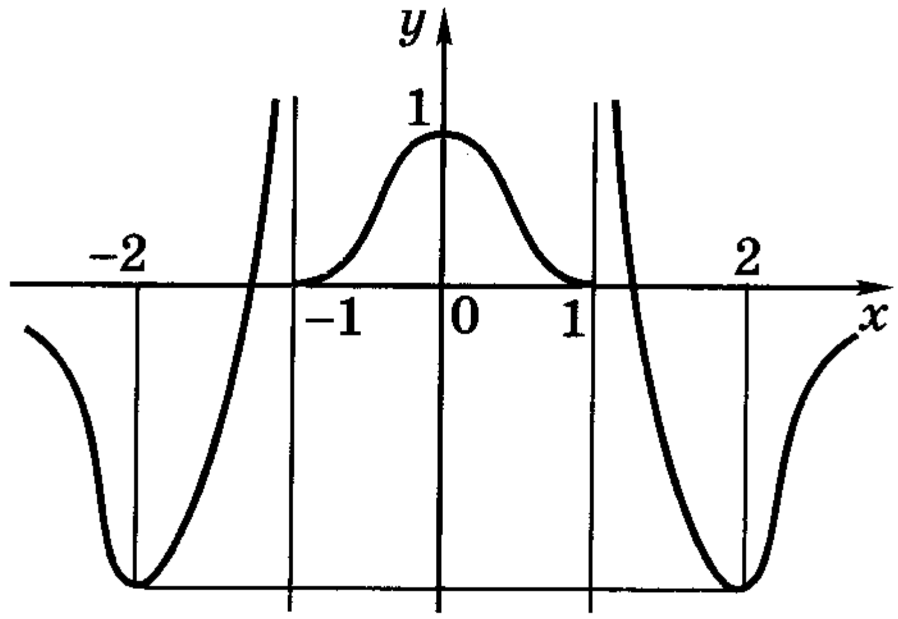


Рис. 65

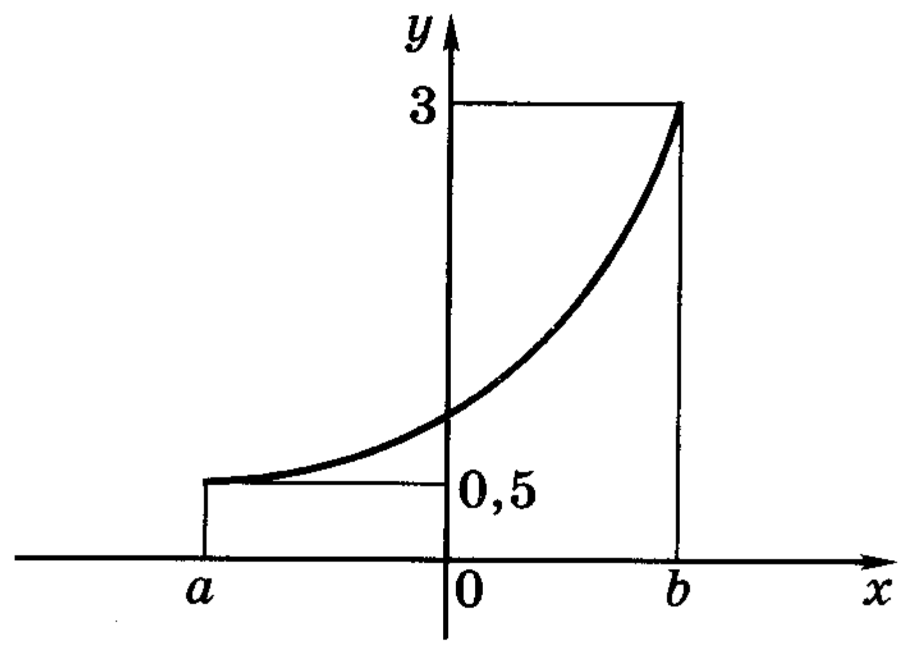


Рис. 66

23. ВОЗРАСТАЮЩИЕ И УБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

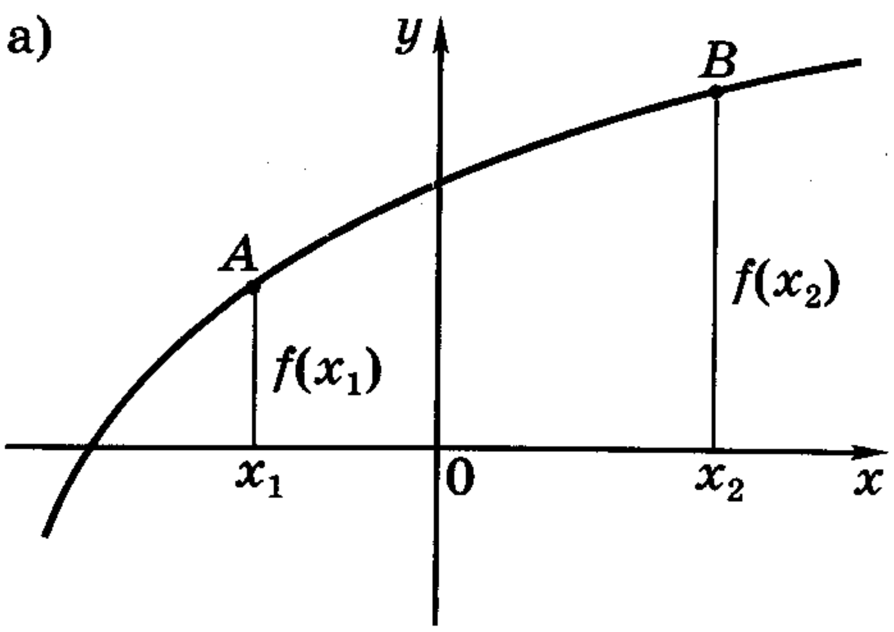
Среди множества функций существуют такие, значения которых возрастают с увеличением аргумента, и такие, значения которых уменьшаются с увеличением аргумента. Про первые говорят, что они *возрастающие*, про вторые — *убывающие* (рис. 67, *а*, *б*).

Пусть функция f определена на промежутке I.

Определение 1. Функция f называется *возрастающей на промежутке* I, если для любых x_1, $x_2 \in I$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функция f называется *убывающей на промежутке* I, если для любых x_1, $x_2 \in I$ и таких, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Пусть $a \leqslant x_1 < b$, $a < x_2 \leqslant b$ и пусть для всех таких x из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). В этом случае говорят, что функция f возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.



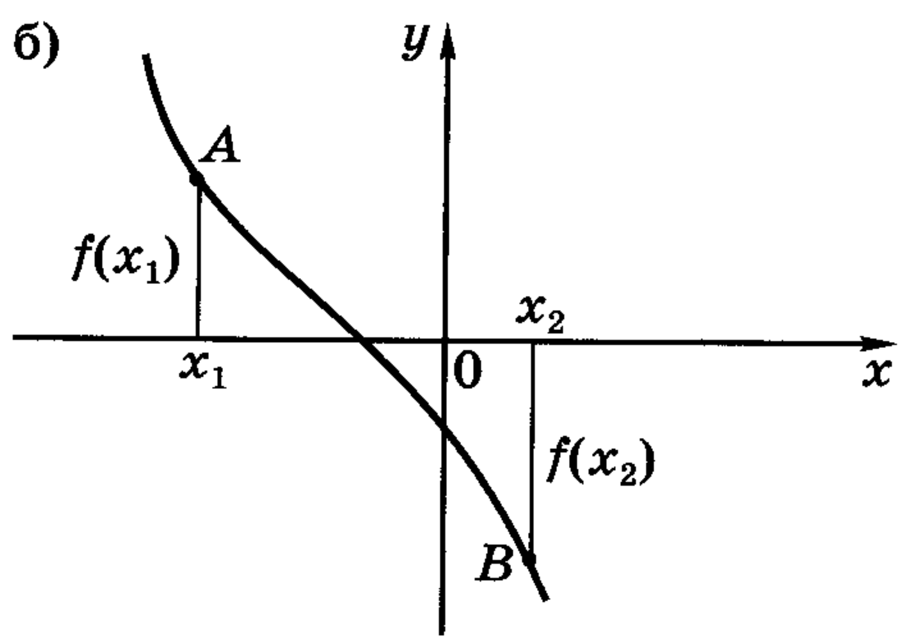


Рис. 67

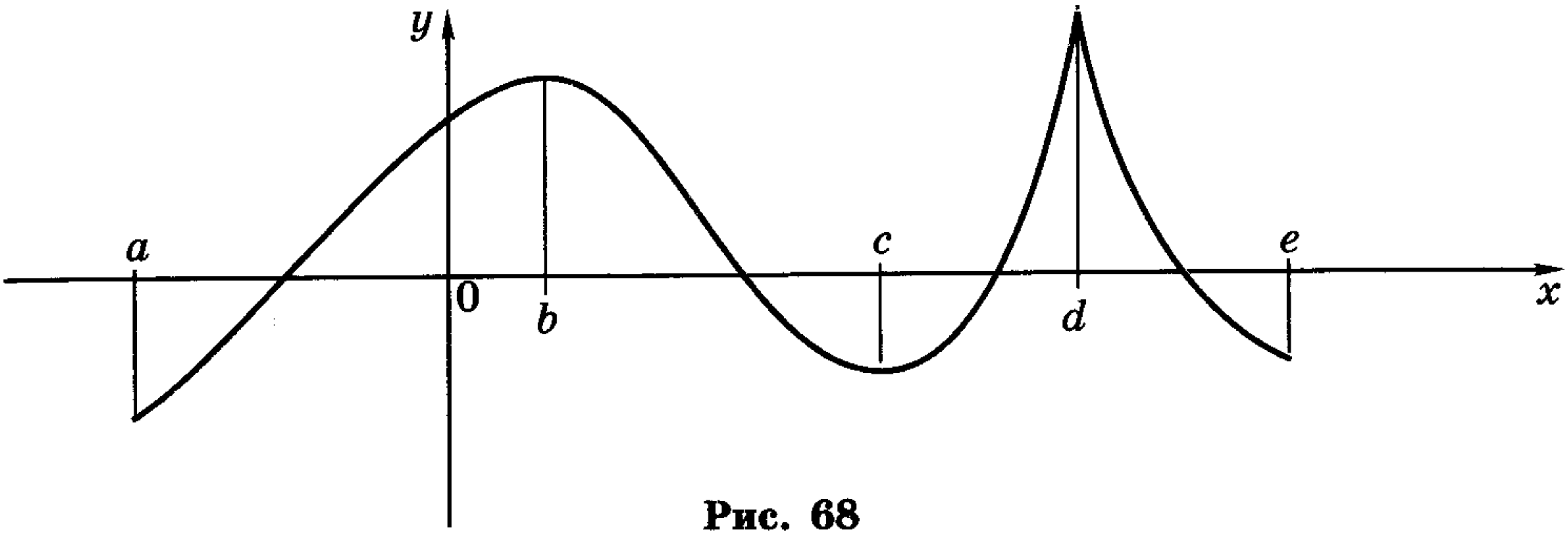


Рис. 68

В своей области определения $D(f)$ функция может возрастать на одних промежутках и убывать на других (рис. 68). На рисунке 68 представлен график функции f, определенной на отрезке $[a;\ e]$. Функция возрастает на отрезках $[a;\ b]$, $[c;\ d]$ и убывает на отрезках $[b;\ c]$ и $[d;\ e]$. Исследование функций на возрастание и убывание производится путем исследования знака разности $f(x_2)-f(x_1)$ и использования свойств неравенств. В 10 классе будут рассмотрены общие методы решения таких задач, а здесь мы рассмотрим некоторые частные случаи.

Пример 1.

Исследуем на возрастание и убывание линейную функцию

$$kx+b,\ x\in(-\infty;\ +\infty).$$

Решение. Пусть $x_1<x_2$. Исследуем знак разности $f(x_2)-f(x_1)$. Имеем $f(x_2)-f(x_1)=kx_2+b-kx_1-b=k(x_2-x_1)$.

Так как $x_2-x_1>0$, то знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ зависит от знака k. Если $k>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$, т. е. $f(x_2)>f(x_1)$ и функция $kx+b$ будет возрастающей на всей числовой оси. Если же $k<0$, то $f(x_2)-f(x_1)<0$, т. е. $f(x_2)<f(x_1)$ и функция $kx+b$ убывающая.

Таким образом, линейная функция $kx+b$ возрастает, если ее угловой коэффициент k положителен, и убывает, если он отрицателен. При $k=0$ линейная функция является постоянной.

Пример 2.

Исследуем на возрастание и убывание функцию x^2, $-\infty<x<+\infty$.

Решение. Пусть $x_1<x_2$. Рассмотрим разность

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1).$$

Так как $x_2-x_1>0$, то знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ зависит от знака множителя x_1+x_2. Сумма x_1+x_2 при различных значениях x_1 и x_2

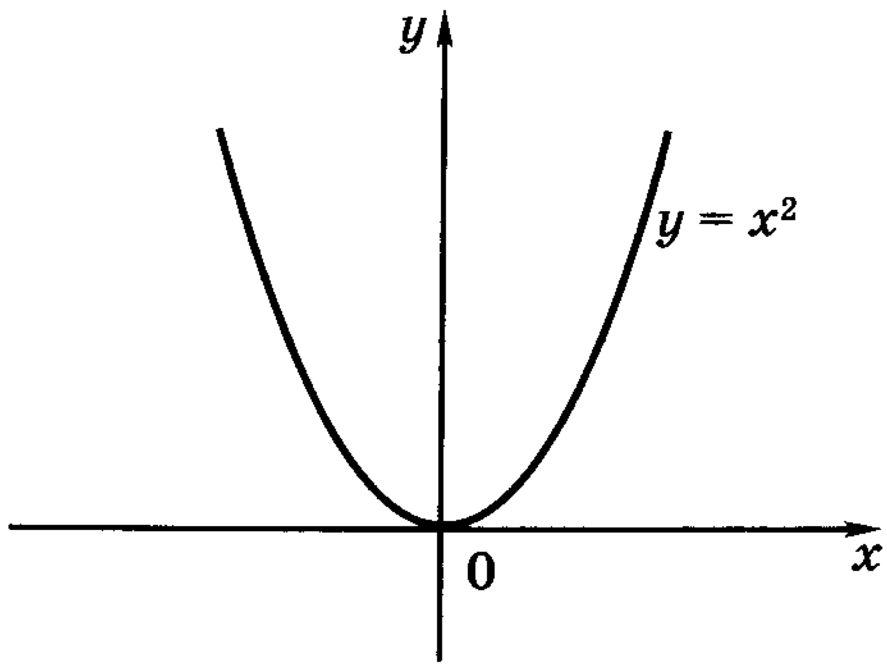


Рис. 69

может иметь любой знак. Однако если мы будем рассматривать отдельно положительные и отрицательные значения аргумента, то картина изменится.

1. Если $x_1<0$ и $x_2\leqslant 0$, то $x_1+x_2<0$ и $f(x_2)-f(x_1)<0$, т. е. $f(x_2)<f(x_1)$ и функция x^2 убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$.

2. Если же $x_1\geqslant 0$, $x_2>0$, то $x_1+x_2>0$ и $f(x_2)-f(x_1)>0$, т. е. $f(x_2)>f(x_1)$ и функция x^2 возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$.

Доказанным свойством функции x^2 мы интуитивно пользовались при построении ее графика (рис. 69).

Следствие.

Из проведенных рассуждений следует, что квадратичная функция ax^2+bx+c при $a>0$ убывает на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$. Если же $a<0$, то она возрастает на $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.

Пример 3.

Исследуем на возрастание и убывание функцию $\frac{1}{x}$.

Решение. Будем исследовать эту функцию сначала на промежутке $(-\infty;\ 0)$, а затем на промежутке $(0;\ +\infty)$.

1. Пусть $x_1\in(-\infty;\ 0)$, $x_2\in(-\infty;\ 0)$ и $x_1<x_2$. Рассмотрим разность

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1\cdot x_2}.$$

Ее числитель $x_1-x_2<0$, а знаменатель $x_1\cdot x_2>0$. Поэтому $f(x_2)-f(x_1)<0$, т. е. $f(x_2)<f(x_1)$. Это показывает, что на $(-\infty;\ 0)$ функция $\frac{1}{x}$ убывает.

2. Пусть теперь $x_1\in(0;\ +\infty)$, $x_2\in(0;\ +\infty)$ и $x_1<x_2$. Разность $f(x_2)-f(x_1)$ снова отрицательна, и поэтому функция $\frac{1}{x}$ убывает и на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Итак, функция $\frac{1}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. Однако на всей области своего определения $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ убывающей она не является. Действительно, пусть $x_1=-1$, $x_2=1$ (т. е. $x_1<x_2$), однако $f(x_1)=-1$, $f(x_2)=1$, т. е. $f(x_1)<f(x_2)$, что противоре-

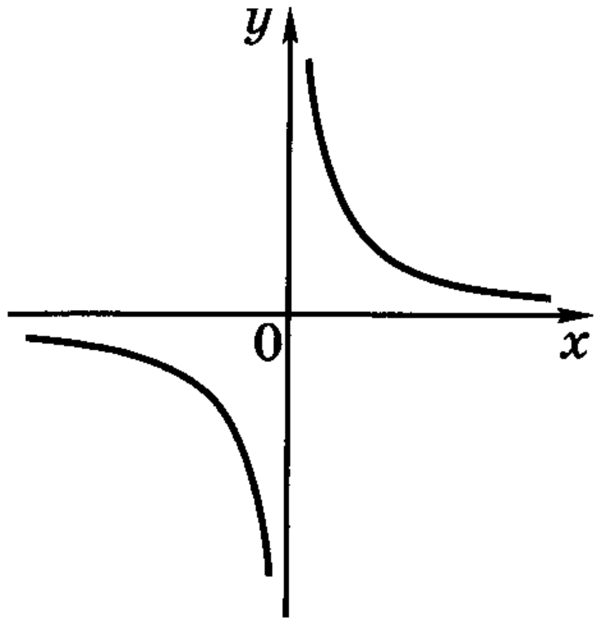
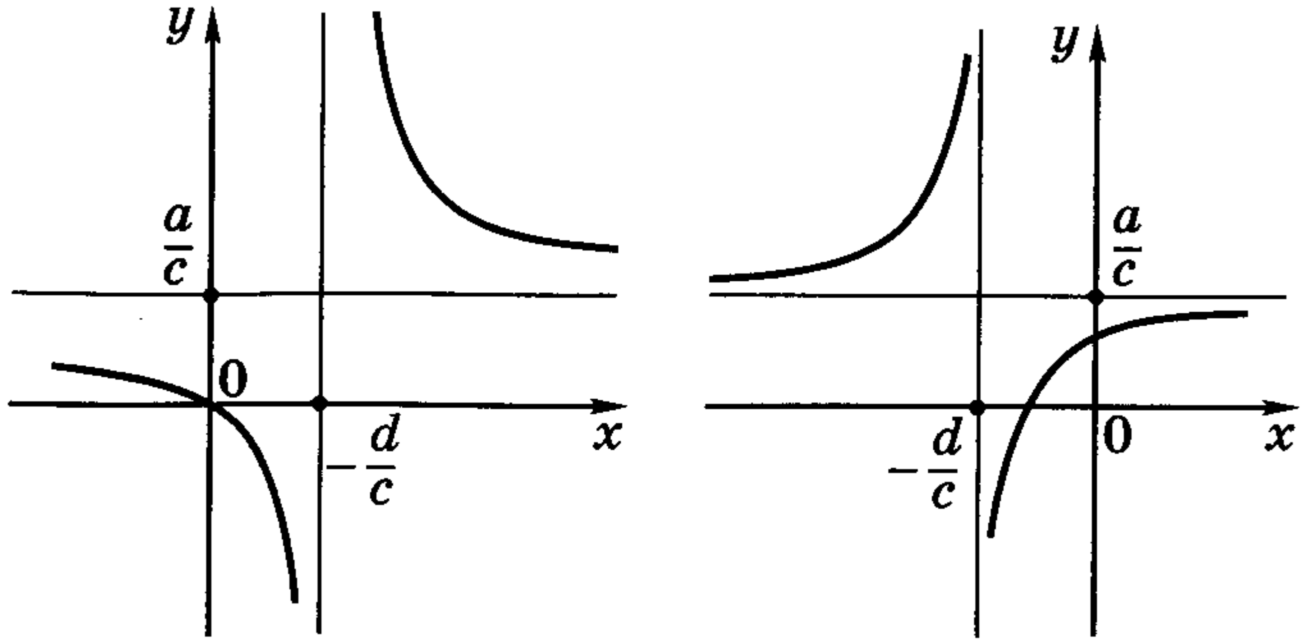


Рис. 70



а) **Рис. 71** б)

чит определению убывающей функции, и вновь отметим, что при построении графика функции $\frac{1}{x}$ мы интуитивно пользовались этим свойством (рис. 70).

Следствие.

Если $\frac{bc-ad}{c^2}>0$, то функция $\frac{ax+b}{cx+d}$ убывает на промежутках $\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c};\ +\infty\right)$ (рис. 71, *а*). Если же $\frac{bc-ad}{c^2}<0$, то $\frac{ax+b}{cx+d}$ возрастает на промежутках $\left(-\infty;\ -\frac{d}{c}\right)$ и $\left(-\frac{d}{c};\ +\infty\right)$ (рис. 71, *б*).

Пример 4.

Исследуем на возрастание и убывание функцию x^3, $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Решение. Возьмем два значения аргумента x_1 и x_2, и пусть $x_1<x_2$. Рассмотрим разность

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2).$$

Первый множитель положителен по предположению, а второй положителен при всех значениях x_1 и x_2. Поэтому $f(x_2)-f(x_1)>0$, т. е. $f(x_2)>f(x_1)$. Отсюда следует, что функция x^3 возрастает на всей оси. Выше мы установили, что функция x^3 нечетная, и поэтому мы можем нарисовать эскиз графика этой функции (рис. 72).

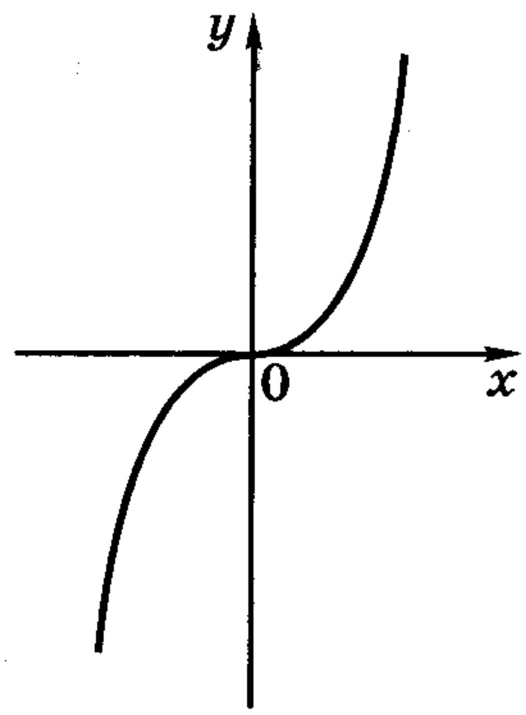


Рис. 72

Нахождение промежутков возрастания и убывания не очень простая задача, но в некоторых случаях исследование знака разности $f(x_2)-f(x_1)$ подсказывает, какие промежутки естественно рассматривать в качестве промежутков возрастания и убывания функции.

Пример 5.

Исследуем на возрастание и убывание функцию

$$\frac{x}{1+x^2}, \; -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим разность

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2^2} - \frac{x_1}{1+x_1^2} = \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}. \qquad (1)$$

В правой части равенства (1) знаменатель положителен, множитель $x_2 - x_1 > 0$ и знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ зависит от знака множителя $(1 - x_1 \cdot x_2)$, который положителен при $x_1 \cdot x_2 < 1$, отрицателен при $x_1 \cdot x_2 > 1$.

Поэтому рассмотрим следующие промежутки:

1. $(-\infty; -1]$. На нем $x_1 < -1$, $x_2 \leqslant -1$. Следовательно, $1 - x_1 \cdot x_2 < 0$, и поэтому $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$ и функция $\frac{x}{1+x^2}$ убывает на этом промежутке.

2. На промежутке $[-1; 1]$ выражение $1 - x_1 \cdot x_2 > 0$, и поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ — на этом промежутке функция возрастает.

3. На промежутке $[1; +\infty)$ множитель $1 - x_1 \cdot x_2$ снова отрицателен, и поэтому функция убывает.

Итак, функция $\frac{x}{1+x^2}$ убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ и возрастает на отрезке $[-1; 1]$.

Пример 6.

Существует ли значение a, при котором функция $ax^2 - 8x + 1$ возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$?

Решение. Известно, что квадратичная функция $ax^2 - 8x + 1$ монотонна на промежутках $\left(-\infty; \frac{8}{2a}\right]$ и $\left[\frac{8}{2a}; +\infty\right)$. Для того чтобы границей интервалов монотонности была точка $x = 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{8}{2a} = 2$, откуда $a = 2$. В то же время, для того чтобы функция $ax^2 - 8x + 1$ возрастала на первом из указанных промежутков и убывала на втором, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a < 0$. Но $a = 2 > 0$, следовательно, искомого значения a не существует.

Введем определение.

Определение 3. Функции, возрастающие или убывающие на промежутке I, называются *монотонными* на этом промежутке.

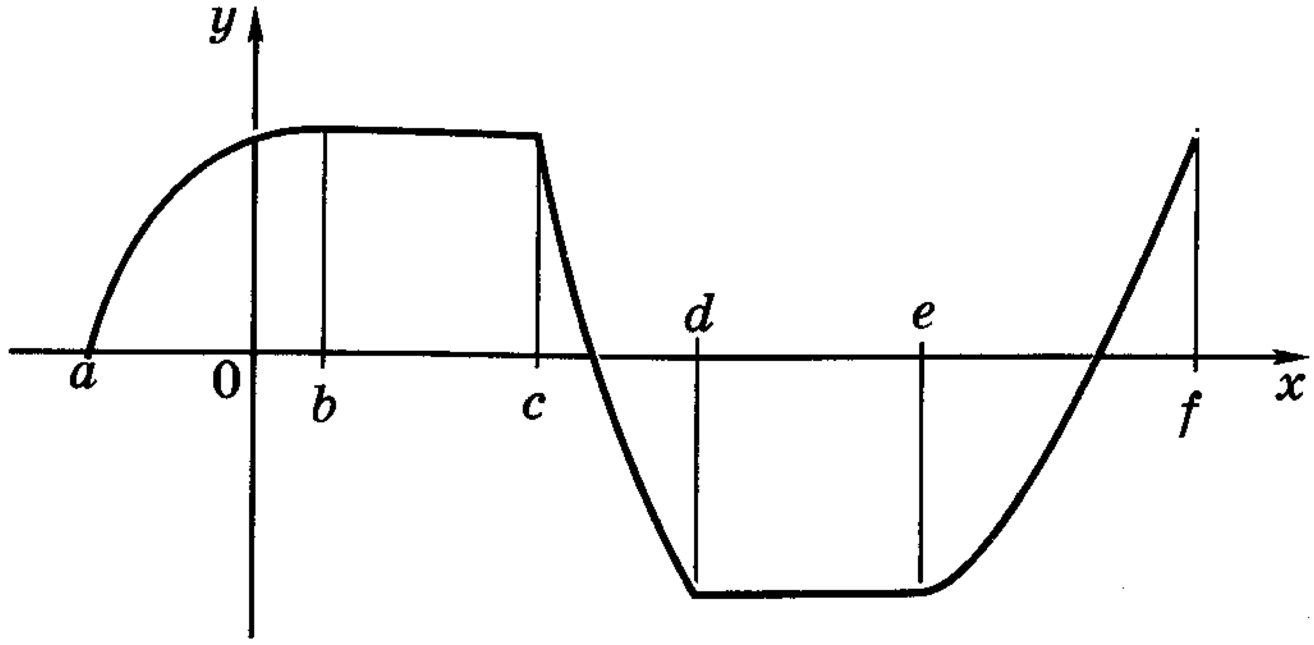


Рис. 73

Если из неравенства $x_1 < x_2$, x_1, $x_2 \in I$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функцию f называют неубывающей на промежутке I, а если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функцию f называют невозрастающей на промежутке I. На рисунке 73 представлен график функции: на отрезках $[a;\ b]$ и $[e;\ f]$ функция возрастает; на отрезках $[a;\ c]$ и $[d;\ f]$ функция не убывает; на отрезке $[c;\ d]$ функция убывает; на отрезке $[b;\ e]$ функция не возрастает.

УПРАЖНЕНИЯ

102. Определите промежутки возрастания и убывания для функций, графики которых представлены на рисунках 58—66.

103. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $4x-1$; б) $2-3x$; в) $5x+1$; г) $3-4x$; д) $-2x-3$.

104. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $10x^2-3x+1$; в) $-24x^2+10x-1$; д) $2x-5x^2$;
б) $1-4x^2$; г) $5x^2-3$; е) ax^2+bx+c.

105. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $\dfrac{2x-1}{4x+1}$; б) $\dfrac{3-4x}{1+3x}$; в) $\dfrac{4x-1}{-1-6x}$; г) $\dfrac{3x+7}{6x+1}$; д) $\dfrac{-3x+1}{4-9x}$; е) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

106. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $2x^3+4x-5$; в) $-x^3-x+3$; д) $2x^4+5x^2$;
б) $1-6x-3x^3$; г) x^4+3x^2; е) $-x^4-x^2$.

107*. Задайте графически функцию f, которая удовлетворяет условию:

а) f возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и убывает на $[-2;\ +\infty)$;
б) f убывает на $(-\infty;\ 0]$, возрастает на $[0;\ 3]$ и убывает на $[3;\ +\infty)$;
в) f возрастает на $(-\infty;\ -4]$, убывает на $[-4;\ 4]$ и возрастает на $[4;\ +\infty)$.

108. Докажите, что функция возрастает на указанном промежутке:

а) x^3-3x, $(-\infty;\ -1]$; в) x^5-16x, $[2;\ +\infty)$;
б) x^4-8x, $[2;\ +\infty)$; г) x^4+27x, $[0;\ +\infty)$.

Найдите какой-либо промежуток, на котором функция убывает.

3*

109. Существует ли значение a, при котором квадратичная функция убывает на первом и возрастает на втором из указанных промежутков?

а) ax^2+3x-1, $(-\infty;\ 3]$, $[3;\ +\infty)$;
б) $2x^2+ax+2$, $(-\infty;\ -4]$, $[-4;\ +\infty)$;
в) $(a+1)x^2+ax+3$, $(-\infty;\ 2]$, $[2;\ +\infty)$;
г) $ax^2+(a+2)x-3$, $(-\infty;\ 1]$, $[1;\ +\infty)$;
д) $(a-1)x^2+(a-2)x+1$, $(-\infty;\ 2]$, $[2;\ +\infty)$;
е) квадратичную функцию, зависящую от a, выберите самостоятельно, задайте промежутки $(-\infty;\ \alpha]$, $[\alpha;\ +\infty)$ и ответьте на поставленный вопрос.

110. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $(x+2)\,|x-2|$; в) $x^2+|4x-2|+1$;
б) $(2x-1)\,|3-x|$; $\boxed{\text{г)}}$ $x^2+|5x+1|+5$.

1) на $(-\infty;\ 0)$ убывает, на $(0;\ +\infty)$ возрастает;
2) на $(-\infty;\ 1)$ убывает, на $(1;\ +\infty)$ возрастает;
3) на $\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right)$ возрастает, на $\left(\frac{1}{5};\ -\infty\right)$ убывает;
4) на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{5}\right]$ убывает, на $\left[-\frac{1}{5};\ +\infty\right)$ возрастает.

111*. Докажите утверждения:

а) пусть f — четная функция, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Если f возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$, то на $(-\infty;\ 0]$ функция f убывает;
б) пусть f — нечетная функция, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Если f возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$, то функция f возрастает и на промежутке $(-\infty;\ 0]$.

24. ТОЧКИ МАКСИМУМА И МИНИМУМА. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ПРОМЕЖУТКЕ

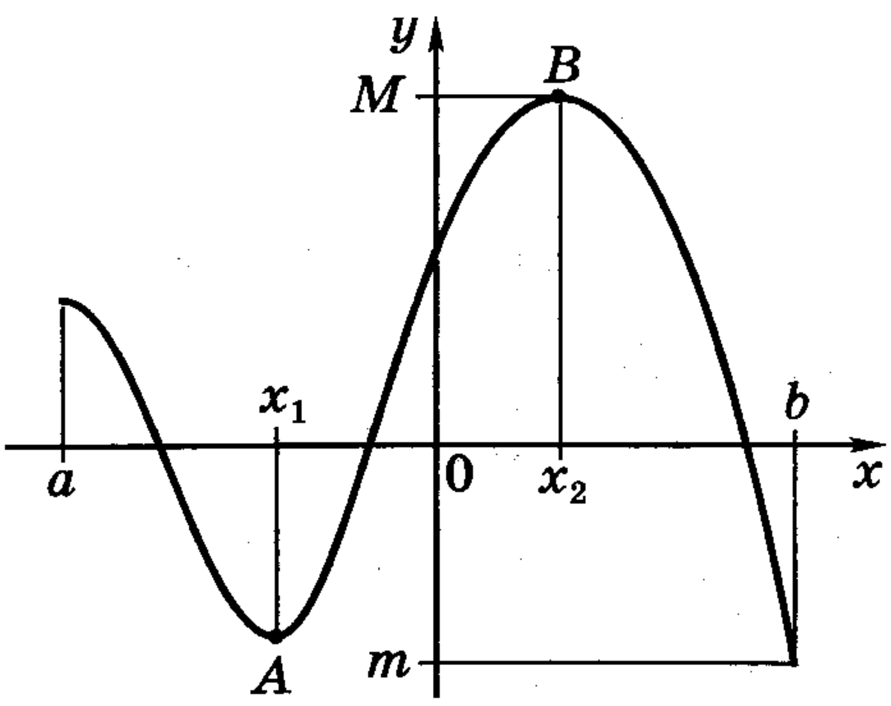


Рис. 74

Посмотрим внимательно на график функции f, определенной на отрезке $[a;\ b]$ (рис. 74). Мы видим в точке A графика впадину, а в точке B горб. Наличие этих особенностей связано с тем, что в точке x_1 значение $f(x_1)$ меньше всех значений, принимаемых функцией в точках, близких к точке x_1. В точке x_2 значение $f(x_2)$ больше всех значений, принимаемых функцией в точках, близких к точке x_2.

Такие точки играют важную роль при изучении функций, и их называют *точками минимума и максимума.* Для придания точного смысла словам «точки, близкие к точке x_1» в математике вводят понятие окрестности точки.

Сформулируем основные определения.

Определение 1. ***Окрестностью точки*** x_0 **называют интервал** $(x_0-h;\ x_0+h)$.

Изменяя число h, будем получать различные окрестности точки x_0 (рис. 75).

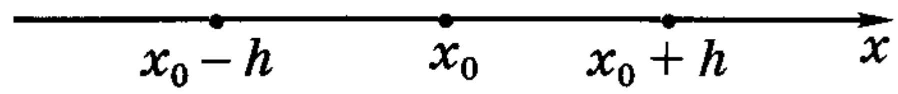


Рис. 75

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f, если ее значение в точке x_0 меньше всех других ее значений, принимаемых в некоторой окрестности этой точки:

$$f(x_0)<f(x),\ x\neq x_0.$$

Значение функции f в точке x_0 называют *минимумом* и обозначают

$$y_{\min}=f(x_0).$$

Определение 3. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если ее значение в точке x_0 больше всех других ее значений, принимаемых в некоторой окрестности этой точки:

$$f(x_0)>f(x),\ x\neq x_0.$$

Значение функции f в точке x_0 называют *максимумом* и обозначают

$$y_{\max}=f(x_0).$$

Из этих определений следует, что для функции, график которой представлен на рисунке 74, точка x_1 является точкой минимума, $y_{\min}=f(x_1)$, а точка x_2 — точкой максимума, $y_{\max}=f(x_2)$.

Пример 1.

Покажем, что точка $x=0$ является точкой минимума функции ax^2 при $a>0$ и точкой максимума при $a<0$.

Решение. Пусть $a>0$. Мы знаем, что при $x\leqslant 0$ функция убывает до нуля, а при $x\geqslant 0$ возрастает от нуля. Согласно определению 2 это означает, что $x=0$ — точка минимума функции ax^2. Доказательство для $a<0$ аналогично.

Пример 2.

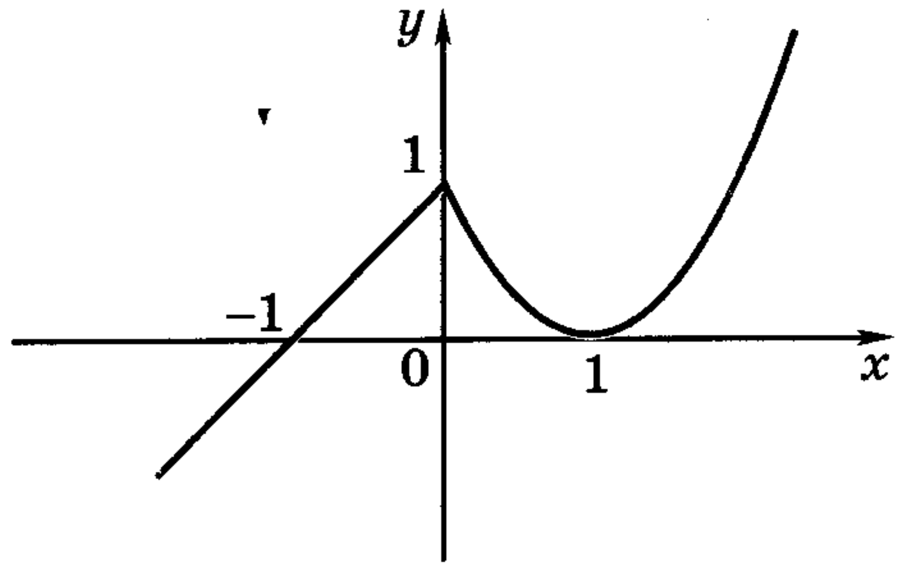


Рис. 76

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases}x+1, \text{ если } x\in(-\infty;\ 0],\\(x-1)^2, \text{ если } x\in(0;\ +\infty).\end{cases}$$

Существуют ли у этой функции точки максимума и минимума (рис. 76)?

Решение. Рассмотрим точку $x=0$. Выберем окрестность $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ этой точки. Мы знаем, что линейная функция $x+1$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, а квадратичная функция $(x-1)^2$ убывает на промежутке $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$. Значит, значение функции f в точке 0 будет больше всех других значений, принимаемых функцией в выбранной окрестности. Согласно определению 3 это означает, что $x=0$ — точка максимума, $y_{\max}=f(0)=1$.

Теперь рассмотрим точку $x=1$ и ее окрестность $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$. Квадратичная функция $(x-1)^2$ убывает на промежутке $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$ и возрастает на промежутке $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$ — это значит, что значение f в точке $x=1$ меньше всех других значений, принимаемых функцией в выбранной окрестности. Согласно определению 2 отсюда следует, что $x=1$ — точка минимума, $y_{\min}=f(1)=0$.

Точки минимума и максимума называются *точками экстремума* (от латинского extremum — крайнее), а значения функции в этих точках — *экстремумами.*

Отметим, что свойство функции f иметь экстремум в точке x_0 зависит только от значений функции в самой этой точке и вблизи нее (в окрестности точки). Такие свойства называют локальными (от латинского слова locus — место) в отличие от глобальных свойств (от французского global — всеобщий), определяемых значениями функции на целом промежутке. К таким глобальным свойствам относятся самое большое и самое маленькое значения функции f на промежутке I.

Самое большое среди всех значений, которое функция f принимает на заданном промежутке I, называется *наибольшим значением* функции на промежутке и обозначается

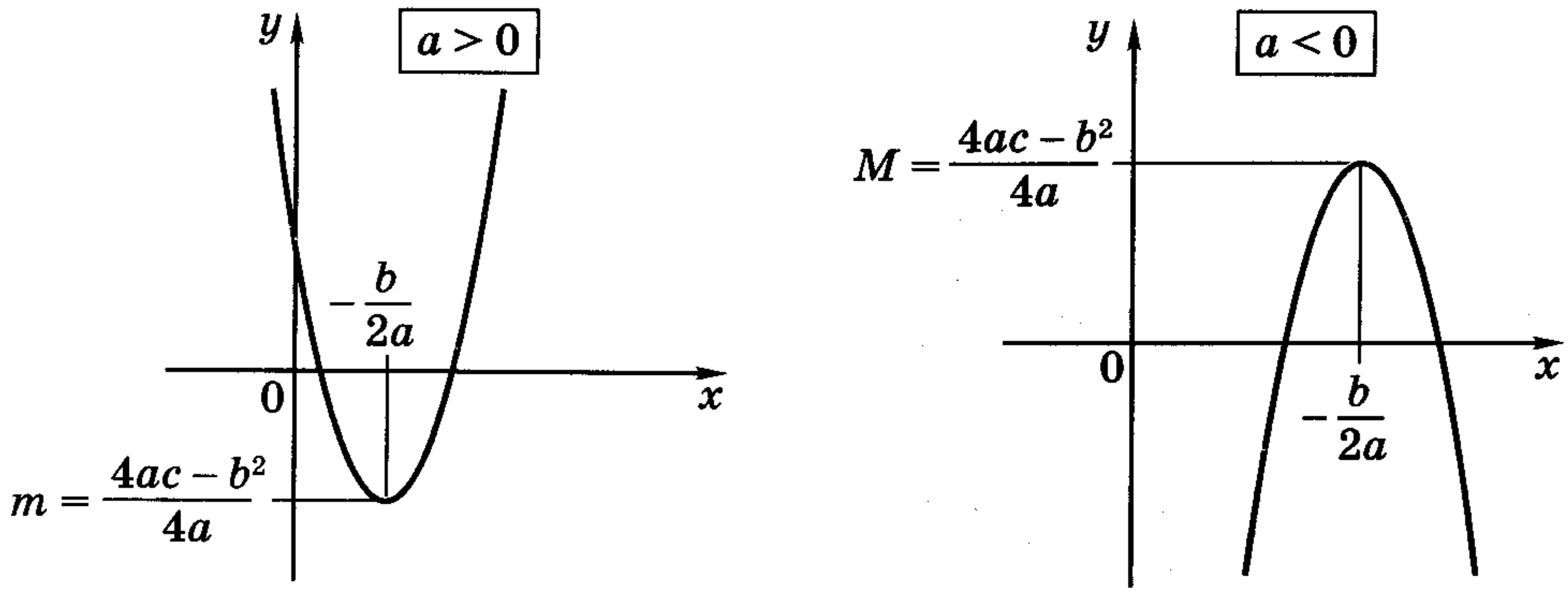
$$M=\max f(x),\ x\in I.$$

Самое маленькое среди всех значений, которое функция f принимает на заданном промежутке I, называется *наименьшим значением* функции на промежутке I и обозначается

$$m=\min f(x),\ x\in I.$$

m – наименьшее значение функции
M – не существует

M – наибольшее значение функции
m – не существует



а) б)

Рис. 77

В зависимости от вида промежутка I и свойств функции f она может иметь и наибольшее значение M, и наименьшее значение m; может иметь только одно из них, а может не иметь и ни одного.

Пример 3.

Рассмотрим квадратичную функцию ax^2+bx+c. Выясним, есть ли среди значений квадратичной функции, принимаемых ею при $-\infty<x<+\infty$, наибольшее и наименьшее.

Решение. Из равенства

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

следует, что при $a>0$ наименьшее значение функция принимает при $x=-\frac{b}{2a}$ и оно равно $m=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Наибольшего значения квадратичная функция в этом случае не имеет (рис. 77, *а*). Отсюда следует, что в этом случае множество значений квадратичной функции представляет собой промежуток $\left[\frac{4ac-b^2}{4a};\ +\infty\right)$.

Если же $a<0$, то квадратичная функция при $x=-\frac{b}{2a}$ принимает свое наибольшее значение, равное $M=\frac{4ac-b^2}{4a}$, а наименьшего значения квадратичная функция не имеет (рис. 77, *б*). Отсюда следует, что в этом случае множество значений квадратичной функции представляет собой промежуток $\left(-\infty;\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

Итак, при $-\infty < x < +\infty$

$$\max(ax^2+bx+c)=\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}, \text{ если } a<0,\\ \text{не существует, если } a>0;\end{cases}$$

$$\min(ax^2+bx+c)=\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}, \text{ если } a>0,\\ \text{не существует, если } a<0.\end{cases}$$

Отметим, что при $a>0$ точка $x=-\dfrac{b}{2a}$ является точкой минимума, а при $a<0$ точка $x=-\dfrac{b}{2a}$ является точкой максимума.

Пример 4.

Укажем наибольшее и наименьшее значения функции (если они существуют):

а) для функции, график которой изображен на рисунке 74; б) для функции, график которой изображен на рисунке 78.

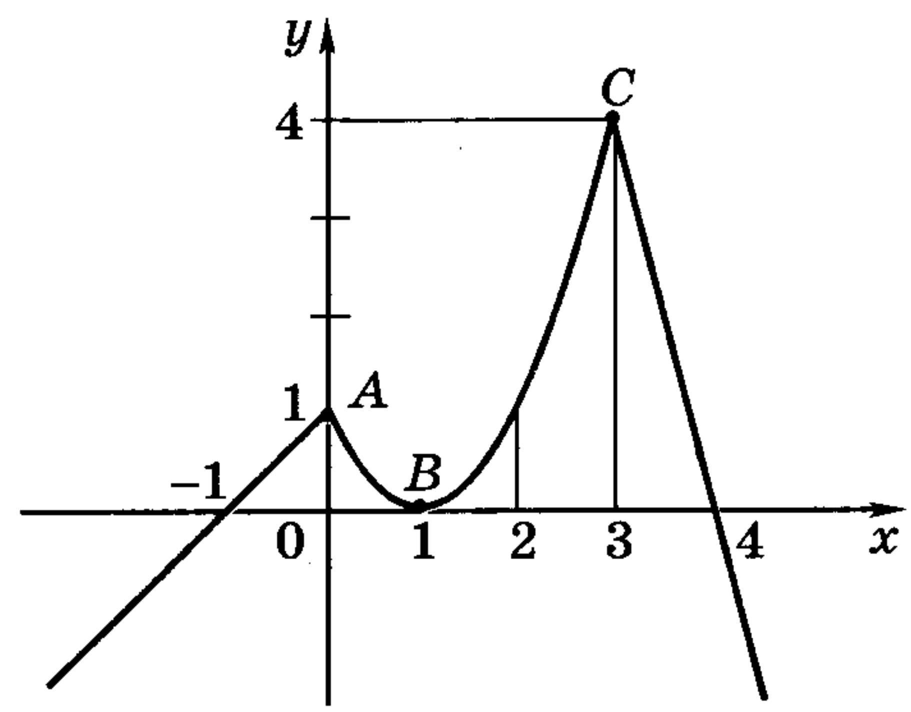


Рис. 78

Решение. а) Своего наибольшего значения M функция достигает в точке максимума $x=x_2$, $M=f(x_2)$; своего наименьшего значения функция достигает при $x=b$, $m=f(b)$. Все значения функции лежат в этом случае на отрезке $[m; M]$ оси Oy.

б) Свое наибольшее значение $M=4$ функция принимает при $x=3$. Наименьшего значения функция не имеет, и поэтому все значения данной функции принадлежат промежутку $(-\infty; 4]$.

В заключение введем определение ограниченной функции.

Определение 4. Функция f называется *ограниченной* на промежутке I, если существуют числа A и B, такие, что для всех значений $x \in I$ справедливо неравенство

$$A \leqslant f(x) \leqslant B. \qquad (1)$$

Из этого определения следует, что если функция f на промежутке I принимает свое наименьшее значение m и свое наибольшее значение M, то она ограничена на промежутке I, для этого достаточно положить $A=m$, $B=M$.

Функции, не являющиеся ограниченными на промежутке I, называются *неограниченными*. Иногда функция f удовлетворяет на промежутке I только одному из неравенств (1). В связи с этим дадим еще одно определение.

Определение 5. Если существует число A, такое, что для всех значений $x \in I$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant A, \qquad (2)$$

то функция f называется *ограниченной снизу* на промежутке I. Если же существует число B, такое, что для всех значений $x \in I$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant B, \qquad (3)$$

то функция f называется *ограниченной сверху*.

Пример 5.

Покажем, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ является ограниченной снизу на числовой оси при $a > 0$ и ограниченной сверху на числовой оси при $a < 0$.

Решение. Как мы установили выше, при $a > 0$ $ax^2 + bx + c \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a} = A$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$, т. е. выполнено условие (2).

Если же $a < 0$, то $ax^2 + bx + c \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a} = B$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Это означает, что выполнено условие (3).

УПРАЖНЕНИЯ

Постройте график функции f. С его помощью найдите точки экстремума и значения M и m, если они существуют. Укажите множество значений функции **(112—113)**.

112. а) $|x^2 - 7x + 12|$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
б) $|-2(x^2 - 6x + 8)|$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
в) $2|x - 3| + 5$, $x \in (-2; 5)$;
г) $|x + 1| + |4 - 2x|$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
д) $|-x^2 + 6x + 7|$, $x \in [0; 10]$.

113. а) $\left|\frac{2x - 3}{x + 4}\right|$, $x \in [-5; 2]$;

б) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in (-\infty; -1], \\ 2x^2, & x \in (-1; 2], \\ 24 - 8x, & x \in (2; +\infty); \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & x \in (-\infty; 3], \\ \frac{3}{x}, & x \in (3; +\infty). \end{cases}$

114. Найдите наибольшее или наименьшее значение функции $ax^2 + bx + c$ и множество ее значений, если ее график проходит через точки:
а) $A(0; -5)$, $B(1; -6)$, $C(-1; 2)$;
б) $A(0; 1)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 1)$;
в) $A(0; -2)$, $B(1; -3)$, $C(2; 8)$;
г) A, B, C (координаты этих точек задайте самостоятельно).

115. Для функций, заданных графиками на рисунках 58—66, определите: а) область определения функции; б) промежутки возрастания и убывания; в) точки экстремума; г) наибольшее значение функции M и ее наименьшее значение m; д) множество значений функции; е) промежутки, на которых $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant 0$.

116. Для каких значений a множество точек, лежащих на заданной параболе, не имеет ни одной общей точки с заданной полуплоскостью? Выполните схематический чертеж.

а) $y = ax^2 + 3x + 2$, $y - 2x - 1 \leqslant 0$;
б) $y = ax^2 - 4x - 3$, $y - 3x + 1 \geqslant 0$;
в) $y = x^2 + ax - 1$, $y - 2x + 2 \leqslant 0$;
г) $y = ax^2 - 3x - 5$, $y - 2x + 4 \geqslant 0$.

117. Для заданной квадратичной функции на отрезке [0; 2] найдите точку экстремума, значение функции в этой точке, наибольшее M и наименьшее m ее значения на этом отрезке. Укажите множество значений функции на этом отрезке.

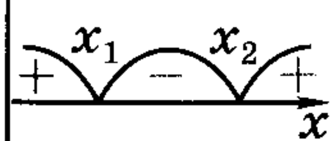
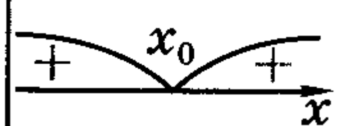
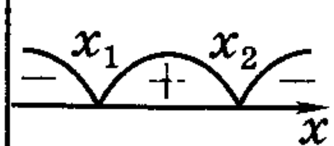
а) $-x^2 + 2x + 2$;
б) $x^2 - 3x + 1$;
в) $x^2 + 2x - 3$;
г) $3x^2 + 5x - 1$;
д) $-2x^2 - 6x + 1$;
е) $-3x^2 + 6x + 4$.

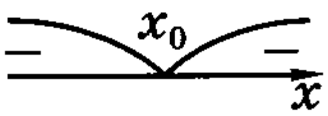
118. По результатам упражнения **117** сделайте вывод о том, в каких точках отрезка [0; 2] заданная квадратичная функция может принимать значения M и m.

Подведем итоги изучения свойств функций и соберем вместе все сведения, которые мы получили о свойствах квадратичной функции $ax^2 + bx + c$ и дробно-линейной функции $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Для большей наглядности сведем их в одну таблицу (табл. 1). Графики этих функций, которые многократно рассматривали выше, полностью соответствуют свойствам этих функций, перечисленным в таблице 1. Это значит, что мы правильно «угадали» их вид. На самом деле, как правило, в математике сначала устанавливают свойства функции, а затем уже строят график функции в соответствии с этими свойствами.

Таблица 1

№ п/п	Свойства функций	Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	Дробно-линейная функция $\varphi(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$
1	**Область определения**	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$
2	Четность, нечетность	При $b = c = 0$ четная	При $a = d = 0$ нечетная

№ п/п	Свойства функций	Квадратичная функция $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$	Дробно-линейная функция $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ c\neq 0,\ \dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$
3	**Множество значений**	$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right)$ **при** $a>0$ $\left(-\infty;\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$ **при** $a<0$	$\left(-\infty;\dfrac{a}{c}\right)\cup\left(\dfrac{a}{c};+\infty\right)$
4	**Точки пересечения с осью Oy $(x=0)$**	$x=0,\ f(0)=c,\ A(0;\ c)$	$x=0,\ \varphi(0)=\dfrac{b}{d},\ d\neq 0,$ $A\left(0;\ \dfrac{b}{d}\right)$
5	**Точки пересечения с осью Ox $(y=0)$**	I. $D=b^2-4ac>0$ $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ II. $D=0$ $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ III. $D<0$ — точек пересечения нет	I. $a\neq 0,\ y=0,\ x_1=-\dfrac{b}{a}$ II. $a=0,\ b\neq 0$ — точек пересечения нет
6	**Интервалы знакопостоянства**   	I. $a>0$ 1. $D>0$; x_1, x_2 — корни трехчлена $(x_1<x_2)$: $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$ $f(x)<0$ при $x\in(x_1;\ x_2)$ 2. $D=0$. $f(x)>0$ для всех $x\neq x_0=x_1=x_2$ 3. $D<0$. $f(x)>0$ для всех x II. $a<0$ 1. $D>0$; x_1, x_2 — корни трехчлена $f(x)>0,\ x\in(x_1;\ x_2)$ $f(x)<0,\ x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;$ $+\infty)$	$\dfrac{a}{c}>0$: $bc-ad>0$: $\varphi(x)>0$ при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$; $\varphi(x)<0$ при $x\in\left(-\dfrac{b}{a};-\dfrac{d}{c}\right)$ $bc-ad<0$: $\varphi(x)>0$ при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$; $\varphi(x)<0$ при $x\in\left(-\dfrac{d}{c};-\dfrac{b}{a}\right)$ $\dfrac{a}{c}<0$: $bc-ad>0$: $\varphi(x)>0$ при $x\in\left(-\dfrac{d}{c};-\dfrac{b}{a}\right)$ $bc-ad<0$: $\varphi(x)>0$ при $x\in\left(-\dfrac{b}{a};-\dfrac{d}{c}\right)$

№ п/п	Свойства функций	Квадратичная функция $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$	Дробно-линейная функция $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ c\neq 0,\ \dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$
	 	2. $D=0$. $f(x)<0$ для всех $x\neq x_0=x_1=x_2$ 3. $D<0$. $f(x)<0$ для всех x	$\dfrac{a}{c}<0$: $bc-ad>0$: $\varphi(x)<0$ при $x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{d}{c}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{a};\ +\infty\right)$ $bc-ad<0$: $\varphi(x)<0$ при $x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{a}\right)\cup\left(-\dfrac{d}{c};\ +\infty\right)$
7	Интервалы монотонности	I. $a>0$ f убывает на $\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ и возрастает на $\left[-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$ II. $a<0$ f возрастает на $\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ и f убывает на $\left[-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$	I. $bc-ad>0$. φ убывает на $\left(-\infty;\ -\dfrac{d}{c}\right)$ и на $\left(-\dfrac{d}{c};\ +\infty\right)$ II. $bc-ad<0$. φ возрастает на $\left(-\infty;\ -\dfrac{d}{c}\right)$ и на $\left(-\dfrac{d}{c};\ +\infty\right)$
8	Точки экстремума	I. $a>0$, $x=-\dfrac{b}{2a}$ — точка минимума II. $a<0$, $x=-\dfrac{b}{2a}$ — точка максимума	Точки экстремума отсутствуют
9	Наименьшее значение Наибольшее значение	I. $a>0$, $m=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$; (M не существует) II. $a<0$, $M=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$; (m не существует)	Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет
10	Асимптоты	Не существуют	$x=-\dfrac{d}{c}$ — вертикальная $y=\dfrac{a}{c}$ — горизонтальная

119. Перечислите свойства функций, графики которых изображены на рисунках 79—84. Для каждой из них найдите область определения, промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, наибольшие и наименьшие значения, множество значений функции, промежутки, на которых $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant 0$.

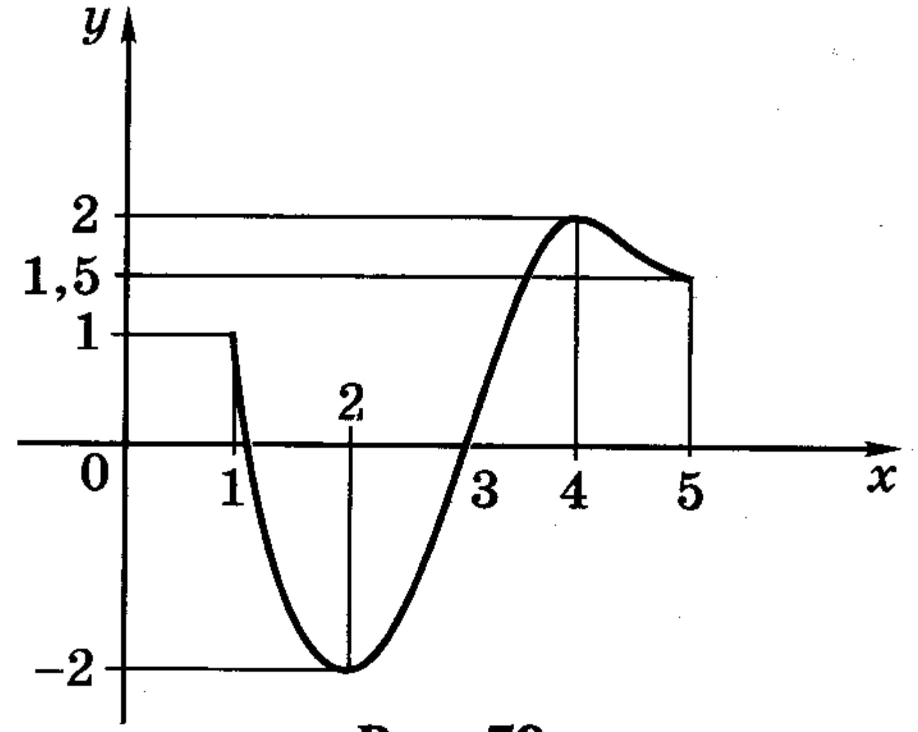


Рис. 79

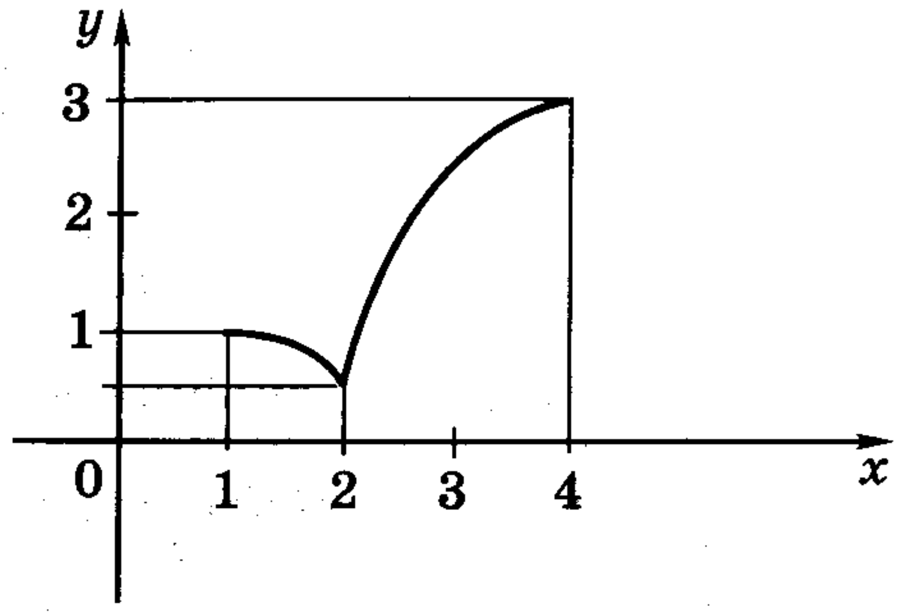


Рис. 80

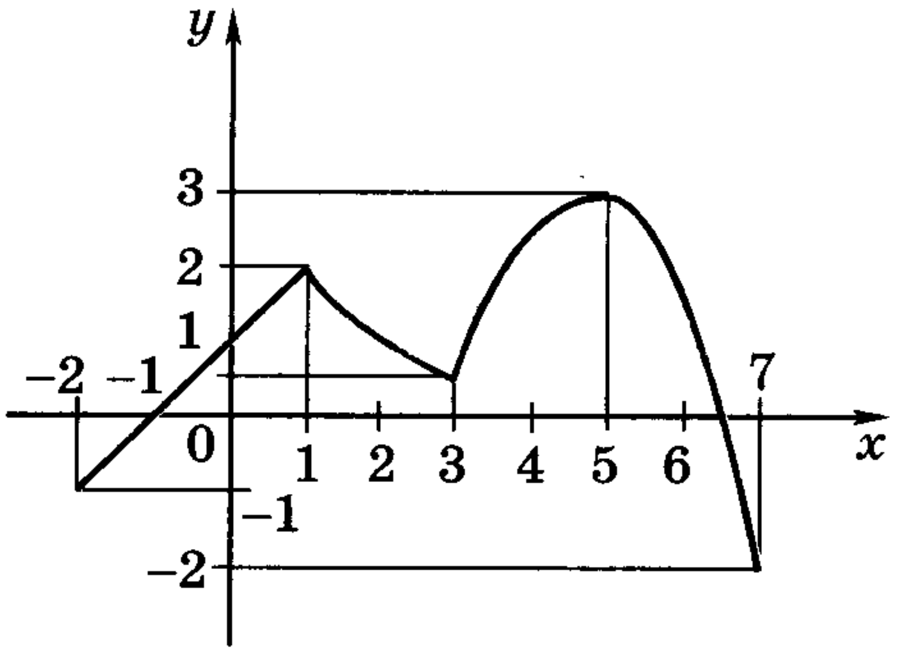


Рис. 81

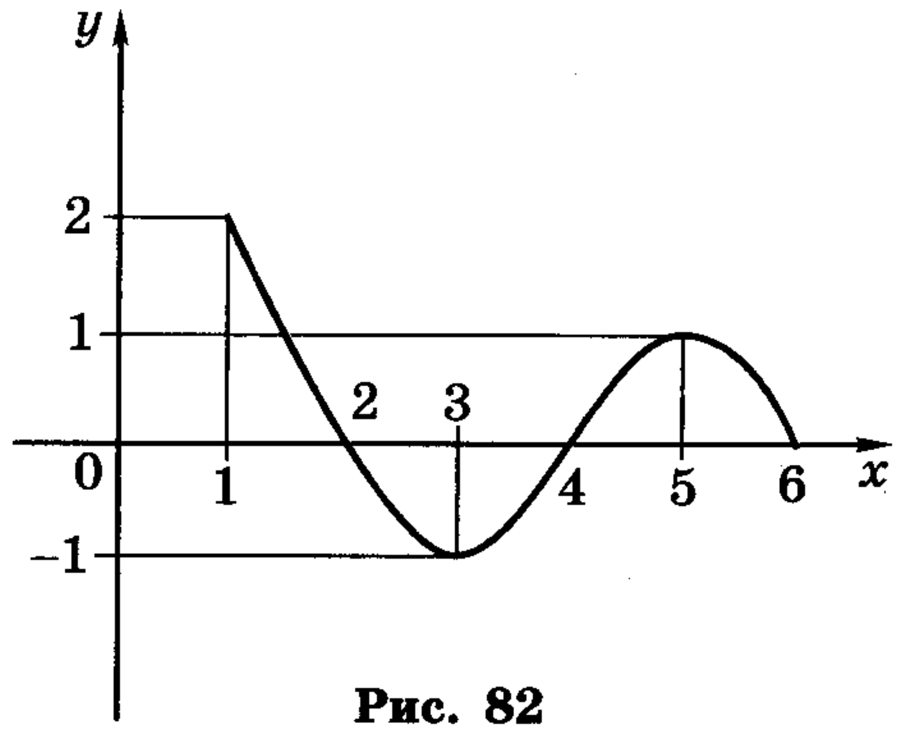


Рис. 82

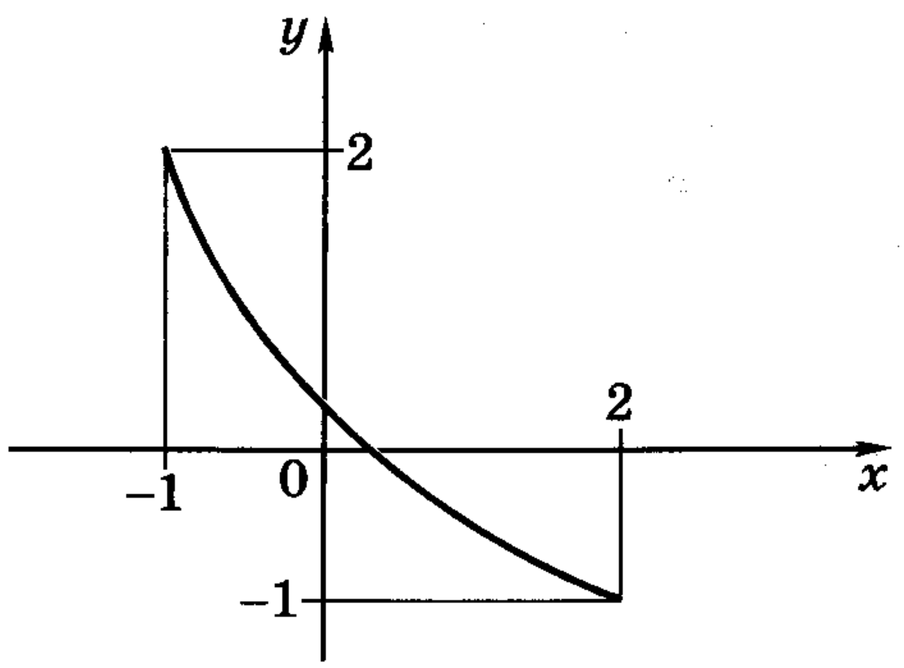


Рис. 83

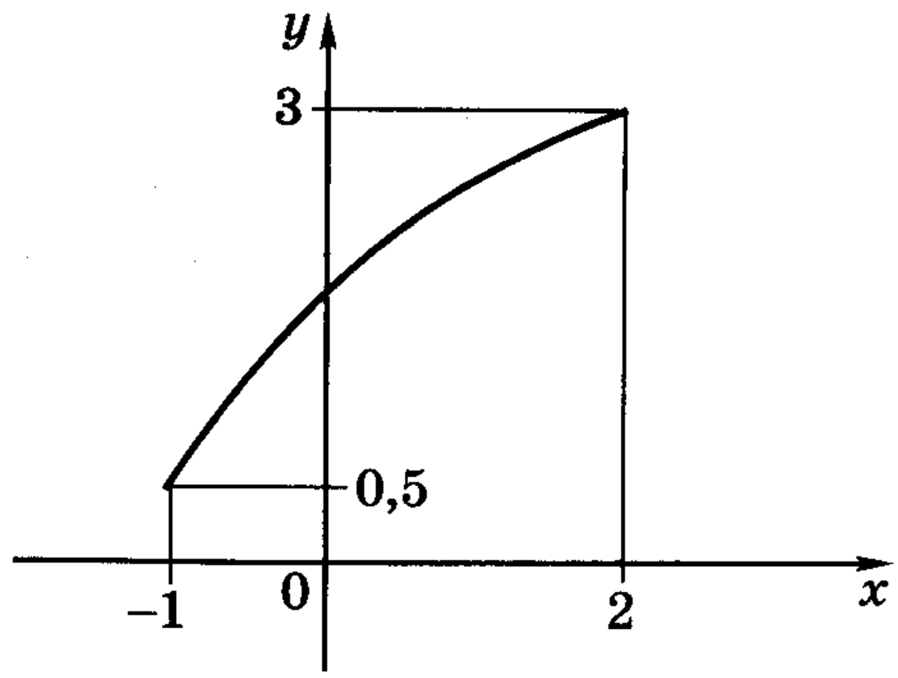


Рис. 84

25. ЧТЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Умение изображать геометрически функциональные зависимости позволяет наглядно представить все особенности изучаемых процессов. Эти особенности проще всего увидеть в том случае, когда функция задана графически. Например, на рисунке 85 задан график зависимости силы трения F от скорости движения v стальной пластины по стальной поверхности $F=f(v)$.

Глядя на график этой функции, можно сделать следующие выводы о ее свойствах:

1. Функция $f(v)$ определена для всех значений $v \geqslant 0$ (хотя физически не стоит рассматривать эту функцию при очень больших значениях v!).

2. Функция не обращается в нуль, и все ее значения положительны.

3. Множеством значений этой функции является отрезок [0,6; 1,5].

4. При $v=0$ $f(0)=0{,}6$.

5. На промежутке [0; 6] функция возрастает, а на [6; $+\infty$] — убывает.

6. В точке $v=6$ функция имеет максимум $f_{\max}=1{,}5$. Точки минимума у нее отсутствуют.

7. Наименьшее значение функции $m=0{,}6$, наибольшее — $M=1{,}5$.

8. Из графика видно, что прямая $F=1$ является горизонтальной асимптотой.

9. Можно отметить, что значения F, принадлежащие промежутку [0,6; 1), принимаются только один раз, в то время как значения F, принадлежащие промежутку (1; 1,5),— дважды.

Процедура, с помощью которой по заданному графику функции установили наличие (или отсутствие) свойств функции, называется *чтением графика* функции.

Таким образом, прочитать график — это значит перечислить свойства той функции, которая задана этим графиком. Совсем другая задача возникает в том случае, когда функция задана аналитически, т. е. с помощью формулы.

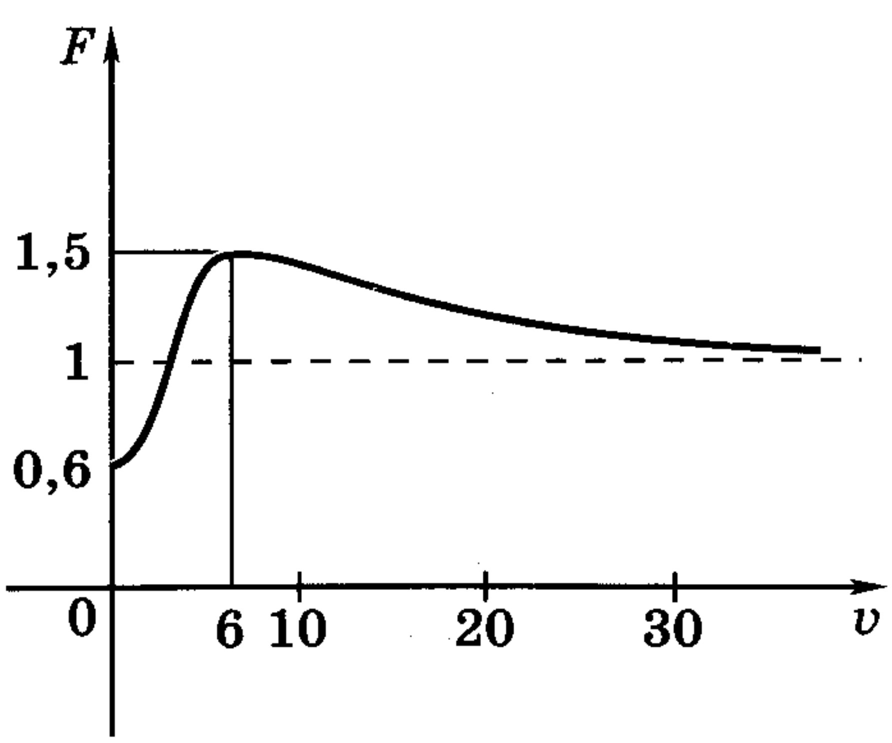


Рис. 85

Каким образом изобразить график этой функции и увидеть все ее особенности? Для этого мы сначала *исследуем* заданную функцию, т. е. проверяем наличие или отсутствие у нее свойств, перечисленных в таблице 1. Эти свойства являются той «путевой нитью», следуя которой можно сначала найти все особенности функции, а затем, учитывая их, построить эскиз ее графика. Эта процедура называется *исследованием функции*.

Сразу же отметим, что если функция f задана с помощью формулы, то совсем не обязательно, что мы сумеем проверить наличие или отсутствие всех свойств, перечисленных в таблице: установление некоторых из них бывает очень сложным. Однако во многих случаях знание даже части свойств позволяет построить эскиз графика исследуемой функции.

26. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

Рассмотрим целые функции, т. е. такие функции, для вычисления значений которых над x и некоторыми постоянными производится конечное число арифметических действий: сложения, вычитания и умножения. Примеры целых функций:

$$1+2x, \quad ax^2+bx+c, \quad x^3+4x-3, \quad x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Каждая целая функция может быть представлена многочленом некоторой степени. Если к перечисленным арифметическим действиям добавить еще и деление, то такую функцию называют рациональной. Каждая рациональная функция является отношением двух многочленов. Например, функции

$$\frac{x^2+1}{x-1}, \quad \frac{x}{x^2-4}, \quad \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \frac{ax+b}{cx^2+dx+f}$$

являются рациональными.

При построении графика рациональной функции точки, в которых ее знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, играют особую роль. Если $x=x_0$ является нулем знаменателя, то вертикальная прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой: по мере приближения x к значению x_0 точки графика функции удаляются от оси Ox и приближаются к прямой $x=x_0$. Именно этим свойством обладала прямая $x=-\frac{d}{c}$ при изучении функции $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Если при неограниченном увеличении $|x|$ точки графика неограниченно приближаются к прямой $y=y_0$, то эту прямую называют горизонтальной асимптотой. При изучении функции $\frac{ax+b}{cx+d}$ таким свойством обладала прямая $y=\frac{a}{c}$. Рассмотрим примеры.

Пример 1.

Исследуем функцию $\frac{x}{1+x^2}$ и построим эскиз ее графика.

Решение. Проверим, какими свойствами (см. табл. 1) обладает данная функция.

1. Функция определена для всех значений $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Из равенства $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$ вытекает нечетность функции и симметрия ее графика относительно начала координат $O(0;\ 0)$. Поэтому график функции достаточно построить лишь для $x \in [0;\ +\infty)$.

3. Изучим множество $E(f)$ значений функции. Выберем некоторое число y_0 и предположим, что y_0 является значением функции $\frac{x}{1+x^2}$. Тогда существует значение x, такое, что уравнение

$$y_0 = \frac{x}{1+x^2} \tag{1}$$

имеет решение.

Если $y_0 = 0$, то уравнение (1) имеет единственный корень $x = 0$, откуда следует, что график функции проходит через начало координат и $0 \in E(f)$.

Если $y_0 \neq 0$, то запишем уравнение (1) в виде $y_0 x^2 - x + y_0 = 0$. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = 1 - 4y_0^2$ неотрицателен, т. е. $1 - 4y_0^2 \geqslant 0$, или

$$-\frac{1}{2} \leqslant y_0 \leqslant \frac{1}{2},\ y_0 \neq 0. \tag{2}$$

Из неравенства (2) и условия, что $0 \in E(f)$, следует, что $E(f) = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$. Это значит, что наибольшее значение функции на $(-\infty; +\infty)$ равно $\frac{1}{2}$, т. е. $M = \frac{1}{2}$, а наименьшее $m = -\frac{1}{2}$. Эти значения функция принимает соответственно в точках $x = 1$ и $x = -1$. Соответствующие точки графика обозначим через $A\left(-1;\ -\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$.

4—5. Существует единственная точка $O(0;\ 0)$, в которой график функции пересекает оси координат.

6. Интервалы знакопостоянства функции найдем из условия $f(x) > 0$, т. е. $\frac{x}{1+x^2} > 0$. Отсюда $x > 0$. Если же $f(x) < 0$, то $x < 0$. Следовательно, для $x > 0$ график функции лежит выше оси Ox, для $x < 0$ — ниже оси Ox.

7. Интервалы монотонности функции найдены в примере 5 п. 23: на промежутках $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$ функция убывает, на промежутке $[-1;\ 1]$ возрастает.

8. Рассмотрим точку $x = 1$. Левее этой точки на промежутке $[-1;\ 1)$ функция возрастает, а правее убывает. Это означает, что точка $x = 1$ — точка максимума.

9. В п. 3 мы нашли, что $m = -\frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{2}$.

10. Поскольку $x^2+1 \neq 0$ при всех x, то вертикальных асимптот график не имеет. Из представления функции в виде

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{x}+x},\ x \neq 0,$$

следует, что при неограниченном увеличении $|x|$ значения функции приближаются к нулю и поэтому график функции будет приближаться к оси Ox, которая и будет горизонтальной асимптотой графика.

На этом исследование функции закончено. На его основании построим эскиз графика функции сначала на промежутке $[0; +\infty)$, а затем произведем симметрию относительно начала координат (рис. 86).

Пример 2.

Исследуем функцию $\frac{4x+7}{x^2+2x+2}$ и построим эскиз ее графика.

Решение. Проверим, какими свойствами (см. табл. 1) обладает заданная функция.

1. Для всех $x \in (-\infty;+\infty)$ значения квадратного трехчлена x^2+2x+2 положительны, и поэтому функция определена для всех $x \in (-\infty;+\infty)$.

2. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

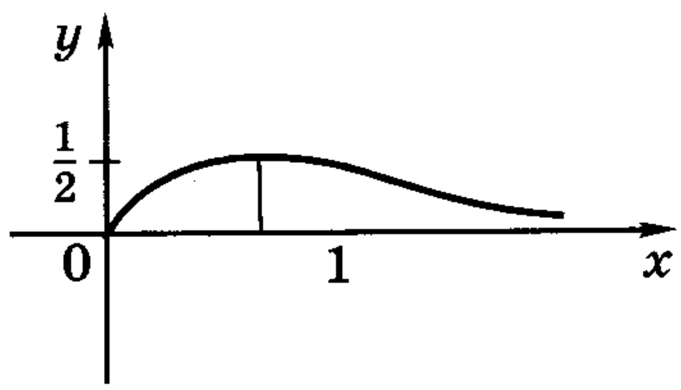
3. Изучим множество $E(f)$ значений функции. Выберем некоторое число y_0 и предположим, что оно является значением функции $\frac{4x+7}{x^2+2x+2}$. Тогда существует значение x, такое, что уравнение

$$y_0=\frac{4x+7}{x^2+2x+2} \tag{3}$$

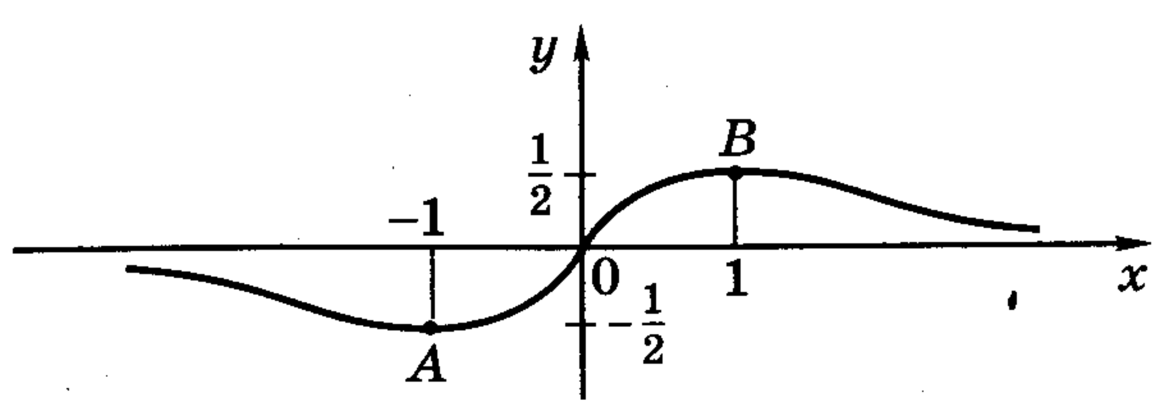
имеет решение.

Если $y_0=0$, то уравнение (3) имеет единственное решение $x=-\frac{7}{4}$, следовательно, $0 \in E(f)$ и ось Ox график функции пересекает в единственной точке $C\left(-\frac{7}{4};\ 0\right)$. Если $y_0 \neq 0$, то уравнение (3) запишем в виде $y_0x^2-2(2-y_0)x+2y_0-7=0$. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D=4(2-y_0)^2-4y_0(2y_0-7)$ неотрицателен, т. е. когда y_0 удовлетворяет неравенству $y_0^2-3y_0-4 \leqslant 0$, $y_0 \neq 0$, или

$$-1 \leqslant y_0 \leqslant 4,\ y_0 \neq 0. \tag{4}$$



а)



б)

Рис. 86

Из неравенства (4) и условия $0 \in E(f)$ следует, что все значения функции лежат на отрезке $[-1; 4]$, т. е. $E(f)=[-1; 4]$. Отсюда следует, что наибольшее значение функции f при $x \in (-\infty; +\infty)$ $M=4$, а наименьшее $m=-1$. Эти значения функция принимает соответственно в точках $x=-\frac{1}{2}$ и $x=-3$.

Обозначим через $A=(-3; -1)$, $B\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$ и $C\left(-\frac{7}{4}; 0\right)$ соответствующие точки графика.

4—5. Мы уже отметили единственную точку $C\left(-\frac{7}{4}; 0\right)$ пересечения графика функции с осью Ox. Если $x=0$, то $y=3{,}5$ и, следовательно, с осью Oy график пересекается в точке $D(0; 3{,}5)$.

6. Для нахождения интервалов знакопостоянства решим неравенство $f(x)>0$. Отсюда следует, что $x>-\frac{7}{4}$. Значит, для этих значений x график функции находится выше оси Ox. Если $f(x)<0$, то $x<-\frac{7}{4}$ и для этих значений x график функции лежит ниже оси Ox.

7. Найдем интервалы монотонности функции. Точки $x=-3$ и $x=-\frac{1}{2}$, в которых функция достигает своих наименьшего и наибольшего значений, разбивают числовую ось на три промежутка: $(-\infty; -3]$, $\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$ и $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Докажем, что на каждом из них функция монотонна. Выясним знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ при $x_1<x_2$. Имеем

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{4x_2+7}{x_2^2+2x_2+2}-\frac{4x_1+7}{x_1^2+2x_1+2}=-(x_2-x_1)\cdot\frac{4x_1x_2+7(x_1+x_2)+6}{(x_2^2+2x_2+2)(x_1^2+2x_1+2)}.$$

В знаменателе стоят положительные множители, $x_2-x_1>0$ по условию, и поэтому знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ определяется только знаком выражения $4x_1x_2+7(x_1+x_2)+6$. Исследуем его на каждом из промежутков.

I. Пусть $x_1, x_2 \in (-\infty; -3]$ и $x_1<x_2$. Воспользуемся тем, что любое число из промежутка $(-\infty; -3]$ имеет вид $-3-\alpha$, где $\alpha \geqslant 0$. Поэтому $x_1=-3-\alpha$, $\alpha>0$; $x_2=-3-\beta$, $\beta \geqslant 0$, $\beta<\alpha$. Тогда
$4x_1x_2+7(x_1+x_2)+6=4(-3-\alpha)(-3-\beta)+7(-6-\alpha-\beta)+6=4\alpha\beta+5(\alpha+\beta)$.

Последнее выражение положительно, и поэтому $f(x_2)-f(x_1)<0$, т. е. на промежутке $(-\infty; -3]$ функция убывает.

II. Пусть теперь $x_1, x_2 \in \left[-3; -\frac{1}{2}\right]$ и $x_1<x_2$. Положим:

$$x_1=-3+\alpha,\ 0 \leqslant \alpha<2{,}5;\ x_2=-3+\beta,\ 0<\beta \leqslant 2{,}5,\ \beta>\alpha.$$

Теперь имеем

$$4x_1x_2+7(x_1+x_2)+6=4(-3+\alpha)(-3+\beta)+7(-6+\alpha+\beta)+6=$$
$$=4\alpha\beta-5\alpha-5\beta=2\alpha(\beta-2{,}5)+2\beta(\alpha-2{,}5).$$

Полученное выражение отрицательно, и поэтому $f(x_2)-f(x_1)>0$. Значит, на промежутке $\left[-3;\ -\frac{1}{2}\right]$ функция возрастает.

III. Пусть $x_1,\ x_2\in\left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ и $x_1<x_2$. Полагая

$$x_1=-\frac{1}{2}+\alpha,\ \alpha\geqslant 0,\ x_2=-\frac{1}{2}+\beta,\ \beta>0,\ \beta>\alpha,$$

получим

$$4x_1x_2+7(x_1+x_2)+6=4\alpha\beta+5(\alpha+\beta).$$

Полученное выражение положительно, и поэтому $f(x_2)-f(x_1)<0$, значит, на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ функция убывает.

На этом исследование функции на монотонность закончено.

8. Из установленного характера возрастания и убывания функции следует, что точка $x=-3$ является точкой минимума, $y_{\min}=-1$, а точка $x=-\frac{1}{2}$ — точкой максимума, $y_{\max}=4$. Соответствующие точки графика уже обозначены через A и B.

9. В п. 3 показано, что $m=-1$, $M=4$.

10. Знаменатель функции $\frac{4x+7}{x^2+2x+2}$ в нуль не обращается, поэтому вертикальных асимптот нет. Из представления функции в виде

$$\frac{4x+7}{x^2+2x+2}=\frac{4+\frac{7}{x}}{x+2+\frac{2}{x}}$$

следует, что при неограниченном увеличении $|x|$ значения функции приближаются к нулю и точки графика неограниченно приближаются к точкам оси Ox. Значит, ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции.

На этом исследование функции $\frac{4x+7}{x^2+2x+2}$ закончено, на основании установленных свойств эскиз ее графика изображен на рисунке 87.

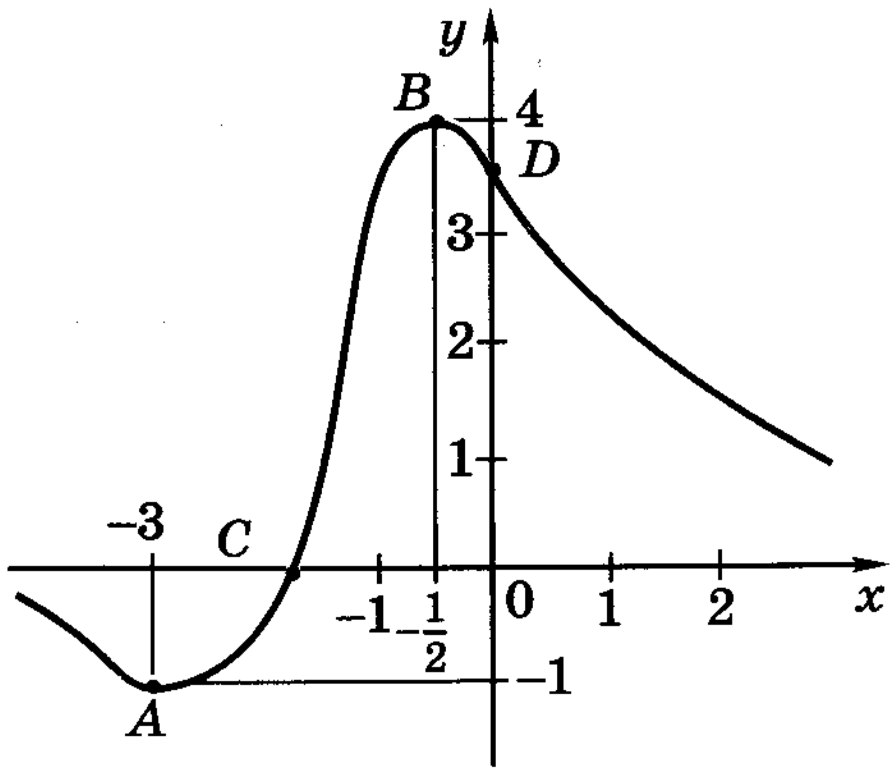


Рис. 87

Пример 3.

Исследуем функцию $\frac{x^2+8}{2(1-x)}$ и построим эскиз ее графика.

Решение. Как и в предыдущих примерах, проверим, какими свойствами (см. табл. 1) обладает заданная функция.

1. Функция определена для всех $x \neq 1$. Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

2. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, поэтому функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Изучим множество значений функции. Выберем некоторое число y_0 и предположим, что оно является значением функции. Тогда существует значение x, такое, что уравнение $y_0 = \frac{x^2+8}{2(1-x)}$ имеет решение. Запишем его в виде $x^2+2y_0x-2y_0+8=0$. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант $D=4y_0^2-4(-2y_0+8)$ неотрицателен, т. е. когда y_0 удовлетворяет неравенству $y_0^2+2y_0-8 \geqslant 0$. Решением этого неравенства является множество $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. Это означает, что все значения функции принадлежат либо промежутку $(-\infty; -4]$, либо промежутку $[2; +\infty)$, т. е. $E(f)=(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. Значение $y_0=-4$ функция принимает в одной точке $x=4$, значение $y_0=2$ — в точке $x=-2$. Обозначим соответствующие точки графика через $C(4; -4)$ и $D(-2; 2)$. Из проведенных рассуждений следует, что функция $\frac{x^2+8}{2(1-x)}$ в области определения не имеет ни наибольшего значения M, ни наименьшего значения m.

Интервалу $(-4; 2)$ не принадлежит ни одно значение функции, а поэтому в полосе $-4<y<2$ нет ни одной точки ее графика.

4—5. С осью Ox график функции не пересекается, так как $x^2+8 \neq 0$. При $x=0$ $f(x)=4$ и ось Oy график функции пересекает в точке $(0; 4)$.

6. Значения функции положительны для тех x, для которых справедливо неравенство $\frac{x^2+8}{2(1-x)}>0$, т. е. для $x<1$. Для этих значений x график функции находится выше оси Ox.

Если же $\frac{x^2+8}{2(1-x)}<0$, т. е. $x>1$, то для таких значений x график функции лежит ниже оси Ox.

7. Найдем интервалы монотонности функции. Точки $x_1=-2$, $x_2=1$ и $x_3=4$ разбивают числовую ось на четыре промежутка: $(-\infty; -2]$, $[-2; 1)$, $(1; 4]$, $[4; +\infty)$. Покажем, что на каждом из них функция монотонна. Для этого изучим знак разности $f(x_2)-f(x_1)$ при $x_1<x_2$.

Имеем

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2^2+8}{2(1-x_2)}-\frac{x_1^2+8}{2(1-x_1)}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)\cdot\frac{x_1+x_2-x_1x_2+8}{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

По условию $x_2 - x_1 > 0$, поэтому знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ определяется только знаком выражения $\frac{x_1 + x_2 - x_1x_2 + 8}{(1 - x_2)(1 - x_1)}$, которое мы рассмотрим на каждом промежутке.

I. Пусть x_1, $x_2 \in (-\infty; -2]$ и $x_1 < x_2$. На этом промежутке справедливы следующие неравенства:

$$x_1 + x_2 - x_1x_2 + 8 < 0,\ 1 - x_2 > 0,\ 1 - x_1 > 0.$$

Поэтому $f(x_2) - f(x_1) < 0$ и на промежутке $(-\infty; -2]$ функция убывает.

II. Пусть x_1, $x_2 \in [-2; 1)$ и $x_1 < x_2$. На этом промежутке справедливы следующие неравенства:

$$x_1 + x_2 - x_1x_2 + 8 > 0,\ 1 - x_1 > 0,\ 1 - x_2 > 0,$$

и поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и на $[-2; 1)$ функция возрастает.

III. Теперь рассмотрим промежуток $(1; 4]$. Пусть x_1, $x_2 \in (1; 4]$ и $x_1 < x_2$. Положим

$$x_1 = 1 + \alpha,\ 0 < \alpha < 3,\ x_2 = 1 + \beta,\ 0 < \beta \leqslant 3,\ \beta > \alpha.$$

Тогда $x_1 + x_2 - x_1x_2 + 8 = 1 + \alpha + 1 + \beta - (1 + \alpha)(1 + \beta) + 8 = -\alpha\beta + 9 > 0$, так как $\alpha\beta < 9$.

Кроме этого, $1 - x_1 < 0$ и $1 - x_2 < 0$, и поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и на промежутке $(1; 4]$ функция снова возрастает.

IV. Пусть теперь x_1, $x_2 \in [4; +\infty)$ и $x_1 < x_2$. На этом промежутке справедливы неравенства $1 - x_1 < 0$, $1 - x_2 < 0$. Положим

$$x_1 = 4 + \alpha,\ \alpha \geqslant 0,\ x_2 = 4 + \beta,\ \beta > 0,\ \beta > \alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_1x_2 + 8 = \\ &= 4 + \alpha + 4 + \beta - (4 + \alpha)(4 + \beta) + 8 = \\ &= -\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) < 0. \end{aligned}$$

Значит, $f(x_2) - f(x_1) < 0$ и на промежутке $[4; +\infty)$ функция убывает.

На этом исследование монотонности функции закончено.

8. Из свойств монотонности следует, что точка $x = -2$ является точкой минимума, $y_{\min} = 2$. Точка $x = 4$ является точкой максимума, $y_{\max} = -4$. Соответствующие точки графика уже обозначены через $D(-2; 2)$ и $C(4; -4)$.

9. Как установлено в п. 3, M и m не существуют.

10. Вертикальная асимптота графика: $x = 1$. Из представления

$$\frac{x^2 + 8}{2(1 - x)} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{9}{2(1 - x)}$$

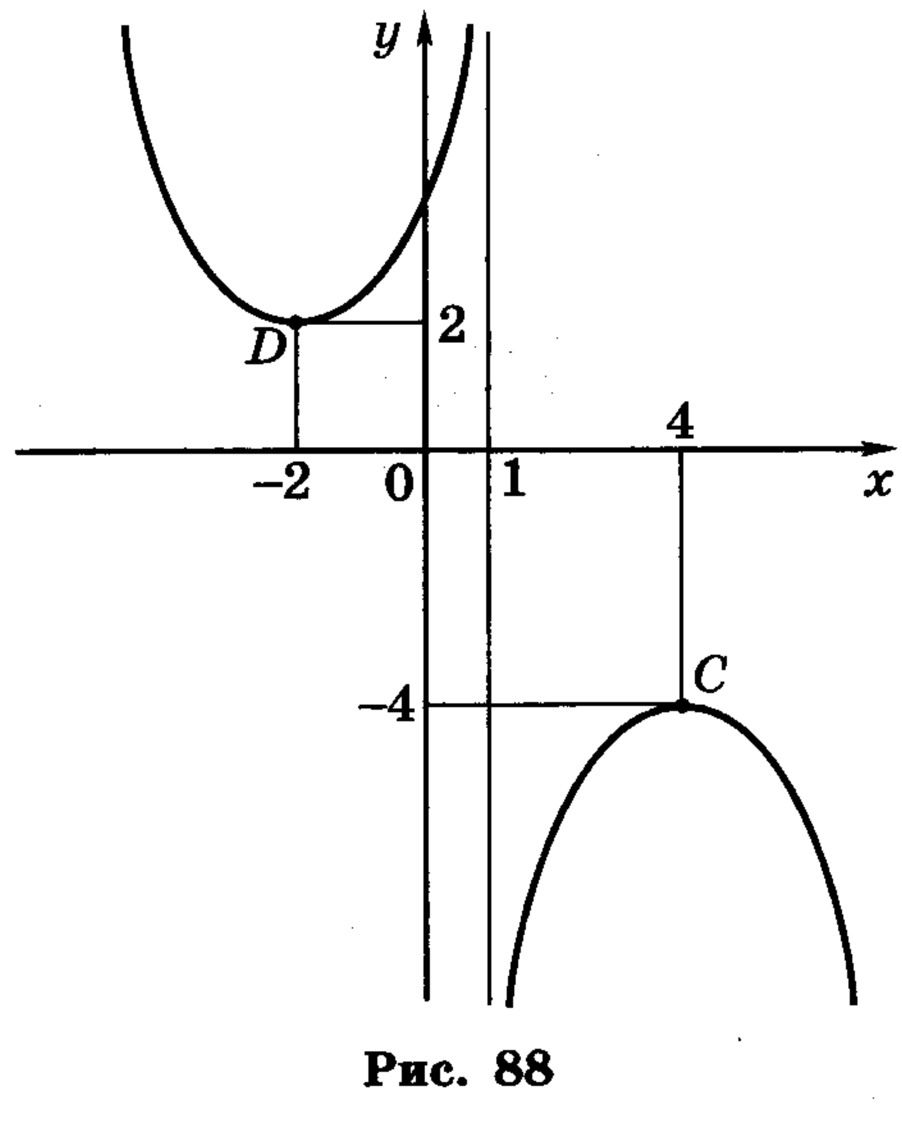


Рис. 88

следует, что горизонтальная асимптота отсутствует. Из проведенного исследования делаем вывод, что эскиз искомого графика имеет вид, представленный на рисунке 88.

УПРАЖНЕНИЯ

120. Исследуйте функцию (установите, какими из свойств, приведенных в таблице 1, она обладает) и постройте эскиз графика функции:

а) $\frac{1}{x^2+1}$; б) $\frac{1}{x^2+4}$; в) $\frac{1}{2x^2+5}$; г) $\frac{2x}{x^2+4}$; д) $\frac{x}{4(x^2+1)}$; е) $\frac{4x}{x^2+9}$.

121. Исследуйте функцию и постройте эскиз ее графика:

а) $\frac{x}{x^2+3x+4}$; б) $\frac{x+10}{x^2+2x+20}$; в) $\frac{6x-2}{x^2+2x+2}$.

122. Исследуйте функцию и постройте эскиз ее графика:

а) $\frac{x^2+12}{1-2x}$; б) $\frac{x^2+4}{3-2x}$; в) $\frac{x^2+6}{1-2x}$; г) $\frac{x^2+5}{2(x+2)}$.

27. ГРАФИК ФУНКЦИИ $\frac{1}{f}$

Во многих случаях, зная график функции f, можно построить график функции $\frac{1}{f}$, значения которой обратны значениям функции f, т. е. $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$. Пусть функция f определена на промежутке I. Для построения графика функции $\frac{1}{f}$ полезна таблица, в которой отмечена связь между свойствами функций f и $\frac{1}{f}$.

Доказательство этих утверждений оставляем читателю. Проиллюстрируем на примере применение этого метода.

Пример 1.

Построим график функции $\frac{1}{x^2-6x+5}$.

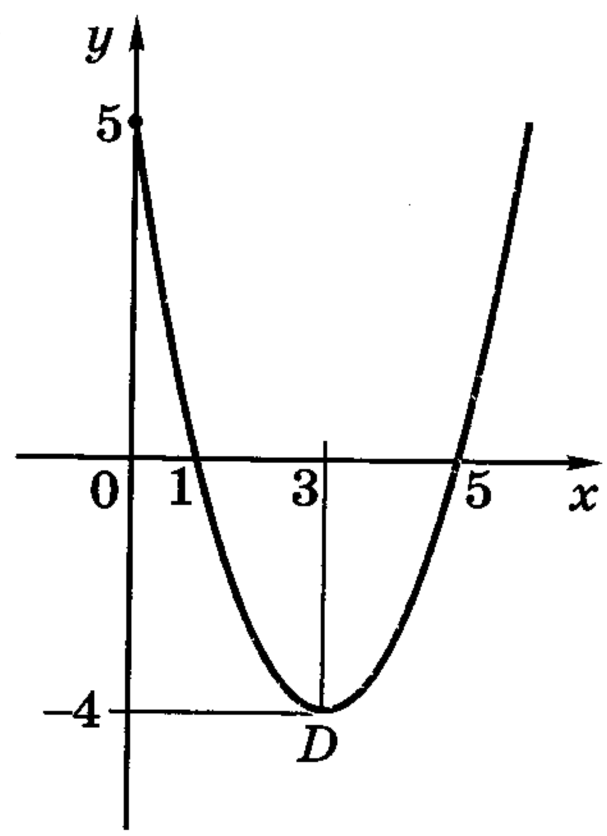


Рис. 89

Решение. Положим $f(x)=x^2-6x+5$. Тогда исследуемая функция имеет вид $\frac{1}{f(x)}$. График функции x^2-6x+5 изображен на рисунке 89. Функция x^2-6x+5 обращается в нуль при

$x=1$ и $x=5$, а поэтому областью определения функции $\frac{1}{f(x)}$ является множество $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$. Прямые $x=1$ и $x=5$ являются вертикальными асимптотами. Поэтому график функции состоит из трех отдельных «кусков». Рассмотрим вид графика на каждом промежутке. Используем при этом таблицу 2.

Таблица 2

Функция	Область определения	Четность — нечетность функции	Промежутки знакопостоянства	Промежутки монотонности	Точки экстремума
f	$D(f)$	f — четная [f — нечетная]	$f(x)>0$, $x\in I$ [$f(x)<0$, $x\in I$]	$f(x)$ — возрастает на I [$f(x)$ — убывает на I]	x_0 — точка минимума [x_0 — точка максимума]
$\frac{1}{f}$	$D(f)$, кроме тех точек, в которых $f(x)=0$	$\frac{1}{f}$ — четная [$\frac{1}{f}$ — нечетная]	$\frac{1}{f(x)}>0$, $x\in I$ [$\frac{1}{f(x)}<0$, $x\in I$]	$\frac{1}{f(x)}$ — убывает на I [$\frac{1}{f(x)}$ — возрастает на I]	x_0 — точка максимума [x_0 — точка минимума]

I. Пусть $x\in(-\infty;\ 1)$. На этом промежутке функция x^2-6x+5 положительна, убывает и ее график пересекает ось Oy в точке $A(0;\ 5)$. Поэтому функция $\frac{1}{x^2-6x+5}$ на этом промежутке положительна, возрастает и в точке $B\left(0;\ \frac{1}{5}\right)$ ее график пересечет ось Oy. С ростом $|x|$ значения функции x^2-6x+5 неограниченно возрастают, поэтому значения функции $\frac{1}{x^2-6x+5}$ неограниченно приближаются к нулю и график функции будет неограниченно приближаться к оси Ox, следовательно, ось Ox — горизонтальная асимптота.

Если x будет приближаться к точке $x=1$, то график функции $\frac{1}{x^2-6x+5}$ будет неограниченно удаляться от оси Ox и приближаться к прямой $x=1$. Значит, искомый график на промежутке $(-\infty;\ 1)$ имеет вид, изображенный на рисунке 90, *а*.

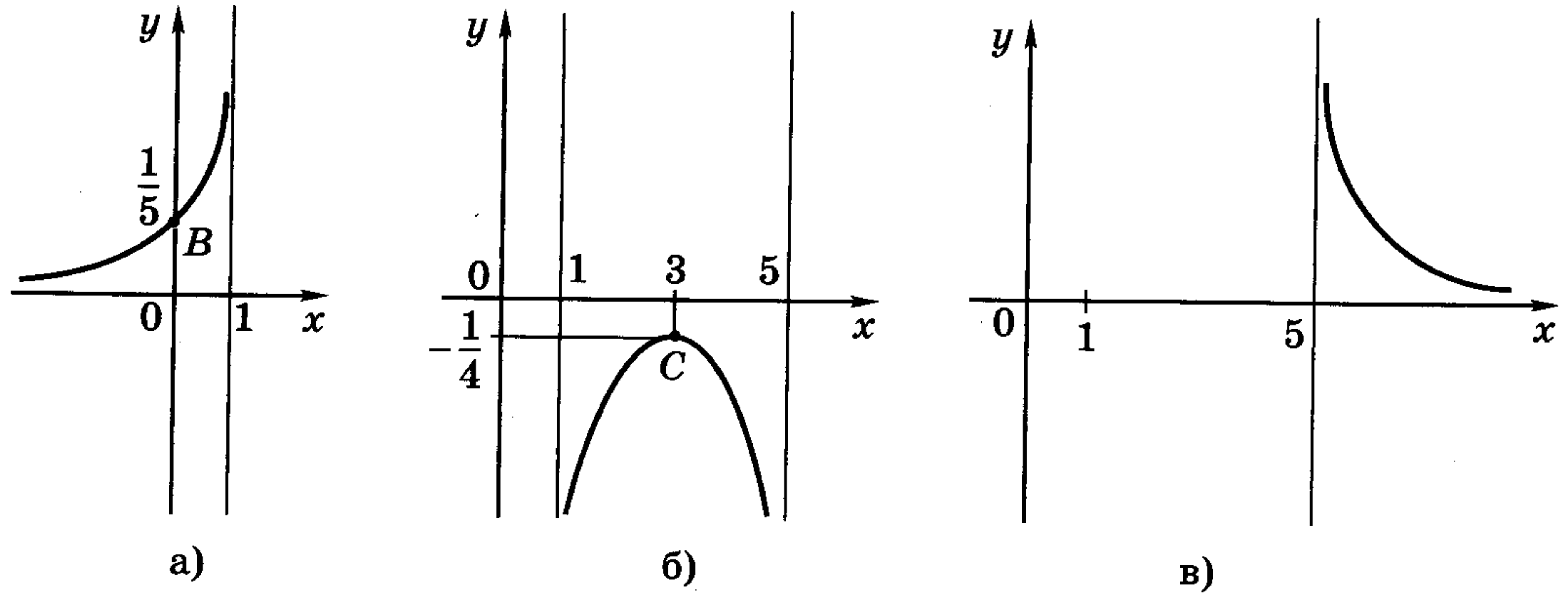


Рис. 90

II. Рассмотрим промежуток (1; 5). На этом промежутке функция x^2-6x+5 принимает отрицательные значения, убывает на промежутке (1; 3] и возрастает на промежутке [3; 5). Точка $x=3$ является точкой минимума, $y_{\min}=-4$. На графике функции x^2-6x+5 это точка D (3; −4). Функция $\frac{1}{x^2-6x+5}$ на этом промежутке будет принимать отрицательные значения, на промежутке (1; 3] она возрастает, а на [3; 5) убывает. Точка $x=3$ — точка максимума, $\frac{1}{y_{\min}}=-\frac{1}{4}$, и на графике это точка $C\left(3;\ -\frac{1}{4}\right)$. Поскольку прямые $x=1$ и $x=5$ являются вертикальными асимптотами, то при приближении x к значению $x=1$ график функции $\frac{1}{x^2-6x+5}$ удаляется от оси Ox и приближается к прямой $x=1$.

Аналогично ведет себя график функции, когда x приближается к значению $x=5$. Искомый график на промежутке (1; 5) имеет вид, изображенный на рисунке 90, *б*.

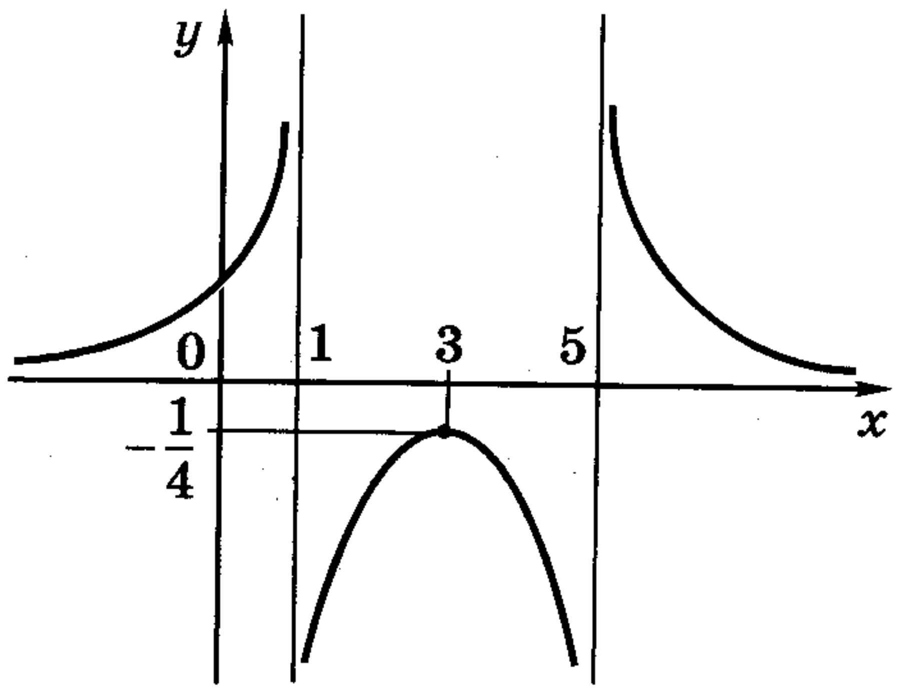


Рис. 91

III. Пусть теперь $x\in(5;+\infty)$. На этом промежутке значения функции x^2-6x+5 положительны и она возрастает. Поэтому на этом промежутке значения функции $\frac{1}{x^2-6x+5}$ положительны и она убывает. Поскольку $x=5$ — вертикальная асимптота, а ось Ox — горизонтальная, то на промежутке $(5;+\infty)$ график имеет вид, изображенный на рисунке 90, *в*. Объединяя рисунки, *а* — *в* (см. рис. 90), получаем эскиз искомого графика (рис. 91).

УПРАЖНЕНИЯ

123. Постройте график функции:

а) $\frac{1}{x^2}$; б) $-\frac{3}{x^2}$; в) $\frac{1}{x^2-8x+15}$; г) $\frac{1}{(x-2)^2}$; д) $\frac{1}{x^2+4}$.

124. Постройте график функции:

а) $\frac{1}{|x^2-3x-2|}$; в) $\frac{1}{|x-2|-2}$; д) $\frac{1}{|x|}$;

б) $\frac{1}{|x-1|-|x+2|}$; г) $\frac{1}{|x^2-4|}$; е) $\frac{1}{|2x+5|-|x|}$.

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

В жизни постоянно приходится сталкиваться с необходимостью принять наилучшее решение среди множества возможных решений. Так, кирпич с заводов на стройки нужно перевезти подешевле, ракету вывести на орбиту так, чтобы горючего пошло поменьше, молоко с ферм в магазин привезти побыстрее и т. д.

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к нахождению наибольших и наименьших значений. Все такие задачи характеризуются следующими особенностями: из множества решений задачи следует выбрать то, которое является в некотором смысле самым большим или самым маленьким. Высшая математика располагает мощными средствами для решения подобных задач. Однако в ряде случаев для решения этих задач достаточно знать только свойства квадратичной функции, которые мы подробно изучили выше. Рассмотрим некоторые задачи. Как мы установили, при $a>0$ квадратичная функция среди всех своих значений имеет наименьшее значение, а при $a<0$ — наибольшее. Покажем, как этот результат используется при решении задач.

Задача 1.

Нормандское окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 92). Периметр окна равен l. Каковы должны быть размеры окна, чтобы окно пропускало наибольшее количество света? (В счет периметра не входит сторона BC.)

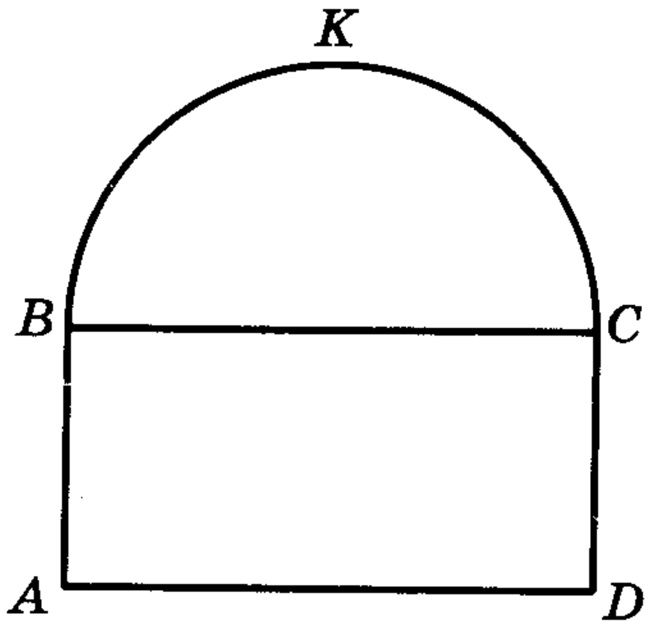


Рис. 92

Решение. Окно будет пропускать наибольшее количество света, когда его площадь будет наибольшей. Пусть основание $AD=x$, $x>0$, высота $AB=y$, $y>0$. Тогда радиус R полуокружности равен $\frac{x}{2}$ и длина этой полуокружности равна $\frac{\pi x}{2}$. Периметр окна равен $x+2y+\frac{\pi x}{2}$. По условию

$$x+2y+\frac{\pi x}{2}=l.$$

Отсюда

$$y=\frac{2l-(2+\pi)x}{4}.$$

Площадь окна

$$S=xy+\frac{\pi x^2}{8}.$$

Подставим сюда значение y. Тогда

$$S(x)=-\frac{4+\pi}{8}x^2+\frac{l}{2}x.$$

Задача свелась к нахождению такого значения x_0, при котором квадратичная функция $S(x)$ принимает свое наибольшее значение. Такое значение x_0 всегда существует, так как $-\frac{4+\pi}{8}<0$, и оно равно $x_0=\frac{2l}{4+\pi}$. При этом $y_0=\frac{l}{4+\pi}$, $S_{\max}=\frac{l^2}{2(4+\pi)}$.

Задача 2.

Имеется проволока длиной l. Требуется согнуть ее так, чтобы получился прямоугольник, ограничивающий наибольшую площадь.

Решение. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x, $0<x<\frac{l}{2}$. Тогда вторая его сторона будет равна $\frac{l}{2}-x$. Площадь прямоугольника

$$S(x)=x\left(\frac{l}{2}-x\right), \text{ или } S(x)=-x^2+\frac{l}{2}x.$$

Задача снова свелась к нахождению такого x, при котором квадратичная функция $S(x)$ достигает своего наибольшего значения. Это происходит при $x_0=\frac{l}{4}$. Другая сторона прямоугольника будет равна $\frac{l}{2}-\frac{l}{4}=\frac{l}{4}$. Таким образом, искомый прямоугольник оказался квадратом. Полученный результат показывает, что из всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.

УПРАЖНЕНИЯ

125. Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается правильным треугольником. Периметр окна равен l. Каковы должны быть размеры окна, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?

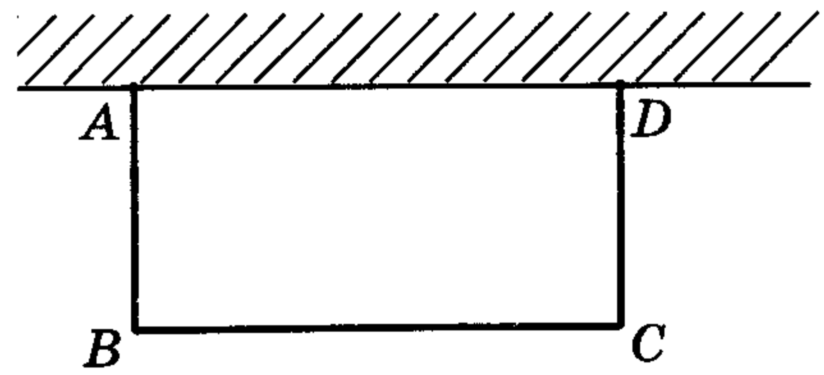


Рис. 93

126. Около каменной стенки нужно сделать деревянный забор, чтобы огородить прямоугольный участок земли (рис. 93). Имеется материала на 200 м забора. При каких размерах площадь огороженного участка будет наибольшей?

127. Дан квадрат $ABCD$ со стороной l. От его вершины отложены равные отрезки Aa, Bb, Cc, Dd и точки a, b, c, d соединены прямыми (рис. 94). При каком значении Aa площадь квадрата $abcd$ окажется наименьшей?

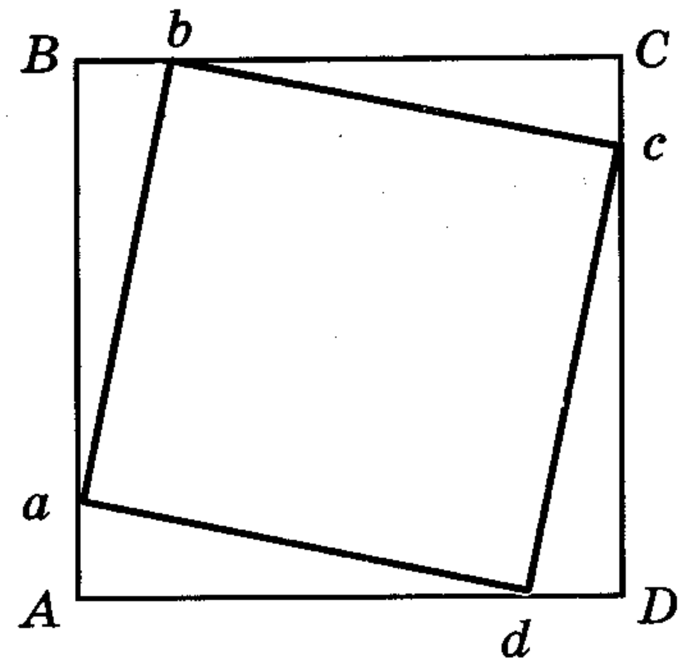


Рис. 94

128. Докажите теорему: из всех прямоугольников, вписанных в один и тот же круг, наибольшую площадь имеет квадрат.

129. Представьте число a в виде суммы двух чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

130. Кусок проволоки длиной a см нужно разрезать на две части: из одной сделать квадрат, из другой — правильный треугольник. Как нужно разрезать проволоку, чтобы сумма площадей полученных фигур была наименьшей?

131. Из листа жести размером 30×50 см нужно вырезать уголки так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (рис. 95, *а*), получить коробку наибольшей боковой поверхности. Какова сторона вырезаемых квадратов?

1) 5; 2) 10; 3) 15; 4) 20.

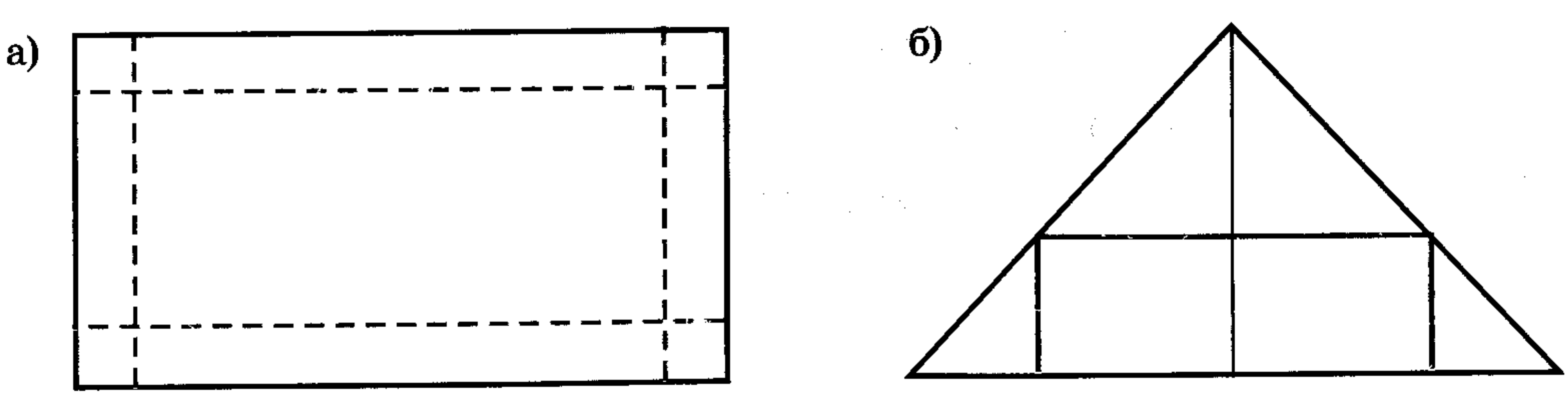


Рис. 95

132. В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, как показано на рисунке 95, *б*. Какова должна быть высота прямоугольника для того, чтобы он имел наибольшую площадь?

133. Предполагают изготовить пластинку в форме прямоугольника с приставленными к нему на противоположных сторонах полукругами. Каковы должны быть размеры пластинки, чтобы при заданном периметре $2p$ она имела наибольшую площадь?

134. Найдите коэффициенты квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ при выполнении следующих условий:

а) при $x=8$, $y=0$, наименьшее значение равно -12 при $x=6$;

б) сумма кубов корней $x_1^3+x_2^3=19$, а наибольшее значение равно 25 при $x=0{,}5$;

в) наименьшее значение, равное 7, принимается при $x=-2$, а при $x=0$ ее значение равно 15.

135. Определите a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения была наименьшей:

а) $x^2+(2-a)x-a-3=0$;

б) $x^2+(3+2a)x+2a+1=0$;

в) $x^2+(2a-1)x+3a+2=0$;

г) $x^2+(1+2a)x+a^2-1=0$;

1) 1; 2) 2; 3) -2; 4) -1.

136*. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции; укажите множество ее значений:

а) $\dfrac{x}{x^2+3x+4}$; б) $\dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$; в) $\dfrac{x+10}{x^2+2x+2}$; г) $\dfrac{6x-2}{x^2+2x+2}$.

137. Прямая проходит через точку $A(x_0;\ y_0)$ и пересекает параболу $y=x^2$ в точках M и N, сумма ординат которых наименьшая. Найдите уравнение этой прямой:

а) $A(4;\ 1)$; б) $A(3;\ 10)$; в) $A(-2;\ 5)$; г) $A(1;\ 4)$.

138*. Прямая проходит через точку $A(x_0;\ y_0)$. 1) При каких значениях углового коэффициента k она пересекает параболу $y=x^2$ в двух точках? 2) Существуют ли такие значения k, при которых сумма ординат точек пересечения будет наименьшей?

а) $A(2;\ 3)$; б) $A(2{,}5;\ 6)$; в) $A(3;\ 5)$; г) $A(4;\ 15)$; д) $A(2{,}5;\ 4)$.

§ 9. ПОНЯТИЕ О ПРОСТЕЙШИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ. ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

Современный этап развития человеческого общества характеризуется интенсивным применением математических методов в физических, астрономических, биологических, экономических, гуманитарных и других науках. Этому способствует появление новых математических методов и возможности современных компьютеров. Внедрение математических методов в новые для нее области происходит с помощью построения и исследования математических моделей изучаемых явлений.

Математическая модель — это приближенное описание интересующего нас явления внешнего мира, выраженное с помощью математических соотношений и заменяющее изучение этого явления исследованиями и решениями различных математических задач.

При построении математической модели изучаемого явления приходится делать упрощающие предположения, пренебрегать некоторыми свойствами и т. д.

Так, И. Ньютон (1642—1729), размышляя над законом всемирного тяготения, пренебрегал размерами планет, считая, что вся их масса сосредоточена в одной точке. И это при том, что радиус Земли почти 6500 км! Да и мы сами, решая, например, задачи на движение, считаем его равномерным, предполагаем, что повороты машин и кораблей совершаются мгновенно, что дорожно-транспортные происшествия не происходят, топлива для двигателей всегда достаточно и т. д. и т. п. Именно через математическое моделирование происходит внедрение математических методов в экономику, биологию и другие науки.

Таким образом, несмотря на то что любая математическая модель реальной действительности беднее тех явлений (в том числе и экономических!), которые мы изучаем, именно математическое моделирование позволяет выделить самые существенные, самые устойчивые связи изучаемых явлений и процессов, позволяя сделать выводы о их свойствах и прогнозы относительно их развития.

Более того, изучение явлений окружающего мира методами математики позволяет не учитывать второстепенные свойства и увидеть, что изучение внешне различных явлений окружающего мира может привести к рассмотрению одних и тех же математических моделей.

Все наши дальнейшие рассуждения будут, по существу, изучением простейших математических моделей экономических процессов, и мы постараемся показать, что на базе математики 9 класса можно рассматривать довольно интересные задачи современной экономики.

Одним из основных понятий, играющих фундаментальную роль в построении математических моделей, является понятие функции. Многочисленные величины, характеризующие экономические процессы, существуют не независимо друг от друга, а, наоборот, очень тесно связаны между собою.

Таковы: цена товара и спрос на него, прибыль фирмы и объем ее производства, размер кредита, выданного банком, и плата за его использование и т. д.

Приведем далеко не полный перечень функций, которые используются при изучении экономических процессов.

Среди них — функции спроса на некоторый товар и функции его предложения к продаже, функции издержек и функции прибыли,

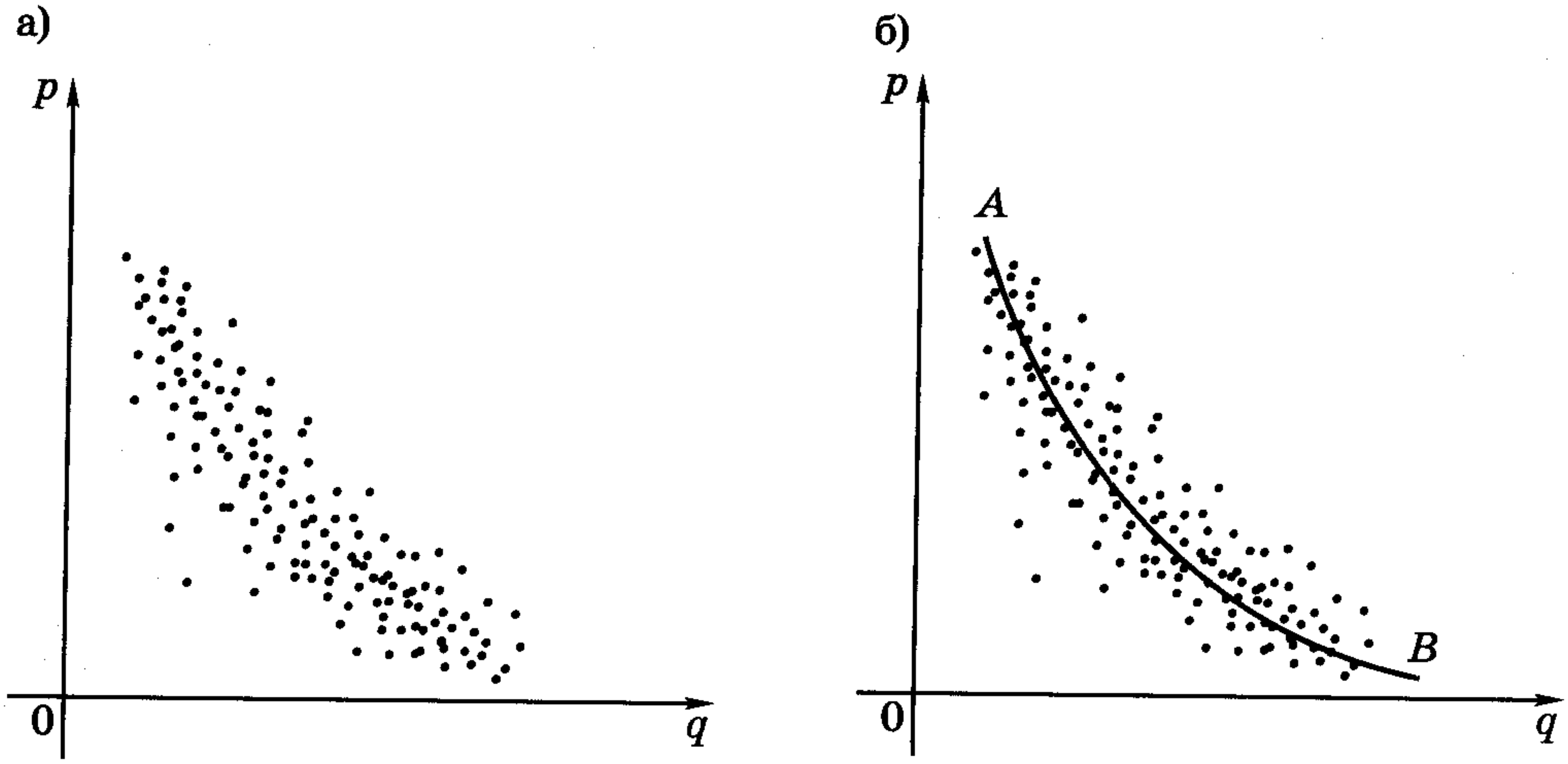


Рис. 96

производственные функции и т. д. Ниже мы изучим подробно часть этих функций, а сейчас заметим следующее.

Пусть функция $q = -3p + 12$ описывает количество товара q, который покупатели приобретут по цене p денежных единиц за единицу товара. Она называется функцией спроса. При этом $0 < p < 4$, $0 < q < 12$.

Конечно, в реальной экономике соотношение $q = -3p + 12$ может в точности и не выполняться, однако при построении математической модели этими неточностями мы будем пренебрегать и будем считать, что цена p за единицу товара и количество q купленного товара связаны соотношением $q = -3p + 12$, где $0 < p < 4$, $0 < q < 12$.

Однако чаще всего функции в экономике появляются путем обработки большого числа наблюдений.

Схематически это выглядит так. Пусть в течение некоторого промежутка времени на различных рынках изучается спрос на компакт-диски. Соберем по многим рынкам информацию о количестве q компакт-дисков, покупаемых по цене p денежных единиц за один компакт-диск. Таких данных будет очень много. Нанесем точки $(q; p)$ на координатную плоскость и получим картину, приблизительно изображенную на рисунке 96.

Конечно, провести кривую через все точки «размытого облака» невозможно (рис. 96, *а*). Однако в математической статистике существуют методы, позволяющие найти «наилучшую» в некотором смысле кривую AB, которую и принимают за искомую кривую спроса (рис. 96, *б*).

Именно такими способами в основном определяются те функции, которые мы будем подробно рассматривать ниже.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

139. На прямой $x+2y-1=0$ найдите точку, для координат которой выражение x^2+xy+y^2-3x+y принимает свое наименьшее значение. Чему оно равно?

140. На прямой $2x-3y-5=0$ найдите точку, для координат которой выражение $9y^2-4x^2-3xy-3$ принимает наибольшее значение. Чему оно равно?

141. На параболе $y=x^2-12x+1$ найдите точку, для координат которой выражение $2y-9x^2-4x+5$ принимает свое наибольшее значение. Чему оно равно?

142. Докажите, что координаты любой точки, лежащей на прямой $2x-5y-3=0$, удовлетворяют соотношению $2xy-4x+y-3\geqslant-10{,}8$.

143. Докажите, что координаты любой точки, лежащей на прямой $3x+y-1=0$, удовлетворяют соотношению $2xy-4x^2+y^2+6x-4\leqslant-2$.

144. Существует ли на прямой $3x+y-1=0$ точка, для координат которой выполняется равенство:

а) $2xy-4x^2+y^2+6x-2=0$; б) $2xy-4x^2+y^2+6x-4=0$?

145*. Найдите наименьшее значение длины отрезка прямой $y=a$ с концами на графиках функций $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$. Для каких значений a такой отрезок существует?

а) $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=4x-5$;

б) $f(x)=x^2+4$, $\varphi(x)=3x-4$;

в) $f(x)=-x^2+8x-12$, $\varphi(x)=x+1$;

г) $f(x)=-2x^2$, $\varphi(x)=ax+b$ (a и b выберите самостоятельно, но так, чтобы данная парабола с графиком выбранной вами функции не пересекалась).

146*. Найдите все значения $a\neq0$, при которых вершины данных парабол лежат по разные стороны от прямой $y=\alpha$:

а) $y=x^2-3ax+a$, $y=ax^2-2x+3a$, $\alpha=1$;

б) $y=ax^2-3x+2a+1$, $y=x^2+(a+1)x+2a$, $\alpha=-2$.

147*. Найдите значения x, при которых выполняется равенство:

а) $\min\limits_a(a^2-4ax+3x+a)=\max\limits_b(-b^2+3bx+x^2-1)$;

б) $\max\limits_a(-2a^2+3(a+1)x+x^2-a)=\min\limits_b(b^2-4bx+b+3)$;

в) $\min\limits_a(4a^2+ax+2x^2-3a)=\max\limits_b(-5b^2+2bx-3+x)$.

148*. а) Решите уравнение

$$\max_b\,\min_a\,[2a^2-2ab-4b^2+2ax+5bx-1]=20.$$

б) Решите уравнение

$$\min_a\,\max_b\,[3a^2+4ab-b^2+6ax+2bx]=-18.$$

в) Поменяйте местами операции $\max\limits_b$ и $\min\limits_a$ в примере «а». Изменится ли результат?

149. Даны функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ и $\varphi(x)=\frac{3}{2}x^2-1$.

а) Найдите точки пересечения графиков этих функций.

б) Пересекаются ли множества значений этих функций?

150. Ответьте на вопросы упражнения 149 для функций $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ и $\varphi(x)=x^2-2x+\frac{3}{2}$.

151. Прямая проходит через точку $A(2;\ -4)$ и пересекает параболу $y=x-x^2$ в точках, сумма ординат которых наибольшая. Найдите уравнение этой прямой.

152. Докажите, что квадратный трехчлен x^2+px+q имеет различные действительные корни, если его коэффициенты p и q принадлежат полуплоскости:

а) $p-q-1>0$; б) $q+2{,}5p+6{,}25<0$.

153. Найдите все значения параметра c, при которых:

а) квадратный трехчлен $x^2+cx+c+8$ принимает неположительное значение хотя бы при одном $x>0$;

б) квадратный трехчлен $-x^2+(2a-1)x+2a-9$ принимает положительное значение хотя бы при одном $x<0$.

154. При каких значениях параметра c функция $\frac{3x-15}{x^2-10x+26}$ на интервале $(c;\ c+5)$:

а) имеет две точки экстремума;

б) имеет только одну точку экстремума;

в) не имеет точек экстремума?

155. При каких значениях параметра a функция $\frac{4x^2+16x+12}{2x^2+4x+3}$ на отрезке $[a-6;\ a]$:

а) имеет две точки экстремума;

б) имеет только одну точку экстремума;

в) не имеет точек экстремума?

156. Существуют ли значения параметра a, при которых абсцисса вершины параболы $y=x^2+(a-1)x+a$ принадлежит отрезку $[-1;\ 2]$, а ордината — отрезку $[0;\ 1]$?

1) $a\in[3-\sqrt{6};\ 1]$; 2) $a\in[3-\sqrt{5};\ 2]$;

3) $a\in[3-\sqrt{8};\ 1]$; 4) $a\in[3+\sqrt{8};\ 1]$.

157*. Существуют ли значения параметра a, при которых абсцисса вершины параболы $y=(a+1)x^2+2x+a$, $a\neq-1$, принадлежит отрезку $[1;\ 2]$, а ордината — отрезку $[-1;\ 0]$?

158. Рассмотрим квадратное уравнение $x^2+6x-10=0$, не находя корней x_1 и x_2 этого уравнения. Найдите новое квадратное уравнение, корнями которого являются x_1^3 и x_2^3.

159. Пусть x_1, x_2 — корни трехчлена x^2+px+q. Составьте квадратный трехчлен, корнями которого являлись бы числа:

а) x_1^4 и x_2^4; б) x_1^5 и x_2^5; в) $\frac{1+x_2}{1+x_1}$ и $\frac{1+x_1}{1+x_2}$, $x_1\neq-1$, $x_2\neq-1$.

160* Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена x^2-2x+b.

а) При каком значении b сумма $x_1^4+x_2^4+13x_1x_2$ принимает свое наименьшее значение? Чему оно равно?

б) При каком значении b выражение $-8x_1^2x_2^2-x_1^4-x_2^4$ принимает свое наибольшее значение? Чему оно равно?

161* Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена x^2+px+1. Для каких значений параметра p справедливо неравенство $7 \leqslant x_1^4+x_2^4 \leqslant 14$?

162. Найдите коэффициенты квадратного трехчлена x^2+px+q, если о его действительных корнях x_1 и x_2 известно, что $x_1+x_2=1$ и $x_1^5+x_2^5=31$.

163. При некотором a сумма кубов корней уравнения $x^2+(a-1)x+\frac{a^2}{3}=0$ имеет наименьшее значение. Чему оно равно?

164. Рассмотрите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $y+x^2-8x+11 \leqslant 0$ и $y-x+1 \geqslant 0$. При каких значениях параметра a прямая $y=-x+a$ и это множество: а) имеют одну общую точку; б) имеют бесконечное множество общих точек; в) общих точек не имеют?

165. Рассмотрите квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$, $a>0$. Какие условия следует наложить на его коэффициенты a, b, c для того, чтобы выполнялись условия:

а) оба корня трехчлена больше заданного числа α;

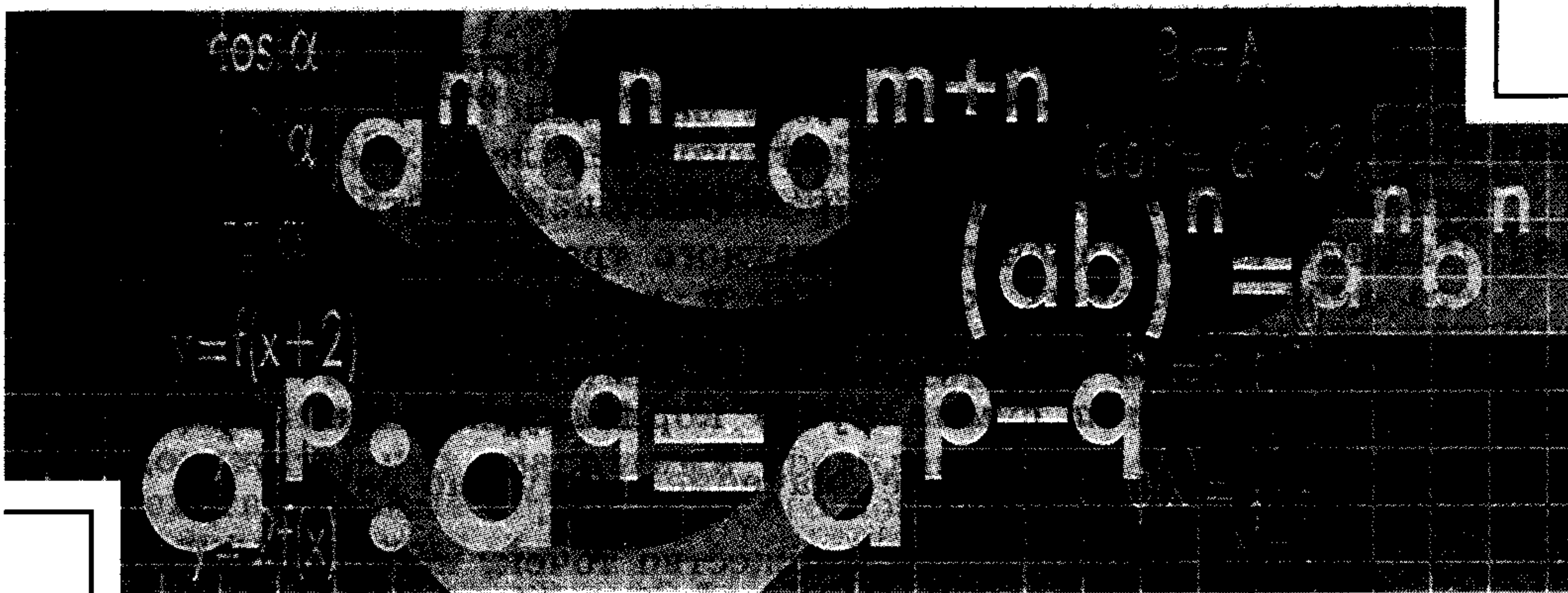
б) оба корня трехчлена лежат по разные стороны от α;

в) только один из корней трехчлена принадлежит заданному интервалу $(\alpha; \beta)$;

г) оба корня трехчлена принадлежат интервалу $(\alpha; \beta)$;

д) один из корней трехчлена меньше α, а другой — больше β?

Глава IX



СТЕПЕНИ И КОРНИ

§ 1. СТЕПЕНИ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

1. СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Вам уже известно определение степени с натуральным показателем. Вы знаете, например, что $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Зададим себе вопрос: можно ли таким же образом определить степени с отрицательным показателем, например a^{-5}? Очевидно, нет, так как нельзя взять число a множителем -5 раз. Желая распространить понятие степени на случай целых показателей — положительных, отрицательных и равных нулю, будем руководствоваться следующим требованием: для степеней с любыми целыми показателями должны оставаться в силе основные свойства степеней с натуральными показателями.

1) $(ab)^n = a^n b^n$;
2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$;
3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
4) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & m > n, \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & n > m; \end{cases}$
5) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Воспользуемся одним из этих свойств для определения степени с нулевым и целым отрицательным показателями, а затем проверим выполнение остальных свойств.

Положим в основу определения степени с нулевым и целым отрицательным показателями равенство

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \tag{1}$$

Выясним, как надо определить a^0, чтобы равенство (1) выполнялось и при $n=0$. При $n=0$ равенство примет вид

$$a^m \cdot a^0 = a^m.$$

Теперь ясно, что при $a \neq 0$ надо положить $a^0 = 1$. Значение 0^0 вообще не определяется.

Положим теперь в равенстве (1) $m=-n$, тогда это равенство примет вид

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Отсюда следует, что при $a \neq 0$ надо положить

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

При $a=0$ выражению a^{-n} не приписывается никакого числового значения.

Итак, мы определили понятие степени для любого целого показателя. Проверим теперь выполнение всех пяти свойств, указанных выше.

Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Докажем, что равенство $(ab)^n = a^n b^n$ выполняется при любом целом n.

Если $n=0$, то $(ab)^0 = a^0 b^0$ и это равенство верно, так как $1 = 1 \cdot 1$.

Пусть теперь $n=-k$, тогда

$$(ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} b^{-k}.$$

Тем самым доказана справедливость свойства 1 для нулевого и целых отрицательных показателей.

Точно так же доказывается и справедливость второго свойства

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

При доказательстве третьего свойства $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ следует рассмотреть несколько случаев в зависимости от знаков чисел m, n, $m+n$. Для примера рассмотрим случай, когда $m>0$, $n<0$, $m+n>0$. Положим $n=-k$, где $k>0$, тогда $m+n=m-k>0$, и потому

$$a^m a^n = a^m a^{-k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} = a^{m+n}.$$

Доказательства остальных случаев, а также четвертого свойства $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ проводятся тем же способом.

При доказательстве пятого свойства $(a^m)^n = a^{mn}$ рассмотрим случай, когда $m>0$, $n<0$. Положим $n=-k$, $k>0$. Тогда $mn=-mk$, и потому

$$(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{mn}.$$

4*

Случаи, когда числа m и n имеют другие знаки или обращаются в нуль, рассматриваются аналогично.

Кроме рассмотренных уже нами пяти свойств степеней с целыми показателями, можно отметить справедливость еще некоторых свойств этих степеней, выражающихся неравенствами.

6) Для любого целого числа n и $a>0$ выполняется неравенство $a^n>0$. Если же $a<0$, то $a^n>0$ при n четном и $a^n<0$ при n нечетном.

Справедливость этого свойства вы легко докажете, опираясь на свойства неравенств и определение степени.

7) Если a и b — положительные числа, причем $a>b$, то $a^n>b^n$ при целом $n>0$ и $a^n<b^n$ при целом $n<0$.

Докажем справедливость этого свойства сначала для $n>0$. Рассмотрим разность a^n-b^n и воспользуемся формулой

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Так как a и b — положительные числа и $a>b$, то оба множителя в правой части положительны и, следовательно, $a^n-b^n>0$, или $a^n>b^n$.

Пусть теперь $n<0$, т. е. $n=-k$, $k>0$, тогда

$$a^n-b^n=a^{-k}-b^{-k}=\frac{1}{a^k}-\frac{1}{b^k}=\frac{1}{a^kb^k}(b^k-a^k)=$$
$$=\frac{1}{a^kb^k}(b-a)(b^{k-1}+b^{k-2}a+\ldots+ba^{k-2}+a^{k-1}).$$

Так как a и b положительны и $a>b$, то в правой части равенства один множитель $(b-a)$ отрицательный, а два других положительны. Поэтому $a^n-b^n<0$, или $a^n<b^n$.

Таким образом, справедливость свойства 7 установлена и для положительных, и для отрицательных показателей.

Из свойства 7 непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие.

Если a и b — такие положительные числа, что для некоторого целого числа $n\neq 0$ выполняется равенство $a^n=b^n$, то $a=b$.

В самом деле, если бы имели, например, $a>b$, то по свойству 7 либо $a^n>b^n$, либо $a^n<b^n$ в зависимости от знака n, вопреки условию $a^n=b^n$.

Пример 1.

Выполним действия и запишем полученное выражение без отрицательных показателей:

$$\left(\frac{a^{-3}b^2}{9^{-1}c^{-2}}\right)^{-2}:\left(\frac{a^2b^3}{6c^3}\right)^2=\frac{a^6b^{-4}}{9^2c^4}:\frac{a^4b^6}{6^2c^6}=\frac{a^6b^{-4}\cdot 36c^6}{81c^4\cdot a^4b^6}=\frac{4a^2b^{-10}c^2}{9}=\frac{4a^2c^2}{9b^{10}}.$$

Пример 2.

Вычислим значение выражения

$$\left[\left(\frac{0{,}1^{-2}\cdot 2^5}{\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}\cdot 0{,}3^{-3}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{0{,}2^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{0{,}4}\right)^{-2}\right]^{-1}.$$

Решение. Выполнив возведение в степень и операции умножения и деления, получим

$$\frac{0{,}1^{-2}\cdot 2^5}{\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}\cdot 0{,}3^{-3}}\cdot\frac{0{,}2^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}}{0{,}4^2}=\frac{10^2\cdot 2^5\cdot 0{,}2^4\cdot 3^4}{\frac{3^4}{5^4}\cdot\frac{10^3}{3^3}\cdot\frac{4^2}{10^2}}=\frac{10\cdot 2^5\cdot(5\cdot 0{,}2)^4}{\frac{4^2}{3^3}}=\frac{10\cdot 2^5\cdot 3^3}{2^4}=540.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите:

а) $9\cdot 3^{-2}$; $8\cdot 2^{-2}$; $16\cdot 4^{-3}$; $9\cdot 3^{-5}$; $96\cdot 2^{-6}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

б) $\frac{1}{4^{-2}}$; $\frac{1}{3^{-3}}$; $\frac{5}{2^{-1}}$; $8(0{,}2)^{-1}$; $(0{,}5)^{-2}\ (1{,}5)^{-2}$; $(-0{,}1)^{-2}\ (4{,}5)^{-1}$;

в) $a^4\cdot a^0$; a^0x^0; $3a^0$; $4(a-b)^0$; $5^0(x-y)$; $(a^0)^n$; $(a^n)^0$; $(a^0)^0$; 1^0.

2. Выполните действия:

а) $a^5\cdot a^{-3}$; $b^{-4}\cdot b^{-7}$; $c^{-11}\cdot c^9$;

б) $\frac{3}{2}mx^{-n}\cdot\frac{4}{5}px^{n-4}$; $\frac{3}{2}x^3y^4\cdot\frac{5}{6}x^{-2}y\cdot\frac{4}{3}xy^{-6}$;

в) $(-7a^{-3}b^{-2})\cdot(-4a^2b^{-1})\cdot(-a^2b^2x^{-1})$; $(a-x)^{-3}\cdot(x-a)^2$;
$(1-x)^{-4}\cdot(x-1)^5$;

г) $\frac{a^8}{a^{-3}}$; $\frac{b^{-4}}{b^{-9}}$; $\frac{a^{-2}b^3}{x^4y^{-5}}$; $\frac{21x^{-1}\cdot y^5z^3}{35x^{-2}\cdot y^6z^{-4}}$; $\frac{2a^4b^{-3}}{3x^4y^{-3}}\cdot\frac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3}$.

3. Преобразуйте выражения так, чтобы они не содержали отрицательных показателей степеней:

а) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$; $\left(\frac{a}{x}\right)^{-n}$; б) $\left(\frac{5}{x}\right)^{-1}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$; в) $\frac{a^0}{b^{-n}}$; $\frac{a^{-2}b^3}{x^4y^{-5}}$.

4. Упростите выражение:

а) $(x-y)^{-2}:(y-x)^{-1}$;

б) $\frac{1}{6a^{n-1}b^{-2}c^{-3}}:\frac{5}{3}a^{-n}b^{n+3}c^3$;

в) $(a-x)^n:(x-a)^{-3}$;

г) $\frac{7}{3}a^{-5}b^{n-1}c:\frac{5}{6a^4bc^2}$.

5. Выполните действия:

а) $(a^{-2})^{-3}$; $(-x^{5})^{-2}$; в) $(-q)^{2n}$; $(-u^{-2n})^{-3}$; $(-v^{-2})^{2n-1}$.
б) $(-y^{-5})^{-2}$; $(-p^{-3})^{4}$;

6. Запишите в виде степени с отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{343}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{625}$; $\frac{1}{1024}$; б) 0,1; 0,001; 0,000001.

7. Вычислите:

а) $\dfrac{2^3\cdot 2^{-1}+5^{-3}\cdot 5^4}{10^{-3}:10^{-2}+(0{,}25)^0}$; б) $\dfrac{2:4^{-2}+(3^{-2})^3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{5^{-3}\cdot 25^2+(0{,}7)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

8. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{2a^{-3}b}{3x^3y^{-2}}\right)^{-3}$; б) $\left(\dfrac{3a^{-4}b^3}{4x^2y^{-3}}\right)^{-2}$; в) $(((xy^2z^{-3})^2)^{-3})^{-4}$.

9. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^{2}$; б) $\left(\dfrac{x+y}{y-x}\right)^{-2}\cdot\dfrac{1}{(x+y)^{-3}}\cdot(x-y)^{-3}$.

10. Выполните действия:

а) $(x+x^{-1})\ (x-x^{-1})$;
б) $(x^2-2x^{-2})^2$;
в) $(a^2-a^{-2})^2$;
г) $(a^{-3}-a^{-2}b^{-1}-a^{-1}b^{-2}+b^{-3}):a^{-3}b^{-3}$;
д) $(a^{-4}+a^{-2}b^{-2}+b^{-4})\cdot a^4b^4$;
е) $(m^{-4}-n^{-4}):(m^{-2}-n^{-2})$;
ж) $(a^{-2}-b^{-2})\cdot(a^{-4}+a^{-2}b^{-2}+b^{-4})$.

11. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\cdot\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}\right):\dfrac{ax^{-1}}{x-a}$;

$\boxed{\text{б)}}$ $\left[\dfrac{y^2(xy^{-1}-1)^2}{x(1+x^{-1}y)^2}\cdot\dfrac{y^2(x^{-2}+y^{-2})}{x(xy^{-1}-x^{-1}y)}\right]:\dfrac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1}$;

в) $\left[\dfrac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right]\cdot\dfrac{a^{-3}}{1-a^{-2}}$;

$\boxed{\text{г)}}$ $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot(a+b+c)^{-2}$;

$\boxed{\text{д)}}$ $\left[\left(\dfrac{y}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2(xy)^{-1}-4}{xy^{-1}-1}\right]\cdot\dfrac{1}{y^2x^{-2}-y^4x^{-4}}$.

12. Решите уравнение:

а) $x+5x^{-1}=6$;
б) $(3+x^{-1})(5-4x^{-1})=5-(x^{-1})^2$;
в) $\dfrac{8x^{-2}+1}{8x^{-2}-x}-\dfrac{2}{2+4x^{-1}+x}+\dfrac{1}{x-2}=0$.

2. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Функцию вида x^n, где n — натуральное число, называют *степенной функцией с показателем* n. При $n=1$ получаем функцию x, которая изучалась в 6 классе. Ее график изображен на рисунке 97, *а*. При $n=2$ и $n=3$ получаем функции x^2 и x^3, изученные в главе VIII. Их графики изображены на рисунке 97, *б, в*.

С помощью степенных функций выражают различные зависимости между величинами. Например, объем куба V выражается через длину x его ребра по формуле $V=x^3$, т. е. в виде степенной функции с показателем 3.

Выражение x^n имеет числовое значение для любого значения x. Поэтому степенная функция определена для всех x. Поскольку $0^n=0$ и $1^n=1$, то *график функции* x^n *проходит через точки* $O(0;\ 0)$ *и* $A(1;\ 1)$ при любом $n \in N$.

Если n — четное число, $n=2k$, то $(-x)^{2k}=x^{2k}$ и отсюда следует, что x^{2k} — *четная функция и ее график симметричен относительно оси* Oy. Если же n — нечетное число, $n=2k-1$, то $(-x)^{2k-1}=-x^{2k-1}$ и, значит, x^{2k-1} — *нечетная функция и ее график симметричен относительно начала координат.*

Рассмотрим свойства степенной функции для неотрицательных значений аргумента.

1. На луче $[0;\ +\infty)$ все значения функции x^n неотрицательны.

Действительно, если $x \geqslant 0$, то $x^n \geqslant 0$.

2. Функция x^n возрастает на луче $[0;\ +\infty)$.

В самом деле, по свойству 7 п. 1 из соотношения $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует $0 \leqslant x_1^n < x_2^n$. Это и означает, что функция x^n возрастает на $[0;\ +\infty)$.

Из доказанного свойства вытекает, что функция x^n ни при каких двух различных неотрицательных значениях аргумента не принимает одинаковых значений. Действительно, если $x_1 \neq x_2$, то либо $x_1 < x_2$ и тогда $x_1^n < x_2^n$, либо $x_1 > x_2$ и тогда $x_1^n > x_2^n$. В обоих случаях $x_1^n \neq x_2^n$.

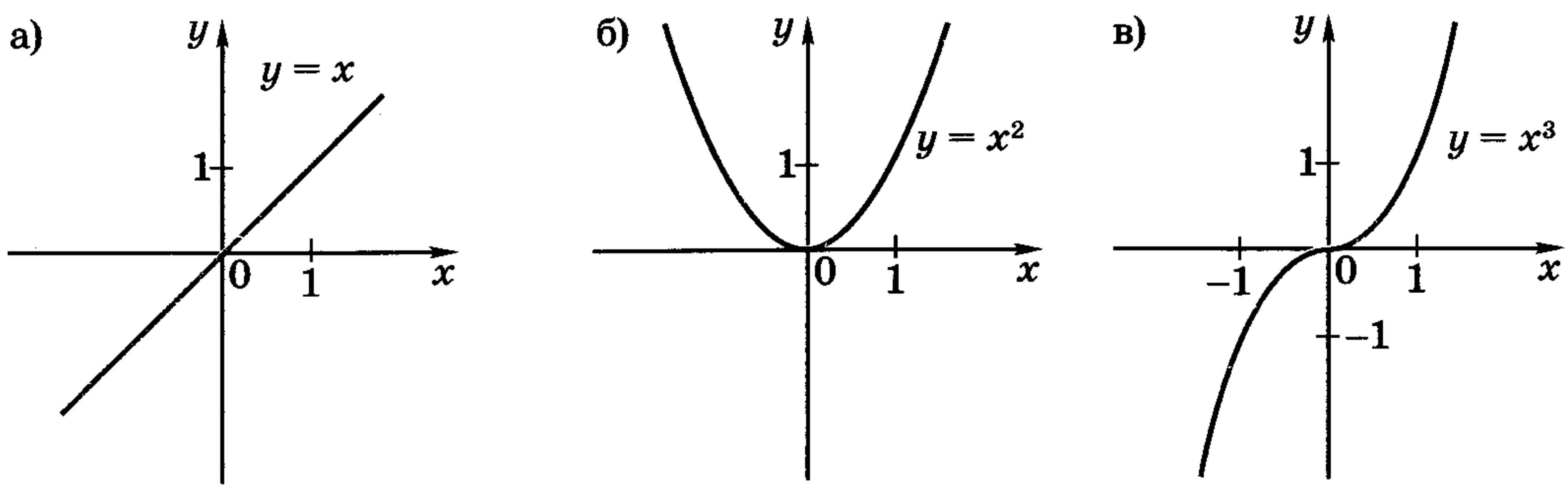


Рис. 97

Отметим без доказательства, что для любого числа b найдется такое единственное число $a \geqslant 0$, что выполняется равенство $a^n = b$. Отсюда следует, что *каждое свое значение* $b \geqslant 0$ *функция* x^n *принимает ровно один раз.*

3. Функция x^n при положительных значениях x принимает значения, большие любого положительного числа A.

В самом деле, если $x > 1$, то $x^n = x \cdot x^{n-1} > x$. Если выбрать $x > A$, то тем более $x^n > A$. Отсюда следует, что функция x^n не имеет наибольшего значения на $[0; +\infty)$. Наименьшее значение функции x^n на $[0; +\infty)$ в силу свойства 2 равно нулю.

Теперь отметим некоторые свойства функции x^n на всей числовой оси, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пусть n — четное число, $n = 2k$. Функция x^{2k} является четной функцией, которая возрастает на $[0; +\infty)$. Отсюда следует, что на промежутке $(-\infty; 0]$ она убывает (см. гл. VIII, упр. 111). Это означает, что точка $x = 0$ *является точкой минимума функции* x^{2k}. В этой же точке функция x^{2k} принимает свое наименьшее значение, равное нулю.

Если же n — нечетное число, $n = 2k - 1$, то функция x^{2k-1} является нечетной функцией, которая возрастает на $[0; +\infty)$. Отсюда следует, что и на промежутке $(-\infty; 0]$ *функция* x^{2k-1} также возрастает (см. гл. VIII, упр. 111), а потому *точек экстремума не имеет*. Можно доказать, что в этом случае для любого числа $b \in (-\infty; +\infty)$ найдется такое единственное число $a \in (-\infty; +\infty)$, что выполняется равенство $a^{2k-1} = b$.

При этом каждое свое значение $-\infty < b < +\infty$ *функция* x^{2k-1} *принимает ровно один раз.*

Отметим без доказательства, что при $n > 1$ график функции x^n касается оси Ox в начале координат.

На рисунке 98 показан вид графика функции x^n в зависимости от четности или нечетности n.

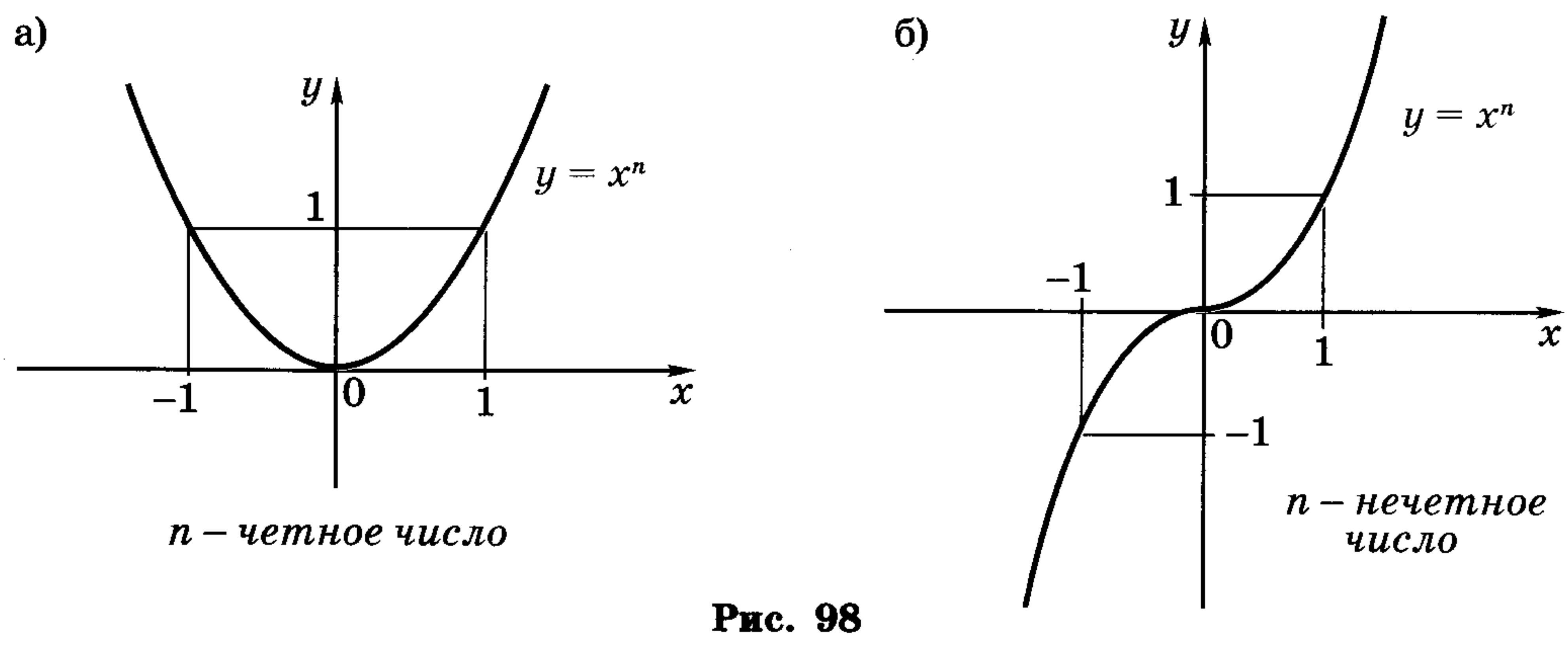


Рис. 98

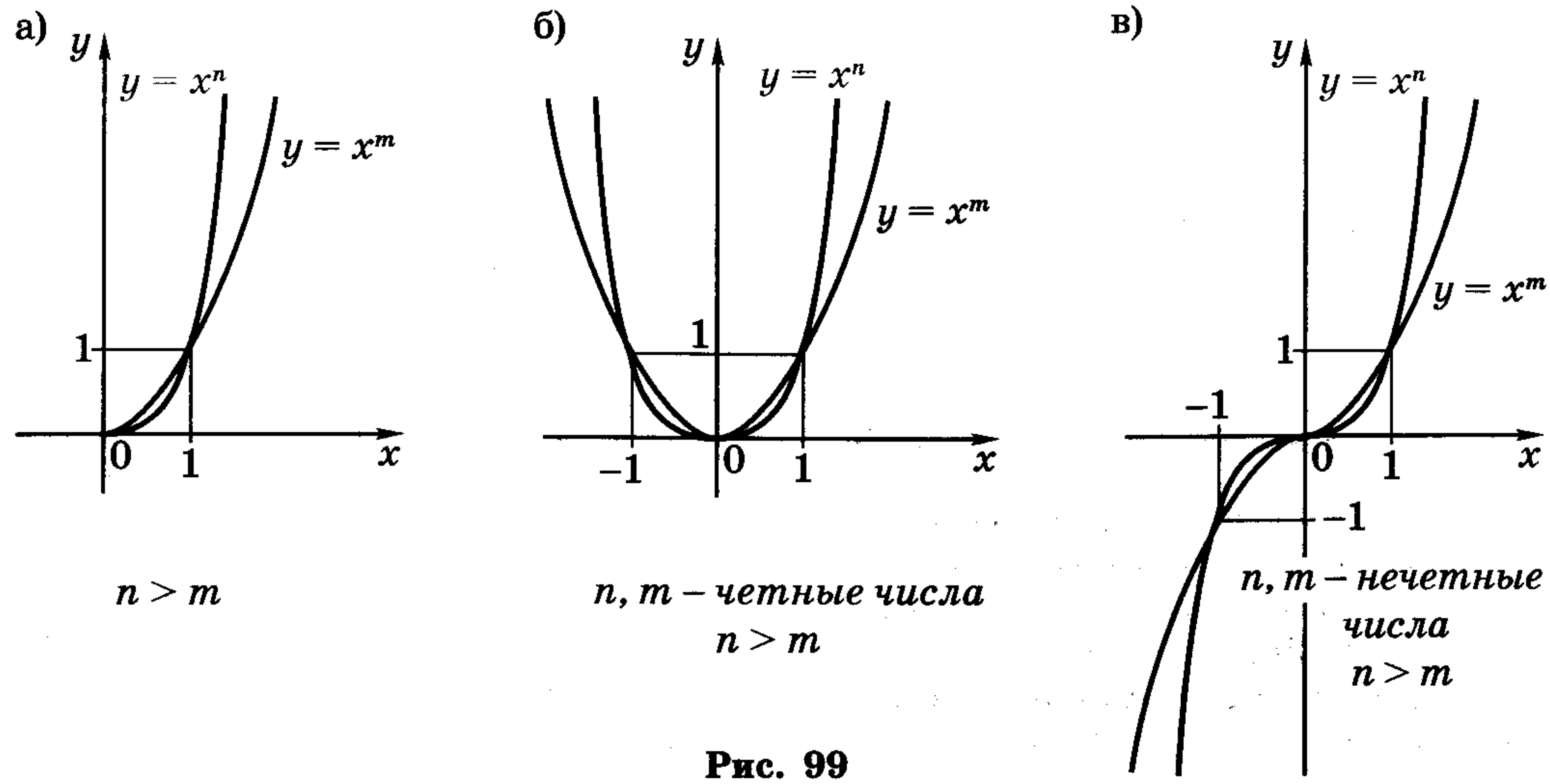


Рис. 99

В заключение рассмотрим взаимное расположение графиков функций x^n и x^m, $n \neq m$.

При $m < n$ *на промежутке* $(0;\ 1)$ *график функции* x^n *лежит ниже графика функции* x^m *и выше на луче* $(1;\ +\infty)$.

Действительно, $x^n = x^m \cdot x^{n-m}$, причем $n - m > 0$. Если $0 < x < 1$, то $0 < x^{n-m} < 1$ и потому $x^n < x^m \cdot 1 = x^m$. Если же $x > 1$, то $x^{n-m} > 1$ и потому $x^n > x^m \cdot 1 = x^m$.

Как мы уже отмечали, графики всех функций x^n при различных значениях n проходят через точки $O(0;\ 0)$ и $A(1;\ 1)$ (рис. 99, *а*).

Взаимное расположение графиков функций x^n, $x \in (-\infty;\ +\infty)$, при различных показателях n показано на рисунке 99, *б*, *в*.

Заметим, что при $n > 1$ графики функций x^n называются *параболами n-го порядка*.

УПРАЖНЕНИЯ

13. Что больше:

а) 5^4 или 5^3; в) $\frac{1}{3{,}8^4}$ или $\frac{1}{3{,}8^6}$;

б) $0{,}2^4$ или $0{,}2^5$; г) $\frac{1}{0{,}56^3}$ или $\frac{1}{0{,}56^5}$?

14. Укажите, какой симметрией обладает график функции:
а) x^6; б) x^5.

15. Какие из следующих уравнений имеют неотрицательные решения:
а) $x^4 = 15$; б) $x^3 = 29$; в) $x^6 = -9$; г) $x^3 = -7$?

16. а) Следует ли из равенства $x^4 = y^4$, что $x = y$?
б) Следует ли из равенства $x^3 = y^3$, что $x = y$?

17. Что больше:

а) $13{,}4^5$ или $15{,}1^5$; в) $\frac{1}{114{,}6^7}$ или $\frac{1}{141{,}6^7}$;

б) $0{,}71^6$ или $0{,}39^6$; г) $\frac{1}{0{,}25^4}$ или $\frac{1}{0{,}52^4}$?

18. График функции ax^n проходит через точки $A(1;\ 3)$ и $B(2;\ 24)$. Найдите значения a и n.

19. В основании прямоугольного параллелепипеда высоты y лежит квадрат со стороной x. Найдите объем параллелепипеда, если:

а) его полная поверхность равна S, а периметр боковой грани равен $2p$;

б) площадь боковой грани равна S_1, а сумма длин ребер равна a.

20. Упростите выражение:

а) $3^n \cdot 3^{2n} \cdot 3^5$; в) $(13^7 : 13^4) \cdot 13^9$;

б) $(-b)^{16} \cdot (-b)^9 \cdot (-b)^{75}$; г) $(0{,}7)^{12} \cdot (0{,}7)^5 : (0{,}7)^{14}$.

21. Упростите выражение:

а) $32^{5m} : 32^{3m}$; г) $(45{,}6^{18l-5})^2 : (45{,}6^{9l+3})^3$;

б) $4{,}8^{9p} \cdot 4{,}8^{10p} : 4{,}8^{5p}$; д) $(6^{2s+1})^{3s-4} : (6^{3s+5})^{2s-1}$.

в) $(-9{,}1)^{5s-1} \cdot (-9{,}1)^{7s+3} : (-9{,}1)^{12s+6}$;

22. Вычислите, предварительно упростив, значение выражения:

а) $\frac{2 \cdot 3^{15} - 6 \cdot 3^{14} + 10 \cdot 3^{13}}{3^{11} + 7 \cdot 3^{10} - 5 \cdot 3^{12}}$; б) $\frac{6 \cdot 2^{n+2} - 9 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^{n+3}}{4 \cdot 2^{n+4} + 4 \cdot 2^{n+6} - 8 \cdot 2^{n+5}}$.

23. Приведите к стандартному виду выражение:

а) $(6x^2)^3$; ж) $(4x^{3n}y^{2m+1}z^{p-1})^4$;
б) $(-7a^3)^5$; з) $(2x^n - 3y^m)^2$;
в) $(3{,}5a^3y^4)^2$; и) $(3x^2y^4z^5)^n$;
г) $(-0{,}3c^9de^6)^5$; к) $(8{,}5x^my^{p+n})^k$;
д) $(7x^n)^2$; л) $(3{,}1x^n - 6{,}5y^m)(3{,}1x^n + 6{,}5y^m)$;
е) $(9{,}3x^{2n})^3$; м) $(2x^my^k)^{n+1}(3x^ky^m)^{n-1}$.

24. Решите неравенство:

а) $x^3 > 27$; б) $x^5 > 32$; в) $x^3 < 8$; г) $x^4 > 16$; д) $x^4 < 81$; е) $x^6 > -1$.

25. Какое из чисел больше:

а) $24{,}81^5$ или $25{,}16^5$; б) $\frac{1}{31{,}6^4}$ или $\frac{1}{27{,}4^4}$?

26. Расставьте в порядке возрастания числа:

а) $37{,}5^3$, $29{,}8^4$, $29{,}8^5$, $18{,}5^4$; б) $0{,}91^6$, $0{,}85^6$, $0{,}91^4$, $1{,}3^2$.

27. Расставьте в порядке убывания числа:

$\frac{1}{15{,}8^5}$, $\frac{1}{17{,}6^7}$, $\frac{1}{17{,}6^5}$, $\frac{1}{15{,}8^4}$.

28. С помощью калькулятора постройте график функции:

а) $2(x-1)^3+1$; б) $-\frac{1}{3}(x+3)^4+4$.

29. Упростите выражение:

а) $(4a^{2n}b^{3m}+0{,}1a^{3n}b^{2m})^2$; б) $(2a^{5n}b^{6n})^{3p}(a^{4p}b^{3p})^{2n}$.

$\boxed{30.}$ Постройте график функции $\frac{1}{2}x^3$. С его помощью постройте график функции:

а) $\frac{1}{2}(x-1)^3+4$; б) $\frac{1}{2}(x+2)^3-6$.

$\boxed{31.}$ Постройте график функции $\frac{1}{2}x^4$. С его помощью постройте график функции:

а) $\frac{1}{2}(x-1)^4+3$; в) $\frac{1}{2}(x+1)^4+3$;

б) $\frac{1}{2}(x+3)^4-1$; г) $\frac{1}{2}(x-3)^4+1$.

32. Найдите наименьшее значение, принимаемое функцией:

а) $3+(x-1)^2$; $\boxed{\text{б)}}$ $(x-2)^4+3(x-2)^2+5$;

$\boxed{\text{в)}}$ $8(x-4)^2+3|x-4|+5$; 1) 3; 2) 1; 3) 0; 4) 5;

$\boxed{\text{г)}}$ $(x+2)^6+3(x+2)^4+9(x+2)^2+5|x+2|+9$; 1) 7; 2) 8,5; 3) 9; 4) 5.

§ 2. КОРНИ И СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

3. КОРНИ С НАТУРАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Решим задачу.

Задача.

Объем V куба равен 125 см^3. Чему равно ребро x куба?

Решение. По формуле объема куба имеем $V=x^3$. Значит, надо найти такое число x, что $x^3=125$. Так как $5^3=125$, то $x=5$. Геометрически очевидно, что других значений ребро куба с объемом 125 см^3 иметь не может: при меньших значениях x объем получился бы меньше, чем 125 см^3, а при больших значениях x — больше, чем 125 см^3.

Решая задачу, мы нашли неотрицательное число x, такое, что $x^3=125$. Такое число называют кубическим корнем из 125 и обозначают $\sqrt[3]{125}$.

Определение. Пусть n — натуральное число и $a \geqslant 0$. *Корнем степени n из числа a* называют такое неотрицательное число x, что $x^n=a$.

Это число x обозначают $\sqrt[n]{a}$. При этом a называют *подкоренным числом*, а n — *показателем корня*.

Из п. 2 знаем, что функция x^n принимает на луче $[0; +\infty)$ по одному разу все неотрицательные значения. Отсюда следует, что для любого неотрицательного числа a есть лишь одно неотрицательное число x, такое, что $x^n=a$. Это число и назвали корнем n-й степени из числа a (рис. 100).

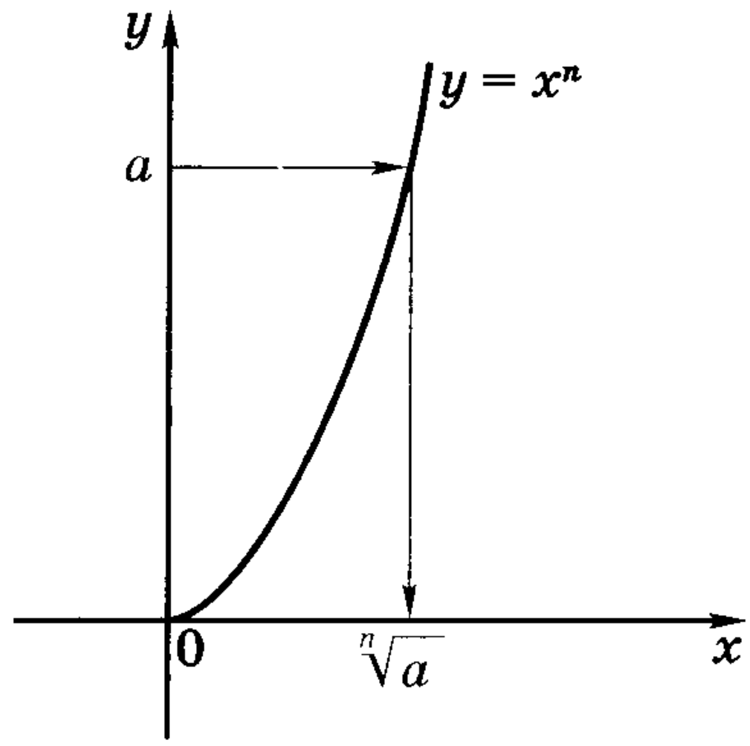


Рис. 100

Итак, для любого натурального числа $n>1$ каждому неотрицательному числу a поставлено в соответствие единственное число $\sqrt[n]{a}$. Тем самым на множестве $[0; +\infty)$ задана функция, которую обозначают $\sqrt[n]{x}$.

Замечание.

Так как $a^1=a$, то $\sqrt[1]{a}=a$. Поэтому корни первой степени не рассматривают. Кроме того, как мы знаем, вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Пример 1.

Так как $5^4=625$, то $\sqrt[4]{625}=5$. Поскольку $2^{10}=1024$, то $\sqrt[10]{1024}=2$.

Пример 2.

Вычислим корни: а) $\sqrt[3]{216}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[7]{128}$.

Решение. а) Так как $6^3=216$, то $\sqrt[3]{216}=6$.

б) Так как $3^4=81$, то $\sqrt[4]{81}=3$.

в) Так как $2^7=128$, то $\sqrt[7]{128}=2$.

Из определения корня следует, что для неотрицательных чисел справедливы тождества

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \qquad (1)$$
$$\sqrt[n]{x^n} = x. \qquad (2)$$

Они показывают, что для неотрицательных чисел операции возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени взаимно обратны — выполнив эти операции одну за другой, снова получаем исходное число. Поэтому функции x^n и $\sqrt[n]{x}$, заданные на множестве неотрицательных чисел, называют *взаимно обратными*.

Пример 3.

Найдем значения выражений $\sqrt[4]{2{,}1^4}$; $\sqrt[7]{10^7}$; $\left(\sqrt[5]{18}\right)^5$; $\sqrt[9]{\left(\frac{3}{4}\right)^9}$.

Решение. По тождествам (1) и (2) имеем:

$\sqrt[4]{2{,}1^4} = 2{,}1$; $\sqrt[7]{10^7} = 10$; $\left(\sqrt[5]{18}\right)^5 = 18$; $\sqrt[9]{\left(\frac{3}{4}\right)^9} = \frac{3}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ

33. С помощью равенства $6^4 = 1296$ выразите 6 через 1296.

34. Докажите, что:

а) $\sqrt[5]{243} = 3$; б) $\sqrt[9]{512} = 2$; в) $\sqrt[3]{1331} = 11$.

35. Составьте таблицы значений 2^n, 3^n для $1 \leqslant n \leqslant 10$ и 5^n, 7^n для $1 \leqslant n \leqslant 5$. С помощью этих таблиц вычислите значение корня:

а) $\sqrt[3]{343}$; б) $\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; г) $\sqrt[5]{3125}$; д) $\sqrt[4]{2401}$.

36. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{1000}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{16807} \cdot \sqrt[6]{729}}{\sqrt[4]{256}}$.

37. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{5^4}$; в) $\sqrt[11]{3{,}71^{11}}$; д) $\left(\sqrt[9]{5{,}7}\right)^9$;

б) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; г) $\left(\sqrt[8]{5{,}4}\right)^8$; е) $\left(-\sqrt[7]{12{,}6}\right)^7$.

38. По образцам $\sqrt[3]{7^6} = \sqrt[3]{(7^2)^3} = 7^2 = 49$ и $\left(\sqrt[5]{21}\right)^{10} = \left(\left(\sqrt[5]{21}\right)^5\right)^2 = 21^2 = 441$ вычислите:

а) $\sqrt[4]{2{,}3^8}$; б) $\sqrt[3]{1{,}3^9}$; в) $\sqrt[5]{6^{20}}$; г) $\left(\sqrt[7]{3{,}1}\right)^{14}$; д) $\left(\sqrt[8]{5}\right)^{24}$; е) $\left(\sqrt[9]{17{,}1}\right)^{18}$.

39. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[4]{49^2}$; б) $\sqrt[8]{(-121)^4}$; в) $\sqrt[6]{64^2}$; г) $\sqrt[15]{8^5}$.

40. Вычислите:

а) $\left(\sqrt{(-0,8)^4}+\sqrt[3]{0,7^6}\right)\left(\sqrt{(-0,8)^4}-\sqrt[3]{0,7^6}\right)$;
в) $\left(\left(\sqrt[3]{4}\right)^6-\left(\sqrt[7]{5}\right)^{14}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt[4]{1,5^8}-\sqrt[5]{0,9^{10}}\right)\left(\sqrt[4]{1,5^8}+\sqrt[5]{0,9^{10}}\right)$;
г) $\left(\sqrt[8]{2^{16}}+\sqrt[9]{3^{18}}\right)^3$.

41. При каких x имеет значение выражение:

а) $\sqrt[4]{x}$; в) $\sqrt[8]{18-3x}$; д) $\sqrt[10]{-x^2+8x-12}$;

б) $\sqrt[4]{9-x}$; г) $\sqrt[4]{x^2-6x+5}$; е) $\sqrt[12]{3x^2-19x+20}$?

42. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[4]{8}\right)^4\cdot\left(\sqrt[5]{15}\right)^5$; в) $\sqrt[3]{4^9}:\sqrt[3]{7^{12}}$; д) $\dfrac{\left(\sqrt[7]{13}\right)^7\cdot\sqrt[9]{5^9}}{\left(\sqrt[8]{16}\right)^8\cdot\sqrt[11]{10^{11}}}$;

б) $\left(\sqrt[6]{11}\right)^{12}\cdot\sqrt[4]{5^{12}}$; г) $\left(\sqrt[5]{10}\right)^{15}\cdot\sqrt[6]{0,1^{12}}$; е) $\dfrac{2\sqrt[4]{(-3)^4}\cdot\sqrt[5]{8^5}}{3\sqrt[6]{(-9)^6}\cdot\sqrt[7]{3^7}}$.

43. Упростите выражение:

а) $\dfrac{4a^3x-4ax^3}{6a^3x+12a^2x^2+6ax^3}$; в) $\dfrac{5b-1}{3b^2-3}+\dfrac{b+1}{2b+2}-\dfrac{b+1}{3b-3}$;

б) $\dfrac{4a^3b^2-16a^2b^3+16ab^4}{2a^4b^2-16ab^5}$; г) $\dfrac{3(x+y)}{4y^3(x^2+y^2)}:\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

44. Докажите, что:

а) $\sqrt[3]{5}>\sqrt[6]{24}$; б) $\sqrt[7]{41}<\sqrt[14]{1715}$.

4. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ ИЗ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Из свойств функции x^n, $-\infty<x<+\infty$, следует, что если n — нечетное число, то функция x^n возрастает на числовой оси от $-\infty$ до $+\infty$ и принимает по одному разу любое значение. В этом случае для любого $a\in(-\infty;\ +\infty)$ есть одно и только одно число x, такое, что $x^n=a$. Условились называть это число и в случае, когда число a отрицательно, корнем n-й степени из a и обозначать $\sqrt[n]{a}$ (рис. 101).

Если n — нечетное число, то корнем n-й степени из отрицательного числа а называют такое число x, что $x^n=a$.

Из этого определения следует, что если n — нечетное натуральное число, то функция $\sqrt[n]{x}$ определена на всей числовой оси $-\infty<x<+\infty$ и множеством ее значений является вся числовая ось $-\infty<y<+\infty$.

Извлечение корней нечетной степени из отрицательных чисел сводится к извлечению корней той же степени из положительных чисел.

Пример 1.

Найдем $\sqrt[3]{-125}$.

Решение. Нам надо найти такое число x, что $x^3=-125$. Но $5^3=125$. Поэтому $(-5)^3=-5^3=-125$ и $\sqrt[3]{-125}=-5$. Так как

$$5=\sqrt[3]{125}=-\sqrt[3]{-125}, \text{ то } \sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{|-125|}.$$

Вообще если n — нечетное число и a — отрицательное число, то $\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{|a|}$.

В самом деле, поскольку число a отрицательно, то $a=-|a|$. Так как $\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n=|a|$, n — нечетное, то

$$\left(-\sqrt[n]{|a|}\right)^n=-\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n=-|a|=a$$

и потому $-\sqrt[n]{|a|}=\sqrt[n]{a}$.

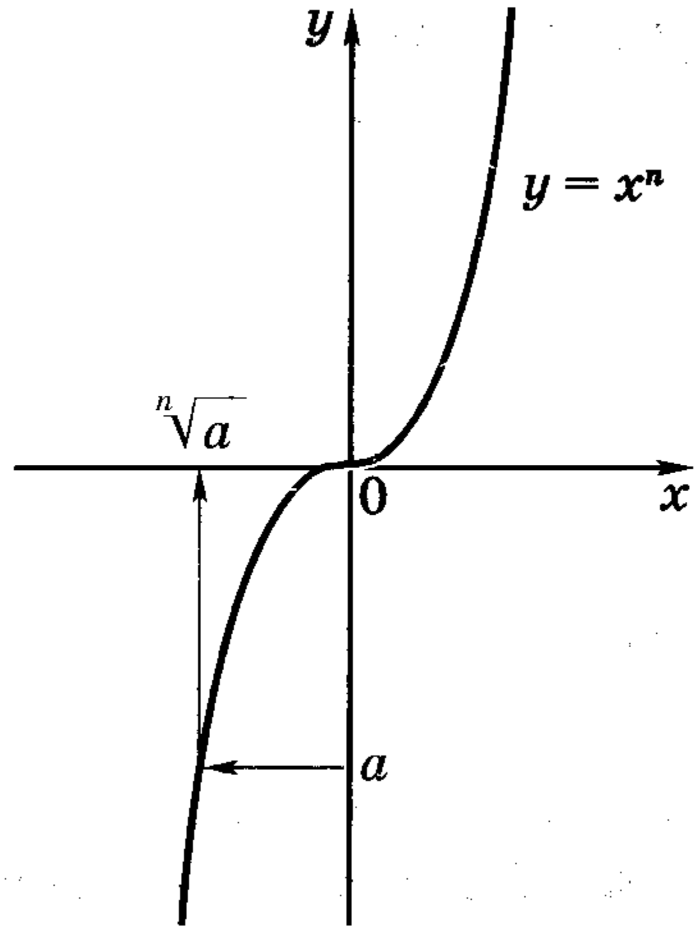


Рис. 101

Замечание 1.

Так как четная степень любого числа неотрицательна, то корни четной степени из отрицательных чисел не имеют значения. Например, не имеет значения $\sqrt[6]{-64}$. Поэтому для четных значений n функция $\sqrt[n]{x}$ определена лишь на промежутке $[0; +\infty)$.

Замечание 2.

В случае, когда n нечетно, уравнение $x^n=a$ при любом a имеет единственное решение, а именно $\sqrt[n]{a}$. Если же n четно и a неотрицательно, то уравнение $x^n=a$ имеет два решения: $\sqrt[n]{a}$ и $-\sqrt[n]{a}$. В самом деле, при четном n имеем $\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.

Замечание 3.

Если n нечетно, то равенства $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ и $\sqrt[n]{x^n}=x$ верны и для отрицательных значений a и x.

Замечание 4.

Если n — четное число, то $\sqrt[n]{x^n}=|x|$.

УПРАЖНЕНИЯ

45. Вычислите значение:

а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[7]{-128}$; г) $\sqrt[3]{-125}$.

46. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{-216}\cdot\sqrt[4]{256}$; б) $\sqrt[6]{729}:\sqrt[5]{-243}$; в) $\left(\sqrt[5]{(-3)^5}\right)^5$;

$\boxed{г)}$ $\left(\sqrt[3]{-125}\right)^3:\sqrt[4]{(-5)^4}$; 1) 20; 2) 25; 3) -20; 4) -25.

47. Какие из следующих выражений не имеют значения:

а) $\sqrt[4]{16}+\sqrt[5]{-3125}$; в) $\sqrt[6]{-64}\cdot\sqrt[6]{-729}$;

б) $\sqrt[4]{-16}+\sqrt[5]{3125}$; г) $\sqrt[6]{(-64)\cdot(-729)}$?

48. При каких значениях переменных имеет значение выражение:

а) $\sqrt[3]{x-5}$; б) $\sqrt[8]{5-x}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{y-5}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5-z}}$?

49. Решите уравнение:

а) $x^3=216$; в) $x^5=-1024$; д) $x^4=10\,000$;

б) $x^4=256$; г) $x^6=729$; е) $x^5=\dfrac{1}{32}$.

50. Имеет ли решение уравнение:

а) $\sqrt[3]{2x-5}=-4$; б) $\sqrt[6]{8x+2}=3$; в) $\sqrt[4]{6x-7}=-1$?

51. Упростите выражение:

а) $\sqrt[5]{(-4)^5}$; б) $\sqrt[6]{(-3)^6}$; в) $\sqrt[3]{(-7)^6}$; г) $\sqrt[9]{(-11)^9}$.

52. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[8]{(-7)^8}\cdot\left(\sqrt[9]{6}\right)^9}{\sqrt[5]{(-4)^5}\cdot\left(\sqrt[6]{3}\right)^6}$; б) $\dfrac{\sqrt[25]{(-3)^{25}}\cdot\sqrt[24]{(-2)^{24}}}{\sqrt[20]{(-12)^{20}}}$.

53. Найдите значение корня:

а) $\sqrt[3]{-512}$; в) $\sqrt[7]{-\dfrac{1}{128}}$; д) $\sqrt[3]{-0{,}008}$;

б) $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{32}}$; г) $\sqrt[5]{-100000}$; е) $\sqrt[6]{-0{,}064}$.

54. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{49-5x}=2$; в) $\sqrt[3]{2x-1}=-4$; д) $\sqrt[3]{x^2-1}=2$;

б) $\sqrt[4]{7x-6}=-3$; г) $\sqrt[5]{-64+9x}=-2$; е) $\sqrt[3]{x^2-4x+5}=1$.

5. СВОЙСТВА КОРНЕЙ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1) Корень n-й степени из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней той же степени из этих чисел.

Иными словами, если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}. \tag{1}$$

Для доказательства возведем обе части доказываемого равенства в n-ю степень. Так как по условию $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{x} \geqslant 0$, $\sqrt[n]{y} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{xy} \geqslant 0$. Поэтому если после возведения в степень получатся одинаковые результаты, то равенство (1) верно. По определению корня имеем $\left(\sqrt[n]{xy}\right)^n = xy$. Далее, по свойствам степеней и по определению корня

$$\left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = xy.$$

Итак,

$$\left(\sqrt[n]{xy}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n,$$

а потому

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

2) Корень n-й степени из дроби с положительным знаменателем и неотрицательным числителем равен корню той же степени из числителя, деленному на корень той же степени из знаменателя.

Иными словами, если $x \geqslant 0$ и $y > 0$, то выполняется равенство

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}. \tag{2}$$

В самом деле, по условию имеем $\sqrt[n]{x} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{y} > 0$.
Кроме того, по свойствам степеней и определению корня имеем

$$\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right)^n = \frac{x}{y} \text{ и } \left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{y}\right)^n} = \frac{x}{y}.$$

Значит, $\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n$, и потому $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

3) Если число x неотрицательно, то для любых натуральных чисел m и n выполняется равенство

$$\sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n. \tag{3}$$

В самом деле, по свойству 1 имеем:

$$\sqrt[m]{x^n}=\sqrt[m]{\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ множителей}}}=\underbrace{\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[m]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[m]{x}}_{n\text{ множителей}}=\left(\sqrt[m]{x}\right)^n.$$

4) Если число x неотрицательно, то для любых натуральных чисел m, n и p выполняется равенство

$$\sqrt[m]{x^n}=\sqrt[mp]{x^{np}}. \qquad (4)$$

В самом деле, числа $\sqrt[m]{x^n}$ и $\sqrt[mp]{x^{np}}$ неотрицательны. При этом в силу свойства степеней и определения корня имеем равенства

$$\left(\sqrt[m]{x^n}\right)^{mp}=\left(\left(\sqrt[m]{x^n}\right)^m\right)^p=(x^n)^p=x^{np},\quad \left(\sqrt[mp]{x^{np}}\right)^{mp}=x^{np}.$$

Значит, $\left(\sqrt[m]{x^n}\right)^{mp}=\left(\sqrt[mp]{x^{np}}\right)^{mp}$, и потому $\sqrt[m]{x^n}=\sqrt[mp]{x^{np}}$.

Замечание.

Равенства (1), (2), (3), (4) выполняются и в случае, когда числа x и y имеют любые знаки, а показатели корней нечетны. При четных показателях корней эти равенства могут не выполняться при отрицательных значениях переменных. Например, $\sqrt[4]{(-2)(-8)}=\sqrt[4]{16}=2$, а выражение $\sqrt[4]{(-2)}\cdot\sqrt[4]{(-8)}$ значения не имеет, так как нельзя извлечь корень четвертой степени из отрицательного числа.

Пример 1.

Заменим одним корнем следующее выражение:

а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{15}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{63}}{\sqrt[5]{9}}$; в) $\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[6]{2}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{11}}{\sqrt[3]{4}}$.

Решение. а) По формуле (1) имеем $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{9\cdot 15}=3\sqrt[3]{5}$.

б) По формуле (2) имеем $\dfrac{\sqrt[5]{63}}{\sqrt[5]{9}}=\sqrt[5]{\dfrac{63}{9}}=\sqrt[5]{7}$.

в) Сначала приведем корни к одному показателю. Он равен наименьшему общему кратному чисел 4 и 6, т. е. 12. Имеем

$$\sqrt[4]{7}=\sqrt[12]{7^3}\ \text{ и }\ \sqrt[6]{2}=\sqrt[12]{2^2}.$$

Значит,

$$\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[12]{7^3}\cdot\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[12]{7^3\cdot 2^2}.$$

г) Таким же образом заменяем корни $\sqrt[5]{11}$ и $\sqrt[3]{4}$ на $\sqrt[15]{11^3}$ и $\sqrt[15]{4^5}$ соответственно и получаем, что

$$\frac{\sqrt[5]{11}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[15]{11^3}}{\sqrt[15]{4^5}}=\sqrt[15]{\frac{11^3}{4^5}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

55. Запишите в виде произведения корней из простых чисел выражение:

а) $\sqrt[3]{210}$; б) $\sqrt[4]{462}$.

56. Запишите в виде отношения корней выражение:

а) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; в) $\sqrt[7]{\frac{29}{35}}$; д) $\sqrt[4]{\frac{91}{15}}$;

б) $\sqrt[5]{\frac{11}{3}}$; г) $\sqrt{\frac{26}{33}}$; е) $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^5$.

57. Запишите, использовав лишь один знак корня, выражение:

а) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{35}{24}}$; б) $\sqrt{\frac{17}{16}}:\sqrt{\frac{51}{20}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{11}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{17}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{51}\cdot\sqrt[3]{14}}$.

58. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{11})-(\sqrt{13}+\sqrt{3})^2$;

б) $(\sqrt{5}+\sqrt{17})^2-(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{11}-\sqrt{13})$.

59. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{25\cdot 49}$; $\sqrt{169\cdot 196}$; $\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}09}$;

б) $\sqrt[3]{27\cdot 729\cdot 125}$; $\sqrt[3]{1000\cdot 216}$; $\sqrt[3]{0{,}343\cdot 27}$;

$\boxed{\text{в)}}$ $\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0625}$; $\sqrt[4]{625\cdot 0{,}0256\cdot 16}$;

$\boxed{\text{г)}}$ $\sqrt[5]{243\cdot 100\,000}$; $\sqrt[5]{32\cdot 0{,}00001}$.

60. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{4^3\cdot 7^3}$; $\sqrt[5]{12^5\cdot 3^5}$; $\sqrt[6]{0{,}2^6\cdot 8^6}$; $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot 16^7}$;

б) $\sqrt[3]{15^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot 0{,}3^3}$; $\sqrt[10]{1{,}6^{10}\cdot 0{,}25^{10}\cdot 0{,}1^{10}}$;

в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; $\sqrt{112}\cdot\sqrt{7}$; $\sqrt{28}\cdot\sqrt{\frac{1}{7}}$;

г) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$; $\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt[3]{0{,}04}$;

д) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$;

е) $\sqrt[6]{0{,}3^{12}\cdot 2^{18}}$; $\sqrt[3]{7^3\cdot 5^6}$; $\sqrt[4]{2^{20}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$;

ж) $\sqrt{\frac{169}{100}}$; $\sqrt{\frac{196}{225}}$; $\sqrt[3]{\frac{216}{1000}}$; $\sqrt[3]{\frac{729}{27}}$; $\sqrt[4]{\frac{256}{81}}$;

з) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$; $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; $\sqrt[3]{42\frac{7}{8}}$;

и) $\sqrt[4]{0{,}0081}$; $\sqrt[5]{0{,}00032}$; $\sqrt[3]{0{,}000343}$.

61. Выполните действия:

а) $\sqrt[4]{10\,000\cdot\frac{16}{625}}:\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$;

б) $\left(\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{32}\right):\sqrt[3]{4}$;

в) $\left(\sqrt[5]{25}-\sqrt[5]{9}\right):\left(\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{3}\right)$;

г) $\left(\sqrt[7]{64}-2\sqrt[7]{24}+\sqrt[7]{9}\right):\left(\sqrt[7]{8}-\sqrt[7]{3}\right)$.

62. Докажите, что:

а) $\sqrt[3]{29}<\sqrt[6]{893}$; б) $\sqrt{47}<\sqrt[4]{2371}$; в) $\sqrt[3]{32}>\sqrt{10}$; г) $\sqrt[5]{241}<\sqrt[4]{83}$.

63. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt[5]{-32}+\sqrt[7]{-128}\right)^3}{\sqrt[3]{-125}+\sqrt[5]{-100\,000}}$.

64. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{3x-4}=5$; б) $\sqrt[5]{91-3x}=-2$; в) $\sqrt[6]{18-3x}=-5$.

65. Составьте квадратное уравнение, имеющее корни:

а) $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{5}$;

в) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{11}$ и $\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{11}$.

66. Запишите выражение с одним знаком корня:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{11}{5}\right)^2}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{3^2\cdot 7}\cdot\sqrt[5]{7^3\cdot 2^3\cdot 3^4}}{\sqrt[5]{2^2\cdot 3^3\cdot 7^2}}$.

67. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt[6]{7^4\cdot 2^3}\cdot\sqrt[6]{7^2\cdot 2^3}$; б) $\sqrt[5]{3^2\cdot 5^3}\cdot\sqrt[5]{3^3\cdot 5^2}$; в) $\dfrac{\sqrt[5]{4^{11}\cdot 3^{31}\cdot 7^6}}{\sqrt[5]{2^2\cdot 3^{11}\cdot 7}}$;

г) $\sqrt[3]{7\cdot 11^4}\cdot\sqrt[3]{7^5\cdot 11^2}$; **1) 5929; 2) 6929; 3) 5820; 4) 5839.**

68. Сравните значения корней:

а) $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[8]{27}$ и $\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt{39}$ и $\sqrt[3]{12}$; г) $\sqrt{87}$ и $\sqrt[3]{711}$.

6. ГРАФИК ФУНКЦИИ $\sqrt[n]{x}$

Выясним вид графика функции $y=\sqrt[n]{x}$, n — любое натуральное число, сначала при $x\in[0;+\infty)$. Мы уже знаем вид графика функции x^n при $x\in[0;+\infty)$ (рис. 102).

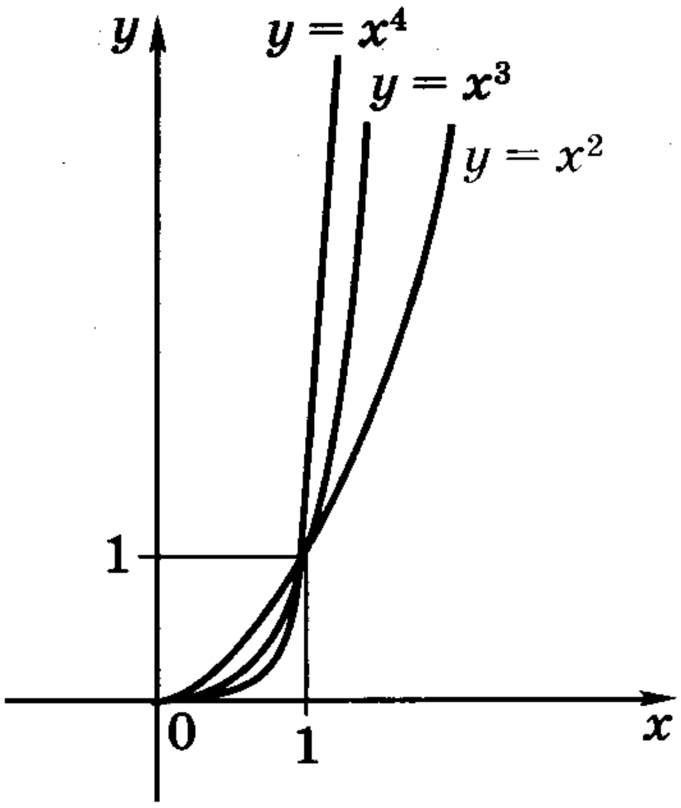


Рис. 102

Так как операции возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени взаимно обратны, то функции $y=x^n$ и $x=\sqrt[n]{y}$ выражают одну и ту же зависимость и потому имеют один и тот же график (рис. 103, *а*). Для функции $x=\sqrt[n]{y}$ значения аргумента y изображаются точками оси ординат, а значения функции x — точками оси абсцисс. Но обычно ось для значений аргумента изображают горизонтально, а ось для значений функции — вертикально. Чтобы вернуться

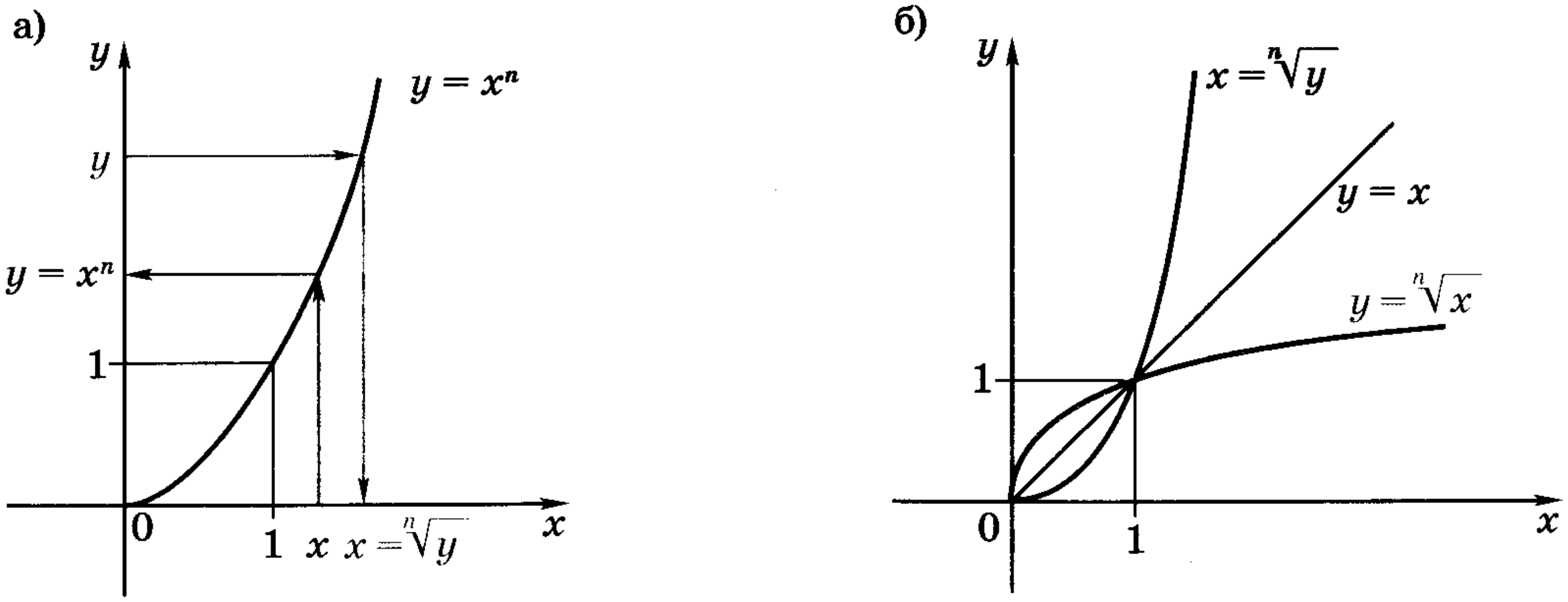


Рис. 103

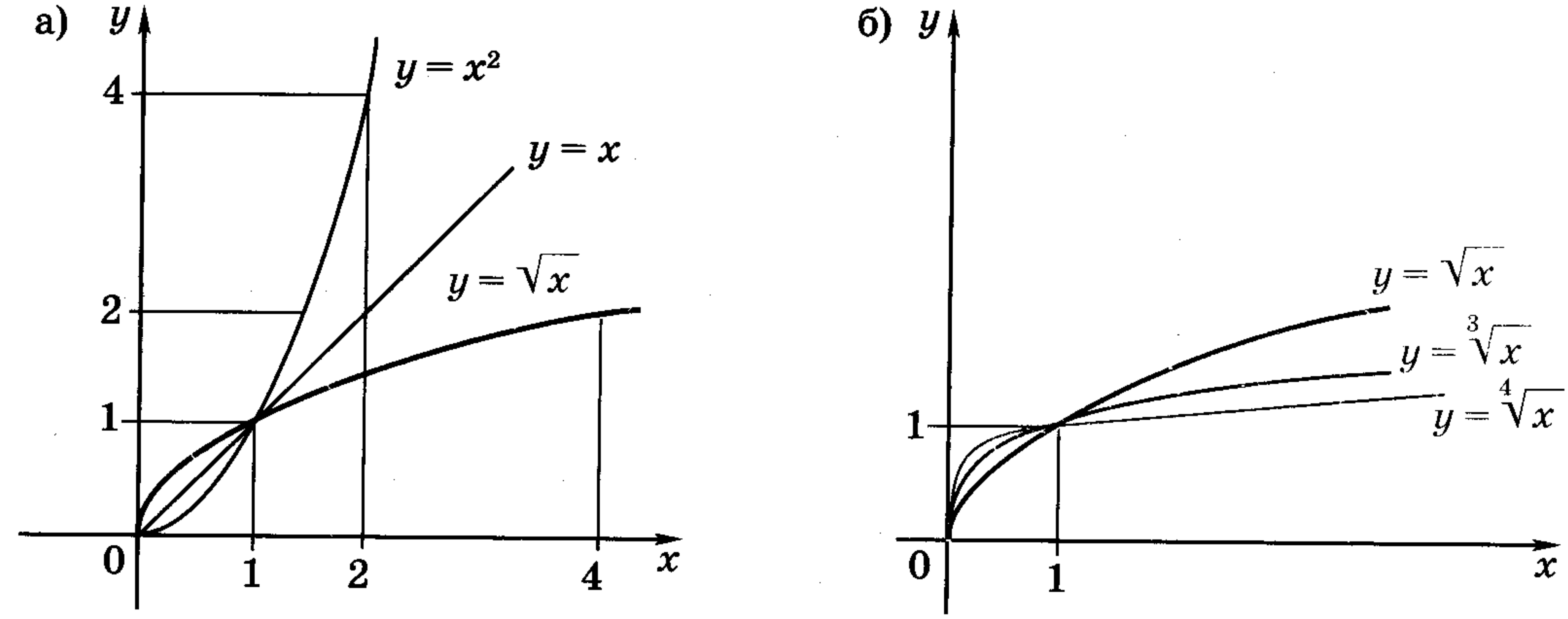


Рис. 104

к привычному изображению осей аргумента и функции, достаточно поменять их местами. С этой целью проведем прямую $y = x$ и сделаем осевую симметрию относительно этой прямой. При этой симметрии оси координат поменяются местами, зависимость $x = \sqrt[n]{y}$ перейдет в зависимость $y = \sqrt[n]{x}$, а известный нам график функции $x = \sqrt[n]{y}$ (рис. 103, *б*) — в график функции $y = \sqrt[n]{x}$.

Таким образом, график функции $\sqrt[n]{x}$ получается из графика функции x^n с помощью симметрии относительно прямой $y = x$. На рисунке 104, *а* построение выполнено для $n = 2$.

При различных значениях n ($n = 2$; 3; 4) графики функций $\sqrt[n]{x}$, $x \in [0; +\infty)$, изображены на рисунке 104, *б*.

Перейдем к рассмотрению графика функции $\sqrt[n]{x}$ при $x \in (-\infty; +\infty)$. Выше (пункт 4) мы отметили, что функция $\sqrt[n]{x}$ для $x \in (-\infty; +\infty)$ определена только для нечетных значений n, $n = 2k - 1$. Чтобы полу-

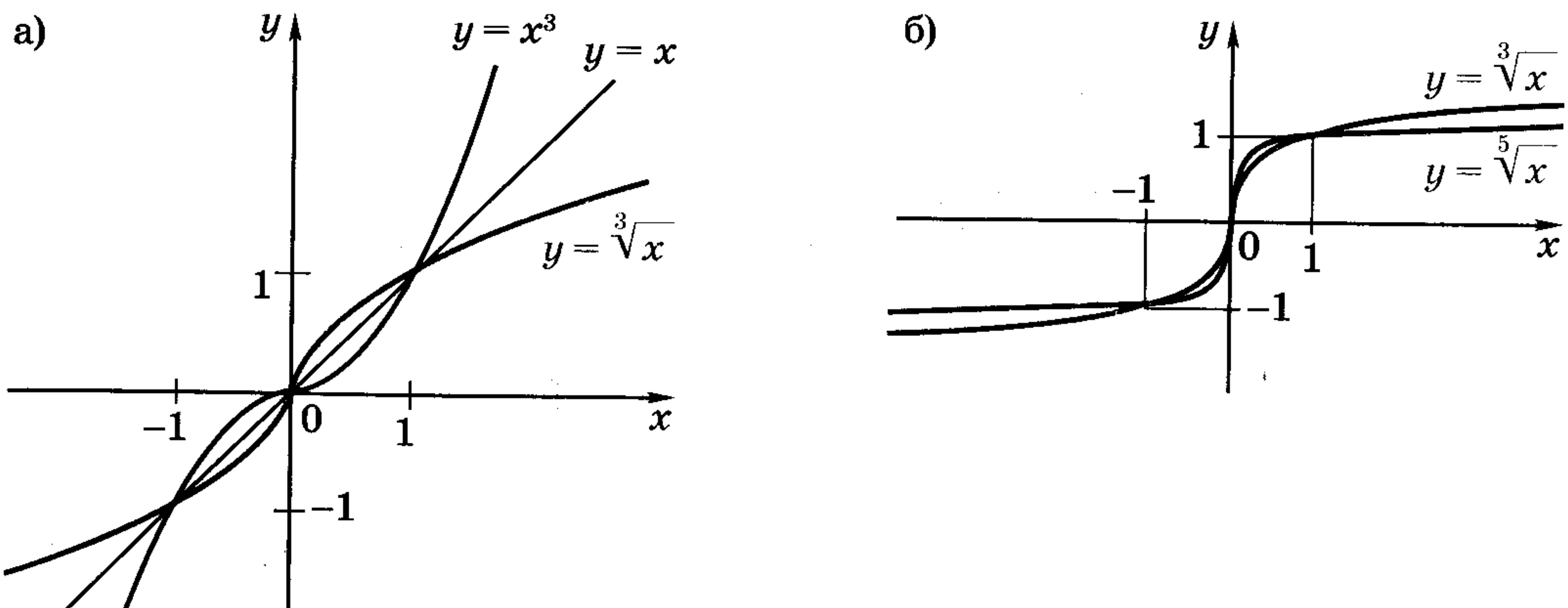


Рис. 105

чить график функции $\sqrt[2k-1]{x}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, надо выполнить такие же преобразования над всем графиком функции x^{2k-1} (рис. 105, *а*). В результате этих преобразований получим график, изображенный на рисунке 105, *б*, построение выполнено для $n=3$ и $n=5$.

Отметим, что при больших значениях x функция $\sqrt[n]{x}$ возрастает весьма медленно. Например, $\sqrt[3]{1}=1$, $\sqrt[3]{1000}=10$, $\sqrt[3]{1\,000\,000}=100$. Рост функции $\sqrt[n]{x}$ при больших значениях x тем медленнее, чем больше показатель n. Например, $\sqrt[3]{1\,000\,000}=100$, а $\sqrt[5]{100\,000}=10$.

УПРАЖНЕНИЯ

69. Лежит ли точка $A(8; -2)$ на графике функции $\sqrt[3]{x}$?

70. Обладает ли симметрией график функции $\sqrt[n]{x}$:

а) при четном n; б) при нечетном n?

71. График функции $\sqrt[n]{x}$ проходит через точку $A(16; 2)$. Найдите значение n.

72. График функции $y=x^4$ (рис. 106) выполните на миллиметровой бумаге и найдите:

а) значения $\sqrt[4]{3,8}$; $\sqrt[4]{1,3}$; $\sqrt[4]{0,5}$; $\sqrt[4]{3,6}$;

б) значения x, при которых $\sqrt[4]{x}=0,3$; $0,9$; 1;

в) значения функции $\sqrt[4]{x}$ на луче $[1; +\infty)$;

г) значения функции $\sqrt[4]{x}$ на отрезке $[1; 16]$;

д) значения x, для которых $1 \leqslant \sqrt[4]{x} \leqslant 1,5$;

е) значения x, для которых $\sqrt[4]{x} \leqslant 2$.

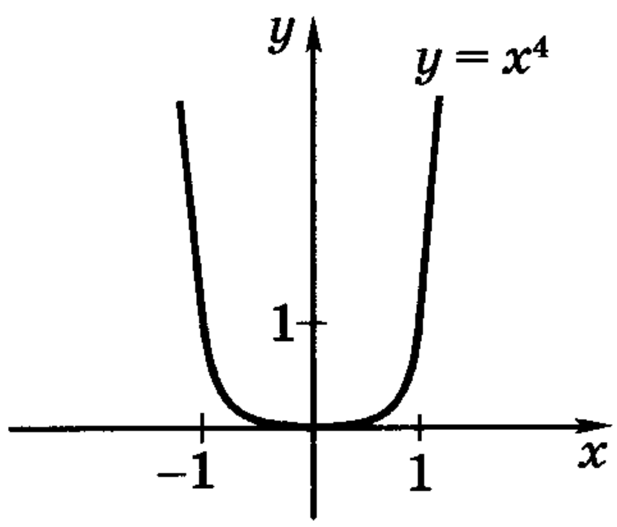


Рис. 106

73. График функции $y=x^3$ (см. рис. 105, *а*) выполните на миллиметровой бумаге и найдите:

а) значение $\sqrt[3]{2,5}$;

б) значение x, при котором $\sqrt[3]{x}=2,1$;

в) значения функции $\sqrt[3]{x}$ на луче $[2; +\infty)$;

г) значения функции $\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[1; 8]$;

д) значения x, для которых $\sqrt[3]{x}<2$;

е) значения x, для которых $1<\sqrt[3]{x}<2$.

74. С помощью графика функции $\sqrt[3]{x}$ решите графически уравнение $\sqrt[3]{x}=x-1$. Укажите, при каких значениях x выполняется неравенство $\sqrt[3]{x}<x-1$.

75. В каких точках пересекаются графики функций:

а) x^4 и $\sqrt[4]{x}$; б) x^3 и $\sqrt[3]{x}$; в) x и $\sqrt[5]{x}$; г) x^2 и $\sqrt[3]{x}$?

76. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{37-x^2}=1$; б) $\sqrt[3]{x^2-36}=4$.

77. Решите неравенство:

а) $\sqrt[3]{81-x}<3$; б) $\sqrt[3]{69-5x}<5$; в) $\sqrt[5]{x^2-9}<2$.

78. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{17-5x}=4$; б) $\sqrt[5]{37-4x}=2$; в) $\sqrt[5]{17x-54}=3$.

7. СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В предыдущих пунктах были определены степени с любыми целыми показателями. Обобщим теперь это понятие, введя степени с любыми рациональными показателями.

Пусть r — рациональное число, тогда его можно записать в виде $r=\frac{m}{n}$, где m и $n\neq 0$ — целые числа.

Рассмотрим положительное число a и определим выражение $a^{\frac{m}{n}}$ так, чтобы сохранились все рассмотренные ранее свойства степеней с целыми показателями. В частности, чтобы выполнялось свойство возведения степени в степень, должно выполняться равенство

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m. \quad (1)$$

В то же время по определению корня выполняется равенство

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n=a^m. \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), видим, что $a^{\frac{m}{n}}$ *надо определить как корень n-й степени из* a^m, т. е.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}. \quad (3)$$

Если в равенстве (3) положить $m=1$, то получим $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$. Например:

$$a^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{a};\quad a^{-\frac{5}{12}}=\sqrt[12]{a^{-5}}=\sqrt[12]{\frac{1}{a^5}};\quad a^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{a^3}.$$

Заметим, что каждое рациональное число r можно различными способами записать в виде дроби $\frac{m}{n}$. Например: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{10}{20}=\ldots$.

Поэтому данное определение степени с рациональным показателем a^r может показаться зависящим от способа записи показателя r в виде дроби. Однако это не так. Докажем, что *для любого натурального p и любого числа $a>0$ выполняется равенство*

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}. \qquad (4)$$

Для доказательства обе части равенства (4) возведем в степень np. По свойству 5 возведения в натуральную степень и в силу равенства (1) получим

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{np}=\left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n}\right)^{p}=(a^m)^p=a^{mp}.$$

С другой стороны, по формуле (1) $\left(a^{\frac{mp}{np}}\right)^{np}=a^{mp}$. Значит,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{np}=\left(a^{\frac{mp}{np}}\right)^{np},$$

и по следствию свойства 7 § 1 п. 1 делаем вывод о справедливости равенства (4).

Пример 1.

Запишем с помощью степеней с рациональными показателями выражение

$$\frac{\sqrt[7]{a^3}\cdot\sqrt[3]{c^4}}{\sqrt[5]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b^2}}=\frac{a^{\frac{3}{7}}\cdot c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{5}}\cdot b^{\frac{2}{4}}}.$$

Пример 2.

Вычислим значение выражения

$$9^{0,5}\cdot 16^{-0,25}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+225^{0,5}.$$

Решение. Перепишем данное выражение, применяя формулу (3), найдем значения корней и выполним указанные операции:

$$9^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{-\frac{1}{4}}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+225^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}\cdot\sqrt[4]{16^{-1}}-\sqrt[3]{8^{-2}}\cdot\sqrt[3]{27}+\sqrt{225}=$$
$$=3\sqrt[4]{\frac{1}{2^4}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2^6}}\cdot\sqrt[3]{3^3}+15=3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot 3+15=15\frac{3}{4}.$$

Для степеней с рациональными показателями сохраняются основные свойства степеней с целыми показателями.

Сначала докажем, что *при $a>0$, $b>0$ и любом рациональном r выполняется равенство*

$$(ab)^r=a^r\cdot b^r. \qquad (5)$$

Пусть $r=\frac{m}{n}$, где n — натуральное число, докажем, что

$$(ab)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}. \tag{6}$$

Возведем обе части равенства (6) в степень n, получим

$$\left((ab)^{\frac{m}{n}}\right)^n=(ab)^m=a^m b^m,$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}\right)^n=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m b^m.$$

Таким образом,

$$\left((ab)^{\frac{m}{n}}\right)^n=\left(a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}\right)^n.$$

Тогда по следствию свойства 7 § 1 п. 1 заключаем, что

$$(ab)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}.$$

Точно так же доказывается, что *если* $a>0$ *и* $b>0$, *а* r — *рациональное число, то*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}. \tag{7}$$

Докажем теперь, что при $a>0$ **для любых рациональных чисел** r_1 **и** r_2 **выполняется равенство**

$$a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}. \tag{8}$$

Пусть $r_1=\frac{m_1}{n_1}$ и $r_2=\frac{m_2}{n_2}$, где n_1 и n_2 — натуральные числа, а m_1 и m_2 — целые.

Приведем дроби $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ к одинаковому знаменателю, тогда $r_1=\frac{m_1n_2}{n_1n_2}$ и $r_2=\frac{m_2n_1}{n_2n_1}$. В этом случае равенство (8) принимает вид:

$$a^{\frac{m_1n_2}{n_1n_2}}\cdot a^{\frac{m_2n_1}{n_2n_1}}=a^{\frac{m_1n_2}{n_1n_2}+\frac{m_2n_1}{n_2n_1}}. \tag{9}$$

Для доказательства справедливости равенства (9) нам достаточно, как и раньше, возвести обе части равенства в натуральную степень n_1n_2. Получим

$$\left(a^{\frac{m_1n_2}{n_1n_2}}\cdot a^{\frac{m_2n_1}{n_2n_1}}\right)^{n_1n_2}=\left(a^{\frac{m_1n_2}{n_1n_2}}\right)^{n_1n_2}\cdot\left(a^{\frac{m_2n_1}{n_1n_2}}\right)^{n_1n_2}=a^{m_1n_2}\cdot a^{m_2n_1}=a^{m_1n_2+m_2n_1}$$

и

$$\left(a^{\frac{m_1n_2}{n_1n_2}+\frac{m_2n_1}{n_2n_1}}\right)^{n_1n_2}=\left(a^{\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}}\right)^{n_1n_2}=a^{m_1n_2+m_2n_1}.$$

Таким образом, n_1n_2-е степени обеих частей равенства (9) имеют одно и то же значение $a^{m_1n_2+m_2n_1}$, значит, по следствию свойства 7 § 1 п. 1 равенство (9), а с ним и равенство (8) справедливы.

Точно так же доказывается выполнение равенства

$$\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}=a^{r_1-r_2}. \tag{10}$$

Прием возведения в одну и ту же степень обеих частей равенства используется и при доказательстве следующего свойства:

если a — положительное число и r_1, r_2 — рациональные числа, то

$$(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1\cdot r_2}. \tag{11}$$

Наконец, докажем, что **если $0<a<b$, то при $r>0$ выполняется неравенство $a^r<b^r$, а при $r<0$ справедливо неравенство $a^r>b^r$.**

Пусть $r=\frac{m}{n}>0$, где m — натуральное число. Предположим, что $a^{\frac{m}{n}}\geqslant b^{\frac{m}{n}}$, тогда по свойству 7 § 1 имеем

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\geqslant\left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n, \text{ или } a^m\geqslant b^m.$$

Откуда следует, что $a\geqslant b$.

Полученное неравенство противоречит условию, и, следовательно,

$$a^r<b^r \text{ при } r>0.$$

Если же $r=\frac{m}{n}<0$, то, полагая $r=\frac{-m}{n}$, дальнейшие рассуждения проводим совершенно аналогично.

УПРАЖНЕНИЯ

79. Запишите с помощью знака корня:

а) $a^{\frac{2}{3}}$; г) $p^{-\frac{2}{3}}$; ж) $v^{-1,75}$; к) $(p-q)^{n-\frac{1}{4}}$;

б) $a^{\frac{1}{3}}$; д) $q^{-1\frac{1}{2}}$; з) $(ax-b)^{\frac{n-1}{2}}$; л) $2a\left(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$.

в) $a^{3\frac{1}{2}}$; е) $h^{0,5}$; и) $(m-n)^{p+\frac{2}{3}}$;

80. Запишите с помощью дробных показателей:

а) $\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}$; д) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^{-1}}}$;

б) $\sqrt{a^2x}+\sqrt[4]{b^3x^2}+\sqrt[6]{c^4x^3}$; г) $\sqrt{a^3\sqrt{b\sqrt{c}}}$; е) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}$.

81. Вычислите:

а) $36^{\frac{1}{2}}$; б) $4^{\frac{5}{2}}$; в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$; г) $(0{,}25)^{\frac{1}{2}}$; д) $27^{-\frac{2}{3}}$; е) $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

$\boxed{\text{ж)}}$ $[-(2a^{-1})^3]^2+\left[\frac{1}{2}(-a)^3\right]^{-2}+(-2a^{-2})^3-\left[-\frac{1}{2}\left(-2a^{-\frac{1}{2}}\right)^4\right]^3-\left[2\left[\left(-\frac{a}{2}\right)^{-4}\right]^{\frac{1}{2}}\right]^3$;

$\boxed{\text{з)}}$ $\frac{5[(b^{-1})^2]^{-2}}{(3b^{-2})^{-1}}+\left[\frac{-b^{\frac{2}{3}}}{(2-b^3)^0}\right]^4+\frac{(-b^{0,4})^5}{2^{-1}b^0}-\left(\frac{b-4b}{b^{-0,5}}\right)^2\cdot b^{-1}$.

82. Выполните указанные действия:

а) $5x^{\frac{1}{3}}\cdot 2x^{-\frac{1}{5}}$; г) $0{,}2a^{\frac{2}{5}}q^{-\frac{7}{8}}:0{,}1a^{-\frac{3}{5}}q^{\frac{1}{8}}$; ж) $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{8n^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{3}}$;

б) $\frac{2}{3}a^2m^{-\frac{7}{8}}\cdot a^{-1}m^{\frac{5}{6}}$; д) $(p^{-2,5}\cdot q^{1,25})^{-0,4}$; з) $\left(\frac{a^3b^{1,5}}{0{,}001p^{1\frac{1}{5}}q^{-2}}\right)^{-1\frac{1}{3}}$.

в) $6p^{\frac{5}{6}}:3p^{-\frac{2}{3}}$; е) $\left(16a^{1\frac{1}{2}}b^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}$;

83. Сократите дробь:

а) $\frac{a^{\frac{1}{6}}+5}{25-a^{\frac{1}{3}}}$; б) $\frac{x+y}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+xy^{\frac{2}{3}}}$; в) $\frac{a^{0,75}-b^{0,5}}{a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{12}}}$.

84. Выполните указанные действия:

а) $\left(3x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(3x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{3}{2}}\right)$; е) $\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}}-a^{\frac{1}{5}}\right)$;

б) $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)$; ж) $\left(z^{\frac{2}{3}}+1\right)\left(z^{\frac{4}{9}}+z^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(z^{\frac{2}{9}}-1\right)$;

в) $\left(2m^{-\frac{3}{4}}+3m^{\frac{3}{4}}\right)^2$; з) $\left(b^{\frac{7}{4}}-2\right)(b^{3,5}+2b^{1,75}+4)(8+b^{5,25})$;

г) $\left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}}\right)^2$; и) $(x^{1,5}-y^{1,5}):(x+x^{0,5}y^{0,5}+y)$.

д) $\left(m^{-\frac{2}{3}}-m^{\frac{4}{3}}\right)^3$;

85. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}} : \left(\dfrac{c^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}} \cdot \dfrac{b^{-\frac{5}{6}}c^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}}\right)$; 1) a^2bc; 2) abc; 3) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c$; 4) ab^2c^2;

б) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{6}}} : \sqrt[4]{a^{-3}b^{-5}}\right)^{\frac{2}{7}} + \left(a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}} \cdot (a^2b^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^6$;

в) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{(a^2b)^{\frac{3}{4}}} \left(\dfrac{a^2xy^{-1}}{by^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{2}}}{x^{-1}y^{\frac{1}{3}}}\right)^{-3} \left(\dfrac{a^4b^{\frac{1}{2}}x^5y}{a^{-3}b^2x^{-4}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

г) $\sqrt{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{b^{-\frac{3}{4}}a^3\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}}} : \sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[3]{a^{-\frac{3}{2}}b^{-1}\sqrt{a^{-\frac{3}{4}}b^{-1}}}}$.

86. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа

$x_1 = 64^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9 \cdot 3^{-\frac{5}{2}} - 4 \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{8}} : \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$,

$x_2 = 36^{0{,}4} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} + \dfrac{1}{2} \cdot \left(2^{-\frac{1}{12}}\right)^{-24} - \left(3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{7}{6}}\right)^2$.

87. Докажите, что число $(1994)^7 - 1994$ делится на число

$(0{,}5)^{-4} + 16^{0{,}5} - (0{,}0625)^{-0{,}75} \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{-0{,}5} - \left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : (2{,}5)^2 \cdot (0{,}3)^{-2}$.

88. Докажите неравенство:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} > \sqrt[13]{5}$;

б) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{3}} > \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[19]{9}}}$;

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}} > \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[15]{\dfrac{1}{8}}}}$;

г) $\dfrac{(1{,}1994)^{0{,}2} - 1}{1 - (1{,}1994)^{-0{,}2}} > 1$.

89. Определите знак числа:

а) $\left(4 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 8\left(34 - (1152)^{\frac{1}{2}}\right) - 2$;

б) $\left(2 \cdot 6^{\frac{1}{2}} - 5\right)^2 - 10\left(49 - 20 \cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + 1$;

в) $2 - (0{,}1994)^{-0{,}7} - (1{,}994)^{0{,}8}$;

г) $\dfrac{5^{-\frac{1}{3}} - 6^{-\frac{1}{3}}}{1 - 0{,}7^{-\frac{2}{7}}}$.

90. В каком промежутке изменяется значение выражения:

а) $2x^{0{,}25} + 5x^{0{,}75}$, если $16 < x \leqslant 81$;

б) $5-7x^{0,4}$, если $243^{-1}\leqslant x<32^{-1}$;

в) $3x^{0,5}-2x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}$, если $10^{-6}\leqslant x<2^{-6}$?

91. При каких значениях переменной определено выражение:

а) $\left(\frac{5x-1}{4}-2\right)^{0,4}$;

б) $\left(\frac{4-y}{5}-5y\right)^{1\frac{1}{2}}$;

в) $\left(x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

г) $(-8x^2+x-9)^{-\frac{1}{2}}$;

д) $((y^2-6y+8)(y^2+16))^{-0,75}$;

е) $\left(\frac{5-x}{3-2x}\right)^{\frac{5}{6}}$;

ж) $(|13-2x|-|4x-9|)^{1\frac{5}{6}}$?

92. Найдите все рациональные числа a, при которых выполняется равенство:

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2a+1}=2^a$;

б) $27\left(\sqrt{3}\right)^{a+2}=3^a$;

в) $5^{1-4a}=1$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^a\cdot 4^a\cdot\left(\sqrt{2^3}\right)^a=4$.

93. Решите уравнение:

а) $x^{\frac{2}{3}}=4$;

б) $x^{\frac{1}{5}}=2$;

в) $(1-2x)^{\frac{1}{3}}=3$;

г) $(5-9x)^{\frac{4}{5}}=-2$;

д) $(x^2-7x)^{\frac{1}{3}}=2$;

е) $(|x+1|+|2-x|)^{-\frac{3}{2}}=-1$;

ж) $(|x|+|x+1|)^{0,7}=1$;

з) $(3x^2+13|x|)^{0,75}=8$.

94. Решите графически уравнение:

а) $|x|^{\frac{1}{2}}=x^2$;

б) $(|x|-2)^{\frac{1}{3}}=2$;

в) $(x-8)^2-|x-8|^{\frac{1}{3}}=0$;

г) $(x+2)^{1,5}+x=10$.

95. Упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}}-\frac{a^2+4}{a^2-4}$;

б) $\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{\sqrt{a^{-1}-ba^{-2}}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}-ab-\frac{1}{(a^2+b^2)^{-1}}$;

в) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{6}}-\dfrac{5}{\sqrt[6]{c}}}{a^{-\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{5\left(a^{-\frac{1}{6}}-c^{-\frac{1}{6}}\right)}{a^{-\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{c^{-1}}}\right)^{-1}\cdot\dfrac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}}+\dfrac{\sqrt[4]{1+x}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

96. Найдите значение выражения:

а) $\left(\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, если $x=2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$ и $k>1$;

б) $\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$, если $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$.

§ 3. СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

8. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Процесс производства любого продукта связан с потреблением разнообразных ресурсов. В число ресурсов входит все то, что необходимо для производственной деятельности: здания и оборудование, инструменты и транспорт, сырье и готовая продукция, интеллектуальные способности работников и компьютерные программы.

В дальнейшем мы будем предполагать, что фирма или отрасль выпускает некоторый однородный продукт (сталь, зерно, чугун, холодильники, автомобили, фломастеры, компьютеры и т. д.), количество которого измеряется либо в некоторых натуральных единицах (тоннах, метрах, киловатт-часах и т. д.), либо в единицах выпуска в единицу времени (например, пять изделий в час или тысячу установок в год и т. д.). Иногда объем выпуска и затраты ресурсов измеряются в денежных единицах — рублях, долларах, евро и т. д. В дальнейших вычислениях мы иногда будем опускать наименование единиц измерения.

Полный перечень различных ресурсов, которые участвуют в процессе производства, насчитывает сегодня тысячи наименований и перед таким многообразием математические методы бессильны. Поэтому все ресурсы экономисты делят на две важнейшие группы, называемые факторами производства.

Один из этих факторов — Труд, в дальнейшем обозначим его буквой L (от англ. Labor — труд). Другой фактор — Капитал, обозначим буквой K (от англ. Capital — капитал).

Труд L включает все физические, умственные и интеллектуальные затраты, совершаемые людьми в процессе производства.

Капитал K включает заводские помещения, оборудование, различные средства производства, земельные площади, компьютерные программы и т. д. Для описания деятельности фирмы, корпорации или отрасли необходимо знать, какое количество продукта она может произвести, используя то или иное количество ресурсов. Величину выпуска окончательного продукта обозначим через Q.

Зависимость количества выпускаемого продукта от объемов затрат ресурсов назовем производственной функцией.

Записывается это так:

$$Q=f(L,\ K).$$

Изучение сталелитейной промышленности США в 30-х годах прошлого века привело американских ученых Ч. Кобба и П. Дугласа к построению следующей производственной функции:

$$Q=1{,}4\sqrt[4]{K}\cdot\sqrt[4]{L^3}.$$

Ее значение при $K=81\cdot10^4$ ед., $L=16$ ед. равно

$$Q=1{,}4\cdot\sqrt[4]{81\cdot10^4}\cdot\sqrt[4]{2^{12}}=1008 \text{ ед.}$$

Замечание.

Обратите внимание, что функция Q зависит от двух переменных L и K. С функциями от двух переменных мы имеем дело при изучении равномерного движения, изучении площади прямоугольника, а при изучении объема параллелепипеда мы рассматриваем функцию, зависящую от трех переменных: $V=x\cdot y\cdot z$.

9. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА — ДУГЛАСА

Наиболее распространенными производственными функциями являются степенные функции. Важнейшие из них — функции вида

$$Q=aK^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}, \qquad (1)$$

где $a>0$ — экономическая константа, $\alpha\in[0,\ 1]$ — рациональное число.

Такие производственные функции называются **производственными функциями Кобба — Дугласа** в честь американских ученых, которые впервые эти функции построили и изучили при $a=1{,}4$ и $\alpha=\frac{1}{4}$.

Производственная функция (1) обладает следующими свойствами:

1. Если $K=0$ или $L=0$, то $Q=0$. Это означает, что при отсутствии хотя бы одного ресурса выпуск продукта невозможен.

2. Если увеличить потребление Капитала K или Труда L, то величина выпуска Q увеличится.

УПРАЖНЕНИЯ

97. Для производственной функции $Q=1{,}4K^{\frac{1}{4}}\cdot L^{\frac{3}{4}}$ найдите величину Q при следующих значениях Капитала K и Труда L:

а) $K=81\cdot 10^4$, $L=256^{\frac{1}{3}}$;

б) $K=625$, $L=16^{\frac{1}{3}}$;

в) $K=10^4$, $L=1$;

г) $K=1296$, $L=625^{\frac{1}{3}}$;

д) значения K и L выберите самостоятельно.

□ Существуют ли среди заданных значений K и L такие, которые обеспечивают одинаковый выпуск Q?

98. Из соотношения (1) выразите K через Q и L, а L через Q и K.

99. Производственная функция фирмы задана соотношением

$$Q=1{,}7K^{\frac{1}{3}}\cdot L^{\frac{2}{3}}. \qquad (2)$$

Определите величину выпуска Q при следующих значениях K и L:

а) $K=729$, $L=1000$;

б) $K=9261$, $L=8000$;

в) значения K и L выберите самостоятельно.

□ Из уравнения (2) выразите K через Q и L, а L через Q и K.

100. Производственная функция фирмы имеет вид $Q=1{,}5K^{\frac{1}{4}}\cdot L^{\frac{3}{4}}$. Фирма выпустила Q_0 единиц продукции, затратив на это K_0 единиц Капитала K. Определите затраты Труда L_0, обеспечивающие этот выпуск. Проведите расчеты при следующих значениях Q_0 и K_0:

а) $Q_0=108$, $K_0=6561$;

б) $Q_0=202{,}5$, $K_0=625$;

в) $Q_0=225$, $K_0=10\,000$;

г) величины Q_0 и K_0 задайте самостоятельно и найдите L_0.

101. Производственная функция фирмы задана формулой $Q=2{,}3K^{\frac{3}{4}}\cdot L^{\frac{1}{4}}$. Фирма выпустила Q_0 единиц продукции, затратив L_0 единиц Труда. Какие затраты Капитала K_0 обеспечили заданный выпуск? Проведите расчеты при следующих значениях Q_0 и L_0:

а) $Q_0=2{,}3$, $L_0=1296$;

б) $Q_0=2300$, $L_0=16$;

в) $Q_0=434{,}7$, $L_0=2401$;

г) величины Q_0 и L_0 задайте самостоятельно.

10. ИЗОКВАНТЫ — ЛИНИИ РАВНОГО ВЫПУСКА

В процессе производства некоторого продукта перед фирмой обычно встает вопрос: в каком количестве затратить ресурсы Капитала K и ресурсы Труда L, чтобы обеспечить выпуск Q единиц окончательного продукта?

Предположим, что фирма планирует выпустить Q_0 единиц окончательной продукции. Из уравнения (1) следует, что этот выпуск можно обеспечить различными способами. Для этого достаточно рассмотреть такие затраты ресурсов K и L, которые удовлетворяют уравнению

$$Q_0 = aK^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \qquad (1)$$

где Q_0 — планируемый выпуск окончательной продукции.

Определение. Множество точек (L; K) на плоскости LOK, координаты которых (L; K), удовлетворяет уравнению (1), образует на этой плоскости некоторую кривую, которая называется *изоквантой* (от лат. iso — тот же самый и quant — количество) или *линией равного выпуска*.

Пример 1.

Найдем изокванту производственной функции Кобба — Дугласа $Q = 60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$, соответствующую выпуску $Q_0 = 120$ единиц продукции.

Решение. В данном случае уравнение (1) принимает вид $120 = 60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$, или $\sqrt[4]{K}\sqrt[4]{L^3} = 2$. Отсюда $\sqrt[4]{K} = \frac{2}{\sqrt[4]{L^3}}$.

Возведем полученное равенство в четвертую степень, получим $K = \frac{16}{L^3}$. Это и есть уравнение искомой изокванты: каждая пара чисел (L; K), удовлетворяющая ему, обеспечивает выпуск 120 единиц окончательной продукции.

Приведем некоторые значения L и K, принадлежащие найденной изокванте (табл. 1):

Таблица 1

L	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	16
K	16	2	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{4}$	128	$\frac{1}{256}$

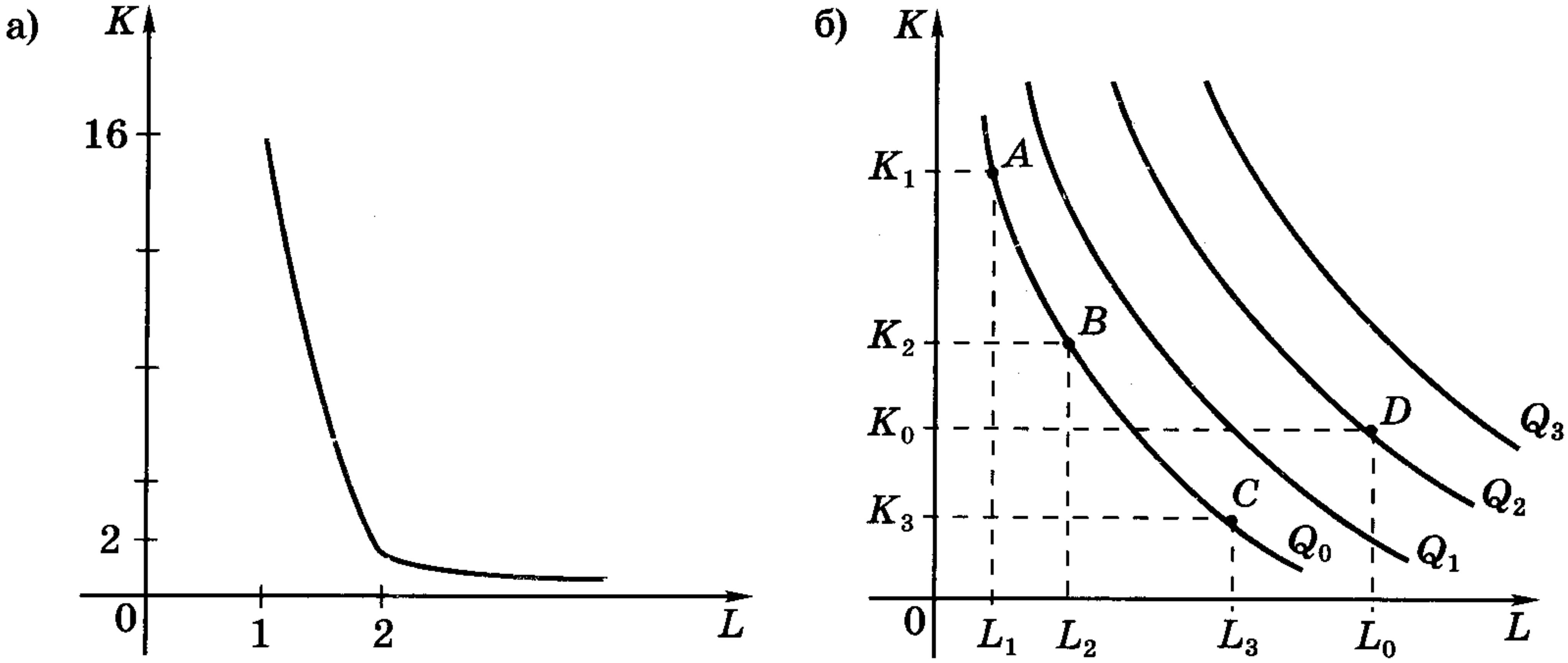


Рис. 107

Используя эти значения, построим эскиз графика найденной изокванты (рис. 107, *а*).

Отметим некоторые общие свойства изоквант. Для этого из уравнения (1) выразим K как функцию L: $K^{\alpha}=\frac{Q_0}{a}\cdot\frac{1}{L^{1-\alpha}}$. Отсюда получим

$$K=\left(\frac{Q_0}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \qquad (2)$$

Изокванта $Q=Q_0$ функции Кобба — Дугласа совпадает с графиком функции (2). Исследуем поведение изокванты при возрастании и убывании затрат ресурса L. Пусть L возрастает. Тогда из уравнения (2) и условия $\frac{\alpha-1}{\alpha}<0$ следует, что величина затрат Капитала K остается положительной, при этом уменьшается и приближается к нулю. Это значит, что с ростом ресурса L график функции (2) приближается к оси OL, которая является горизонтальной асимптотой изокванты. Если же затраты ресурса L убывают, то из уравнения (2) и условия $\frac{\alpha-1}{\alpha}<0$ следует, что величина затрат Капитала K возрастает. Это означает, что при убывании затрат ресурса L график функции (2) приближается к оси OK, которая служит вертикальной асимптотой изучаемой изокванты. Отсюда следует, что Труд L и Капитал K взаимно заменяют друг друга: можно использовать немного Труда L, но тогда придется использовать много Капитала K и наоборот. Таблица 1 хорошо это иллюстрирует.

Отметим еще два простых свойства изокванты.

1. Через каждую точку $A(L;\ K)$ $(L>0,\ K>0)$ проходит единственная изокванта.

2. Изокванты, соответствующие различным значениям Q_1 и Q_2 $(Q_1\neq Q_2)$, не пересекаются.

В результате проведенного исследования мы можем утверждать, что изокванты функции Кобба — Дугласа, представляющие различные уровни выпуска продукции, имеют вид, изображенный на рисунке 107, *б*.

На рисунке 107, *б* схематически представлены изокванты, отвечающие значениям $Q_0 < Q_1 < Q_2 < Q_3$ выпуска продукции. Сочетания ресурсов $(L_1;\ K_1)$, $(L_2;\ K_2)$, $(L_3;\ K_3)$, соответствующие точкам A, B и C изокванты $Q = Q_0$, обеспечивают выпуск окончательной продукции в объеме Q_0 единиц. Сочетание же ресурсов $(L_0;\ K_0)$ обеспечивает выпуск в объеме $Q_2 > Q_0$.

УПРАЖНЕНИЯ

102. Найдите изокванту производственной функции $Q = 4K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$, соответствующую выпуску $Q_0 = 20$ единиц окончательной продукции. Сделайте эскиз графика этой изокванты.

103. На какой изокванте производственной функции $Q = 6K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ лежит точка $(L;\ K)$, если $K = 729$, $L = 3375$?

1) 7000; 2) 7290; 3) 8290; 4) 9290.

104. Производственная функция имеет вид $Q = 3K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$. Обеспечит ли выпуск $Q_0 = 18$ единиц окончательной продукции сочетание ресурсов:

а) $K = 16$, $L = \sqrt[3]{81}$; б) $K = 256$, $L = 1$; в) $K = 6561 \cdot 10^4$, $L = 81$;

г) при выбранных самостоятельно значениях K и L?

11. ИЗОКОСТЫ — ЛИНИИ РАВНОЙ СТОИМОСТИ

Любой выпуск окончательной продукции, который намечает фирма, она желает достичь с наименьшими затратами. Обсудим, как это происходит.

Пусть $Q = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ — производственная функция фирмы. Тогда фиксированный уровень производства в Q_0 единиц окончательной продукции определяет изокванту $Q_0 = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Различные точки, лежащие на этой изокванте, представляют различные сочетания величин Труда L и Капитала K, которые обеспечат производство Q_0 единиц окончательной продукции.

С точки зрения обеспечения данного выпуска все такие сочетания равноправны. Однако с точки зрения расходов на приобретение ресурсов L и K эти способы совсем не одинаковы. Действительно, обозначим через r цену услуг единицы Капитала (например, арендная плата за 1 час). Через ω обозначим цену услуг единицы Труда (например, часовую ставку зарплаты). Тогда расходы на приобретение ресурсов в объемах L_1 и K_1 составят величину $C_1 = rK_1 + \omega L_1$. Если же ресурсы приобретаются в объемах K_2 и L_2, то расходы составят величину $C_2 = rK_2 + \omega L_2$ и обычно $C_1 \neq C_2$.

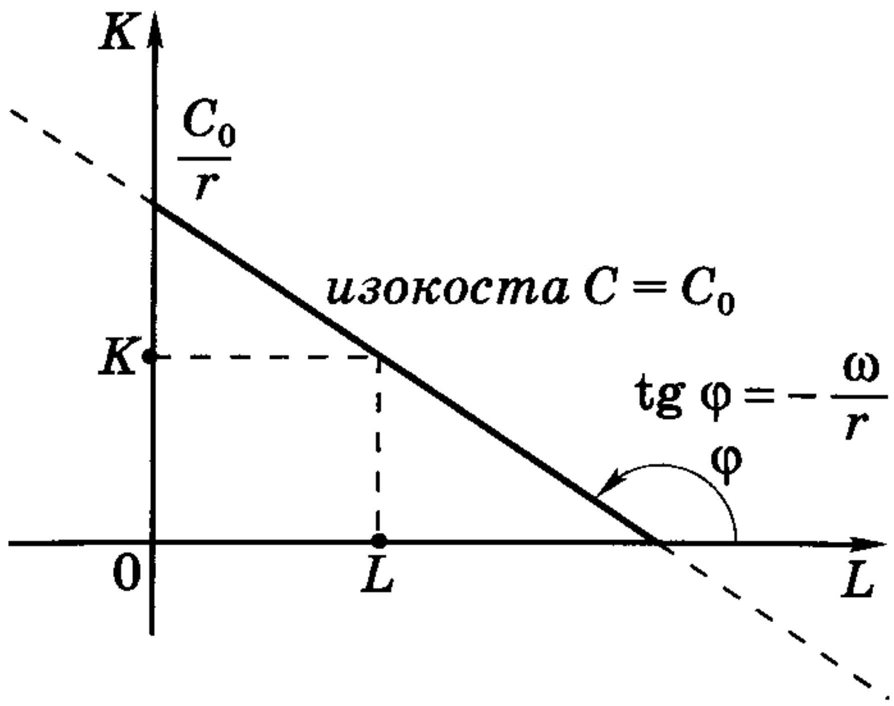


Рис. 108

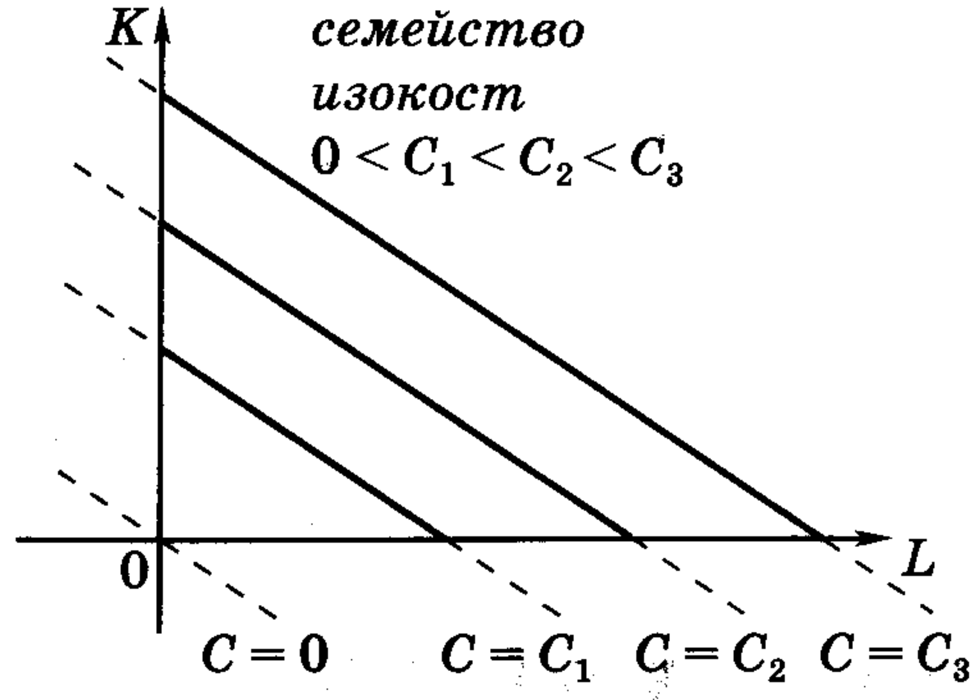


Рис. 109

В общем случае если способ производства Q_0 единиц окончательной продукции использует L единиц Труда и K единиц Капитала, то расходы фирмы на приобретение ресурсов составят величину

$$C=\omega L+rK, \text{ или } K=-\frac{\omega}{r}L+\frac{C}{r}. \qquad (1)$$

Зафиксируем значение C, допустив, что $C=C_0>0$. Тогда

$$K=-\frac{\omega}{r}L+\frac{C_0}{r}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) определяет на плоскости LOK прямую с угловым коэффициентом $-\frac{\omega}{r}$ и отрезком $\frac{C_0}{r}$, отсекаемым на оси OK (рис. 108).

Точки $(L;\ K)$, лежащие на прямой (2), обладают следующим свойством: расходы фирмы на приобретение ресурсов L и K постоянны и равны числу $C_0=\omega L+rK$. Поэтому прямую $K=-\frac{\omega}{r}L+\frac{C_0}{r}$ называют **линией постоянной стоимости** или **изокостой** (от лат. iso — равный и costes — цена).

Если в уравнении (1) изменять значение C $(C\geqslant 0)$, то мы получим семейство изокост. Все они имеют один и тот же угловой коэффициент и поэтому параллельны друг другу и не пересекаются. При этом, чем больше значение C, тем более удалена от начала координат соответствующая изокоста. При $C=0$ получаем изокосту $\omega L+rK=0$. Этой изокосте принадлежит только одна точка $K=L=0$ $(K\geqslant 0,\ L\geqslant 0)$ (рис. 109).

Пример 1.

Известно, что $\omega=20$ денежных единиц, $r=45$ денежных единиц. Найдем расходы фирмы на приобретение ресурсов в объемах $L=300$ денежных единиц, $K=120$ денежных единиц.

Решение. Уравнение (1) в данном случае имеет вид $20L+45K=C$. Подставим в него значения L и K. Получаем $C=20\cdot 300+45\cdot 120=$ $=11\,400$ денежных единиц.

Пример 2.

Пусть $\omega = 1200$ денежных единиц, $r = 6000$ денежных единиц. Составим уравнение той изокосты, которая проходит через точку $(L; K)$, $L = 500$, $K = 200$.

Решение. В данном случае уравнение (1) имеет вид $1200L + 6000K = C$. Найдем C. Для этого в полученное уравнение подставим значения L и K. Тогда $C = 1200 \cdot 500 + 6000 \cdot 200 = 1\,800\,000$ и искомое уравнение имеет вид $1200L + 6000K = 1\,800\,000$.

УПРАЖНЕНИЯ

105. Пусть $\omega = 35$, $r = 40$ денежных единиц. Найдите расходы на приобретение ресурсов L и K в следующих размерах:

а) $L = 130$ ед., $K = 286$ ед.; б) $L = 243$ ед., $K = 180$ ед.

106. Пусть $\omega = 25$, $r = 48$ денежных единиц. Найдите уравнение той изокосты, которой соответствуют следующие затраты Труда L и Капитала K:

а) $L = 150$ ед., $K = 400$ ед.; б) $L = 350$ ед., $K = 1200$ ед.;

в) значения ω, r, K, L выберите самостоятельно.

107. а) Пусть $\omega = 12{,}5$, $r = 110$ денежных единиц и $L = 320$ единиц. При каких затратах Капитала K расходы на приобретение ресурсов будут равны 15 000 единиц?

б) Значения ω, r, K, L выберите самостоятельно.

108. Пусть $\omega = 10$, $r = 25$ денежных единиц, $Q = 1{,}5\, K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$ — производственная функция фирмы. На приобретение ресурсов фирма предполагает затратить 1000 денежных единиц.

а) Составьте уравнение изокосты, укажите три различных способа производства, каждый из которых полностью использует имеющиеся 1000 денежных единиц. Для каждого способа производства $(L_i; K_i)$, $i = 1, 2, 3$, найдите величину выпуска Q и определите наибольший из них.

б) На изокванте $Q_0 = 15\sqrt[3]{10}$ выберите самостоятельно три варианта получения Q_0 единиц окончательной продукции и укажите самый дешевый из них (примените калькулятор или компьютер).

12. НАИМЕНЬШИЕ РАСХОДЫ ФИРМЫ НА ПРИОБРЕТЕНИЕ РЕСУРСОВ ПРИ ЗАДАННОМ ОБЪЕМЕ ПРОИЗВОДСТВА

Пусть фирма, производственная функция которой задана соотношением $Q = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, наметила выпустить Q_0 единиц продукции. Как мы уже отметили, существует бесконечное множество различных способов выбора величин L и K, обеспечивающих заданный выпуск: этим свойством обладает любая комбинация ресурсов L и K, принадлежащая изокванте $Q_0 = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Однако стоимость комбинации ресурсов L и K каждый раз будет различной. Пусть, как и выше, ω — стоимость единицы Труда, r — стоимость единицы Капитала. Тогда расходы фирмы на приобретение ресурсов в объеме L и K будут равны $C = \omega L + rK$ денежных единиц.

Таким образом, мы пришли к следующей задаче:

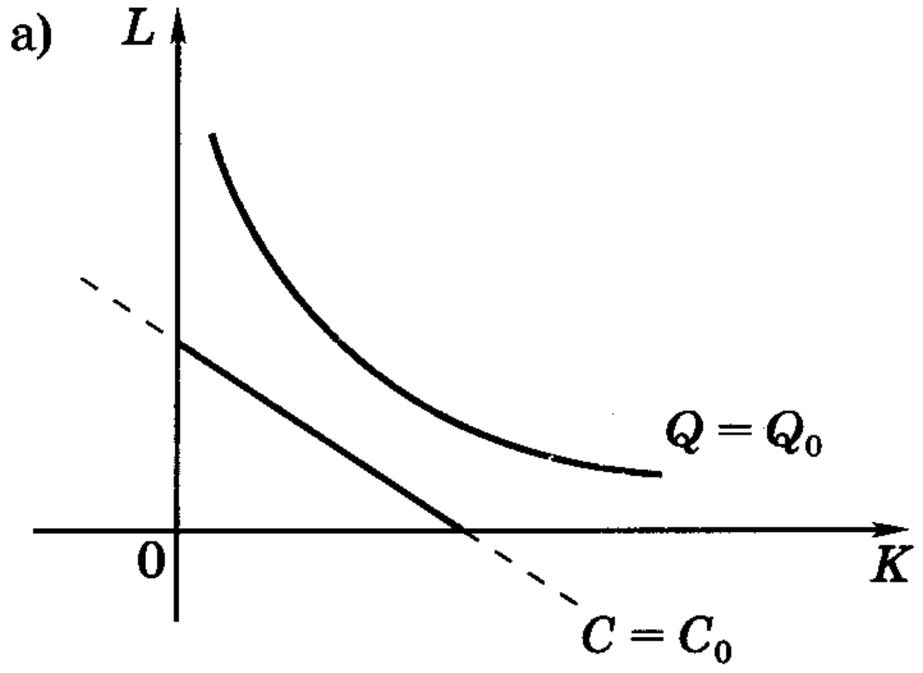
Задача.

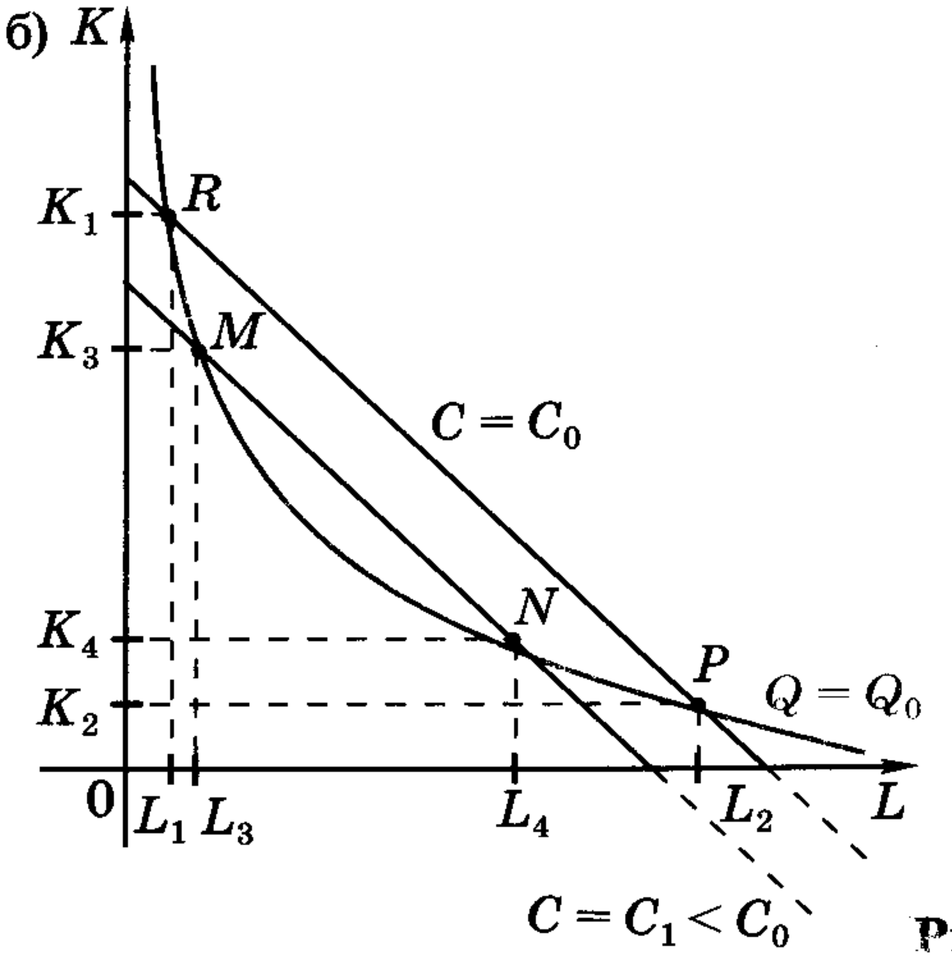
Среди всевозможных комбинаций ресурсов L и K, принадлежащих фиксированной изокванте $Q = Q_0$, найти такую, для которой расходы $C = \omega L + rK$ фирмы на приобретение ресурсов будут наименьшими.

Решение. Из структуры изоквант функции Кобба — Дугласа следует, что изокванта $Q_0 = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ и изокоста $C_0 = \omega L + rK$ могут располагаться на плоскости одним из трех способов (рис. 110). На рисунке 110, *а* изокоста $C_0 = \omega L + rK$ не имеет ни одной общей точки с изоквантой $Q_0 = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Это показывает, что расходы на приобретение ресурсов L и K, обеспечивающих выпуск Q_0 единиц продукции, всегда превосходят величину C_0. Аналитически это означает, что система уравнений, зависящая от параметра C_0:

$$\begin{cases} Q_0 = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \\ C_0 = \omega L + rK \end{cases} \qquad (3)$$

не имеет положительных решений.





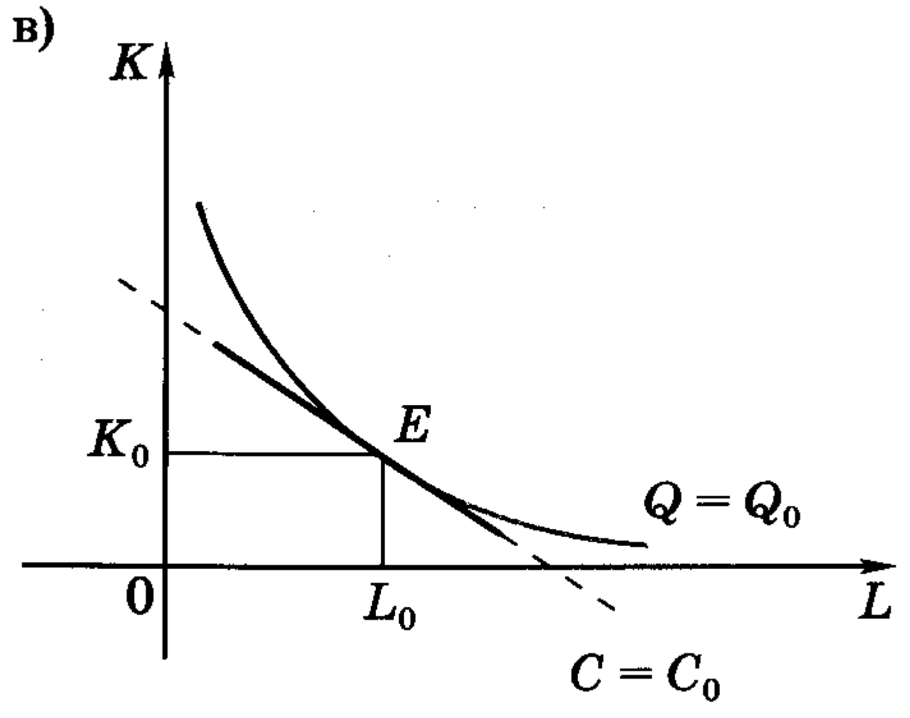


Рис. 110

На рисунке 110, *б* изокоста $C_0=\omega L+rK$ имеет с изоквантой $Q_0=aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ две общие точки: $R(L_1;\ K_1)$ и $P(L_2;\ K_2)$. Это означает, что комбинации ресурсов $(L_1;\ K_1)$ и $(L_2;\ K_2)$ обеспечат запланированный выпуск Q_0. Однако стоимость их приобретения не будет наименьшей: изокоста $C_1=\omega L+rK$, $C_1<C_0$, все еще имеет две общие точки $M(L_3;\ K_3)$ и $N(L_4;\ K_4)$ с изоквантой $Q=Q_0$, но стоимость этих ресурсов меньше, чем C_0. Аналитически это означает, что система уравнений (3) имеет два положительных решения.

Случай, рассмотренный на рисунке 110, *в*, показывает, что существует единственная общая точка у изокванты $Q=Q_0$ и изокосты $C=C_0$ — точка E. Комбинация ресурсов $(L_0;\ K_0)$ обеспечит выпуск Q_0 единиц окончательной продукции и при этом реализует его наименьшую стоимость: любая другая изокоста $(C\neq C_0)$ создает либо ситуацию, изображенную на рисунке 110, *а* при $C<C_0$, либо ситуацию, изображенную на рисунке 110, *б* при $C>C_0$. Аналитически это означает, что система уравнений (3) имеет единственное положительное решение. Величина $C=C_0$ будет самой дешевой стоимостью ресурсов L и K, обеспечивающих выпуск Q_0 единиц окончательной продукции.

Пример 3.

Пусть производственная функция фирмы задана в виде $Q=100K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$. При этом фирма предполагает выпустить 1000 единиц окончательной продукции. Известна стоимость единицы Труда $\omega=\frac{1}{3}$ денежных единиц, стоимость единицы Капитала $r=3$ денежные единицы. Определим наименьшую стоимость ресурсов, обеспечивающих заданный объем выпуска, а также объемы каждого из затраченных ресурсов.

Решение. В рассматриваемом нами случае $\alpha=1-\alpha=\frac{1}{2}$, $Q_0=1000$, $a=100$, $\omega=\frac{1}{3}$, $r=3$ и система (3) имеет вид:

$$\begin{cases}1000=100K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}},\\ C=\frac{1}{3}L+3K.\end{cases}\tag{4}$$

После преобразований система (4) принимает вид:

$$\begin{cases}K=\dfrac{100}{L},\\ K=\dfrac{C}{3}-\dfrac{1}{9}L.\end{cases}\tag{5}$$

Отсюда следует, что $\frac{100}{L}=\frac{C}{3}-\frac{1}{9}L$, или $L^2-3CL+900=0$.

Мы пришли к квадратному уравнению относительно L, зависящему от параметра C — стоимости ресурсов L и K.

Дискриминант этого уравнения равен $D=9C^2-3600$. Система (5) будет иметь единственное решение при условии $D=0$. Это значит, что $9C^2=3600$ или $C_1=20$ (значение $C=-20$ рассматривать не будем).

Таким образом, наименьшие затраты фирмы на приобретение ресурсов L и K составляют 20 денежных единиц.

Найдем величины объемов L и K при $C=20$. Из уравнения

$$L^2-3CL+900=0$$

находим $L=30$ единиц, а из уравнения $K=\frac{100}{L}$ находим $K=\frac{10}{3}$ единиц.

Таким образом, наименьшая стоимость выпуска $Q=1000$ единиц окончательной продукции составляет 20 денежных единиц и достигается при $L=30$ единиц и $K=\frac{10}{3}$ единиц.

Пример 4.

Производственная функция фирмы задана в виде $Q=15K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$. Стоимость единицы Труда $\omega=40$, а единицы Капитала $r=10$ денежных единиц. Фирма предполагает выпустить окончательный продукт в объеме 120 единиц. Определить наименьшую стоимость ресурсов, обеспечивающих этот выпуск, а также их объемы.

Решение. В рассматриваемом случае $\alpha=1-\alpha=\frac{1}{2}$, $Q_0=120$, $a=15$, $\omega=40$, $r=10$ денежных единиц. Система (4) имеет вид:

$$\begin{cases} 120=15K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}, \\ C=40L+10K. \end{cases} \tag{6}$$

Из первого уравнения системы получаем $K=\frac{64}{L}$, а из второго уравнения — $K=\frac{C}{10}-4L$. Отсюда $\frac{64}{L}=\frac{C}{10}-4L$, или

$$4L^2-\frac{C}{10}L+64=0. \tag{7}$$

Для того чтобы система (6) имела единственное решение, необходимо и достаточно равенства нулю дискриминанта этого уравнения, поэтому $D=\frac{C^2}{100}-4\cdot 4\cdot 64=0$. Отсюда $C=320$ денежных единиц (значение $C=-320$ рассматривать не будем).

При $C=320$ из уравнения (7) найдем $L=4$. Выше установлено, что $K=\frac{64}{L}$, поэтому $K=16$. Вывод: наименьшие расходы фирмы на приобретение ресурсов равны 320 денежных единиц. Эта сумма достигается при $L=4$ единицы и $K=16$ единиц.

Замечание.

Обратите внимание на то, что в обоих приведенных примерах производственная функция $Q=aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ рассмотрена только при $\alpha=1-\alpha=\frac{1}{2}$. Это не случайно. Только в этом случае система уравнений

$$\begin{cases} Q_0=aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \\ C_0=\omega L+rK, \end{cases}$$

зависящая от параметра C, сводится к квадратному уравнению, также зависящему от параметра C, и для дальнейшего исследования достаточно знания свойств квадратного трехчлена. Если же $\alpha\neq\frac{1}{2}$, то система сводится к уравнению более высокой степени, и тогда используют аппарат производной, еще не известный девятиклассникам. Когда в 10—11 классах будет изучено понятие производной, мы вернемся к задачам, в которых условие $\alpha=\frac{1}{2}$ будет необязательным.

УПРАЖНЕНИЯ

109. Известны производственная функция фирмы $Q=300K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$, стоимость единицы Труда $\omega=25$ денежных единиц и стоимость единицы Капитала $r=4$ денежные единицы. Фирма предполагает выпустить 1800 единиц окончательной продукции.
а) Определите наименьшие расходы фирмы на приобретение ресурсов, обеспечивающих заданный объем выпуска и величин L и K.
б) Достаточна ли сумма $C=150$ денежных единиц для приобретения ресурсов, обеспечивающих 1800 единиц окончательной продукции?
в) Достаточна ли для этих целей сумма $C=100$ денежных единиц?
Для всех случаев сделайте схематический чертеж.

110. Производственная функция фирмы задана в виде $Q=25K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$. Стоимость единицы Труда $\omega=80$ денежных единиц, стоимость единицы Капитала $r=20$ денежных единиц. Фирма предполагает выпустить окончательную продукцию в объеме 1000 единиц.
а) Каковы наименьшие затраты фирмы на приобретение ресурсов, обеспечивающих заданный выпуск? Каковы величины L и K?
б) Достаточна ли сумма $C=3000$ денежных единиц для приобретения необходимых ресурсов?
в) Достаточна ли для этих целей сумма $C=8000$ денежных единиц?

111. Задайте самостоятельно производственную функцию $Q=aK^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$, параметры a, Q_0, ω, r и определите наименьшие затраты фирмы на приобретение ресурсов L и K. Определите величины ресурсов L и K (если потребуется, то используйте калькулятор или компьютер).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

112. Вычислите:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-2^{0,2}\cdot\dfrac{1-2^{0,5}}{2^{-0,3}}$;

б) $3^{0,3}:\dfrac{3^{-0,2}}{1-3^{0,5}}+\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$;

в) $2^{0,7}:\dfrac{2^{0,2}}{1-2^{0,2}}+(1-\sqrt{2})^{-1}$;

г) $(\sqrt{3}+1)^{-1}-\dfrac{3^{0,2}}{2}\cdot\dfrac{1+3^{0,5}}{3^{-0,3}}$;

д) $(1+2^{0,5})^2+(3+2\sqrt{2})^{-1}$;

е) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{2^{-1}}{1-2^{0,5}}$;

ж) $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}-(2^{0,5}-1)^{-2}}$;

з) $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$;

и) $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$;

к) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+810\,000^{0,25}-\left(7\dfrac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}+(0,63)^0$.

113. Определите, что больше:

а) $(1-\sqrt{3})^{-1}$ или $(1+3^{0,5})^{-2}$;

б) $(1-\sqrt{2})^{-2}$ или $(2^{1,5}+3)^{-1}$;

в) $\dfrac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$ или $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$.

114. Докажите, что выполняется неравенство:
а) $10\,002^4<9997^5$; б) $76^8>10^{15}$; в) $31^4<7^{14}$.

115. Вычислите:

а) $\dfrac{2^{-2}\cdot5^3\cdot10^{-4}}{2^{-3}\cdot5^2\cdot10^{-5}}+\dfrac{(0,6)^0-(0,1)^{-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}\cdot\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left((\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-1}+$
$+\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

116. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}-2x^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\dfrac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}$; 1) 2; 2) 1; 3) 4; 4) 2,5.

б) $\left(1+2a^{\frac{2}{3}}-\dfrac{a+a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+1}\right)\cdot\dfrac{1-a^{\frac{2}{3}}}{1-a^{\frac{4}{3}}}$;

в) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$;

г) $\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$;

д) $\left(4(a+1)+\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[6]{a}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}$;

е) $\dfrac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}$.

117. Вычислите:

а) $\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1$ при $x=16$;

б) $x^3+3x-14$ при $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$;

в) $\dfrac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)(a+\sqrt{a+b})}:\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}$ при $a=23,\ b=22$;

г) $\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x:\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{x}$ при $x=4$.

118. Докажите, что выражение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{4}{\sqrt{a}}+2\right)\sqrt{0{,}002}$$

принимает постоянное значение.

119. Докажите равенство:

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$;

б) $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{5})$;

в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$.

120 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{5}{\sqrt[3]{-9}}$; б) $\frac{3}{\sqrt[4]{17}}$; в) $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$; г) $\frac{11}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$;

д) $\dfrac{12}{1-\sqrt[3]{2}}$; з) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}}$; $\boxed{\text{л)}}$ $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{е)}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{и)}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{2}}$;

ж) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; к) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$;

121. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}$; б) $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{y^2}}{y^2+x^4\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}\,(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}}$.

122. Избавьтесь от иррациональности в равенстве:

а) $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}+c=0$;

б) $2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+5=0$;

в) $(xy)^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2=a^2,\ a>0,\ x>0,\ y>0.$

123. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{x+\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{x}}+\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{3x^2+3y\sqrt{xy}}\right)^{-2}\cdot(x^2+xy-2y^2)^{-1}$;

б) $\dfrac{4\sqrt[4]{x}+x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}}+\sqrt{4+x-4\sqrt{x}}$ при $0<x\leqslant 4$;

в) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5b^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a^2\sqrt[5]{ab^3}\right)^2}:\left(\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\right)^6}\right)$;

г) $\left(\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-$
$-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

д) $\left(\dfrac{x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{a(x-a)^{-\frac{1}{2}}+(x-a)^{\frac{1}{2}}}:\left(\dfrac{x-(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2(x+a)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}+(x^2+ax)^{-1}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x^2-a^2}\right)^{-1}$;

е) $\dfrac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{a-\sqrt{ab}}:\dfrac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}$.

124. Докажите тождество:

а) $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}}=\dfrac{1-b}{1+b}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{a+\sqrt{2-a^2}}\,\sqrt[6]{1-a\sqrt{2-a^2}}}{\sqrt[3]{1-a^2}}=\sqrt[6]{2}$ при $|a|<1$;

в) $\dfrac{1}{a^2}\sqrt{\left(a^6+\dfrac{3a^4}{b^{-2}}+\dfrac{a^2b^4}{3^{-1}}+\dfrac{1}{b^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^3-2a^2-b^2}{a^2+\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^3+2b^2}\right)^{-3}}=1$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=y+\sqrt{xy}$.

125. Укажите область определения и упростите выражение:

а) $\dfrac{1+2(x+4)^{-0,5}}{2-(x+4)^{0,5}}+(x+4)^{0,5}+4(x+4)^{-0,5}$;

б) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{b-\sqrt{ab}}+\dfrac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\dfrac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$.

126. Докажите, что если $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, то $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

127. Сделав чертеж, найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

а) $y=x$ и $y=1+\sqrt{x+5}$;

б) $y=\sqrt[3]{x+1}$ и $y=1-x$;

в) $y=x^2-2x$ и $y=\sqrt[4]{x}$;

г) $y=\sqrt[4]{x+1}-1$ и $y=\sqrt[3]{x-1}+1$;

д) $y=\sqrt[3]{|x+1|}$ и $y=\sqrt[3]{|x|}-1$.

128. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[6]{x^2+4x+4}$;

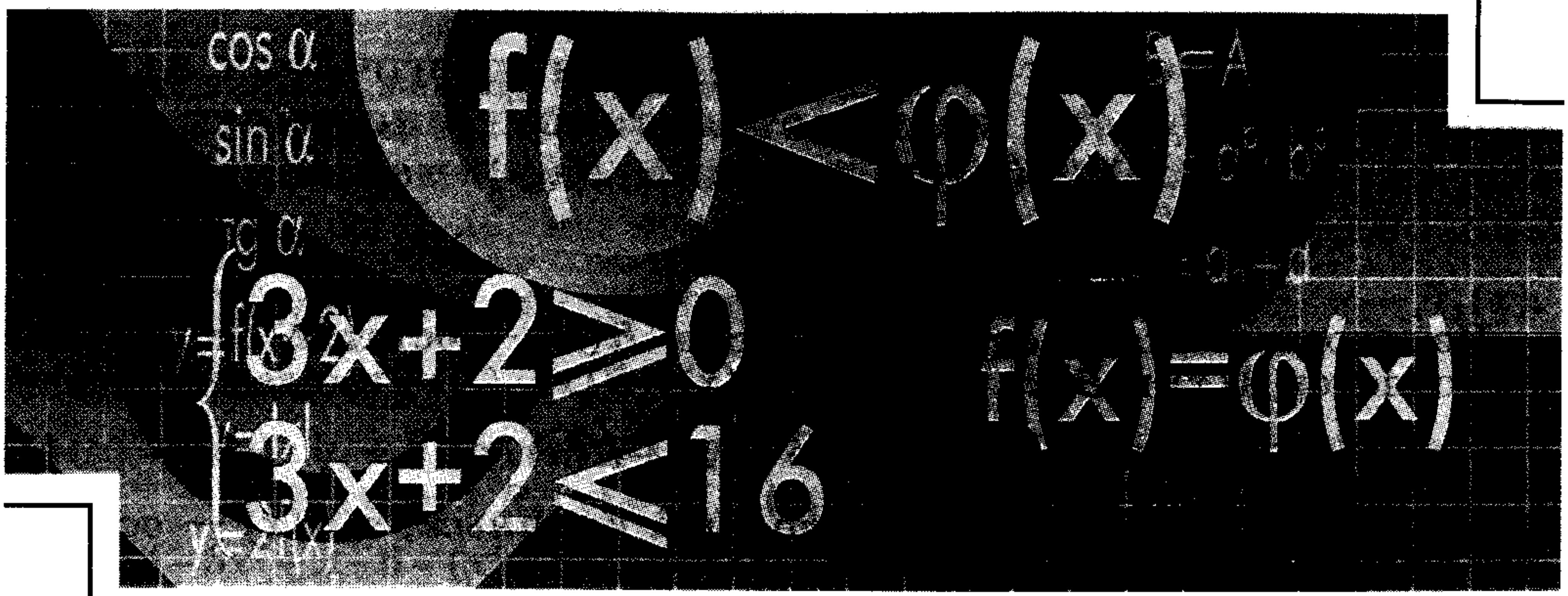
б) $y=\sqrt[4]{9-6x+x^2}$;

в) $y=-|x-2|^{\frac{1}{3}}$;

г) $y=(|x|-2)^{\frac{1}{2}}$;

д) $y=|x-1|^{0,2}$.

Глава X



УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

§ 1. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ. КОРНИ МНОГОЧЛЕНОВ

1. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН С ОСТАТКОМ

В 8 классе (гл. II) мы изучили некоторые операции над многочленами (сложение и умножение). В этом пункте рассмотрим операцию деления многочлена на многочлен. Так же как и при делении натуральных чисел, будем говорить, что многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$, если можно указать такой многочлен $Q(x)$, что выполняется равенство $A(x)=B(x)\cdot Q(x)$. В этом случае пишут $A(x)\vdots B(x)$. При этом $A(x)$ называют *делимым*, $B(x)$ — *делителем* и $Q(x)$ — *частным* от деления $A(x)$ на $B(x)$. Свойства делимости многочленов похожи на свойства делимости натуральных чисел. Например, если $A(x)\vdots B(x)$ и $B(x)\vdots C(x)$, то $A(x)\vdots C(x)$; если $A(x)\vdots B(x)$, то $(A(x)\cdot C(x))\vdots B(x)$; если $A(x)\vdots C(x)$ и $B(x)\vdots C(x)$, то $(A(x)+B(x))\vdots C(x)$. Так же как и во множестве натуральных чисел, операция деления выполнима не всегда. Иными словами, если заданы многочлены $A(x)$ и $B(x)$, то не всегда найдется такой многочлен $Q(x)$, что $A(x)=B(x)\cdot Q(x)$. Например, многочлен x^2+1 не делится на многочлен $x-1$. В самом деле, если бы существовал многочлен $Q(x)$, такой, что $x^2+1=(x-1)Q(x)$, то при $x=1$ имело бы место равенство $1^2+1=(1-1)\cdot Q(1)$, т. е. $2=0$. Последнее равенство неверно, а потому x^2+1 не делится на $x-1$. Поэтому, так же как для натуральных чисел, вводится понятие делимости многочленов с остатком.

Определение. Остатком от деления многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x) \neq 0$ называется такой многочлен $R(x)$, что $(A(x)-R(x)) \vdots B(x)$ и степень $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$.

Из определения следует, что если $R(x)$ — остаток от деления многочленов $A(x)$ и $B(x)$, то $A(x)-R(x)=B(x) \cdot Q(x)$ и, следовательно,

$$A(x)=B(x) \cdot Q(x)+R(x). \tag{1}$$

В этой записи $Q(x)$ называют *неполным частным*, а $R(x)$ — *остатком* от деления $A(x)$ на $B(x)$.

Остаток при делении двух многочленов можно найти путем последовательного понижения степени делимого. Рассмотрим этот прием на примере. Пусть многочлен $A(x)=2x^6-3x^4-5x^3+x-6$ требуется разделить на многочлен $B(x)=x^4+3x^3+5$. Для этого надо найти такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, что

$$2x^6-3x^4-5x^3+x-6=(x^4+3x^3+5)Q(x)+R(x), \tag{2}$$

причем степень $R(x)$ меньше степени $B(x)$, т. е. не превосходит 3. Подберем старший член q_1 многочлена $Q(x)$ так, чтобы старшие члены $A(x)$ и $B(x) \cdot q_1$ были одинаковы. Для этого достаточно положить $q_1=\frac{2x^6}{x^4}=2x^2$. Тогда разность $A(x)-B(x) \cdot q_1=R_1(x)$ является многочленом степени меньшей, чем степень $A(x)$, так как одинаковые старшие степени при вычитании будут уничтожены.

Итак,

$$\begin{aligned} R_1(x)&=2x^6-3x^4-5x^3+x-6-(x^4+3x^3+5) \cdot 2x^2= \\ &=-6x^5-3x^4-5x^3-10x^2+x-6. \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь вместо многочлена $A(x)$ будем рассматривать многочлен $R_1(x)$ и подберем одночлен q_2 так, чтобы уравнять старшие члены $R_1(x)$ и $B(x) \cdot q_2$. Для этого положим $q_2=\frac{-6x^5}{x^4}=-6x$. Рассмотрим затем разность

$$\begin{aligned} R_2(x)&=R_1(x)-B(x) \cdot q_2= \\ &=-6x^5-3x^4-5x^3-10x^2+x-6-(x^4+3x^3+5)(-6x)= \\ &=15x^4-5x^3-10x^2+31x-6. \end{aligned} \tag{4}$$

Далее вместо многочлена $R_1(x)$ будем рассматривать многочлен $R_2(x)$ и подберем одночлен q_3, такой, чтобы уравнять старшие члены многочленов $R_2(x)$ и $B(x) \cdot q_3$. Для этого достаточно положить $q_3=\frac{15x^4}{x^4}=15$. Новая разность

$$R_3(x)=R_2(x)-B(x)\cdot q_3=$$
$$=15x^4-5x^3-10x^2+31x-6-(x^4+3x^3+5)\cdot 15= \qquad (5)$$
$$=-50x^3-10x^2+31x-81$$

имеет степень 3, меньшую, чем степень делителя $B(x)$, поэтому найденный многочлен $R_3(x)$ является искомым остатком, а многочлен $Q(x)=q_1+q_2+q_3$ — неполным частным при делении многочлена $A(x)$ на $B(x)$. В самом деле, мы получили

$$A(x)-B(x)\cdot q_1=R_1(x),\ R_1(x)-B(x)\cdot q_2=R_2(x),\ R_2(x)-B(x)\cdot q_3=R_3(x).$$

Отсюда находим

$$A(x)=B(x)\cdot q_1+R_1(x)=B(x)\cdot q_1+B(x)\cdot q_2+R_2(x)=B(x)\cdot(q_1+q_2)+$$
$$+B(x)\cdot q_3+R_3(x)=B(x)(q_1+q_2+q_3)+R_3(x),\text{ т. е.}$$
$$2x^6-3x^4-5x^3+x-6=(x^4+3x^3+5)(2x^2-6x+15)+(-50x^3-10x^2+31x-81).$$

Действия, выполняемые нами при делении многочлена на многочлен с остатком, были одни и те же на каждом этапе деления. На практике применяют запись деления уголком аналогично тому, как это делали при делении действительных чисел:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l}2x^6-3x^4-5x^3+x-6\\ 2x^6+6x^5+10x^2\end{array} & \begin{array}{l}x^4+3x^3+5\\ \hline 2x^2-6x+15=Q(x)\ \text{(неполное частное)}\end{array}\\
\hline
-\begin{array}{l}-6x^5-3x^4-5x^3-10x^2+x-6\\ -6x^5-18x^4-30x\end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l}15x^4-5x^3-10x^2+31x-6\\ 15x^4+45x^3+75\end{array} & \\
\hline
-50x^3-10x^2+31x-81=R(x)\ \text{(остаток)} &
\end{array}$$

Всякую рациональную дробь можно представить в виде отношения двух многочленов $\frac{A(x)}{B(x)}$. При этом если степень многочлена $A(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$, то рациональную дробь называют *правильной*, в противном случае ее называют *неправильной*. Если многочлен, стоящий в числителе неправильной дроби, разделить на многочлен, стоящий в знаменателе, то дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби.

Пример.

Выделим из дроби $\dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x^2-2x-3}$ целую и правильную части.

Решение. Данная дробь неправильная, так как степень многочлена в числителе 3, а в знаменателе 2. Разделим многочлен x^3-5x^2+5x-1 на многочлен x^2-2x-3, применив запись уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{r} x^3-5x^2+5x-1 \\ x^3-2x^2-3x \end{array}} & \underline{x^2-2x-3} \\
\underline{-\begin{array}{r} -3x^2+8x-1 \\ -3x^2+6x+9 \end{array}} & x-3 \\
2x-10 &
\end{array}
$$

Значит, $x^3-5x^2+5x-1=(x-3)(x^2-2x-3)+2x-10$, или $\frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^2-2x-3}=$ $=x-3+\frac{2x-10}{x^2-2x-3}$. Здесь $x-3$ — целая часть, а $\frac{2x-10}{x^2-2x-3}$ — правильная часть данной дроби.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Известно, что если a, b, $c\in\boldsymbol{Z}$ и какие-то два из трех чисел a, b, $a+b$ делятся на c, то и третье число делится на c. Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для многочленов.

2. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены не нулевой степени. Как изменятся частное и остаток при делении $A(x)$ на $B(x)$, если:
а) делимое уменьшить на некоторое число $c\neq 0$;
б) делитель уменьшить на некоторое число $c\neq 0$?
Будет ли то же самое справедливо при делимости чисел?

3. Докажите единственность неполного частного и остатка при делении многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, т. е. если

$$A(x)=B(x)\cdot Q_1(x)+R_1(x) \text{ и } A(x)=B(x)\cdot Q_2(x)+R_2(x),$$

то

$$Q_1(x)\equiv Q_2(x),\ R_1(x)\equiv R_2(x).$$

4. Исследуйте, для каких многочленов $A(x)$ и $B(x)$ может одновременно выполняться $A(x)\vdots B(x)$, $B(x)\vdots A(x)$.

5. Выделите целую и правильную части из дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$:
а) $A(x)=x^5-6x^3+2x^2-4$, $B(x)=x^2-x+1$;
б) $A(x)=x^4+x^2+1$, $B(x)=x+5$;
в) $A(x)=x^7-1$, $B(x)=x^3+x+1$;
г) $A(x)=x^4-64$, $B(x)=x-3$.

6. При каком значении k выполняется без остатка деление многочлена $x^3+6x^2+kx+12$ на $x+4$? 1) 10; 2) 8; 3) 11; 4) 12.

7. При каких значениях a и b выполняется без остатка деление:
а) $x^4+3x^3-2x^2+ax+b$ на x^2-3x+2;
б) x^3+x^2+ax+2 на x^2+bx+2?

8. Выясните, при каких целых значениях n данное выражение $\frac{3n-2}{2n+1}$ является целым числом.

9. Разделите с остатком многочлен $x^{2003}-1$ на многочлен $x^{286}-1$.

2. ТЕОРЕМА БЕЗУ. КОРНИ МНОГОЧЛЕНА. СХЕМА ГОРНЕРА

В 8 классе при изучении квадратных уравнений (гл. VI) мы видели, что решение уравнений тесно связано с разложением многочленов на множители. Именно разложение квадратного трехчлена на линейные множители позволило нам найти формулы для корней квадратного уравнения. Поэтому при решении уравнений важно все, что связано с выделением в многочлене линейных множителей, т. е. с делением многочлена $A(x)$ на двучлен $x-\alpha$. Основой многих знаний о делении многочлена $A(x)$ на двучлен $x-\alpha$ является теорема, принадлежащая французскому математику Этьену Безу (1730—1783) и носящая его имя.

Теорема 1. Остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x-\alpha$ равен $A(\alpha)$ (т. е. значению многочлена $A(x)$ при $x=\alpha$).

Доказательство.

Так как степень двучлена равна 1, а степень остатка меньше степени делителя, то степень остатка при делении на $x-\alpha$ должна равняться нулю, т. е. остаток должен быть числом r (если $r=0$, то деление выполняется без остатка). Поэтому имеет место тождество

$$A(x)=(x-\alpha)Q(x)+r. \qquad (1)$$

Полагая в тождестве (1) $x=\alpha$, получаем

$$A(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+r=r,$$

что и доказывает теорему.

Пример 1.

Найдем остаток от деления многочлена $A(x)=x^4-6x^3+8$ на $x+2$.

Решение. По теореме Безу остаток от деления на $x+2$ равен $A(-2)=(-2)^4-6(-2)^3+8=72$.

Удобный способ нахождения значений многочлена при заданном значении переменной x ввел английский математик Вильямс Джордж Горнер (1786—1837). Этот способ впоследствии получил название *схемы Горнера*. Он состоит в заполнении некоторой таблицы из двух строк. Например, чтобы вычислить $A(-2)$ в предыдущем примере, в верхней строке таблицы перечисляем коэффициенты данного многочлена, записанного в стандартной форме

$$x^4-6x^3+8=x^4+(-6)x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+8.$$

Коэффициент при старшей степени дублируем в нижней строке, а перед ним записываем значение переменной $x=-2$, при котором вычисляется значение многочлена. Получается следующая таблица:

	1	-6	0	0	8
-2	1				

Пустые клетки таблицы заполняем по следующему правилу: крайнее справа число нижней строки умножается на -2 и складывается с числом, стоящим над пустой клеткой. По этому правилу в первой пустой клетке стоит число $(-2)\cdot 1+(-6)=-8$, во второй клетке ставится число $(-2)\cdot(-8)+0=16$, в третьей клетке — число $(-2)\cdot 16+0=-32$, в последней клетке — число $(-2)\cdot(-32)+8=72$. Полностью заполненная по схеме Горнера таблица выглядит так:

	1	-6	0	0	8
-2	1	-8	16	-32	72

Число в последней клетке и есть остаток от деления многочлена на $x+2$, $A(-2)=72$.

На самом деле из полученной таблицы, заполненной по схеме Горнера, можно записать не только остаток, но и неполное частное

$$Q(x)=x^3-8x^2+16x-32,$$

так как числа, стоящие во второй строке (не считая последнего),— это коэффициенты многочлена $Q(x)$ — неполного частного от деления на $x+2$. Действительно, произведя деление $A(x)$ на $x+2$ уголком, убедимся в справедливости высказывания:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\,x^4 & -6x^3 & & +8 & \,x+2 \\
x^4 & +2x^3 & & & \,x^3-8x^2+16x-32 \text{ (неполное частное)} \\
\hline
 & -\,-8x^3 & & +8 & \\
 & -8x^3 & -16x^2 & & \\
\hline
 & & -\,16x^2 & +8 & \\
 & & 16x^2 & +32x & \\
\hline
 & & & -\,-32x+8 & \\
 & & & -32x-64 & \\
\hline
 & & & 72 \text{ (остаток)} &
\end{array}$$

Пример 2.

Докажем, что многочлен $A(x)=x^4-6x^3+7x-392$ делится на $x-7$, и найдем частное от деления.

Решение. Используя схему Горнера, найдем $A(7)$:

	1	-6	0	7	-392
7	1	1	7	56	0

Отсюда получаем $A(7)=0$, т. е. остаток при делении многочлена на $x-7$ равен нулю и, значит, многочлен $A(x) \vdots (x-7)$. При этом числа во второй строке таблицы являются коэффициентами частного от деления $A(x)$ на $x-7$, поэтому

$$A(x)=(x-7)(x^3+x^2+7x+56).$$

Пример 3.

Найдем остаток от деления многочлена x^n+a^n на $x+a$.

Решение. В данном случае $\alpha=-a$, и потому искомый остаток равен $(-a)^n+a^n$. Это выражение равно нулю, если n — нечетное число, и равно $2a^n$, если n — четное. Мы доказали, таким образом, что x^n+a^n делится на $x+a$ лишь при нечетных значениях n.

Пример 4.

Докажем, что выражение $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ делится на $(a-b)(b-c)(c-a)$, и найдем частное.

Решение. Данное выражение является многочленом переменной a. Если положить в этом многочлене $a=b$, то он обращается в нуль. Значит, многочлен делится на $a-b$. Аналогично доказывается, что он делится на $b-c$ и на $c-a$, а потому и на $(a-b)(b-c)(c-a)$. Сравнивая степени в обеих частях равенства

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)q,$$

убеждаемся, что частное q является однородным многочленом первой степени и потому имеет вид:

$$q=\lambda a+\mu b+\nu c,$$

где λ, μ, ν — какие-то числа. Чтобы найти эти числа, заметим, что в левую часть равенства

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)(\lambda a+\mu b+\nu c)$$

слагаемое a^3b входит с коэффициентом 1, а в правую часть — с коэффициентом $-\lambda$. Значит, $\lambda=-1$. Аналогично находим, что $\mu=\nu=-1$. Значит,

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(c-a)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Введем теперь понятие корня многочлена.

Определение. Число α называют *корнем многочлена* $A(x)$, если $A(\alpha)=0$ (т. е. α является корнем уравнения $A(x)=0$).

Если $A(x)\,\vdots\,(x-\alpha)$, то $A(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)$ и, значит, α — корень многочлена $A(x)$. Из теоремы Безу следует и обратное утверждение: *если α — корень многочлена $A(x)$, то $A(x)$ делится на $x-\alpha$ без остатка.* Действительно, в этом случае $r=A(\alpha)=0$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. Число α является корнем многочлена $A(x)$ в том и только в том случае, когда $A(x)$ делится на $x-\alpha$.

Отсюда ясно, что задача отыскания корней многочлена равносильна задаче отыскания его линейных делителей.

Пусть α и β — различные числа и многочлен $A(x)$ делится на $(x-\alpha)(x-\beta)$. Тогда $A(x)$ делится на $x-\alpha$ и на $x-\beta$. Значит, по теореме 2 числа $x=\alpha$, $x=\beta$ являются корнями многочлена $A(x)$. Справедливо и обратное утверждение: *если α и β — различные корни многочлена $A(x)$, то многочлен делится на произведение* $(x-\alpha)(x-\beta)$. В самом деле, в силу теоремы Безу остаток от деления многочлена $A(x)$ на $x-\alpha$ равен $r=A(\alpha)=0$. Это означает, что многочлен $A(x)$ делится на $x-\alpha$, т. е. $A(x)=(x-\alpha)\cdot Q_1(x)$. Подставив в это равенство $x=\beta$, получаем

$$A(\beta)=(\beta-\alpha)\cdot Q_1(\beta)=0. \tag{2}$$

По условию $\beta\neq\alpha$, тогда из равенства (2) заключаем, что $Q_1(\beta)=0$, т. е. многочлен $Q_1(x)$ делится на $x-\beta$ и потому $Q_1(x)=(x-\beta)\cdot Q_2(x)$. Значит, $A(x)=(x-\alpha)\cdot Q_1(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot Q_2(x)$, т. е. $A(x)$ делится на $(x-\alpha)(x-\beta)$.

Аналогичные рассуждения позволят доказать справедливость утверждений для любого конечного числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ различных корней, т. е. доказать справедливость следующего утверждения:

Теорема 3. Если числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ различны, то многочлен $A(x)$ делится на $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)$ в том и только в том случае, когда все эти числа являются корнями многочлена $A(x)$.

Пример 5.

Докажем, что многочлен $x^4-2x^3-16x^2+2x+15$ делится на $(x-5)(x+3)(x-1)$.

Решение. По теореме 3 для решения требуется доказать, что числа 5, -3, 1 являются корнями многочлена, т. е. $A(5)=A(-3)=A(1)=0$.

Найдем значения многочлена при $x=5$, $x=-3$, $x=1$, используя схему Горнера.

	1	-2	-16	2	15
5	1	3	-1	-3	0
-3	1	-5	-1	5	0
1	1	-1	-17	-15	0

Обратим внимание, что при заполнении нижних строк таблицы каждый раз использовалась первая строка. Итак, из таблицы видим, что $A(5)=A(-3)=A(1)=0$, т. е. данный многочлен делится на $(x-5)(x+3)(x-1)$.

Из теоремы 3 следует, что *многочлен степени n не может иметь более чем n различных корней*. В самом деле, предположим, что различные числа α_1, α_2, ..., α_n, α_{n+1} являются корнями многочлена $A(x)$ степени n. По теореме 3 этот многочлен делится на произведение $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n+1})$, т. е. существует многочлен $Q(x)$, такой, что

$$A(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n+1})\cdot Q(x).$$

Но такое равенство невозможно, так как в левой части равенства многочлен $A(x)$ имеет степень n, а в правой части многочлен, степень которого больше, чем n (эта степень равна, по крайней мере, $n+1$).

Другими словами, из теоремы 3 следует, что если степень многочлена $A(x)$ не превосходит n и если $A(x)$ обращается в нуль при $n+1$ различных значениях x, то все коэффициенты многочлена $A(x)$ равны нулю. Этот факт можно применять при доказательстве тождественного равенства двух многочленов, так как *если два многочлена $A(x)$ и $B(x)$ имеют степень не более n и если эти многочлены принимают одинаковые значения при $n+1$ различных значениях x, то $A(x)\equiv B(x)$.*

Пример 6.

Докажем тождество $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$

Решение. Подставим в обе части тождества поочередно $x=a$, $x=b$, $x=c$. При каждом из этих трех значений обе части принимают одинаковое значение, равное 1. Так как степень многочлена слева не более 2, а степень многочлена справа равна 0 и они принимают одинаковые значения при трех различных значениях x, то эти многочлены тождественно равны.

Мы видели, что если $A(x)\,\vdots\,(x-\alpha)$, то α — корень многочлена $A(x)$. Может случиться, что $A(x)$ делится на некоторую степень $x-\alpha$. В этом случае говорят о кратных корнях многочлена $A(x)$.

Если многочлен $A(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$ и не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$, то говорят, что α — корень кратности k многочлена $A(x)$.

Пример 7.

Докажем, что -1 является корнем кратности 2 многочлена $A(x)=2x^3-x^2-8x-5$.

Решение. Имеем $A(-1)=-2-1+8-5=0$. Значит, -1 — корень многочлена $A(x)$. Разделив $A(x)$ на $x+1$, получим $A(x)=(x+1)\times$ $\times Q(x)$, где $Q(x)=2x^2-3x-5$. Так как $Q(-1)=2+3-5=0$, то $Q(x)$ делится на $x+1$. Разделив $Q(x)$ на $x+1$, получим $Q(x)=(x+1)(2x-5)$. Многочлен $2x-5$ не делится на $x+1$. Значит, многочлен $A(x)=(x+1)^2(2x-5)$ делится на $(x+1)^2$ и не делится на $(x+1)^3$. Поэтому $x=-1$ — корень кратности 2 многочлена $A(x)=2x^3-x^2-8x-5$.

УПРАЖНЕНИЯ

10. Найдите остаток и неполное частное при делении многочлена $x^6-4x^4+x^3-2x^2+5$ на $x+3$.

11. Чему равно a, если остаток от деления многочлена $x^4-ax^3+4x^2-x+1$ на $x-2$ равен 7?

12. Докажите, что при $a\neq 0$ многочлен $x^{2n}+a^{2n}$ не делится ни на $x+a$, ни на $x-a$.

13. Докажите теорему Безу с помощью тождества

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+\ldots+x^{n-k}\cdot a^{k-1}+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}).$$

14. Докажите тождество:

а) $a\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x;$

б) $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$

15. Докажите, что для любых целых чисел $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ делится на $a+b$.

16. Какую кратность имеет корень $x=2$ многочлена

$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$? 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 1.

17. При каких a и b число (-2) является корнем кратности 2 для многочлена x^5+ax^2+bx+1?

18. Найдите все многочлены, для которых:

а) $f(x)=f(x+c)$; б) $f(x)=f(kx)$; в) $f(x^2)=x^2\cdot f(x)$.

19. Разложите на множители многочлен, найдя подбором один из его целых корней:

а) $x^5+x^3-x^2-1$; б) x^3+5x^2-18.

20. Разложите на множители многочлен:

а) x^8-1; г) $x(x^3-a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x-a)$;

б) x^4+4x^2-5; д) $x^5+x^3-x^2-1$;

в) x^8+x^4+1; е) $(x^2+x+4)(x^2+x+3)-12$.

21. Используя схему Горнера, вычислите значения $A(\alpha)$, где

$$A(x)=x^5-2x^4+3x^3-7x^2+x-5,\ \alpha=\frac{1}{2},\ 2,\ -3.$$

22*. Найдите сумму коэффициентов многочлена $(2x-1)^{12}+(3-x)^5$.

23. Проверьте, есть ли среди делителей свободного члена (включая и отрицательные) корни многочлена:

а) $A(x)=x^3-6x^2+11x-6$; в) $B(x)=x^4+2x^3-12x^2-38x-4$.

б) $P(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$;

3*. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ МНОГОЧЛЕНОВ. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

В главе I, п. 2 мы ввели понятие наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух (или более) одночленов. В главе IV мы рассмотрели наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух (или более) натуральных чисел. В множестве многочленов также можно ввести понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух (или более) многочленов. При этом для многочленов, так же как и для одночленов, определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного связывают со степенью многочлена.

Определение 1. ***Наибольшим общим делителем* (НОД) двух или нескольких многочленов называют многочлен наибольшей степени, на который делятся эти многочлены.**

Иначе, если A — множество делителей многочлена $P(x)$, а B — множество делителей многочлена $Q(x)$, то НОД $(P(x),\ Q(x))$ — многочлен, имеющий наибольшую степень из всех многочленов множества $A \cap B$.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух многочленов, можно по аналогии с натуральными числами разложить многочлены на такие множители, которые дальше разложить нельзя. Но, как мы уже видели, задача разложения многочлена на множители зачастую очень трудна. Однако для многочленов может быть успешно применен известный нам из главы IV *алгоритм Евклида*.

Пусть даны два многочлена $A(x)$ и $B(x)$, отличные от нуля, причем степень многочлена $A(x)$ больше степени многочлена $B(x)$ либо равна ей. Если $A(x) \vdots B(x)$, то $B(x)$ и есть НОД. В противном случае разделим $A(x)$ с остатком на $B(x)$:

$$A(x)=B(x)\cdot Q_1(x)+R_1(x). \tag{1}$$

После этого разделим $B(x)$ с остатком на $R_1(x)$:

$$B(x)=R_1(x)\cdot Q_2(x)+R_2(x). \tag{2}$$

Если $R_2(x)=0$, то процесс закончен, а если $R_2(x)\neq 0$, то разделим $R_1(x)$ с остатком на $R_2(x)$:

$$R_1(x)=R_2(x)\cdot Q_3(x)+R_3(x). \tag{3}$$

Продолжаем этот процесс, пока не получится остаток, равный нулю. Такой остаток обязательно получится, так как на каждом шаге мы получаем степень остатка меньше степени остатка на предыдущем шаге, и если на некотором шаге степень остатка была k, то не более чем через k шагов получится нулевой остаток. Иначе далее будет $k<0$, чего не может быть. Итак, если $R_n(x)$ — последний ненулевой остаток, то НОД $(A(x), B(x))=R_n(x)$. В самом деле, чтобы не усложнять, будем считать, что процесс оборвался на четвертом шаге, т. е.

$$R_2(x)=R_3(x)\cdot Q_4(x)+R_4(x) \text{ и } R_4(x)=0.$$

Отсюда следует, что $R_2(x)\vdots R_3(x)$, а из равенства (3) следует, что $R_1(x)\vdots R_3(x)$. В таком случае из равенства (2) следует, что $B(x)\vdots R_3(x)$, а из равенства (1) следует, что $A(x)\vdots R_3(x)$. Итак, $R_3(x)$ — общий делитель многочленов $A(x)$ и $B(x)$. Покажем теперь, что это наибольший делитель. Пусть $h(x)$ — какой-либо общий делитель многочленов $A(x)$ и $B(x)$, тогда, записав равенство (1) в виде

$$R_1(x)=A(x)-B(x)\cdot Q_1(x),$$

замечаем, что $R_1(x)\vdots h(x)$. Точно так же из равенства (2) видим, что $R_2(x)\vdots h(x)$, а из равенства (3) следует, что $R_3(x)\vdots h(x)$.

Таким образом, нами показано:

Последний ненулевой остаток в алгоритме Евклида для многочленов $A(x)$ и $B(x)$ есть их наибольший общий делитель.

Одновременно мы показали, что наибольший общий делитель двух многочленов делится на любой их общий делитель.

Определение 2. ***Наименьшим общим кратным*** **(НОК) многочленов называется многочлен наименьшей степени, который делится на эти многочлены.**

Наименьшее общее кратное является делителем любого другого кратного этих многочленов. Действительно, пусть $K(x)=$НОК$(A(x), B(x))$ и $P(x)$ — какое-либо общее кратное многочленов $A(x)$ и $B(x)$, т. е. $P(x)\vdots A(x)$ и $P(x)\vdots B(x)$. Предположим, что $P(x)$ не делится на $K(x)$. Разделив $P(x)$ с остатком на $K(x)$, получим

$$P(x)=K(x)\cdot Q(x)+R(x). \tag{4}$$

Из этого равенства найдем

$$R(x) = P(x) - K(x) \cdot Q(x). \tag{5}$$

По условию $P(x)$ и $K(x)$ — общие кратные многочленов $A(x)$ и $B(x)$, значит, из равенства (5) следует, что $R(x) \vdots A(x)$ и $R(x) \vdots B(x)$, т. е. $R(x)$ — общее кратное многочленов $A(x)$ и $B(x)$. Однако степень многочлена $R(x)$ меньше степени $K(x)$, а это противоречит тому, что $K(x) = \text{НОК}(A(x),\ B(x))$. Следовательно, $P(x) \vdots K(x)$.

Для нахождения наименьшего общего кратного двух многочленов можно использовать связь между наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным, аналогичную той, которую мы установили для НОД и НОК натуральных чисел (см. главу IV, п. 3):

$$\text{НОД}(A(x),\ B(x)) \cdot \text{НОК}(A(x),\ B(x)) = A(x) \cdot B(x). \tag{6}$$

Пример.

Найдем наименьшее общее кратное многочленов $A(x) = x^3 + x - 2$ и $B(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Решение. Вначале, используя алгоритм Евклида, найдем НОД этих многочленов:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3+x-2 \\ x^3+x^2-x-1 \end{array} & \begin{array}{l} x^3+x^2-x-1 \\ \hline 1 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{r} x^3+x^2-x-1 \\ x^3-2x^2+x \\ \hline -\begin{array}{r} 3x^2-2x-1 \\ 3x^2-6x+3 \\ \hline \end{array} \end{array} & \begin{array}{l} -x^2+2x-1 \\ \hline -x-3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{r} -x^2+2x-1 \\ -x^2+x \\ \hline -\begin{array}{r} x-1 \\ x-1 \\ \hline 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{l} 4x-4 \\ \hline -\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \end{array} \end{array}$$

Так как последний, отличный от нуля остаток равен $4x-4$, то НОД $(A(x),\ B(x)) = 4x-4$. Используя теперь равенство (6), получаем

$$(4x-4) \cdot \text{НОК}(A(x),\ B(x)) = (x^3+x-2)(x^3+x^2-x-1),$$

откуда

$$\text{НОК}(A(x),\ B(x)) = \frac{(x^3+x-2)(x^3+x^2-x-1)}{4(x-1)} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)(x^3+x^2-x-1)}{4(x-1)} =$$

$$= \frac{1}{4}(x^2+x+2)(x^3+x^2-x-1) = \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вы уже решали различные уравнения: линейные, квадратные, биквадратные, давали определения для каждого из этих видов уравнений. Дадим теперь общее определение уравнения с одной переменной.

Определение 1. Равенство вида $f(x)=\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции от x, называется *уравнением с одной переменной x*.

Значение переменной $x=a$ называют *корнем уравнения* $f(x)=\varphi(x)$, если при замене x числом a получаем верное числовое равенство $f(a)=\varphi(a)$.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что оно не имеет корней. Если корнями уравнения являются числа a_1, a_2, ..., a_n, то ответ записывают либо в виде множества $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, либо в виде $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$. Множество всех корней данного уравнения называют его решением. В случае отсутствия корней пишут «уравнение корней не имеет» или «решение уравнения — пустое множество $\varnothing$».

Пример 1.

Решением уравнения $(x+3)(2x-1)(x-2)=0$ является множество $\left\{-3;\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$, так как произведение равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы один множитель равен нулю.

Пример 2.

Решим уравнение $\sqrt{(x+1)^2}=x+1$.

Решение. По свойствам квадратного корня имеем $\sqrt{(x+1)^2}=$ $=|x+1|$. Поэтому равенство $\sqrt{(x+1)^2}=x+1$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется равенство $|x+1|=x+1$. По определению абсолютной величины последнее равенство выполняется для всех $x\geqslant-1$, т. е. решением данного уравнения является множество $[-1;\ +\infty)$.

Пример 3.

Равенство $3x^2+4=0$ не выполняется ни для какого действительного значения x, поэтому данное уравнение корней не имеет.

Очевидно, что корни уравнения $f(x)=\varphi(x)$ входят в область определения функций f и φ. Следовательно, если мы хотим знать, среди каких чисел следует искать корни данного уравнения, то нужно найти множество $D(f) \cap D(\varphi)$. Это множество называют областью (множеством) допустимых значений уравнения и пишут ОДЗ: $D(f) \cap D(\varphi)$.

Пример 4.

Найдем область допустимых значений уравнения

$$\frac{1}{x+1} - x^2 + \frac{x-4}{x} = \frac{x}{x^2-1}.$$

Решение. Функция в левой части уравнения определена для всех действительных чисел, кроме $x=-1$ и $x=0$. Функция в правой части уравнения определена для всех действительных чисел, кроме $x=\pm 1$. Следовательно, ОДЗ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 5.

Найдем область допустимых значений уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x-3} = 1.$$

Решение. Функция в левой части уравнения определена для всех значений x, при которых имеют смысл квадратные корни и дробь. Следовательно, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$$

находим, что областью допустимых значений данного уравнения является множество $[3; +\infty)$.

Может случиться, что область допустимых значений уравнения — пустое множество. Тогда данное уравнение не имеет корней.

Пример 6.

Докажем, что уравнение $\sqrt{2x-8} + \sqrt{6-3x} = 1$ не имеет корней.

Решение. Для нахождения области допустимых значений уравнения надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-8 \geqslant 0, \\ 6-3x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство, находим промежуток $[4; +\infty)$, а из второго — промежуток $(-\infty; 2]$. Общей частью этих промежутков является пустое множество (рис. 111). Значит, область допустимых значений данного уравнения — пустое множество, следовательно, уравнение не имеет корней.

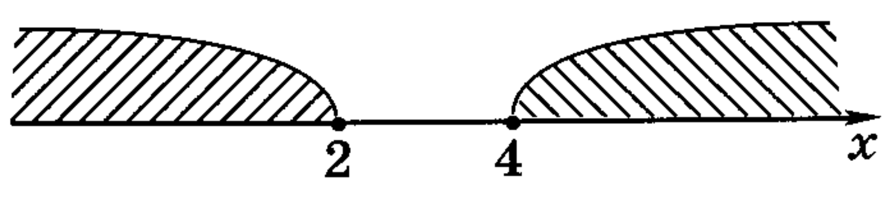


Рис. 111

УПРАЖНЕНИЯ

24. Какие из чисел 0, -1, $\sqrt{2}$ являются корнями уравнения:

а) $x+\frac{1}{x}=\sqrt{x+3}$; б) $x-1=\sqrt{1-2x+x^2}$?

25. Найдите область допустимых значений уравнения:

а) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2-4x+3}=\frac{33}{40}$;

б) $\frac{\sqrt{4-x}}{x^2-8x+7}=-\frac{1}{8}$;

в) $\sqrt{x^2-7x-18}+\sqrt{x^2-3x-18}=4$;

г) $\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{3x-2}=3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$;

д) $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$;

е) $x-3=3\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$;

ж) $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$.

26. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-9}=5$;

б) $\sqrt{8-2x}-x+\sqrt{x-5}=x^2-7$;

в) $6+\sqrt{3-x}=x$.

5. РАВНОСИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СЛЕДСТВИЯ УРАВНЕНИЙ

Решая уравнения, вы выполняли различные тождественные преобразования над выражениями, входящими в уравнение. При этом исходное уравнение заменялось другими, имеющими те же корни. Такие уравнения называют равносильными.

Определение. Уравнение $f(x)=\varphi(x)$ *равносильно* уравнению $f_1(x)=\varphi_1(x)$, если каждый корень первого уравнения является корнем второго и, обратно, каждый корень второго уравнения является корнем первого, т. е. их решения совпадают.

Например, уравнения $3x-6=0$, $2x-1=3$ равносильны, так как каждое из уравнений имеет один корень $x=2$.

Любые два уравнения, имеющие пустое множество корней, считают равносильными.

Тот факт, что уравнения $f(x)=\varphi(x)$ и $f_1(x)=\varphi_1(x)$ равносильны, обозначают так:

$$f(x)=\varphi(x)\Leftrightarrow f_1(x)=\varphi_1(x).$$

В процессе решения уравнений важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в равносильное ему уравнение.

Теорема 1. Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательство.

Докажем, что уравнение

$$f(x)=\varphi(x)+q(x) \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$f(x)-q(x)=\varphi(x). \qquad (2)$$

Пусть $x=a$ — корень уравнения (1). Значит, имеет место числовое равенство $f(a)=\varphi(a)+q(a)$. Но тогда по свойству действительных чисел будет выполняться и числовое равенство $f(a)-q(a)=\varphi(a)$, показывающее, что a — корень уравнения (2). Аналогично доказывается, что каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1). Равносильность уравнений (1) и (2) доказана.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить или разделить на отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательство проведите самостоятельно.

Например, уравнения $6x-18=0$ и $x-3=0$ равносильны. Также равносильны уравнения $\frac{x^3-x+5}{3}=x^2$ и $x^3-3x^2-x+5=0$.

Рассмотрим уравнение $\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+3)}=0$. Его ОДЗ: $\{x \mid x\neq 1,\ x\neq -3\}$. Мы знаем, что дробь равна нулю в том случае, когда ее числитель равен нулю, т. е. $x^2+x-2=0$. Решая это уравнение, находим корни $x_1=1$, $x_2=-2$. Но число 1 не входит в ОДЗ данного уравнения, и, значит, исходное уравнение имеет один корень $x=-2$.

В этом случае говорят, что уравнение $x^2+x-2=0$ есть следствие уравнения $\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+3)}=0$.

Пусть даны два уравнения:

$$f_1(x)=\varphi_1(x), \qquad (3)$$

$$f_2(x)=\varphi_2(x). \qquad (4)$$

Если каждый корень уравнения (3) является корнем уравнения (4), то уравнение (4) называют *следствием уравнения* (3).

Этот факт записывают так:

$$f_1(x)=\varphi_1(x)\Rightarrow f_2(x)=\varphi_2(x).$$

В том случае, когда уравнение (3) есть также следствие уравнения (4), эти уравнения равносильны.

Два уравнения равносильны в том и только в том случае, когда каждое из них является следствием другого.

В приведенном выше примере уравнение-следствие $x^2+x-2=0$ имеет два корня $x_1=1$, $x_2=-2$, а исходное уравнение имеет один корень $x=-2$. В этом случае корень $x=1$ называют посторонним для исходного уравнения $\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+2)}=0$.

В общем случае корни уравнения-следствия, не являющиеся корнями исходного уравнения, называют *посторонними*.

Итак, если при решении уравнения происходил переход к уравнению-следствию, то могли появиться посторонние корни. В этом случае все корни уравнения-следствия нужно проверить, подставляя их в исходное уравнение. В некоторых случаях выявление посторонних корней облегчается знанием ОДЗ исходного уравнения — корни, не принадлежащие ОДЗ, можно сразу отбросить. Так, в приведенном примере посторонний корень $x=1$ не входит в ОДЗ уравнения $\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+2)}=0$ и потому отброшен.

Иногда посторонние корни могут появиться и при тождественных преобразованиях, если они приводят к изменению ОДЗ уравнения. Например, после приведения подобных членов в левой части уравнения

$$x^2-\frac{1}{x+2}-4+\frac{3}{3x+6}=0,$$

ОДЗ которого $\{x \mid x\neq -2\}$, получим уравнение-следствие $x^2-4=0$, имеющее два корня $x_1=2$, $x_2=-2$. Корень $x_2=-2$ — посторонний, так как не входит в ОДЗ исходного уравнения.

Другие примеры появления посторонних корней будут рассмотрены в следующих пунктах.

В тех случаях, когда в результате преобразований произошел переход от исходного уравнения к уравнению, не являющемуся его следствием, возможна потеря корней.

Например, уравнение

$$(x+1)(x+3)=x+1 \tag{5}$$

имеет два корня. Действительно, перенося все члены уравнения в левую часть и вынося $x+1$ за скобки, получим $(x+1)(x+2)=0$, откуда находим $x_1=-1$, $x_2=-2$.

Если же обе части уравнения (5) разделить (сократить) на $x+1$, то получим уравнение $x+3=1$, имеющее один корень $x=-2$. В результате такого преобразования корень $x=-1$ потерян. Поэтому делить обе части уравнения на выражение, содержащее переменную, можно лишь в том случае, когда это выражение отлично от нуля.

Для того чтобы в процессе решения уравнения избежать потери корней, необходимо следить за тем, чтобы переход осуществлялся либо к равносильным уравнениям, либо к уравнениям-следствиям.

УПРАЖНЕНИЯ

27. Равносильны ли уравнения:

а) $4x^2-2x=1-2x$ и $4x^2-1=0$;

б) $4x-1+\frac{2}{x-1}=3x+\frac{2}{x-1}$ и $4x-1=3x$;

в) $\frac{x^2-1}{x-1}=2$ и $x+1=2$;

г) $\frac{x^2-1}{x-1}=5$ и $x+1=5$;

д) $\sqrt{x+3}=5$ и $x+3=25$;

е) $\sqrt[3]{7-x}=-2$ и $7-x=-8$;

ж) $\sqrt[4]{(2-x)^4}=2$ и $2-x=2$;

з) $\sqrt[4]{x-5}=-2$ и $x-5=16$;

и) $\sqrt{-x^2-x+1}=-2$ и $x^2+x-1=8$?

28. Равносильны ли уравнения:

а) $\sqrt{2x+3}=x$ и $x^2=2x+3$; б) $\sqrt[3]{2x+1}=x$ и $2x+1=x^3$?

29. Равносильны ли уравнения:

а) $\sqrt{x^2+x-5}=\sqrt{x-1}$ и $x^2+x-5=x-1$; б) $\sqrt[4]{(x+1)^4}=2$ и $|x+1|=2$?

30. Какое из двух уравнений является следствием другого:

а) $\frac{x^2}{x-3}=\frac{9}{x-3}$ и $x^2=9$;

б) $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{30}$ и $\sqrt{(x+3)(x-4)}=\sqrt{30}$;

в) $(x+2)(x+1)^2=3(x+1)^2$ и $x+2=3$;

г) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-1}{x+3}$ и $(x-3)(x+3)=(x-1)(x+1)$;

д) $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\cdot(x^3-4x)=0$ и $x^3-4x=0$?

31. Решите уравнение $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}+\frac{5x}{1-4x^2}=-\frac{2x^2}{4x^2-1}$. Объясните, какие преобразования привели к появлению постороннего корня.

32. Решите уравнение, предварительно найдя его область допустимых значений:

а) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{4}{1-x}$; в) $\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2x-5}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=1$;

б) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2+\frac{x+4}{1-x}$; г) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$.

Сделайте проверку корней. Объясните, какие преобразования привели к появлению посторонних корней.

6. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$(x+1)(3x-2)=x^3\left(\frac{x}{4}-2\right). \tag{1}$$

Левая и правая части этого уравнения являются целыми рациональными выражениями с одной переменной x (т. е. получаются из x и чисел с помощью операций сложения и умножения). Такие уравнения называют *целыми рациональными* уравнениями.

Определение 1. Уравнение

$$f(x)=\varphi(x), \tag{2}$$

где функции f и φ заданы целыми рациональными выражениями, называют *целым рациональным* уравнением.

ОДЗ этого уравнения — множество всех действительных чисел.

Известно (гл. II), что алгебраическая сумма и произведение многочленов есть многочлен, поэтому с помощью тождественных преобразований каждое целое рациональное выражение можно представить в виде многочлена (строгое обоснование этого будет дано в 10 классе) и, следовательно, перейти от уравнения (2) к равносильному уравнению

$$P(x)=Q(x), \tag{3}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены с одной переменной x.

Перенося $Q(x)$ в уравнении (3) в левую часть, получим согласно теореме 1 п. 5 равносильное уравнение $P(x)-Q(x)=0$, где в левой части многочлен, а в правой части 0. Степень многочлена, стоящего в левой части уравнения, называют степенью целого рационального уравнения.

Так, если в уравнении (1) раскрыть скобки, перенести все члены в левую часть и привести подобные, то получим равносильное уравнение, левая часть которого многочлен четвертой степени стандартного вида, а правая — нуль:

$$\frac{1}{4}x^4-2x^3-3x^2-x+2=0.$$

Значит, уравнение (1) — целое рациональное уравнение четвертой степени.

Целое рациональное уравнение первой степени, очевидно, можно привести к виду $a_0x+a_1=0$, где $a_0\neq 0$. Уравнение второй степени можно привести к виду $a_0x^2+a_1x+a_2=0$, $a_0\neq 0$, уравнение третьей степени можно привести к виду $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$, $a_0\neq 0$, и т. д. Поэтому можно дать такое определение:

Определение 2. Целым рациональным уравнением степени *n стандартного вида* называют уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (4)$$

где $a_0 \neq 0$.

В случае, когда $a_0=1$, уравнение (4) имеет вид:

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (5)$$

его называют *приведенным* целым рациональным уравнением степени n.

Например, $x^2+px+q=0$ — приведенное квадратное уравнение.

Из определения 2 следует, что решение целого рационального уравнения сводится к нахождению корней многочлена, стоящего в левой части уравнения (4).

В пункте 2 доказано, что многочлен степени n не может иметь более чем n различных корней, поэтому всякое целое рациональное уравнение степени n имеет не более n корней.

Уравнение первой степени $a_0x+a_1=0$, $a_0 \neq 0$, имеет один корень $x=-\frac{a_1}{a_0}$. Число корней уравнения второй степени $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ зависит от дискриминанта $D=a_1^2-4a_0a_2$, но в любом случае оно имеет не более двух корней: если $D>0$, то уравнение имеет два корня $x=\frac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2a_0}$; если $D=0$, то уравнение имеет один двукратный корень; если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Однако уже при решении уравнений третьей степени математики столкнулись с большими трудностями. История открытия способа решения кубических уравнений полна тайн, так как в древности ученые часто на открытых диспутах соревновались в решении трудных задач. От исхода этих состязаний зависела их научная репутация и материальное благополучие. Тот, кто первым овладел решением кубических уравнений, мог легко побеждать своих соперников, давая им задачи, сводящиеся к кубическим уравнениям. Поэтому способы решения уравнений тщательно скрывались. Историки полагают, что первым нашел способ решения кубических уравнений известный итальянский алгебраист Сцепина дель Ферро (1465—1526), но впервые опубликовал общую формулу решения кубических уравнений итальянский математик Джероламо Кардано (1501—1576). Эта формула носит теперь название *формулы Кардано*, хотя предполагают, что эту формулу ему передал итальянский математик Николо Тарталья (ок. 1500—1557). С именами этих же математиков связано и открытие способов решения уравнений четвертой степени.

В дальнейшем математики активно пытались найти формулы вычисления корней уравнений пятой и более высокой степени. И только почти через три столетия впервые итальянский ученый Паоло

Руффини (1765—1822), а затем норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802—1829) доказали, что не существует формулы, выражающей корни любого целого уравнения пятой степени через конечное число алгебраических операций над его коэффициентами. Да и найденные формулы вычисления корней для уравнений третьей и четвертой степеней столь сложны, что ими практически не пользуются. Поэтому в современной математике разработаны методы, позволяющие находить с любой степенью точности приближенные значения корней уравнений. Использование компьютеров значительно облегчает эту работу.

Приближенное решение уравнений тесно связано с построением графиков функций, и в дальнейшем вы познакомитесь с некоторыми приближенными методами решения уравнений.

7. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нам известны формулы нахождения корней линейных и квадратных уравнений. Кроме того, в предыдущей главе дан способ решения уравнения $x^n = c$, $x > 0$, $c > 0$ $(x = \sqrt[n]{c})$. Процесс решения других уравнений заключается в сведении данного уравнения к вышеназванным уравнениям. Для этого применяют два основных метода: 1) разложение на множители и 2) введение новой переменной.

1) Метод разложения на множители.

Рассмотрим уравнение

$$(x^2 - 3x + 2)(x - 6) = 0. \qquad (1)$$

Известно, что произведение двух чисел равняется нулю, если хотя бы одно из них равно нулю. Поэтому сначала надо решить уравнения

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ и } x - 6 = 0,$$

а затем объединить их решения. Решением первого уравнения является множество $\{1; 2\}$, решением второго — множество $\{6\}$. Объединив эти множества, получим решение уравнения (1):

$$\{1; 2; 6\}.$$

В случае, когда ищут значения переменной, удовлетворяющие хотя бы одному из данных уравнений, говорят, что задана *совокупность уравнений.*

Для обозначения совокупности уравнений иногда используется квадратная скобка:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x - 6 = 0. \end{array}\right.$$

Решением совокупности уравнений с одной переменной является объединение решений каждого из уравнений, входящих в совокупность.

В общем случае справедлива теорема.

Теорема 1. **Уравнение**

$$f(x)\cdot\varphi(x)=0, \qquad (2)$$

определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений

$$f(x)=0 \text{ и } \varphi(x)=0. \qquad (3)$$

Доказательство.

Пусть число a — корень уравнения (2). Тогда $f(a)\cdot\varphi(a)=0$, и потому либо $f(a)=0$, либо $\varphi(a)=0$. Это значит, что a — корень хотя бы одного из уравнений $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$, т. е. число a входит в решение совокупности уравнений (3). Верно и обратное. Если число a входит в решение совокупности уравнений (3), то либо $f(a)=0$, либо $\varphi(a)=0$. Так как оба значения $\varphi(a)$ и $f(a)$ существуют, то в любом случае имеет место равенство $f(a)\cdot\varphi(a)=0$. Это значит, что число a — корень уравнения (2). Тем самым равносильность доказана.

Таким образом, решение уравнений тесно связано с разложением его левой части на множители. Этот метод позволяет свести решение целого уравнения степени n к решению целых уравнений меньшей степени. Например, с помощью метода разложения на множители выведена формула для решения квадратных уравнений. Именно если $D=b^2-4ac\geqslant 0$ и $a\neq 0$, то справедливо тождество

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right).$$

Отсюда следует, что корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$ являются числа

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Ранее были подробно рассмотрены различные приемы разложения многочленов на множители, которые теперь можно использовать при решении целых рациональных уравнений стандартного вида.

Пример 1.

Решим уравнение $2x^3-3x^2-8x+12=0$.

Решение. Разложим многочлен, стоящий в левой части, на множители методом группировки:

$$2x^3-3x^2-8x+12=x^2(2x-3)-4(2x-3)=(2x-3)(x^2-4).$$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $(2x-3)(x^2-4)=0$, которое по теореме 1 равносильно совокупности уравнений $2x-3=0$

и $x^2-4=0$. Решая каждое из этих уравнений, находим, что решение исходного уравнения: $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

Ответ: $\left\{-2;\ \frac{3}{2};\ 2\right\}$.

Обратим внимание, что найденные целые корни 2 и −2 являются делителями свободного члена уравнения. В общем случае оказывается справедливым следующее утверждение:

Теорема 2. Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются *делителями свободного члена этого уравнения*.

Доказательство.

Пусть x_0 — целый корень уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{4}$$

где a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n — целые числа. Тогда выполняется числовое равенство

$$a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x_0+a_n=0.$$

Из этого равенства находим:

$$a_n=-a_0x_0^n-a_1x_0^{n-1}-\ldots-a_{n-1}x_0,$$

или

$$a_n=x_0(-a_0x_0^{n-1}-a_1x_0^{n-2}-\ldots-a_{n-1}). \tag{5}$$

Из равенства (5) следует, что целое число a_n представимо в виде произведения двух целых чисел x_0 и $(-a_0x_0^{n-1}-a_1x_0^{n-2}-\ldots-a_{n-1})$. Значит, x_0 является делителем свободного члена a_n.

Результат этой теоремы может быть применен при решении уравнений.

Пример 2.

Решим уравнение $x^4+2x^3=11x^2-4x-4$.

Решение. Приведем уравнение к стандартному виду:

$$x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0. \tag{6}$$

Чтобы проверить наличие целых корней этого уравнения, выпишем все делители его свободного члена: ±1, ±2, ±4.

Используя схему Горнера, найдем значение многочлена

$$P(x)=x^4+2x^3-11x^2+4x+4 \text{ при } x=\pm1,\ \pm2,\ \pm4.$$

	1	2	-11	4	4
1	1	3	-8	-4	0
-1	1	1	-12	16	-12
2	1	4	-3	-2	0
-2	1	0	-11	26	-48
4	1	6	13	56	230
-4	1	-2	-3	16	-60

Видим, что числа $x=1$ и $x=2$ являются корнями многочлена $P(x)$, а значит, $P(x) \vdots (x-1)(x-2)$. Разделим $P(x)$ на $(x-1)(x-2)$. Если использовать схему Горнера, то можно поступить следующим образом: разделить $P(x)$ на $x-1$, а затем полученное частное $Q(x)$ разделить на $x-2$, так как $P(x)=(x-1)\cdot Q(x)$ и из того, что $P(x) \vdots (x-2)$, а $x-1$ не делится на $x-2$, следует, что $Q(x) \vdots (x-2)$.

$P(x)$	1	2	-11	4	4
1	1	3	-8	-4	0

$Q(x)$	1	3	-8	-4
2	1	5	2	0

Эти вычисления можно было произвести в единой таблице, но при этом третью строку заполнять по данным второй строки:

	$P(x)$	1	2	-11	4	4
$Q(x)$	1	1	3	-8	-4	0
	2	1	5	2	0	

Значит, многочлен $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+5x+2).$$

Итак, уравнение (6) равносильно уравнению

$$(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0,$$

которое равносильно совокупности уравнений $x-1=0$, $x-2=0$, $x^2+5x+2=0$. Решая каждое из этих уравнений, находим решение исходного равнения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\left\{1;\ 2;\ \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2};\ \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Отбор корней из множества делителей свободного члена уравнения можно ускорить с помощью следующего утверждения:

Если целое число x_0 является корнем целого рационального уравнения с целыми коэффициентами $P(x)=0$, то $P(1)\,⋮\,(x_0-1)$, $P(-1)\,⋮\,(x_0+1)$.

В самом деле, разделив $P(x)$ на $x-1$ с остатком, получим

$$P(x)=(x-1)\cdot Q(x)+P(1).$$

При $x=x_0$ имеем $P(x_0)=0$, и, значит,

$$(x_0-1)\cdot Q(x_0)+P(1)=0, \text{ или } P(1)=-(x_0-1)\cdot Q(x_0).$$

Из последнего равенства видим, что $P(1)\,⋮\,(x_0-1)$. Аналогично доказывается и второе утверждение.

Пример 3.

Решим уравнение $x^4+3x^3-4x^2-5x+2=2x^3+7x^2-28$.

Решение. Приведем уравнение к стандартному виду:

$$x^4+x^3-11x^2-5x+30=0.$$

Для проверки наличия целых корней этого уравнения выпишем все делители его свободного члена 30:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \pm 10,\ \pm 15,\ \pm 30.$$

Вычтем из каждого делителя число 1 и выберем только те разности, которые являются делителями числа $P(1)=1^4+1^3-11\cdot 1^2-5\cdot 1+30=16$. Такими разностями являются -2, 1, 2, -4, 4, -16. Они соответствуют делителям -1, 2, 3, -3, 5, -15. К этим делителям прибавим единицу и выберем те суммы, которые являются делителями числа $P(-1)=(-1)^4+(-1)^3-11\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+30=24$.

Такими суммами являются числа 3, 4, -2, 6, соответствующие делителям 2, 3, -3, 5. Используя схему Горнера, проверим, являются ли эти числа корнями данного уравнения.

	1	1	−11	−5	30
2	1	3	−5	−15	0
3	1	4	1	−2	24
−3	1	−2	−5	10	0
5	1	6	19	90	480

Итак, целыми корнями данного уравнения являются числа 2 и -3. Из теоремы 3 (см. п. 2) вытекает, что многочлен, стоящий в левой части уравнения, делится на $(x-2)(x+3)$. По данным второй строки таблицы можно записать

$$x^4+x^3-11x^2-5x+30=(x-2)(x^3+3x^2-5x-15).$$

Так как многочлен в левой части равенства делится на $(x-2)(x+3)$, то второй сомножитель в правой части $(x^3+3x^2-5x-15)\,\vdots\,(x+3)$. Используя схему Горнера, получим

	1	3	−5	−15
−3	1	0	−5	0

и, значит, $x^3+3x^2-5x-15=(x+3)(x^2-5)$.

Итак, исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-2)(x+3)(x^2-5)=0,$$

которое равносильно совокупности уравнений

$$x-2=0,\ x+3=0,\ x^2-5=0.$$

Ответ: $\{2;\ -3;\ \pm\sqrt{5}\}$.

Обобщением теоремы 2 является теорема 3.

Теорема 3. Если уравнение (4) с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x_0=\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то p — делитель свободного члена a_n, а q — делитель старшего коэффициента a_0.

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно.

Пример 4.

Решим уравнение

$$6x^3-11x^2-2x+8=0. \tag{7}$$

Решение. Выпишем делители свободного члена ±1; ±2; ±4; ±8 и натуральные делители старшего коэффициента 1; 2; 3; 6.

Проверкой убеждаемся, что $x_1=\frac{4}{3}$ является корнем многочлена $6x^3-11x^2-2x+8$.

По теореме Безу этот многочлен делится на $\left(x-\frac{4}{3}\right)$. Выполним деление и получим

$$6x^3-11x^2-2x+8=\left(x-\frac{4}{3}\right)(6x^2-3x-6).$$

Теперь уравнение (7) можно записать в виде

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)(6x^2-3x-6)=0.$$

Решая квадратное уравнение $6x^2-3x-6=0$, находим

$$x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{4},\ x_3=\frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

Ответ: $\left\{\frac{4}{3};\ \frac{1-\sqrt{17}}{4};\ \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

2) Введение новой переменной.

С методом введения новой переменной вы познакомились в главе VI п. 6, когда рассматривали уравнения, приводимые к квадратным. Так, для решения биквадратного уравнения $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$, вводили новую переменную $y=x^2$, после чего находили корни y_1 и y_2 квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$. Затем задача сводилась к решению совокупности уравнений $x^2=y_1$ и $x^2=y_2$.

В общем случае метод введения новой переменной заключается в том, что для решения уравнения $f(x)=0$ вводят новую переменную (подстановку) $y=q(x)$ и выражают $f(x)$ через y, получая новое уравнение $\varphi(y)=0$. Решая затем уравнение $\varphi(y)=0$, находят его корни: $\{y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\}$. После этого получают совокупность n уравнений $q(x)=y_1$, $q(x)=y_2$, ..., $q(x)=y_n$, из которых и находят корни исходного уравнения.

Пример 5.

Решим уравнение:

а) $(3x+2)^4-13(3x+2)^2+36=0$;
б) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

Решение. а) Полагая $y=(3x+2)^2$, получим уравнение

$$y^2-13y+36=0.$$

Находим его корни $y_1=4$, $y_2=9$ и решаем уравнения

$$(3x+2)^2=4 \text{ и } (3x+2)^2=9.$$

Первое уравнение равносильно совокупности уравнений $3x+2=2$ и $3x+2=-2$, решением которой является множество $\left\{0;\ -\frac{4}{3}\right\}$. Второе уравнение $(3x+2)^2=9$ равносильно совокупности уравнений $3x+2=3$ и $3x+2=-3$, решением которой является множество $\left\{\frac{1}{3};\ -\frac{5}{3}\right\}$.

Решением исходного уравнения является объединение полученных решений, т. е. множество $\left\{0;\ -\frac{4}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{5}{3}\right\}$.

б) Раскроем скобки, группируя первый множитель с последним и второй с третьим. Тогда данное уравнение примет вид:

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24.$$

Полагая $x^2+5x=y$, получим уравнение второй степени

$$(y+4)(y+6)=24,$$

или в стандартном виде

$$y^2+10y=0.$$

Находим корни этого уравнения $y_1=0$, $y_2=-10$ и решаем уравнения

$$x^2+5x=0 \text{ и } x^2+5x=-10.$$

Первое уравнение имеет решение $\{0; -5\}$, а второе корней не имеет, так как его дискриминант $D=25-40<0$. Следовательно, решением исходного уравнения является множество $\{0; -5\}$.

Замечание.

Рассмотренный прием применим в общем случае к решению уравнений вида

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=A,$$

если $a+d=b+c$ или имеется равенство сумм других пар этих чисел.

При решении многих уравнений трудно угадать, какую новую переменную нужно ввести, чтобы упростить уравнение. Поэтому рассматривают различные виды целых рациональных уравнений, для упрощения которых известна подстановка.

В главе VI п. 7 были рассмотрены возвратные уравнения четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \tag{8}$$

и показано, что введением новой переменной $y=x+\dfrac{1}{x}$ это уравнение приводится к квадратному.

Аналогично, вводя новую переменную $y=x+\dfrac{k}{x}$, можно упрощать уравнения вида

$$ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0. \tag{9}$$

Такие уравнения называют *обобщенными возвратными уравнениями четвертой степени.*

Пример 6.

Решим уравнение

$$3x^4-2x^3-31x^2+10x+75=0. \tag{10}$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$3x^4-2x^3-31x^2+(-5)(-2)x+(-5)^2\cdot 3=0.$$

Из этой записи видим, что уравнение (10) — обобщенное возвратное уравнение четвертой степени с $k=-5$. Так как $x=0$ не является корнем этого уравнения, то разделим обе части уравнения на x^2 и сгруппируем равноотстоящие от концов члены уравнения:

$$3\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{5}{x}\right)-31=0.$$

Введем новую переменную $y=x-\frac{5}{x}$, тогда

$$y^2=x^2-10+\frac{25}{x^2},$$

отсюда

$$x^2+\frac{25}{x^2}=y^2+10.$$

Выполнив подстановку, получим уравнение

$$3(y^2+10)-2y-31=0, \text{ или } 3y^2-2y-1=0.$$

Решая это уравнение, находим $y_1=1$, $y_2=-\frac{1}{3}$. Чтобы найти корни исходного уравнения, надо решить совокупность уравнений

$$x-\frac{5}{x}=1 \text{ и } x-\frac{5}{x}=-\frac{1}{3}.$$

После преобразований получим два квадратных уравнения ($x\neq 0$):

$$x^2-x-5=0, \quad 3x^2+x-15=0.$$

Решая их, находим корни уравнения (10): $x_{1,\,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$, $x_{3,\,4}=\frac{-1\pm\sqrt{181}}{6}$.

Ответ. $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2};\ \frac{1-\sqrt{21}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{181}}{6};\ \frac{-1-\sqrt{181}}{6}\right\}$.

Возвратное уравнение пятой степени имеет вид

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0,$$

шестой степени:

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$$

и т. д. Леонард Эйлер (1707—1783) доказал, что любое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень -1 и после деления такого уравнения на $x+1$ получается уравнение четной степени, которое также будет возвратным. Проверим это утверждение для возвратного уравнения пятой степени

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Составим схему Горнера для $x=-1$:

	a	b	c	c	b	a
-1	a	$b-a$	$a-b+c$	$b-a$	a	0

Из полученной таблицы видим, что -1 — корень уравнения и

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=$$
$$=(x+1)(ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a).$$

Значит, один корень исходного уравнения -1, а остальные являются корнями возвратного уравнения четвертой степени

$$ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a=0.$$

Им же доказано, что каждое возвратное уравнение четной степени вместе с корнем $x=\alpha$ содержит и корень $x=\frac{1}{\alpha}$ (следует иметь в виду, что $x=0$ не может быть корнем возвратного уравнения). Именно поэтому подстановка $y=x+\frac{1}{x}$ позволяет уменьшить степень возвратного уравнения четной степени в два раза. Например, решая возвратное уравнение шестой степени $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+$ $+bx+a=0$, разделим обе части уравнения на x^3. Так как $x=0$ не является корнем уравнения, то получим

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a=0 \Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d+\frac{c}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{a}{x^3}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+b\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+c\left(x+\frac{1}{x}\right)+d=0.$$

Введем новую переменную $y=x+\frac{1}{x}$, тогда $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=$ $=y^2-2$ и получаем $a(y^3-3y)+b(y^2-2)+cy+d=0$.

В главе VI п. 8 свойства однородного многочлена были использованы для отыскания эффективной замены переменной при решении однородных уравнений. Напомним, что *уравнение вида $P(u, v)=0$ называется* ***однородным*** *уравнением степени k относительно u и v, если $P(u, v)$ — однородный многочлен степени k*, т. е. степень каждого его члена равна одному и тому же числу k. Например, однородное уравнение степени 3 относительно u и v имеет вид:

$$a_0u^3+a_1u^2v+a_2uv^2+a_3v^3=0. \qquad (11)$$

Аналогичный вид имеет однородное уравнение степени 4:

$$a_0u^4+a_1u^3v+a_2u^2v^2+a_3uv^3+a_4v^4=0. \qquad (12)$$

Рассмотрим уравнение

$$(x^2-x+1)^3+2x^4(x^2-x+1)-3x^6=0.$$

Если раскрыть скобки и привести подобные, то получим уравнение пятой степени стандартного вида. Но если ввести новые переменные $u=x^2-x+1$ и $v=x^2$, то получим уравнение $u^3+2uv^2-3v^3=0$, являющееся однородным уравнением степени 3 относительно u и v.

Однородное уравнение степени k относительно u и v обладает тем свойством, что если разделить все члены уравнения на k-ю степень одной из переменных, например v^k (если $v=0$ не является корнем уравнения), то оно превращается в уравнение степени k с одной переменной $y=\frac{u}{v}$.

Например, уравнение (11) после деления на v^3 принимает вид:

$$a_0\left(\frac{u}{v}\right)^3+a_1\left(\frac{u}{v}\right)^2+a_2\frac{u}{v}+a_3=0, \text{ или } a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0.$$

Пример 7.

Решим уравнение

$$(x^2-x+1)^3+2x^4(x^2-x+1)-3x^6=0. \qquad (13)$$

Решение. Мы показали, что это уравнение однородное относительно переменных $u=x^2-x+1$ и $v=x^2$. Проверив, что $x=0$ не является корнем данного уравнения, разделим его почленно на $v^3=x^6$. Получим уравнение

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)^3+2\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)-3=0.$$

Положив $y=\frac{x^2-x+1}{x^2}$, решим уравнение

$$y^3+2y-3=0. \qquad (14)$$

Легко видеть, что $y=1$ — корень этого уравнения, поэтому, разделив многочлен y^3+2y-3 на $y-1$, перейдем к равносильному уравнению

$$(y-1)(y^2+y+3)=0.$$

Обнаружив, что дискриминант квадратного трехчлена $D=1-12=-11$ отрицательный, заключаем, что уравнение (14) имеет единственный корень $y=1$. Значит, осталось решить уравнение

$$\frac{x^2-x+1}{x^2}=1.$$

Решая это уравнение, находим единственный корень $x=1$.

Ответ: $\{1\}$.

УПРАЖНЕНИЯ

33. Решите биквадратное уравнение разложением левой части на множители:

а) $x^4-7x^2+6=0$;
б) $36x^4-13x^2+1=0$;
в) $4y^4-4y^2+1=0$;
г) $z^4+0{,}7z^2=0$.

34. Решите уравнение, используя метод разложения на множители:

а) $9x^3-18x^2=x-2$;
б) $y^3-y^2=y-1$;
в) $x^3-3x^2-3x+1=0$;
г) $x^4-2x^3+2x-1=0$;
д) $x^4-3x^2+2=0$;
е) $x^5+5x^3-6x^2=0$.

35. Решите уравнение, используя теорему Безу:

а) $x^3+4x^2+5x+2=0$; в) $4x^3+x^2-x+5=0$;

б) $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$; г) $3x^4+5x^3-9x^2-9x+10=0$.

36. Найдите точки пересечения с осями координат графика функции:

а) $(x-1)^3+(2x+3)^3-27x^3-8$; б) $x^3(x^2-7)^2-36x$.

37. Докажите, что если уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, где a_1, ..., a_n — целые числа, имеет рациональный корень, то этот корень — целое число.

38. Выясните, при каких целых значениях a уравнение $x^4+ax+1=0$ имеет рациональные корни. 1) 2; 2) 1; 3) −1; 4) −2; 2.

39. Определите свободный член уравнения $6x^3-7x^2-16x+m=0$, если известно, что один из его корней равен 2, и найдите остальные два корня.

40. Зная, что 2 и 3 являются корнями уравнения $2x^3+mx^2-13x+n=0$, определите m и n и найдите третий корень уравнения.

41. Докажите, что уравнение не имеет действительных корней:

а) $2x^6+x^4+x^2+1=0$; б) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

42. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $x^4-5x^2+4=0$; г) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$;

б) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^4-3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-4=0$; д) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-6=0$;

в) $x^8+9x^4+8=0$; е) $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{142}{9}$.

43. Решите уравнение, подобрав подходящую замену переменной:

а) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=-15$; г) $(x-2)(x-3)(x-4)=6$;

б) $(3x+4)(3x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=36$; д) $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=\frac{9}{2}$.

в) $(x^2-3x)(x-1)(x-2)=24$;

44. Убедившись, что данные уравнения являются обобщенными возвратными уравнениями, решите их:

а) $x^4+x^3-4x^2+3x+9=0$; г) $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$.

б) $6x^4+5x^3-38x^2-10x+24=0$; 1) 3; 2) 1; 2; 3) 1; −1; 4) 2.

в) $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$;

45. Докажите, что если α — корень обобщенного возвратного уравнения четвертой степени $ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$, то $\frac{k}{\alpha}$ тоже корень этого уравнения.

46. Убедившись, что данные уравнения однородные относительно выражений $u=p(x)$ и $v=q(x)$, найдите их решения:

а) $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2=0$;

б) $(x+5)^4-13x^2(x+5)^2+36x^4=0$;

в) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

г) $2(x-1)^4-5(x^2-3x+2)^2+2(x-2)^4=0$;

д) $(x^2+x+4)^2+3x(x^2+x+4)+2x^2=0$.

47. Решите уравнение:

а) $(x-2)^4+(x-3)^4=1$;

б) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Указание. Уравнение вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ сводится к биквадратному уравнению с помощью замены переменной $y=x+\dfrac{a+b}{2}$.

48. Решите уравнение:

а) $(x+2)^2+2|x+2|+3=0$;

б) $x^3+8=3x|x+2|$;

в) $x^4+x^2+4|x^2-x|=2x^3+12$;

г) $||x-1|+2|=1$.

8. ФОРМУЛЫ ВИЕТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

При изучении квадратных уравнений была доказана теорема Виета, устанавливающая связь между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами. Аналогичные формулы имеют место не только для квадратного уравнения, но и для любого целого рационального уравнения степени $n>2$ стандартного вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{1}$$

В § 1 п. 2 этой главы установлено, что многочлен степени n не может иметь более чем n различный корней. Пусть уравнение (1) имеет n различных корней x_1, x_2, ..., x_n. Тогда многочлен в левой части уравнения (1) можно разложить на линейные множители и представить в виде:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$

Разделим обе части этого равенства на $a_0\neq 0$ и раскроем в правой части скобки. Получим равенство

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=x^n-(x_1+x_2+\ldots+x_n)x^{n-1}+$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}+\ldots+(-1)^nx_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n.$$

Так как два тождественно равных многочлена имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях x, то из последнего тождества получаем n равенств:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0}, \\ &x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Этими равенствами устанавливается связь между корнями уравнения (1) и его коэффициентами.

Так как любое целое рациональное уравнение степени n можно привести к стандартному виду (1), то справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (Виета). Если целое рациональное уравнение степени n, приведенное к стандартному виду, имеет n различных действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то они удовлетворяют равенствам (2).

Для квадратных уравнений равенства (2) имеют вид:

$$x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_0},\ x_1\cdot x_2=\frac{a_2}{a_0}.$$

Для корней уравнения третьей степени

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

справедливы равенства

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=-\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3&=\frac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3&=-\frac{a_3}{a_0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Так же как и для квадратных уравнений, равенства (2) называют формулами Виета для корней целых рациональных уравнений степени n. Справедливо и утверждение, обратное теореме 1.

Теорема 2 (обратная). Если выполняются равенства (2), то числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями целого рационального уравнения степени n стандартного вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Приведем доказательство этой теоремы для $n=3$.

Из равенства (3) следует, что

$$x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=$$
$$=x^2(x-x_1)-x_2x(x-x_1)-x_3x(x-x_1)+x_2x_3(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)(x^2-x_2x-x_3x+x_2x_3)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Итак,

$$x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \qquad (4)$$

Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0.$$

Тогда из равенства (4) следует, что эти числа являются корнями уравнения

$$x^3+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x+\frac{a_3}{a_0}=0,$$

а значит, и равносильного ему уравнения

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0.$$

Для $n=2$ эта теорема доказана в главе VI п. 4.

Замечание.

Формулы Виета остаются справедливыми и в случае, когда имеются кратные корни. Тогда в равенствах (2) каждый корень берется столько раз, какова его кратность.

Обратим внимание, что левые части равенств (2) являются многочленами переменных x_1, x_2, ..., x_n и обладают замечательным свойством: как бы мы ни меняли буквы x_1, x_2, ..., x_n местами, получаем многочлен, тождественный исходному. Такие многочлены мы уже встречали в 8 классе и назвали их *симметрическими*. Симметрические многочлены, записанные в левых частях равенств (2), называют *элементарными* и обозначают так:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+\ldots+x_n=\sigma_1,\\ &x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\sigma_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=\sigma_n. \end{aligned} \qquad (5)$$

Имеет место утверждение, выражающее основное свойство симметрических многочленов:

любой симметрический многочлен от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть выражен в виде многочлена от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$.

Для $n=2$, $n=3$ это утверждение рассмотрено нами в главе II п. 17. Там же доказано, например, при $n=2$, что

$$x_1^2+x_2^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$
$$x_1^3+x_2^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2,$$
$$x_1^4+x_2^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2.$$

Если же $n=3$, то имеют место соотношения:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$
$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

Из формул Виета (2) вытекает, что сформулированное выше основное свойство симметрических многочленов можно определить следующим образом:

любой симметрический многочлен от корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ приведенного целого рационального уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+ +\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ является многочленом от коэффициентов этого уравнения.

Этот факт можно использовать при решении различных задач.

Пример 1.

Напишем приведенное кубическое уравнение $y^3+b_1y^2+b_2y+b_3=0$, корни которого обратны корням уравнения $x^3-3x^2+7x+5=0$.

Решение. Обозначим корни заданного уравнения через x_1, x_2, x_3. Тогда по формулам Виета имеем:

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3=3,\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7,\ \sigma_3=x_1x_2x_3=-5.$$

Обозначим корни искомого уравнения y_1, y_2, y_3. По условию

$$y_1=\frac{1}{x_1},\ y_2=\frac{1}{x_2},\ y_3=\frac{1}{x_3},$$

и поэтому

$$b_1=-(y_1+y_2+y_3)=-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=-\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{7}{5},$$

$$b_2=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}\right)=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=-\frac{3}{5},$$

$$b_3=-y_1y_2y_3=-\frac{1}{x_1x_2x_3}=-\frac{1}{\sigma_3}=\frac{1}{5}.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$y^3+\frac{7}{5}y^2-\frac{3}{5}y+\frac{1}{5}=0,\text{ или } 5y^3+7y^2-3y+1=0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

49. Напишите кубическое уравнение, корни которого обратны корням уравнения $x^3-6x^2+12x-18=0$, а коэффициент при x^3 равен 2.

50. Напишите кубическое уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^3-6x^2+11x-6=0$, а коэффициент при x^3 равен 8.

51. Напишите уравнение четвертой степени, корни которого противоположны корням уравнения $x^4+x^3-2x^2+12x-16=0$.

52. Докажите, что если все корни уравнения $x^3+px+q=0$ действительны и хотя бы один отличен от 0, то $p<0$.

53. Составьте уравнение, корни которого равны кубам корней уравнения $x^3+px+q=0$.

54. Сократите дробь $\dfrac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$.

9. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$x^3-x^2=\frac{5x+4}{6x-1}+\frac{7}{3}. \qquad (1)$$

Это рациональное уравнение содержит алгебраическую дробь $\dfrac{5x+4}{6x-1}$. Такие уравнения называют *дробно-рациональными уравнениями*. В общем случае

уравнение с одной переменной

$$f(x)=\varphi(x), \qquad (2)$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — рациональные выражения, хотя бы одно из которых содержит алгебраическую дробь, называют *дробно-рациональным*.

Если в уравнении (1) все члены перенести в левую часть, привести к общему знаменателю, а затем привести подобные, то согласно теореме 1 § 2 п. 5 получим равносильное уравнение

$$\frac{18x^4-21x^3+3x^2-57x-5}{18x-3}=0,$$

т. е. получим уравнение, где в левой части отношение двух многочленов, а правая часть — нуль. Так как перенос членов уравнения в левую часть и приведение к общему знаменателю, связанное с умножением многочленов, являются равносильными преобразованиями, то справедливо предложение:

Всякое дробно-рациональное уравнение (2) можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \tag{3}$$

где в левой части отношение двух многочленов, а в правой части нуль.

Если для всех действительных чисел x многочлен $Q(x)\neq 0$, то, учитывая, что дробь равна нулю лишь в том случае, когда ее числитель равен нулю, переходим к равносильному целому рациональному уравнению

$$P(x)=0. \tag{4}$$

Найдя все корни этого уравнения, мы найдем решение исходного уравнения (3).

Если же при некоторых значениях x многочлен $Q(x)=0$, то уравнение (4) является лишь следствием уравнения (3). Поэтому все корни уравнения (4) надо подставить в многочлен $Q(x)$ и отбросить те корни, для которых $Q(x)=0$.

Итак, всякое дробно-рациональное уравнение можно свести к целому рациональному уравнению. Однако не всегда это следует делать сразу.

В некоторых случаях целесообразно вначале применить метод разложения на множители или метод замены переменной.

Пример 1.

Решим уравнение $\frac{2x}{4x^2+3x+8}+\frac{3x}{4x^2-6x+8}=\frac{1}{6}$.

Решение. Если привести дроби к общему знаменателю, т. е. привести уравнение к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, то в числителе получим многочлен четвертой степени. Поступим иначе. В знаменателе каждой дроби, входящей в левую часть уравнения, вынесем за скобки x, тогда получим равносильное уравнение

$$\frac{2x}{x\left(4x+3+\frac{8}{x}\right)}+\frac{3x}{x\left(4x-6+\frac{8}{x}\right)}=\frac{1}{6}.$$

Так как $x=0$ не является корнем уравнения, то, сократив обе дроби на x, мы перейдем к равносильному уравнению

$$\frac{2}{4x+3+\frac{8}{x}}+\frac{3}{4x-6+\frac{8}{x}}=\frac{1}{6}.$$

Заметим теперь, что в обе дроби входит одно и то же выражение $4x+\frac{8}{x}$. Введем новое неизвестное

$$y=4x+\frac{8}{x}.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{2}{y+3}+\frac{3}{y-6}=\frac{1}{6}, \text{ или } \frac{y^2-33y}{6(y+3)(y-6)}=0.$$

Находим корни уравнения-следствия $y^2-33y=0$: $y_1=0$, $y_2=33$. Проверяем, что оба корня удовлетворяют соотношению $6(y+3)(y-6)\neq0$. Теперь для нахождения корней исходного уравнения остается решить уравнения

$$4x+\frac{8}{x}=0 \text{ и } 4x+\frac{8}{x}=33.$$

Решая первое уравнение, находим, что оно корней не имеет, а корнями второго уравнения являются числа $x_1=8$, $x_2=\frac{1}{4}$.

Итак, данное уравнение имеет решение $\left\{8;\ \frac{1}{4}\right\}$.

Пример 2.

Решим уравнение $\frac{x^3-2x+3}{x-1}=\frac{x^3+3x^2-3x-7}{x+2}$.

Решение. В обеих частях уравнения неправильные рациональные дроби. Выделим вначале целые части в каждой из дробей и затем перенесем все члены в левую часть. Используя схему Горнера, составим таблицы:

	1	0	−2	3
1	1	1	−1	2

	1	3	−3	−7
−2	1	1	−5	3

Значит,

$$\frac{x^3-2x+3}{x-1}=x^2+x-1+\frac{2}{x-1}$$

и

$$\frac{x^3+3x^2-3x-7}{x+2}=x^2+x-5+\frac{3}{x+2}.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$x^2+x-1+\frac{2}{x-1}=x^2+x-5+\frac{3}{x+2}.$$

Перенося все члены в левую часть, получим равносильное уравнение

$$4+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}=0,$$

или

$$\frac{4x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)}=0.$$

Решая уравнение $4x^2+3x-1=0$, находим корни $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{4}$. Так как при этих значениях знаменатель дроби в последнем уравнении не обращается в нуль, то эти значения x и являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $\left\{-1;\ \frac{1}{4}\right\}$.

УПРАЖНЕНИЯ

55. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{1-2x^2}=12x^2+7x-6$;

б) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$;

в) $\frac{24x}{2x^2-3x+4}=\frac{12x}{x^2+x+2}+5$.

56. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$;

б) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4$;

в) $\frac{x^2+4x+4}{x+4}-\frac{2x+6}{x+2}=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{2x+9}{x+3}$.

57. Решите уравнение:

а) $\frac{12}{x^2+2x}-\frac{3}{x^2+2x-2}=1$;

б) $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1$;

в) $\frac{6x^4+6}{x^2}+\frac{5x^2+5}{x}=38$;

г) $\frac{(x+1)^5}{x^5+1}=\frac{81}{11}$.

58. Решите уравнение:

а) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$;

б) $\left|\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+10}\right|=-\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+10}$;

в) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$;

г) $\frac{2x-1}{|x+1|}+\frac{|3x-1|}{x+2}=4$.

§ 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

10. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Известно, что для уравнения с двумя переменными существует, вообще говоря, бесконечно много пар чисел $(a;\ b)$, таких, что при подстановке их в уравнение получаются верные числовые равенства. Поэтому их часто называют *неопределенными уравнениями*. В главе IV п. 9 рассмотрено решение неопределенных уравнений первой степени в целых числах, т. е. когда переменные могут быть только целыми числами. Если же рассматривают два уравнения с двумя переменными и ставится задача найти все пары чисел $(a;\ b)$, таких, что при подстановке их в эти уравнения получаются верные числовые равенства, то говорят, что задана *система уравнений*. Систему уравнений $f_1(x,\ y)=\varphi_1(x,\ y)$ и $f_2(x,\ y)=\varphi_2(x,\ y)$ записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y)=\varphi_1(x, y), \\ f_2(x, y)=\varphi_2(x, y). \end{cases} \qquad (1)$$

Решить систему уравнений — значит найти множество всех пар чисел $(a;\ b)$, таких, что при подстановке числа a вместо x и числа b вместо y получаются верные числовые равенства. Такие пары чисел $(a;\ b)$ будем называть *решением* системы уравнений. Если множество решений системы уравнений — пустое множество, то ее называют *несовместной*.

Аналогично можно определить систему уравнений с тремя и большим числом переменных. Здесь мы будем рассматривать системы, у которых число уравнений равняется числу переменных.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если их решения совпадают.

В частности, если обе системы несовместны, то их также считают равносильными.

При решении систем уравнений их заменяют более простыми, равносильными им системами. Так же как и при решении уравнений, в процессе решения систем уравнений важно знать, при каких преобразованиях данная система переходит в равносильную ей систему уравнений.

Очевидно, что при замене одного из уравнений системы равносильным ему уравнением система переходит в равносильную ей систему уравнений (в частности, можно выполнять перенос членов уравнения из одной части в другую с изменением знака и умножение обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число). Поэтому мы можем заменить систему (1) равносильной ей системой

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$F_1(x,\ y) = f_1(x,\ y) - \varphi_1(x,\ y),\ F_2(x,\ y) = f_2(x,\ y) - \varphi_2(x,\ y).$$

Основные методы решения систем уравнений уже рассмотрены при решении систем линейных уравнений в 7 классе.

а) **Метод подстановки** или исключения неизвестного основан на том, что если из одного уравнения системы выразить одну переменную через другую (например, $y = f(x)$) и подставить полученное выражение во второе уравнение, то системы

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = f(x), \\ F(x, f(x)) = 0 \end{cases}$$

равносильны. Решение последней системы сводится к решению уравнения $F(x,\ f(x)) = 0$ с одной переменной x. Подставляя затем найденные x в уравнение $y = f(x)$, находим соответствующие значения y.

Этот метод особенно удобен, если в одно из уравнений системы какая-нибудь переменная входит в первой степени.

Пример 1.

Решим систему $\begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ x^4 + y^2 = 16. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим $y = 4 - 2x^2$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $x^4 + (4 - 2x^2)^2 = 16$. Приведя это уравнение к стандартному виду, получим биквадратное уравнение $5x^4 - 16x^2 = 0$. Решая его, находим $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $x_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. Подставляя найденные значения x в выражение $y = 4 - 2x^2$, находим $y_1 = 4$, $y_2 = y_3 = -\frac{12}{5}$.

Ответ: $\left\{(0;\ 4);\ \left(\frac{4}{\sqrt{5}};\ -\frac{12}{5}\right);\ \left(-\frac{4}{\sqrt{5}};\ -\frac{12}{5}\right)\right\}$.

б) **Метод алгебраического сложения уравнений** основан на том, что если к обеим частям одного из уравнений системы (1) прибавить соответствующие части другого уравнения, умноженные на одно и то же число, а другое уравнение оставить без изменения, то получим систему, равносильную данной, т. е. системы

$$\begin{cases} f_1(x) = \varphi_1(x), \\ f_2(x) = \varphi_2(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_1(x) + c \cdot f_2(x) = \varphi_1(x) + c \cdot \varphi_2(x), \\ f_2(x) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

равносильны.

Обычно с помощью этого метода получают систему, к которой затем применяют метод подстановки.

Пример 2.

Решим систему $\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2, \\ x^2-x^2y=1. \end{cases}$

Решение. Если выразить из второго уравнения y и подставить в первое, то получим уравнение девятой степени. Поступим иначе. Умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым. Получим систему

$$\begin{cases} (x-y)^3=1, \\ x^2-x^2y=1, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x^2-x^2y=1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $y=x-1$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим кубическое уравнение

$$x^3-2x^2+1=0.$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, получим

$$(x-1)(x^2-x-1)=0.$$

Решая это уравнение, находим его корни: $x_1=1$, $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Подставляя найденные значения x в выражение $y=x-1$, находим $y_1=0$, $y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{(1;\ 0);\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right);\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

в) Метод замены переменной. При решении уравнений в предыдущих пунктах успешно применялся метод замены переменной.

Этот метод используется и при решении систем. Например, при решении симметричных систем или систем, содержащих однородное уравнение.

Если левые части уравнений системы $\begin{cases} P(x,\ y)=0, \\ Q(x,\ y)=0 \end{cases}$ являются симметрическими многочленами двух переменных x и y, то систему назовем *симметрической*. Для ее решения полезно принять за новые переменные элементарные симметрические многочлены $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$.

В главе II § 2 п. 17 было установлено, что любой симметрический многочлен двух переменных может быть выражен через σ_1 и σ_2. В результате получим систему уравнений с переменными σ_1, σ_2, которая часто бывает более простой, чем исходная.

Пример 3.

Решим систему $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

Решение. В левой части каждого из уравнений системы симметрические многочлены переменных x и y. Сделаем замену переменных, положив $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$. Система примет вид:

$$\begin{cases} \sigma_1+\sigma_2=11, \\ \sigma_1\cdot\sigma_2=30. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\sigma_1=6$ или $\sigma_1=5$, а $\sigma_2=5$ или $\sigma_2=6$. Остается найти решение совокупности систем

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Ответ: $\{(5;\ 1);\ (1;\ 5);\ (3;\ 2);\ (2;\ 3)\}$.

Если хотя бы одно уравнение системы является однородным, то, сделав замену переменной $\frac{y}{x}=u$ или $\frac{x}{y}=u$ и решив затем это уравнение, можно будет выразить одну переменную через другую. Затем применить метод подстановки.

Пример 4.

Решим систему $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0, \\ y^2-x^2=12. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение этой системы является однородным степени 2. Так как $x=0$ ни при каком значении y не входит в решение системы, то поделим обе части первого уравнения на x^2 и введем новую переменную $\frac{y}{x}=u$. Получим квадратное уравнение $2-3u+u^2=0$. Корни этого уравнения $u_1=1$, $u_2=2$, т. е. $\frac{y}{x}=1$ или $\frac{y}{x}=2$. Теперь нужно решить совокупность двух систем

$$\begin{cases} y=x, \\ y^2-x^2=12 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y=2x, \\ y^2-x^2=12. \end{cases}$$

Первая система несовместна, так как при подстановке выражения $y=x$ во второе уравнение получим $0=12$. Решая вторую систему, подставим выражение $y=2x$ во второе уравнение. Получим $4x^2-x^2=12$, или $x^2=4$. Отсюда находим $x_1=2$, $x_2=-2$. Так как $y=2x$, то $y_1=4$, $y_2=-4$.

Ответ: $\{(2;\ 4);\ (-2;\ -4)\}$.

В некоторых системах оба уравнения не являются однородными, но, применив метод алгебраического сложения, удается перейти к равносильной системе, одно уравнение которой является однородным.

Пример 5.

Решим систему $\begin{cases} x^3+4x^2y+y^3=6, \\ y^3+3x^2y=4. \end{cases}$

Решение. Оба уравнения системы не являются однородными, но в левой части этих уравнений однородные многочлены степени 3. Поэтому если первое уравнение домножить на 2, а второе уравнение — на -3 и сложить с первым, то получим равносильную систему

$$\begin{cases} 2x^3-x^2y-y^3=0, \\ y^3+3x^2y=4. \end{cases}$$

В этой системе первое уравнение однородное степени 3. Разделим обе части первого уравнения на x^3 $(x\neq 0)$ и сделаем замену переменной $\frac{y}{x}=u$. Решим уравнение $2-u-u^3=0$:

$$1-u+1-u^3=0,\ (1-u)(2+u+u^2)=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $1-u=0$, $2+u+u^2=0$. Из первого уравнения получаем $u=1$, а второе действительных корней не имеет, так как его дискриминант $D<0$.

Итак, $\frac{y}{x}=1$, или $y=x$. Подставим это выражение во второе уравнение системы и, решив полученное уравнение $x^3+3x^2\cdot x=4$, находим $x=1$. Тогда $y=x=1$.

Ответ: $\{(1;\ 1)\}$.

г) При решении систем применяется и **метод разложения на множители**, основывающийся на том, что если выражения $f_1(x,\ y)$ и $f_2(x,\ y)$ определены для всех значений переменных x и y, то *система*

$$\begin{cases} f_1(x,\ y)\cdot\varphi_1(x,\ y)=0, \\ f_2(x,\ y)=0 \end{cases}$$

равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} f_1(x,\ y)=0, \\ f_2(x,\ y)=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi_1(x,\ y)=0, \\ f_2(x,\ y)=0. \end{cases}$$

(Доказательство проведите самостоятельно.)

Пример 6.

Решим систему $\begin{cases} (x^2-3xy+2y^2)(x-y)=0, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Решение. Система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0, \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-y=0, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$$

Заметим, что $x^2-3xy+2y^2=0$ — однородное уравнение и $y=0$ не входит в решение системы. Разделим первое уравнение на y^2. Получим:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)+2=0.$$

Введем новую переменную $u=\frac{y}{x}$ и найдем корни квадратного уравнения

$$u^2-3u+2=0.$$

Получим $u_1=2$, $u_2=1$. Значит, либо $\frac{y}{x}=2$, либо $\frac{y}{x}=1$. Подставляя $y=2x$ и $y=x$ поочередно во второе уравнение системы, получаем совокупность уравнений $5x^2=10$ и $2x^2=10$. Решая уравнение $5x^2=10$, находим $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$. Подставляя найденные значения в выражение $y=2x$, получаем $y_1=2\sqrt{2}$, $y_2=-2\sqrt{2}$.

Решая уравнение $2x^2=10$ и подставляя результаты в выражение $y=x$, находим: $x_3=\sqrt{5}$, $x_4=-\sqrt{5}$, $y_3=\sqrt{5}$, $y_4=-\sqrt{5}$.

Таким образом, решением первой системы является:

$$\begin{gathered}x_1=\sqrt{2},\ y_1=2\sqrt{2};\ x_2=-\sqrt{2},\ y_2=-2\sqrt{2};\\ x_3=\sqrt{5},\ y_3=\sqrt{5};\ x_4=-\sqrt{5},\ y_4=-\sqrt{5}.\end{gathered}\tag{3}$$

Решая вторую систему, выразим из первого уравнения y. Получим $y=x$. Так как этот случай уже рассмотрен, то решением исходной системы будет множество пар (3).

Ответ: $\{(\sqrt{2};\ 2\sqrt{2});\ (-\sqrt{2};\ -2\sqrt{2});\ (\sqrt{5};\ \sqrt{5});\ (-\sqrt{5};\ -\sqrt{5})\}$.

УПРАЖНЕНИЯ

59. Являются ли равносильными следующие системы уравнений:

а) $\begin{cases}x-2y=6,\\5x+2=1\end{cases}$ и $\begin{cases}(x-2y)(x^2+y^2)=6(x^2+y^2),\\5x+2=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}7x-2y=5,\\x^2-y^2=12(x-y)\end{cases}$ и $\begin{cases}7x-2y=5,\\x+y=12?\end{cases}$

60. Какой совокупности систем равносильна система

$$\begin{cases}(2x+y-5)(x^2+y^2-25)=0,\\(5x+y)(xy-7)=0?\end{cases}$$

61. Докажите, что система $\begin{cases}(x^2-y^2-ax+ay=0,\\xy=a^2\end{cases}$ равносильна совокупности систем $\begin{cases}x-y=0,\\xy=a^2,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=a,\\xy=a^2.\end{cases}$

62. Решите систему методом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2-2xy=7, \\ x-3y=-2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2-7x=12y-1, \\ x-y=-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-\dfrac{x-y}{2}=4, \\ y-\dfrac{x+3y}{x+2}=1. \end{cases}$

63. Используя метод алгебраического сложения, решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+2y^2=208, \\ 3x^2-y^2=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (2x-5)^2+(3y-2)^2=17, \\ (2x-5)(3y-2)=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

64. Решите систему, используя замену переменных:

а) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-xy+y=1, \\ x^2+y^2+2x+2y=11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=92, \\ xy=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^3+y^3=6(x+y). \end{cases}$

65. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+3y^2=7, \\ xy+y^2=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ xy+2y^2=18; \end{cases}$

$\boxed{\text{в)}}$ $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2y+xy^2=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2+xy}+\dfrac{4}{y^2+xy}=\dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2+xy}-\dfrac{1}{y^2+xy}=1; \end{cases}$

$\boxed{\text{д)}}$ $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}+\dfrac{x-2y}{x+y}=4, \\ x^2+xy+y^2=21; \end{cases}$

$\boxed{\text{е)}}$ $\begin{cases} 5x^3-4x^2y+y^3=4, \\ 3x^3-3x^2y+2y^3=2. \end{cases}$

66. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-y^2+12y-21=0, \\ 2x^2+y^2+2xy+x=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+yz=-1, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$

11*. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

В главе VI п. 10 коэффициенты, заданные в уравнении не конкретными числовыми значениями, а обозначенные буквами, назвали *параметрами*. Придавая параметрам различные числовые значения, получаем различные уравнения. Например, в линейном уравнении $ax+b=0$ x — переменная, a и b — параметры. Квадратное уравнение стандартного вида $ax^2+bx+c=0$ имеет три параметра a, b, c. При изучении квадратных уравнений и квадратного трехчлена мы видим, что при одних значениях параметров уравнение не имеет корней, при других имеет только один корень, при третьих — два корня. Поэтому при решении уравнений с параметрами необходимо вначале выяснить, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их в зависимости от значений параметров. Затем найти все выражения для корней и указать те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

Все сказанное в равной мере относится и к решению систем уравнений, содержащих параметры.

Пример 1.

Решим уравнение $ax^2-4x+(a+3)=0$.

Решение. Данное уравнение имеет один параметр a. Если $a=0$, то получим линейное уравнение $-4x+3=0$, которое имеет один корень $x=\frac{3}{4}$.

При $a\neq 0$ уравнение является квадратным и его корни выражаются через параметр a формулами $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-a(a+3)}}{a}$.

Эти формулы имеют числовое значение, если $4-a(a+3)\geqslant 0$. Решая неравенство, находим:

при $a\in(-4;\ 0)\cup(0;\ 1)$ уравнение имеет два корня,
при $a\in(-\infty;\ -4)\cup(1;\ +\infty)$ уравнение корней не имеет,
при $a=-4$ и $a=-1$ уравнение имеет один корень.

Ответ записываем так:

при $a=0$ $x=\frac{3}{4}$;

при $a\in[-4;\ 0)\cup(0;\ 1]$ $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-a(a+3)}}{a}$;

при $a\in(-\infty;\ -4)\cup(1;\ +\infty)$ действительных корней нет.

Пример 2.

При каких значениях a уравнение имеет два различных корня:

$$1-\frac{3}{x+a-1}=\frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}? \qquad (1)$$

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю. Получим равносильное уравнение

$$\frac{x^2+(a-3)x-4(a+1)}{(x+a-1)(x+1)}=0. \qquad (2)$$

Перейдем от уравнения (2) к уравнению-следствию:

$$x^2+(a-3)x-4(a+1)=0. \qquad (3)$$

Решая его, находим:

$$x_{1,\,2}=\frac{-(a-3)\pm\sqrt{(a-3)^2+16(a+1)}}{2},$$

т. е. $x_1=4$, $x_2=-a-1$.

Среди найденных значений могут быть посторонние корни, так как уравнение (3) лишь следствие уравнения (2). Чтобы значение $x_1=4$ было корнем уравнения (1), нужно потребовать, чтобы $4+a-1\neq 0$, т. е. $a\neq -3$. Для того чтобы $x_2=-a-1$ являлось корнем уравнения (1), потребуем, чтобы выполнялись условия

$$x_2+a-1\neq 0 \text{ и } x_2+1\neq 0.$$

Первое условие выполняется при любом значении a, а второе условие выполняется при $a\neq 0$. Кроме того, при $a=-5$ имеем $x_1=x_2=4$.

Итак, только при $a=0$, $a=-3$ и $a=-5$ уравнение не имеет двух различных действительных корней.

Ответ: при $a\neq 0$, $a\neq -3$, $a\neq -5$ уравнение имеет два действительных различных корня.

Пример 3.

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+2xy-6x-6y+10-a=0, \\ x^2+y^2-2xy-2x+2y+a=0. \end{cases}$

Решение. Сложив первое уравнение со вторым, перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-8x-4y+10=0, \\ x^2+y^2-2xy-2x+2y+a=0. \end{cases}$$

Эта система в свою очередь равносильна системе

$$\begin{cases} 2(x-2)^2+2(y-1)^2=0, \\ x^2+y^2-2xy-2x+2y+a=0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы не зависит от параметра a, и имеется единственная пара чисел $x=2$, $y=1$, которая удовлетворяет этому уравнению. Значит, система совместна только в том случае, когда пара чисел (2; 1) удовлетворяет и второму уравнению системы, т. е. выполняется равенство $-1+a=0$. Отсюда заключаем, что только при $a=1$ данная система совместна.

Ответ: при $a=1$ $\{(2;\ 1)\}$, при $a\neq 1$ система несовместна.

УПРАЖНЕНИЯ

67. При каких a уравнение $\frac{a+3}{x+1}-\frac{5-3a}{x-2}=\frac{ax+3}{x^2-x-2}$ имеет решение? Найдите это решение.

68. Решите уравнение:

а) $\frac{x-a}{x^2-4x+3}=0$; в) $(a+6)x^2-8x+a=0$;

б) $\frac{x-2}{x+a}=0$; г) $a(2a+4)x^2-(a+2)x-5a-10=0$.

69. При каких a уравнение $x^3-x=a(x^3+x)$ имеет ровно три корня?

70. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-(3a+1)x+2a^2+3a-2}{x^2-6x+5}=0$ имеет единственное решение?

1) при $a \pm 2$; 2) при $a=\pm 1$;
3) при $a=\pm 3$; 4) при $a=3$.

71. Найдите рациональное решение уравнения

$$x+\sqrt{2}=x\sqrt{2}+a^2,$$

где a — рациональный параметр.

72. Решите упражнения 116—129 главы VI п. 10.

73. При каких значениях a уравнение

$$(x^2-2x)^2-(a+2)(x^2-2x)+3a-3=0$$

имеет четыре различных корня?

74. При каких значениях параметра p уравнение

$$(x-p)^2(p(x-p)^2-p-1)=-1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

75. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2-2x)^2-(a+2)(x^2-2x)=0$$

имеет четыре различных неотрицательных корня?

76. Пользуясь графиком функции $f(x)$, определите, сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от параметра a:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+4, & x\in(-\infty;\ -1), \\ |x-2|, & x\in[-1;\ 4], \\ \frac{8}{x}, & x\in(4;\ +\infty); \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(-\infty;\ -2), \\ ||x-2|-3|, & x\in[-2;\ 6], \\ -2+\frac{3}{x-5}, & x\in(6;\ +\infty). \end{cases}$

§ 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

12. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В главе VII были рассмотрены линейные и квадратные неравенства. В этом параграфе мы рассмотрим и другие неравенства. В общем виде понятие неравенства с одной переменной можно определить следующим образом:

Определение[1]. **Соотношения $f(x)<\varphi(x)$, $f(x)>\varphi(x)$, $f(x)\geqslant\varphi(x)$, $f(x)\leqslant\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые функции от x, называют *неравенствами с одной переменной x*.**

Для неравенства понятие корней не вводят.

***Решить неравенство — значит найти множество M значений x, при подстановке которых в неравенство получаются верные числовые неравенства.* Множество M тогда называют *решением неравенства*.**

Между решением неравенств и уравнений много общего — неравенства так же с помощью преобразований сводят к более простым — равносильным неравенствам, т. е. неравенствам, имеющим то же решение[2]. Отличие состоит в том, что решением неравенств чаще всего являются бесконечные множества.

Например, решением неравенства $2x-6\geqslant0$ является множество $[3; +\infty)$, решением неравенства $x^2\geqslant0$ — все множество действительных чисел.

Значит, сделать полную проверку ответа, как это делали для уравнений, нельзя. Поэтому очень важно при решении неравенств переходить только к равносильным неравенствам.

К равносильным неравенствам приводят тождественные преобразования, не изменяющие область допустимых значений неравенства. (Область допустимых значений неравенства определяется так же, как и уравнения.)

Например, неравенства

$$x^2-5x+3(x-1)+2>0 \text{ и } x^2-2x-1>0$$

равносильны, а неравенства

$$x^2-5\left(3-\frac{2}{x}\right)+21-5x-\frac{10}{x}>0 \text{ и } x^2-5x+6>0$$

не равносильны.

---

[1] Неравенства со знаком $>$ или $<$ называют строгими, а неравенства со знаком $\geqslant$ или $\leqslant$ называют нестрогими.

[2] Неравенства, решения которых — пустое множество, считают равносильными.

Здесь приведение подобных членов привело к изменению ОДЗ: для первого неравенства ОДЗ $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$, для второго — $(-\infty;\ +\infty)$.

Поэтому неравенство $x^2-5\left(3-\frac{2}{x}\right)+21-5x-\frac{10}{x}>0$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Основываясь на свойствах числовых неравенств, можно доказать справедливость утверждений, похожих на те, которыми мы пользовались при решении уравнений.

Теорема 1. Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, оставив знак неравенства без изменения, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Докажем, например, теорему 3 (теоремы 1 и 2 доказываются аналогично).

Пусть дано неравенство

$$f(x)>\varphi(x) \qquad (1)$$

и число $c<0$. Если число a удовлетворяет неравенству (1), то справедливо числовое неравенство

$$cf(a)<c\varphi(a).$$

Это означает, что число a удовлетворяет неравенству

$$cf(x)<c\varphi(x). \qquad (2)$$

Таким же образом доказывается и обратное утверждение, т. е. решения неравенств (1) и (2) совпадают.

Следовательно, эти неравенства равносильны.

7*

13. РЕШЕНИЕ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ. МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Если в неравенстве (1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, то его называют *целым рациональным неравенством.*

Согласно теореме 1 от неравенства (1) можно перейти к равносильному неравенству

$$f(x)-\varphi(x)>0. \tag{3}$$

В п. 6 мы уже говорили, что всякое целое рациональное выражение можно представить в виде многочлена стандартного вида. Поэтому решение всякого целого рационального неравенства можно свести к решению равносильного ему неравенства, у которого в левой части многочлен стандартного вида $P(x)$, а правая часть — нуль, т. е. к неравенству вида $P(x)>0$.

Вспоминая (см. § 1, п. 2), что всякий многочлен $P(x)$, имеющий корнями числа α_1, α_2, ..., α_n, может быть представлен в виде

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\cdot Q(x),$$

неравенство $P(x)>0$ можно записать так:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\cdot Q(x)>0. \tag{4}$$

При этом если α_1, α_2, ..., α_n — все корни многочлена $P(x)$, то многочлен $Q(x)$ корней не имеет и, следовательно, сохраняет один и тот же знак на всей числовой оси.

Каждый из линейных множителей $x-\alpha_k$ положителен при $x>\alpha_k$ и отрицателен при $x<\alpha_k$. Значит, произведение, стоящее в левой части неравенства (4), может изменить знак лишь при переходе переменной x через одну из точек α_k. Точки α_k делят числовую ось на несколько интервалов, на каждом из которых рассматриваемое произведение знака не меняет. Отсюда следует, что достаточно знать знак произведения в какой-нибудь одной («пробной») точке внутри интервала, и этот же знак будет иметь произведение во всех точках данного интервала.

Рассмотренный метод решения неравенств назвали *методом интервалов*. Вы его использовали при решении квадратных неравенств в 8 классе.

Итак, чтобы решить целое рациональное неравенство, используя метод интервалов, нужно:

а) перенести все слагаемые в левую часть и решить уравнение, приравняв выражение в левой части к нулю;

б) найденные корни уравнения нанести на числовую ось. Эти корни разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражение, стоящее в левой части, сохраняет знак;

в) выбрать в каждом из промежутков какое-нибудь значение («пробную» точку) и определить знак выражения в этой точке;

г) выбрать промежутки, в которых выражение имеет требуемый знак, и записать ответ, взяв их объединение.

Пример 1.

Решим неравенство $x^4 - 3 < 2x(2x^2 - x - 2)$.

Решение. Дано целое рациональное неравенство. Перенесем все слагаемые в левую часть и приведем многочлен к стандартному виду. Получим равносильное неравенство

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 < 0. \tag{5}$$

Решая уравнение $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$, находим корни $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$, $x_4 = 3$. Тогда неравенство (5) можно переписать в виде

$$(x-1)^2(x+1)(x-3) < 0. \tag{6}$$

Найденные корни разбивают числовую ось на четыре промежутка, на каждом из которых левая часть неравенства (6), а значит, и исходного неравенства сохраняет знак. Выбирая пробные точки в каждом из промежутков (достаточно значения x подставлять только в последние два сомножителя), получаем знаки, указанные на рисунке 112. Видим, что неравенство выполняется на промежутках $(-1; 1)$ и $(1; 3)$.

Так как неравенство строгое, то числа -1, 1, 3 не входят в решение неравенства.

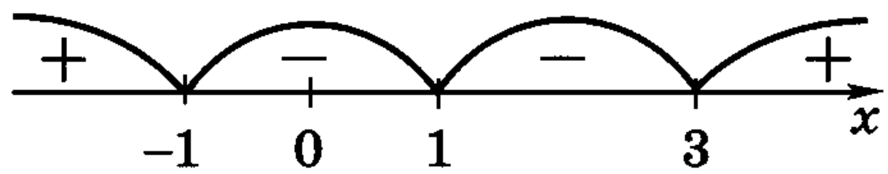


Рис. 112

Ответ: $(-1; 1) \cup (1; 3)$.

Если в неравенстве (4) $Q(x) \neq 0$ ни при каком x, т. е. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — все корни многочлена $P(x)$ и эти корни различны, другими словами, многочлен $P(x)$ не имеет кратных корней, то решение неравенства можно упростить, применив *кривую знаков*. В этом случае достаточно взять «пробную» точку в крайнем справа луче, т. е. при значении переменной x, большей всех чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. При этом знак $P(x)$ на данном луче будет совпадать со знаком $Q(x)$. Далее проводим волнообразную кривую знаков, которая начинается в верхней полуплоскости (если $Q(x) > 0$) и затем переходит в нижнюю полуплоскость и обратно или начинается в нижней полуплоскости (если $Q(x) < 0$) и затем переходит в верхнюю полуплоскость и обратно в точках α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 2.

Решим неравенство $2x^5 + 5x^4 - 7x^3 - 15x^2 - 11x - 6 < 0$.

Решение. Найдем корни многочлена

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 7x^3 - 15x^2 - 11x - 6.$$

Проверим прежде наличие целых корней, для чего проверим все делители свободного члена ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Составим таблицу, используя схему Горнера:

	2	5	−7	−15	−11	−6
1	2	7	0	−15	−26	−32
−1	2	3	−10	−5	−6	0
2	2	9	11	7	3	0
−2	2	1	−9	3	−17	28
3	2	11	26	63	178	528
−3	2	−1	−4	−3	−2	0

Итак, многочлен $P(x)$ имеет целые корни -1, 2, -3. Разделив $P(x)$ на $(x+1)(x+3)(x-2)$, получим, что исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x+1)(x+3)(x-2)(2x^2+x+1)<0.$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $2x^2+x+1$ отрицательный, то $2x^2+x+1>0$ при любом x и, значит, других корней, кроме найденных, многочлен $P(x)$ не имеет.

Нанесем корни -1, -3, 2 на числовую ось и построим кривую знаков (рис. 113).

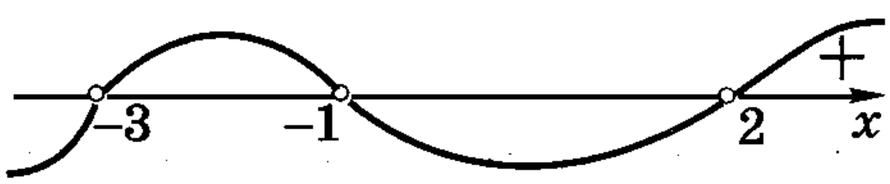


Рис. 113

Ответ: $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 2)$.

Замечание.

Применение кривой знаков при решении примера 1 дало бы неверный результат. Это связано с тем, что среди корней многочлена есть кратный корень.

14. РЕШЕНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

При изучении дробно-рациональных уравнений установлено, что всякое дробно-рациональное уравнение $f(x)=\varphi(x)$ можно привести к равносильному уравнению вида $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены переменной x.

Определяя дробно-рациональные неравенства, так же как и дробно-рациональные уравнения, можно показать, что всякое дробно-рациональное неравенство $f(x) > \varphi(x)$ можно свести к равносильному ему неравенству вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0. \qquad (7)$$

Например, перенося все слагаемые неравенства

$$\frac{3}{x+1} < \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x}$$

в левую часть и приводя к общему знаменателю, получим равносильное неравенство

$$\frac{x-2}{x(x+1)(x+2)} < 0.$$

Так как неравенство (7) равносильно неравенству $P(x) \cdot Q(x) > 0$, то метод промежутков применим и для решения дробно-рациональных неравенств.

Пример 1.

Решим неравенство $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 - 5x^2} < 0.$

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{x^2(x-1)(x-2)}{x^2(x-5)} < 0. \qquad (8)$$

Нанесем числа 0, 1, 2, 5, при которых числитель и знаменатель обращаются в нуль, на числовую ось. Они разбивают числовую ось на пять промежутков. С помощью «пробных» точек найдем знак выражения в каждом промежутке (рис. 114, *а*).

Выпишем интервалы, где выполняется неравенство: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(2; 5)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 5)$.

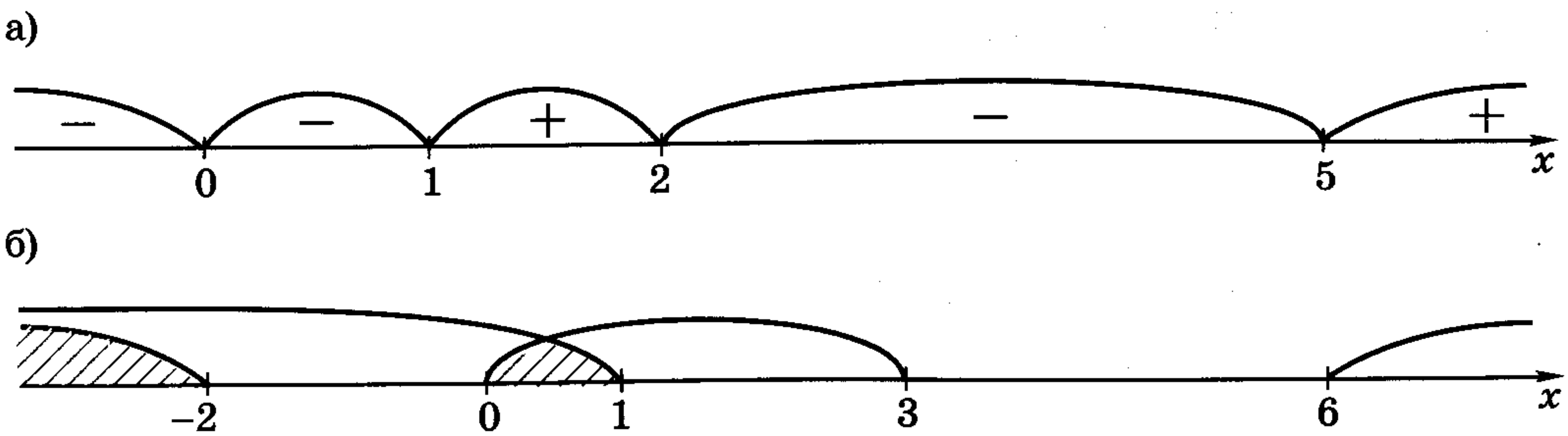


Рис. 114

Замечание.

Если сократим дробь в неравенстве (8) на x^2, то получим неравносильное неравенство $\frac{(x-1)(x-2)}{x-5}<0$.

Пример 2.

Решим систему неравенств $\begin{cases} \frac{2x^2-7x+8}{x^2+2}>1, \\ x^3-x^2-6x\leqslant 0. \end{cases}$

Решение. Решим вначале неравенство $\frac{2x^2-7x+8}{x^2+2}>1$. Оно равносильно неравенству $\frac{x^2-7x+6}{x^2+2}>0$. Решая это неравенство методом промежутков, находим его решение: $(-\infty;\ 1)\cup(6;\ +\infty)$.

Решением неравенства $x^3-x^2-6x\leqslant 0$ является объединение промежутков $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ 3]$.

Изобразим эти множества на числовой оси (рис. 114, *б*).

Общей частью является объединение промежутков $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ 1)$.

Ответ: $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ 1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

77. Решите неравенство:

а) $(5x-2)(4x+3)(x-3)\geqslant 0$;
б) $(3x^2-5x+8)(x+4)<0$;
в) $(x^2-1)^3(3x^2+1)>(x^2-1)^3(6-3x-5x^2)$;
г) $(x^2-2)(x^2+4)\leqslant(2x^2-5)(x^2+4)$.

78. Решите неравенство:

а) $(x^2-4x+3)(3x^2-2x-1)\geqslant 0$;
б) $(x^2+x)^2(x^4-4x^3+4x^2)\leqslant 0$;
в) $x^4+2x^3>2x+1$;
г) $x^5+x^3<x^2+1$;
д) $x^4-2x^2-3\geqslant 0$;
е) $x^8+3x^4\leqslant 4$.

79. Решите неравенство:

а) $(x^2+x+3)(x^2+x+4)>12$;
б) $9x^3-18x^2>x-2$;
в) $x^4+2x<2x^3+1$;
г) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)\geqslant -15$.

80. Будут ли равносильны неравенства:

а) $\frac{x^3-1}{3x-5}\geqslant 0$ и $(x^3-1)(3x-5)\geqslant 0$;
б) $\frac{2x-1}{5-x}\geqslant 1$ и $2x-1\geqslant 5-x$;

в) $(x^2+1)(x^2+x-5)>(x^2+1)x$ и $x^2+x-5>x$;

г) $\dfrac{x^4-2x^2}{3x^2-x^5}<0$ и $\dfrac{x^2-2}{3-x^3}<0$;

д) $\dfrac{3x^4+x}{(3x^3+1)(x^2-4)}>0$ и $\dfrac{x}{x^2-4}>0$?

81. Решите неравенство:

а) $\dfrac{(x^2-9)(x-2)}{x^2+2x-3}\geqslant 0$;

1) (1; 2); 2) [3; +∞); 3) [1; +∞); 4) (1; 2]∪[3; +∞);

б) $\dfrac{x+1}{1-x}+\dfrac{x-1}{x}<2$;

в) $\dfrac{5x(2x+1)}{x+2}<\dfrac{(7x-6)(2x+1)}{x-3}$;

г) $\dfrac{(x^2-5x-6)(3x^2-2x-1)}{5-x}\leqslant\dfrac{(x^2-5x-6)(2+2x-4x^2)}{5-x}$;

д) $\dfrac{12}{x^2+2x}-\dfrac{3}{x^2+2x-2}>1$;

е) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}>\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}+1$.

82. Решите неравенство:

а) $|x-6|\leqslant|x^2-5x+2|$;

б) $|2x+3|<|x|-4x+1$;

в) $\dfrac{2x^2+15x-10|2x+3|+32}{2x^2+3x+2}<0$.

83. Для каких значений x график функции $(2-3x)^3+(2+3x)^3$ находится в верхней полуплоскости?

84. Для каких значений a график функции x^2-ax+5 расположен выше прямой $y=1$? **1) [−1; 1]; 2) (0; 4); 3) (−2; 2); 4) (−4; 4).**

85. Найдите все значения a, при которых для всех $|x|\leqslant 1$ выполняется неравенство $\dfrac{ax-a(1-a)}{x-1}<0$.

1) (−∞; 0); 2) (2; +∞); 3) (0; 2); 4) (−∞; 0)∪(2; +∞).

15. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Иногда встречаются задачи, в которых требуется доказать справедливость некоторого неравенства на заданном множестве или при некоторых условиях, налагаемых на переменную и другие элементы неравенства. При выполнении задания «Доказать неравенство $f(x)\geqslant\varphi(x)$» стараются доказать, что это неравенство является следствием некоторых неравенств, имеющих место для всех x (например, $P^2(x)\geqslant 0$).

Пример 1.

Доказать неравенство $x^4 - 7x^2 > 2x - 20$.

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству $x^4 - 7x^2 - 2x + 20 > 0$. Перепишем это неравенство в виде

$$(x^4 - 8x^2) + (x^2 - 2x) + 20 > 0.$$

Выделяя в скобках полный квадрат, получим равносильное неравенство

$$(x^2 - 4)^2 + (x - 1)^2 + 3 > 0,$$

которое выполняется при любом значении x, так как $(x^2 - 4)^2 \geqslant 0$, $(x - 1)^2 \geqslant 0$ при всех x. Следовательно, и исходное неравенство выполняется при любых значениях x.

Приведем теперь примеры, когда требуется доказать, что данное неравенство выполняется при некоторых условиях.

Пример 2.

Докажем неравенство $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot y}$ для всех $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Решение. Так как по условию $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $x = (\sqrt{x})^2$ и $y = (\sqrt{y})^2$. Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \geqslant 2\sqrt{xy}$, или $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$, выполнение которого очевидно. Тем самым исходное неравенство доказано.

Пример 3.

Докажем, что для всех $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}.$$

Решение. Так как $x = (\sqrt[3]{x})^3$, $y = (\sqrt[3]{y})^3$, $z = (\sqrt[3]{z})^3$, то исходное неравенство можно переписать в виде

$$(\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 + (\sqrt[3]{z})^3 \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z}.$$

Если обозначить $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$, $c = \sqrt[3]{z}$, то получим неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant 0.$$

Выражение в левой части неравенства можно рассматривать как многочлен третьей степени переменной a. Этот многочлен делится на $a + b + c = a - (-b - c)$. В самом деле, по схеме Горнера имеем:

	1	0	$-3bc$	$b^3 + c^3$
$-b-c$	1	$-b-c$	$b^2 - bc + c^2$	0

Поэтому

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2)=$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2\right).$$

Отсюда видим, что при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0,$$

а значит, выполняется и равносильное ему исходное неравенство.

Заметим, что число $\frac{x+y}{2}$ называют *средним арифметическим* чисел x и y, а число $\sqrt{xy}$ называют их *средним геометрическим.* Таким образом, в примерах 2 и 3 установлены следующие факты:

среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического;

среднее арифметическое трех неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел.

УПРАЖНЕНИЯ

86. Докажите, что при всех значениях x справедливо неравенство

$$x^4-6x^3+13x^2-12x+4>0.$$

87. Докажите, что для всех $x>0$ выполняется неравенство

$$x^4-2x^2+4x+3>0.$$

88. Каково должно быть k, чтобы неравенство

$$\left|\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

выполнялось при любом значении x?

89. Докажите, что при $a>0$ и $b>0$ выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}.$$

90. Докажите, что если $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$, $x_4\geqslant 0$, то

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

91. Представьте положительное число m в виде суммы двух слагаемых x и y так, чтобы их произведение $x\cdot y$ оказалось наибольшим.

92. Положительное число p разложите на два положительных сомножителя x и y так, чтобы их сумма $x+y$ была наименьшей.

§ 5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

16. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу.

Задача.

Найдите длины сторон прямоугольника, если известно, что длина его диагонали равна 25 см, а его периметр равен 70 см.

Решение. Обозначим длину одной из сторон прямоугольника x, тогда длина другой стороны по теореме Пифагора равна $\sqrt{625-x^2}$. Так как по условию периметр прямоугольника равен 70 см, то приходим к уравнению

$$2x+2\sqrt{625-x^2}=70.$$

Это уравнение содержит переменную x под знаком радикала. Такие уравнения называют иррациональными.

Определение 1. Уравнение с одной переменной

$$f(x)=\varphi(x) \qquad (1)$$

называют *иррациональным*, если хотя бы одна из функций $f(x)$ или $\varphi(x)$ содержит переменную x под знаком радикала.

Например,

$$\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}=5, \quad \frac{x+\sqrt{x}}{x-1}=\frac{1}{x^2-1}$$

являются иррациональными уравнениями, а уравнение

$$\sqrt{5}\,x^2+3x-\sqrt{a^2+b^2}=0$$

является целым рациональным уравнением, хотя и содержит в своей записи знак радикала.

Понятие корня уравнения (его решения) для иррациональных уравнений определяют так же, как и для рациональных.

При решении иррациональных уравнений используют тождественные преобразования иррациональных выражений, подробно рассмотренные нами в главе V и главе IX, а также изученные в п. 7 этой главы методы разложения на множители и введения новой переменной. Кроме этого, применяют метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень, т. е. уравнение $f(x)=\varphi(x)$ заменяют уравнением $f^n(x)=\varphi^n(x)$.

Этот метод основан на следующей теореме:

Теорема. Если возвести обе части уравнения (1) в натуральную степень n, то полученное уравнение

$$f^n(x)=\varphi^n(x) \tag{2}$$

является следствием уравнения (1).

Доказательство.

Если выполняется числовое равенство $f(a)=\varphi(a)$, то по свойствам степени выполняется и равенство $f^n(a)=\varphi^n(a)$, т. е. каждый корень уравнения (1) является и корнем уравнения (2). Это и означает, что уравнение (2) есть следствие уравнения (1).

Заметим, что если n нечетное, т. е. $n=2k-1$, то справедлива и обратная теорема. В этом случае уравнения (1) и (2) равносильны. При четном n, т. е. $n=2k$, равенство $f^{2k}(a)=\varphi^{2k}(a)$ справедливо, если выполняется хотя бы одно из равенств $f(a)=\varphi(a)$ и $f(a)=-\varphi(a)$. Значит, уравнения (1) и (2) в этом случае не равносильны. Поэтому если в ходе решения иррационального уравнения $f(x)=\varphi(x)$ приходилось возводить обе его части в степень с четным показателем, то могли появиться посторонние корни. Чтобы отделить их, следует проверить найденные корни, подставив в исходное уравнение.

Пример 1.

Решим уравнение $2x+2\sqrt{625-x^2}=70$.

Решение. Уединим радикал $\sqrt{625-x^2}$ в левой части:

$$\sqrt{625-x^2}=35-x.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение-следствие $625-x^2=(35-x)^2$.

Решая его, находим корни $x_1=15$, $x_2=20$. Подставив найденные числа в исходное уравнение, убеждаемся, что посторонних корней нет.

Ответ: $\{15; 20\}$.

Заметим, что при решении уравнения

$$\sqrt[2k]{f(x)}=\varphi(x) \tag{3}$$

можно избежать проверки, вводя дополнительное требование $\varphi(x)\geqslant 0$. В этом случае уравнение (3) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=\varphi^{2k}(x), \\ \varphi(x)\geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

В системе (4) отсутствует требование $f(x)\geqslant 0$, обеспечивающее существование корня степени $2k$, так как оно было бы излишним в связи с равенством $f(x)=\varphi^{2k}(x)$.

Пример 2.

Решим уравнение $\sqrt{3+x}=3-x$.

Решение. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3+x=(3-x)^2, \\ 3-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $3+x=(3-x)^2$ являются числа $x_1=1$ и $x_2=6$. Число $x_2=6$ — посторонний корень.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 3.

Решим уравнение $\sqrt[4]{x^2-2x+3}=a$.

Решение. Это — иррациональное уравнение с одним параметром a. Если $a<0$, то в силу определения корня четной степени равенство $\sqrt[4]{x^2-2x+3}=a$ невозможно ни для какого значения x. Если же $a\geqslant 0$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$x^2-2x+3=a^4.$$

По формулам вычисления корней квадратного уравнения имеем $x_{1,2}=$ $=1\pm\sqrt{a^4-2}$. Значит, уравнение имеет действительные корни, если неотрицательный параметр a удовлетворяет неравенству $a^4\geqslant 2$, или $a\geqslant\sqrt[4]{2}$.

Ответ: при $a<\sqrt[4]{2}$ уравнение не имеет действительных корней, при $a>\sqrt[4]{2}$ имеет действительные корни $x_{1,2}=1\pm\sqrt{a^4-2}$, при $a=\sqrt[4]{2}$ имеет действительный корень $x=1$ (кратности 2).

Пример 4.

Решим уравнение $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{3x+5}$.

Решение. Чтобы освободиться от радикалов, возведем обе части уравнения в шестую степень. Получим уравнение-следствие

$$(x+3)^3=(3x+5)^2.$$

Возведем в степень и перенесем все члены в левую часть, получим

$$x^3-3x+2=0.$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, получим

$$(x-1)(x^2+x-2)=0.$$

Находим корни этого уравнения $x_{1,2}=1$, $x_3=-2$. Подставляя найденные числа в исходное уравнение, видим, что $x_3=-2$ — посторонний корень. Поэтому данное уравнение имеет один действительный корень $x=1$.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 5.

Решим уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в третью степень, получим равносильное уравнение

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1.$$

Выражение в скобках является левой частью исходного уравнения. Заменив его числом 1, получим уравнение-следствие

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1, \text{ или } \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x.$$

Возведя последнее уравнение в третью степень, получим равносильное ему уравнение

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3.$$

Решая его, находим $x_1=0$, $x_2=1$. Так как в процессе решения был переход к уравнению-следствию, то возможно появление посторонних корней. Подставляя $x_1=0$, $x_2=1$ в исходное уравнение, обнаруживаем, что $x_1=0$ — посторонний корень.

Ответ: $\{1\}$.

Заметим, что это уравнение можно решить, используя монотонность функции $\sqrt[3]{x}$. Непосредственной подстановкой в уравнение легко обнаружить, что $x=1$ является его корнем. Так как функция $\sqrt[3]{x}$ возрастает на числовой оси, то возрастают и функции $\sqrt[3]{2x-1}$ и $\sqrt[3]{x-1}$. Следовательно, функция $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$ возрастает на всей числовой оси как сумма возрастающих функций. Значит, график этой функции лишь один раз может пересечь прямую $y=1$, т. е. исходное уравнение может иметь лишь один корень $x=1$.

Пример 6.

Решим уравнение $\sqrt[3]{x+2}+2\sqrt[6]{x+2}=3$.

Решение. Для освобождения от радикалов необходимо обе части уравнения возвести в шестую степень. Поступим иначе. Введем новую переменную $y=\sqrt[6]{x+2}$, тогда $\sqrt[3]{x+2}=y^2$. Выполнив подстановку, получим уравнение $y^2+2y-3=0$. Корни этого уравнения $y_1=-3$, $y_2=1$.

Так как $y=\sqrt[6]{x+2}\geqslant 0$, то берем только значение $y_2=1$. Теперь осталось решить уравнение $\sqrt[6]{x+2}=1$, откуда $x=-1$.

Ответ: $\{-1\}$.

Пример 7.

Рассмотрим еще один способ решения уравнения

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$$

Решение. Введем новые переменные, обозначив

$$u=\sqrt[3]{2x-1},\ v=\sqrt[3]{x-1}.$$

Тогда $u^3-2v^3=1$. Так как по условию $u+v=1$, то получаем систему двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^3-2v^3=1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $u=1-v$ и подставляем во второе уравнение. Получаем

$$3v^3-3v^2+3v=0, \text{ или } 3v(v^2-v+1)=0.$$

Так как дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, то уравнение имеет единственный корень $v_1=0$. Тогда $u_1=1-v_1=1$. Осталось решить совокупность уравнений

$$\sqrt[3]{x-1}=0 \text{ и } \sqrt[3]{2x-1}=1.$$

Оба уравнения имеют единственный корень $x=1$.

УПРАЖНЕНИЯ

93. Выясните, какие из уравнений равносильны:

а) $\sqrt{3x-5}=3$ и $3x-5=9$;

б) $\sqrt[5]{1-3x}=-1$ и $1-3x=-1$;

в) $\sqrt[4]{x-2}=x$ и $x-2=x^4$;

г) $\sqrt[3]{3x-7}=2x$ и $3x-7=8x^3$.

94. Найдите область допустимых значений уравнения:

а) $\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}=1$;

б) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{2-x}=0$;

в) $\sqrt{4x+7}+\sqrt{3-4x+x^2}=0$.

95. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $2\sqrt{x^3-4x^2+1}+\sqrt{x^2(x+1)^3}=-5$;

б) $\sqrt{4-x^2}\sqrt{x^2-49}\,(x+4)=0$;

в) $\sqrt[6]{1-x}=\sqrt[3]{x-2}$;

г) $(x+1)(5-x)(\sqrt{x-8}+2)=4$.

96. Решите уравнение:

а) $\sqrt[4]{x^2-7}=\sqrt{2}$; в) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$; д) $\sqrt{5-|1-x^2|}=2$.

б) $\sqrt[4]{6-x^2}=x$; г) $\sqrt[3]{1-x^2}=\sqrt{x+1}$;

97. Решите уравнение:

а) $3x-10\sqrt{x+1}+6=0$; г) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$;

б) $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$; д) $\sqrt{3x-1}-\sqrt[4]{3x+19}=0$;

в) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$; е) $\sqrt{5+|x-2|}=1-x$.

98. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}=2$; в) $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{5}$;

б) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$; г) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=\sqrt{4x+23}$;

д) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0$;

е) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

99. Решите уравнение, применив подходящую замену переменной:

а) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=2$; $\boxed{\text{г)}}$ $\sqrt{x^2-3x+7}=3x+(x-3)^2-22$;

б) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=3$; $\boxed{\text{д)}}$ $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$;

$\boxed{\text{в)}}$ $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$; $\boxed{\text{е)}}$ $\dfrac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$.

100. Решите уравнение, содержащее параметр a:

а) $x+\sqrt{x}=a$; в) $\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{a+x}}+\sqrt[3]{\dfrac{a+x}{a-x}}=2$.

б) $\sqrt{x^2+4ax+4a^2}+1=a$;

101. Решите уравнение, используя свойство монотонности функций:

а) $\sqrt{x^2+4x+1}=x^3+2x+1$; $\boxed{\text{г)}}$ $\sqrt[3]{76+x}-\sqrt[3]{76-x}=2$;

б) $\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[4]{81+x}=5$; 1) 25; 2) 50; 3) 40; 4) 49.

в) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}+2\sqrt{x^2+7x}=3-2x$;

17. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении рациональных неравенств мы пользовались следующими утверждениями:

а) решение неравенства не изменится, если перенести какое-нибудь слагаемое в другую часть, изменив его знак на противоположный;

б) решение неравенства не изменится, если умножить обе части этого неравенства на одно и то же положительное число; при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число надо поменять знак неравенства на противоположный.

С помощью этих утверждений мы переходим к более простым — равносильным неравенствам.

В этом параграфе рассмотрим решение иррациональных неравенств, т. е. неравенств, в которых неизвестное содержится под знаком радикала. Простейшие иррациональные неравенства имеют вид:

$$\sqrt[n]{f(x)}>a,\ \sqrt[n]{f(x)}<a,\ \sqrt[n]{f(x)}<\varphi(x),\ \sqrt[n]{f(x)}>\varphi(x),$$
$$\sqrt[n]{f(x)}<\sqrt[n]{\varphi(x)},\ \sqrt[n]{f(x)}>\sqrt[n]{\varphi(x)}.$$

При решении этих неравенств, кроме утверждений «а» и «б», сформулированных выше, будут применяться следующие утверждения:

Теорема 1. Если обе части неравенства возвести в степень с нечетным показателем, оставив знак неравенства без изменения, то полученное неравенство равносильно исходному.

Теорема 2. Если обе части неравенства возвести в четную степень, оставив знак неравенства без изменения, то полученное неравенство равносильно исходному лишь в том случае, когда каждая часть этих неравенств неотрицательна.

Доказательство этих теорем основано на свойствах степеней и корней, доказанных в главе IX. Докажем, например, теорему 2.

Пусть дано неравенство $f(x)<\varphi(x)$, где $f(x)\geqslant 0$ и $\varphi(x)\geqslant 0$, и пусть значение $x=a$ входит в решение данного неравенства, тогда

$$0\leqslant f(a)<\varphi(a). \qquad (1)$$

Так как функция x^n возрастает на луче $[0;\ +\infty)$ для любого натурального показателя n, то из неравенства (1) следует

$$0\leqslant f^{2k}(a)<\varphi^{2k}(a). \qquad (2)$$

Значит, решение неравенства (1) является решением неравенства (2). Верно и обратное. Если выполняется неравенство (2), то в силу возрастания функции $\sqrt[2k]{x}$ на луче $[0;\ +\infty)$ и того, что $\sqrt[2k]{x^{2k}}=x$, следует выполнение неравенства (1). Значит, решение неравенства (2) является решением неравенства (1). Это и означает, что неравенства $f(x)<\varphi(x)$ и $f^{2k}(x)<\varphi^{2k}(x)$ равносильны.

Если же хотя бы одна из функций $f(x)$, $\varphi(x)$ принимает отрицательные значения, то равносильность нарушается. Например, неравенство $x+2>-2$ имеет решение $x>-4$, т. е. множество $(-4;\ +\infty)$. Если исходное неравенство возвести в квадрат, то полученное неравенство $(x+2)^2>4$ имеет решение $x<-4$ или $x>0$, т. е. множество $(-\infty;\ -4)\cup(0;\ +\infty)$. В этом случае возведение в квадрат привело к неравенству, не равносильному исходному.

Пример 1.

Решим неравенство $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}>-1$.

Решение. Возводя обе части неравенства в третью степень, получим равносильное (теорема 1) неравенство

$$\frac{x+1}{x}>-1.$$

Решая полученное рациональное неравенство, находим его решение:

$$x<-\frac{1}{2} \text{ или } x>0.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup(0;\ +\infty)$.

Пример 2.

Решим неравенство: а) $\sqrt[4]{5x-4}\geqslant 2$; б) $\sqrt{3x+2}<4$.

Решение. а) При условии $5x-4\geqslant 0$ обе части неравенства существуют и неотрицательны. Поэтому после возведения их в четвертую степень получим равносильное неравенство

$$5x-4\geqslant 16. \qquad (3)$$

Обратим внимание, что если выполняется неравенство (3), то тем более выполняется неравенство $5x-4\geqslant 0$. Решая неравенство (3), находим $x\geqslant 4$.

Ответ: $[4;\ +\infty)$.

б) При условии $3x+2\geqslant 0$ обе части неравенства существуют и неотрицательны. Однако в этом примере после возведения в квадрат получаем неравенство $3x+2<16$, которое не обеспечивает неотрицательность выражения $3x+2$, т. е. существование $\sqrt{3x+2}$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x+2\geqslant 0, \\ 3x+2<16. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $-\dfrac{2}{3}\leqslant x<\dfrac{14}{3}$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3};\ \frac{14}{3}\right)$.

Пример 3.

Решим неравенство: а) $\sqrt{x^2+x-6}>-1$; б) $\sqrt[4]{7-2x}<-5$.

Решение. а) Так как функция $\sqrt{x^2+x-6}$ принимает только неотрицательные значения во всей своей области определения, то исходное неравенство выполняется для всех x из области определения функции $\sqrt{x^2+x-6}$, т. е. равносильно неравенству $x^2+x-6\geqslant 0$.

Решая это неравенство, находим $x\leqslant -3$ или $x\geqslant 2$.

Ответ: $(-\infty; -3]\cup[2; +\infty)$.

б) Решением неравенства $\sqrt[4]{7-2x}<-5$ является пустое множество, так как ни при каком значении x корень четной степени не может быть отрицательным числом.

Ответ: $\varnothing$.

Итак, при решении неравенств вида $\sqrt[2k]{f(x)}>a$ имеем:

1) если $a\geqslant 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$f(x)>a^{2k};$$

2) если $a<0$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$f(x)\geqslant 0.$$

При решении неравенств вида $\sqrt[2k]{f(x)}<a$ имеем:

1) если $a>0$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ f(x)<a^{2k}; \end{cases}$$

2) если $a\leqslant 0$, то решением исходного неравенства является пустое множество.

Пример 4.

Решим неравенство $\sqrt{7-2x}>x-2$.

Решение. В предыдущих примерах мы видели, что решение таких неравенств зависит от знака правой части. Поэтому рассмотрим два случая: 1) $x-2\geqslant 0$; 2) $x-2<0$.

1) Пусть $x-2\geqslant 0$. При условии $7-2x\geqslant 0$ обе части исходного неравенства существуют и неотрицательны. Возведем обе части исходного неравенства в квадрат. Тогда оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 7-2x>(x-2)^2, \\ x-2\geqslant 0. \end{cases}$$

Отметим, что условие $7-2x\geqslant 0$ обеспечивается первым неравенством системы. Решая полученную систему неравенств, находим $2\leqslant x<3$, т. е. решение системы неравенств — промежуток $[2; 3)$.

2) Пусть теперь $x-2<0$. Тогда в силу неотрицательности $\sqrt{7-2x}$ исходное неравенство выполняется для всех значений x, при которых существует $\sqrt{7-2x}$. Значит, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x-2<0, \\ 7-2x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является промежуток $(-\infty;\ 2)$. Осталось объединить решения, полученные в обоих случаях: $(-\infty;\ 2) \cup [2,\ 3)$.

Ответ: $(-\infty;\ 3)$.

Итак, неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 5.

Решим неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} < 5-x$.

Решение. Так же как и в предыдущем примере, рассмотрим два случая:

1) Пусть $5-x>0$. При условии существования квадратного корня: $x^2-3x+2 \geqslant 0$ — обе части исходного неравенства неотрицательны. Возведем их в квадрат. Получим систему неравенств

$$\begin{cases} 5-x>0, \\ x^2-3x+2 \geqslant 0, \\ x^2-3x+2 < (5-x)^2, \end{cases}$$

которая равносильна исходному неравенству. Решая эту систему, находим $x \leqslant 1$ или $2 \leqslant x < \frac{23}{7}$, т. е. решением этой системы является множество $(-\infty;\ 1] \cup \left[2;\ \frac{23}{7}\right)$.

2) Пусть теперь $5-x \leqslant 0$. Так как квадратный корень принимает только неотрицательные значения, то ни при каких значениях x он не может быть меньше нуля. Следовательно, решением исходного неравенства будет множество, полученное в первом случае.

Ответ: $(-\infty;\ 1] \cup \left[2;\ \frac{23}{7}\right)$.

В общем случае неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x)$ равносильно системе трех неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < \varphi^{2k}(x). \end{cases}$$

Отметим, что решение неравенства $\sqrt[2k]{f(x)}>\sqrt[2k]{\varphi(x)}$ сводится к решению равносильной системы неравенств

$$\begin{cases} f(x)>\varphi(x), \\ \varphi(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

102. Решите иррациональное неравенство:

а) $\sqrt{x-3}<5$; б) $\sqrt{2x+3}>3$; в) $\sqrt[3]{9-x}\leqslant 2$; г) $\sqrt[4]{3-5x}<-2$; д) $\sqrt{x^2-x}>\sqrt{2}$; е) $\sqrt{4x-x^2}\leqslant 2$; ж) $\sqrt[3]{1-2x^2}>-3$; з) $\sqrt[4]{6x-x^2}\geqslant -5$; и) $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{3x+6}}>1$; к) $\sqrt[5]{\dfrac{2x-2}{3x+6}}<1$; л) $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-1$; м) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}>1$.

103. Решите иррациональное неравенство:

а) $\sqrt{2x-3}>x$; б) $\sqrt{4x+5}<x$; в) $\sqrt[3]{2x-1}<x-1$; г) $\sqrt{5-2x}<6x-1$; д) $\sqrt{x^2}>x+1$; е) $\sqrt{x+18}<2+x$; ж) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$; з) $\sqrt{x^2+3x+3}<2x+1$; и) $\sqrt[3]{x^2+1}>x+1$; к) $\sqrt{(x+4)(x+3)}>6-x$.

104. Решите иррациональное неравенство:

а) $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x-1}$; б) $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}$; в) $\sqrt{2x^2-3x-5}<\sqrt{x-1}$; $\boxed{\text{г)}}$ $\sqrt[3]{x^2+3x+3}<\sqrt[3]{2x+4}$; $\boxed{\text{д)}}$ $\sqrt[5]{x^2-4x}>\sqrt[5]{3-2x}$; е) $2\sqrt{2x+1}>3\sqrt{-x^2-x+6}$.

105. Решите неравенство, содержащее параметр:

а) $\sqrt[4]{x+a}\geqslant 2$; б) $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1$; $\boxed{\text{в)}}$ $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x$; $\boxed{\text{г)}}$ $\sqrt[3]{a+x^3}-x<\sqrt[3]{a}$.

106. Решите неравенство:

а) $\sqrt{3-|x|}>x$; б) $\sqrt{4x+5}>|x-1|$; $\boxed{\text{в)}}$ $\sqrt[3]{x^2-4|x|}>\sqrt[3]{|3-2x|}$.

18. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Графически решение неравенства $F(x, y)>0$ можно изобразить множеством точек координатной плоскости. Для этого (см. главу VII, п. 5) проводят линию $F(x, y)=0$, которая разбивает плоскость на части, в каждой из которых выражение $F(x, y)$ сохраняет знак. Используя метод пробных точек, устанавливают знак выражения $F(x, y)$ в каждой части и заштриховывают ту часть, в которой знак соответствует исходному неравенству.

Пример 1.

Изобразим графически решение неравенства $x^2+y^2-2x+6y+6<0$.

Решение. Построим сначала линию $x^2+y^2-2x+6y+6=0$. Для этого, используя выделение полного квадрата, перепишем уравнение в виде $(x-1)^2+(y+3)^2=4$. Это — уравнение окружности с центром $A(1; -3)$ и радиусом 2 (рис. 115). Она делит координатную плоскость на две части. Возьмем в качестве пробной точку $A(1; -3)$ и подставим ее координаты в исходное неравенство. Так как $(1-1)^2+(-3+3)^2=0<4$, то во внутренней части исходное неравенство выполняется. Во внешней части выберем пробную точку $B(0; 1)$. Для нее имеем $(0-1)^2+(1+3)^2=17>4$. Отсюда следует, что во внешней части исходное неравенство не выполняется. Заштрихованная часть на рисунке 115 является изображением решения исходного неравенства.

Пример 2.

Изобразим графически решение неравенства $y \geqslant \sqrt{|x|+1}-2$.

Решение. Построим линию, задаваемую уравнением

$$y=\sqrt{|x|+1}-2.$$

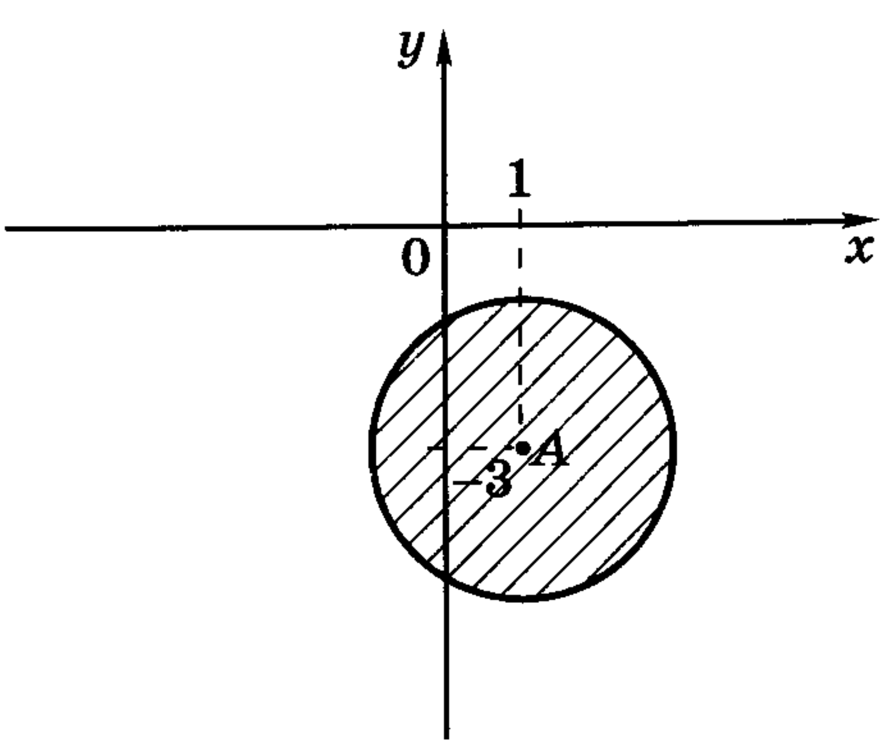


Рис. 115

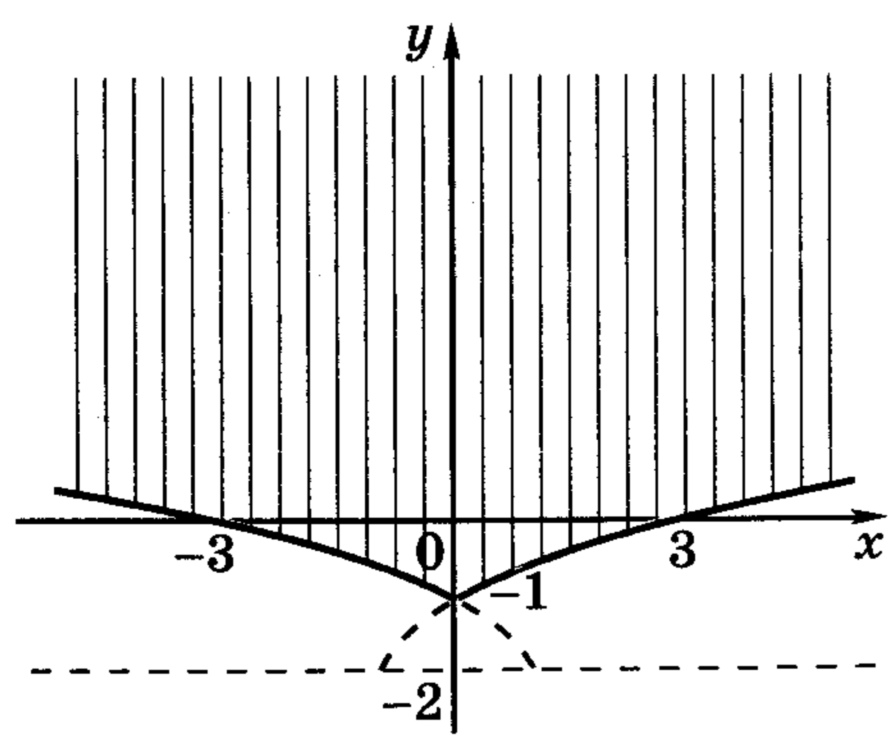


Рис. 116

Она распадается на две линии, определяемые системами

$$\begin{cases} x+1=(y+2)^2, \\ y+2\geqslant 0, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -x+1=(y+2)^2, \\ y+2\geqslant 0, \\ x<0. \end{cases}$$

Эти линии изображены на рисунке 116.

С помощью метода пробных точек устанавливаем, что исходное неравенство выполняется в части плоскости, заштрихованной на рисунке 116.

В этом примере графическое изображение решения неравенства свелось, по сути, к изображению решения системы неравенств. В общем случае для изображения решения системы неравенств находят изображения решений каждого из неравенств, входящих в систему, а затем берут пересечение этих множеств (т. е. их общую часть).

Пример 3.

Решим графически систему неравенств $\begin{cases} |x|+|y|\leqslant 2, \\ x^2+y-1\leqslant 0. \end{cases}$

Решение. Уравнение $x^2+y-1=0$ перепишем в виде $y=-x^2+1$. Это — уравнение параболы, которая получается из параболы $y=-x^2$ сдвигом на одну единицу вверх вдоль оси Oy. Взяв в качестве пробной точки начало координат $O(0;\ 0)$, убеждаемся, что неравенству $x^2+y-1\leqslant 0$ удовлетворяют все точки, расположенные ниже параболы либо на самой параболе (рис. 117, *а*). Уравнение $|x|+|y|=2$ определяет замкнутую ломаную линию $ABCD$, звенья которой задаются соответственно системами

$$AB\sim\begin{cases} x+y=2, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0; \end{cases} \quad BC\sim\begin{cases} -x+y=2, \\ y\geqslant 0, \\ x<0; \end{cases} \quad CD\sim\begin{cases} -x-y=2, \\ x<0, \\ y<0; \end{cases} \quad DA\sim\begin{cases} x-y=2, \\ x\geqslant 0, \\ y<0. \end{cases}$$

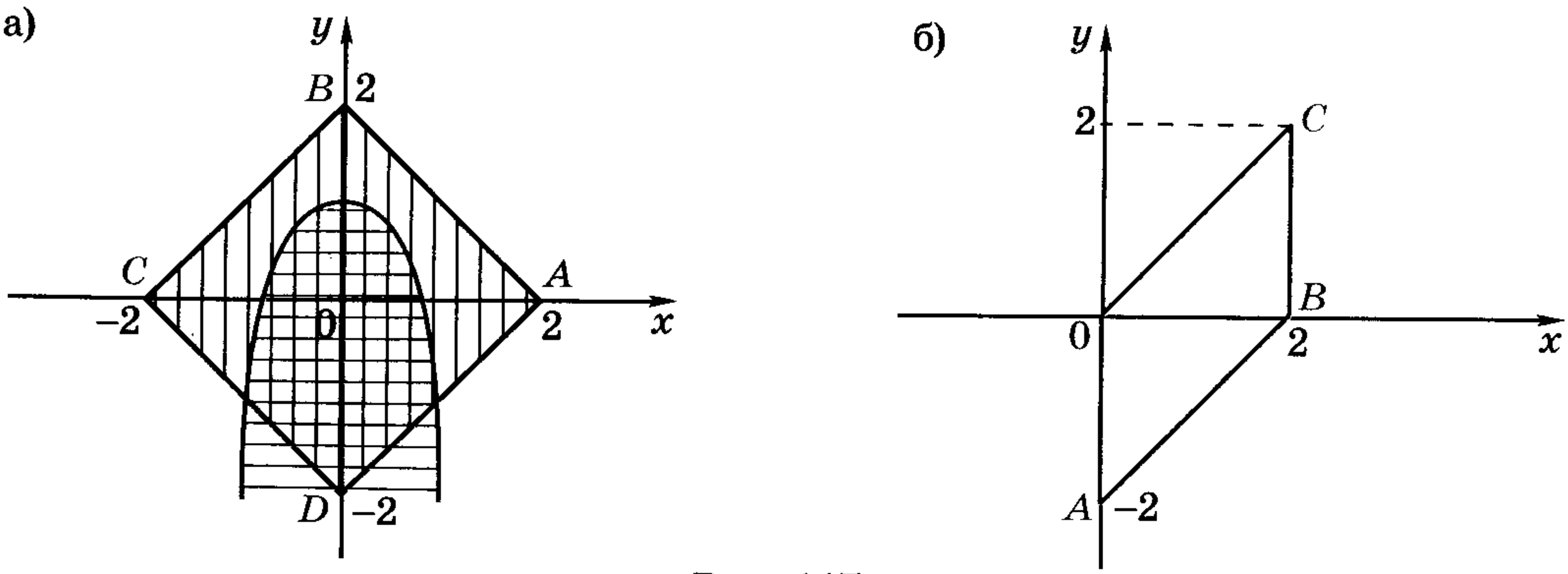


Рис. 117

Подставляя координаты точки $O(0;\ 0)$ в качестве пробной точки в неравенство $|x|+|y|\leqslant 2$, убеждаемся, что изображением решения неравенства является часть плоскости, расположенная внутри квадрата $ABCD$ и на его сторонах. Общая часть множеств, имеющая двойную штриховку, и есть изображение решения исходной системы неравенств (рис. 117, *а*).

Иногда требуется решить обратную задачу: некоторое множество точек координатной плоскости описать неравенством или системой неравенств.

Пример 4.

Опишем системой неравенств множество точек, расположенных внутри или на сторонах параллелограмма $OABC$ с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(0;\ -2)$, $B(2;\ 0)$, $C(2;\ 2)$ (рис. 117, *б*).

Решение. Уравнение стороны OA имеет вид $x=0$, стороны OC — вид $y=x$, стороны AB — вид $y=x-2$, стороны BC — вид $x=2$. На отрезке $[0;\ 2]$ все точки заданного множества расположены между сторонами AB и OC и поэтому задаются системой неравенств

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 2, \\ x-2\leqslant y\leqslant x. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

107. Изобразите графически решение неравенства:

а) $|x|-|y|\geqslant 1$;

б) $|x|+2|y|\leqslant 1$;

в) $(|x|-3)(y+1)<0$;

г) $y\geqslant\sqrt[4]{|x|+1}$;

д) $x^4<y^4$;

е) $|x|+|y|+|y-x|\leqslant 1$.

108. Изобразите графически решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} y\leqslant x+3, \\ -2\leqslant x\leqslant 2, \\ y\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y\geqslant 5, \\ x-y\leqslant 1, \\ x+2y\geqslant 7; \end{cases}$

$\boxed{\text{в)}}$ $\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 3, \\ y\geqslant \dfrac{x^2}{2}, \\ y\leqslant\sqrt{3-x^2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy\geqslant 4, \\ x+y\leqslant 5. \end{cases}$

$\boxed{\textbf{109.}}$ Задайте системой неравенств:

а) треугольник OAB с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$;

б) круговой сектор AOB с центром $O(0;\ 0)$ и концами дуг $A(2\sqrt{3};\ 1)$ и $B(2;\ 3)$.

§ 6*. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И РЫНОЧНОЕ РАВНОВЕСИЕ

1. Системы уравнений — один из самых мощных инструментов, используемых математиками при решении разнообразных задач. С геометрической точки зрения решить систему уравнений — значит найти общие точки некоторых кривых, заданных на плоскости. Именно на этом свойстве основано применение математических методов к анализу и исследованию некоторых современных экономических задач.

Рассмотрим рынок какого-либо товара.

Рынок — это место, где встречаются продавцы некоторого товара и его покупатели. Рынки бывают самые различные — рынки зерна и рынки нефти, рынки вооружения и рынки продовольствия, рынки чая, кофе и т. д. Продавцы хотят продать товар, покупатели — приобрести его. В таком случае экономисты говорят, что на рынке образовались спрос и предложение на некоторый товар.

Составим простейшую математическую модель рынка и исследуем ее. Для этого надо понять, что такое спрос, предложение и как они взаимодействуют между собой на рынке.

2. Спрос и кривая спроса. Желание и возможности покупателей приобрести товар зависят от множества причин, которые зависят от цены товара, доходов покупателей, цен на другие товары, моды и т. д. Допустим, что все перечисленные выше причины, действующие на спрос, остаются постоянными за исключением одной — цены единицы рассматриваемого товара, которая измеряется в некоторых денежных единицах (рублях, долларах, евро и т. д.). Например, 200 долларов за 1 тонну нефти, 600 рублей за упаковку пепси, 25 долларов за блок компакт-дисков и т. д.

Предположим, что каждому значению цены $p \geqslant 0$ денежных единиц за единицу товара поставлено в соответствие единственное число $q \geqslant 0$ — количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене в течение определенного промежутка времени.

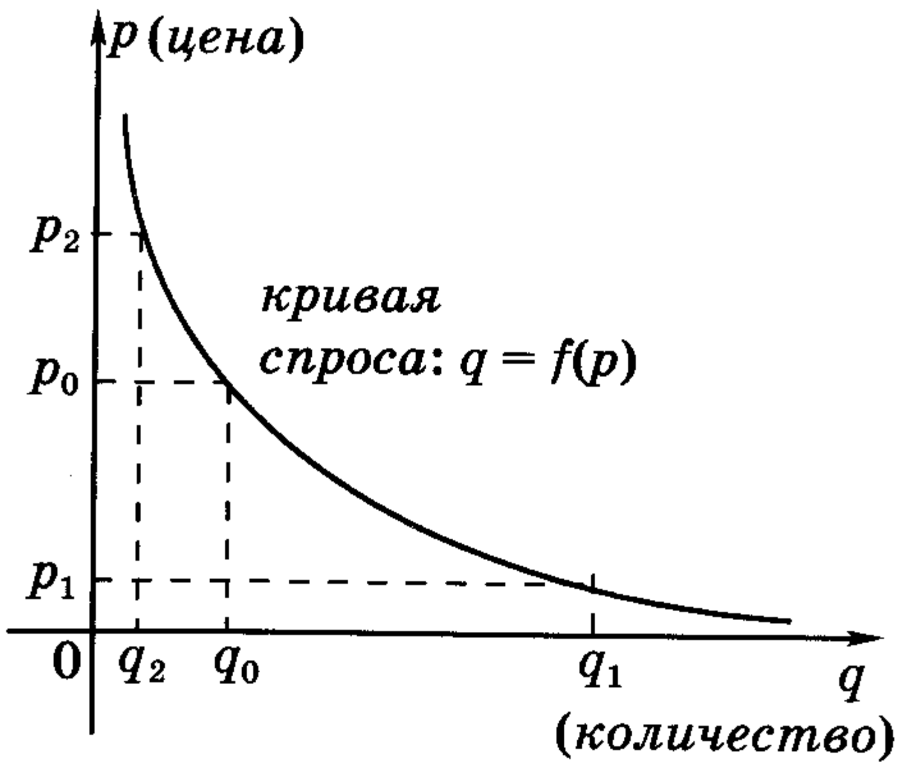


Рис. 118

В таком случае, в соответствии с общим понятием функции (гл. VIII, п. 2), математики говорят, что задана функция $q = f(p)$, которая определена только для тех значений $p \geqslant 0$, для которых $q \geqslant 0$. Построенную функцию в экономике называют **функцией спроса** или просто **спросом.** При фиксированном значении p число $q = f(p)$ называют **величиной** или **объемом спроса.** График функции $q = f(p)$ называют **кривой спро-**

са. Экономический анализ и житейский опыт позволили экономистам сформулировать принятый в экономике **закон спроса**, который гласит: **чем выше цена единицы товара, тем меньше величина спроса, и, наоборот, чем ниже цена единицы товара, тем больше величина спроса.** Из этого закона следует, что функция спроса является убывающей функцией цены, а ее график имеет такой вид, как показано на рисунке 118.

Приведем несколько примеров.

Пример 1.

Пусть известно, что функция спроса имеет вид $q=150-3p$. Найдем объем спроса при следующих ценах за единицу товара: $p_1=2$, $p_2=35$, $p_3=48$.

Решение. Подставим значения цены в функцию спроса и получим

$$q_1=150-3\cdot 2=144,\ q_2=150-3\cdot 35=45,\ q_3=150-144=6.$$

Такой результат еще раз подтверждает закон спроса: чем цена за единицу товара ниже, тем объем спроса больше, и наоборот.

Обратим внимание читателя на непривычную роль осей координат: значения аргумента p лежат на вертикальной оси, а значения функции $q=f(p)$ — на горизонтальной. Так исторически сложилось в экономике. Чтобы вернуться к привычной роли осей координат, построим новую функцию $p=\varphi(q)$, которая называется **обратной функцией** к функции $q=f(p)$ и показывает, по какой цене покупатели приобретут q единиц товара. Для того чтобы найти обратную функцию $p=\varphi(q)$, выразим p из уравнения $q=f(p)$, т. е. решим это уравнение относительно p. При этом $D(\varphi)=E(f)$ и $E(\varphi)=D(f)$.

Пример 2.

Для функции

$$q=8-\frac{8}{5}p=f(p),\ \text{где}\ p\in[0;\ 5],\ \ q\in[0;\ 8],$$

обратной будет функция

$$p=5-\frac{5q}{8}=\varphi(q).$$

Пример 3.

Для функции

$$q=3-\sqrt{1+p}=f(p),\ \text{где}\ p\in[0;\ 8],\ \ q\in[0;\ 2],$$

обратной функцией будет функция

$$p=q^2-6q+8,\ \text{где}\ p\in[0;\ 8],\ \ q\in[0;\ 2].$$

Существование обратной функции $p=\varphi(q)$ вытекает из убывания функции спроса $q=f(p)$, а из определения обратной функции следует, что если функция $p=\varphi(q)$ является обратной к функции $q=f(p)$, то функция $q=f(p)$ является обратной к функции $p=\varphi(q)$. В дальнейшем кривую спроса мы будем рассматривать или в виде $q=f(p)$, или в виде $p=\varphi(q)$. Поскольку соотношения $q=f(p)$ и $p=\varphi(q)$ выражают одну и ту же зависимость, то их графики на плоскости qOp представляют одно и то же множество точек.

Замечание.

В математике обратной функцией к функции $q=f(p)$ обычно называют функцию $q=f^{-1}(p)$, которая получается из функции $p=f^{-1}(q)$ заменой p на q и q на p. При этом одна и та же буква, например q, обозначает количество товара в соотношениях $q=f(p)$ и $p=f^{-1}(q)$ и цену за единицу продукции в соотношении $q=f^{-1}(p)$. Это может привести к некоторой путанице при рассмотрении экономических задач, и мы в дальнейшем этой замены делать не будем.

3. Предложение и кривая предложения. Наряду со спросом другим основным компонентом рынка любого товара является предложение товара к продаже. Желание и возможность продавцов предложить товар для продажи называется **предложением**. Предложение товаров на рынок, как и спрос, зависит от многих причин — доходов покупателей, цены товара, от цен на другие товары, применяемой технологии и т. д. Как и раньше, предположим, что все перечисленные выше причины, влияющие на величину предложения товара, остаются неизменными, кроме одной — цены рассматриваемого товара. Предположим, что каждому значению цены $p \geqslant 0$ денежных единиц за единицу товара поставлено в соответствие единственное число $q \geqslant 0$ — количество товара, которое продавцы готовы продать по цене p за определенный период времени. (Если при некотором значении p_0 величина $q_0=0$, то это означает, что по цене p_0 продавец товар не продаст!) В этом случае говорят, что задана функция $q=\varphi(p)$, $q \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, которая называется **функцией предложения**. Число $\varphi(p)$ при фиксированном значении q называется **величиной** или **объемом предложения**, а график функции $q=\varphi(p)$ называется **кривой предложения**. Экономический анализ и житейский опыт позволили экономистам сформулировать принятый в экономике **закон предложения**, который гласит: повышение цены за единицу товара

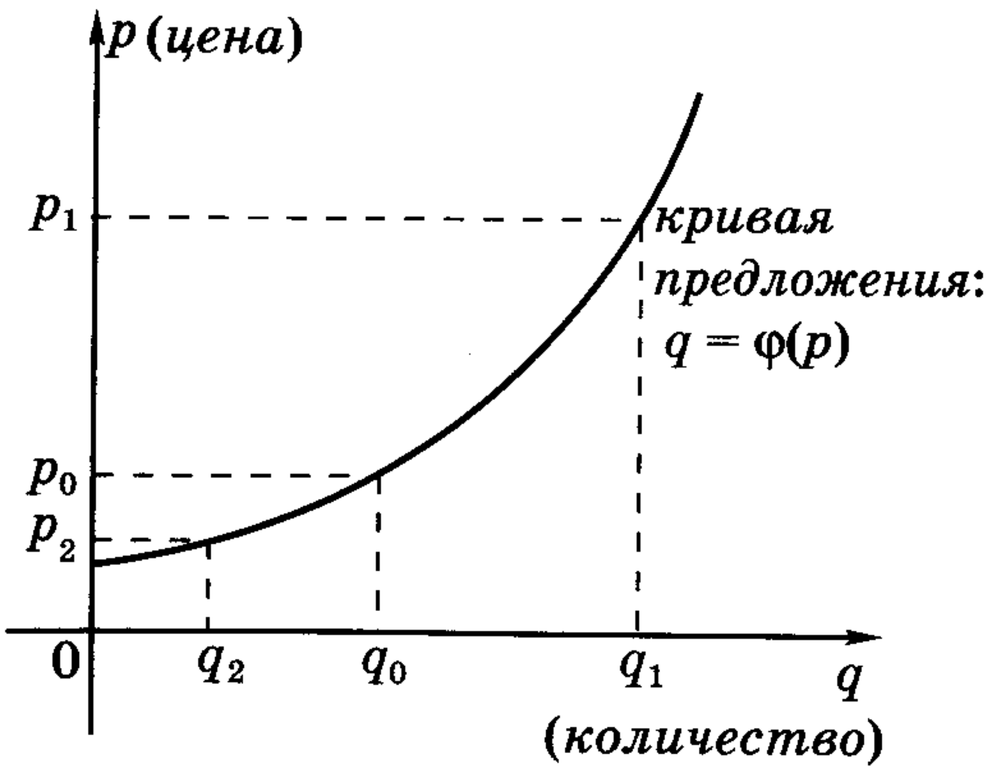


Рис. 119

влечет за собой рост объема предложения этого товара на рынок, и, наоборот, понижение цены за единицу товара приводит к сокращению объема предложения товара к продаже.

Из закона предложения следует, что если $p_1 > p_2$, то

$$q_1 = \varphi(p_1) > \varphi(p_2) = q_2,$$

т. е. функция предложения является возрастающей функцией цены (рис. 119).

Пример 4.

Изучение рынка предложения некоторого товара позволило экономистам сделать вывод, что функция предложения имеет следующий вид:

$$q = 4 + \sqrt{p - 20}.$$

Определим, какое количество товара будет предложено к продаже по цене $p_1 = 24$ денежные единицы, $p_2 = 69$ денежных единиц, $p_3 = 120$ денежных единиц.

Решение. В функцию предложения подставим последовательно p_1, p_2, p_3 и получим

$$q_1 = 4 + \sqrt{24 - 20} = 6,\ q_2 = 4 + 7 = 11,\ q_3 = 14.$$

Эти результаты подтверждают возрастание функции $q = 4 + \sqrt{p - 20}$.

Замечание.

О функции предложения можно повторить все сказанное выше о функции спроса и ей обратной. Как и для функции спроса, мы будем рассматривать функцию предложения $q = F(p)$ и ей обратную $p = F^{-1}(q)$ и пользоваться той из них, которая будет удобнее для решения задач.

4. Рыночное равновесие. Вернемся к вопросу о рынке, где встречаются покупатели и продавцы. Рассмотрим интересы покупателей и интересы продавцов, которые существенно отличаются друг от друга.

Интерес продавцов состоит в желании продать большее количество товара по более высокой цене и тем самым увеличить свою прибыль. Интересы покупателей иные — они хотят приобрести нужное им количество товара по возможно более низкой цене.

Рынок обладает замечательным свойством, примиряющим эти противоположные интересы. В экономике это свойство называют **рыночным равновесием.** Проиллюстрируем это на примере.

Пример 5.

Пусть функция предложения зерна имеет вид $q = p - 250$, а функция спроса — $q = 2250 - p$.

Выберем несколько значений цены p и вычислим для них величины предложения и спроса на товар по этой цене. Будем рассматривать рынок зерна, на котором цены за тонну зерна колеблются от 800 до 2000 р. (табл. 1).

Таблица 1

Цена за 1 тонну, р.	800	1000	1250	1500	2000
q_1 — величина предложения, т	550	750	1000	1250	1750
q_2 — величина спроса, т	1450	1250	1000	750	250
q_2-q_1 (дефицит или излишки)	+900	+500	0	−500	−1500

Рассмотрим таблицу 1.

По низкой цене в 800 р. за тонну продавцы, согласно функции предложения, предлагают к продаже всего $q_1=800-250=550$ т пшеницы, в то время как покупатели по дешевой цене, согласно функции спроса, готовы купить $q_2=2250-800=1450$ т. При этом возникает дефицит в размере $q_2-q_1=1450-550=900$ т. Это приведет к образованию очередей, появлению черного рынка и т. д. Повышение цены до 1000 р. за тонну пшеницы существенно картину не изменит: $q_1=750=1000-250$ т, $q_2=2250-1000=1225$ т и дефицит $q_2-q_1=1225-750=500$ т уменьшился, но не исчез совсем. Увеличение цены тонны пшеницы до 1500 р. существенно изменило картину: по высокой цене 1500 р. за тонну продавцы готовы поставить на рынок $q_1=1500-250=1250$ т, а спрос покупателей пшеницы составит всего $q_2=750$ т — рынок затоварен. Излишки пшеницы составляют $q_1-q_2=1250-750=500$ т — эта пшеница не будет куплена!

Особая картина создается при цене $p=1250$ р. По этой цене продавцы предлагают к продаже $q_1=1250-250=1000$ т, и столько же тонн пшеницы готовы приобрести покупатели: $q_2=2250-1250=1000$ т.

Итак, ни дефицита, ни избытка пшеницы на рынке нет — установилось рыночное равновесие! При этом соблюдены интересы и продавцов, и покупателей.

Цену $p=1250$ р. называют **равновесной ценой**, а количество $q=1000$ т — **равновесным количеством товара**. Как же находить рыночное равновесие? Из анализа таблицы следует, что при равновесной цене p_0 величины спроса $q=2250-p_0$ и предложения $q=p_0-250$ совпадают между собой, т. е. выполнимо равенство $2250-p_0=p_0-250$. Отсюда $p_0=1250$ р.

Теперь становится понятным, что если функция спроса на товар имеет вид $q=f(p)$, а функция предложения товара имеет вид

$q=\varphi(p)$, то рыночное равновесие является единственным неотрицательным решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} q=f(p), \\ q=\varphi(p),\ p>0,\ q>0. \end{cases} \quad (1)$$

Пример 6.

При исследовании деятельности фирмы было установлено, что ее функция спроса имеет вид $q=16-\frac{4}{3}p$, функция предложения — вид $q=2p-4$. Найдем рыночное равновесие, равновесную цену и равновесное количество товара.

Решение. Составим систему уравнений (1):

$$\begin{cases} q=16-\frac{4}{3}p, \\ q=2p-4. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $16-\frac{4}{3}p=2p-4$, или $p=6$.

Из второго уравнения системы следует, что $q=8$.

Вывод: равновесная цена равна 6 денежным единицам за единицу товара, и по ней покупатели приобретут 8 единиц товара.

Изобразим графически полученный результат (рис. 120).

Итак, равновесная цена единицы товара равна 6 денежным единицам, а равновесное количество равно 8 единицам товара. Интересы и продавцов, и покупателей полностью удовлетворены. Предположим, что на рынке действует единственный продавец. В экономике его называют ***монополистом***. Монополист принимает решение о повышении цены с 6 денежных единиц до 9 денежных единиц за единицу товара. Равновесная картина немедленно изменится: продавцы предложат к продаже $q_1=2\cdot 9-4=14$ единиц товара, в то

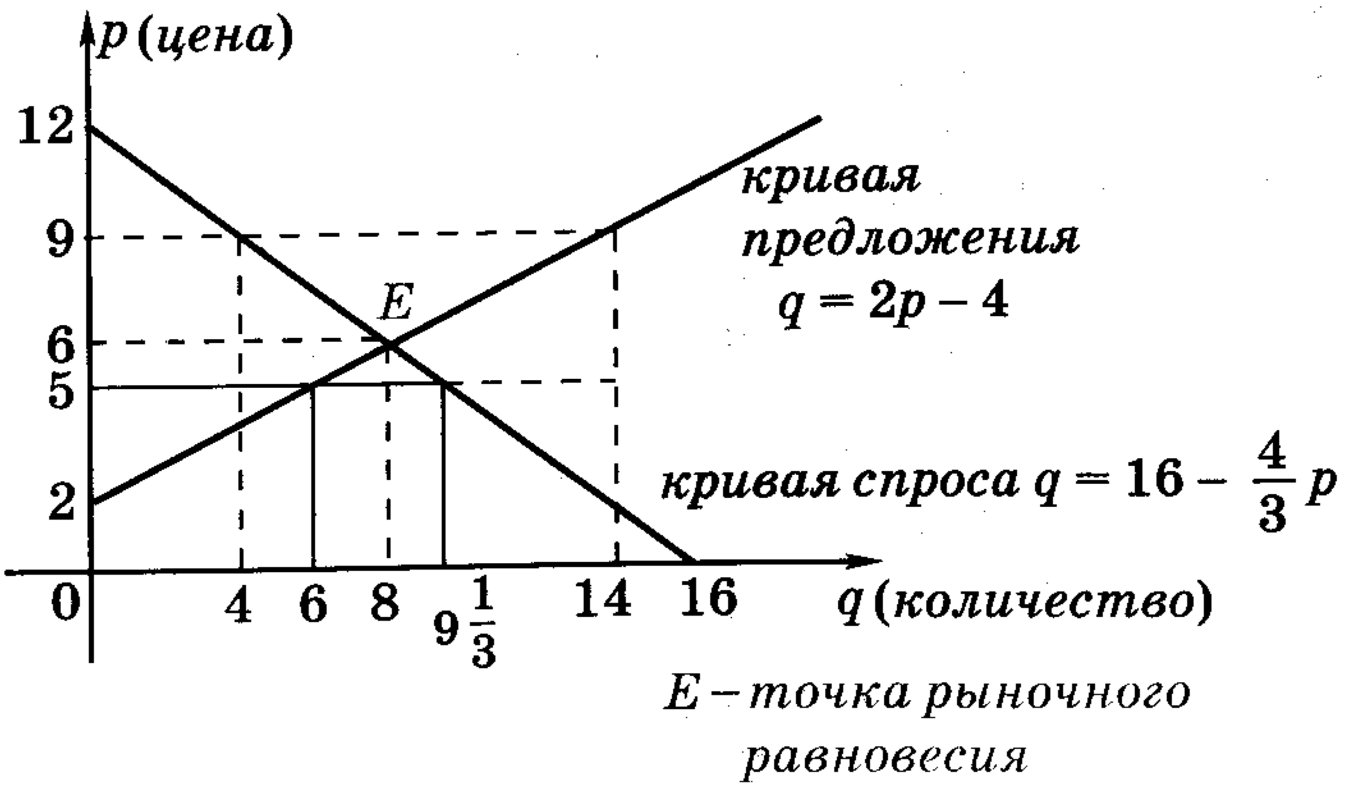


Рис. 120

время как покупатели по такой высокой цене приобретут всего $q_2 = 16 - \frac{4}{3} \cdot 9 = 4$ единицы товара. Таким образом, на рынке образуется излишек предложения, равный $14 - 4 = 10$ единицам продукции, и продавцы должны искать пути продажи этого излишка на других рынках. Теперь предположим, что в рыночную систему включилось государство, которое принимает закон о том, что выше 5 денежных единиц за единицу товара его продавать нельзя. Рынок немедленно прореагирует на это решение. По низкой цене 5 денежных единиц продавцы предложат всего $q_1 = 2 \cdot 5 - 4 = 6$ единиц товара, в то время как покупатели по низкой цене в 5 денежных единиц готовы будут приобрести $q_2 = 16 - \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$ единицы товара. На рынке возникает дефицит, равный $9\frac{1}{3} - 6 = 3\frac{1}{3}$ единицы товара. Это приведет к образованию очереди, появлению перекупщиков, возникновению черного рынка и т. д.

Пример 7.

Функции спроса и предложения некоторого товара имеют вид

$$q = \frac{23 - p}{2p + 3} \text{ и } q = -1 + 2p.$$

а) Найдем рыночное равновесие.

б) Определим, что возникает на рынке — дефицит товара или его излишек и какого размера, если цена товара «подскочила» до 5 денежных единиц.

Решение. а) Чтобы найти равновесие, решим систему уравнений (1):

$$\begin{cases} q = \dfrac{23 - p}{2p + 3}, \\ q = -1 + 2p. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $(23 - p) = (2p + 3) \cdot (2p - 1)$, или $4p^2 + 5p - 26 = 0$. Решение этого уравнения: $p_1 = 2$, $p_2 = -\frac{13}{4}$ (не подходит). При $p = 2$ значение $q = 3$, и рыночное равновесие найдено: по цене 2 денежные единицы за единицу продукции покупатели приобретут 3 единицы товара.

б) По цене $p = 5$ денежных единиц продавцы предложат к продаже $q_1 = 9$ единиц товара, в то время как покупатели по такой цене готовы приобрести только $q_2 = \frac{18}{13}$ единицы товара. Таким образом, на рынке возникает излишек товара величиной $9 - \frac{18}{13} = \frac{99}{13} = 7\frac{8}{13}$ единицы товара.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ X

110. Решите уравнение, используя разложение на множители:

а) $15x^3+x^2-2x=0$;

б) $x^3+2x^4+4x^2+2+x=0$;

$\boxed{\text{в)}}$ $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$;

$\boxed{\text{г)}}$ $x^3+9x^2+11x-21=0$;

$\boxed{\text{д)}}$ $(x^2+1)^2=4(2x-1)$;

$\boxed{\text{е)}}$ $x^2(1+x)^2+x^2=8(1+x)^2$;

$\boxed{\text{ж)}}$ $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$;

$\boxed{\text{з)}}$ $x^4-2x^2-8x-3=0$.

111. Решите уравнение:

а) $x^4+x^3+x+1=4x^2$;

$\boxed{\text{б)}}$ $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$;

$\boxed{\text{в)}}$ $4x^4+12x^3-47x^2+12x+4=0$.

112. Решите уравнение, выполнив подходящую замену неизвестного:

а) $x^8-15x^4-16=0$;

б) $x^6-4x^3-1=0$;

в) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$;

г) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)=5$;

$\boxed{\text{д)}}$ $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$;

$\boxed{\text{е)}}$ $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$.

$\boxed{\textbf{113.}}$ Решите уравнение:

а) $x^4+(x-4)^4=32$;

б) $x^5+(6-x)^5=1056$;

в) $(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=1$;

г) $x^4+(x-1)^4=97$.

114. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-4x-4}=0$;

б) $\dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{x+1}{x+\frac{1}{2}}-1=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-\dfrac{2x+2}{2x+1}-1\right)$;

$\boxed{\text{в)}}$ $\dfrac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}=\dfrac{3x-7}{3-4x}+\dfrac{6x+5}{4x+3}$;

$\boxed{\text{г)}}$ $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x(x-4)}{x^2-4}=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{4(1+x)}{1-x^2}$;

$\boxed{\text{д)}}$ $\dfrac{x+9}{x^2-3x-10}-\dfrac{x+15}{x^2-25}=\dfrac{1}{x+2}$;

$\boxed{\text{е)}}$ $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

115. Решите уравнение, подобрав подходящую замену неизвестного:

а) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{5}{2}$;

б) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$;

$\boxed{\text{в)}}$ $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}-\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}=1$;

$\boxed{\text{г)}}$ $x^3+\dfrac{1}{x^3}=6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$;

д) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$; е) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$.

116. Решите иррациональное уравнение:

а) $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$;

б) $\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2+x}$;

в) $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{x}{2}$;

г) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$;

д) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

е) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

117. Решите уравнение, используя свойства функций:

а) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{x-2}$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2$;

в) $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

118. Решите уравнение с параметром:

а) $\frac{a-2}{\sqrt{x+4}}=1$;

б) $x^2-\sqrt{a-x}=a$;

в) $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a$;

г) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$;

д) $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0$.

119. При каком m уравнения:

$$2x^2-(3m+2)x+12=0, \quad 4x^2-(9m-2)x+36=0$$

имеют общий корень? 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 1.

120. Докажите, что при нечетных p и q уравнение $x^2+px+q=0$ не имеет рациональных корней.

121. При каком условии уравнение $x^4+px^2+q=0$ имеет только два действительных корня?

122. При каких действительных a корни уравнения $x^2-2x-a^2+1=0$ лежат между корнями уравнения $x^2-2(a+1)x+a(a-1)=0$?

1) $\left(-\frac{1}{4};\ 1\right)$; 2) $(0;\ 1)$; 3) $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$; 4) $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$.

123. При каком условии биквадратное уравнение $x^4+px^2+q=0$ имеет четыре действительных корня, удовлетворяющие условиям:
а) все корни заключены в интервале $(-a;\ a)$, где $a>0$;
б) все корни находятся вне интервала $(-a;\ a)$?

124. Решите уравнение:

а) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1;$

б) $x^2+4|x-3|-7x+11=0;$

в) $\dfrac{12|x|-3x^2}{x^2-4|x|+1}=x^2-4|x|;$

г) $||x-1|+2|=1;$

д) $|5x-13|-|6-5x|=7;$

е) $x^4+x^2+4|x^2-x|=2x^3+12.$

125. Решите уравнение:

а) $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a;$

б) $\sqrt{|x-3|+2}=3;$

в) $\sqrt{5-|1-x^2|}=2;$

г) $\sqrt{3-|x+3|}=x+2.$

126. Решите неравенство:

а) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)>0;$

б) $x^4+3x+1>3x^3+\dfrac{4}{9}x^2;$

в) $x^3-6x^2+5x<-12;$

г) $x^4-15x^2+10x>-24.$

127. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x}{x^2+7x+3}-\dfrac{x}{x^2-7x+3}<\dfrac{50}{63};$

б) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}<\dfrac{1}{30};$

в) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}>\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3};$

г) $\dfrac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x)^2}>0;$

д) $\dfrac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}\leqslant 0;$

е) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{1}{x+2}.$

128. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}};$

б) $(12-x)\sqrt{\dfrac{12-x}{x-2}}+(x-2)\sqrt{\dfrac{x-2}{12-x}}<\dfrac{82}{3};$

в) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$

129. Докажите, что неравенство не имеет решений:

а) $\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{\sqrt{x+1}+2}<\sqrt{2\sqrt{x+1}+3};$

б) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1}<2\sqrt[4]{x^6+1}.$

130. Решите неравенство:

а) $\sqrt{\left|\frac{1}{4}-x\right|}\geqslant x+\frac{1}{2}$;

б) $x-\sqrt{1-|x|}<0$;

в) $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geqslant 0$;

г) $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}\geqslant 0$.

131. Решите неравенство:

а) $x-\sqrt{a-2x}<0$;

б) $x+4a\geqslant 5\sqrt{ax}$;

в) $(a+1)\sqrt{2-x}<1$;

г) $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\leqslant\sqrt{2}$.

132. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=3,\\ x+y=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^3-y^3=26,\\ x^2-y^2=2(x+y);\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^3+y^3=1,\\ x^2y+xy^2=1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=19,\\ x^4+x^2y^2+y^4=931;\end{cases}$

д) $\begin{cases}xy+xz=x^2+2,\\ xy+yz=y^2+3,\\ xz+yz=z^2+4.\end{cases}$

133. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ xy=27;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{5}{2},\\ xy-x-y=9;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2,\\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0;\end{cases}$

$\boxed{\text{г)}}$ $\begin{cases}\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}=2,\\ x+y=12.\end{cases}$

1) (5; 1); 2) (5; 7); 3) (0; 7); 4) (1; 7).

134. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3|x|+2y=1,\\ 2|x|-y=3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}|x|+y=3,\\ x+2|y|=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+2y=2,\\ |2x-3y|=1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}|x-3|+|y-2|=3,\\ y+|x-3|=5.\end{cases}$

135. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=a^2,\\ x+y+\sqrt{xy}=b;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2-y^2}=2a,\\ y\sqrt{x^2-y^2}=2b^2,\\ a\neq 0,\ b\neq 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(\sqrt{y}-\sqrt{x})(a-x)=3\sqrt{x}(x+y),\\ a^2-x^2=3xy;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x}{a},\\ x\sqrt{a-y}=y\sqrt{a+x},\ a\neq 0.\end{cases}$

136. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+5}{2x-1}} > 2, \\ \dfrac{4-3x}{\sqrt{40-3x}} < \sqrt{5}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x} > 3, \\ \sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x, \\ \sqrt{2x+1} < \dfrac{2(x+2)}{2-x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x^4-7x^2+1} > 1-x, \\ \sqrt{x^2-25}\sqrt{25-x^2} \geqslant 0. \end{cases}$

137. Найдите два числа, сумма которых равна 39, а сумма кубов равна 17 199.

138. Определите целое число, квадрат которого, сложенный с кубом, превышал бы в 9 раз следующее за ним число.

139. Объем куба увеличивается на 4167 см^3, если сторона увеличивается на 3 см. Определите сторону куба.

140. Дан прямоугольник, стороны которого a и b. Определите стороны равновеликого прямоугольника, диагональ которого в 2 раза больше диагонали данного.

141. На конце диаметра, равного 13 см, восстановлен перпендикуляр. Определите на этом перпендикуляре точку так, чтобы внешняя часть секущей, проведенной от этой точки к другому концу диаметра, равнялась 3,75 см.

142. Клиент кладет в банк 100 долларов из известных процентов. В конце года он берет себе 10 долларов из капитала и, приложив полученные проценты, снова помещает из тех же процентов. По окончании второго года он повторил вышеописанную операцию. По истечении третьего года он взял опять 10 долларов, и у него осталось на счете 290 долларов. Из каких процентов был помещен капитал?

143. У мальчика имеются двухрублевые монеты. Играя, он укладывает их на площадке плотно одну к другой то в виде квадрата, то в виде правильного треугольника, используя каждый раз все монеты. В последнем случае в стороне содержится на две монеты больше, чем в первом. Какая сумма денег имеется у мальчика?

144. В шахматном турнире двое из участников выбыли, сыграв только по три партии каждый. Поэтому на турнире было сыграно всего 84 партии. Сколько было участников первоначально и играли ли выбывшие участники между собой?

145. Даны две точки, лежащие по одну сторону от данной прямой. Перпендикуляры, опущенные из этих точек на прямую, равны соответственно 20 см и 48 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров на прямой равно 29 см. Определите на данной прямой точку, отстоящую от первой из данных точек вдвое меньше, чем от второй.

146. Площадь треугольника равна 420 $см^2$, и две из его сторон равны 25 см и 39 см. Определите третью сторону.

147. Цена 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 405 000 р. Однако при 15%-ной скидке на первый том и 10%-ной скидке на второй том приходится платить всего 355 500 р. Определите цену первого и второго томов.

148. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$ м. Определите катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}\%$, а другой — на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин сделается равной 14 м.

149. На участке одноколейного железнодорожного пути длиной 20 км надо уложить рельсы. Для укладки имеются рельсы длиной 25 м и 12,5 м. Если уложить все рельсы длиной 25 м, то рельсов длиной 12,5 м надо будет добавить 50% от всего их количества. Если же уложить все рельсы длиной 12,5 м, то рельсов длиной 25 м надо добавить $66\frac{2}{3}\%$ от всего их количества. Определите количество рельсов того и другого рода.

150. Среднее геометрическое двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найдите эти числа.

151. Найдите двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $2\frac{2}{3}$, а кроме того, разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке, равна 18.

152. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций A и B, расстояние между которыми 600 км. Первый из них приходит на станцию B на 3 ч раньше, чем второй на станцию A. За то время, как первый делает 250 км, второй проходит 200 км. Найдите скорость каждого поезда.

153. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. За сколько времени пройдет все расстояние каждый из них, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

154. Рабочий изготовил в назначенный ему срок некоторое число одинаковых деталей. Если бы он ежедневно изготовлял их на 10 штук больше, то выполнил бы эту работу на $4\frac{1}{2}$ дня раньше срока, а если бы он делал в день на 5 деталей меньше, то опоздал бы на 3 дня против назначенного срока. Сколько деталей и в какой срок он выполнил?

155. Два судна двигаются прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник становится прямоугольным. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти 120 км. Определите расстояние между судами в начальный момент времени.

156. Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{5}{6}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Если бы первоначально $\frac{5}{6}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определите величину вклада по истечении двух лет.

157. Некоторое количество денег было разложено на n кучек. После этого из первой кучки переложили во вторую $\frac{1}{n}$ часть бывших в первой кучке денег. Затем из второй кучки $\frac{1}{n}$ часть оказавшихся в ней после перекладывания денег переложили в третью кучку. Далее $\frac{1}{n}$ часть денег, получившихся после этого в третьей кучке, переложили в четвертую и т. д. Наконец, из n-й кучки $\frac{1}{n}$ часть оказавшихся в ней после предшествующего перекладывания денег переложили в первую кучку. После этого в каждой кучке стало A рублей. Сколько денег было в каждой кучке до перекладывания?

158. Привязной аэростат находится на высоте 1400 м. В районе местонахождения этого аэростата одновременно прыгнули два парашютиста с автоматически раскрывающимися парашютами: парашютист A с высоты 1900 м, а парашютист B с высоты 1580 м. Парашютист A спускается со скоростью 4 м/с, а парашютист B — со скоростью 4,5 м/с. В продолжение какого времени (считая от момента прыжка) парашютист A все еще будет находиться выше аэростата, а парашютист B — ниже аэростата на расстоянии, превышающем расстояние парашютиста A от этого аэростата?

159. Заданы функции спроса и предложения некоторого товара и цена p. Найдите рыночное равновесие и определите величину излишка или дефицита товара при выбранной цене:

а) $q=2p-11$ и $q=-3p+29$, $p=7$; в) $q=\frac{12-2p}{3p+2}$ и $q=p-2$, $p=3$;

б) $q=6p-72$ и $q=3p-18$, $p=11$; г) $q=\frac{6-2p}{p+3}$ и $q=4p-3$, $p=0{,}8$.

160. Найдите рыночное равновесие, если функции предложения и спроса имеют вид:

а) $q=\sqrt{p-2},\ q=\frac{67-2p}{p+4}$;

б) $p=q^2+5,\ p=\frac{-15q+165}{q+1}$;

в) $p=q^2+1,\ p=\frac{-2q+24}{q+2}$;

г) $p=2q^2+3,\ p=\frac{-9q+174}{2q+1}$;

д) $p=\frac{1}{49}q^2+8,\ q=\frac{160-3p}{p+10}$;

е) $q=\sqrt{6(p-4)},\ p=\frac{-5q+120}{q+3}$.

161. Известны функции спроса и предложения некоторого товара. Найдите рыночное равновесие, если:

а) $p=\frac{36}{q^2},\ p=q^2-5$;

б) $p=\frac{400}{q^2},\ p=q^2+9$;

в) $p=\frac{160}{q^2},\ p=q^2+8q+20$;

г) $p=\frac{77}{q^2},\ p=\frac{1}{16}(q^2+10q+21)$.

Сделайте схематический чертеж.

162. Функция спроса на некоторый товар $p=\frac{400}{q^2}$, а функция предложения $p=q^2+9$.

а) Найдите рыночное равновесие.
б) Фирма увеличила цену за единицу товара на 21 денежную единицу. Найдите новое рыночное равновесие.
в) Сравните исходное и новое рыночные равновесия. Как изменяется равновесная цена и равновесное количество товара.
г) Увеличьте цену за единицу товара на 33 денежные единицы и ответьте на вопросы пункта «в».

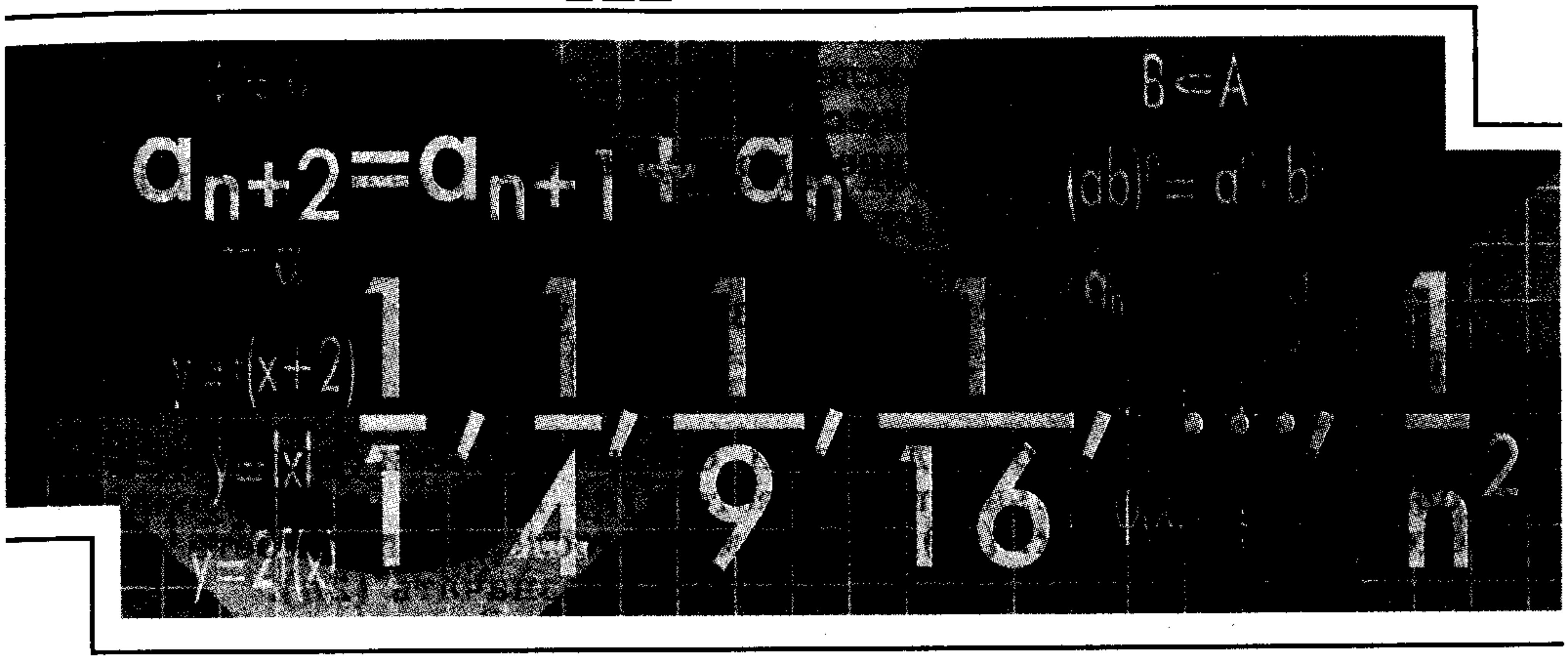
163. Известны функции спроса и предложения некоторого товара:

$$5p+4q-150=0 \text{ и } 5p-3q-10=0.$$

а) Найдите рыночное равновесие.
б) Определите, при какой цене p величина дефицита достигнет 9 единиц.

164. Ответьте на вопросы задачи **163** при условии, что функция спроса $2p+q-60=0$, функция предложения $4p-q-12=0$ и величина дефицита 15 единиц.

Глава XI



ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ровно в 12 часов дня автономный измерительный прибор посылает радиограмму, содержащую информацию о температуре, давлении воздуха и других величинах в той точке земной поверхности, где он находится. Если записывать каждый день сообщенную прибором температуру воздуха, получим последовательность идущих одно за другим чисел, например:

$$28,\ 24,\ 12,\ 32,\ 28,\ \ldots\ .$$

Этих чисел будет столько, сколько радиограмм пошлет прибор до конца своей работы. Среди них могут быть и повторяющиеся.

Любые записанные подряд n чисел (среди которых могут быть и повторяющиеся) образуют числовую последовательность длины n. Ее обозначают a_1, a_2, ..., a_n. Число a_k, записанное на k-м месте, называют *k-м членом* этой последовательности.

В математике рассматривают и бесконечные числовые последовательности. Например, начнем писать одно за другим четные натуральные числа:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots\ .$$

Так как таких чисел бесконечное множество, то мы никогда не закончим этого процесса. Но рано или поздно каждое четное натуральное число окажется записанным. Например, на 1 000 000-м месте окажется число 2 000 000, и поэтому $a_{1\,000\,000}=2\,000\,000$.

Число, записанное на n-м месте, т. е. a_n, называют обычно *общим членом* последовательности.

Бесконечная числовая последовательность считается заданной, если известно правило, по которому для любого n можно найти значение n-го члена этой последовательности, т. е. если задан ее общий член.

Таким образом, задать последовательность — это значит задать некоторую функцию на множестве натуральных чисел. Поэтому в математике принято следующее определение:

Определение. Числовой *последовательностью* называют числовую функцию f, заданную на множестве N натуральных чисел.

В соответствии с предыдущими обозначениями условимся для числовых последовательностей вместо $f(n)$ писать a_n и обозначать последовательность так: (a_n). Например, последовательность четных натуральных чисел 2, 4, 6, 8, ... будем обозначать $(2n)$.

Чаще всего общий член последовательности задают аналитически, т. е. формулой. В этом случае легко определить любой член последовательности.

Пример 1.

Найдем первые пять членов последовательности (a_n), где $a_n = n^2 + 4$.

Решение. При $n=1$ получаем $a_1 = 1^2 + 4 = 5$. При $n=2$ имеем $a_2 = 2^2 + 4 = 8$, при $n=3$ $a_3 = 3^2 + 4 = 13$, при $n=4$ $a_4 = 4^2 + 4 = 20$, при $n=5$ $a_5 = 5^2 + 4 = 29$. Значит, первые пять членов последовательности имеют вид:

$$5,\ 8,\ 13,\ 20,\ 29,\ \ldots .$$

Нередко последовательность задают правилом, позволяющим вычислить последующий член, зная предыдущие. При вычислении членов последовательности по такому правилу мы вынуждены все время возвращаться назад к предыдущим членам. Поэтому такой способ задания называется *рекуррентным* (от латинского слова recurrere — возвращаться). Обычно для рекуррентно заданных последовательностей общий член a_n выражают в виде формулы, содержащей предыдущие члены. Такие формулы называют *рекуррентными соотношениями*. Например, в 8 классе мы видели, что для приближенного вычисления квадратного корня из положительного числа a выбирают какое-либо начальное приближение x_1 и строят затем последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, используя рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{1}$$

Аналогично можно вычислять корни любой степени. Для отыскания $\sqrt[k]{a}$ вместо формулы (1) применяют рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k}\left(x_n + \frac{a}{(k-1)\,x_n^{k-1}}\right). \tag{2}$$

Процесс вычислений ведут до тех пор, пока в пределах заданной точности не совпадут значения x_n и x_{n+1}.

Пример 2.

Найдем значение $\sqrt[3]{5}$ с точностью до 0,001.

Решение. Так как $(1,5)^3 < 5 < 2^3$, то за начальное приближение можно принять $x_1 = 1,5$. По формуле (2) при $a = 5$, $k = 3$ и $x_1 = 1,5$ находим:

$$x_2 = \frac{2}{3}\left(1,5 + \frac{5}{2(1,5)^2}\right) = 1,740\ldots\ .$$

Далее находим:

$$x_3 = \frac{2}{3}\left(1,740 + \frac{5}{2(1,740)^2}\right) = 1,710\ldots\ , \quad x_4 = \frac{2}{3}\left(1,710 + \frac{5}{2(1,710)^2}\right) = 1,709\ldots\ ,$$

$$x_5 = \frac{2}{3}\left(1,709 + \frac{5}{2(1,709)^2}\right) = 1,709\ldots\ .$$

Поскольку с точностью до 0,001 выполняется равенство $x_4 = x_5$, то с указанной точностью имеем $\sqrt[3]{5} \approx 1,709$.

Задание только рекуррентного соотношения не может полностью определить последовательность. Например, из соотношения $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ нельзя определить a_1 и a_2, так как $a_1 = 2a_0 + a_{-1}$ и $a_2 = 2a_1 + a_0$, а a_0 и a_{-1} в последовательность не входят. Значит, значения a_1 и a_2 должны быть заданы отдельно. Такие значения называют начальными значениями последовательности, заданной рекуррентно. В примере 2 начальным значением является $x_1 = 1,5$. Количество начальных значений определяется видом рекуррентного соотношения. Если a_n выражено через $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$, то необходимо задать k начальных значений $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Например, зададим последовательность рекуррентным соотношением

$$a_n = a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1}^2.$$

Здесь надо знать три начальных значения a_1, a_2, a_3. Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 4$. Полагая в заданном соотношении $n = 4$, находим $a_4 = a_1 - a_2 + a_3^2$, или $a_4 = 2 - 5 + 16 = 13$. Точно так же находим a_5 и т. д.

Пример 3.

Найдем первые шесть членов последовательности, каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, т. е. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, если ее первыми двумя членами являются $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$.

Решение. По условию имеем:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1,\ a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 1 = 3,\ a_6 = a_5 + a_4 = 3 + 2 = 5.$$

Последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, ... , задаваемую рекуррентным соотношением

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,$$

называют *последовательностью Фибоначчи*[1]. Можно доказать, что общий член этой последовательности выражается формулой

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

В практической деятельности возникают случаи, когда по результатам измерений задается некоторая бесконечная последовательность своими первыми членами и требуется установить формулу ее общего члена. Например, заданы первые четыре члена последовательности

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2^2},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{4}{2^4},\ \ldots .$$

Попытаемся записать формулу ее общего члена. Согласно имеющейся у нас информации числитель принимает в качестве своего значения поочередно все натуральные числа, а знаменатель — натуральную степень числа 2. Поэтому одной из возможных формул общего члена будет $a_n=\frac{n}{2^n}$.

В приведенном примере можно записать и другую формулу общего члена $a_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n}{2^n}$. По этой формуле при $n=1$, 2, 3, 4 мы получаем те же первые четыре члена последовательности. Можно привести и другие формулы для общего члена этой последовательности. Вообще для каждой бесконечной последовательности, заданной несколькими первыми членами, можно привести бесконечно много формул для ее общего члена.

В соответствии с определением возрастающей (убывающей) функции скажем, что последовательность (a_n) *возрастает* (*убывает*), если для всех натуральных чисел n выполняется неравенство $a_{n+1}>a_n$ $(a_{n+1}<a_n)$.

Пример 4.

а) Последовательность 1, 8, 27, 64, 125, ..., n^3, ... возрастает, так как для любого $n\in N$ выполняется неравенство

$$(n+1)^3>n^3, \text{ т. е. } a_{n+1}>a_n.$$

б) Последовательность $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ..., $\frac{1}{n^2}$, ... убывающая, так как для любого $n\in N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(n+1)^2}$.

[1] Фибоначчи (Fibonacci — сокращенное filius Bonacci, т. е. сын Боначчи) — прозвище итальянского математика Леонардо из г. Пизы (Леонардо Пизанского) (1180—1240). Последовательность Фибоначчи рассмотрена им в 1202 г. в книге «Liber abacci».

Если же выполняется неравенство $a_{n+1} \geqslant a_n (a_{n+1} \leqslant a_n)$, то последовательность называют *неубывающей* (соответственно *невозрастающей*).

Например, последовательность $\left(\frac{1}{[\sqrt{n}]}\right)$, где $[\sqrt{n}]$ — целая часть числа $\sqrt{n}$, т. е. последовательность $1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{[\sqrt{n}]}$, ..., является невозрастающей, так как $\frac{1}{[\sqrt{n+1}]} \leqslant \frac{1}{[\sqrt{n}]}$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называют *монотонными*.

Если среди членов последовательности есть как такие, которые больше предыдущих, так и такие, которые меньше предыдущих, то такие последовательности называют *немонотонными*. Например, немонотонной является последовательность $1, -2, 3, -4, 5, -6$.

Пример 5.

Исследуем на монотонность последовательность с общим членом $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Решение. Исследовать последовательность на монотонность — это значит выяснить, является ли она возрастающей или убывающей, невозрастающей или неубывающей, или она немонотонна.

Рассмотрим разность $a_{n+1} - a_n$. Имеем

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} =$$

$$= \frac{2n^2+7n+6-2n^2-7n-3}{(n+2)(n+3)} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

Так как $a_{n+1} - a_n > 0$, т. е. $a_{n+1} > a_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, то данная последовательность возрастающая.

Пример 6.

Исследуем на монотонность последовательность (a_n), где $a_n = \frac{n^2}{5^n}$.

Решение. Рассмотрим частное

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} : \frac{n^2}{5^n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n^2} = \frac{(n+1)^2}{5n^2} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{4}{5}.$$

Неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ выполняется для любого $n = 1, 2, \ldots$. Так как $a_n > 0$ при всех n, то из полученного неравенства следует, что $a_{n+1} < a_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, данная последовательность убывающая.

Пример 7.

Исследуем на монотонность последовательность (a_n), где
$$a_n = \frac{1}{n^5 + \sqrt{n}}.$$

Решение. Так как функции x^5 и $\sqrt{x}$ возрастают на промежутке $[1; +\infty)$, то и функция $x^5 + \sqrt{x}$ возрастает и положительна на этом промежутке. Следовательно, функция $\frac{1}{x^5+\sqrt{x}}$ убывает на промежутке $[1; +\infty)$, т. е. $\frac{1}{(n+1)^5 + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^5 + \sqrt{n}}$ для всех $n \in N$. А это означает, что последовательность $\left(\frac{1}{n^5+\sqrt{n}}\right)$ убывающая.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Напишите первые шесть членов последовательности, общий член которой выражается формулой:

а) $a_n = 2n^2 - 1$; б) $a_n = \frac{(-3)^n}{n^3}$; в) $a_n = n^2 \cdot 2^n$; г) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

2. Напишите первые пять членов последовательности (a_n), если $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ и для всех n выполняется равенство $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.

3. По формуле (2) найдите с точностью до 0,01 значение корня:

а) $\sqrt[3]{42{,}81}$; б) $\sqrt[5]{389{,}6}$; в) $\sqrt[6]{2594{,}1}$; г) $\sqrt[10]{451{,}6}$.

Результат сравните со значением корня, получаемым с помощью калькулятора.

4. Пусть $a_n = n^2 + 1$. Найдите a_5; a_{n+4}; a_{2n-1}; a_n^3.

5. Записано несколько чисел. Каждое из этих чисел, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих ему. Известно, что девятое и десятое числа равны 1. Найдите первое и второе числа.

6. Задается ли формулой $a_n = n^3 + 3n + 1$ последовательность простых чисел?

7. Найдите какую-нибудь формулу для общего члена последовательности, заданной несколькими первыми членами:

а) 1, 4, 9, 16, 25, ... ;
б) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... ;
в) 1, 4, 8, 16, 32, 64, ... ;
г) 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... ;
д) 1, 7, 31, 127, 511, ... ;
е) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \frac{7}{20}, \frac{8}{23}, \ldots$.

8. Докажите, что последовательность (a_n), где $a_n = 3^n + 5 \cdot 2^n$, удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ и начальным условиям $a_1 = 13$, $a_2 = 29$.

9*. Пусть $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}$. Выразите a_n и b_n через a_1, b_1 и n.

10. Докажите, что последовательность с общим членом $a_n=\frac{n^2}{n^2+4}$ возрастает.

11. Докажите, что последовательность с общим членом $a_n=\frac{1}{n^2+1}$ убывает.

12. Исследуйте на монотонность последовательность (a_n), где:

а) $a_n=\frac{1}{n^3+n}$; в) $a_n=n^3-n^2$; д) $a_n=\frac{2n+1}{6n+2}$;

б) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; г) $a_n=|3-2n|$; е) $a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$.

§ 2. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Все утверждения можно разделить на общие и частные. Например, утверждение «Во всяком параллелограмме диагонали делятся в точке пересечения пополам» является общим, так как относится ко всему множеству параллелограммов. В то же время утверждение «В параллелограмме $ABCD$ диагонали в точке пересечения делятся пополам» является частным утверждением, так как относится к конкретному параллелограмму $ABCD$.

На основе частных утверждений делают некоторые предположения (гипотезы) о справедливости какого-либо общего утверждения. Иногда эти предположения оказываются верными, иногда неверными. Переход от частных утверждений к общим называют *индукцией* (от латинского слова inductio — наведение). Например, знаменитый математик XVII в. П. Ферма, проверив, что числа $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65\,537$ простые, сделал по индукции предположение, что для всех $n=1, 2, \ldots$ числа вида $2^{2^n}+1$ простые. Однако это предположение оказалось неверным, так как в XVIII в. Л. Эйлер нашел, что $2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\cdot 6\,700\,417$ — составное число. Как видим, индукция не является методом доказательства, а лишь помогает сформулировать неизвестный результат в виде некоторой гипотезы, справедливость которой потом надо доказать[1].

---

[1] В случае, когда утверждение касается конечного числа объектов, его можно доказать, проверяя для каждого объекта. Например, утверждение «Каждое четное однозначное число является суммой двух простых чисел» легко проверить, рассмотрев равенства $2=1+1$, $4=3+1$, $6=5+1$, $8=3+5$.

Метод доказательства, при котором утверждение проверяется для каждого из конечного числа случаев, называют *полной индукцией*. Если же утверждение проверяется лишь для некоторых случаев и по индукции делается заключение о его справедливости для всех случаев, то индукцию называют *неполной*.

Индуктивные гипотезы формулируются обычно в виде утверждений, относящихся ко всем натуральным числам. Последовательная проверка такого утверждения для каждого натурального числа n, начиная с 1, разумеется, невозможна, если говорить обо всех натуральных числах. Но сама идея последовательного перехода от натурального числа n к следующему за ним числу $n+1$ осуществляется в строгой форме в одном из самых важных методов математических доказательств, называемом *методом математической индукции*. В основе этого метода лежит принцип математической индукции, заключающийся в следующем:

Утверждение $P(n)$ справедливо для всякого натурального n, если:
1) оно справедливо для $n=1$;
2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$.

Действительно, из того, что утверждение верно при $n=1$, вытекает по второму условию его справедливость для $n=1+1=2$, но тогда оно верно и для $n=2+1=3$, $n=3+1=4$ и т. д. Ясно, что в конце концов мы дойдем до любого натурального числа n.

Этот метод можно эффективно использовать для нахождения формул вычисления сумм, когда число слагаемых зависит от n, доказательства тождеств, доказательства неравенств, у которых одна или обе части зависят от n.

Пример 1.

Пусть дана последовательность (n) натуральных чисел. Найдем формулу вычисления суммы первых n чисел:

$$S(n)=1+2+3+\ldots+n.$$

Решение. Рассмотрим $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$. Мы имеем

$$S(1)=1, \qquad S(3)=1+2+3=6,$$
$$S(2)=1+2=3, \qquad S(4)=1+2+3+4=10.$$

Заметив, что полученные числа можно записать в виде

$$1=\frac{1\cdot 2}{2},\ 3=\frac{2\cdot 3}{2},\ 6=\frac{3\cdot 4}{2},\ 10=\frac{4\cdot 5}{2},$$

естественно сделать предположение, что

$$S(n)=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Применим теперь метод математической индукции для доказательства формулы (1).

Формула верна при $n=1$, так как $S(1)=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}=1$. Предположим теперь, что для $n=k>1$ формула (1) верна, т. е. выполняется равенство

$$S(k)=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Тогда

$$S(k+1)=1+2+3+\ldots+k+(k+1)=S(k)+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Значит, из справедливости формулы (1) для $n=k$ вытекает ее справедливость для $n=k+1$. По принципу математической индукции отсюда вытекает справедливость формулы (1) для всех натуральных значений n.

В некоторых случаях для доказательства тождества $P(n)=Q(n)$ можем сначала убедиться, что $P(1)=Q(1)$, и, предполагая справедливость равенства $P(k)=Q(k)$, $k>1$, доказать тождество $P(k+1)-P(k)=Q(k+1)-Q(k)$. Тогда из истинности равенства $P(k)=Q(k)$ будет следовать истинность равенства $P(k+1)=Q(k+1)$ и по принципу математической индукции будет следовать истинность тождества $P(n)=Q(n)$ для всех n.

Пример 2.

Рассмотрим последовательность (n^2) квадратов натуральных чисел. Докажем справедливость формулы для вычисления суммы первых n членов этой последовательности:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

Решение. Обозначим

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=S(n) \text{ и } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=P(n).$$

При $n=1$ имеем $S(1)=1$, $P(1)=\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=1$, т. е. $S(1)=P(1)$.

Предполагаем теперь, что равенство (2) верно для $n=k>1$, т. е. $S(k)=P(k)$. Рассмотрим разности:

$$S(k+1)-S(k)=(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2)-(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2)=(k+1)^2$$

и

$$P(k+1)-P(k)=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6-2k^2-k)}{6}=\frac{6(k+1)^2}{6}=(k+1)^2.$$

Итак, мы доказали, что $S(1)=P(1)$ и $S(k+1)-S(k)=P(k+1)-P(k)$. Тогда по принципу математической индукции тождество (2) справедливо для всех n.

Ранее доказанные формулы могут служить источником получения новых формул.

Пример 3.

Пусть дана последовательность (n^3) кубов натуральных чисел. Выведем формулу для вычисления суммы первых n членов этой последовательности:

$$S(n)=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

Решение. Как и в примере 1, рассмотрим суммы $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$. Здесь мы имеем

$$\begin{aligned}&S(1)=1,\\&S(2)=1^3+2^3=9,\\&S(3)=1^3+2^3+3^3=36,\\&S(4)=1^3+2^3+3^3+4^3=100.\end{aligned}$$

Мы замечаем, что

$$1=1^2,\ 9=3^2=(1+2)^2,\ 36=6^2=(1+2+3)^2,\ 100=10^2=(1+2+3+4)^2.$$

Поэтому можно высказать гипотезу, что

$$S(n)=(1+2+3+4+\ldots+n)^2.$$

А так как из примера 1 мы уже знаем, что

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

то получаем предположительно формулу

$$S(n)=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Докажем методом математической индукции справедливость этой формулы, используя прием, рассмотренный в примере 2. Обозначим

$$P(n)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

и найдем $P(1)=1$. Так как $S(1)=1^3=1$, то имеем $S(1)=P(1)$, т. е. равенство (3) верно для $n=1$.

Предположим теперь, что оно верно для $n=k>1$, т. е.

$$S(k)=P(k).$$

Рассмотрим разности

$$S(k+1)-S(k)=(1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3)-(1^3+2^3+\ldots+k^3)=(k+1)^3,$$

$$P(k+1)-P(k)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2-\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2((k+2)^2-k^2)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2(k+2-k)(k+2+k)=(k+1)^3.$$

Итак, верно равенство $S(k+1)-S(k)=P(k+1)-P(k)$.

Поскольку мы предполагали, что $S(k)=P(k)$, то отсюда следует равенство $S(k+1)=P(k+1)$. Следовательно, по принципу математической индукции формула (3) справедлива для всех n.

Метод математической индукции успешно применяется и при доказательстве различных неравенств, при этом используются свойства неравенств. В качестве примера рассмотрим доказательство неравенства, которое мы в дальнейшем будем неоднократно использовать. Это неравенство, называемое *неравенством Бернулли*, имеет следующий вид:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \tag{4}$$

при всех натуральных значениях n и для всех $x>-1$.

При $n=1$ это неравенство справедливо, так как $1+x=1+x$.

Предположим, что оно справедливо при $n=k>1$, т. е. справедливо неравенство

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx.$$

Умножим обе части этого неравенства на $1+x$, при этом неравенство не изменит знак, так как $1+x>0$ в силу условия $x>-1$. Тогда мы получим:

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)(1+x), \text{ или } (1+x)^{k+1} \geqslant 1+kx+x+kx^2.$$

Учитывая, что одночлен kx^2 — неотрицательное число, из последнего неравенства имеем

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x.$$

Таким образом, мы показали, что неравенство (4) верно для $n=1$, и в предположении, что оно верно для $n=k$, доказали его справедливость для $n=k+1$. Значит, по принципу математической индукции неравенство Бернулли[1)] справедливо для всех натуральных значений n.

Замечание. Бывают случаи, когда утверждение, неверное для $n=1, 2, \dots, p-1$, справедливо для $n=p$. Если затем из предположения о его истинности для $n=k>p$ можно доказать, что оно истинно и для $n=k+1$, то получаем, что данное выражение истинно для всех $n \geqslant p$.

Пример 4.

Докажем, что выражение 7^n+8^{2n-3} кратно 19 для всех натуральных чисел $n \geqslant 3$.

[1)] Якоб Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик. Неравенство Бернулли доказано им в 1689 г. методом математической индукции.

Решение. При $n=3$ получаем $7^3+8^3=343+512=855=45\cdot 19$, т. е. при $n=3$ утверждение верно. Предположим, что 7^k+8^{2k-3} кратно 19 при $k>3$, и докажем, что $7^{k+1}+8^{2(k+1)-3}$ кратно 19.

По предположению $7^k+8^{2k-3}=19m$, где $m\in N$, значит, $8^{2k-3}=19m-7^k$. Отсюда имеем:

$$7^{k+1}+8^{2(k+1)-3}=7^{k+1}+64\cdot 8^{2k-3}=7^{k+1}+64(19m-7^k)=$$
$$=7^k(7-64)+64\cdot 19m=64\cdot 19m-57\cdot 7^k=19(64m-3\cdot 7^k),$$

т. е. выражение кратно 19.

Итак, мы доказали, что утверждение верно для $n=3$, и из предположения, что оно верно для $n=k>3$, доказали его справедливость для $n=k+1$. Тогда на основании сказанного выше заключаем, что выражение 7^n+8^{2n-3} кратно 19 для всех $n\geqslant 3$.

УПРАЖНЕНИЯ

13. Методом математической индукции докажите справедливость равенства:

а) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$;

б) $1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5=\dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$;

в) $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$;

г) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

д) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

е) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

14. Вычислите сумму:

а) $2+4+6+\ldots+2n$;

б) $1+3+5+\ldots+(2n-1)$;

в) $1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n$;

г) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)$;

д) $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)$;

е) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

15. Докажите, используя метод математической индукции, справедливость неравенства:

а) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}$;

б) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^n\geqslant\dfrac{n+1}{n}$;

в) $3^n-2^n\geqslant n$;

г) $2^n\geqslant 5n-3,\ n\geqslant 5$;

д) $3^n\geqslant n^3,\ n\geqslant 3$;

е) $\underbrace{\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\ldots+\sqrt{4}}}}}_{n\text{ четверок}}<3$.

16. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 3 при любых натуральных значениях n.

17. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

18. Докажите, что если n — четное натуральное число, то $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.

19. Докажите, что при всех натуральных значениях n $15^n + 6$ кратно 7.

20. Докажите, что $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ делится на 8 при любых натуральных значениях n.

21. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n-1} + 1$. Докажите, что $a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 1)$.

22. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$. Выразите a_n через n.

23. Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Докажите, что имеет место соотношение:

а) $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$; б) $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$.

24. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ с начальными значениями $a_1 = 3$, $a_2 = 15$. Докажите, что:

а) все члены последовательности делятся на 3;

б) все члены последовательности с четными номерами делятся на 5.

25. Докажите, что сумма всех членов каждой горизонтальной строки таблицы

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

равна квадрату нечетного числа.

26. На сколько треугольников n-угольник (необязательно выпуклый) может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

27. Докажите, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $2d(n-2)$ ($n > 2$, $d = 90°$).

§ 3. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Рассмотрим последовательность четных натуральных чисел

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots .$$

Мы видим, что любые два ее соседних члена отличаются друг от друга на одно и то же число 2. Таким же свойством обладает и последовательность значений линейной функции $y=d(x-1)+a_1$, отвечающих натуральным значениям аргумента $x=n$. Полагая $n=1$, 2, 3, ... , получим

$$a_1,\ d+a_1,\ 2d+a_1,\ \dots .$$

Здесь любые два соседних члена последовательности отличаются друг от друга на одно и то же число d. В математике такие последовательности называют *арифметическими прогрессиями.*

Определение. Последовательность, в которой каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа d, называется *арифметической прогрессией.*

Таким образом, арифметическая прогрессия определяется рекуррентным соотношением $a_{n+1}=a_n+d$ и начальным значением a_1. При этом число d называют *разностью* прогрессии[1]. Общий член a_n этой последовательности является значением линейной функции $d(x-1)+a_1$ при $x=n\in N$, поэтому

$$\boldsymbol{a_n=d(n-1)+a_1.} \tag{1}$$

Например, последовательность 5, 8, 11, 14, 17, ... образует арифметическую прогрессию с разностью $d=3$ и $a_1=5$, ее общий член может быть записан в виде

$$a_n=5+3(n-1)=3n+2.$$

Пример.

Найдем двадцатый член арифметической прогрессии, если $a_1=1$ и $d=5$.

Решение. По формуле (1) имеем $a_{20}=1+5(20-1)=96$.

Для членов арифметической прогрессии справедлива теорема.

Теорема. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого, равен полусумме двух соседних с ним членов:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

для всех $n=2,\ 3,\ \dots$.

[1] d — начальная буква латинского слова differentia, означающего разность.

Доказательство.

По определению арифметической прогрессии для всех $n=2, 3, \ldots$ имеем:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Отсюда

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

или

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Обратное утверждение докажите самостоятельно.

Напомним, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ число $\frac{a+b}{2}$ называется средним арифметическим чисел a и b. Теорема показывает, что если $a_n \geqslant 0$ для всех n, то каждый член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название — арифметическая прогрессия.

УПРАЖНЕНИЯ

28. Найдите шестой член арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = -3$ и $d = -4$; в) $a_1 = -7$ и $d = \frac{3}{7}$;

б) $a_1 = -\frac{1}{2}$ и $d = 1$; г) $a_1 = 1\frac{1}{3}$ и $d = 0{,}5$.

29. Запишите первые три члена арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 2$, $a_3 = 12$; в) $a_3 = 8$, $a_5 = 2$;

б) $a_1 = 2$, $a_8 = 23$; г) $a_{18} = -6$, $a_{20} = 6$.

30. Найдите номер n члена арифметической прогрессии, если $a_1 = 12$, $a_n = -10$ и $d = -2$.

31. Докажите, что каждый член арифметической прогрессии, кроме первого, есть среднее арифметическое между равноудаленными от него членами.

32. Между числами -7 и 2 вставьте:

а) два числа так, чтобы получилось четыре последовательных члена арифметической прогрессии;

б) три числа так, чтобы получилось пять последовательных членов арифметической прогрессии;

в) четыре числа так, чтобы получилось шесть последовательных членов арифметической прогрессии.

33. В арифметической прогрессии найдите:

а) a_{23}, если $a_{10} = 25$, $a_{30} = 95$;

б) $a_2 + a_9$, если $a_5 + a_6 = 18$;

в) $a_3 + a_7$, если $a_2 + a_4 = 7$, $a_6 + a_8 = 23$;

г) a_1 и d, если $a_2 + a_4 + a_6 = 18$, $a_2 a_4 a_6 = -168$.

34. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-4x+a=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2-12x+b=0$.
Числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют арифметическую прогрессию. Найдите параметры a и b.

35. Могут ли числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ быть членами арифметической прогрессии (необязательно соседними)?

36. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

2. СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Решим задачу.

Задача.

Найдем сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, т. е. вычислим сумму

$$S=1+2+3+\ldots+99+100.$$

Решение. Разумеется, эту сумму можно вычислить с помощью формулы (1) § 2. В то же время эту задачу можно решить способом, использующим свойство, присущее всем арифметическим прогрессиям.

Запишем сумму данных чисел, а под ней — те же слагаемые в обратном порядке:

$$\begin{aligned} S &= 1+2+3+\ldots+99+100, \\ S &= 100+99+98+\ldots+2+1. \end{aligned}$$

Сложим почленно эти два равенства. Тогда каждая пара слагаемых даст один и тот же результат 101. Поэтому получим:

$$2S=\underbrace{101+101+101+\ldots+101+101}_{100\ \text{слагаемых}}=101\cdot 100.$$

Итак, $2S=10\,100$, и, значит, $S=5050$.

Этот же прием можно использовать и для вычисления суммы n первых членов арифметической прогрессии, если заметить, что для любой конечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n имеет место равенство

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n.$$

Действительно, по формуле (1) п. 1 настоящего параграфа имеем:

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+d(k-1)+a_1+d(n-k)=a_1+dk-d+a_1+$$
$$+dn-dk=a_1+(a_1+d(n-1))=a_1+a_n.$$

Обратим внимание, что сумма индексов у слагаемых в левой и правой частях одна и та же — $n+1$.

Докажем теперь справедливость следующей теоремы:

Теорема. Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

равна полусумме первого и n-го ее членов, умноженной на число членов n, т. е.

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n. \qquad (1)$$

Доказательство.

Запишем сумму S_n дважды. Сначала слагаемые расположим в порядке возрастания номеров, а затем в порядке убывания:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n,$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1.$$

Теперь сложим эти равенства почленно. Мы получим:

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Сумма индексов слагаемых в каждой скобке равна $n+1$, поэтому каждая скобка равна a_1+a_n. Учитывая, что таких скобок n, получаем:

$$2S_n=(a_1+a_n)\cdot n, \text{ или } S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Пример 1.

Найдем сумму ста первых четных натуральных чисел.

Решение. Последовательность 2, 4, 6, ..., $2n$, ... — арифметическая прогрессия с разностью 2. По формуле (1) получим:

$$S_{100}=2+4+6+\ldots+198+200=\frac{2+200}{2}\cdot 100=10\ 100.$$

Формулу (1) можно записать иначе.

Так как $a_n=a_1+d(n-1)$, то, подставляя это выражение в формулу (1), получим:

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n. \qquad (2)$$

Пример 2.

Сколько нужно взять членов арифметической прогрессии с $a_1=3$ и $d=2$, чтобы их сумма равнялась 168?

Решение. По формуле (2) получаем уравнение

$$168=\frac{6+2(n-1)}{2}\cdot n, \text{ или } 168=(3+n-1)n.$$

Значит, $n=12$, т. е. необходимо взять 12 членов арифметической прогрессии.

В заключение в качестве примера напомним строки из романа А. С. Пушкина «Евгений Онегин», сказанные о его герое: «...Не мог он ямба от хорея, как мы ни бились, отличить». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха.

Ямб — стихотворный метр с ударениями на четных слогах стиха (Мой дя́дя са́мых че́стных пра́вил), т. е. ударными являются второй, четвертый, шестой, восьмой и т. д. слоги. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и с разностью, равной двум: 2, 4, 6, 8, ...

Хорей — стихотворный размер с ударением на нечетных слогах стиха (Бу́ря мгло́ю не́бо кро́ет). Номера ударных слогов также образуют арифметическую прогрессию, но ее первый член равен единице, а разность по-прежнему равна двум: 1, 3, 5, 7, ...

УПРАЖНЕНИЯ

37. Найдите сумму всех нечетных чисел от 1 до 135 включительно.

38. Найдите сумму двузначных чисел от 10 до 100.

39. Найдите сумму 22 первых членов арифметической прогрессии 25, 30, 35, 40, ...

40. Докажите, что последовательность, заданная общим членом $a_n=7-2n$, является арифметической прогрессией, и найдите S_{30}.

41. Найдите сумму 40 первых членов арифметической прогрессии, если $a_2=7$, $a_4=11$.

42. Найдите сумму 20 первых членов арифметической прогрессии, если $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$.

43. Общий член арифметической прогрессии выражается формулой $a_n=2n-5$. Найдите S_n, S_{5n}, S_{n^2}.

44. Для некоторой арифметической прогрессии найдите S_{16}, если $S_4=-28$, $S_6=58$.

45. Найдите арифметическую прогрессию, в которой среднее арифметическое n первых ее членов равно $2n$.

46. Найдите сумму $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\ldots+\frac{1}{n}$ членов арифметической прогрессии.

47. На множестве натуральных чисел задано уравнение

$$\frac{x-1}{x^2}+\frac{x-2}{x^2}+\frac{x-3}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^2}=\frac{7}{15}.$$

Найдите его корни. **1) 10; 2) 15; 3) 20; 4) 25.**

48. Докажите, что если S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), то:

а) $S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=0$; б) $\dfrac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\dfrac{m-n}{m+n}$.

49. Сумма n первых членов последовательности (a_n) определяется по формуле $S_n=2n^2+3n$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

50. Некоторые числа встречаются в обеих арифметических прогрессиях 17, 21, ... и 16, 21, ... Найдите сумму первых ста чисел, встречающихся в обеих прогрессиях.

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

По преданию, шахматы были изобретены в V в. н. э. в Индии. Богатый индусский царь Шерам был так восхищен этой игрой, что решил достойно отблагодарить изобретателя шахмат Сета. Сета попросил награду, на первый взгляд поразившую своей «скромностью». Он попросил выдать ему за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую клетку — 2 пшеничных зерна, за третью — 4, за четвертую — 8 зерен, за пятую — 16 зерен и т. д. до 64-й клетки доски, т. е. за каждую следующую клетку доски следует выдавать в 2 раза больше, чем за предыдущую.

Царь Шерам был недоволен, так как считал, что Сета, прося столь ничтожную награду, пренебрегает царской милостью. Попытаемся вместе с придворным царским математиком подсчитать, сколько же зерен пшеницы должен получить изобретатель Сета.

Для того чтобы подсчитать величину награды, мы должны сложить зерна, лежащие на всех клеточках доски, т. е. сложить числа

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^{63}. \qquad (1)$$

Обозначим их сумму через S. Тогда $S=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$. Ниже мы докажем, что

$$S=\frac{2^{63}\cdot 2-1}{2-1}=2^{64}-1=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Читается это гигантское число так: 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда 709 миллионов 551 тысяча 615!

Такую награду должен был дать царь Шерам изобретателю Сету. Чтобы поместить эти зерна в амбар, в основании которого лежит прямоугольник 8×10 м, высоту этого амбара нужно взять равной 150 000 000 км — она совпадает с расстоянием от Земли до Солнца! Такого количества зерна нет ни у какого царя, и просьбу Сета выполнить невозможно.

Слагаемые суммы S образуют последовательность (1), каждый член которой получается из предыдущего умножением на 2. Такую последовательность в математике называют *геометрической прогрессией.*

Определение. Последовательность, каждый член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же число q, называется *геометрической прогрессией*. Число q называют *знаменателем* прогрессии.

По данному определению геометрическая прогрессия со знаменателем q определяется рекуррентным соотношением

$$b_{n+1} = b_n \cdot q. \qquad (2)$$

Пример 1.

а) Последовательность 3, 9, 27, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=3$.

б) Последовательность -3, -6, -12, -24, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=2$.

в) Последовательность $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{1}{3}$.

г) Последовательность $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=-\frac{1}{2}$.

д) Последовательность $2, -6, 18, -54, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=-3$.

Анализ приведенных выше примеров показывает, что характер изменения членов геометрической прогрессии зависит как от величины, так и от знака знаменателя q прогрессии.

Используя рекуррентное соотношение (2), можно получить формулу общего члена геометрической прогрессии.

Пусть последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Тогда по формуле (2) имеем

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3$$

и т. д. Рассматривая эти равенства, можно сделать индуктивное предположение, что $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Методом математической индукции читатель без труда докажет справедливость следующей теоремы:

Теорема 1. Если $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия со знаменателем q, то для всех натуральных значений n

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (3)$$

Пример 2.

Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, причем $\frac{b_4}{b_6} = \frac{1}{4}$, $b_2 + b_5 = 216$. Найдем b_1.

Решение. По формуле (3)

$$b_4 = b_1 \cdot q^3, \quad b_6 = b_1 \cdot q^5, \quad b_2 = b_1 \cdot q \text{ и } b_5 = b_1 \cdot q^4.$$

Поэтому $\frac{b_1 \cdot q^3}{b_1 \cdot q^5} = \frac{1}{4}$, откуда $q^2 = 4$. Из последнего равенства находим $q = 2$ или $q = -2$. Используя теперь второе условие, получим

$$b_1 q + b_1 q^4 = 216, \text{ или } b_1(q + q^4) = 216.$$

Отсюда при $q = 2$ находим, что $b_1 = 12$, а при $q = -2$ имеем $b_1 = 15\frac{3}{7}$.

Мы видели, что название арифметической прогрессии связано с особым свойством членов этой прогрессии. Название геометрической прогрессии также связано со свойством ее членов, которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух ее соседних членов, т. е.

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}. \qquad (4)$$

Доказательство.

По определению геометрической прогрессии

$$b_n = b_{n-1} \cdot q \text{ и } b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Поэтому $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, откуда получаем $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (4), получим, что для любых трех последовательных членов геометрической прогрессии выполняется равенство

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}. \qquad (5)$$

Докажите сами, что справедливо и обратное утверждение:

Если для всех членов последовательности (b_n), *начиная со второго, выполняется равенство* (4), *то эта последовательность — геометрическая прогрессия.*

Напомним, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ число $\sqrt{ab}$ называется *средним геометрическим чисел* a *и* b.

Таким образом, оказывается справедливым следующее предложение:

Числа a, b и c являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$|b| = \sqrt{a \cdot c}.$$

Это свойство и объясняет название геометрической прогрессии.

Пример 3.

Числа $(y-2)^2$, y^2, $(y+2)^2$ составляют геометрическую прогрессию. Найдем y.

Решение. Эти три числа составляют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда

$$y^2 = \sqrt{(y-2)^2 (y+2)^2}.$$

Решая полученное уравнение, находим

$$y^4 = (y^2-4)^2, \quad y^4 = y^4 - 8y^2 + 16, \quad y^2 = 2.$$

Значит, $y = \sqrt{2}$ или $y = -\sqrt{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

51. Найдите формулу общего члена геометрической прогрессии:

а) $4, 12, 36, \ldots$;

б) $-256, -192, -144, \ldots$;

в) $16, 8, 4, \ldots$;

г) $1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots$;

д) $-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, \ldots$;

е) $2-\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3}, 26-15\sqrt{3}, \ldots$;

ж) $m-1, \frac{(m-1)^3}{2}, \frac{(m-1)^5}{4}, \ldots$.

52. Для геометрической прогрессии, заданной формулой общего члена, запишите b_1, b_5, b_{n+3}, b_{3n}, если:

а) $b_n = 3 \cdot 5^{n-1}$; б) $b_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; в) $b_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2}$.

53. Найдите первый член и знаменатель прогрессии, если:

а) $b_4 = 8$, $b_8 = 128$; б) $b_3 = 9$, $b_7 = 729$; в) $b_2 = 6$, $b_8 = 384$; г) $b_n = \frac{5}{2^n}$.

54. Найдите номер n члена геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$, $b_n = \frac{3}{64}$. **1) 8; 2) 9; 3) 7; 4) 8,5.**

55. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии, состоящей из четырех членов, если $b_1 = \frac{2}{3}$ и $b_4 = \frac{9}{32}$.

56. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвертого членов — 30. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

57. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами (необязательно соседними) геометрической прогрессии?

58. Числа b_m образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что для любых m и n, $m < n$, имеем $b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{n+m}$.

59. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, даны ее члены $b_{m+n} = 8$ и $b_{m-n} = 16$. Найдите ее члены b_m и b_n.

60. Последовательность задана формулой общего члена. Докажите, что данная последовательность является геометрической прогрессией:

а) $b_n = 3 \cdot 2^n$; б) $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}$; в) $b_n = 5^{n-3}$.

61. Пусть $a_n = 3n + 2$. Докажите, что числа $b_n = 2^{a_n}$ образуют геометрическую прогрессию, и найдите ее знаменатель.

62. Между числами 243 и 1 поместите четыре числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.

63. Между числами 8 и 128 поместите три средних геометрических.

64. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 + bx + 16 = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b.

65. Четвертый член геометрической прогрессии больше второго на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

66. Первый член геометрической прогрессии (b_n) равен 1. При каком значении знаменателя геометрической прогрессии величина $4b_2 + 5b_3$ имеет минимальное значение?

67. Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 13, а сумма их квадратов равна 91. Найдите эти числа.

4. СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Для решения задачи, сформулированной в начале п. 3, нужно найти сумму

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}. \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на 2 и получим

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64}. \qquad (2)$$

Вычтем теперь из равенства (2) равенство (1). Выполнив приведение подобных членов, будем иметь

$$S = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Применим этот метод для вычисления суммы n первых членов геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, имеющей знаменатель $q \neq 1$.

Нам надо вычислить сумму

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \qquad (3)$$

Умножим обе части равенства (3) на q, получим

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + \ldots + b_n q,$$

или

$$S_n q = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_{n+1}. \qquad (4)$$

Вычтем из равенства (4) равенство (3) и, приведя подобные члены, получим $S_n q - S_n = b_{n+1} - b_1$.

Отсюда, учитывая, что $q \neq 1$, будем иметь

$$S_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{q - 1},$$

или

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}. \qquad (5)$$

Поскольку $b_n = b_1 q^{n-1}$, формулу (5) можно переписать в виде

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (6)$$

Отметим, что если $q < 1$, то формулу (6) удобнее применять в виде

$$S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (7)$$

Пример 1.

Найдем сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_n = 3 \cdot 2^n$.

Решение. Найдем сначала $b_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$ и знаменатель прогрессии $q = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2$. Теперь по формуле (6) находим:

$$S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{6(2^8 - 1)}{2 - 1} = 1530.$$

Пример 2.

Найдем сумму $S_n = 1 + 2\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2 + \ldots + n(\sqrt{2})^{n-1}$.

Решение. Умножим обе части данного равенства на $\sqrt{2}$, тогда

$$\sqrt{2}\,S_n = \sqrt{2} + 2(\sqrt{2})^2 + 3(\sqrt{2})^3 + \ldots + n(\sqrt{2})^n.$$

Теперь из полученного равенства вычтем равенство, заданное в условии, и, приведя подобные члены, получим

$$\sqrt{2}\,S_n - S_n = n(\sqrt{2})^n - (1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \ldots + (\sqrt{2})^{n-1}).$$

По формуле (5) имеем

$$1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \ldots + (\sqrt{2})^{n-1} = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Поэтому

$$\sqrt{2}\,S_n - S_n = n(\sqrt{2})^n - \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Из этого равенства находим искомую сумму:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\left(n(\sqrt{2})^n - \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

Пример 3.

Вычислим сумму чисел $S = 5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{55\ldots5}_{100\text{ цифр}}.$

Решение. Перепишем S в виде

$$S = 5(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{100\text{ цифр}}).$$

Число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}$ при любом натуральном n можно представить в виде

$$11\ldots1 = 1 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3 + \ldots + 1 \cdot 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Поэтому

$$S = 5\left(\frac{10 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \ldots + \frac{10^{100} - 1}{9}\right) = \frac{5}{9}(10 + 10^2 + \ldots + 10^{100} - 100).$$

Используя формулу (6), найдем, что

$$10+10^2+\ldots+10^{100}=\frac{10(10^{100}-1)}{10-1}=\frac{10(10^{100}-1)}{9}.$$

Подставив найденное число в предыдущее равенство, получим

$$S=\frac{5}{9}\left(\frac{10(10^{100}-1)}{9}-100\right)=\frac{5}{9}(10\cdot\underbrace{11\ldots1}_{100\text{ цифр}}-100)=\frac{5}{9}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{98\text{ цифр}}010=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{55\ldots5}_{98\text{ цифр}}050.$$

УПРАЖНЕНИЯ

68. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

а) $b_n=3\cdot 2^{n+3}$; б) $b_n=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

69. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, в которой:

а) $b_1=5,\ q=3,\ n=5$; в) $b_1=\sqrt{6},\ q=\sqrt{2},\ n=9$;

б) $b_1=-2,\ q=-\frac{1}{2},\ n=7$; г) $b_n=\frac{32}{81},\ q=-\frac{2}{3},\ n=6$.

70. Найдите сумму первых 12 членов геометрической прогрессии, если $b_1=\sqrt[3]{2}-1,\ b_3=(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt[3]{4}$.

71. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии $S_8=\frac{85}{64}$, а знаменатель $q=-\frac{1}{2}$. Найдите b_1.

72. Сумма n первых членов геометрической прогрессии $S_n=25\frac{34}{81}$, ее первый член $b_1=9$ и n-й член $b_n=\frac{64}{81}$. Найдите число n.

73. Сумма n первых членов геометрической прогрессии выражается формулой $S_n=4(3^n-1)$. Найдите b_1 и q.

74. Для некоторой геометрической прогрессии известно, что $S_2=4$ и $S_3=13$. Найдите S_5.

75. Докажите, что выражение $\frac{S_{n+2}-S_n}{S_n-S_{n-2}}$ зависит только от q.

76. Сумма членов геометрической прогрессии без первого члена равна $63\frac{1}{2}$, сумма членов без последнего равна 127, сумма членов без двух первых и двух последних равна 30. Найдите b_1 и q.

77. Вычислите сумму $2+22+222+\ldots+\underbrace{222\ldots2}_{100\text{ цифр}}$.

78. Решите уравнение $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{109}=0$.

79. Вычислите $\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^{11}}{1+2+\ldots+2^5}$. 1) 60; 2) 65; 3) 50; 4) 55.

80. Найдите сумму $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)^2$.

81. Докажите, что для геометрической прогрессии при любом натуральном $n \geqslant 2$ справедливо равенство $b_2+b_4+\ldots+b_{2n}=\dfrac{q}{1+q}S_{2n}$.

82. В геометрической прогрессии первый член положителен. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых трех ее членов принимает наименьшее значение?

83. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Вычислите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

84. Разность между четвертым и первым членами геометрической прогрессии равна 52, а сумма первых трех членов прогрессии равна 26. Вычислите сумму первых шести членов этой прогрессии.

85. Первый и третий члены арифметической прогрессии соответственно равны первому и третьему членам геометрической прогрессии, а второй член арифметической прогрессии превышает второй член геометрической прогрессии на 0,25. Вычислите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2.

86. Докажите, что $(\underbrace{66\ldots6}_{n\ \text{цифр}})^2+\underbrace{88\ldots8}_{n\ \text{цифр}}=\underbrace{44\ldots4}_{2n\ \text{цифр}}$.

§ 5. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Существует много примеров величин, связанных друг с другом так, что при неограниченном увеличении одной из них другая неограниченно уменьшается, приближаясь к нулю.

Пусть, например, мы имеем кусок радия массой 1 кг. Известно, что радий подвержен радиоактивному распаду и период его полураспада (время, за которое распадается половина вещества) $T=1590$ лет. Через $T=1590$ лет масса куска радия уменьшится наполовину, т. е. останется $\dfrac{1}{2}=0{,}5$ (кг). Когда пройдет промежуток времени $t=2T$ лет, масса куска станет равной половине от $\dfrac{1}{2}$ кг, т. е. $\dfrac{1}{2^2}=0{,}25$ (кг), а через промежуток времени $t=3T$ масса оставшегося куска станет равной $\dfrac{1}{2^3}=0{,}125$ (кг).

Вообще через промежуток времени $t=nT$ масса куска будет равной $\dfrac{1}{2^n}$ кг.

Таким образом, получается бесконечная последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots,$$

n-й член которой дает величину массы куска радия, оставшегося по прошествии n периодов полураспада. Понятно, что с течением времени масса оставшегося куска радия неограниченно уменьшается и со временем станет меньше 0,01; 0,0001 и т. д. Вообще если мы возьмем любое положительное число ε (эпсилон)[1], то всегда можно указать такое натуральное число N, что по прошествии времени $t=N\cdot T$ масса оставшейся части куска радия будет меньше ε. Для этого достаточно решить неравенство $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. Итак, мы получили последовательность $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, обладающую тем свойством, что для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что все члены последовательности с номерами $n>N$ будут меньше этого числа ε.

Последовательности, обладающие свойством, описанным выше, встречаются во многих приложениях математики: при изучении зависимости атмосферного давления от высоты подъема над уровнем моря, зависимости силы притяжения Землей материального тела, когда тело удаляется от Земли, и т. д. В математике такие последовательности называют *бесконечно малыми*. Обычно их обозначают (α_n), (β_n), (γ_n) и т. д.

Определение. Последовательность (α_n) называют *бесконечно малой*, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно найти натуральное число N, такое, что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Геометрический смысл этого определения состоит в следующем. Если изображать числа точками числовой оси, то неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$ или $-\varepsilon<\alpha_n<\varepsilon$ означает, что расстояния от точек, соответствующих числам α_n для $n>N$, до точки 0 не превосходят числа ε (рис. 121), т. е. эти точки принадлежат интервалу[2] $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$. Причем вне этого интервала может находиться лишь конечное число точек $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_N$.

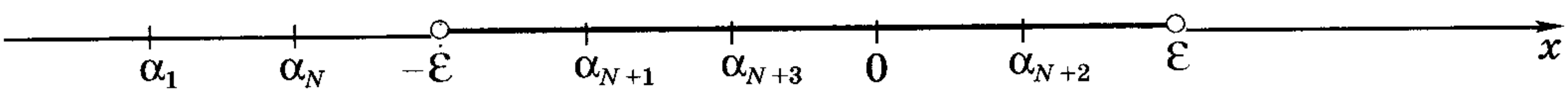


Рис. 121

[1] В математике буквой греческого алфавита ε (эпсилон) принято обозначать сколь угодно малые положительные числа.

[2] Интервал $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$ принято называть ε-окрестностью точки 0.

Пример 1.

Покажем, что последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ бесконечно малая.

Решение. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и решим неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Это неравенство верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, тогда для всех натуральных чисел $n > N$ будет выполняться неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ и по определению последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ бесконечно малая.

Если, например, взять $\varepsilon = 0{,}006$, то $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = \left[\frac{1}{0{,}006}\right] = \left[\frac{1000}{6}\right] = 166$, т. е. все члены последовательности с номерами $n = 167, 168, \ldots$ находятся в интервале $(-0{,}006;\ 0{,}006)$.

Пример 2.

Докажем, что если последовательность (α_n) постоянна и бесконечно мала, то все члены этой последовательности равны нулю.

Решение. Пусть для всех n имеем $\alpha_n = b$, причем $b \neq 0$. Тогда ни при каком значении n не может выполняться неравенство $|\alpha_n| < |b|$, а поэтому последовательность (α_n) не может быть бесконечно малой.

УПРАЖНЕНИЯ

87. Для последовательности (α_n), где $\alpha_n = \frac{15}{n^2}$, найдите α_1, α_3, α_{10}, α_{30}, α_{100}, α_{300}. Начиная с какого значения n выполняется неравенство $|\alpha_n| < 0{,}0015$?

88. Найдите натуральное число N, такое, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $\frac{1}{3n+5} < \varepsilon$, и найдите N для $\varepsilon = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}001$.

89. Укажите такое натуральное число N, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, и найдите N для $\varepsilon = 1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}001$, если:

а) $\alpha_n = \frac{1000}{\sqrt{n+1}}$; б) $\alpha_n = \frac{n^2-1}{3n^3+5}$; в) $\alpha_n = \frac{2n+5}{3n^3-2}$; г) $\alpha_n = \frac{\sqrt[3]{n}-1}{n}$.

90. Пусть имеется кусок радиоактивного вещества массой 1 кг и периодом полураспада T. Через какое время $t = n \cdot T$ останется кусок вещества массой не более 10 г для:
а) радиоактивного йода с $T \approx 8$ суток;
б) радиоактивного плутония с $T \approx 24$ года?

9*

91. Докажите, что последовательность является бесконечно малой:

а) $\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right)$; б) $\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$; в) $\left(\frac{10^4}{\sqrt[5]{n}}\right)$; г) $\left(\frac{1}{(n+2)^3}\right)$.

92. Объясните, почему последовательность:

а) $\left(\frac{n}{n+10}\right)$; б) $\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)$

не является бесконечно малой.

93. Докажите, что, для того чтобы последовательность (α_n) была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $|\alpha_n|$ была бесконечно малой.

6*. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Над последовательностями, так же как и над функциями, можно производить арифметические операции.

Суммой числовых последовательностей (a_n) и (b_n) называют новую последовательность (a_n+b_n), каждый член которой получается путем сложения соответствующих членов данных последовательностей.

Аналогично вводятся разность последовательностей (a_n-b_n), произведение $(a_n \cdot b_n)$ и частное $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ при условии, что $b_n \neq 0$. Например, если рассматривается множество прямоугольников, длины сторон которых составляют последовательности (a_n) и (b_n), то последовательность полупериметров прямоугольников является суммой этих последовательностей, а последовательность площадей прямоугольников является произведением последовательностей (a_n) и (b_n).

Если последовательности (a_n) и (b_n) бесконечно малые, т. е. длины обеих сторон прямоугольников уменьшаются, приближаясь к нулю, то полупериметры и площади прямоугольников тоже уменьшаются, приближаясь к нулю.

Этот факт является частным случаем общих свойств бесконечно малых последовательностей:

1) Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малые последовательности.

2) Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

3) Произведение бесконечно малой последовательности на постоянное число есть бесконечно малая последовательность.

Докажем, например, первое свойство. Пусть (α_n) и (β_n) — бесконечно малые последовательности. Зададим $\varepsilon>0$. По определению бесконечно малой последовательности найдется натуральное число N_1, такое, что выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N_1, \tag{1}$$

и найдется натуральное число N_2, такое, что

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N_2. \tag{2}$$

Если обозначить $N_3 = \max(N_1, N_2)$, то при $n > N_3$ выполняются оба неравенства (1) и (2), а потому выполняется и неравенство

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это доказывает справедливость свойства 1.

Аналогично могут быть доказаны остальные свойства.

Замечание

1. Методом математической индукции доказывается, что свойства 1 и 2 справедливы для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

2. Об отношении двух бесконечно малых последовательностей заранее ничего сказать нельзя (см. упр. 95).

Пример 1.

Зная, что последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ бесконечно малая, докажем, что последовательность $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ бесконечно малая.

Решение. Имеем $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$. Последовательность $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ — произведение бесконечно малых последовательностей $\left(\frac{1}{n}\right)$ и $\left(\frac{1}{n}\right)$, и по свойству 2 последовательность $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ бесконечно малая.

Методом математической индукции доказывается, что для любого числа $k \in N$ последовательность $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ бесконечно малая.

Чтобы убедиться, что последовательность является бесконечно малой, полезно следующее утверждение:

Теорема. Пусть (α_n) — бесконечно малая последовательность и последовательность (β_n) такова, что $|\beta_n| \leqslant |\alpha_n|$ для всех $n \geqslant p$, где p — некоторое натуральное число. Тогда последовательность (β_n) бесконечно малая.

Доказательство.

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку (α_n) бесконечно мала, найдется натуральное число N_1, такое, что неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$ выполнено для $n > N_1$. Для чисел $n > N_2 = \max(N_1, p)$ верны оба неравенства $|\alpha_n| < \varepsilon$ и $|\beta_n| < |\alpha_n|$, а потому и неравенство $|\beta_n| < \varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось натуральное число N_2, такое, что для всех членов последовательности (β_n) с номерами $n > N_2$ верно неравенство $|\beta_n| < \varepsilon$, и потому (β_n) — бесконечно малая последовательность.

Пример 3.

Докажем, что последовательность $\left(\frac{n}{n^2+3}\right)$ бесконечно малая.

Решение. Имеем $\left(\frac{n}{n^2+3}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2+3}$. Для любого натурального числа n верно неравенство $\frac{n^2}{n^2+3} < 1$. Значит, для всех n имеем $\frac{n}{n^2+3} < \frac{1}{n}$. Поскольку последовательность $\frac{1}{n}$ бесконечно малая, то по теореме и данная последовательность является бесконечно малой.

УПРАЖНЕНИЯ

94. Докажите, что данная последовательность бесконечно мала:

а) $\frac{5}{n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{7}{6n^3}$; в) $\frac{3}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(n+3)^6}$; д) $\frac{1}{n(n^6+2)}$.

б) $\frac{5}{(n+4)^5}$; г) $\frac{5n+9}{n(n+2)}$;

95. Даны три бесконечно малые последовательности с общими членами $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = \frac{2}{n^2}$. Докажите:

а) последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ является бесконечно малой;

б) последовательность $\left(\frac{a_n}{c_n}\right)$ не является бесконечно малой.

96. Если сумма двух последовательностей есть бесконечно малая последовательность, то следует ли, что слагаемые также бесконечно малые последовательности?

97. Если произведение двух последовательностей есть бесконечно малая последовательность, то следует ли из этого, что сомножители также бесконечно малые последовательности?

98. Назовем последовательность (a_n) ограниченной, если существует число $M>0$, такое, что для всех a_n выполняется неравенство $|a_n|<M$. Докажите, что произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть последовательность бесконечно малая.

7*. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим бесконечно малую последовательность (α_n), где $\alpha_n=\frac{1}{n}$. Поскольку $\alpha_n\neq 0$ для всех $n\in N$, то можно рассматривать последовательность с общим членом $\frac{1}{\alpha_n}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$. Нетрудно видеть, что члены последовательности $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ по мере увеличения n становятся сколь угодно большими, т. е. больше любого заранее заданного числа. Такие последовательности называют бесконечно большими.

Определение. **Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M найдется натуральное число N, такое, что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ выполнено неравенство $|a_n|>M$.**

Определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей позволяют установить между ними тесную связь. Именно справедливы утверждения:

Если последовательность (α_n) бесконечно малая и $\alpha_n\neq 0$ для всех $n\in N$, то $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ — бесконечно большая последовательность.

Обратно: если последовательность (a_n) бесконечно большая и $a_n\neq 0$ для всех $n\in N$, то $\left(\frac{1}{a_n}\right)$— бесконечно малая последовательность.

Доказательство этих утверждений читатель проведет самостоятельно.

Пример.

Докажем, что последовательность (n^4+9n^3) бесконечно большая.

Решение. Вначале покажем, что последовательность $\left(\frac{1}{n^4+9n^3}\right)$ бесконечно малая. Действительно, так как неравенство $\frac{1}{n^4+9n^3}<\frac{1}{n^4}$ верно для всех $n\in N$, а последовательность $\left(\frac{1}{n^4}\right)$ бесконечно малая, то по теореме (п. 6) последовательность $\left(\frac{1}{n^4+9n^3}\right)$ также бесконечно малая. Отсюда следует, что последовательность (n^4+9n^3) бесконечно большая.

УПРАЖНЕНИЯ

99. Докажите, что произведение двух бесконечно больших последовательностей — бесконечно большая последовательность.

100. Докажите, что сумма двух бесконечно больших последовательностей, члены которых имеют один и тот же знак,— бесконечно большая последовательность.

101. Докажите, что указанная последовательность бесконечно большая:

а) (n^3+10n^2); в) $((-1)^n \cdot n)$; д) $\left(\frac{1+n+n^5}{5-2n+n^4}\right)$;

б) $(5n-n^3)$; г) $\left(\frac{2n+n^5}{4-n^3}\right)$; е) $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

102. Укажите число n, начиная с которого выполняется неравенство:

а) $\frac{n^2+1}{n}>1\,000\,000$; б) $|n-2n^3|>1\,000\,000$.

8*. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Вернемся еще раз к примеру распада радия, рассмотренному нами в п. 5.

Как известно, радиоактивные вещества хранятся в специальных контейнерах. Предположим, что имеется контейнер массой m кг, в котором находится кусок радия массой 1 кг с периодом полураспада T.

Будем взвешивать контейнер с куском радия в моменты времени, кратные периоду полураспада: $t=T$, $t=2T$, ... , $t=n\cdot T$, ... Получим последовательность чисел $m_n=m+\frac{1}{2^n}$, где m — собственная масса контейнера, а $\frac{1}{2^n}$ — масса оставшейся части куска радия в момент времени $t=n\cdot T$. Разница между массами m_n и m:

$$m_n-m=\frac{1}{2^n},$$

равная массе оставшейся части радия, безгранично уменьшается при безграничном увеличении n. Очевидно, что значения массы контейнера с радием m_n стремятся к совпадению с собственной массой контейнера m.

Итак, мы имеем последовательность (m_n), обладающую тем свойством, что существует число m, для которого разность (m_n-m) является бесконечно малой последовательностью. В этом случае говорят, что последовательность (m_n) стремится к числу m или число m является пределом последовательности (m_n).

В общем случае вводят следующее определение:

Определение. Число b называют *пределом последовательности* (a_n), если последовательность с общим членом

$$a_n - b = \alpha_n \tag{1}$$

бесконечно мала.

Пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$. Здесь lim — начальные буквы латинского слова limes, означающего «предел».

Согласно этому определению общий член a_n последовательности, имеющей пределом число b, можно представить в виде

$$a_n = b + \alpha_n, \tag{2}$$

где (α_n) — бесконечно малая последовательность.

Из соотношения (1) и определения бесконечно малой последовательности можно сделать заключение:

число $b = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти натуральное число N, такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - b| < \varepsilon, \text{ или } b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon. \tag{3}$$

Учитывая, что $|a_n - b|$ на числовой оси определяет расстояние между точками a_n и b, получаем, что геометрически неравенство (3) означает: расстояние между точками a_{N+1}, a_{N+2}, ... и точкой b меньше ε. Иными словами, все точки a_n с номерами $n > N$ находятся на промежутке $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$, а вне этого промежутка остается лишь конечное число членов последовательности — не более N членов (рис. 122).

В этом состоит геометрический смысл определения предела последовательности.

Отметим, что члены последовательности (a_n), для которой $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$, можно рассматривать как некоторые приближения числа b. При этом погрешность приближения $|a_n - b|$ безгранично уменьшается с ростом номера n.

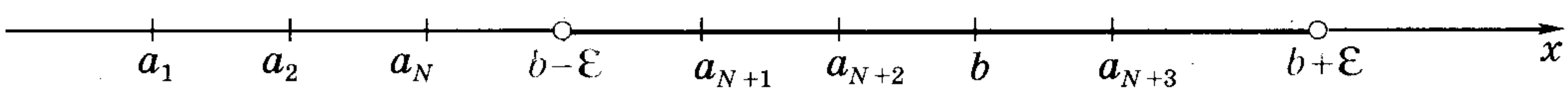


Рис. 122

Пример 1.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=3$.

Решение. Чтобы проверить, является ли число b пределом последовательности (a_n), нужно показать, что последовательность (a_n-b) бесконечно малая. Поэтому рассмотрим разность

$$\frac{3n-1}{n+1}-3=\frac{3n-1-3n-3}{n+1}=\frac{-4}{n+1}=(-4)\cdot\frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ — бесконечно малая последовательность, то и последовательность $\left(-4\cdot\frac{1}{n+1}\right)$ бесконечно мала. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=3$.

Числа $\frac{3n-1}{n+1}$ являются приближениями числа 3, для которых погрешность $\left|\frac{3n-1}{n+1}-3\right|=\frac{4}{n+1}$. Значит, члены последовательности $\left(\frac{3n-1}{n+1}\right)$ дают приближение числа 3 с любой степенью точности.

Последовательность не может иметь двух пределов, т. е. справедлива следующая теорема:

Теорема. Если последовательность (a_n) имеет предел, то он единственный.

Доказательство.

Предположим, что последовательность (a_n) имеет два предела. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. Тогда $a_n=b+\alpha_n$ и $a_n=c+\beta_n$, где (α_n) и (β_n) — бесконечно малые последовательности. Получаем равенство $b+\alpha_n=c+\beta_n$, или $b-c=\beta_n-\alpha_n$. Значит, последовательность $(\beta_n-\alpha_n)$ бесконечно мала и постоянна. В п. 5 мы доказали, что это возможно лишь в том случае, когда все члены последовательности равны нулю. Поэтому $b-c=\beta_n-\alpha_n=0$, т. е. $b=c$.

УПРАЖНЕНИЯ

103. Для последовательности (a_n), где $a_n=\frac{2n-1}{n+1}$, вычислите a_{20}, a_{300}, $a_{10\,000}$. С какой точностью найденные члены последовательности приближают число 2?

104. Докажите, пользуясь определением предела последовательности, равенство:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+5}=\frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2}=2$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+6}{n+1}=5$.

Начиная с какого n выполняется неравенство $\left|\frac{5n+6}{n+1}-5\right|<\varepsilon$ для $\varepsilon=0{,}01;\ 0{,}005;\ 0{,}0001$?

105. Докажите, что не существует предела последовательности с общим членом $a_n=(-1)^n$.

106. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

Приведите пример, показывающий, что обратное не всегда верно.

107. Приведите примеры последовательностей, не имеющих предела.

108. Имеет ли предел последовательность $\left(\frac{(-1)^n n^3+1}{n^3+1}\right)$?

9*. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы a и b, то $a_n=a+\alpha_n$, $b_n=b+\beta_n$ и при больших значениях n члены этих последовательностей изменяются достаточно мало. Значит, мало будут изменяться и их сумма и произведение. Это замечание позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. **Пусть последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$. Тогда:**

1) предел суммы последовательностей равен сумме их пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=a+b; \qquad (1)$$

2) предел произведения последовательностей равен произведению их пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b; \qquad (2)$$

3) если $b\neq 0$ и $b_n\neq 0$ для всех $n\in N$, то предел частного последовательностей (a_n) и (b_n) равен частному их пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}. \qquad (3)$$

Доказательство.

Докажем сначала утверждение 1. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, то $a_n=a+\alpha_n$ и $b_n=b+\beta_n$, где (α_n) и (β_n) — бесконечно малые последовательности.

Тогда

$$a_n + b_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Последовательность $(\alpha_n + \beta_n)$ бесконечно малая, поэтому в силу определения предела имеем $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Утверждение 2 доказывается аналогично.

Докажем теперь утверждение 3. Рассмотрим разность.

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{b(b+\beta_n)} \cdot (b\alpha_n - a\beta_n).$$

Так как последовательность (β_n) бесконечно малая, то найдется натуральное число p, такое, что $|\beta_n| < \frac{|b|}{2}$ для всех $n \geqslant p$. Тогда

$$|b(b+\beta_n)| = |b||b+\beta_n| \geqslant |b|(|b| - |\beta_n|) > |b| \cdot \frac{|b|}{2} = \frac{b^2}{2}$$

для всех $n \geqslant p$. Следовательно,

$$\left| \frac{1}{b(b+\beta_n)} \right| = \frac{1}{|b(b+\beta_n)|} < \frac{2}{b^2}$$

для всех $n \geqslant p$, и, значит,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{1}{b(b+\beta_n)} (b\alpha_n - a\beta_n) \right| < \frac{2}{b^2} |b\alpha_n - a\beta_n|.$$

для всех $n \geqslant p$.

Поскольку последовательность $\left(\frac{2}{b^2} (b\alpha_n - a\beta_n) \right)$ бесконечно малая, то по теореме п. 6 последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right)$ также бесконечно малая. А это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Теорема 2. Предел постоянной последовательности равен этой постоянной.

Доказательство.

Поскольку последовательность, все члены которой равны нулю, является бесконечно малой, а $b = b + 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} b = b$.

Из теорем 1 и 2 вытекает следствие.

Следствие.

При вычислении пределов последовательностей постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Пример 1.

Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{7}{2n}\right)$.

Решение. По теоремам данного пункта вычисляемый предел равен:

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{7}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}5-\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5-\frac{7}{2}\cdot 0=5.$$

Пример 2.

Последовательность (q^n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q: $|q|<1$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

Решение. Если $q=0$, то $q^n=0$ для любого натурального числа n и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ (по теореме 2).

Пусть $q\neq 0$. Так как по условию $|q|<1$, то $\frac{1}{|q|}>1$. Представим $\frac{1}{|q|}$ в виде суммы $\frac{1}{|q|}=1+h$, где $h>0$. Тогда, используя неравенство Бернулли (§ 2), получим $\frac{1}{|q|^n}=\left(\frac{1}{|q|}\right)^n=(1+h)^n\geqslant 1+nh$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$. Из этого неравенства находим $|q|^n\leqslant\frac{1}{1+nh}$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$. Так как последовательность $\left(\frac{1}{1+nh}\right)$ бесконечно малая (обоснуйте это самостоятельно), то по теореме п. 6 и последовательность (q^n) бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ для любого $q\neq 0$, $|q|<1$.

Замечание.

Для $|q|>1$ имеем $\frac{1}{|q|}<1$. Поэтому по только что доказанному последовательность $\left(\frac{1}{q^n}\right)$ бесконечно малая. Обратная ей последовательность (q^n) бесконечно большая (см. п. 7). Итак, если $|q|>1$, то последовательность (q^n) бесконечно большая. В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$.

УПРАЖНЕНИЯ

109. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a_n-1}{a_n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2+a_n-2}{a_n+3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^5-1}{a_n-1}$, $a_n\neq 1$.

110. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$. Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2+b_n^2}{2a_n+b_n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_nb_n-a_n)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_{n+2}}+a_{n+3}\cdot b_{n+1}\right)$.

111. Последовательность (a_n) имеет предел, последовательность (b_n) не имеет предела. Имеют ли предел последовательности:

(a_n+b_n), (a_n-b_n), $(a_n\cdot b_n)$, $\frac{a_n}{b_n}$?

112. Докажите с помощью теорем о пределах, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

113. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-4}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{2+n-2n^2}$.

114. Докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=1$.

115. Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-2}{1+2+3+\ldots+n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{(n+1)(n+2)}-\frac{n}{3}\right)$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}$;

10*. ПРИЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ РЕКУРРЕНТНО ЗАДАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теоремы, доказанные в предыдущем пункте, позволяют во многих случаях находить пределы последовательностей, заданных аналитически. В тех случаях, когда последовательность (a_n) задана рекуррентно, для вычисления ее предела часто оказывается полезным следующий прием. Предположим, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Переходя в рекуррентном соотношении к пределу, получим некоторое уравнение относительно неизвестного a. Решив это уравнение, найдем a.

Пример 1.

В § 1 нами было рассмотрено рекуррентное соотношение $x_{n+1}=$ $=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, задающее последовательность приближенных значений $\sqrt{a}$. Рассмотрим рекуррентное соотношение для последовательности приближенных значений $\sqrt{3}$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right) \tag{1}$$

с начальным значением $x_1=2$.

Предположим, что последовательность (x_n) имеет пределом число $a>0$. Так как отбрасывание или добавление в начале последовательности нескольких членов не изменяет предела этой последовательности, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Переходя в равенстве (1) к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n+\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right), \text{ или } a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right).$$

Решая это уравнение, находим корень уравнения $a=\sqrt{3}$.

Примененный прием дает верный результат только в предположении, что предел последовательности существует. Поэтому нам нужен признак, позволяющий установить, что данная последовательность имеет предел.

В 10 классе мы докажем, что справедливо утверждение:

Теорема (Вейерштрасса)[1]. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

При этом последовательность (a_n) назовем *ограниченной*, если найдутся числа a и b, такие, что для всех членов последовательности выполнено неравенство

$$a\leqslant a_n\leqslant b. \tag{2}$$

В этом случае число a называют *нижней гранью последовательности*, а число b — ее *верхней гранью*. Последовательности, имеющие верхнюю грань, называют *ограниченными сверху*, а последовательности, имеющие нижнюю грань, называют *ограниченными снизу*.

Пример 2.

Докажем, что последовательность (a_n), где $2a_{n+1}=a_n+5$ и $a_1=1$, имеет предел.

Решение. Докажем с помощью метода математической индукции, что последовательность (a_n) ограничена. При $n=1$ имеем $a_1=1<5$. Предположим теперь, что $a_k<5$, тогда $a_{k+1}=\dfrac{a_k+5}{2}<\dfrac{5+5}{2}=5$. Следо-

[1] Карл Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

вательно, по принципу математической индукции неравенство $a_n<5$ выполняется для всех n. В то же время очевидно, что все $a_n>0$, поэтому последовательность (a_n) ограничена. Покажем теперь, что она возрастает. Рассмотрим разность

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+5}{2}-a_n=\frac{1}{2}\ (5-a_n)>0$$

для всех n, так как выше было доказано, что $a_n<5$ для всех n.

Итак, данная последовательность возрастает и ограничена, следовательно, по теореме Вейерштрасса она имеет предел.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ и перейдем в рекуррентном соотношении к пределу. Получим

$$2\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n+5, \text{ или } 2a=a+5.$$

Отсюда $a=5$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$.

УПРАЖНЕНИЯ

116. Какие последовательности, заданные формулой общего члена, ограничены:

а) $a_n=(-1)^n\,\dfrac{100n}{n^2+1}$; в) $a_n=\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+1}$;

б) $a_n=n^2-17n+21$; г) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$?

117. Докажите, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением, ограничена:

а) $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$, $a_1=2$, $a_2=3$; в) $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $a_1=\sqrt{2}$.

б) $a_{n+1}=\dfrac{3}{4}\ a_n+\dfrac{1}{a_n}$, $a_1=1$;

118. Докажите, что последовательность не является ограниченной:

а) $a_n=\dfrac{2-n}{\sqrt{1+n}}$; б) $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$, $a_1=1$, $a_2=1$.

119. Найдите наименьший член последовательности:

а) $a_n=n^2-10n+11$; б) $a_n=n^2+\dfrac{16}{n^2}$.

120. Найдите наибольший член последовательности:

а) $a_n=\dfrac{2n+3}{3n-4}$; б) $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$.

121. Докажите, что любая возрастающая последовательность ограничена снизу.

122. Докажите, что любая убывающая последовательность ограничена сверху.

123. Докажите, что последовательность имеет предел, и найдите его:

а) $a_{n+1}=\frac{a_n+3}{4}$, $a_1=0$;   в) $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$;

б) $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$, $a_1=\frac{1}{2}$;   г) $a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ радикалов}}$.

11. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СУММ. СУММА БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

С каждой последовательностью (a_n) связана еще одна последовательность, члены которой получаются последовательным суммированием членов данной последовательности, т. е. последовательность

$$S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\quad S_3=a_1+a_2+a_3,\ \ldots,\quad S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

и т. д. Такие последовательности называют последовательностями сумм. Для сокращения записи их общего члена используют греческую букву Σ (сигма) и пишут:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

С последовательностями сумм мы уже встречались в этой главе. Например, в § 2 мы рассматривали сумму кубов натуральных чисел и нашли, что $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. В § 3 доказали, что для арифметической прогрессии (a_n) верно равенство $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$. В § 4 для геометрической прогрессии (bq^{n-1}) получили

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}bq^{k-1}=\frac{b(1-q^n)}{1-q}. \qquad (1)$$

Если последовательность (a_n) бесконечна, то и последовательность сумм (S_n) этой последовательности бесконечна. Следовательно, можно ставить вопрос о существовании $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Так как при увеличении n количество слагаемых, входящих в S_n, все время увеличивается, то естественно $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ назвать суммой последовательности (a_n), если, конечно, этот предел существует.

Например, рассмотрим геометрическую прогрессию (bq^{n-1}). Если $|q|<1$, то эта последовательность бесконечно малая (см. п. 9), поэтому ее называют бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Для нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии найдем, пользуясь формулой (1), предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} bq^{k-1}$.

Применяя операции над пределами, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) = \frac{b}{1-q} (1 - \lim_{n\to\infty} q^n).$$

В п. 9 (пример 2) мы доказали, что для $|q|<1$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Поэтому получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$.

Полученный ответ записывают в виде

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} bq^{k-1} = \frac{b}{1-q}.$$

(Выражение, стоящее слева, в математике называют числовым рядом.)

Итак, мы доказали, что сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии выражается формулой

$$S = \frac{b}{1-q}. \tag{2}$$

Если $|q|>1$, то последовательность (q^n) бесконечно большая (см. п. 9), следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|>1$ не имеет суммы. Не имеет она суммы и при $q=1$, так как в этом случае имеем

$$S_n = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n \text{ слагаемых}} = nb \text{ и } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} nb = \infty.$$

Пример 1.

Найдем сумму $1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots$.

Решение. Требуется найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{2}{3}$ и первым членом $b=1$. По формуле (2) получаем $S = \dfrac{b}{1-q} = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$.

Пример 2.

Представим бесконечную периодическую десятичную дробь 5,(4) в виде обыкновенной дроби.

Решение. Перепишем данное число в виде

$$5,(4) = 5,444\ldots = 5 + \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \ldots = 5 + 4\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right).$$

В скобках записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{10}$ и первым членом $b=\frac{1}{10}$. По формуле (2) имеем

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}.$$

Итак, имеем $5{,}(4)=5+4\cdot\frac{1}{9}=\frac{49}{9}$.

Пример 3.

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots .$$

а) Найдем S_n и S.

б) Определим, сколько нужно взять членов данной прогрессии для того, чтобы абсолютная погрешность $|S_n-S|$ была меньше 0,0001.

Решение. а) В нашем случае $b=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $|q|<1$, и поэтому

$$S_n=\frac{b-bq^n}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

По формуле (2)

$$S=\frac{b}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

б) Решим относительно n неравенство $|S_n-S|<0{,}0001$, т. е.

$$\left|1-\frac{1}{2^n}-1\right|<0{,}0001, \text{ или } \frac{1}{2^n}<0{,}0001.$$

Проводя вычисления с помощью калькулятора, убеждаемся, что если $n>13$, то $\frac{1}{2^n}<0{,}0001$ и $|S_n-S|<0{,}0001$.

УПРАЖНЕНИЯ

124. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots;$ в) $100,\ -10,\ 1,\ \ldots;$

б) $-25,\ -5,\ -1,\ -\frac{1}{5},\ \ldots;$ г) $6,\ 1,\ \frac{1}{6},\ \ldots\ .$

125. Запишите бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(5); б) 0,(12); в) 1,2(3); г) 2,4(51); д) 1,92(2).

126. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q, если известно, что:

а) $b_1=2,\ q=\frac{1}{4};$ б) $b_1=3,\ q=-\frac{1}{3};$ в) $b_1=-2,\ q=\frac{1}{5}.$

127. Найдите сумму:

а) $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}}+\ldots;$ б) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{9}+\frac{9}{16}+\frac{1}{27}+\frac{27}{64}+\ldots\ .$

128. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии (a_n) равен a, ее знаменатель равен $q\,(|q|<1)$. Найдите сумму:

а) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots;$ б) $|a_1+a_2|^3+|a_3+a_4|^3+|a_5+a_6|^3+\ldots\ .$

129. Решите уравнение:

а) $x^{-2}+x^{-4}+\ldots+x^{2(1-n)}+\ldots=0{,}125;$

б) $1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{x^2}{2}.$

130. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, если ее сумма равна 4, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$.

131. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

132. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, стоящих по нечетным местам, равна 36, а сумма ее членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

133. Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1 и каждый член в 3 раза больше суммы всех следующих за ним членов.

134. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1+b_2+b_3+b_4=15$ и $|b_1+b_4|=|b_2+b_3|\cdot 1{,}5$.

135. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии так, чтобы сумма ее первых шести членов составляла $\frac{7}{8}$ суммы всех ее членов.

136. Дан квадрат со сторонами a. Середины его сторон соединены отрезками. То же самое сделано с получившимся квадратом и т. д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех получившихся квадратов.

§ 6*. ПРОГРЕССИИ, ПРОЦЕНТЫ И БАНКОВСКИЕ РАСЧЕТЫ

12. ЧТО ТАКОЕ БАНК

Считается, что наряду с изобретением колеса создание банковской системы явилось одним из важнейших изобретений человечества.

Слово «банк» ведет свое происхождение от латинского banco (ба́нко) — скамья, лавка менялы. Первые менялы появились очень давно, еще до нашей эры, когда у многих народов широко распространился обычай одалживания денег под рост, т. е. с обязательством возврата не только долга, но и вознаграждения за труды. Исторические документы свидетельствуют, что в Древней Греции ростовщики забирали себе от 10 до 36% от одалживаемой суммы, в Вавилоне — до 20%, на Руси — до 40% и т. д.

Прообразом современных банковских учреждений стали банки, которые основывались в Венеции с 1171 года. В России такие банки появились в 1774 году. Эти банки давали деньги в долг королям, купцам, ремесленникам, они финансировали дальние путешествия, строительство крупных сооружений и т. п. Делалось это, конечно, небескорыстно. Как и менялы в древности, банки брали плату за пользование предоставленными деньгами. Эта плата традиционно выражается в виде процентов к величине выданной в долг сумме денег.

Слово «процент» происходит от латинского pro centum (про це́нтум) — начисление на сотню. В дальнейшем для сокращения писали: P/C, а затем эта запись перешла в знакомое нам начертание %.

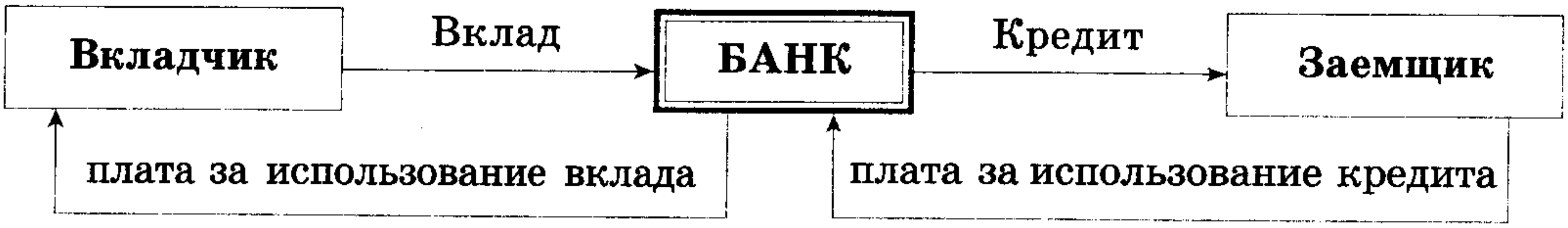
Таким образом, один процент — это сотая часть числа, например, $p_0\%$ от числа A составляют $\frac{A \cdot p_0}{100}$, или $A \cdot p$, где $p = \frac{p_0}{100}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Современные банки аккумулируют деньги, ценные бумаги, предоставляют кредиты, осуществляют операции с иностранной валютой, драгоценными металлами, выпускают бумажные деньги, монеты и т. д.

Коммерческие банки осуществляют связь между теми, кто хранит и накапливает деньги в банке, и теми, кто берет деньги у банка в долг.

Основную часть тех денег, которые банк выдает заемщикам — лицам, одалживающим деньги у банка,— составляют деньги вкладчиков, которые они вносят в банк для хранения и роста. Таким образом, банк является финансовым посредником между вкладчиками и заемщиками. Эта связь наглядно показана на схеме:

Схема взаимодействия банка с клиентами



В дальнейшем мы будем рассматривать отношения банка и вкладчика.

Обычно вкладчик открывает в коммерческом банке счет, на который он вносит определенную сумму денег. При этом вкладчик получает от банка плату в виде процентов за использование его денег для выдачи кредитов, приобретение валюты и т. д. Рассмотрим подробнее, как это происходит.

13. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Увеличение вклада за счет роста на него процентов происходит различными способами. Рассмотрим схему начисления простых процентов.

Пусть на счет внесен вклад в размере S_0 р. Банк обязуется в конце каждого года выплачивать вкладчику $p_0\%$ от первоначальной суммы S_0. $p_0\%$ называют годовой процентной ставкой.

Увеличение вклада S_0 по схеме простых процентов характеризуется тем, что величина процентов в течение всего срока хранения денег определяется только исходя из первоначальной суммы S_0 и не зависит от срока хранения вклада. Проведем расчеты.

По истечении первого года сумма начисленных процентов составит $\frac{S_0 \cdot p_0}{100}$ р., и величина вклада станет равной $S_1 = S_0 + \frac{S_0 \cdot p_0}{100}$, или $S_1 = S_0\left(1 + \frac{p_0}{100}\right)$.

Если вкладчик оставит всю сумму S_1 на счете, то по прошествии второго года ему вновь начислят $p_0\%$ на первоначальную сумму S_0 р., и величина вклада станет равной $S_2 = S_1 + \frac{S_0 \cdot p_0}{100}$, или $S_2 = S_0\left(1 + \frac{2p_0}{100}\right)$ р.

Если вкладчик снова оставляет на счете всю сумму денег, то по прошествии третьего года ему вновь начислят сумму $\frac{S_0 \cdot p_0}{100}$ р., и величина вклада достигнет значения

$$S_3 = S_2 + \frac{S_0 \cdot p_0}{100}, \text{ или } S_3 = S_0\left(1 + \frac{3p_0}{100}\right) \text{ р.}$$

Теперь понятно, что если деньги вкладчика будут находиться на счете n лет, то сумма $П_n$ начисленных процентов составит

$$П_n = \frac{nS_0p_0}{100} \text{ р.},$$

а величина первоначального вклада вместе с начисленными процентами составит $S_n = S_0 + П_n$, или

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{np_0}{100}\right) \text{ р.} \qquad (1)$$

Если обозначить $p = \frac{p_0}{100}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, то формула (1) упростится:

$$S_n = S_0(1 + np) \text{ р.}$$

Формула (1) называется *формулой начисления простых процентов*.

Начисление простых процентов обычно производят при небольших сроках хранения.

Пример 1.

Пусть сумму $S_0 = 15\,000$ р. положили на счет в банк, начисляющий 3% годовых (проценты простые). Вычислим, какой величины достигнет вклад через 5 лет.

Решение. По формуле (1) имеем

$$S_5 = S_0\left(1 + \frac{5 \cdot 3}{100}\right),$$

$$S_5 = 15\,000(1 + 0{,}15) = 17\,250 \text{ р.}$$

Вернемся к формуле (1), выпишем величины вкладов, которые окажутся на счете вкладчика через 1 год, через 2, 3 года и т. д. Получится следующий ряд чисел:

$$S_0 + \frac{S_0 \cdot p_0}{100},\ S_0 + \frac{2S_0 \cdot p_0}{100},\ S_0 + \frac{3S_0 \cdot p_0}{100},\ \ldots,\ S_0 + \frac{nS_0 \cdot p_0}{100},$$

или

$$S_0 + S_0p,\ S_0 + 2S_0p,\ S_0 + 3S_0p,\ \ldots,\ S_0 + nS_0p.$$

Мы видим, что этот ряд чисел образует арифметическую прогрессию с первым членом $S_0 + \frac{S_0 \cdot p_0}{100}$ и разностью прогрессии $d = \frac{S_0 \cdot p_0}{100}$. Поэтому говорят, что первоначальный вклад S_0 с ростом n растет как арифметическая прогрессия с разностью $d = \frac{S_0 \cdot p_0}{100}$.

В проведенных рассуждениях мы предполагали, что вклад находится в банке целое число лет. Это не всегда так. Иногда вклад находится в банке несколько лет, месяцев и дней. Чтобы решить, как вести расчет в подобных случаях, заметим, что в банковских расчетах обычно применяется соглашение о том, что если $p\%$ — годовая ставка, то ставка за полугодие составит $\frac{p}{2}$ %, за квартал — $\frac{p}{4}$ %, за месяц — $\frac{p}{12}$ %, а за один день — $\frac{p}{365}$ %. И вообще, за $\frac{1}{n}$ часть года ставка составит $\frac{p}{n}$ %.

Пример 2.

Вкладчик положил в банк $S_0 = 10\,000$ р. при условии, что банк начислит 5% годовых (проценты простые). Через 2 года 4 месяца и 20 дней вкладчик закрыл счет. Вычислим, какую сумму выплатил банк вкладчику.

Решение. Подсчитаем процентные начисления банка. За 2 года по ставке 5% годовых банк начислит сумму $П_1 = \frac{10\,000 \cdot 5 \cdot 2}{100} = 1000$ р. За 4 месяца по ставке $\frac{5}{12}$ % банк начислит сумму $П_2 = \frac{10\,000 \cdot 5 \cdot 4}{12 \cdot 100} = 166{,}7$ р. За 20 дней по ставке $\frac{5}{365}$ % банк начислит сумму $П_3 = \frac{10\,000 \cdot 5 \cdot 20}{365 \cdot 100} = 27{,}4$ р.

Теперь ясно, что вкладчик получит

$$S = 10\,000 + 1000 + 166{,}7 + 27{,}4 = 11\,194{,}1 \text{ р.}$$

С другими примерами начисления простых процентов вы встретитесь при решении задач **200—202** в конце главы.

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Начисление простых процентов, особенно при длительных сроках хранения денег на счете, не совсем безупречный способ расчета банка с вкладчиком. Действительно, если вкладчик внес S_0 р. в банк, выплачивающий p% годовых (проценты простые), то через один год на счете вкладчика окажется $S_0\left(1 + \frac{p_0}{100}\right)$ р. Этой суммой банк будет пользоваться весь год, а по его прошествии начислит проценты не на ту сумму, которой он пользовался, т. е. не на $S_0\left(1 + \frac{p_0}{100}\right)$ р., а только на первоначальную сумму S_0 р. С ростом срока хранения эта несправедливость будет только возрастать!

Рассмотрим другой способ расчета банка с вкладчиком, свободный от указанного недостатка.

Пусть по-прежнему вкладчик внес в банк S_0 р., а банк начисляет $p\%$ годовых. По прошествии одного года банк начислит вкладчику $\frac{S_0 p}{100}$ р., и сумма денег на счете будет равна

$$S_1 = S_0 + \frac{S_0 p}{100} = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Если вкладчик не снимает денег со счета, то по прошествии второго года банк начислит $p\%$ на сумму S_1, а не на первоначальную S_0!

Таким образом, через два года

$$S_2 = S_1 + \frac{S_1 p}{100} = S_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

По истечении третьего года банк начислит $p\%$ на сумму S_2 р., и на счете окажется сумма $S_3 = S_2 + \frac{S_2 p}{100} = S_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$.

Теперь становится понятно, что через n лет на счете вкладчика окажется сумма

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (1)$$

Таким образом, банк начисляет проценты не только на первоначальный вклад в S_0 р., но и на проценты, которые на него начислены. Такой способ начисления процентов на проценты в математике и экономике называют *сложными процентами*.

Рассмотрим, как меняется величина вклада с ростом срока его хранения. Из формулы (1) получаем ряд:

$$S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,\ S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Мы видим, что эти числа образуют геометрическую прогрессию с первым членом $a = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ и знаменателем $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, и поэтому говорят, что в данном случае первоначальный вклад растет как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Пример 1.

Вкладчик положил в банк 15 000 р. по схеме сложных процентов. Банк ежегодно выплачивает 8%. Подсчитаем, какая сумма денег будет на счете вкладчика через 5 лет.

Решение. Используем формулу (1) и тогда

$$S_5 = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 = 22\,039{,}92 \text{ р.}$$

Пример 2.

Определим, какую ежегодную ставку сложных процентов выплачивал банк, если за 4 года первоначальная сумма 2560 р. достигла величины 6250 р.

Решение. Из соотношения (1) выразим p: $\frac{S_n}{S_0}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. Возведем в степень $\frac{1}{n}$, тогда $1+\frac{p}{100}=\left(\frac{S_n}{S_0}\right)^{\frac{1}{n}}$ и отсюда

$$p=100\left[\left(\frac{S_n}{S_0}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]. \qquad (2)$$

Полученную формулу (2) применим к рассматриваемой задаче. Полагаем $S_0=2560$ р., $S_n=6250$ р., $n=4$, и тогда

$$p=100\left[\left(\frac{6250}{2560}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]=100\left(\frac{5}{4}-1\right)=25\%.$$

Пример 3.

Подсчитаем, сколько денег нужно внести в банк, который платит 8% в год, чтобы через 11 лет иметь на счете 20 000 р.

Решение. Из формулы $S_n=S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ найдем S_0:

$$S_0=\frac{S_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}.$$

Подставим сюда $S_n=20\,000$ р., $p=8\%$, $n=11$. Тогда

$$S_n=\frac{20\,000}{1{,}08^{11}}=8578 \text{ р.}$$

С другими примерами начисления сложных процентов вы можете познакомиться при решении задач **203—204** в конце главы.

15. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ БАНКОВСКОЙ СИСТЕМЫ

В каждом государстве действует множество коммерческих банков. Например, в России их около 1300, в США более 15 000. Работу коммерческих банков России контролирует Центральный банк России. Он устанавливает, что частью средств коммерческих банков распоряжается Центральный банк. Эти средства называются обязательными резервами коммерческого банка и устанавливаются в процентах к общей сумме денег, полученной банком.

Итак, обязательную, или резервную, часть вкладов коммерческие банки переводят в Центральный банк России, а остальными деньгами коммерческий банк распоряжается самостоятельно. Эти деньги называют избыточными или свободными резервами. Так, если коммерческий банк получил 300 000 р., а обязательные резервы составляют 18%, то сумма обязательных резервов банка составит

$$\frac{300\,000 \cdot 18}{100} = 54\,000 \text{ р.},$$

а свободные резервы составят

$$300\,000 - 54\,000 = 246\,000 \text{ р.}$$

Эту сумму коммерческий банк может дать в кредит, купить на нее ценные бумаги и т. д. Отметим, что каждый отдельно взятый коммерческий банк может выдать кредитов только на величину своих избыточных резервов.

Замечательное свойство современной системы коммерческих банков состоит в том, что способность к выдаче кредитов у всех вместе взятых коммерческих банков гораздо больше, чем у каждого банка в отдельности. Рассмотрим, как это происходит, сделав два упрощающих предположения.

1. Как только у банка появляются свободные резервы, он сразу отдает их в кредит только одному заемщику, который приобретает нужные ему товары на всю сумму кредита и расплачивается чеком, который выдал ему банк. Продавец, получив чек, полностью переводит его на свой счет в другом банке.

2. Будем считать, что доля обязательных резервов составляет $p_0 = 20\%$, т. е. каждый коммерческий банк обязан хранить в ЦБ России 20% каждого денежного поступления в банк. Остальные $q_0 = 80\%$ поступлений составляют свободные резервы, которыми коммерческий банк распоряжается самостоятельно.

Перейдем к моделированию продвижения денег внутри системы коммерческих банков, которые условно назовем «Алмаз», «Берилл», «Изумруд», «Сапфир» и «Сердолик». В дальнейшем обозначим

$$p = \frac{p_0}{100} = \frac{20}{100} = 0{,}2; \quad q = \frac{q_0}{100} = \frac{80}{100} = 0{,}8.$$

Пусть вкладчик A заработал 500 000 р. и поместил их на счет в банке «Алмаз». 20% этой суммы, т. е. 100 000 р., банк «Алмаз» переводит в Центральный банк, а остальные деньги в сумме 400 000 р. образуют свободные резервы банка. На эти деньги банк «Алмаз» открывает кредит заемщику X, выдав ему чек на 400 000 р. Заемщик X приобретает у фирмы B нужные ему товары на всю сумму 400 000 р., расплачиваясь чеком банка «Алмаз». Фирма B переводит эту сумму на свой счет, который находится в банке «Берилл».

Таким образом, в результате этой операции банк «Берилл» получил новый вклад размером 400 000 р. и начал производить с ними те же операции, которые проделал банк «Алмаз»: 20% поступившего вклада, т. е. 80 000 р., переводит в Центральный банк, а оставшиеся 320 000 р. свободных резервов оказываются в конце концов в банке «Изумруд», который вновь отправит 20%, т. е. 64 000 р., в Центральный банк, а оставшиеся свободные ресурсы размером 256 000 р. поступят в банк «Сапфир», и описанная процедура продолжится далее в банке «Сердолик».

Сведем в одну таблицу полученные результаты (табл. 1).

Таблица 1

Размещение капитала в системе банков

№	Название банка	Величина вклада (в рублях)	Обязательные резервы, 20%	Свободные резервы, 80% (величина кредита)
1	«Алмаз»	500 000	100 000	400 000
2	«Берилл»	400 000	80 000	320 000
3	«Изумруд»	320 000	64 000	256 000
4	«Сапфир»	256 000	51 200	204 800
5	«Сердолик»	204 800	40 960	163 840

Вычислим общую сумму кредитов, предоставленных системой из пяти рассмотренных банков. Конечно, с одной стороны, можно сложить числа из последнего столбца (табл. 1). Однако этот путь не рационален — ведь банков может быть много больше пяти, и кредиты могут быть даны не в тысячах, а в миллионах и даже миллиардах рублей! С другой стороны, анализ чисел последнего столбца таблицы 1 показывает, что эти числа образуют геометрическую прогрессию с первым членом $b = 400\,000$ р., знаменателем $q = 0{,}8$ и числом членов $n = 5$. Тогда искомая сумма S_5 по общей формуле суммы членов геометрической последовательности будет равна:

$$S_5 = \frac{q(1-q^5)}{1-q} = \frac{400\,000\left(1-(0{,}8)^5\right)}{1-0{,}8} = 1\,344\,640 \text{ р.}$$

Эта сумма в 3,36 раза $\left(\frac{S_5}{S_1}\right)$ больше той, которую может предоставить один банк «Алмаз».

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть n — число банков, выдающих кредиты по описанной выше схеме. Тогда общая сумма S_n кредитов, выданных n банками, найдется по формуле суммы членов геометрической прогрессии при $a = 400\,000$ р., $q = 0{,}8$:

$$S_n = b\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 400\,000\left(\frac{1}{1-0{,}8} - \frac{(0{,}8)^n}{1-0{,}8}\right) = \tag{3}$$

$$= 2\,000\,000 - (0{,}8)^n \cdot 2\,000\,000.$$

Поскольку при возрастании n числа $(0{,}8)^n$ будут неограниченно убывать, то из соотношения (3) следует, что величина S_n будет возрастать, но при этом при всех значениях n будет выполняться неравенство $S_n < 2\,000\,000$ р.

Таким образом, с ростом n величина S_n неограниченно приближается к числу $\frac{b}{1-q} = 2\,000\,000$ — сумме членов убывающей геометрической прогрессии. Отсюда следует, что число $\frac{b}{1-q} = 2\,000\,000$ р. показывает предельную суммарную величину кредитов, которые может дать система, состоящая из n банков, при увеличении их числа. Именно в этом состоит экономический смысл суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Таким образом, система, состоящая из n банков, может выдать кредитов почти в 5 раз больше $\left(\frac{2\,000\,000}{400\,000}\right)$, чем мог выдать один банк «Алмаз». Например, если $n = 64$, то по формуле (3) отклонение S_{64} от $2\,000\,000$ р. составит величину всего $(0{,}8)^{64} \cdot 2\,000\,000 = 1{,}2$ р.!

Конечно, никакая система банков не может состоять из очень большого их числа. Однако построенная нами математическая модель позволяет оценить предельные возможности банковской системы, выдающей кредиты по описанной схеме, и в этих вопросах экономике необходим строгий математический расчет.

В заключение вернемся к предельной величине средств $S = \frac{b}{1-q}$.

Множитель $\mu = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ экономисты называют мультипликатором (от англ. multiply — умножать). Он показывает, во сколько раз возрастет величина начального кредита при рассмотрении системы из бесконечного числа банков.

В нашем случае $q = 0{,}8$, $p = 1 - q = 0{,}2$ и $\mu = 5$. Поэтому система из n банков выдает кредитов почти в 5 раз больше, чем их мог бы выдать один банк «Алмаз»: результат, который был получен выше.

Рассмотрите задачи **205—206** в конце главы, которые также отражают взаимодействие элементов банковской системы.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XI

137. Докажите, что последовательность (a_n) возрастает, если ее общий член задан формулой:

а) $a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$; б) $a_n=n^3+2n$; в) $a_n=\dfrac{n^4+3n^2+1}{n^4+3n^2+6}$.

138. Выясните, какие последовательности являются ограниченными, какие неограниченными:

а) $a_n=n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n})$;

б) $a_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$;

в) $a_n=\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2(n+2)}$;

г) $a_n=|15n-n^3|$;

д) $a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_n}{2^n}$, $a_1=1$, $a_2=1$.

139. Убедитесь, что последовательность ограничена сверху, и найдите ее наибольший член:

а) $a_n=\dfrac{3^{2n}}{(2n+1)!}$; б) $a_n=\dfrac{(\sqrt{39})^n}{n!}$.

140. Докажите следующие формулы:

а) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$;

б) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

в) $\dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}$.

141. Докажите тождество:

а) $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, $x\neq 1$;

б) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}}{1+x^{2^{n-1}}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^n}{1-x^{2n}}$, $|x|\neq 1$;

в) $(1+x+\ldots+x^n)^2=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+\ldots+(n+1)x^n+nx^{n-1}+\ldots+2x+1$.

142. Докажите справедливость утверждения:

а) $3^{2n+2}-8n-9$ делится на 64;

б) $3^{2n+2}\cdot 5^{2n}-3^{3n+2}\cdot 2^{2n}$ делится на 1053;

в) $n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24;

г) $n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$ делится на 24.

143. Докажите справедливость неравенства для всех натуральных чисел n:

а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$; в) $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$;

б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; г) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

144. Докажите справедливость неравенства для всех натуральных чисел $n\geqslant 2$: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

145. Докажите, что для всех натуральных чисел $n\geqslant 3$ справедливо неравенство: а) $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$; б) $2^n\geqslant n^2-1$.

146. Числовая последовательность определяется условиями:

$$a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=a_2\cdot a_{n+1}-a_1\cdot a_n.$$

Докажите, что $a_n=2^{n-1}+1$.

147. Числовая последовательность задана условиями:

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}.$$

Докажите, что последовательность (a_n) возрастает.

148. Докажите, что последовательность имеет предел, и найдите этот предел:

а) $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b}{a_n}\right)$, $a_1=1$; б) $a_n=\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3\ldots}}}}}_{n\text{ радикалов}}$.

149. Составьте арифметическую прогрессию, первый член которой 1, а сумма первых пяти членов равняется одной четверти суммы следующих пяти членов.

150. Первый член арифметической прогрессии 2, а пятый 7. Сколько членов нужно взять, чтобы сумма их была равна 63?

1) 8; 2) 6; 3) 8; 4) 9.

151. Первый член арифметической прогрессии 1, а сумма m первых членов относится к сумме n первых членов как $m^2:n^2$. Определите n-й член.

152. Найдите сумму n первых членов прогрессии:

а) $(a+x)^2$, (a^2+x^2), $(a-x)^2$, ...; б) $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$, ...

153. Найдите сумму n членов арифметической прогрессии, если

$$a_n=\frac{3n-1}{6}.$$

154. Сумма n членов прогрессии 5, 4, 3, ... равна 14. Определите число членов.

155. Найдите сумму n членов арифметической прогрессии, m-й член которой равен $2m-1$.

156. Шесть точек A, B, C, D, E, F, лежащих на одной прямой, находятся на таких расстояниях друг от друга, что $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$ и $|EF|$ составляют арифметическую прогрессию. Расстояние $|AC|$ равно 16 см, а $|CE|$ равно 24 см. Найдите расстояние точек друг от друга.

157. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна $pn-qn^2$. Найдите m-й член.

158. A и B движутся навстречу друг другу из двух мест, отстоящих одно от другого на 168 км. A проходит в первый день 3 км, во второй 5 км и т. д. каждый день на 2 км больше, чем в предыдущий. B проходит в первый день 4 км, во второй 6 км и т. д. каждый день на 2 км больше, чем в предыдущий. Определите время, когда A и B встретятся.

159. Определите трехзначное число, цифры которого составляют арифметическую прогрессию. При делении этого числа на сумму его цифр в частном получается 48, а разность этого числа и 198 представляет число, цифры которого те же, что и у искомого, только в обратном порядке.

160. Покажите, что сумма натуральных чисел от 1943 до 1993 включительно делится на 17.

161. Число членов арифметической прогрессии нечетно. Сумма членов прогрессии, стоящих на местах с четными номерами, равна сумме членов, стоящих на местах с нечетными номерами. Найдите сумму всех членов этой прогрессии.

162. Число членов арифметической прогрессии, разность которой отлична от 0, четно, но не кратно 4. Сумма членов с четными номерами противоположна сумме членов с нечетными номерами. Докажите, что произведение всех членов прогрессии отрицательно.

163. Докажите, что для всякой арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n имеет место равенство:

а) $a_1-3a_2+3a_3-a_4=0$; б) $a_1-4a_2+6a_3-4a_4+a_5=0$.

164. Какая зависимость должна существовать между p и q для того, чтобы уравнение $x^4+px^2+q=0$ имело четыре корня, образующих арифметическую прогрессию?

165. Дана последовательность чисел $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=6$, $a_4=10$, $a_5=15$, ..., таких, что разности $a_1-a_0=1$, $a_2-a_1=2$, $a_3-a_2=3$, ... образуют ряд натуральных чисел. Найдите сумму $a_0+a_1+\ldots+a_n$.

166. Решите уравнение $x^3+x^2=a$, зная, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

167. Найдите сумму десяти членов арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, если:

а) $a_1+a_5=18$ и $a_2+a_3=12$;

б) $a_2+a_9=20$;

в) $S_4=-28$ и $S_6=58$;

г) $a_2+a_5=47$ и $a_1\cdot a_3=144$;

д) $a_3+a_6=12$ и $\dfrac{a_1}{a_5}=\dfrac{1}{3}$.

168. Градусные меры внутренних углов выпуклого многоугольника составляют арифметическую прогрессию, разность которой $d=5°$, наименьший угол равен $120°$. Сколько сторон имеет многоугольник?

169. Вычислите отношение сторон прямоугольного треугольника, зная, что его стороны составляют арифметическую прогрессию.

170. Найдите квадрат разности девятого и седьмого членов арифметической прогрессии, если произведение восьмого и четвертого ее членов на 27 меньше произведения седьмого и пятого ее членов.

171. Составьте бесконечно убывающую прогрессию, первый член которой равен 1 и каждый член, начиная со второго, равен сумме всех за ним следующих членов.

172. Составьте геометрическую прогрессию b_1, b_2, ..., b_n, у которой $b_1=1$ и $S_n-b_n=b_n-b_1$.

173. Сумма членов геометрической прогрессии без первого члена равна 63,5, сумма членов без последнего равна 127, сумма членов без двух первых и двух последних равна 30. Найдите прогрессию.

174. Докажите, что если S_n, S_{2n} и S_{3n} — суммы n, $2n$ и $3n$ первых членов геометрической прогрессии, то имеет место равенство $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

175*. Докажите, что условие

$$(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n-1}^2)(b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)=(b_1b_2+b_2b_3+\ldots+b_{n-1}b_n)^2,$$

где b_1, b_2, ..., b_n — действительные числа, является необходимым и достаточным для того, чтобы эти числа составляли геометрическую прогрессию.

176. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, даны $b_{m+n}=A$ и $b_{m-n}=B$. Найдите b_m и b_n.

177. Длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию. В каких границах может изменяться знаменатель этой прогрессии?

178. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Докажите, что каждый член этой прогрессии, начиная со второго, равен разности двух соседних с ним членов.

179. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой каждый член, начиная со второго, равен разности двух соседних.

180. Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член первой прогрессии равен 2, знаменатель ее равен $\frac{3}{4}$. Первый член второй прогрессии равен 4, а знаменатель равен $\frac{2}{3}$. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений будет равна $158\frac{3}{4}$. Найдите число членов этих прогрессий.

181. Найдите условия, при которых квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

182. Найдите четыре целых числа, если известно, что первые три из них образуют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Сумма крайних членов равна 21, а сумма средних — 18.

183. Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причем $a_1 > 0$. Дана также возрастающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n$, у которой $b_1 = a_1$ и $b_2 = a_2$. Докажите, что $b_n > a_n$ при $n > 2$.

184. Известно, что сумма n первых членов геометрической прогрессии равна S, а сумма обратных величин этих членов равна K. Найдите произведение первых n членов этой прогрессии.

185. Решите уравнение, зная, что его корни образуют геометрическую прогрессию:

а) $x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$; б) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$.

186. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $\frac{4}{3} + 1 + \frac{3}{4} + \ldots$; в) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} - \ldots$;

б) $5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{20} - \frac{1}{200} + \ldots$; г) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots$.

187. Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой каждый член был бы в 10 раз больше суммы всех следующих за ним.

188. При каком значении a сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $2a + a\sqrt{2} + a + \ldots$ равна 8?

189. Найдите обыкновенную дробь, при обращении которой в десятичную получилась бы периодическая дробь:

а) 0,(37); б) 0,23(345); в) 7,2(3).

190. Часовая и минутная стрелки часов показывают полночь. В котором часу стрелки часов встретятся вновь?

191. Сколько членов надо взять в бесконечно убывающей геометрической прогрессии 8, 7, ..., чтобы их сумма отличалась от суммы всех членов этой прогрессии меньше чем на 0,01?

192. Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots, b_n$:
а) выразите произведение всех ее членов через b_1 и b_n;
б) выразите произведение всех ее членов через S_n и через S'_n — сумму обратных величин этих членов.

193. Три целых числа, сумма которых равна 60, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Если к этим числам прибавить соответственно 2,2; 4; 7, то новые числа составят три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите наименьшее из первоначально заданных чисел.

194. Имеются две прогрессии: арифметическая и геометрическая. Два первых члена геометрической прогрессии совпадают с соответствующими (первым и вторым) членами арифметической, а третий член геометрической прогрессии больше третьего члена арифметической на 12. Напишите эти прогрессии.

195. Три отличных от нуля действительных числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные знаменатели геометрической прогрессии.

196. Три различных числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа $x+y$, $y+z$, $z+y$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

197. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой, удвоенное произведение первого члена на четвертый и третий член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной $\frac{1}{3}$.

198. Даны гипотенуза a и один из катетов b прямоугольного треугольника. Из вершины прямого угла опущен перпендикуляр на гипотенузу, из основания этого перпендикуляра опущен перпендикуляр на данный катет, из основания последнего — перпендикуляр на гипотенузу и т. д. до вершины острого угла. Определите сумму длин всех этих перпендикуляров.

199. В равнобедренный треугольник, основание которого 26 и каждая из равных сторон a, вписан круг, потом второй круг, касательный к первому и к двум равным сторонам, затем третий, касательный ко второму и также к двум равным сторонам, и т. д. до вершины треугольника. Определите сумму площадей всех этих кругов.

200. Какую сумму S_0 внесли в банк под простые проценты по ставке $p\%$, если через n лет вклад вырос на α р. Проведите расчеты в следующих случаях:

а) $p=12$, $n=5$, $\alpha=1200$;
б) $p=8$, $n=4$, $\alpha=240$;
в) $p=5$, $n=3$, $\alpha=850$;
г) $p=6$, $n=2$, $\alpha=360$;
д) выберите данные самостоятельно;
е) решите задачу в общем виде.

201. Определите годовую ставку p простых процентов, если первоначальный вклад S_0 через n лет увеличился на α р. Проведите расчеты при следующих данных:

а) $n=2$, $S_0=2000$, $\alpha=240$;
б) $n=4$, $S_0=20\,000$, $\alpha=1200$;
в) $n=3$, $S_0=70\,000$, $\alpha=420$;
г) $n=5$, $S_0=4500$, $\alpha=900$;
д) выберите данные самостоятельно;
е) решите задачу в общем виде.

202. а) Вкладчик внес в банк 12 000 р. Банк выплачивает 3% годовых. Через 2 года 3 месяца и 7 дней вкладчик закрыл счет. Подсчитайте, какую сумму ему выплатил банк.

б) Задайте самостоятельно числовые данные и проверьте расчеты.

в) Решите задачу в общем виде.

203. Выясните, какую ежегодную ставку сложных процентов выплачивал банк, если за n лет первоначальная сумма S_0 достигла величины S_n р. Проведите расчеты при следующих значениях n, S_0 и S_n:

а) $n=3$, $S_0=125\,000$, $S_3=216\,000$;
б) $n=4$, $S_0=256\,000$, $S_4=62\,500$;
в) $n=2$, $S_0=40\,000$, $S_2=48\,400$.

204. Подсчитайте, какую сумму S_0 следует внести в банк, выплачивающий p% годовых (проценты сложные), чтобы через n лет получить не менее S_n р. Проведите расчеты при следующих значениях:

а) $p=10$, $n=3$, $S_n=100\,000$;
б) $p=15$, $n=4$, $S_n=15\,000$;
в) $p=12$, $n=2$, $S_n=20\,000$.

205. Рассмотрите систему, состоящую из шести банков B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 и B_6. Норма обязательных резервов $p=25\%$. В банк B_1 поступил кредит в размере 100 000 р. Определите:

а) обязательные и свободные резервы каждого банка;

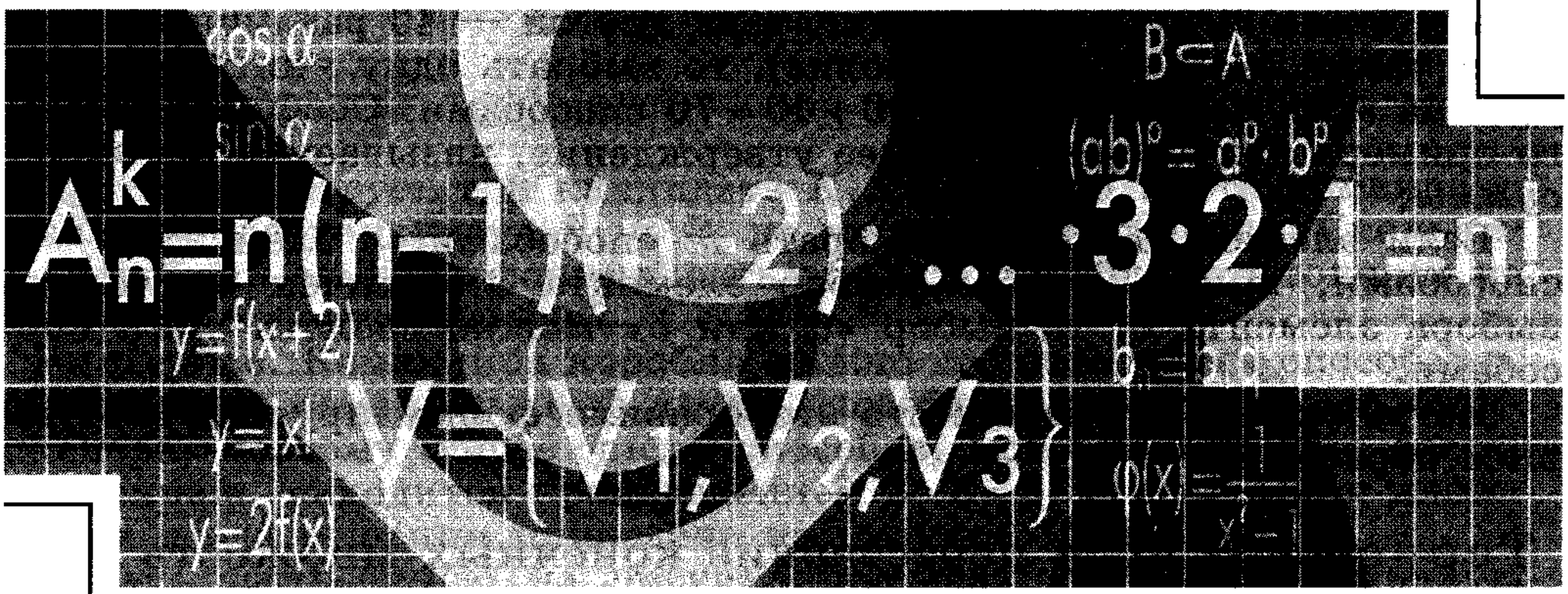
б) величину кредита, который может предоставить эта система банков;

в) предельную величину кредитов, предоставляемых этой системой банков;

г) мультипликатор.

206. Рассмотрим систему, состоящую из n банков B_1, B_2, ..., B_n. Норма обязательных резервов составляет 25%. В банк B_1 поступил вклад размером 100 000 р. Сколько надо взять банков, чтобы предоставленная ими сумма кредитов была не менее 250 000 р.? Вычисления рекомендуется проводить, пользуясь калькулятором.

Глава XII



ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ

При решении многих практических задач приходится выбирать из некоторой совокупности объектов элементы, обладающие тем или иным свойством, подсчитывать, сколько различных комбинаций можно составить из конечного числа элементов, принадлежащих заданной совокупности, располагать эти элементы в определенном порядке и т. д. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, то их называют *комбинаторными* задачами, а область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи,— *комбинаторикой*.

Появление компьютеров резко увеличило возможности комбинаторики и расширило сферу ее применения. Комбинаторные методы применяются в физике, химии, биологии, экономике, лингвистике и многих других науках.

Рассмотрим два основных закона, с помощью которых решаются многие задачи комбинаторики,— правило суммы и правило произведения.

1. ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Рассмотрим следующий пример. Если на одной полке книжного шкафа стоит 30 различных книг, а на другой — 40 различных книг (и не таких, как на первой полке), то выбрать одну книгу из стоящих на этих полках можно $30+40=70$ способами. Обобщением этого примера является следующее утверждение, называемое *правилом суммы*:

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b — n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор «a или b» можно сделать $m+n$ способами.

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом:

Теорема 1. Если пересечение конечных множеств A и B пусто, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B:

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B). \qquad (1)$$

С помощью метода математической индукции из этой теоремы получаем следствие.

Следствие 1.

Если конечные множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ попарно не пересекаются, то имеет место равенство

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)=n(A_1)+n(A_2)+\ldots+n(A_k). \qquad (2)$$

Пример 1.

При формировании экипажа космического корабля имеется 10 претендентов на пост командира экипажа, 20 — на пост бортинженера и 25 — на пост космонавта-исследователя. Ни один кандидат не претендует одновременно на два поста. Сколькими способами можно выбрать или командира, или бортинженера, или космонавта-исследователя?

Решение. Обозначим множество кандидатов на пост командира корабля через A, множество кандидатов на пост бортинженера через B и множество кандидатов на пост инженера-исследователя через C. Тогда по условию

$$n(A)=10,\ n(B)=20,\ n(C)=25.$$

Кроме того,

$$A \cap B=\varnothing,\ A \cap C=\varnothing,\ B \cap C=\varnothing.$$

По формуле (2) имеем

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 55 \text{ способов.}$$

Пример 2.

Пусть существует три кандидата K_1, K_2, K_3 на место командира корабля и два кандидата B_1 и B_2 на место бортинженера. Сколькими способами можно сформировать экипаж корабля, состоящий из командира и бортинженера?

Решение. Командира корабля можно выбрать тремя способами. После выбора командира еще двумя способами можно выбрать бортинженера, поэтому общее число способов, которыми можно составить экипаж, находится произведением $3 \cdot 2 = 6$. Графическая иллюстрация этого решения приведена на рисунке 123.

Схему, построенную на рисунке, называют *деревом*. Исходную точку обозначим O. Двигаясь всевозможными путями из точки O к правым крайним вершинам, мы получим 6 способов, которыми можно составить экипаж корабля. Все они перечислены в правом столбце.

Обобщением этого примера является следующее утверждение, называемое *правилом произведения*. Пусть множество A состоит из элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и множество B — из элементов $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Пусть из множества A выбирается любой из его m элементов и независимо от него из множества B выбирается любой из его k элементов. Выбранные элементы образуют пару (a_i, b_j), где $a_i \in A$, $b_j \in B$. Множество этих пар можно записать в следующем виде:

$$\begin{array}{c}
(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_k), \\
(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_k), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(a_m, b_1), (a_m, b_2), \ldots, (a_m, b_k).
\end{array}$$

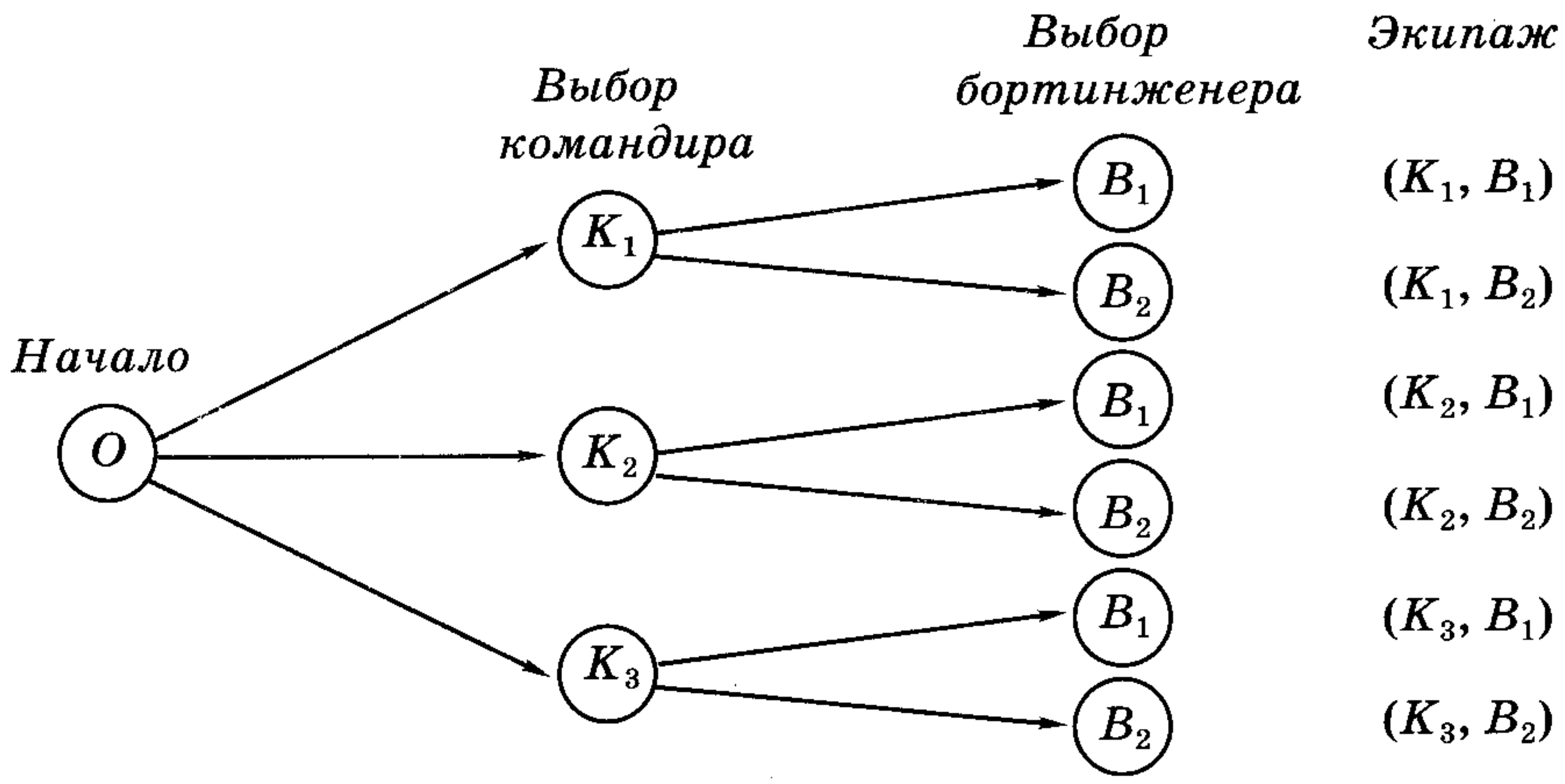


Рис. 123

Общее число N всевозможных пар равно $m \cdot k$, т. е.

$$N = n(A) \cdot n(B).$$

Таким образом, справедлива теорема 2.

Теорема 2. Если множества A и B конечны, то число N всевозможных пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$ равно произведению чисел элементов этих множеств:

$$N = n(A) \cdot n(B).$$

С помощью метода математической индукции теорема 2 обобщается на любое конечное число множеств.

Следствие 2.

Если имеется k конечных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, то число N всевозможных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_k \in A_k$, равно $N = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_k)$.

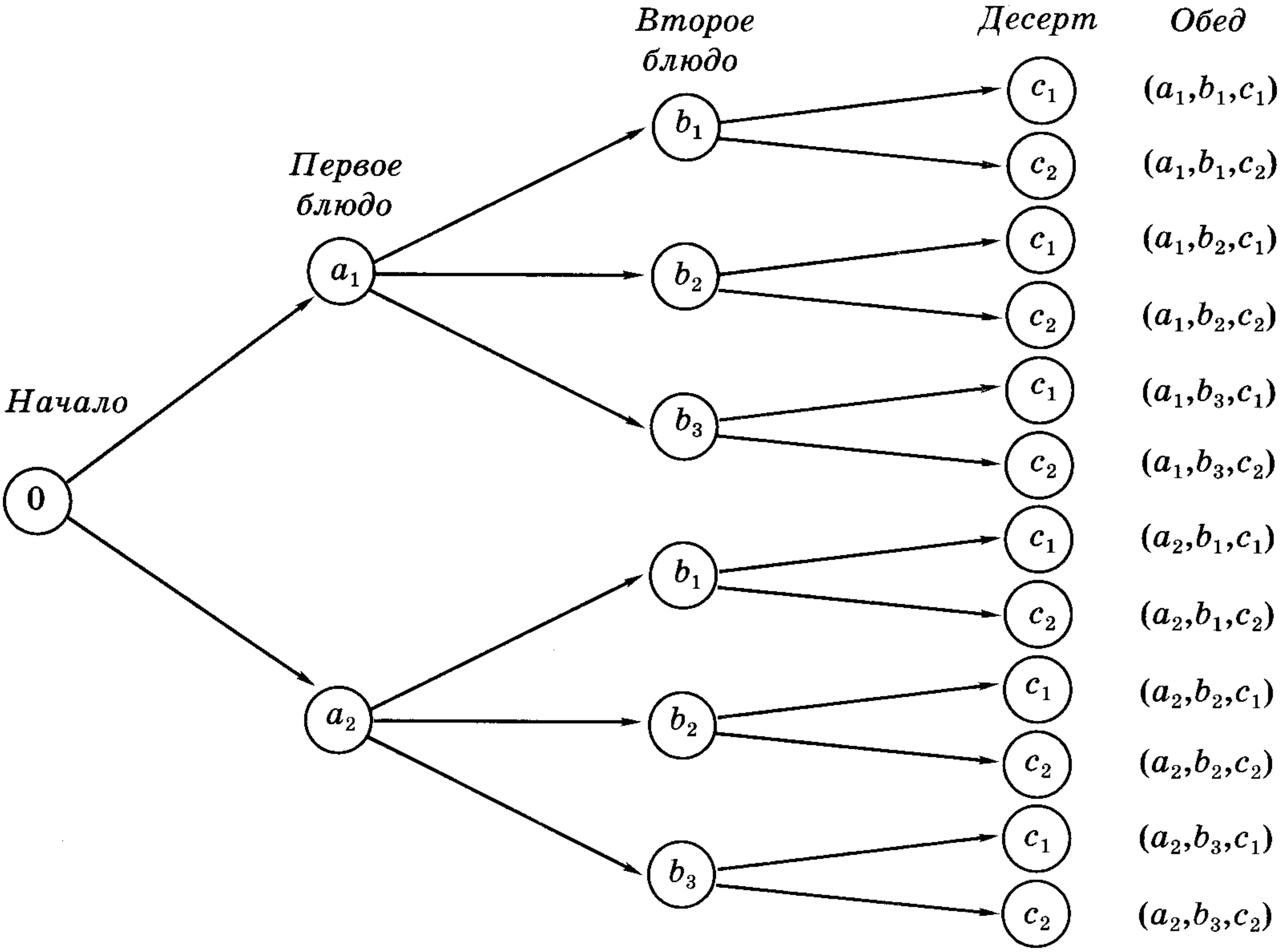


Рис. 124

Пример 3.

В столовой предлагают два различных первых блюда a_1 и a_2, три различных вторых блюда b_1, b_2, b_3 и два вида десерта c_1 и c_2. Сколько различных обедов из трех блюд может предложить столовая?

Решение. Обозначим множество первых блюд через A, множество вторых — через B и множество третьих — через C. По условию

$$n(A)=2,\ n(B)=3,\ n(C)=2.$$

Каждый обед определяется набором из трех блюд (a, b, c), где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. По правилу произведения

$$N=n(A)\cdot n(B)\cdot n(C)=12$$

столовая может предложить 12 различных обедов. Графическая иллюстрация этого решения приведена на рисунке 124.

Схема на рисунке 124 также является деревом. Двигаясь от начальной точки по всевозможным путям к крайним вершинам, мы получим 12 способов составления меню обеда. Все они перечислены в правом столбце.

В комбинаторике рассматривают три типа комбинаций объектов: размещения, перестановки и сочетания. Рассмотрим их.

2. РАЗМЕЩЕНИЯ

При решении различных задач возникает вопрос о том, сколькими способами можно выбрать k объектов из множества, содержащего n таких объектов, причем k объектов должны выбираться в определенном порядке. Другими словами, сколькими способами можно выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов?

Пример 1.

В конкурсе принимают участие 20 человек. Сколькими способами можно присудить первую, вторую и третью премии?

Решение. Существует 20 способов выбора одного кандидата на первую премию. Далее имеется 19 кандидатов, одному из которых присуждают вторую премию. Наконец, одному из 18 оставшихся кандидатов присуждают третью премию. Согласно правилу произведения для этого существует $20\cdot 19\cdot 18=6840$ способов.

Определение. *Размещениями* из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов. Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k.

Формула для числа A_n^k получается обобщением результата, полученного в примере 1.

Действительно, существует n способов выбора первого элемента. После того как он выбран, остается $(n-1)$ способ для выбора второго элемента. После выбора первого и второго элементов остается $(n-2)$ способа для выбора третьего элемента, и вообще после выбора элементов от первого до $(k-1)$-го остается $(n-k+1)$ способ для выбора k-го элемента. По правилу произведения имеем

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \qquad (1)$$

Формула (1) и дает решение поставленной задачи: выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов можно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \text{ способами.}$$

Пример 2.

В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории, литературе, русскому и английскому языкам?

Решение. Искомые команды будут отличаться между собой или учащимися, или их порядком, который указывает, на какую олимпиаду пойдет ученик. Поэтому искомое число равно числу размещений из 30 по 4 и по формуле (1) получаем

$$A_{30}^4 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720.$$

Это значит, что существует 657 720 способов выбора команды.

Пример 3.

Сколько двухбуквенных комбинаций, не содержащих повторения букв, можно составить из 32 букв русского алфавита?

Решение. Как и в предыдущем случае, мы рассматриваем размещения из 32 букв по 2, по формуле (1) имеем $A_{32}^2 = 32 \cdot 31 = 992$ двухбуквенные комбинации.

По данным «Словаря русского языка» из этих 992 комбинаций только 114 выступают в качестве самостоятельных слов (без архаизмов, сокращений, имен собственных). Например, да, ад, еж, ус, он, як, яр и т. д. Остальные 878 комбинаций бессодержательны с точки зрения русского языка.

Преобразуем формулу (1) для числа размещений.

Вначале для удобства записей введем специальный символ.

Определение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается $n!$ и читается «эн факториал». Таким образом, $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Формула для числа A_n^k получается обобщением результата, полученного в примере 1.

Действительно, существует n способов выбора первого элемента. После того как он выбран, остается $(n-1)$ способ для выбора второго элемента. После выбора первого и второго элементов остается $(n-2)$ способа для выбора третьего элемента, и вообще после выбора элементов от первого до $(k-1)$-го остается $(n-k+1)$ способ для выбора k-го элемента. По правилу произведения имеем

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \qquad (1)$$

Формула (1) и дает решение поставленной задачи: выбрать и разместить по k различным местам k из n различных предметов можно

$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ способами.

Пример 2.

В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 4 учащихся для участия в олимпиаде по истории, литературе, русскому и английскому языкам?

Решение. Искомые команды будут отличаться между собой или учащимися, или их порядком, который указывает, на какую олимпиаду пойдет ученик. Поэтому искомое число равно числу размещений из 30 по 4 и по формуле (1) получаем

$$A_{30}^4 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657\,720.$$

Это значит, что существует 657 720 способов выбора команды.

Пример 3.

Сколько двухбуквенных комбинаций, не содержащих повторения букв, можно составить из 32 букв русского алфавита?

Решение. Как и в предыдущем случае, мы рассматриваем размещения из 32 букв по 2, по формуле (1) имеем $A_{32}^2 = 32 \cdot 31 = 992$ двухбуквенные комбинации.

По данным «Словаря русского языка» из этих 992 комбинаций только 114 выступают в качестве самостоятельных слов (без архаизмов, сокращений, имен собственных). Например, да, ад, еж, ус, он, як, яр и т. д. Остальные 878 комбинаций бессодержательны с точки зрения русского языка.

Преобразуем формулу (1) для числа размещений.

Вначале для удобства записей введем специальный символ.

Определение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается $n!$ и читается «эн факториал». Таким образом, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

В частности,

$$1!=1;\quad 2!=1\cdot 2=2;\quad 3!=1\cdot 2\cdot 3=6;\quad 4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24;$$
$$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120;\quad 6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720.$$

Вычислять $n!$ для больших значений n крайне трудно, ибо с увеличением n величина $n!$ растет очень быстро.

Для удобства условились считать, что $0!=1$.

Вернемся к преобразованию формулы (1). Умножим и разделим правую часть формулы (1) на произведение чисел $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-k)$:

$$A_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-k)}=\frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Учащиеся 9 класса изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 6 различных уроков?

2. Сколько нужно иметь различных словарей, чтобы непосредственно выполнять переводы с любого из 6 языков (русского, английского, немецкого, французского, итальянского и испанского) на любой другой из этих языков?

На сколько больше нужно иметь словарей, если к перечисленным языкам добавятся еще польский, португальский и шведский языки?

3. Сколько различных шестизначных чисел можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? (Цифры в записи чисел не повторяются.)

4. Труппа театра состоит из n актеров. Известно, что четырех претендентов на ведущие роли в пьесе можно выбрать числом способов, в 56 раз большим, чем выбрать из этой же труппы двух претендентов на главные роли. Сколько артистов в труппе?

5. Из 5 чайных чашек, 6 блюдец и 7 чайных ложек хотят накрыть стол для трех человек, дав каждому из них одну чашку, одно блюдце и одну ложку. Сколькими способами можно это сделать?

6. Решите уравнение (x — натуральное число):

а) $\dfrac{A_x^5+A_x^3}{A_x^3}=43$; **1) 8; 2) 10; 3) 9; 4) 7;** б) $\dfrac{A_x^7-A_x^5}{A_x^5}=89$.

3. ПЕРЕСТАНОВКИ

Если в размещениях рассмотреть случай $k=n$, то мы получим размещения, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Другими словами, встает вопрос: сколькими способами можно переставить n различных предметов, расположенных на n различных местах?

Определение. Размещения из n элементов по n называются *перестановками*.

Число перестановок обозначается P_n. Из формулы (1) для вычисления числа P_n получаем

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (3)$$

Формула (3) утверждает, что n различных предметов, расположенных на n различных местах, можно переставить $n!$ способами.

Пример 1.

Сколько трехсловных предложений можно составить из трех слов: сегодня, дождь, идет?

Решение. Искомое число равно числу перестановок из трех элементов: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. (Составьте все шесть предложений.)

Пример 2.

Сколько перестановок можно получить из букв, составляющих слово «апельсин»?

Решение. Речь идет о вычислении P_8. По формуле (3) имеем

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Из этих комбинаций только одна — спаниель — является осмысленным словом русского языка, все остальные — бессмысленный набор букв!

УПРАЖНЕНИЯ

7. Сколькими способами могут сесть в автомобиль 5 человек, каждый из которых может быть водителем?

8. Собрание сочинений Дж. Лондона состоит из 7 томов. Сколькими способами можно разместить эти тома на книжной полке?

9. На книжной полке стоит собрание сочинений в 20 томов. Сколькими различными способами их можно переставить так, чтобы:
а) тома 1 и 2 стояли рядом;
б) тома 4 и 5 рядом не стояли?

10. Команда шахматистов состоит из 7 спортсменов. Перед игрой нужно выбрать шахматиста, выступающего на первой доске, и шахматиста, играющего на второй доске. Остальные 5 шахматистов произвольным образом играют на третьей—седьмой досках. Сколько имеется различных вариантов выступления команды на 7 досках?

1) 5040; 2) 6040; 3) 5020; 4) 5030.

11. Решите уравнение (x — натуральное число):

а) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; б) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$.

4. СОЧЕТАНИЯ

В размещениях из n элементов по k изучаемые комбинации отличаются друг от друга либо элементами, либо их порядком, либо и тем и другим. Если мы не будем различать комбинации, отличающиеся друг от друга только порядком, то придем к комбинациям, различающимся только элементами.

Определение. ***Сочетаниями*** **из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых из n элементов.**

Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k. Из определения сочетаний следует, что они отличаются друг от друга только элементами, и поэтому их еще называют *выборками*. Для вычисления числа C_n^k поступим так. Рассмотрим размещения из n элементов по k и объединим в отдельные группы такие комбинации, которые содержат k одинаковых элементов и отличаются друг от друга только порядком этих элементов. Каждая такая группа будет содержать ровно $P_k = k!$ элементов, поэтому справедливо равенство

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}. \quad (4)$$

Если для вычисления A_n^k использовать формулу (2), то получим еще одну формулу для вычисления C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (5)$$

Заменим в формуле (5) число k на число $n-k$. Тогда

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Отсюда следует, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (6)$$

Равенство (6) совершенно очевидно: каждой выборке, содержащей k элементов из имеющихся n, соответствует выборка из $(n-k)$ оставшихся элементов.

Пример 1.

В классе 25 учеников. Сколькими способами из них можно выбрать четырех учащихся для дежурства на вечере?

Решение. Искомое число совпадает с C_{25}^4 и по формуле (1) равно:

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12\,650 \text{ способов.}$$

Пример 2.

Некоторый комитет состоит из 12 человек. Минимальный кворум для принятия решения должен насчитывать 8 человек.

а) Сколькими способами может быть достигнут минимальный кворум?

б) Сколькими способами может быть достигнут какой-либо кворум?

Решение. а) Искомое число совпадает с числом C_{12}^8 и по формуле (4) равно:

$$C_{12}^8 = C_{12}^{12-8} = C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$$

б) Какой-либо кворум достигается, если на заседании присутствует 8, 9, 10, 11 или 12 членов комитета. Согласно правилу суммы искомое число равно:

$$C_{12}^8 + C_{12}^9 + C_{12}^{10} + C_{12}^{11} + C_{12}^{12} = C_{12}^4 + C_{12}^3 + C_{12}^2 + C_{12}^1 + C_{12}^0 =$$

$$= 495 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} + \frac{12}{1} + 1 = 794.$$

(При вычислении мы учли, что $0! = 1$, и поэтому $C_{12}^0 = 1$.)

Пример 3.

У 6 взрослых и 11 детей обнаружены признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить заболевание, следует взять выборочный анализ у 2 взрослых и 3 детей. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Из 6 взрослых выбрать двух можно

$$C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \text{ способами.}$$

Из 11 детей выбрать трех можно

$$C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165 \text{ способами.}$$

Согласно правилу произведения имеется $15 \cdot 165 = 2475$ способов выбора двух взрослых и трех детей.

УПРАЖНЕНИЯ

12. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани 6 цветов?

13. В забеге участвуют 12 спортсменов. Сколько существует способов занять на финише 1-е, 2-е или 3-е место?

14. Имеется 10 кроликов. Необходимо выбрать из них 4 и посадить их в 4 клетки, обозначенные K_1, K_2, K_3, K_4. Сколькими способами это можно сделать?

15. Рассмотрим множество $\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Сколько трехзначных чисел можно образовать из элементов этого множества, если не допускать повторений цифр? Сколько из этих чисел окажется меньше 500? Сколько из этих чисел больше 700?

16. На собрании должно выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д.
а) Сколькими способами можно составить список выступающих?
б) Сколько существует способов выступления, при которых Б выступает после А?
в) Сколько существует способов, при которых Б выступает непосредственно после А?

17. Выберите самостоятельно число членов некоторого комитета. Минимальный кворум для принятия решения этим комитетом должен быть не менее 0,75 его состава. Определите, сколькими способами можно достичь минимального кворума.

18. Сколькими способами можно заполнить карточку «Спортлото» (зачеркнуть 6 номеров из 49)?

19. В лабораторной клетке находятся 8 белых и 6 коричневых кроликов. Найдите число способов выбора пяти кроликов из клетки, если: а) они могут быть любого цвета; б) 3 из них должны быть белыми, а 2 коричневыми; в) все 5 кроликов должны быть белыми; г) все 5 кроликов должны быть одного цвета.

20. В генетическом эксперименте 4 белых, 7 красных и 5 розовых цветков гороха были взяты из имеющихся 10 белых, 10 красных и 10 розовых цветков. Сколькими способами можно это сделать?

21. В первые три вагона поезда садятся 9 пассажиров по 3 человека в каждый вагон. Сколькими способами можно это сделать?

22. Сколько можно составить семизначных телефонных номеров из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?

23. За столом рассаживаются n гостей. Сколько существует способов это сделать, если гости А и Б сидеть рядом не должны?

24. В школьной лотерее на 50 билетов разыгрывается 8 выигрышей. Первый подошедший к урне ученик выбирает из урны 5 билетов. Сколькими способами он может их вынуть, чтобы:
а) среди них оказалось ровно 2 выигрышных;
б) по крайней мере 2 из них оказались выигрышными?

25. На плоскости n параллельных прямых пересекаются m параллельными прямыми. Сколько параллелограммов можно выделить в образовавшейся сетке?

26. Среди 25 рабочих 5 маляров, 4 плотника и 3 штукатура. Сколькими способами можно укомплектовать бригаду из 5 человек так, чтобы в нее вошли ровно по одному маляру, плотнику и штукатуру?

27. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

28. Комплексная бригада состоит из 2 маляров, 3 штукатуров и 2 столяров. Сколько различных бригад можно создать из коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?

29. В урне находится 10 белых и 7 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны 5 шаров, из которых белыми будут 3 шара?

30. Обобщите решение задачи **29** на случай наличия m белых шаров и n черных шаров. Из урны выбирается r шаров, из которых k шаров белых.

31. Определите число элементов n из условия:

$\boxed{\text{а)}}$ $A_{2n}^3 = 20A_n^2$; **1) 5; 2) 6; 3) 4; 4) 3;**

б) $A_{n-4}^2 + A_{n-3}^2 + A_{n-2}^2 = 20$;

в) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$;

г) $C_n^3 + C_n^2 = 15(n-1)$;

д) $C_n^4 = \dfrac{15}{4} A_n^2$;

е) $120C_{n+4}^{n-1} = 72A_{n+2}^3$.

32. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 120 фехтовальщиков каждое, нужно выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

33. На вершину горы ведут 10 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое, но при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям.

34. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

35. В магазине имеется 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме этого, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

36. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен 200, а дают ему не более трех имен?

§ 2. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

5. ВВЕДЕНИЕ

В окружающей нас жизненной практике мы наблюдаем различные события, сталкиваемся с результатами многочисленных опытов и наблюдений. Одни события наступают всегда, когда выполнены некоторые условия. Так, например, увидев молнию, мы обязательно чуть позже услышим гром. В замкнутой электрической цепи, состоящей из хорошо соединенных проводников и исправного источника тока, обязательно появится электрический ток. Число подобных примеров можно значительно увеличить. Такие события называют детерминированными (от латинского слова determinare — определять).

В других нередких случаях мы сталкиваемся с такими опытами, которые могут давать различные результаты в зависимости от обстоятельств, которые мы либо не знаем, либо не умеем учесть, либо не в состоянии устранить. Так, например, при бросании однородной монеты мы не можем заранее знать, какая сторона: герб или цифра — окажется сверху! Это зависит от очень многих и неизвестных нам обстоятельств: положения монеты в момент броска, силы броска, положения руки, подбрасывающей монету, особенности поверхности, на которую падает монета, и т. д. Из-за различий в качестве сырья, затупления режущих инструментов, вибрации станка, колебаний температуры окружающей среды, колебаний напряжения электрического тока в сети и т. п. мы не в состоянии предсказать заранее, будут ли в выпущенной партии деталей бракованные изделия и если будут, то сколько их.

Игральный кубик представляет собой правильный шестигранник, имеющий очень точную геометрическую форму, сделанный из однородного материала. На его гранях стоят цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6, означающие число очков. Подбрасывая такой кубик, мы не можем знать заранее, какая из граней окажется сверху. Как и при бросании монеты, это зависит от очень многих обстоятельств.

В других ситуациях нельзя заранее предсказать, какого цвета окажется шар, вынутый из урны, в которой находятся одинаковые по форме красные и белые шары. Мы не можем заранее предсказать, прорастет или не прорастет брошенное в землю зерно, попадет стрелок в цель или промахнется, доброкачественной или бракованной окажется деталь, взятая наугад из партии выпущенных деталей, проработает ли некоторый механизм до определенного срока или выйдет из строя раньше этого срока и т. д.

Однако если рассматривать большое число случайных событий, то оно зачастую имеет свои закономерности. Так, если во время эпидемии гриппа из 1000 учеников школы заболели 400 учеников, то число $\frac{400}{1000}=0{,}4$ характеризует всю совокупность учеников, заболевших гриппом, и мы можем ожидать, что приблизительно 0,4 ученика любой школы, расположенной в этом же районе, которые еще не подвергались проверке, также заболеют гриппом. Знание таких закономерностей поможет медикам определить нужное количество лекарства, подготовить необходимое количество мест в больницах и т. д. Но предсказать, заболеет ли гриппом ваш друг Петя, невозможно.

Таким образом, наука, к изучению которой мы приступаем, будет иметь дело не с исходом отдельного опыта, а с результатом проведения достаточно большого числа опытов. При этом мы предполагаем, что условия, при которых проводят опыт, могут быть многократно воспроизведены так, чтобы была осуществима большая серия одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых происходит или не происходит случайное событие A.

В дальнейшем мы будем рассматривать различные опыты, испытания, результаты которых нельзя предсказать заранее. Любое событие, связанное с результатами опыта и которое в результате опыта может наступить или не наступить, называется *случайным событием*. В рассмотренных выше примерах приведены различные случайные события. В дальнейшем возможные результаты опыта мы будем называть его *исходами*. Раздел математики, изучающий закономерности в случайных событиях, называется *теорией вероятностей*.

Знаменитый французский ученый Блез Паскаль (1623—1662), один из создателей основ теории вероятностей, писал об этой науке: «Это учение, объединяющее точность математических доказательств с неопределенностью случая и примиряющее эти, казалось бы, противоречивые элементы, с полным правом может претендовать на титул «математики случайного».

6. ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Одним из вопросов, из которого родилась теория вероятностей, был вопрос о том, как часто наступает то или иное случайное событие в длинной серии опытов, происходящих в одинаковых условиях.

Этим условиям, в частности, удовлетворяют игры, связанные с бросанием однородной монеты и однородного кубика, с изъятием шара из урны, результаты стрельб по мишени и т. д.

Математическая энциклопедия так описывает понятие вероятности, используемое в математике: «Вероятность математическая — числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях». Отсюда следует, что в теории вероятностей нас будут интересовать не все события, наступление которых невозможно заранее предсказать, а лишь такие события, которые могут наступить или не наступить в каждом из очень большой серии опытов, проводимых в одинаковых условиях.

Рассмотрим опыт с бросанием симметричной однородной монеты. Он имеет два исхода: U_1 — «выпал герб», U_2 — «выпала цифра». Исход бросания монеты случаен, и заранее сказать с уверенностью, выпадет герб или цифра, невозможно! Этот опыт можно проводить в одних и тех же условиях сколь угодно много раз.

Однако, несмотря на случайность исхода этого опыта в каждом отдельном испытании, при многократном его повторении можно наблюдать интересную закономерность. Она состоит в следующем. Подбросим нашу монету n раз и подсчитаем, сколько раз выпал герб. Обозначим это число через $n(\Gamma)$. Отношение $\frac{n(\Gamma)}{n}$ называется частотой исхода «выпал герб» в данной серии опытов.

Замечательная закономерность состоит в том, что эта частота приблизительно равна $\frac{1}{2}$. В таблице приведены результаты серии опытов, когда монета подбрасывалась 10 000 раз. При этом отдельно рассматривались 10 серий по $n = 1000$ испытаний и в каждой серии регистрировалось число $n(\Gamma)$ выпадений герба и вычислялась частота исхода «выпал герб». Получились следующие результаты:

Номер серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число выпадений герба	501	485	509	536	485	488	500	487	484	484
Частота исхода «выпал герб»	0,501	0,485	0,509	0,536	0,485	0,488	0,500	0,487	0,484	0,484

Таблица показывает, что частота появления герба от серии к серии случайным образом колеблется около $\frac{1}{2}$. На рисунке 125 на оси Ox отложены номера серий, а на оси ординат — частоты появления герба в соответствии с таблицей.

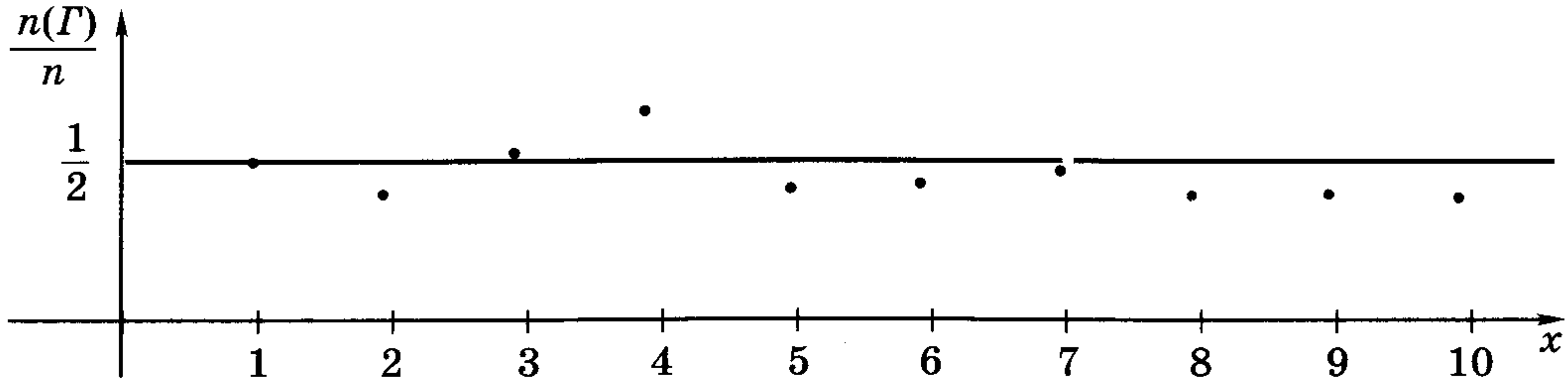


Рис. 125

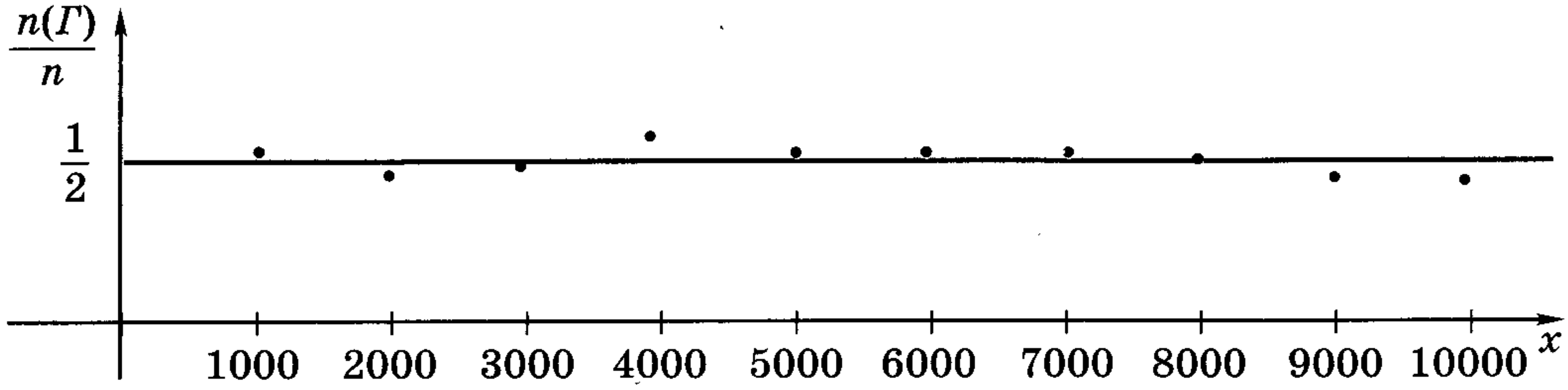


Рис. 126

Если заново повторить эксперимент, то значения частот $\frac{n(\Gamma)}{n}$ получатся иными, но картина колебаний частот обнаружит устойчивость — отклонения вверх и вниз от прямой $\frac{n(\Gamma)}{n}=\frac{1}{2}$ будут взаимно уравновешиваться, величины отклонений хоть и будут меняться от серии к серии, но тенденции к увеличению или к уменьшению не обнаружат. Таблица и рисунок 126 показывают, что вероятность исхода «выпал герб» мало отличается от числа 0,5. Это число, обозначаемое в математике буквой P (от английского слова probability — вероятность), и является вероятностью исхода «выпал герб»:

$$P\ (\text{выпадение герба})=\frac{1}{2}.$$

Свойство устойчивости частот при большом числе опытов, проводимых в одинаковых условиях,— одно из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в массовых случайных событиях. Это подтверждается и конкретными примерами. Так, например, французский математик Ж. Бюффон (1707—1788) подбрасывал монету 4040 раз — герб выпал 2048 раз, а у английского математика К. Пирсона (1857—1936), подбрасывавшего монету 24 000 раз, герб выпал 12 012 раз.

Рассмотрим общий случай. Пусть A — случайное событие, которое в результате опыта может наступить или не наступить. Обозначим через n число опытов, проходящих в одинаковых условиях.

Пусть $n(A)$ — число тех опытов, в которых наступило событие A. Отношение $\frac{n(A)}{n}$ называется *частотой события* A в данной серии опытов. Как показывает практика, при многократном повторении одного и того же опыта в одних и тех же условиях частота наступления события A остается все время примерно одинаковой и очень редко значительно отклоняется от некоторого постоянного числа, которое называют вероятностью рассматриваемого события и обозначают $P(A)$. Отсюда следует, что вероятность случайного события A можно приближенно оценивать с помощью частот в длинной серии опытов, полагая

$$P(A)\approx\frac{n(A)}{n}.$$

Такой подход к определению вероятности случайного события называется статистическим. Конечно, само существование вероятности $P(A)$ не зависит от того, проводим мы опыты или нет,— это число характеризует случайное событие A, и около него группируются частоты $\frac{n(A)}{n}$. На вопрос о том, сколько нужно сделать опытов, чтобы частота $\frac{n(A)}{n}$ была «близка» к вероятности $P(A)$, отвечает другая наука, тесно связанная с теорией вероятностей. Она называется *математической статистикой*.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

Длительные наблюдения над полом новорожденных показали, что частота рождения мальчиков колеблется около числа 0,515, а частота рождения девочек — около 0,485. Поэтому вероятность рождения мальчика принимают равной $P_1 = 0{,}515$, а вероятность рождения девочки — $P_2 = 0{,}485$.

В некоторых случаях для упрощения расчетов полагают обе вероятности равными 0,5.

Пример 2.

Исследование частоты использования букв русского алфавита в длинных отрывках русского текста[1] показало, что наиболее часто появляется буква «о» — ее частота равна 0,090; буква «а» имеет частоту 0,062; буква «р» имеет частоту 0,040; реже всех появляется буква «ф» — ее частота равна всего лишь 0,002. Отсюда видно, что самая частая буква «о» употребляется почти в 50 раз чаще, чем самая редкая русская буква «ф»! Эти частоты принимаются за вероятности появления в тексте букв русского алфавита! Это означает, что в длинном тексте, содержащем, например, N букв, буква «о» встретится примерно $0{,}09\,N$ раза, буква «а» — $0{,}062\,N$ раза, а буква «ф» — только $0{,}002\,N$ раза.

Пример 3.

Для составления частотного словаря русского языка изучили различные тексты из художественной литературы, драматургии, публицистики и научных статей, журнальных и газетных статей[2]. Они содержали 1 056 382 слова (существительные, глаголы, предлоги, союзы и т. д.). Среди этих слов оказалось 39 268 различных. Затем авторы словаря подсчитали, сколько раз употреблено каждое из

[1] См.: Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация.— М.: Наука, 1974.— С. 189.

[2] См.: Частотный словарь русского языка.— М.: Русский язык, 1977.— С. 922.

этих слов, и расположили их по частоте употребления. Оказалось, что чаще всех в рассмотренных текстах употребляется предлог «в» вместе с формой «во» — они встретились 42 854 раза и их частота равна $\frac{42\,854}{1\,056\,382}=0{,}041$. Вторым по частоте стоит предлог «и», который встретился 36 266 раз, и его частота равна $\frac{36\,266}{1\,052\,382}=0{,}035$. Слово «мы» стоит на 16-м месте, оно употреблено 6246 раз и имеет частоту 0,006. Первый глагол «мочь» появился на 35-м месте и употреблен 3373 раза. Его частота равна 0,0003. Первое существительное «год» стоит на 49-м месте, употреблено 2167 раз, и его частота равна 0,0002. Продолжая этот процесс, можно найти частоты всех 39 268 слов, фигурирующих в словаре. Эти частоты принимаются за вероятности появления слов в текстах, написанных на русском языке.

УПРАЖНЕНИЯ

37. Проверка 1000 деталей, выпущенных при неизменной технологии, обнаружила 80 бракованных деталей. Чему равна частота и чему приближенно равна вероятность события A: «наугад взятая деталь бракованная»? Из этой партии деталей выбирается наугад 100 деталей.
а) Может ли оказаться, что все 100 деталей годные?
б) Может ли оказаться, что все 100 деталей бракованные?
в) Можно ли утверждать, что из выбранных деталей ровно две детали бракованные, а остальные доброкачественные?
г) Сколько (приближенно) бракованных деталей можно ожидать среди 100 000 деталей?

38. Обследование 16 000 семей, имеющих двух детей, дало следующие результаты: в 3968 семьях оба ребенка — мальчики; в 4112 семьях оба ребенка — девочки; в остальных семьях один ребенок — девочка, другой — мальчик.
а) Чему приближенно равны вероятности событий:
A — «в наугад взятой семье оба ребенка — девочки»;
B — «в наугад взятой семье оба ребенка — мальчики»;
C — «в наугад взятой семье один ребенок — девочка, другой — мальчик»?
б) Рассмотрим 200 000 семей, имеющих двух детей. Сколько можно ожидать (приближенно) среди них семей с двумя девочками, двумя мальчиками, семей, где один ребенок — девочка, другой — мальчик?

39. Обследование 30 000 жителей во время эпидемии гриппа выявило среди них 7451 больного. Чему равна частота и чему приближенно равна вероятность события A: «наугад выбранный житель болен гриппом»?
а) Можно ли утверждать, что гриппом заболеет ваш друг?

б) В школе 1400 учащихся. Сколько приближенно можно ожидать больных гриппом в этой школе?

40. Стрелок в неизменных условиях делает 10 серий выстрелов по мишени. В каждой серии 100 выстрелов. Результаты стрельб приведены в таблице.

Номер серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество попаданий в мишень	68	63	72	79	65	69	68	75	71	72

Найдите частоту попадания в мишень:
а) в первых 500 выстрелах (серии 1—5);
б) в последних 500 выстрелах (серии 6—10);
в) в 500 выстрелах (серии 2, 4, 6, 7, 8);
г) в 1000 выстрелах (серии 1—10).

Рассмотрите серии с возрастающим количеством выстрелов, для этого рассмотрите новые серии, которые получаются при объединении двух первых серий таблицы, трех первых серий и т. д. до объединения всех 10 серий. Выпишите частоты поражения мишени в новых сериях. Какие особенности в их поведении вы можете отметить? Можете ли вы высказать гипотезу о вероятности поражения стрелком мишени?

7. ОПЫТЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ РАВНОВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ

Одним из первых понятий теории вероятностей является понятие равновозможных исходов некоторого опыта. Такие опыты легче всего поддаются анализу.

Рассмотрим примеры.

1. Бросание симметричной однородной монеты. Рассмотрим опыт: монета подбрасывается один раз. Будем считать, что возможен только один из двух исходов:

исход U_1: монета упала вверх гербом (Г);

исход U_2: монета упала вверх цифрой (Ц).

Таким образом, множество исходов рассматриваемого опыта состоит из двух элементов (U_1; U_2).

Симметрия и однородность монеты обеспечивают ей одинаковую возможность упасть после подбрасывания вверх гербом или цифрой: ни одна из сторон монеты не имеет преимуществ перед другой. В этом смысле мы говорим, что исходы U_1 и U_2 *равновозможные*. Другими словами, мы считаем, что выпадение герба имеет такие же шансы осуществиться, как и выпадение цифры.

2. Бросание симметричного однородного игрального кубика. Рассмотрим опыт: игральный кубик подбрасывается один раз. Будем считать, что возможен один и только один из следующих исходов:

U_1: на верхней грани кубика выпала цифра 1;

U_2: цифра 2;

U_3: цифра 3;

U_4: цифра 4;

U_5: цифра 5;

U_6: на верхней грани кубика выпала цифра 6.

Таким образом, множество исходов рассматриваемого опыта состоит из шести элементов (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6). Так же как и для симметричной однородной монеты, симметричность и однородность кубика обеспечивают ему одинаковую возможность упасть после подбрасывания кверху любой из шести граней — ни одна из них не имеет преимуществ перед другими. Мы говорим, что для осуществления каждого из этих исходов имеется один шанс из шести. Таким образом, исходы U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 равновозможные.

3. Бросание двух однородных симметричных монет. Рассмотрим опыт: подброшены две монеты. Возможные исходы опыта таковы:

U_1: на первой монете выпал герб (Г), на второй монете выпал герб (Г);

U_2: на первой монете выпал герб (Г), на второй монете выпала цифра (Ц);

U_3: на первой монете выпала цифра (Ц), на второй монете выпал герб (Г);

U_4: на первой монете выпала цифра (Ц), на второй монете выпала цифра (Ц).

Таким образом, множество исходов рассматриваемого опыта состоит из четырех элементов:

$$U_1 = (\text{Г, Г}); \qquad U_2 = (\text{Г, Ц}); \qquad U_3 = (\text{Ц, Г}); \qquad U_4 = (\text{Ц, Ц}).$$

Как и в предыдущих случаях, симметричность и однородность монет обеспечивают равновозможность исходов U_1, U_2, U_3, U_4: для осуществления каждого из них имеется один шанс из четырех.

Дерево исходов этого опыта изображено на рисунке 127.

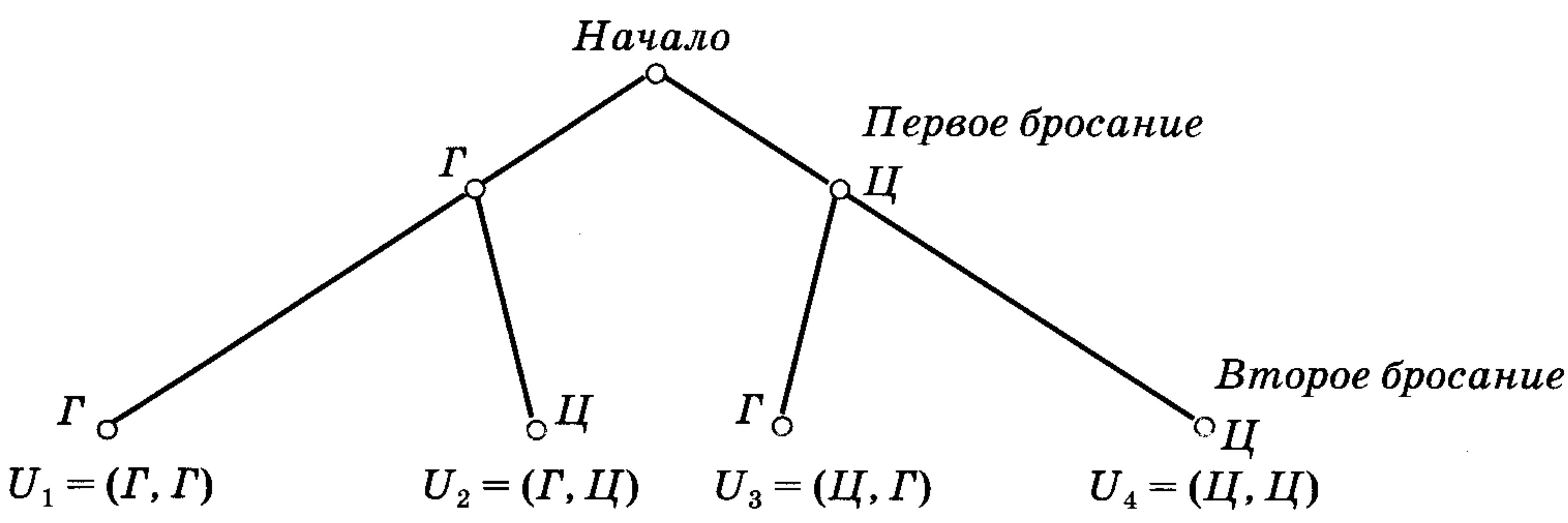


Рис. 127

4. Бросание двух игральных симметричных однородных кубиков. Возьмем два кубика красного и белого цвета. Рассмотрим опыт: подброшены два игральных кубика. Будем следить за тем, какой гранью кверху упал каждый кубик. Возможные исходы этого опыта удобно записать в виде таблицы.

Число очков на верхней грани белого кубика / Число очков на верхней грани красного кубика	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Каждая строка таблицы соответствует фиксированному значению числа очков, выпавших на красном кубике, а каждый столбец соответствует фиксированному значению числа очков, выпавших на белом кубике.

В целом множество исходов этого опыта есть множество упорядоченных пар {(к, б)}, где к — число очков на красном кубике, б — число очков на белом кубике, и каждое из них принимает значение 1, 2, 3, 4, 5 или 6.

Например, пара (5, 3) означает, что на верхней грани красного кубика выпало 5 очков, а на верхней грани белого кубика — 3 очка. Ясно, что общее их число равно 36. Занумеровать их можно, двигаясь, например, по строчкам:

$$U_1=(1,\ 1);\ U_2=(1,\ 2);\ U_3=(1,\ 3);\ U_4=(1,\ 4);$$
$$U_5=(1,\ 5);\ U_6=(1,\ 6);\ U_7=(2,\ 1);\ \ldots;\ U_{12}=(2,\ 6);$$
$$U_{13}=(3,\ 1);\ \ldots;\ U_{18}=(3,\ 6);\ \ldots;\ U_{31}=(6,\ 1);\ \ldots;\ U_{36}=(6,\ 6).$$

Поскольку кубики симметричны и однородны, то все 36 исходов опыта являются равновозможными: для осуществления каждого из этих исходов имеется один шанс из 36!

УПРАЖНЕНИЯ

41. Опишите множество равновозможных исходов следующего опыта:
а) В урне на карточках написаны буквы русского алфавита. Опыт состоит в изъятии одной карточки.
б) В карточной колоде 52 карты. Опыт состоит в извлечении одной из них.
в) Буквы слова «кино» написаны на карточках и помещены в урну. Опыт состоит в изъятии двух карточек.
г) Опыт состоит в подбрасывании трех монет, каждая из которых независимо друг от друга может упасть вверх гербом «Г» или цифрой «Ц». Постройте дерево исходов.

8. ИСХОДЫ И СОБЫТИЯ

Рассмотрим опыт, имеющий конечное число исходов, которые мы обозначим U_1, U_2, U_3, ..., U_n.

Эти исходы называются несовместными в данном опыте, если в результате опыта никакие два исхода не могут появиться одновременно.

Исходы U_1, U_2, U_3, ..., U_n образуют полную группу исходов, если в результате опыта обязательно должен появиться один из исходов. Полную группу взаимно несовместных событий часто называют множеством элементарных исходов. Множество исходов является удобным математическим описанием возможных результатов опыта.

Как мы уже отмечали, при бросании однородного кубика возможны шесть исходов: U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, означающих, что на верхней грани кубика выпадает 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков.

Эти исходы образуют полную группу взаимно несовместных исходов.

Можно заметить, что, кроме перечисленных исходов, результатом рассматриваемого опыта могут быть и другие явления, определяемые возможными результатами опыта. Так, например, можно говорить о появлении на верхней грани кубика четного числа очков, о появлении на верхней грани кубика числа очков, равного простому числу, о появлении числа очков, большего единицы и меньшего шести, о непоявлении числа очков, кратного трем, о появлении числа очков, небольшего четырех и т. д.

Перечисленные явления естественно описывать множествами, составленными из исходов U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, т. е. подмножествами множества исходов рассматриваемого опыта. Так, в первом случае речь идет о множестве $A(2, 4, 6)$, а во втором — о множестве $B(2, 3, 5)$, в третьем — о множестве $C(2, 3, 4, 5)$, в четвертом — о множестве $D(1, 2, 4, 5)$, в пятом — о множестве $E(1, 2, 3, 4)$. Введем следующее определение.

Событием A в рассматриваемом опыте называется любое подмножество, составленное из его исходов. Другими словами, если U — множество исходов рассматриваемого опыта, то событием A мы называем любое подмножество множества U, $A \subseteq U$. При этом, если $A = U$, то A — достоверное событие, если же $A = \varnothing$, то A — невозможное событие.

9. ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ОПЫТАХ С РАВНОВОЗМОЖНЫМИ ИСХОДАМИ (КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

Как же находить вероятности различных случайных событий? Можно, конечно, вычислить частоты появления события, но, чтобы частота была близка к вероятности, нужно сделать очень много опытов, что не всегда возможно или не всегда рационально. Например, для того чтобы определить вероятность события A: «наугад взятая электрическая лампочка будет гореть не менее 1000 часов», следует взять большое число лампочек, включить их на 1000 часов и подсчитать, сколько из них перегорит. При этом ясно, что вся партия лампочек будет уничтожена.

Мы рассмотрим один частный случай, когда вероятность события определяется без проведения опытов. Это можно сделать тогда, когда все исходы опыта равновозможны. Именно такие примеры мы рассмотрели в п. 7. Этот подход был предложен французским математиком П. Лапласом (1749—1817). Рассмотрим опыт, имеющий конечное число равновозможных исходов, которые мы обозначим $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Предположим, что в каждом опыте наступает один и только один исход. Про такие исходы говорят, что они *не пересекаются*. Этим условиям, например, удовлетворяли все опыты, рассмотренные в примерах 1—4 п. 7.

Пусть A — некоторое событие, связанное с данным опытом, которое в результате этого опыта может наступить или не наступить. Мы назовем исход U_k благоприятным событию A, если его наступление в результате опыта приводит к наступлению события A. Обозначим через $n(A)$ число исходов, благоприятных событию A. В этом случае вероятность определяется по следующей простой формуле:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}. \quad (1)$$

Такой подход к определению вероятности события называется *классическим*.

Из формулы (1) следует, что $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Если событию A благоприятствуют все исходы $U_1, U_2, \ldots, U_n$, то

$$n(A) = n \text{ и } P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$

Такое событие A называется *достоверным*. Пример достоверного события A: «при бросании двух игральных кубиков сумма очков на верхних гранях не меньше двух и не больше 12», так как $P(A)=1$.

Если событию A не благоприятствует ни один исход, то $n(A)=0$ и $P(A)=0$. Такое событие A называют *невозможным*.

При бросании двух кубиков событие B: «сумма очков на верхних гранях кубиков равна 13» — является невозможным и $P(B)=0$.

Рассмотрим примеры вычисления вероятностей.

Пример 1.

В опыте с подбрасыванием однородного игрального кубика рассмотрим событие A: «на верхней грани кубика выпало не более 4 очков». Найдем $P(A)$.

Решение. В п. 7 мы установили, что этот опыт имеет 6 равновозможных исходов: U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 и U_6, где исход U_k означает выпадение k очков, $k=1$, 2, 3, 4, 5, 6. Это означает, что $n=6$. Событие A наступает тогда, когда на верхней грани выпадает одно, два, три или четыре очка, поэтому событию A благоприятствуют исходы U_1, U_2, U_3 и U_4, и, следовательно, $n(A)=4$. По формуле (1)

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Пример 2.

Известно[1], что тексты, принадлежащие А. С. Пушкину, содержат 544 777 словоупотреблений. Среди них 8771 раз употреблены различные формы слова «быть». Найдем вероятность события A: «Слово, выбранное наугад из произведений А. С. Пушкина, окажется формой слова «быть».

Мы имеем $n=544\,777$, $n(A)=8771$, и по формуле (1)

$$P(A)=\frac{8771}{544\,777}\approx 0{,}0161.$$

При применении формулы (1) часто возникают трудности с подсчетом чисел n и $n(A)$. Обычно это комбинаторные задачи, и поэтому для их нахождения полезно использовать формулы комбинаторики.

Пример 3.

На книжной полке стоит 30 различных книг. Читатель, просмотрев их, обнаружил, что 10 книг он уже прочитал раньше. После этого он попросил библиотекаря снять с полки наугад любые три книги. Какова вероятность события A: «все три предъявленные книги читатель уже прочитал раньше»?

---

[1] См.: Пиотровский Р. Г. и др. Математическая лингвистика.— М.: Высшая школа, 1977.— С. 118.

Решение. Опыт состоит в выборке трех книг из 30 стоящих на книжной полке. Слово «наугад» означает симметрию этого опыта, т. е. никакая тройка книг не имеет преимуществ перед любой другой. Поэтому все его исходы равновозможны. Определим число исходов этого опыта. Из 30 книг 3 книги можно выбрать числом способов, равным числу сочетаний из 30 по 3, т. е.

$$n = C_{30}^{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060.$$

Событие A наступает только тогда, когда 3 книги выбираются только из тех 10 книг, которые читатель уже прочитал, и поэтому число исходов опыта, благоприятствующих событию A, будет равно числу сочетаний из 10 по 3, т. е.

$$n(A) = C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Теперь по формуле (1) получаем

$$P(A) = \frac{C_{10}^{3}}{C_{30}^{3}} = \frac{120}{4060} \approx 0{,}03.$$

Этот результат означает, что если этот опыт повторять большое число раз N, то примерно в $0{,}03\ N$ случаях читателю предложат 3 книги, которые он уже читал ранее.

Пример 4.

При бросании двух игральных кубиков сумма очков, выпавших на верхних гранях, изменяется от 2 до 12. Какова вероятность события:

а) A: «сумма очков равна 9»;

б) B: «сумма очков равна 10»?

Решение. а) Как мы установили в п. 7, общее число равновозможных исходов рассматриваемого опыта равно 36, поэтому $n = 36$. Найдем $n(A)$. Сумма очков 9 получается при следующих исходах опыта: (6, 3), (3, 6), (5, 4), (4, 5), так как $9 = 6 + 3 = 3 + 6 = 5 + 4 = 4 + 5$. Отсюда следует, что $n(A) = 4$ и искомая вероятность $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

б) Событию B благоприятны исходы: (6, 4), (4, 6), (5, 5), так как $10 = 6 + 4 = 4 + 6 = 5 + 5$. Отсюда получаем $n(B) = 3$ и $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Сравнивая полученные вероятности, мы видим, что $P(A) > P(B)$, т. е. при длительном бросании двух игральных кубиков сумма очков, равная 9, будет встречаться чаще, чем сумма очков, равная 10.

Пример 5.

Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных контролером изделий нет ни одного бракованного, то вся партия принимается, в противном случае нет. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 10 бракованных изделий, будет принята контролером?

Решение. Через A обозначим событие: «партия деталей принимается контролером». Общее число способов выбора 10 деталей из партии, содержащей 100 деталей, равно числу сочетаний из 100 по 10 и составляет

$$n = C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!\ 90!}.$$

Утверждение: «Контролер наугад отбирает 10 деталей» — говорит о равновозможности всех исходов. Событие A наступает в том случае, когда все 10 выбранных контролером деталей будут взяты только из доброкачественных деталей, общее число которых равно $90 = 100 - 10$. Таким образом, число исходов, благоприятных событию A, равно числу сочетаний из 90 по 10, что составляет

$$n(A) = C_{90}^{10} = \frac{90!}{10!\ 80!}.$$

Отсюда следует, что вероятность того, что партия деталей принята контролером, равна

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot \ldots \cdot 81}{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 91} \approx 0{,}331.$$

Пример 6.

На хоккейный матч заявлено 20 полевых хоккеистов и вратарь. Среди полевых хоккеистов 7 хоккеистов — мастера спорта. Какова вероятность того, что в случайно выбранной стартовой пятерке окажется 3 мастера спорта?

Решение. Опыт состоит в выборе 5 хоккеистов из заявленных 20. «Случайный выбор» означает, что все исходы этого опыта равновозможны. Подсчитаем их число n: 5 хоккеистов из 20 можно выбрать числом способов, равным числу сочетаний из 20 по 5, т. е.

$$n = C_{20}^{5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15\,648.$$

Через A обозначим событие: «в стартовой пятерке оказалось 3 мастера спорта». Трех мастеров спорта из имеющихся семи можно выбрать числом способов, равным числу сочетаний из 7 по 3, т. е.

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \text{ способами}.$$

После того как выбраны 3 мастера спорта, следует выбрать еще двух хоккеистов, мастерами спорта не являющихся. Таких хоккеистов в команде $13 = 20 - 7$. Таким образом, двух хоккеистов нужно выбрать из 13. Это можно сделать числом способов, равным числу сочетаний из 13 по 2, т. е.

$$C_{13}^2 = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78 \text{ способами.}$$

Поскольку каждый из 35 способов выбора трех мастеров спорта можно сочетать с каждым из 78 способов выбора двух хоккеистов, мастерами спорта не являющихся, то по правилу произведения, рассмотренному в комбинаторике, число исходов, благоприятных событию, равно их произведению:

$$n(A) = C_7^3 \cdot C_{13}^2 = 35 \cdot 78 = 2730.$$

Окончательно получаем

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{C_7^3 \cdot C_{13}^2}{C_{20}^5} = \frac{2730}{15\,648} \approx 0{,}174.$$

Во всех рассмотренных примерах событие A не совпадало ни с одним из равновозможных исходов U_1, U_2, ..., U_n.

Пусть теперь событие A совпадает с одним из исходов U_1, U_2, U_3, ..., U_n. Например, пусть $A = U_1$. Тогда число $n(A) = n(U_1)$ равно единице: $n(U_1) = 1$, так как исходы U_1, U_2, ..., U_n взаимно исключают друг друга. По формуле (1) мы получаем

$$P(A) = P(U_1) = \frac{1}{n}.$$

Аналогично устанавливается, что и все остальные исходы имеют ту же самую вероятность, что и исход U_1:

$$P(U_2) = \frac{1}{n}, \ P(U_3) = \frac{1}{n}, \ \ldots, \ P(U_n) = \frac{1}{n}.$$

Это означает, что равновозможные исходы U_1, U_2, ..., U_n оказались равновероятными с вероятностью $\frac{1}{n}$. Сумма их вероятностей равна единице:

$$P(U_1) + P(U_2) + \ldots + P(U_n) = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

После этого замечания изучаемому нами опыту мы можем сопоставить не только равновероятные исходы U_1, U_2, ..., U_n, но и вероятности этих исходов:

$$P(U_1) = P(U_2) = \ldots = P(U_n) = \frac{1}{n}.$$

Такое представление удобно задать таблицей:

Исходы	U_1	U_2	U_3	...	U_n
Вероятности исходов	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

При этом выполняется равенство

$$P(U_1)+P(U_2)+\ldots+P(U_n)=1. \qquad (2)$$

Аналогичную таблицу, можно построить для каждого из опытов, рассмотренных в п. 7. При этом совсем необязательно, чтобы вероятности всех исходов были одинаковыми. Важно, чтобы исходы образовывали полную систему взаимно несовместных исходов, сумма вероятностей которых равнялась бы единице.

Приведем пример. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятности ее поражения равны соответственно 0,7 и 0,8. Опишем полную систему исходов этого опыта и найдем их вероятности. Пусть событие A — «первый стрелок попал в мишень». Тогда $p(A)=0{,}7$, $p(\bar{A})=0{,}3$. Событие B — «второй стрелок попал в мишень», $p(B)=0{,}8$, $p(\bar{B})=0{,}2$. Исходы этого опыта таковы: U_1 — оба стрелка попали в мишень; U_2 — первый стрелок попал в мишень, второй стрелок промахнулся; U_3 — первый стрелок промахнулся, второй стрелок попал в мишень; U_4 — оба стрелка промахнулись.

Исходы U_1, U_2, U_3, U_4 образуют полную группу взаимно несовместных исходов. Далее будет показано, что вероятности исходов U_1, U_2, U_3, U_4 определяются по формулам:

$$p(U_1)=p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56,$$
$$p(U_2)=p(A\cap \bar{B})=p(A)\cdot p(\bar{B})=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14,$$
$$p(U_3)=p(\bar{A}\cap B)=p(\bar{A})\cdot p(B)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24,$$
$$p(U_4)=p(\bar{A})+p(\bar{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06.$$

Непосредственный подсчет показывает, что $p(U_1)+p(U_2)+p(U_3)+$ $+p(U_4)=1$, и таблица имеет вид:

Исходы	U_1	U_2	U_3	U_4
Вероятности	0,56	0,14	0,24	0,06

УПРАЖНЕНИЯ

42. В опыте с бросанием игрального кубика найдите вероятности события:

а) A: «на верхней грани кубика выпало число очков больше чем 1, но меньше 5»;

б) B: «на верхней грани кубика выпало простое число или нечетное число очков».

43. В опыте с бросанием двух игральных кубиков

а) найдите вероятность 11 событий:

A_2: «сумма очков, выпавших на верхних гранях обоих кубиков, равна 2»;

A_3: «сумма очков, выпавших на верхних гранях обоих кубиков, равна 3» и т. д.;
A_{12}: «сумма очков, выпавших на верхних гранях обоих кубиков, равна 12».
Вероятность какого события самая большая и какого — самая маленькая?
б) Найдите вероятность события B: «сумма очков, выпавших на верхней грани, не меньше 8 и не больше 10».
в) Найдите вероятность события D: «сумма очков меньше 9».
г) Два игрока играют в игру: если сумма очков на верхних гранях равна 2, 3, 4, 10, 11 и 12, то выигрывает игрок I; если же сумма равна 5, 6, 7, 8 и 9, то выигрывает игрок II. Справедлива ли эта игра? Если нет, то кто будет чаще выигрывать? Можете ли вы изменить условия игры так, чтобы шансы игроков уравнялись?

44. В опыте с бросанием двух монет найдите вероятность события:
а) A: «выпал один герб и одна цифра»;
$\boxed{\text{б)}}$ B: «выпало не менее одной цифры»;

1) 0,4; 2) 0,25; 3) 0,75; 4) 0,5.

45. Числа от 1 до 100 записывают на отдельных карточках, помещают их в вазу и тщательно встряхивают. После этого извлекают одну карточку.
а) Каково множество равновероятных исходов этого опыта и чему равна вероятность каждого исхода?
б) Какова вероятность события A: «на карточке написано число, делящееся на 3»?
в) Какова вероятность события B: «на карточке написано число, делящееся на 3 и на 5»?
г) Какова вероятность события C: «на карточке написано число, делящееся на 5, но не делящееся на 7»?
д) Существует ли событие D, связанное с этим опытом, вероятность которого равна $P(D)=0{,}11$?

46. Рассматриваются семьи, имеющие двух детей (не близнецов). В такой семье бывает или 2 мальчика, или 2 девочки, или мальчик и девочка. Наугад выбирается одна семья. Считаем, что вероятности рождения девочки и мальчика одинаковы и равны $\frac{1}{2}$.
а) Опишите множество равновероятных исходов этого опыта. Постройте дерево исходов. Чему равна вероятность исхода?
б) Найдите вероятность события A: «в семье оба ребенка — мальчики»; события B: «в семье оба ребенка — девочки»; события C: «в семье один ребенок — девочка, другой — мальчик»; события D: «в семье не менее одной девочки».

47. Рассмотрим семьи, имеющие трех детей, среди которых нет близнецов. В таких семьях могут быть 3 мальчика, или 3 девочки, или 2 мальчика и 1 девочка, или 1 мальчик и 2 девочки. Наугад выбирается одна семья с тремя детьми.

а) Опишите множество равновероятных исходов. Постройте дерево исходов. Чему равна вероятность исхода?

б) Найдите вероятность события A: «в семье все три ребенка — мальчики»; события B: «в семье два мальчика и одна девочка»; события C: «в семье один мальчик и две девочки»; события D: «в семье все три ребенка — девочки»; события E: «в семье все дети одного пола»; события F: «в семье разнополые дети».

48. Рассмотрите семьи, имеющие четырех детей. Наугад выбирается одна семья.

а) Опишите множество равновероятных исходов этого опыта. Постройте дерево исходов. Чему равна вероятность исходов?

б) Найдите вероятность события: A: «в семье меньше трех девочек»; B: «в семье не меньше трех мальчиков»; C: «в семье одинаковое число мальчиков и девочек»; D: «в семье три ребенка одного пола и один другого».

в) Выберите несколько событий, связанных с этим опытом, и определите их вероятность.

49. Студент пришел на экзамен, выучив лишь 45 вопросов из 60, вынесенных на экзамен. В каждый билет включены два вопроса из 60 и билеты тщательно перемешаны. Студент наугад взял билет.

а) Чему равна вероятность события A: «студент знает ответы на все вопросы билета»?

б) Чему равна вероятность события B: «студент не знает ответа ни на один из вопросов, входящих в билет»?

в) Решите задачу в общем случае: на экзамен вынесено m вопросов, студент выучил только n вопросов, $n<m$; в каждый билет включено три вопроса. Ответьте на вопросы *а* и *б*.

50. В шахматном турнире принимают участие 20 шахматистов, среди которых 6 мастеров спорта. Случайным образом с помощью жеребьевки они распределяются на 2 группы по 10 шахматистов в каждой. Рассмотрим взятое наугад разбиение шахматистов по группам.

а) Какова вероятность события A: «все 6 мастеров спорта оказались в одной группе»?

б) Какова вероятность события B: «2 мастера спорта попадут в одну группу, а 4 — в другую»?

51. Известно, что среди 100 книг имеется 15 бракованных, внешне не отличимых от доброкачественных. Наугад выбирается 5 книг. Найдите вероятность следующих событий:

а) событие A: «все 5 книг доброкачественные»;

б) событие B: «все 5 книг бракованные»;

в) событие C: «среди выбранных книг ровно 2 бракованные»;

г) решите задачу в общем виде: среди m книг имеется n бракованных, $n<m$. Наугад выбирают r книг, $r \leqslant m$. Найдите вероятность следующих событий:

B_1: «все r книг являются бракованными»;

C_1: «среди выбранных r книг будут s бракованных, $s \leqslant r$».

52. Команда равных по силе шахматистов состоит из 8 человек с номерами от 1 до 8. Тренер команды наугад выбирает стартовую шестерку. Найдите вероятности следующих событий:
а) событие A: «стартовую шестерку составят шахматисты с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6»;
б) событие B: «в стартовую шестерку войдет шахматист под номером 1»;
в) событие C: «в стартовую шестерку войдут шахматисты с номерами 2 и 8»;
г) событие D: «в стартовую шестерку войдут шахматисты с номерами 1, 3 и 5».

53. В урне находится 9 одинаковых шаров, пронумерованных цифрами от 1 до 9. Шары тщательно перемешиваются и по одному извлекаются из урны. Найдите вероятность события A: «номера шаров извлекаются в порядке 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9».

54. Пусть в урне имеется 20 одинаковых шаров, 12 из которых красные, а остальные — белые. Из этих 20 шаров наугад выбирают 5 шаров.
а) Найдите вероятность события A: «среди выбранных 5 шаров ровно 3 красных шара».
б) Решите задачу в общем виде: в урне имеется n одинаковых шаров, из которых l красного цвета, а остальные — белого. Из этих n шаров наугад выбирают m шаров, $m \leqslant n$. Найдите вероятность события B: «среди выбранных m шаров ровно k шаров, $k < m$, имеют красный цвет».

55. (Статистический контроль.) В партии из 100 деталей имеется 3 бракованные, а остальные детали — годные. Из 100 деталей наугад выбирают 6 деталей. Найдите вероятность события A: «среди выбранных 6 деталей ровно 2 детали окажутся бракованными».

56. В классе 10 учащихся изучают английский язык, 6 — французский и 8 — немецкий. Наугад составляется группа из 3 человек. Найдите вероятность событий:
а) события A: «все 3 ученика изучают разные языки»;
б) события B: «все 3 ученика изучают английский язык».

57. Буквы, образующие слово «апельсин», написаны на карточках и тщательно перемешаны в урне. Извлекаем наугад карточки одну за другой. Какова вероятность события A: «извлеченные буквы образуют слово «спаниель»?

10. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ

1. Объединение событий. Мы познакомились с двумя способами вычисления вероятности случайного события: классическим и статистическим. Однако их непосредственное применение к нахождению вероятностей сложных событий обычно связано с большими трудностями. Построение множества элементарных исходов является сложной задачей, а нахождение вероятности события по частоте его появления — задача не только громоздкая (надо проводить много опытов), но порой просто невыполнимая — ясно, что определить вероятность поражения самолета по частоте попадания в него ракеты практически невозможно. (Сколько же надо уничтожить самолетов и ракет?!) Поэтому для вычисления вероятностей используются правила, позволяющие по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других событий с помощью некоторых операций.

Выше мы назвали событием любое подмножество A множества исходов U. В главе III было показано, что над множествами можно производить операции объединения, пересечения и вычитания, поэтому операции над событиями будут в дальнейшем совпадать с операциями над множествами (рис. 128):

а) A_1 и A_2 — несовместные (непересекающиеся) события;

б) незаштрихованная фигура изображает объединение $A_1 \cup A_2$;

в) незаштрихованная фигура изображает пересечение $A_1 \cap A_2$;

г) незаштрихованная фигура изображает разность $A_1 \setminus A_2$;

д) незаштрихованная фигура изображает противоположное событие $\overline{A}$;

е) событие A_2 содержится в событии A_1.

Перейдем к точным определениям.

Пусть A и B — события, связанные с некоторым опытом.

Определение 1. События A и B называются *равными*, если наступление события A влечет за собой наступление события B и, наоборот, наступление события B влечет за собой наступление события A.

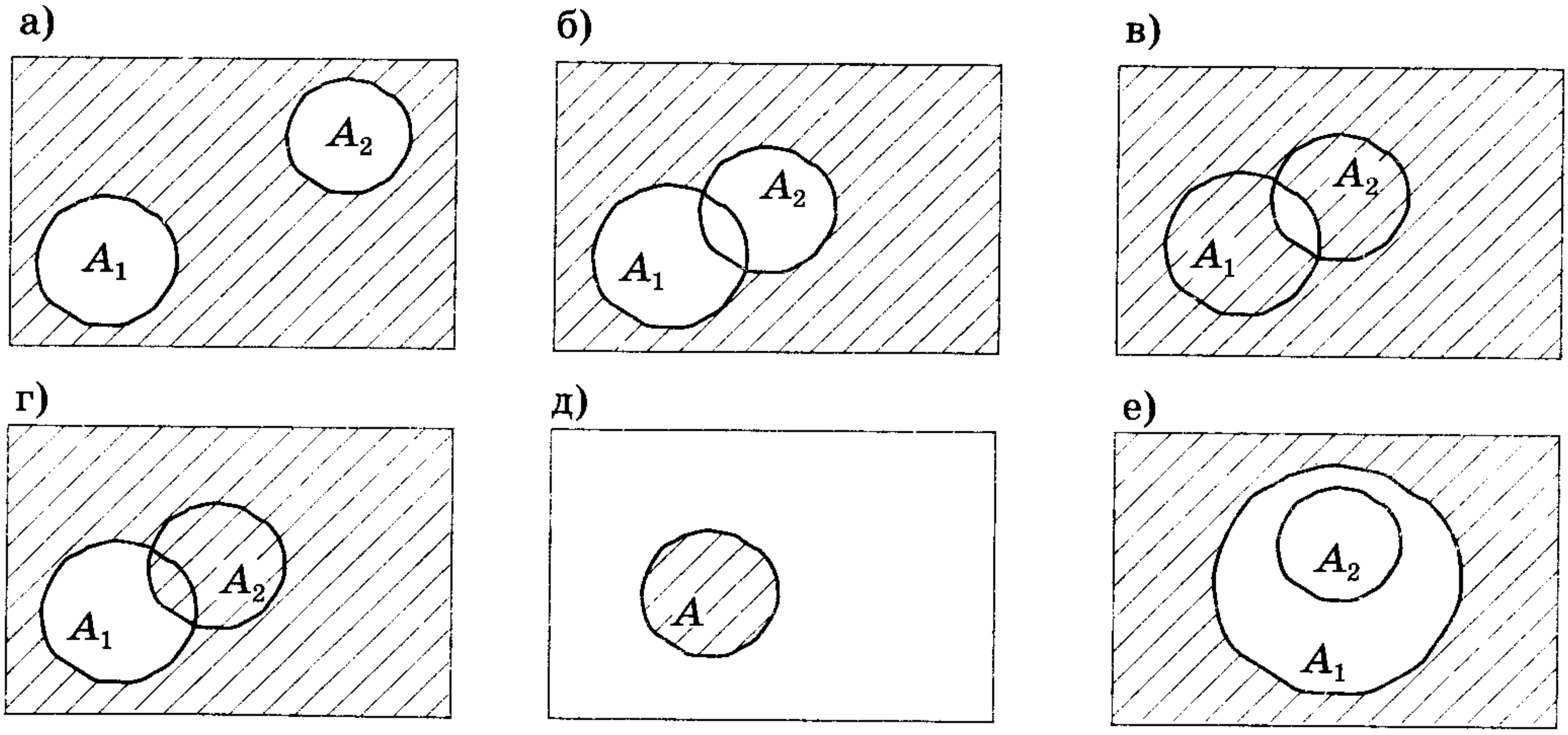


Рис. 128

Пример 1.

Пусть опыт состоит в бросании двух кубиков. Пусть событие A_1 — «выпадает четная сумма очков» и событие A_2 — «выпадают очки одной и той же четности». Ясно, что $A=B$.

Пример 2.

При бросании одного кубика равными окажутся события: A — «выпало простое четное число», B — «выпало число, большее единицы, но меньшее трех».

Определение 2. ***Объединением*** **(или суммой)** ***событий*** **A и B называется событие C, которому благоприятны все исходы, благоприятные или событию A, или событию B, или им обоим. Обозначим эту сумму так: $C=A\cup B$ или $C=A+B$.**

Пример 3.

Опыт состоит в бросании кубика. Пусть событие A — «число очков делится на три», а событие B — «выпало четное число очков». Событие $C=A\cup B$ состоит в том, что выпало число очков, отличное от 1 и 5.

Действительно, событию A благоприятствуют исходы $A=(3;\ 6)$, событию B — исходы $(2;\ 4;\ 6)$. Теперь видно, что событию $C=A\cup B$ благоприятствуют исходы $(2;\ 3;\ 4;\ 6)$.

Пример 4.

Опыт состоит в том, что два стрелка стреляют в мишень по одному разу. Пусть событие A — «в мишень попал первый стрелок», событие B — «в мишень попал второй стрелок».

Событие $C=A\cup B$ состоит в том, что цель поражена. Это сделал либо первый стрелок, либо второй или цель поразили оба стрелка.

До сих пор мы рассматривали объединение двух событий. Можно рассматривать и объединение любого числа событий.

Рассмотрим трех стрелков, стреляющих в мишень по одному разу. Если события A_1, A_2, A_3 означают соответственно попадание в мишень первым, вторым и третьим стрелком, то событие

$$C=A_1\cup A_2\cup A_3$$

означает, что в мишень попал хотя бы один стрелок.

2. Противоположные события. Рассмотрим некоторый опыт и два события A и B, связанные с ним.

Определение. События A и B называют ***противоположными*** друг другу, если любой исход опыта благоприятен одному и только одному из них. Событие, противоположное событию A, в теории вероятностей обозначают через $\overline{A}$.

Приведем примеры.

Пример 1.

Событию A — «три дня подряд шел дождь» противоположно событие $\overline{A}$ — «хотя бы в один из трех дней дождя не было».

Пример 2.

Событию A — «среди вынутых 5 шаров нет ни одного красного» противоположно событие $\overline{A}$ — «среди вынутых шаров хотя бы один шар красный».

Пример 3.

Событию A — «попадание при выстреле» противоположно событие $\overline{A}$ — «промах при выстреле».

Пример 4.

Событию A — «три попадания при трех выстрелах» противоположно событие $\overline{A}$ — «хотя бы один промах при трех выстрелах».

Пример 5.

Событие A — «мишень поражена первым стрелком» и событие B — «мишень поражена вторым стрелком» противоположными не являются — мишень может быть поражена каждым стрелком.

Пример 6.

Пусть событие A состоит в том, что изготовленная деталь доброкачественная, тогда событие $\overline{A}$ заключается в том, что деталь бракованная. Если вероятность $p(A) = 0{,}85$, то $p(\overline{A}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Если события A и $\overline{A}$ противоположные, то они обязательно несовместны. Это вытекает из их определения. Пусть опыт имеет n равновозможных исходов, и если m из этих исходов благоприятствуют событию A, то остальные $n - m$ исходов благоприятствуют событию $\overline{A}$, и поэтому $p(A)=\frac{m}{n}$, а $p(\overline{A})=\frac{n-m}{n}$. Между $p(A)$ и $p(\overline{A})$ существует важное соотношение: $p(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-p(A)$, или

$$p(A)+p(\overline{A})=1. \qquad (1)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Важность соотношения (1) для практического вычисления вероятности событий состоит в том, что в ряде случаев легче вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, а затем по формуле (1) вычислить вероятность события A.

Соотношение (1) мы получили, опираясь на классическое определение вероятности. Можно доказать, что соотношение (1) справедливо и в общем случае.

3. Вероятность объединения несовместных событий. Рассмотрим опыт, имеющий n равновозможных элементарных исходов и два несовместных события A и B, связанные с этим опытом.

Пусть событию A благоприятствует m исходов, а событию B благоприятствует k исходов. Тогда вероятности $p(A)$ и $p(B)$ событий A и B определяются соотношениями $p(A)=\frac{m}{n}$; $p(B)=\frac{k}{n}$.

По предположению события A и B несовместны, и поэтому не существует исходов, благоприятных одновременно и событию A, и событию B. Отсюда следует, что событию $A\cup B$ благоприятствует $m+k$ исходов, и поэтому

$$p(A\cup B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=p(A)+p(B). \qquad (2)$$

Таким образом, доказана теорема, называемая **теоремой сложения вероятностей.**

Теорема 1. Вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Мы доказали теорему 1 для случая классического подхода к определению вероятности. Теорема 1 верна для любых несовместных событий A и B.

Следствие.

Теорема 1 доказана для двух несовместных событий A и B. Последовательным применением теоремы 1 к конечному числу попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мы получим

$$p(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n). \qquad (3)$$

Прежде чем переходить к примерам, рассмотрим опыт, заключающийся в выстреле по стандартной мишени. Он имеет 11 исходов:

промах (ноль очков) или получение 1, 2, 3, ..., 10 очков. Эти исходы мы обозначим через A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}. Все они несовместны между собой потому, что нельзя одним выстрелом выбить различное число очков. Более того, эти исходы образуют полную группу потому, что при выстреле одно из событий A_0, A_1, A_2, ..., A_{10} обязательно произойдет. Допустим, что в одинаковых условиях было произведено большое число выстрелов. Частоту $p(U)$ получения n очков зададим таблицей.

Исходы	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Количество выбитых очков U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота $p(U)$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	0,05	0,05	0,1	0,2	0,5

Одинаковость условий и большое число выстрелов позволяют считать, что вероятность каждого исхода совпадает с его частотой.

Пример 1.

Найдем вероятность того, что стрелок выбьет не менее 9 очков.

Решение. Событие A — «выбить не менее 9 очков» является объединением событий A_9 — «выбить 9 очков» и A_{10} — «выбить 10 очков» (см. табл.). Так как события A_9 и A_{10} несовместны, то по теореме 1 получаем $p(A)=p(A_9)+p(A_{10})=0,2+0,5=0,7$.

Пример 2.

Найдем вероятность того, что при выстреле по мишени получится число очков, строго большее 6.

Решение. Событие A — «выбить число очков, большее 6» является объединением несовместных событий A_7 — «выбить 7 очков», A_8 — «выбить 8 очков», A_9 — «выбить 9 очков» и A_{10} — «выбить 10 очков», т. е. $A=A_7\cup A_8\cup A_9\cup A_{10}$.

Из соотношения (3) получаем $P(A)=P(A_7)+P(A_8)+P(A_9)+P(A_{10})$. Используем данные таблицы и окончательно получим

$$P(A)=0,05+0,1+0,2+0,5=0,85.$$

Пример 3.

Производится одиночный выстрел в мишень. Найдем вероятность того, что будет выбито число очков, не меньшее 2 и не большее 4 или не меньшее 8.

Решение. Событие C — «выбито число очков, не меньшее 2 и не большее 4 или не меньшее 8» является объединением событий A_2 —

«выбито 2 очка», A_3 — «выбито 3 очка», A_4 — «выбито 4 очка» и событий A_8 — «выбито 8 очков», A_9 — «выбито 9 очков» и A_{10} — «выбито 10 очков». Все эти события несовместны, поэтому можно применить формулу (3). Учитывая данные таблицы, имеем $A = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_8 \cup A_9 \cup A_{10}$. Отсюда получаем

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_8) + P(A_9) + P(A_{10}) =$$
$$= 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}83.$$

До сих пор при применении теоремы 1 мы задавали вероятности событий A и B. Очень часто встречается ситуация, в которой сначала надо найти вероятности $p(A)$ и $p(B)$, а уже затем применить теорему 1. В этом случае полезно применять методы комбинаторики.

Пример 4.

В урне находится 5 красных и 6 белых шаров, неразличимых на ощупь. Опыт состоит в том, что из урны случайным образом вынимают 4 шара. Найдем вероятность того, что среди них белых шаров меньше 2.

Решение. Событие C — «среди вынутых шаров белых шаров меньше 2» является объединением двух несовместных событий A и B. Событие A — «среди вынутых шаров только один шар белый, а 3 шара красные». Событие B — «среди вынутых шаров нет ни одного белого», т. е. все 4 шара красные.

Так как события A и B несовместны и $C = A \cup B$, то $P(C) = P(A) + P(B)$. Пользуясь формулами комбинаторики, найдем $P(A)$ и $P(B)$.

Число всевозможных способов извлечения 4 шаров из имеющихся 11 шаров равно:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$

Вычислим количество исходов, благоприятствующих событию A. Один белый шар из 6 имеющихся можно выбрать 6 различными способами. Три красных шара из имеющихся 5 красных шаров можно выбрать $C_5^3 = C_5^2$ различными способами. Значит, событию A благоприятствуют $m = 6 \cdot C_5^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 60$ способов и $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{330} = \frac{2}{11}$. Событию B благоприятствуют k исходов, $k = C_5^4 = 5$, поэтому $p(B) = \frac{k}{n} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$ (из имеющихся 5 красных шаров выбирают 4 шара). Имеем $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{2}{11} + \frac{1}{66} = \frac{13}{66}$.

Пример 5.

В урне находятся 6 красных и 8 белых шаров. Из этих 14 шаров наугад выбрано 5 шаров. Какова вероятность того, что все выбранные шары одного цвета?

Решение. Пусть событие A — «выбрано 5 красных шаров», событие B — «выбрано 5 белых шаров». Обозначим событие C — «выбраны шары одного цвета». События A и B несовместны, $C=A\cup B$, и поэтому $P(C)=P(A)+P(B)$. Найдем $P(A)$ и $P(B)$. Снова воспользуемся формулами комбинаторики. Заметим, что количество способов извлечения 5 шаров из урны, где находится $14=6+8$ шаров, равно $n=C_{14}^5=\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=2002$.

Вычислим число исходов, благоприятствующих событию A. Имеем $m=C_6^5=6$, поэтому $P(A)=\dfrac{m}{n}$, т. е. $P(A)=\dfrac{6}{2002}$. Событию B благоприятствуют $k=C_8^5=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56$ исходов, поэтому $P(B)=\dfrac{k}{n}$, т. е. $P(B)=\dfrac{56}{2002}$.

По формуле (1) получаем

$$p(C)=p(A)+p(B)=\frac{6}{2002}+\frac{56}{2002}=\frac{62}{2002}=\frac{31}{1001}.$$

Пример 6.

Симметричная монета подбрасывается два раза. Какова вероятность того, что она хотя бы один раз падает гербом вверх (Г — герб, Ц — цифра)?

Решение. Пусть событие C — «хотя бы один раз монета падает гербом вверх». Введем событие A — «оба раза монета упала гербом вверх». Обозначим это так: $A=\{\text{Г; Г}\}$. Событие $B=(\text{Г; Ц})$ — «при первом бросании монета упала гербом вверх, при втором — цифрой вверх». Событие D — «при первом бросании монета упала вверх цифрой, при втором — гербом вверх». Обозначим это так: $D=(\text{Ц; Г})$. Событие E — «при обоих бросаниях сверху была цифра». Обозначим это так: $E=\{\text{Ц; Ц}\}$.

События B, C, D, E несовместны, и, кроме того, $C=A\cup B\cup D$. По теореме 1 и ее следствию $p(C)=p(A)+p(B)+p(D)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

4. Пересечение событий и вероятность объединения совместных событий. Рассмотрим события A и B, связанные с некоторым опытом.

Определение. ***Пересечением событий*** A **и** B **называют событие** C**, которому благоприятны лишь те исходы, которые благоприятны одновременно и событию** A**, и событию** B**. Обозначим это так:** $C=A\cap B$ **или** $C=A\cdot B$**.**

Пример 1.

Пусть опыт состоит в выборе двух двузначных чисел. Определим событие A — «выбранные числа кратны 2», событие B — «выбранные числа кратны 3». Событие $C=A\cap B$ состоит в том, что выбранные числа одновременно кратны 2 и кратны 3, поэтому событие $C = A \cap B$ состоит в том, что выбранное число кратно 6.

Пример 2.

Пусть по мишени производится два выстрела. Рассмотрим событие A — «попадание при первом выстреле» и событие B — «попадание при втором выстреле». Событие $C = A \cap B$ состоит в том, что мишень будет поражена как при первом выстреле, так и при втором.

Пример 3.

Имеется партия серийно выпускаемых деталей, у которых контролируется величина диаметра d. Номинальный размер диаметра $d = 35$ мм, заданы границы поля допуска [34,995; 35,011]. Среди деталей есть доброкачественные и бракованные.

Пусть событие A — «попадание диаметра детали в поле допуска», $A = [34{,}995 \leqslant d \leqslant 35{,}011]$, т. е. деталь доброкачественная; событие B — «диаметр детали не меньше номинального размера», т. е. $B = [d \geqslant 35]$. Событие $C = A \cap B$ наступает тогда, когда одновременно происходят события A и B, т. е. событие $C = A \cap B$ состоит в том, что диаметр детали не меньше номинального размера 35 мм, но при этом не выходит за правый край поля допуска:

$$C = \{35{,}000 \leqslant d \leqslant 35{,}011\}.$$

Другими словами, событие $C = A \cap B$ наступает тогда, когда деталь доброкачественная и диаметр ее не меньше номинального размера.

Перейдем к вычислению вероятностей.

Теорема 1, доказанная выше, существенно использует несовместность рассматриваемых событий. Это условие очень важно, без него правило сложения вероятностей становится неверным, а его применение приводит к грубым ошибкам.

Пример.

Пусть производится выстрел в мишень двумя стрелками, пусть событие A — «попадание в мишень первого стрелка», событие B — «попадание в мишень второго стрелка» и известно, что $p(A) = 0{,}8$, $p(B) = 0{,}7$. Найдем вероятность поражения мишени при одновременном выстреле обоих стрелков — это событие обозначим через C. Тогда $C = A \cup B$, но $P(C) = P(A) + P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 = 1{,}5$. Результат явно неверный потому, что всегда $0 \leqslant p \leqslant 1$. Наша ошибка состоит в том, что мы нарушили условие несовместности событий A и B. Эти события могут произойти одновременно, ибо нет никаких преград поразить цель обоим стрелкам при одновременном выстреле!

Выведем формулу для вычисления вероятности совместных событий. Рассмотрим опыт и связанные с ним события A и B. Используем классический подход к определению вероятности. Пусть n — общее число равновозможных исходов опыта, m — число исходов, благоприятствующих событию A, k — число исходов, благоприятствующих событию B. Поскольку события A и B предполагаются совместными, то существуют исходы, благоприятные и событию A, и событию B. Пусть число таких исходов равно l. Тогда $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$, $P(A\cap B)=\frac{l}{n}$.

Событию $A\cup B$ благоприятствуют $(m+k-l)$ исходов, и поэтому $P(A\cup B)=\frac{m+k-l}{n}$, или $P(A\cup B)=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}$, т. е.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (4)$$

Таким образом, вероятность объединения двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их пересечения. Сразу отметим, что формула (4) не решает всех вопросов, связанных с нахождением $P(A\cup B)$, потому, что у нас еще нет способов нахождения $P(A\cap B)$. Ниже мы устраним этот пробел, а сейчас приведем примеры, в которых $P(A\cap B)$ вычисляется непосредственно.

Пример 1.

Бросается 2 монеты. Рассматриваются два события: A — «выпадение герба на первой монете» и B — «выпадение герба на второй монете». Найдем вероятность события $C=A\cup B$.

Решение. События A и B совместны потому, что герб может выпасть на каждой монете. Применим формулу (4).

Из четырех исходов опыта (ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ) событию $A\cap B$ благоприятствует только один исход (ГГ), поэтому $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

По формуле (4) имеем $P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Пример 2.

В классе 30 учащихся. 20 учеников участвовали в олимпиаде по математике, 15 — в олимпиаде по физике. 6 учеников приняли участие в обеих олимпиадах. Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик класса участвовал хотя бы в одной из олимпиад?

Решение. Пусть событие A — «ученик принял участие в олимпиаде по математике», событие B — «ученик принял участие в олимпиаде по физике». Нас интересует событие $C=A\cup B$. События A и B не являются несовместными потому, что ученик мог участвовать в обеих олимпиадах. Применим формулу (4). Событию A благоприятствуют 20 исходов, и поэтому $p(A)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$, событию B — 15 исходов, поэтому $P(B)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, событию $A\cap B$ — 6 исходов, т. е. $P(A\cap B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$. По формуле (4) получаем $P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{29}{30}$.

5. Независимые случайные события. Теорема об умножении вероятностей независимых событий. Понятия независимости и зависимости случайных событий относятся к важнейшим понятиям теории вероятностей. Независимые события играют важную роль при вычислении вероятности пересечения событий. Поясним это понятие на примерах.

Пример 1.

Пусть из двух урн, в которых находятся красные и белые шары, наудачу вынимают по одному шару. Пусть событие A — «из первой урны извлечен белый шар», событие B — «из второй урны извлечен белый шар». Эти два события никак не связаны между собой потому, что цвет шара, извлеченного из одной урны, никак не может повлиять на цвет шара, извлеченного из другой урны. Однако так происходит не всегда, как показывает следующий пример.

Пример 2.

В урне находятся 5 белых и 7 красных шаров. Из нее последовательно один за другим вынимают наугад два шара. Рассмотрим событие A — «первым извлечен белый шар» и событие B — «вторым извлечен белый шар». Вероятность события A равна $P(A)=\frac{5}{12}$. Что касается события B, то здесь ситуация иная. Если событие A произошло, то в урне осталось $11=5+7-1$ шаров, среди которых $4=5-1$ белых шара, и тогда $p(B)=\frac{4}{11}$. Если же событие A не произошло (первым извлечен красный шар), то в урне осталось, как и раньше, $11=5+7-1$ шаров, среди которых 5 белых, и теперь $p(B)=\frac{5}{11}$.

Итак, мы столкнулись с ситуацией, в которой вероятность события B зависит от того, произошло или не произошло событие A. В отличие от примера 1 события A и B связаны между собой. Выясним различие ситуаций, рассмотренных в примерах 1 и 2.

Основываясь на классическом определении вероятности, подробнее рассмотрим пример 1. Вычислим вероятность события $C=A\cap B$. Обозначим число шаров в первой и второй урнах через n_1 и n_2, а число белых шаров в них через m_1 и m_2. Тогда $P(A)=\frac{m_1}{n_1}$, $P(B)=\frac{m_2}{n_2}$. Поскольку каждый из n_1 исходов изъятия шара из первой урны может комбинироваться с каждым из n_2 исходов изъятия шара из второй урны, то общее число всех исходов равно $n_1\cdot n_2$, а из них 2 белых шара изымаются только в $m_1\cdot m_2$ случаях. Это значит, что вероятность пересечения событий A и B равна $P(A\cap B)=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}$, откуда следует, что

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B). \qquad (5)$$

Равенство (5) означает, что вероятность пересечения независимых событий A и B равна произведению их вероятностей.

К ситуации, приведенной в примере 2, равенство (5) неприменимо. Теперь можно сформулировать следующее определение независимых событий:

Определение. Пусть события A и B связаны с некоторым опытом. Эти события называются *независимыми*, если для них правило нахождения вероятности пересечения удовлетворяет условию (5), т. е. вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей.

Отметим, что формула (5) позволяет определить, зависимы ли события A и B. Более того, формула (5) частично, для независимых событий, решает вопрос о нахождении вероятности пересечения событий A и B. Решение этого вопроса для зависимых событий мы рассмотрим ниже.

Пример 3.

Из первых двадцати натуральных чисел наугад выберем одно число. Пусть событие A — «выбранное число является четным», событие B — «выбранное число делится на 3». Выясним, являются ли эти события независимыми между собой.

Решение. Событию A благоприятствуют 10 исходов: (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20), поэтому $p(A)=\frac{10}{20}$, событию B — 6 исходов: (3, 6, 9, 12, 15, 18), поэтому $p(B)=\frac{6}{20}$. Событие $A \cap B$ состоит из чисел, делящихся на 6, $A \cap B=(6,\ 12,\ 18)$, поэтому $p(A \cap B)=\frac{3}{20}$. Проверим равенство (5):

$$\frac{3}{20}=p(A \cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{10}{20}\cdot\frac{6}{20}=\frac{3}{20}.$$

Равенство (5) выполнено, поэтому события A и B независимы. Зависимые события A и B приведены в примере 2 и в рассмотренном ниже примере 4.

Пример 4.

Из первой сотни чисел 1, 2, ..., 100 наугад выбирается одно число. Обозначим событие A — «выбранное число делится на 3», событие B — «выбранное число делится на 4». Выясним, зависимы или независимы эти события.

Решение. Рассмотрим событие $C=A \cap B$. Это событие состоит в том, что выбранное число делится и на 3, и на 4, т. е. делится и на 12. Прямой подсчет показывает, что среди первых 100 чисел на 3 делятся 33 числа, на 4 — 25 чисел, а на 12 — 8 чисел. Поэтому $p(A)=\frac{33}{100}$, $p(B)=\frac{25}{100}$, $p(A\cap B)=\frac{8}{100}$, $p(A\cap B)=\frac{8}{100}\neq p(A)\cdot p(B)=\frac{33}{100}\cdot\frac{25}{100}$, равенство (5) не выполнено, поэтому события A и B зависимы.

6. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B возникает необходимость выяснения, связаны ли между собой эти события и в какой мере наступление одного из событий влияет на возможность наступления другого события. Исходя из классического подхода, проанализируем конкретный пример.

Пусть опыт состоит из троекратного подбрасывания симметричной монеты. Возможны 8 исходов: (ГГГ, ГЦГ, ЦГГ, ГГЦ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ).

Пусть событие A — «герб выпал ровно один раз». Ему благоприятствуют 3 исхода: {ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ}. Исходя из классического подхода, получаем $p(A)=\frac{3}{8}$. Через B обозначим событие — «число выпавших гербов нечетно». Ему благоприятствуют 4 исхода: {ГГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ}. Пусть об исходе опыта известно, что прозошло событие B. Теперь событию A будут благоприятствовать 3 исхода из 4, благоприятствующих событию B, поэтому $p(A)=\frac{3}{4}$, что отличается от первоначальной вероятности $p(A)=\frac{3}{8}$. Вероятность события A изменилась после того, как стало известно, что произошло событие B. Новую вероятность события A в предположении о том, что произошло событие B, называют **условной вероятностью события A** и обозначают так: $p(A|B)$. Черта между A и B означает «при условии». В нашем случае $p(A)=\frac{3}{8}$, а $p(A|B)=\frac{3}{4}$.

Обратим внимание на то, что пересечению $A\cap B$ благоприятствуют 3 исхода, поэтому $p(A\cap B)=\frac{3}{8}$, кроме этого, $p(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, а $p(A|B)=\frac{3}{4}$. Можно заметить, что между этими числами существует соотношение $p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A|B)$. Это не случайно. Справедлива теорема умножения вероятностей.

Теорема 2. Вероятность пересечения произвольных событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие осуществилось, т. е.

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A) \tag{6}$$

или

$$p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A|B). \tag{7}$$

Докажем соотношение (6) для классического определения вероятности.

Рассмотрим опыт, имеющий n исходов. Пусть событию A благоприятствуют m исходов из возможных n исходов и из этих m исходов l исходов благоприятствуют событию B. Тогда пересечению событий $A \cap B$ будут благоприятствовать l из n возможных исходов опыта. Определим вероятности: $p(A)=\frac{m}{n}$; $p(A \cap B)=\frac{l}{n}$; $p(B|A)=\frac{l}{m}$.

Отсюда следует

$$p(A \cap B)=\frac{l}{n}=\frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m}=p(A) \cdot p(B|A).$$

Соотношение (6) доказано. Для доказательства формулы (7) в соотношении (6) поменяем местами события A и B, в результате чего получим $p(A \cap B)=p(B) \cdot p(A|B)$. Из формул (6) и (7) вытекает интересное соотношение: $p(A) \cdot p(B|A)=p(B) \cdot p(A|B)$.

Если события A и B независимы, то

$$p(A \cap B)=p(A) \cdot p(B). \qquad (8)$$

При $p(A)>0$ из формулы (6) следует, что

$$p(A) \cdot p(B)=p(A) \cdot p(B|A), \text{ т. е. } p(B)=p(B|A). \qquad (9)$$

При $p(B)>0$ из формулы (7) получаем $p(A) \cdot p(B)=p(B) \cdot p(A|B)$, или

$$p(A)=p(A|B). \qquad (10)$$

Отсюда вытекает, что введение понятия условной вероятности позволяет дать новое толкование независимости случайных событий. Равенства (9) и (10) показывают, что условные и безусловные вероятности независимых случайных событий совпадают между собой. Другими словами, вероятность события A не изменится при наступлении или ненаступлении события B и наоборот.

Мы рассмотрели два случайных события A и B. Понятие независимости случайных событий переносится и на число событий более двух.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, связанные с некоторым опытом. Мы назовем их независимыми в совокупности, если вероятность наступления каждого из них не изменяет своего значения после того, как осуществилось одно или несколько из остальных событий. В этом случае

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (11)$$

Пример 1.

Какова вероятность события A, что при пятикратном бросании монеты герб выпадет 5 раз?

Решение. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 означают выпадение герба при первом, втором, третьем, четвертом и пятом бросаниях.

Поскольку выпадание герба при одном бросании никак не влияет на его выпадение при любом другом, то события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 независимы в совокупности, и поэтому можно применить формулу (11) при $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=P(A_5)=\frac{1}{2}$.

Поэтому $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}\approx 0{,}031$.

Пример 2.

Два станка работают независимо друг от друга. Их обслуживает один наладчик. Известна вероятность события A — «первый станок в течение часа не потребует внимания наладчика», $P(A)=0{,}75$. Известна и вероятность события B — «второй станок в течение часа не потребует внимания наладчика», $P(B)=0{,}6$.

Найдем вероятности событий C и D, если событие C — «в течение часа ни один станок не потребует внимания наладчика», событие D — «в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания наладчика».

Решение. События A и B независимы друг от друга, поэтому применим формулу (8): $P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}75\cdot 0{,}6=0{,}45$.

Событие D противоположно событию E — «оба станка в течение часа потребуют внимания наладчика». Поэтому $P(D)+P(E)=1$ и $E=\overline{A}\cap\overline{B}$. С другой стороны, $P(\overline{A})=0{,}25$, $P(\overline{B})=0{,}4$.

Поэтому $P(E)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1$; $P(D)=1-P(E)=1-0{,}1=0{,}9$.

Пример 3.

В урне находится 5 белых и 8 красных неразличимых на ощупь шаров. Из урны извлекают 2 шара. Найдем вероятность события C — «оба шара имеют красный цвет».

Решение. Будем считать, что шары извлекаются последовательно. Пусть событие A — «при первом извлечении появляется красный шар», а событие B — «красный шар появляется при втором извлечении». Нас интересует вероятность $P(C)=P(A\cap B)$. В этом случае события A и B независимыми не являются, и поэтому формулу (8) применить нельзя. Используем формулу $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$, $P(A)=\frac{8}{13}$. После того как событие A произошло, в урне осталось $12=13-1$ шаров, среди которых $7=8-1$ красных. Поэтому имеем $p(B|A)=\frac{7}{12}$.

Следовательно, $p(A\cap B)=\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{39}\approx 0{,}359$.

Пример 4.

Рассмотрим натуральные числа от 1 до 30. Пусть событие A — «наугад выбранное число делится на 3», событие B — «наугад выбранное число делится на 5». Найдем вероятность события C — «наугад выбранное число делится на 15».

Решение. События A и B независимыми не являются потому, что деление числа на 3 не исключает его деления на 5. Чтобы найти $p(C)=p(A\cap B)$, заметим, что событию A благоприятствуют 10 исходов (столько чисел делится на 3 среди чисел от 1 до 30), поэтому $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. Пусть событие A произошло, тогда $p(B|A)=\frac{2}{10}$, и поэтому $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{15}$.

Подведем итог наших рассуждений о вероятностях объединения и пересечения событий A и B, вероятности которых равны $P(A)$ и $P(B)$.

1) Если события A и B несовместны, то $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

2) Если события A и B независимы друг от друга, то $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

3) Для того чтобы найти вероятности объединения совместных событий A и B, надо знать $p(A\cap B)$ потому, что $p(A\cup B)=p(A)+$ $+p(B)-p(A\cap B)$.

4) Для того чтобы найти вероятности пересечения зависимых событий A и B, надо знать условную вероятность $p(A|B)$ или $p(B|A)$.

Тогда $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)=p(B)\cdot p(A|B)$.

Из последней формулы при известной вероятности $p(A\cap B)$ и $p(A)\neq 0$ можно найти условную вероятность $p(B|A)$ или $p(A|B)$, если $p(B)\neq 0$.

7. Последовательные испытания и формула Бернулли (1654—1705). При практическом применении теории вероятностей часто приходится один и тот же опыт повторять многократно. При этом в результате каждого опыта связанное с ним событие A может произойти или не произойти. Вероятности таких событий мы изучили выше.

Теперь нас будет интересовать не результат отдельного опыта, а общее число появления события A при проведении некоторой серии опытов. Если изучается партия деталей, то нас, как правило, будет интересовать не доброкачественность и бракованность отдельной детали, а общее число доброкачественных деталей. Аналогичная ситуация возникает и при анализе результатов стрельб.

Пример.

Из партии деталей, в которой содержатся как годные, так и бракованные детали, случайным образом выбирают 3 детали. Найдем вероятность того, что будут извлечены ровно две годные детали, если вероятность выбора годной детали равна p.

Решение. Обозначим через B событие — «извлечены ровно две годные детали». Это событие может осуществиться только тремя способами.

1. Первой извлечена годная деталь, второй извлечена тоже годная деталь, а третьей — бракованная.

2. Первой и третьей извлечены доброкачественные детали, а второй — бракованная.

3. Первой извлечена бракованная деталь, а две, извлеченные потом, оказались доброкачественными.

Рассмотрим события A_1 — «первой извлечена годная деталь», A_2 — «второй извлечена годная деталь» и A_3 — «третьей извлечена годная деталь».

Тогда $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=p$. События $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, противоположные событиям A_1, A_2, A_3, означают соответственно выбор бракованной детали при извлечении первой, второй и третьей деталей. При этом $p(\overline{A}_1)=p(\overline{A}_2)=p(\overline{A}_3)=1-p=q$.

Теперь интересующее нас событие B можно представить в виде

$$B=(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)\cup(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3).$$

Это равенство показывает, что событие B представлено в виде объединения несовместных событий, поэтому можно применить теорему о вероятности объединения несовместных событий:

$$P(B)=(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)+P(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)+P(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3).$$

В свою очередь, события, образующие пересечение слагаемых, являются независимыми друг от друга, и можно применить теорему о вероятности пересечения независимых событий.

Тогда

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=3p^2q.$$

Итак, вероятность того, что среди трех выбранных деталей ровно две детали будут доброкачественными, равна $3p^2q$.

Мы рассмотрели один частный случай. В общем случае рассматриваются n опытов, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p и не происходит с вероятностью $1-p$. Вероятность того, что в этих n опытах событие A появится ровно m раз, определяется соотношением

$$P(A)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}. \qquad (12)$$

В рассмотренном выше случае $n=3$, $m=2$, $C_3^2=3$, $S=3p^2q$, что совпадает с полученным ранее результатом.

Пример 1.

Производится 5 выстрелов по мишени, вероятность попадания в которую равна 0,7. Найти вероятность того, что при этих 5 выстрелах мы получим ровно три попадания.

Решение. Применим формулу (12) при $n=5$, $m=3$, $p=0{,}7$, $q=1-p=0{,}3$ и получим $S=C_5^3\cdot(0{,}7)^3\cdot(0{,}3)^2=0{,}3087$.

Полученный результат означает, что приблизительно в одной трети случаев при 5 выстрелах мы будем получать ровно 3 попадания.

Пример 2.

Из партии деталей извлекаются 4. Вероятность того, что деталь доброкачественная, равна 0,85. Для дальнейшего использования требуется не менее трех доброкачественных деталей. Найдем вероятность этого события.

Решение. Пусть событие E — «из партии извлечено не менее 3 доброкачественных деталей». Обозначим через A событие — «из партии извлечено ровно 3 доброкачественные детали», а через B событие — «извлечено ровно 4 доброкачественные детали». Тогда $E=A\cup B$. События A и B несовместны, и поэтому $p(E)=p(A)+p(B)$.

Найдем вероятности.

По формуле (12) получаем $p(A)=C_4^3\cdot(0{,}85)^3\cdot(0{,}15)\approx 0{,}37$. Аналогично, $p(B)=C_4^4\cdot(0{,}85)^4\cdot(0{,}15)^0\approx 0{,}52$.

Теперь имеем $p(E)\approx 0{,}37+0{,}52=0{,}89$.

Пример 3.

Вероятность отказа автоматической системы в течение суток равна 0,1. Одновременно эксплуатируется 10 таких систем. Найдем вероятность отказа ровно трех систем.

Решение. Пусть событие A — «отказ одной системы». Тогда по условию $p(A)=p=0{,}1$, $q=1-p=0{,}9$. Вероятность отказа $m=3$ систем из $n=10$ эксплуатируемых равна:

$$C_{10}^3\cdot p^3\cdot q^{10-3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^7\approx 0{,}057.$$

УПРАЖНЕНИЯ

58. Опыт состоит в бросании двух однородных монет. Рассмотрим следующие события:

а) A — «появление герба на первой монете»;
б) B — «появление цифры на первой монете»;
в) C — «появление герба на второй монете»;
г) D — «появление цифры на второй монете»;
д) E — «появление хотя бы одного герба»;
е) F — «появление хотя бы одной цифры»;
ж) G — «появление одного герба и одной цифры»;
з) H — «непоявление хотя бы одного герба»;
и) K — «появление двух гербов».

Определите, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

1) $A\cup C$; 2) $A\cap C$; 3) $E\cap F$; 4) $G\cup E$; 5) $G\cap E$; 6) $B\cap D$; 7) $E\cup K$.

59. По мишени производится 3 выстрела. Рассматриваются события A_1, A_2, A_3 — попадания при первом, втором и третьем выстрелах.

Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_1, A_2, A_3 и $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ следующие события:
1) A — «все три попадания»; 2) B — «все три промаха»; 3) C — «хотя бы одно попадание»; 4) D — «хотя бы один промах».

60. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет не менее трех и не более 5 очков.

61. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет не меньше 8 очков.

62. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет больше 3 очков.

63. Используя таблицу (см. с 330), найдите вероятность того, что стрелок выбьет не более 8 очков.

64. В урне находится 10 красных шаров и 8 белых. Из этих 18 шаров наугад выбираются 3 шара. Найдите вероятность того, что все выбранные шары одного цвета.

65. В ящике 7 годных и 6 бракованных неразличимых на взгляд мяча. Из ящика наугад выбирают 4 мяча. Найдите вероятность того, что среди выбранных 4 мячей будет меньше 2 бракованных.

66. В урне находится 9 красных и 7 белых шаров. Из этих 16 шаров наугад вынимают 3 шара. Найдите вероятность того, что среди вынутых шаров красных шаров будет меньше 2.

67. В урне находится 7 черных шаров и 6 белых. Из этих 13 шаров наугад вынимают 4 шара. Найдите вероятность того, что среди вынутых 4 шаров будет не более чем 3 белых шара.

68. Из 35 учеников класса успешно написали контрольную работу по математике 28 учеников, контрольную работу по физике 17 учеников. Известно, что успешно написали контрольные работы и по физике, и по математике 14 человек. Из класса наугад выбрали одного ученика. Найдите вероятность того, что он успешно выполнил хотя бы одну из контрольных работ.

69. В урне находится 30 неразличимых на ощупь шаров, пронумерованных от 1 до 30. Из урны выбирают один шар. Пусть событие A — «из урны вынут шар с четным номером», событие B — «из урны вынут шар, номер которого делится на 3». Найдите вероятность события C — «номер выбранного шара будет либо четным, либо будет числом, делящимся на 3, либо и тем и другим».

70. Наугад выберем одну из карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Будут ли зависимы или независимы между собой события A и B, если событие A — «вынута карточка с четным числом», событие B — «выбрана карточка с числом, делящимся на 5»?

71. Из чисел от 1 до 14 наугад выбирается одно число. Событие A заключается в том, что выбранное число делится на 2, а событие B — в том, что оно делится на 7. Зависимы ли они?

72. Из чисел от 1 до 20 выбирается наугад одно число. Событие A состоит в том, что выбрано четное число, а событие B — в том, что выбрано число, делящееся на 3. Зависимы ли эти события?

73. В урне находится a белых шаров и b неразличимых на ощупь шаров. Пусть событие A — «вынут белый шар», а событие B — «вынут белый шар после того, как из нее уже извлечен один шар». Какова вероятность того, что будут вынуты 2 белых шара?

74. Из класса, в котором учатся 15 мальчиков и 13 девочек, следует случайным образом отобрать 2 мальчиков для участия в тестировании. Для этого фамилии учащихся написали на одинаковых листках бумаги, скатали эти бумажки и положили в игровой барабан. После вращения из него последовательно вынули 2 бумажки. Какова вероятность того, что это будут фамилии мальчиков?

75. Бросали два кубика: к — красный, б — белый. Найдите вероятность события A — «на красном кубике выпало одно очко при условии, что сумма очков на красном и белом кубиках меньше 4». Напомним, что в паре (к, б) первое число показывает, сколько очков выпало на красном кубике, а второе — на белом.

76. Бросают два кубика: к — красный, б — белый. Найдите вероятность события: на красном кубике выпало 2 очка при условии, что сумма очков на красном и белом кубиках не превышает 4.

77. Бросают красный и белый кубики. Найдите вероятность того, что на красном кубике выпадет 4 очка при условии, что очков на красном и белом кубиках больше 4?

78. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

79. Из большой партии изделий берут на пробу 10 изделий. Известно, что доля нестандартных изделий составляет 25%. Найдите вероятность того, что:

а) четыре изделия окажутся нестандартными;

б) пять изделий окажутся нестандартными.

80. Найдите вероятность того, что событие A появится не менее 3 раз в 4 испытаниях, если $p(A)=0{,}4$.

81. Каждый пятый клиент банка приходит в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают обслуживания 6 человек. Какова вероятность того, что проценты будут брать только 2 человека?

82. Каждый четвертый клиент банка приходит в банк для того, чтобы снять деньги со счета. В банке ожидают обслуживания 5 человек. Какова вероятность того, что деньги снимут 3 человека?

83. Вероятность отказа автоматической системы в течение суток равна 0,2. Эксплуатируется 8 таких систем. Найдите вероятность отказа ровно 4 систем.

84. Вероятность отказа автоматической системы в течение суток равна 0,15. Эксплуатируется 7 таких систем. Найдите вероятность отказа ровно 5 систем.

85. Вероятность отказа элемента равна 0,2. В систему введены 6 подобных элементов, работающих одновременно. При этом система выходит из строя только в том случае, когда отказывают все 6 элементов. Найдите вероятность безотказной работы системы.

ОТВЕТЫ

Глава VIII

1. а) $s=s_0+v_0t$; $s=s_0+50t$. **3.** $V=\left(\sqrt{\dfrac{S}{6}}\right)^3$. **4.** б) $l=\sqrt{2S}$. **7.** Да. Нет. **9.** а) $S=2R^2$. **11.** Да: $D(f)=R$; $E(f)$ представляет собой множество конечных десятичных дробей вида $\{N_0,\ n_1n_2n_3\}$, где $N_0\in N$, n_1, n_2, n_3 независимо друг от друга принимают значения 0, 1, 2, ..., 9. $f(\sqrt{2})=1{,}414$, $f(\pi)=3{,}141$, $f\left(10\dfrac{1}{4}\right)=10{,}250$, $f\left(-121\dfrac{1}{3}\right)=-121{,}334$. **12.** $S=x\sqrt{4R^2-x^2}$, $0<x<2R$. При $x=\dfrac{R}{3}$ $S=\dfrac{R^2\sqrt{35}}{9}$, при $x=\dfrac{4R}{3}$ $S=\dfrac{8R^2\sqrt{5}}{9}$. **13.** $S=\dfrac{x^3\sqrt{4R^2-x^2}}{4R^2}$, $0<x<2R$. При $x=R$ $S=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$, при $x=R\sqrt{2}$ $S=R^2$. **14.** $s(t)=\begin{cases}\dfrac{gt^2}{2}, & 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ \dfrac{gt_0^2}{2}+v_0(t-t_0), & t_0<t\leqslant t_0+t_1.\end{cases}$ **16.** б) $f(x)=1$ при $x=0$ и $x=2$; $f(x)\neq 2$; $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ при $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **18.** б) $\varphi(u)=1$ при $u=2$, $\varphi(u)=2$ при $u=\dfrac{3}{4}$. **19.** $x\in\left(\dfrac{1}{4};\ 1\right]$. **20.** б) $x\in[-3;\ -2)\cup(-2;\ 1)\cup\left(1;\ \dfrac{5}{3}\right)$. **21.** а) $x\in(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; д) $x\in\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$; е) $x\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2};\ \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left(1;\ \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$. **22.** в) При $x=\dfrac{\alpha+3}{2(2\alpha-1)}$ функция принимает значение $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$. Значение $\dfrac{1}{2}$ функция не принимает. **23.** а) $\left[-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right]$. Самое большое значение $\dfrac{1}{2}$ функция принимает в точке $x=2$, самое малое значение $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ в точке $x=-3$; б) $[-4+2\sqrt{5};\ +\infty)$. Наименьшее значение $-4+2\sqrt{5}$ при $x=-2+\sqrt{5}$; наибольшего значения функция не имеет; в) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. Не существуют; г) $\left[-1;\ \dfrac{1}{15}\right]$. Существуют. Наименьшее значение -1 функция принимает при $x=-1$; наибольшее значение $\dfrac{1}{15}$ при $x=7$. **26.** в) $f(x)=3x^2-2x$. **29.** б) $y=-2x+5$. **30.** а) $y=-\dfrac{7}{2}x+6$; в) $y=\dfrac{11}{6}x+6$. **31.** а) $b=7$. **32.** а) $k=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{5}{3}$. **42.** $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{2}{3}$. **43.** $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2-x_1}$.

45. б) $|x-2|+|2x-1|=\begin{cases}-3x+3, & \text{если } x\in(-\infty;\ 0{,}5],\\ x+1, & \text{если } x\in(0{,}5;\ 2],\\ 3x-3, & \text{если } x\in(2;\ +\infty).\end{cases}$

46. а) $f(x)=0$ при $x=-4$ и $x=\frac{2}{3}$; б) с прямой $y=-5$ график функции не пересекается; с прямой $y=-3{,}5$ график функции пересекается в точке $A\left(-\frac{1}{2};\ -3{,}5\right)$; с прямой $y=4$ график функции пересекается в точках $B(-8;\ 4)$ и $C(2;\ 4)$; в) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -4)\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; $f(x)<0$ при $x\in\left(-4;\ \frac{2}{3}\right)$; г) $\alpha\in[-3{,}5;\ +\infty)$.
49. б) $M=\frac{1}{2}$, m не существует; в) $m=-\frac{7}{3}$, M не существует. **52.** а)

$$\operatorname{sgn}\frac{2x-1}{x-2}=\begin{cases}1, \text{ если } x\in(-\infty;\ 0{,}5)\cup(2;\ +\infty),\\ 0, \text{ если } x=0{,}5,\\ -1, \text{ если } x\in(0{,}5;\ 2).\end{cases}$$

54. а) $A(-2;\ 4)$, $B(4;\ 16)$; б) не пересекаются. **55.** а) $k\in(-\infty;\ -\sqrt{24})\cup(\sqrt{24};\ +\infty)$; б) $k=-\sqrt{24}$ и $k=\sqrt{24}$; в) $k\in(-\sqrt{24};\ \sqrt{24})$. **56.** $x=k-2$, $k=4$. **58.** а) $k=\frac{19}{4}$. Да, $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{9}{16}$; г) $k=2\sqrt{3}$. Других точек пересечения нет. **59.** $k^2+4b=0$. **62.** а) $A(-2;\ -1)$, $B(1;\ 2)$; г) не существуют. **63.** $k=b=-4$. **71.** а) Два решения при $a\in(-\infty;\ 3)$; одно решение при $a=3$; решений нет при $a\in(3;\ +\infty)$. $M=3$, m не существует; $E(f)=(-\infty;\ 3]$; б) одно решение при $a=-1$; два решения при $a\in(-1;\ 7)\cup(7;\ +\infty)$; бесконечное множество решений при $a=7$; при $a\in(-\infty;\ -1)$ решений нет. $m=-1$, M не существует; $E(f)=[-1;\ +\infty)$. **77.** $a=-\frac{9}{4}$; N — нет, M — да.
78. а) $A\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $B(2;\ 0)$; $2x^2-5x+2>0$ при $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)\cup(2;\ +\infty)$ и $2x-5x+2<0$ при $x\in\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$; в) $A\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$; $-4x^2+12x-9<0$ при $x\in\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; г) не существуют; $3x^2+x+5>0$ при $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **79.** а) $A(3;\ 1)$, $B(4;\ 3)$; г) не пересекаются; д) $A\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$. **80.** При $p>-\frac{1}{3}$, $p\neq0$ две точки пересечения: $A\left(\frac{1-\sqrt{1+3p}}{p};\ \frac{2+3p-2\sqrt{1+3p}}{p}\right)$ и $B\left(\frac{1+\sqrt{1+3p}}{p};\ \frac{2+3p+2\sqrt{1+3p}}{p}\right)$; при $p=-\frac{1}{3}$ одна точка $C(-3;\ -3)$; при $p<-\frac{1}{3}$ не пересекаются. **81.** $p=0{,}25$. **83.** а) При $p<-13$ общих точек нет; при $p=-13$ единственная общая точка; при $p>-13$ две общие точки; г) при $p<-\frac{145}{27}$ общих точек нет; при $p=-\frac{145}{27}$ единственная общая точка; при $p>-\frac{145}{27}$ две общие точки. **84.** а) $-18\leqslant p\leqslant 3$; б) $-\frac{3}{4}\leqslant p\leqslant\frac{15}{4}$; в) $p\leqslant 4$; г) $10\leqslant p\leqslant\frac{55}{4}$. **85.** а) Если $M(p;\ q)$ лежит на параболе $q+2=\frac{1}{4}(p-1)^2$, то корни трехчлена равны между собой; если $M(p;\ q)$ лежит ниже

соответствующей точки параболы, то трехчлен имеет два различных корня; если же $M(p;\ q)$ лежит выше соответствующей точки параболы, то действительных корней нет. **86.** а), б) Два корня; в), г) заключение о количестве корней сделать нельзя. **87.** а) 1) Множество точек, лежащих ниже соответствующих точек параболы $y=1+\frac{3}{4}x^2$. 2) Да. В точке $A(-2\alpha;\ 3\alpha^2+1)$. 3) $y=3x^2+1$; б) 1) Множество точек, лежащих ниже соответствующих точек параболы $y=-2+x^2$. 2) Да. В точке $A(-\alpha;\ \alpha^2-2)$. 3) $y=-2+2x^2$; в) 1) Множество точек, лежащих ниже соответствующих точек параболы $y=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$. 2) Да. В точке $A(-2\alpha;\ 3\alpha^2-2\alpha+1)$. 3) $y=\frac{2}{3}+3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$. **88.** а) $a=6$, $a=15$; б) $a\in(6;\ 15)$; в) $a\in(-\infty;\ 6)\cup(15;\ +\infty)$. **89.** $x=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$. **90.** $x_0=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$, $y_0=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. **91.** $\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. **92.** $x=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$. **93.** а) $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{2}{3}$; в) $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{5}$. **95.** а) $a=-\frac{1}{4}$, $k=-2$. **96.** а) $k<\frac{1}{4}$; б) $k=\frac{1}{4}$; в) $k>\frac{1}{4}$. **97.** а) Две: $A(-1;\ -2)$ и $B(2;\ 1)$; в) три: $A(-5;\ -3)$, $B\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2};\ \frac{5(3-\sqrt{21})}{2}\right)$ и $C\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2};\ \frac{5(3+\sqrt{21})}{2}\right)$. **98.** а) Да. $A(3;\ 3)$, $B(1;\ 9)$; д) да. $A\left(-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$, $B\left(\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2}\right)$ и $C\left(1;\ -\frac{1}{3}\right)$. **99.** а), в), г), д) Четные; е), з) нечетные. **101.** а), б), ж) Четные; в), г), д) нечетные. **103.** а), в) Всюду возрастает; б), г), д) всюду убывает. **104.** а) На $(-\infty;\ 0{,}15]$ убывает, на $[0{,}15;\ +\infty)$ возрастает; б) на $(-\infty;\ 0]$ возрастает, на $[0;\ +\infty)$ убывает; д) на $(-\infty;\ 0{,}2]$ возрастает, на $[0{,}2;\ +\infty)$ убывает. **105.** а) Возрастает на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)$ и $\left(-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; б) убывает на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)$ и $\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; д) убывает на $\left(-\infty;\ \frac{4}{9}\right)$ и $\left(\frac{4}{9};\ +\infty\right)$. **106.** а) Всюду возрастает; б) всюду убывает; в) всюду убывает; г) на $(-\infty;\ 0]$ убывает, на $[0;\ +\infty)$ возрастает; д) на $(-\infty;\ 0]$ убывает, на $[0;\ +\infty)$ возрастает. **109.** а), г) Не существует; б) $a=16$; в) $a=-\frac{4}{5}$; д) $a=\frac{6}{5}$. **110.** а) На $(-\infty;\ 0]$ возрастает, на $[0;\ 2]$ убывает, на $[2;\ +\infty)$ возрастает; в) на $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$ убывает, на $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ возрастает; г) на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{5}\right]$ убывает, на $\left[-\frac{1}{5};\ +\infty\right)$ возрастает. **115.** а) $a>\frac{1}{4}$; б) $a<-\frac{49}{8}$; в) $a\in(0;\ 4)$; г) $a<-\frac{25}{4}$. **117.** а) $x_0=1$ — точка максимума, $M=3$, $m=2$, $E(f)=[2;\ 3]$; б) $x_0=\frac{3}{2}$ — точка минимума, $M=1$, $m=-\frac{5}{4}$, $E(f)=\left[-\frac{5}{4};\ 1\right]$; в) на $[0;\ 2]$ точек экстремума нет; $M=5$, $m=-3$, $E(f)=[-3;\ 5]$; г) точек экстремума нет, $M=21$, $m=-1$, $E(f)=[-1;\ 21]$; е) $x_0=1$ — точка максимума, $M=7$, $m=4$, $E(f)=[4;\ 7]$; д) точек экстремума нет, $M=1$, $m=-19$, $E(f)=[-19,\ 1]$. **120.** в) 1. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. 2. Четная. 3. $E(f)=(0;\ 1]$. 4. $x=0$, $y=0{,}2$. 5. Отсутствуют. 6. $f(x)>0$ для всех $x\in D(f)$. 7. На $(-\infty;\ 0]$ возрастает, на $[0;\ +\infty)$ убывает. 8. $x=0$ — точка максимума. 9. $M=0{,}2$, m не существует. 10. Горизонтальная асимптота $y=0$. **121.** в) 1. $D(f)=(-\infty;\ \infty)$. 2. Ни четная, ни нечетная. 3. $E(f)=[-9;\ 1]$. 4. $x=0$, $y=-1$. 5. $x=\frac{1}{3}$, $y=0$. 6. $f(x)>0$ при $x>\frac{1}{3}$, $f(x)<0$ при $x<\frac{1}{3}$. 7. Возрастает на $\left[-\frac{4}{3};\ 2\right]$, убывает на промежутках $\left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right]$ и $[2;\ +\infty)$. 8. $x=-\frac{4}{3}$ — точка минимума, $x=2$ — точка максимума. 9. $M=1$, $m=-9$. 10. Горизонтальная асимптота $y=0$. **122.** г) 1. $D(f)=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ +\infty)$. 2. Ни четная, ни нечетная. 3. $E(f)=(-\infty;\ -5]\cup[1;\ +\infty)$. 4. $x=0$, $y=\frac{5}{4}$. 5. Отсутствуют. 6. $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;\ -2)$, $f(x)>0$ при $x\in(-2;\ +\infty)$. 7. Возрастает на $(-\infty;\ -5)$ и $[1;\ +\infty)$, убывает на $[-5;\ -2)$ и $(-2;\ 1]$. 8. $x=-5$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума. 9. M и m не существуют. 10. Вертикальная асимптота: $x=-2$. **125.** $a=\frac{l}{6-\sqrt{3}}$, $b=\frac{l(3-\sqrt{3})}{2(6-\sqrt{3})}$. **126.** $AB=50$ м, $BC=100$ м. **127.** $\frac{l}{2}$. **129.** $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. **130.** Из куска проволоки длиной $\frac{4\sqrt{3}a}{9+4\sqrt{3}}$ сделать квадрат, из куска длиной $\frac{9a}{9+4\sqrt{3}}$ — правильный треугольник. **131.** 10 см. **132.** $\frac{h}{2}$. **133.** Круг радиуса $\frac{p}{\pi}$. **134.** а) $a=3$, $b=-36$, $c=96$; б) $a=-4$, $b=4$, $c=24$; в) $a=2$, $b=8$, $c=15$. **135.** а) 1; б) -1; в) искомого значения не существует; г) -1. **136.** а) $M=\frac{1}{7}$, $m=-1$; $E(f)=\left[-1;\ \frac{1}{7}\right]$; б) $M=\frac{1}{2}$, $m=-1$; $E(f)=\left[-1;\ \frac{1}{2}\right]$; в) $M=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{38}$; $E(f)=\left[-\frac{1}{38};\ \frac{1}{2}\right]$; г) $M=1$, $m=-9$; $E(f)=[-9;\ 1]$. **137.** а) Искомой прямой не существует; б) $y=3x+1$; в) $y=-2x+1$; г) $y=x+3$. **138.** а) 1) $k\in(-\infty;\ 2)\cup(6;\ +\infty)$; 2) не существует; б) 1) $k\in(-\infty;\ 4)\cup(6;\ +\infty)$; 2) $k=\frac{5}{2}$; в) 1) $k\in(-\infty;\ 2)\cup(10;\ +\infty)$; 2) не существует; г) 1) $k\in(-\infty;\ 6)\cup(10;\ +\infty)$; 2) $k=4$; д) 1) $k\in(-\infty;\ 2)\cup(8;\ +\infty)$; 2) не существует. **139.** $\left(\frac{7}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$, $m=-\frac{10}{3}$. **140.** $\left(-\frac{15}{4};\ -\frac{25}{6}\right)$, $M=\frac{401}{8}$. **141.** $(-2;\ 29)$, $M=35$. **144.** а) $(1;\ -2)$; б) не существует. **145.** а) $\frac{1}{4}$; $a\in[0;\ +\infty)$; б) $\frac{23}{12}$; $a\in[4;\ +\infty)$; в) $\frac{3}{4}$; $a\in(-\infty;\ 4]$. **146.** а) $a\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6};\ 0\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6};\ +\infty\right)$; б) $a\in\left(-\frac{3}{4}(1+\sqrt{3});\ -1\right)\cup\left(0;\ -\frac{3}{4}(1-\sqrt{3})\right)\cup(7;\ +\infty)$. **147.** а) $x_1=\frac{10-\sqrt{187}}{29}$; $x_2=\frac{10+\sqrt{187}}{29}$; б) $x_1=\frac{-1-\sqrt{1030}}{49}$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{1030}}{49}$; в) искомых значений не существует. **148.** а) $x=\pm\sqrt{14}$; б) $x=\pm 7$; в) не изменится. **149.** а) $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$;

б) $E(f)\cap E(\varphi)=(-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$. **150.** а) $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$; б) $E(f)\cap E(\varphi)=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **151.** $2y+3x+2=0$. **153.** а) $(-\infty;\ -4)$; б) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{2}\right)\cup(4{,}5;\ +\infty)$. **154.** а) $c\in(1;\ 4)$; б) $c\in(-1;\ 1)\cup(4;\ 6)$; в) $c\in(-\infty;\ -1]\cup[6;\ +\infty)$. **156.** Да; $3-\sqrt{8}\leqslant a\leqslant 1$. **157.** Да; $-2\leqslant a\leqslant\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **158.** $x^2+396x-1000=0$. **159.** а) $x^2-(p^4-4p^2q+2q^2)x+q^4=0$. **160.** а) $b=0{,}75$, $m=14{,}875$; б) $b=0{,}8$, $M=9{,}6$. **161.** $p\in[-\sqrt{6};\ -\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5};\ \sqrt{6}]$. **162.** $p=-1$, $q=-2$. **163.** $a=\frac{3}{4}$, $m=-\frac{1}{8}$. **164.** а) $a=3$, $a=9{,}25$; б) $a\in(3;\ 9{,}25)$.

Глава IX

1. а) 1; 2; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{3}{2}$; 27; 16; 4; б) 16; 27; 10; 40; $1\frac{7}{9}$; $22\frac{2}{9}$; в) a^4, если $a\neq 0$; 1, если $a\neq 0$, $x\neq 0$; 3, если $a\neq 0$; 4, если $a\neq b$; $x-y$; 1, если $a\neq 0$; 1, если $a\neq 0$; 1, если $a_0\neq 0$; 1. **2.** а) a^2; b^{-11}; c^{-2}; б) $1{,}2mpx^{-4}$; $\frac{5}{3}x^2y^{-1}$; в) $-28ab^{-1}x^{-1}$; $(a-x)^{-1}$; $x-1$; г) a^{11}; b^5; $a^{-2}b^3x^{-4}y^5$; $0{,}6xy^{-1}z^7$; $0{,}8bx$. **3.** а) x^n; $\left(\frac{x}{a}\right)^n$; б) $\frac{x}{5}$; $\left(\frac{b}{a}\right)^n$; в) b^n; $\frac{b^3y^5}{a^2x^4}$. **4.** а) $(y-x)^{-1}$; б) $\frac{a}{10b^{n-1}}$; в) $-(a-x)^{n+3}$; г) $2{,}8a^{-1}b^nc^3$. **5.** а) a^6; x^{-10}; б) y^{10}; p^{-12}; в) q^{-2n}; $-u^{6n}$; $-v^{-4n+2}$. **6.** а) 6^{-2}; 7^{-3}; 2^{-6}; 5^{-4}; 2^{-10}; б) 10^{-1}; 10^{-3}; 10^{-6}. **7.** а) $8\frac{2}{11}$; б) $3\frac{2}{3}$. **8.** а) $\frac{27}{8}a^9b^{-3}x^9y^{-6}$; б) $\frac{16}{9}a^8b^{-6}x^4y^{-6}$; в) $x^{24}y^{48}z^{-72}$. **9.** а) $\frac{a^2-b^2}{(c+d)^2}$; б) $\frac{x+y}{x-y}$. **10.** а) x^2-x^{-2}; б) x^4-4+4x^{-4}; в) a^4-2+a^{-4}; г) $(a-b)^2(a+b)$; д) $a^4+a^2b^2+b^4$; е) $m^{-2}+n^{-2}$; ж) $a^{-6}-b^{-6}$. **11.** а) $x(x-a)$; б) $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{2bc}$; д) $\frac{x^3(x^2-xy-y^2)}{y^4(x+y)}$. **12.** а) $\{1;\ 5\}$; б) $\{-0{,}3;\ 1\}$; в) $\{1\}$. **13.** а) 5^4; б) $0{,}2^4$; в) $\frac{1}{3{,}8^4}$; г) $\frac{1}{0{,}56^5}$. **14.** а) Осевой; б) центральной. **15.** а), б). **16.** а) Нет; б) да. **17.** а) $15{,}1^5$; б) $0{,}71^6$; в) $\frac{1}{114{,}6^7}$; г) $\frac{1}{0{,}25^4}$. **18.** $a=3$, $n=3$. **19.** а) $\left(2p^2-\frac{S}{2}-p\sqrt{4p^2-2S}\right)\sqrt{\frac{2p^2-S}{2}}$; б) $\frac{a\pm\sqrt{a^2-128S_1}}{16}\cdot S_1$. **20.** а) 3^{3n+5}; б) b^{100}; в) 13^{12}; г) $0{,}7^3$. **21.** а) 32^{2m}; б) $4{,}8^{14p}$; в) $9{,}1^{-4}$; г) $(45{,}6)^{9l-19}$; д) 6^{-12s+1}. **22.** а) $-7\frac{5}{7}$; б) $\frac{39}{64}$. **23.** а) $216x^6$; б) $-16807a^{15}$; в) $12{,}25a^6y^8$; г) $-0{,}00243c^{45}d^5e^{30}$; д) $49x^{2n}$; е) $804{,}357x^{6n}$; з) $4x^{2n}-12x^ny^m+9y^{2m}$; и) $3^nx^{2n}y^{4n}z^{5n}$; к) $8{,}5^kx^{mk}y^{pk+nk}$; л) $9{,}61x^{2n}-42{,}25y^{2m}$; м) $2^{n+1}3^{n-1}x^{mn+kn+m-k}\times y^{mn+kn+k-m}$. **24.** а) $(3;\ +\infty)$; б) $(2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 2)$; г) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$; д) $(-3;\ 3)$; е) $(-\infty;\ +\infty)$. **25.** а) $26{,}16^5$; б) $\frac{1}{27{,}4^4}$. **26.** а) $37{,}5^3$; $18{,}5^4$; $29{,}8^4$; $29{,}8^5$;

б) $0{,}85^6$; $0{,}91^6$; $0{,}91^4$; $1{,}3^2$. **27.** $\frac{1}{15{,}8^4}$, $\frac{1}{15{,}8^5}$, $\frac{1}{17{,}6^5}$, $\frac{1}{17{,}6^7}$. **29.** а) $(a^nb^m)^4 \times$ $\times(4b^m+0{,}1a^n)^2$; б) $8^p(ab)^{23np}b^{np}$. **32.** а) 3; б) 5; в) 5; г) 9. **33.** $\sqrt[4]{1296}$. **35.** а) 7; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) 5; д) 7. **36.** а) 1; б) 5,25. **37.** а) 5; б) 7; в) 3,71; г) 5,4; д) 5,7; е) $-12{,}6$. **38.** а) 5,29; б) 2, 197; в) 1296. **39.** а) 7; б) 11; в) 4; г) 2. **40.** а) 0,1695; б) 4,4064; в) 81; г) 2197. **41.** а) $x\in[0;\ +\infty)$; б) $x\in(-\infty;\ 9]$; в) $x\in(-\infty;\ 6]$; г) $x\in(-\infty;\ 1]\cup[5;\ +\infty)$; д) $x\in[2;\ 6]$; е) $x\in\left(-\infty;\ \frac{4}{3}\right]\cup[5;\ +\infty)$. **42.** а) 120; б) 15 125; в) $\frac{64}{2401}$; г) 10; д) $\frac{13}{32}$; е) $\frac{16}{27}$. **43.** а) $\frac{2(a-x)}{3(a+x)}$; б) $\frac{2(a-2b)}{a^2+2ab+4b^2}$; в) $\frac{b+7}{6(b+1)}$; г) $\frac{3(x+y)^2(x-y)}{4y^3(x^2+y^2)^2}$. **45.** а) -3; б) -2; в) -2; г) -5. **46.** а) -24; б) -1; в) -243; г) -25. **47.** б), в). **48.** а) $x\in(-\infty;\ +\infty)$; б) $x\in(-\infty;\ 5]$; в) $y\in(-\infty;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$; г) $z\in(-\infty;\ 5)$. **49.** а) $\{6\}$; б) $\{-4;\ 4\}$; в) $\{-2\}$; г) $\{-3;\ 3\}$; д) $\{-10;\ 10\}$; е) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **50.** а) Да; б) да; в) нет. **51.** а) -4; б) 3; в) 49; г) -11. **52.** а) $-3{,}5$; б) $-\frac{1}{2}$. **53.** а) -8; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -10; д) $-0{,}2$; е) не имеет значения. **54.** а) $\{8{,}2\}$; б) $\varnothing$; в) $\{-31{,}5\}$; г) $\left\{3\frac{5}{9}\right\}$; д) $\{-3;\ 3\}$; е) $\{2\}$. **55.** а) $\sqrt[3]{2}\times$ $\times\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[4]{11}$. **56.** а) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; е) $\frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{7^5}}$. **57.** а) $\sqrt{\frac{7}{8}}$; б) $\sqrt{\frac{5}{12}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{21}{55}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. **58.** а) $-2(6+\sqrt{39})$; б) $2(12+\sqrt{85})$. **59.** а) 35; 182; 0,06; б) 135; 60; 2,1; в) 1,5; 4; г) 30; 0,2. **60.** а) 28; 36; 1,6; 4; б) 0,9; 0,04; в) 6; 28; 2; г) 5; 0,2; д) 6; 2; е) 0,72; 175; 4; ж) 1,3; $\frac{14}{15}$; 0,6; 3; $\frac{4}{3}$; з) 2,25; 1,5; 1,5; 3,5; и) 0,3; 0,2; 0,07. **61.** а) $5\frac{1}{3}$; б) $3+2\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[5]{5}+\sqrt[5]{3}$; г) $\sqrt[7]{8}-\sqrt[7]{3}$. **62.** г) $\sqrt[5]{241}<$ $<\sqrt[5]{243}=3=\sqrt[4]{81}<\sqrt[4]{83}$. **63.** $4\frac{4}{15}$. **64.** а) $\{43\}$; б) $\{41\}$; в) $\varnothing$. **65.** а) $x^2-2x-1=0$; г) $x^2-2\sqrt[4]{2}x+(\sqrt{2}-\sqrt{11})=0$. **66.** а) $\sqrt{\frac{3^2\cdot 5^3}{4^2\cdot 7\cdot 11^2}}$; б) $\sqrt[5]{2\cdot 3^3\cdot 7^2}$. **67.** а) 14; б) 15; в) 9072; г) 5929. **68.** а) $\sqrt[6]{5}<\sqrt{2}$; г) $\sqrt{87}>\sqrt[3]{711}$, так как $\sqrt{87}>\sqrt{81}=9=\sqrt[3]{729}>$ $>\sqrt[3]{711}$. **69.** Нет. **70.** а) Нет; б) да. **71.** 4. **75.** а) (0; 0) и (1; 1); б) $(-1;\ -1)$, (0; 0) и (1; 1); в) $(-1;\ -1)$, (0; 0) и (1; 1); г) (0; 0) и (1; 1). **76.** а) $\{-6;\ 6\}$; б) $\{-10;\ 10\}$. **77.** а) $(54;\ +\infty)$; б) $(-11{,}2;\ +\infty)$; в) $(-\sqrt{41};\ \sqrt{41})$. **78.** а) $\{-9,\ 4\}$; б) $\{1{,}25\}$; в) $\left\{17\frac{8}{17}\right\}$. **79.** а) $\sqrt[3]{a^2}$; б) $\sqrt[3]{a}$; в) $\sqrt{a^7}$; г) $\sqrt[3]{p^{-2}}$; д) $\sqrt{q^{-3}}$; е) $\sqrt{h}$; ж) $\sqrt[4]{v^{-7}}$; з) $\sqrt{(ax-b)^{n-1}}$; и) $\sqrt[3]{(m-n)^{3p+2}}$; к) $\sqrt[4]{(p-q)^{4n-1}}$; л) $2a\sqrt[5]{(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt{n})^2}$. **80.** а) $(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}$;

б) $(a^2x)^{\frac{1}{2}}+(b^3x^2)^{\frac{1}{4}}+(c^4x^3)^{\frac{1}{6}}$; в) $\left(\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$; г) $\left(a\left(bc^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; д) $\left(a\cdot a^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$; е) $\left(x\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$. **81.** а) 6; б) 32; в) 1,5; г) 0,5; д) $\frac{1}{9}$; е) $\frac{8}{27}$; ж) $60a^{-6}$; з) $4b^2+b^{\frac{8}{3}}$. **82.** а) $10x^{\frac{2}{15}}$; б) $\frac{2}{3}am^{-\frac{1}{24}}$; в) $2p^{\frac{3}{2}}$; г) $2aq^{-1}$; д) $pq^{-0,5}$; е) $8a^{\frac{9}{8}}b^{-\frac{3}{2}}$; ж) $\frac{1}{2}m^{\frac{1}{6}}n^{-\frac{2}{15}}$; з) $10^{-4}a^{-4}b^{-2}\cdot 2p^{\frac{8}{5}}q^{-\frac{8}{3}}$. **83.** а) $\frac{1}{5-a^{\frac{1}{6}}}$; б) $\frac{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}{x}$; в) $\left(a^{\frac{3}{8}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\times$ $\times\left(a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{12}}+b^{\frac{1}{6}}\right)$. **84.** а) $9x^{\frac{4}{3}}-y^3$; б) $m-n$; в) $4m^{-\frac{3}{2}}+12+9m^{\frac{3}{2}}$; г) $x^{-1}-x^{-\frac{2}{3}}+$ $+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{3}}$; д) $m^{-2}-3+3m^2-m^4$; е) $a^{\frac{8}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}$; ж) $z^{\frac{4}{3}}-1$; з) $b^{10,5}-64$; и) $x^{0,5}-y^{0,5}$.

85. а) abc; б) $a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{2}}+a^{-0,5}b^{-3}$; в) $abxy^{\frac{9}{4}}$; г) $a^{\frac{13}{12}}$. **86.** $x^2-x-2=0$. **89.** а) «–»; б) 0; в) «–»; г) «–». **90.** а) $(44;\ 141]$; б) $\left(\frac{13}{4};\ \frac{38}{9}\right]$; в) $[-199,897;\ -7,125)$.

91. а) $x\in(1,8;\ +\infty)$; б) $y\in\left(-\infty;\ \frac{2}{13}\right)$; в) $x\in\left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$; г) $x\in\varnothing$; д) $y\in(-\infty;\ 2)\cup$ $\cup(4;\ +\infty)$; е) $x\in\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)\cup(5;\ +\infty)$; ж) $x\in\left(-2;\ \frac{11}{3}\right)$. **92.** а) $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$; б) $\{8\}$; в) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$; г) $\left\{\frac{4}{5}\right\}$. **93.** а) $\{8\}$; б) $\{32\}$; в) $\{-13\}$; г) $\varnothing$; д) $\{-1,8\}$; е) $\varnothing$; ж) $[-1;\ 0]$; з) $\{-1;\ 1\}$.

95. а) $\frac{2}{2-a}$; б) $(a^2+ab+b^2)(\sqrt[6]{a^2(a-b)^{-1}}-1)$; в) $1,5\sqrt[3]{c^{-1}}$; г) $\frac{1}{1-x^2}$. **96.** а) $\frac{\sqrt{k-1}(\sqrt{k}+1)}{\sqrt{k}}$; б) 0. **97.** а) 168; б) 14; в) 14; г) 42. Существуют. **98.** $K=\left(\frac{Q}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$; $L=\left(\frac{Q}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}K^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$. **99.** а) 1530; б) 14 280. $K=\left(\frac{Q}{1,7}\right)^3L^{-2}$; $L=\left(\frac{Q}{1,7}\right)^{\frac{3}{2}}K^{-\frac{1}{2}}$. **100.** а) 16; б) 81; в) $\sqrt[3]{50\,625}$. **101.** а) $\frac{1}{6\sqrt[3]{6}}$; б) $500\sqrt[3]{500}$; в) 81. **102.** $K=\frac{25}{L}$. **103.** 7290.

104. а) Обеспечит; б) нет; в) обеспечит. **105.** а) 15 990; б) 15 705. **106.** а) $25L+$ $+48K=22\,950$; б) $25L+48K=66\,350$. **107.** 100. **108.** Указание: на изокосте $10L+25K=1000$ найдите три точки и вычислите величину выпуска Q для каждой из них. **109.** а) 120; 2,4; 15; б) да; в) нет. **110.** а) 3200; 20; 80; б) нет; в) да. **112.** а) 3; б) –4; в) $-(2^{0,7}+1)$; г) –2; д) 6; е) 1; ж) $\sqrt{2}-2$; з) 10; и) 3; к) 37,5. **113.** а) $(1+3^{0,5})^{-2}$; б) $(1-\sqrt{2})^{-2}$; в) $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$. **114.** а) $10\,002^4=(9997+5)^4<$ $<(2\cdot 9997)^4<9997^5$; б) $76^8>75^8=3^8\cdot 5^{16}=5^{15}(3^8\cdot 5)=5^{15}(81^2\cdot 5)=5^{15}((80+1)^2\cdot 5)=$

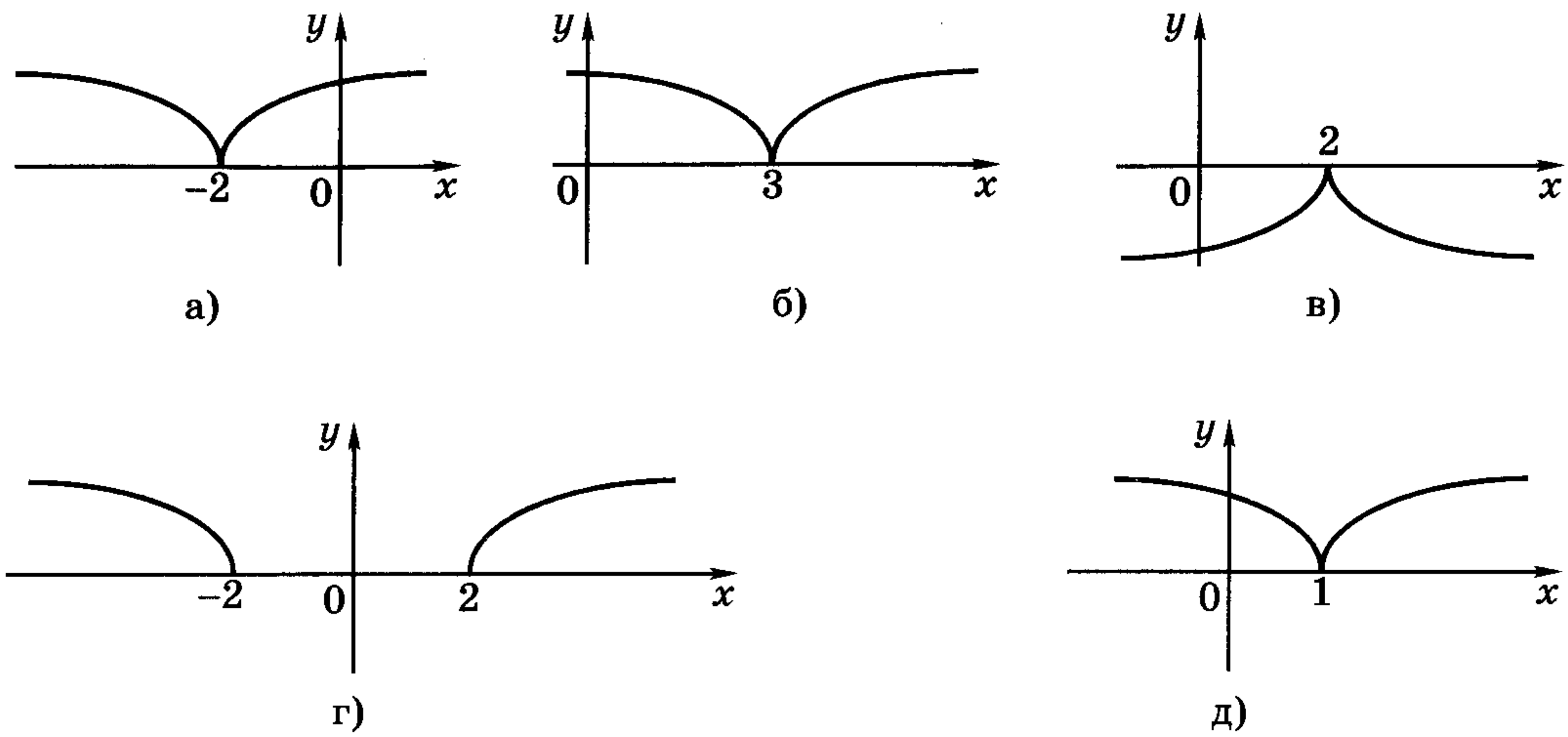


Рис. 129

$=5^{15}\cdot(2^8\cdot5^3+2^5\cdot5^2+5)>5^{15}(2^8(128-3)+2^5\cdot2^3\cdot3)=5^{15}\cdot2^{15}=10^{15}$; в) $31^4<36^4=6^8<7^8<7^{14}$. **115.** а) 106; б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$. **116.** а) 1; б) 1; в) 0; г) 2; д) $2(\sqrt{a}+1)$; е) $\sqrt[6]{a}$. **117.** а) 4; б) 0; в) $23\frac{11}{276}$; г) 1. **118.** 0,1. **119.** Указание. а) $5\sqrt{2}\pm7=(\sqrt{2}\pm1)^3$; б) возведите обе части равенства в квадрат. **120.** а) $-\frac{5\sqrt[3]{3}}{3}$; б) $\frac{3\sqrt[4]{17^3}}{17}$; в) $4\sqrt[5]{81}$; г) $\frac{11(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$; д) $-12(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$; е) $-(2\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}+2\sqrt{2}+\sqrt{6})$; ж) $10(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; з) $\frac{2}{17}(\sqrt[3]{25}-\sqrt[6]{200}+2)(5-2\sqrt{2})$; и) $\frac{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[6]{10}+\sqrt[3]{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$; к) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$; л) $3\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}+2\sqrt{2}+1$. **121.** а) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}$; б) $\frac{1}{x^3-\sqrt{x^3}\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y^4}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[3]{a^2}}$.

122. а) $(a+3bc+c^3)^2=b(b+3c^2)^2$; б) $8x^2+63x+125=0$; в) $xy(x^4+y^4-9a^2xy+2x^2y^2+6a^4)=a^6$. **123.** а) $\frac{x-y}{4x(x+2y)}$; б) $4-\sqrt[4]{4x}$; в) $\sqrt[20]{a^{-43}b^{-14}}$; г) $\sqrt[3]{b}$; д) $\frac{x-a}{x}$; е) $\frac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$. **125.** а) $x\in(-4;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$, $\frac{(x+8)(x-1)-4\sqrt{x+4}}{x\sqrt{x+4}}$; б) если $0<b<a$, то 0; если $0<a<b$, то $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **128.** а) $y=\sqrt[6]{(x+2)^2}=\sqrt[3]{|x+2|}$ (рис. 129, *а*); б) $y=\sqrt[4]{(x-3)^2}=\sqrt{|x-3|}$ (рис. 129, *б*); в) $y=-\sqrt[3]{|x-2|}$ (рис. 129, *в*); г) $y=\sqrt{|x|-2}$ (рис. 129, *г*); д) $y=\sqrt[5]{|x-1|}$ (рис. 129, *д*).

5. а) $x^3+x^2-6x-5+\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$; б) $x^3-5x^2+26x-130+\dfrac{651}{x+5}$; в) $x^4-x^2-x+1+\dfrac{2x^2-2}{x^3+x+1}$; г) $x^3+3x^2+9x+27+\dfrac{17}{x-3}$. **6.** $k=11$. **7.** а) $a=-30$, $b=28$; б) $a=2$, $b=0$. **8.** $n=-4$, -1, 0, 3. **9.** Указание: $x^{2003}-1=x\left(\left(x^{286}\right)^7-1\right)+x-1$.

25. а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 4]$; в) $(-\infty;\ -3]\cup[9;\ +\infty)$; г) $[1;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ \sqrt[3]{2}]$; е) $(-\infty;\ -1]\cup(3;\ +\infty)$; ж) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$. **27.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) да; ж) нет; з) нет; и) нет. **28.** а) Нет; б) да. **29.** а) Нет; б) да. **30.** а), б) Второе; в) первое; г) равносильны; д) несравнимы. **32.** а) $\{x\mid x\neq\pm1\}$, $\{-2;\ 0\}$; б) $\{x\mid x\neq\pm1\}$, $\{-2;\ 5\}$; в) $\{x\mid x\neq-3,\ x\neq1\}$, $\left\{\dfrac{1}{13}\right\}$; г) $\{x\mid x\neq-3,\ x\neq1\}$, $\varnothing$. **33.** а) $\{\pm1;\ \pm\sqrt{6}\}$; б) $\left\{\pm\dfrac{1}{2};\ \pm\dfrac{1}{3}\right\}$; в) $\left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; г) $\{0\}$. **34.** а) $\left\{\pm\dfrac{1}{3};\ 2\right\}$; б) $\{\pm1\}$; в) $\{-1;\ 2\pm\sqrt{3}\}$; г) $\{\pm1\}$; д) $\{\pm1;\ \pm\sqrt{2}\}$; е) $\{0;\ 1\}$. **35.** а) $\{-2;\ -1\}$; б) $\{-3;\ -1;\ \pm2\}$; в) $\left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$; г) $\left\{-2;\ -\dfrac{5}{3};\ 1\right\}$. **36.** а) $(0;\ 18)$, $(3;\ 0)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$; $\left(-\dfrac{2}{3};\ 0\right)$; б) $(-3;\ 0)$, $(-2;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(3;\ 0)$. **38.** $a=\pm2$. **39.** $m=12$, $x_2=-\dfrac{3}{2}$, $x_3=\dfrac{2}{3}$. **40.** $m=-5$, $n=30$, $x_3=-2{,}5$. **42.** а) $\{\pm1;\ \pm2\}$; б) $\left\{-1;\ \dfrac{1}{3}\right\}$, в) $\varnothing$; г) $\{-2;\ 1\}$; д) $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; е) $\left\{\dfrac{1}{3};\ 3;\ \dfrac{-8\pm\sqrt{55}}{3}\right\}$. **43.** а) $\{-4\pm\sqrt{6};\ -6;\ -2\}$; б) $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{29+4\sqrt{349}}}{6}\right\}$; в) $\{-1;\ 4\}$; г) $\{5\}$; д) $\left\{-\dfrac{5}{4};\ -\dfrac{1}{2}\right\}$. **44.** а) $\left\{\dfrac{-1-\sqrt{41}\pm\sqrt{2\sqrt{41}-6}}{4}\right\}$; б) $\left\{-1\pm\sqrt{3};\ \dfrac{7\pm\sqrt{337}}{12}\right\}$; в) $\left\{\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2};\ 1;\ 2\right\}$; г) $\{1;\ 2\}$. **46.** а) $\{-1;\ -2\pm\sqrt{3}\}$; б) $\left\{-\dfrac{5}{3};\ -\dfrac{5}{4};\ \dfrac{5}{2};\ 5\right\}$; в) $\left\{-1;\ -\dfrac{1}{2};\ 2;\ 4\right\}$; г) $\{\pm\sqrt{2};\ 3\pm\sqrt{2}\}$; д) $\varnothing$. **47.** а) $\{2;\ 3\}$; б) $\{-5;\ -3\}$. **48.** а) $\varnothing$; б) $\{-2;\ 1;\ 4\}$; в) $\{-1;\ 2\}$; г) $\varnothing$. **49.** $2x^3-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{9}=0$. **50.** $8x^3-\dfrac{98}{9}x^2+\dfrac{28}{9}x-\dfrac{2}{9}=0$. **51.** $x^4-x^3-2x^2-12x-16=0$. **53.** $x^3+3qx^2+(p^3-3q^2)x+q^3=0$. **54.** Указание: С помощью теоремы Безу докажите, что деление выполняется без остатка, затем докажите, что частное — симметрический многочлен второй степени, и найдите его выражение через σ_1^2 и σ_2. **55.** а) $\left\{-1;\ -\dfrac{3}{4};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{3}\right\}$; б) $\{7-\sqrt{34};\ 7+\sqrt{34}\}$; в) $\{1;\ 2\}$; г) $\{7\pm\sqrt{34}\}$. **56.** а) $\left\{-\dfrac{5}{2};\ 0\right\}$; б) $\left\{\dfrac{-5\pm\sqrt{345}}{10}\right\}$; в) $\left\{0;\ \dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$. **57.** а) $\{-4;\ -3;\ 1;\ 2\}$; б) $\{-7;\ 2\}$;

в) $\left\{-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$; г) $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$. **58.** а) $\{-2-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$; б) $(-5; -2)\cup[1; 3]$; в) $\left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$; г) $\left\{\frac{-17-\sqrt{109}}{18}; \frac{7+\sqrt{93}}{2}\right\}$. **59.** а) Да; б) нет. **62.** а) $\left\{\left(-3; -\frac{1}{3}\right); (7; 3)\right\}$; б) $\left\{\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); (4; 5)\right\}$; в) $\{(2; 6); (5; 3)\}$. **63.** а) $\{(-\sqrt{30}; -\sqrt{89}); (-\sqrt{30}; \sqrt{89}); (\sqrt{30}; -\sqrt{89}); (\sqrt{30}; \sqrt{89})\}$; б) $\left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right); \left(2; -\frac{2}{3}\right); (3; 2); (4{,}5; 1)\right\}$; в) $\{(2; 3); (3; 2)\}$. **64.** а) $\{(-6; 1); (1; -6); (2; 3); (3; 2)\}$; б) $\{(4; 8); (8; 4)\}$; в) $\{(-4; 1); (1; -4); (1; 2); (2; 1)\}$; г) $\{(-3; -1); (-1; -3); (1; 3); (3; 1)\}$; д) $\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{3}}+\sqrt{\frac{17}{12}+\sqrt{\frac{17}{3}}};\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{3}}-\sqrt{\frac{17}{12}+\sqrt{\frac{17}{3}}}\right); \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{3}}-\sqrt{\frac{17}{12}+\sqrt{\frac{17}{3}}};\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{3}}+\sqrt{\frac{17}{12}+\sqrt{\frac{17}{3}}}\right)\right\}$. **65.** а) $\left\{(-2; -1); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); (2; 1)\right\}$; б) $\{(-5; -2); (5; 2)\}$; в) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\}$; г) $\{(-2; -1); (2; 1)\}$; д) $\{(-2\sqrt{7}; \sqrt{7}); (-2\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (2\sqrt{3}; \sqrt{3}); (2\sqrt{7}; -\sqrt{7})\}$. **66.** а) $\{(-2; -1); (-2; 1); (-1; -2); (-1; 2); (1; -2); (1; 2); (2; -1); (2; 1)\}$; б) $\varnothing$; в) $\{(-2; 1; 1); (-1; -1; 2); (1; 1; -2); (2; -1; -1)\}$. **67.** При $a\in(-\infty; -6)\cup\left(-6; \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3}; \frac{18}{7}\right)\cup\left(\frac{18}{7}; +\infty\right)$; $x=\frac{14-a}{3a-2}$.

68. а) Если $a\in\{1; 3\}$, то $\varnothing$; если $a\notin\{1; 3\}$, то $x=a$; б) если $a=-2$, то $\varnothing$; если $a\neq 2$, то $x=2$; в) если $a\in(-\infty; -8)\cup(2; +\infty)$, то $\varnothing$; если $a\in[-8; -6)\cup(-6; 2]$, то $x=\frac{4\pm\sqrt{16-6a-a^2}}{a+6}$; если $a=-6$, то $x=-\frac{3}{4}$; г) если $a\in(-\infty; -2)\cup\left(-2; -\frac{1}{40}\right)$, то $\varnothing$; если $a\in\left[-\frac{1}{40}; 0\right)\cup(0; +\infty)$, то $\left\{\frac{1\pm\sqrt{1+10a}}{4a}\right\}$; если $a=-2$, то $(-\infty; +\infty)$; если $a=0$, то $\{-5\}$. **69.** $a\in(-1; 1)$. **70.** При $a=1$ $x=3$, при $a=-1$ $x=-3$.

71. 1 при $a=\pm1$. **73.** $a\in(0; 4)\cup(4; +\infty)$. **74.** $p\geqslant 1$. **77.** а) $\left[-\frac{3}{4}; \frac{2}{5}\right]\cup[3; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $(-\infty; -1)\cup\left(-1; \frac{5}{8}\right)\cup(1; +\infty)$; г) $(-\infty; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; +\infty)$. **78.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]\cup\{1\}\cup[3; +\infty)$; б) $\{-1; 0; 2\}$; в) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$; г) $(-\infty; 1)$; д) $(-\infty; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; +\infty)$; е) $[-1; 1]$. **79.** а) $(-\infty; -1)\cup(0; +\infty)$; б) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)\cup(2; +\infty)$; в) $(-1; 1)$; г) $(-\infty; -4-\sqrt{6}]\cup[-6; -2]\cup[-4+\sqrt{6}; +\infty)$. **80.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.

81. а) $(1; 2]\cup[3; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)\cup\left(0; \frac{1}{2}\right)\cup(1; +\infty)$; в) $(-12; -2)\cup\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\cup(3; +\infty)$; г) $\left[-1; -\frac{3}{7}\right]\cup[1; 5)\cup[6; +\infty)$; д) $(-4; -3)\cup(-1-\sqrt{3}; -2)\cup(0; -1+\sqrt{3})\cup(1; 2)$; е) $(-1; 0)\cup(1; 2)$. **82.** а) $(-\infty; 2-2\sqrt{2}]\cup[2; 4]\cup[2+2\sqrt{2}; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right)$; в) $\left(-\frac{31}{2}; -2\right)\cup\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **83.** $(-\infty; +\infty)$. **84.** $a\in(-4; 4)$. **85.** $a\in(-\infty; 0)\cup(2; +\infty)$.

88. $k\in(-5;\ 1)$. **91.** $x=y=\dfrac{m}{2}$. **92.** $x=y=\sqrt{p}$. **93.** а), б), в), г). **94.** а) $[4;\ 5]$; б) $\left[\dfrac{1}{2};\ 2\right]$; в) $\left[-\dfrac{7}{4};\ 1\right]\cup[3;\ +\infty)$. **96.** а) $\{-\sqrt{11};\ \sqrt{11}\}$; б) $\{\sqrt{2}\}$; в) $\{-8;\ -6\}$; г) $\{-1;\ 0\}$; д) $\{-\sqrt{2};\ 0;\ \sqrt{2}\}$. **97.** а) $\left\{-\dfrac{8}{9};\ 8\right\}$; б) $\{10\}$; в) $\{-1\}$; г) $\{0;\ 5\}$; д) $\{2\}$; е) $\{-2\}$. **98.** а) $\{4\}$; б) $\{0;\ 5\}$; в) $\left\{\pm\dfrac{10}{9}\sqrt{21}\right\}$; г) $\varnothing$; д) $\{1\}$; е) $\{15\}$. **99.** а) $\{1\}$; б) $\{1\}$; в) $\{\pm\sqrt{11};\ \pm\sqrt{6}\}$; г) $\{-3;\ 6\}$; д) $\{8;\ 27\}$; е) $\{1\}$. **100.** а) Если $a\in(-\infty;\ 0)$, то $\varnothing$; если $a\in(0;\ +\infty)$, то $x=\dfrac{1+2a-\sqrt{1+4a}}{2}$; б) если $a\in(-\infty;\ 1)$, то $\varnothing$; если $a\in[1;\ +\infty]$, то $\{-a-1;\ -3a+1\}$; в) если $a=0$, то $\varnothing$; если $a\neq 0$, то $\{0\}$. **101.** а) $\{0\}$; б) $\{49\}$; в) $\{0\}$; г) $\{0\}$. **102.** а) $[3;\ 28)$; б) $(3;\ +\infty)$; в) $[1;\ +\infty)$; г) $\varnothing$; д) $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$; е) $[0;\ 4]$; ж) $(-\sqrt{14};\ \sqrt{14})$; з) $[0;\ 6]$; и) $(-4;\ -2)$; к) $(-\infty;\ -8)\cup(-2;\ +\infty)$; л) $\left(\dfrac{1}{2};\ 2\right]$; м) $\left(\dfrac{3}{4};\ 2\right)$. **103.** а) $\varnothing$; б) $(5;\ +\infty)$; в) $\left(0;\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$; г) $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{5}\right]$; д) $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right)$; е) $\left(\dfrac{-3+\sqrt{65}}{2};\ +\infty\right)$; ж) $[0;\ 2]$; з) $\left(\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$; и) $(-\infty;\ 0)$; к) $\left(\dfrac{24}{19};\ +\infty\right)$. **104.** а) $[1;\ +\infty)$; б) $(4;\ 6]$; в) $\left(\dfrac{5}{2};\ 1+\sqrt{3}\right)$; г) $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; д) $(-\infty;\ -1)\cup(3;\ +\infty)$; е) $\left(\dfrac{-17+\sqrt{2089}}{18};\ 2\right]$.

105. а) $[16-a;\ +\infty)$; б) если $a<-\dfrac{1}{2}$, то $\left[a;\ \dfrac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; если $-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant-\dfrac{7}{16}$, то $\left[\dfrac{-3-\sqrt{-16a-7}}{8};\ \dfrac{-3+\sqrt{-16a-7}}{8}\right]$; если $a>-\dfrac{7}{16}$, то $\varnothing$; в) $\left[-\dfrac{1}{2}|a|;\ +\infty\right)$; г) если $a<0$, то $(0;\ -\sqrt[3]{a})$; если $a=0$, то $\varnothing$; если $a>0$, то $(-\infty;\ -\sqrt[3]{a})\cup(0;\ +\infty)$.

106. а) $\left[-3;\ \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$; б) $(3-\sqrt{13};\ 3+\sqrt{13})$; в) $(-\infty;\ -3-2\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{6};\ +\infty)$.

110. а) $\left\{0;\ \dfrac{1}{3};\ -\dfrac{2}{5}\right\}$; б) $\varnothing$; в) $\{-1+\sqrt{2};\ -1-\sqrt{2}\}$. Указание. $(1+x^2)^2=4x(1-x^2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x^2+2x-1)^2=0$; г) $\{1;\ -3;\ -7\}$; д) $\{1\}$; е) $\{-2;\ 1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$; ж) $\{-1-\sqrt{7};\ -1+\sqrt{7}\}$. Указание. $x^2(x-3)^2-16(x-3)^2+9x^2=x^4-6x^2(x-3)-16(x-3)^2=(x^2-3(x-3))^2-$ $-25(x-3)^2$; з) $\{1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\}$. Указание. $x^4-2x^2-8x-3=(x^4-4x^2)+3(x^2-2x)-$ $-(x^2+2x)-3$. **111.** а) $\left\{1;\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; б) $\left\{1;\ 2;\ \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2};\ \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}\right\}$; в) $\left\{2;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{-11-\sqrt{105}}{4};\ \dfrac{-11+\sqrt{105}}{4}\right\}$. **112.** в) $\{3;\ 3-2\sqrt{5};\ 3+2\sqrt{5}\}$; г) $\{-4;\ -2;\ -1;\ 1\}$; д) $\left\{-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{-3-\sqrt{10}}{2};\ \dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}\right\}$; е) $\left\{\dfrac{-5-\sqrt{21}}{6};\ \dfrac{-5+\sqrt{21}}{6}\right\}$. **113.** а) $\{2\}$; б) $\{4;\ 2\}$; в) $\{4{,}5;\ 5{,}5\}$; г) $\{-2;\ 3\}$. **114.** а) $\{1\}$; б) $\{0;\ 2\}$; в) $\{3\}$; г) $\{4-\sqrt{10};\ 4+\sqrt{10}\}$; д) $\{-8\}$;

е) $\left\{3;\ \frac{2}{3}\right\}$. **115.** а) $\{-1\}$; б) $\left\{0;\ -3;\ \frac{-3-\sqrt{73}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{73}}{2}\right\}$; в) $\left\{\frac{-11-\sqrt{97}}{6};\ \frac{-11+\sqrt{97}}{6}\right\}$; г) $\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; д) $\{-2;\ 6;\ 3-\sqrt{21};\ 3+\sqrt{21}\}$; е) $\{7-\sqrt{34};\ 7+\sqrt{34}\}$.

116. а) $\{80;\ -109\}$; б) $\varnothing$; в) $\{2\}$; г) $\{-15;\ 13\}$; д) $\{5\}$; е) $\left\{\frac{16}{25}\right\}$. **117.** а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $\{1\}$.

118. а) При $a>2$ $x=a^2-4a$, при $a\leqslant 2$ корней нет; б) при $a<-\frac{1}{4}$ действительных корней нет, при $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$, при $0<a<1$ $x=\frac{-1-\sqrt{4a+1}}{2}$, при $a\geqslant 1$ $x=\frac{-1-\sqrt{4a+1}}{2}$, $x=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$. Указание. Представьте данное уравнение в виде квадратного относительно параметра a и выразите a через x. Затем из полученных равенств выразите x через параметр a; в) при $a<0$ и $0<a<1$ действительных корней нет, при $a=0$ $x=0$, при $a\geqslant 1$ $x=\frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$. Указание. Введите новую переменную $b=a-x$ и выразите x через b; г) при $a<1$ действительных корней нет. При $a\geqslant 1$ $x=\frac{(a-1)^2}{4}$; д) $\{-a;\ 1-a\}$ при любом значении параметра a.

119. $m=3$. **121.** $q<0$, p — любое или $p<0$, $q=\frac{p^2}{4}$. **122.** $-\frac{1}{4}<a<1$. **123.** а) $p^2-4q\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $p\leqslant 0$; $2a^2+p>0$, $a^4+pa^2+q>0$; б) $p^2-4q\geqslant 0$, $q>0$, $2a^2+p<0$, $a^4+pa^2+q>0$.

124. а) $\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$; б) $\left\{\frac{11-\sqrt{29}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$; в) $\{0;\ \pm 2;\ \pm 4\}$; г) $\varnothing$; д) $\left\{x \mid x\leqslant \frac{6}{5}\right\}$; е) $\{-1;\ 2\}$. **125.** а) При $a\leqslant 0$ и $a>1$ действительных корней нет, при $0<a\leqslant 1$ $x=\pm\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2$; б) $\{-4;\ 10\}$; в) $\{-\sqrt{2};\ 0;\ \sqrt{2}\}$; г) $\{-1\}$. **126.** а) $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ -2)\cup(4;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)\cup\left(\frac{7-\sqrt{85}}{6};\ \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{85}}{6};\ +\infty\right)$; в) $(-\infty;\ -1)\cup(3;\ 4)$; г) $(-\infty;\ -4)\cup(-1;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$. **127.** а) $\left(-\infty;\ \frac{-7-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(-5;\ -\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{-7+\sqrt{37}}{2};\ \frac{7-\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{5};\ 5\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{37}}{2};\ +\infty\right)$; б) $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 1)\cup(2;\ 3)\cup(4;\ 6)\cup(7;\ +\infty)$; в) $(-4;\ -3)\cup\left(-\frac{5}{2};\ -2\right)\cup(-1;\ 0)$; г) $(-\infty;\ -3)\cup\left(-\frac{1}{3};\ 3\right)\cup(3;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$; д) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup\left[\frac{5}{2};\ +\infty\right)$; е) $[-2-\sqrt{2};\ -2)\cup(-1;\ -2+\sqrt{2}]\cup(0;\ +\infty)$. **128.** а) $\left[1;\ \frac{25}{16}\right)$; б) $(3;\ 11)$; в) $\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right]$. **130.** а) $(-\infty;\ 0)$; б) $\left[-1;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; в) $[-\sqrt{3};\ 0)\cup(0;\ 2)$; г) $[-1;\ \sqrt[3]{4})$.

131. а) При $a=0$ $x\in(-\infty;\ 0)$, при $a<0$ $x\in\left(-\infty;\ \frac{a}{2}\right]$; б) при $a\geqslant 0$ $x\in[0;\ a]\cup[16a;\ +\infty)$, при $a<0$ решений нет; в) $a\leqslant -1$ $x\in(-\infty;\ 2]$, при $a>-1$

$x\in\left(2-\dfrac{1}{(1+a)^2};\ 2\right)$; г) при $a<0$ и при $a>1$ решений нет, при $a=0$ $x=0$, при $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ $x\in[0;\ a^2)$, при $\dfrac{1}{2}<a<1$ $x\in[2a-1;\ a^2]$, при $a=1$ $x=1$. **132.** а) $x=\dfrac{4}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$; $x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{4}{3}$; б) $x=\sqrt[3]{13}$, $y=-\sqrt[3]{13}$; $x=3$, $y=1$; $x=-1$, $y=-3$; в) $x=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; г) $x=5$, $y=3$; $x=-3$, $y=-5$; $x=3$, $y=5$; $x=-5$, $y=-3$; д) $x=\dfrac{10}{\sqrt{15}}$, $y=\dfrac{9}{\sqrt{15}}$, $z=\dfrac{4}{\sqrt{15}}$; $x=-\dfrac{10}{\sqrt{15}}$, $y=-\dfrac{9}{\sqrt{15}}$, $z=-\dfrac{4}{\sqrt{15}}$. **133.** а) $x=27$, $y=1$; $x=1$, $y=27$; б) $x=-3$, $y=-\dfrac{3}{2}$; $x=6$, $y=3$; $x=\dfrac{12+3\sqrt{39}}{23}$, $y=12+3\sqrt{39}$; $x=\dfrac{12-3\sqrt{39}}{23}$, $y=12-3\sqrt{39}$; в) $x=4$, $y=2$; $x=\dfrac{4}{3}$, $y=-\dfrac{2}{3}$; г) $x=5$, $y=7$. **134.** а) $x=1$, $y=-1$; $x=-1$, $y=-1$; б) $x=-10$, $y=-7$; $x=3\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{1}{3}$; $x=2$, $y=1$; $x=-\dfrac{2}{3}$, $y=2\dfrac{1}{3}$; в) $x=\dfrac{8}{7}$, $y=\dfrac{3}{7}$; $x=\dfrac{4}{7}$, $y=\dfrac{5}{7}$; г) $x=t$, $y=t+2$, где $0\leqslant t\leqslant 3$; $x=t$, $y=8-t$, где $3<t\leqslant 6$;

135. а) При $a=b=0$ $x=y=0$; при $b=0$, $a\neq 0$ система несовместна; при $b\neq 0$, $a=b$ $x=0$, $y=a$; $x=a$, $y=0$; при $b\neq 0$, $b=-a$ $x=0$, $y=-a$; $x=-a$, $y=0$; при $b(b^2-a^2)<0$ система несовместна; при $b(b^2-a^2)>0$ и $(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)\geqslant 0$ $x=a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}$, $y=a^2+b^2\mp\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}$; при $b(b^2-a^2)>0$, но $(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)<0$ система несовместна; б) при $a<0$ система несовместна; при $a>0$ и $a^4+b^4-6a^2b^2\geqslant 0$ $x=\dfrac{a^2-b^2}{a}$, $y=\dfrac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4+b^4-6a^2b^2}}{2a}$; при $a>0$ и $a^4+b^4-6a^2b^2<0$ система несовместна; в) при $a=0$ $x=0$, $y=0$; при $a\neq 0$ система несовместна; г) при $a<0$ система несовместна; при $a>0$ $x=\dfrac{\sqrt{153}-11}{16}a$, $y=$ $y=\dfrac{13-\sqrt{153}}{8}a$. **136.** а) $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{9}{7}\right)$; б) $(1;\ 2)$; в) $\varnothing$; г) $\{-5;\ 5\}$. **137.** 15 и 24. **138.** 3. **139.** 20 см. **140.** $\sqrt{2(a^2+b^2)+\sqrt{4(a^2+b^2)^2-a^2b^2}}$; $\sqrt{2(a^2+b^2)-\sqrt{4(a^2+b^2)^2-a^2b^2}}$. **141.** 7,39. **142.** 50%. Указание. Если x — искомая доля увеличения капитала в год, то, положив $1+x=y$, получим $10y^3-y^2-y-30=0\Rightarrow(8y^3-27)+(2y^3-3y^2)+(2y^2-3y)+$ $+2y-3=0$. **143.** 72 к. Указание. Если n — число монет в стороне квадрата, то $(n+2)+(n+1)+n+\ldots+2+1=n^2$. **144.** 15 участников; выбывшие между собой не играли. Указание. Обозначьте через x число участников турнира. Полностью участвовало в турнире $x-2$ участников, которые сыграли $(x-3)+(x-4)+\ldots+2+1$ партий. **145.** 14. **146.** 56 см. **147.** Цена первого тома — 3000 р., второго — 3000 р. **148.** 3 м и 6 м. **149.** 600 рельсов по 25 м и 800 рельсов по 12,5 м. **150.** 6 и 54. **151.** 64. **152.** $v_1=50$ км/ч, $v_2=40$ км/ч. **153.** Первый — за 10 ч, второй — за 5 ч. **154.** 1350 деталей за 27 дней. **155.** 240 км.

156. 726 денежных единиц. **157.** Указание. $x_1, x_2, \dots, x_n$ — количество денег в кучках до перекладывания, y — количество денег в последней кучке после перекладывания из $(n-1)$-й кучки, но до перекладывания из нее в первую кучку. Тогда, составив систему уравнений, получим

$$x_1 = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}A,\ x_2 = \frac{n^2-2n+2}{(n-1)^2}A,\ x_3 = x_4 = \dots = x_n = A.$$

158. 80 с $< t <$ 125 с. **159.** а) $p=8$, $q=5$; дефицит равен 5 единицам; б) $p=10$, $q=12$; излишек равен 9 единицам; в) $p=\frac{8}{3}$, $q=\frac{2}{3}$; излишек равен $\frac{5}{11}$ единиц; г) $p=1$, $q=1$; дефицит равен 0,958 единиц. **160.** а) $p=11$, $q=3$; б) $p=21$, $q=4$; в) $p=5$, $q=2$; г) $p=21$, $q=3$; д) $p=9$, $q=7$; е) $p=10$, $q=6$. **161.** а) 2; 9; б) 4; 25; в) 2; 40; г) 4; 4; 81. **162.** а) 4; 25; б) $\sqrt{10}$; 40; г) $\sqrt{8}$; 50. **163.** а) 20; 14; б) $\frac{382}{35}\approx 10{,}91$. **164.** а) 36; 12; б) 9,5.

Глава XI

1. а) 1, 7, 17, 31, 49, 71; г) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, -\frac{1}{720}$. **2.** 1, 5, 11, 27, 65. **3.** а) 3,498; б) 3,297; в) 3,706; г) 1,842. **4.** $a_5=26$, $a_{n+4}=n^2+8n+17$, $a_{2n-1}=4n^2-4n+2$, $a_n^3=n^6+3n^4+3n^2+1$. **5.** 13; -8. **6.** Нет. Например, $a_6=55$ не является простым числом. **7.** а) $a_n=n^2$; $a_n=2n-1$; в) $a_1=1$, $a_n=2^n$ для $n\geqslant 2$; г) $a_n=(-1)^{n+1}$; д) $a_n=2^{2n-1}-1$; е) $a_n=\frac{n}{3n-1}$; ж) $a_n=3^n+(-1)^n$. **9.** $a_n=\frac{a_1+2b_1}{3}+$ $+\frac{2(a_1-b_1)}{3\cdot 4^{n-1}}$; $b_n=\frac{a_1+2b_1}{3}-\frac{a_1-b_1}{3\cdot 4^{n-1}}$. Указание. Из данных соотношений найдем рекуррентные соотношения: $b_{n+1}=\frac{5b_n-b_{n-1}}{4}$, $a_{n+1}=\frac{5a_n-a_{n-1}}{4}$. Полагая $a_n=r^n$, находим $4r^{n+1}-5r^n+r^{n-1}=0$ или $4r^2-5r+1=0$. Решая квадратное уравнение, получим $r_1=1$, $r_2=\frac{1}{4}$. Тогда $a_n=c_1+c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Для нахождения c_1 и c_2 решаем систему равенств $\begin{cases} a_1=c_1+c_2\cdot\frac{1}{4}, \\ a_2=c_1+c_2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2, \end{cases}$ где $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. Аналогично находят выражение для b_n. **12.** а) Убывающая; б) убывающая; в) возрастающая; г) неубывающая; д) убывающая; е) немонотонная. **14.** а) $n(n+1)$; б) n^2; в) $(-1)^{n-1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Указание. Если $n=2k$, то $1-2+3-\dots+(-1)^{n-1}\cdot n=(1+3+\dots+(2k-1))-$ $-(2+4+\dots+2k)$. Если $n=2k-1$, то $1-2+3-\dots+(-1)^{n-1}\cdot n=(1+3+\dots+(2k-1))-$ $-(2+4+\dots+(2k-2))$; г) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Указание. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+$ $+n(n+1)=(1+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\dots+(n^2+n)=(1+2^2+3^2+\dots+n^2)+(1+2+3+\dots+$

$+n)$; д) $n^2(n+1)$; е) $\frac{n}{2n+1}$. Указание. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$ $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. **15.** Указание. а) Воспользуйтесь неравенством $\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, $k=1, 2, \ldots$; б) примените неравенство Бернулли. **17.** Указание. $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3)+$ $+((k+3)^3-k^3)$. **18.** Указание. Воспользуйтесь разложением $323=17\cdot 19$ и докажите, что данное выражение делится на 17 и на 19. **22.** $a_n=2n+3$. **26.** $n-2$. **28.** а) -23; б) $4\frac{1}{2}$; в) $-4\frac{6}{7}$; г) $3\frac{5}{6}$. **29.** а) 2; 7; 12; б) 2; 5; 8; в) 14; 11; 8; г) -108; -102; -96. **30.** $n=12$. **33.** а) $a_{23}=70{,}5$; б) $a_2+a_9=18$; в) $a_3+a_7=15$; г) $a_1=-6$, $d=4$ или $a_1=18$, $d=-4$. **34.** $a=3$, $b=35$. Указание. Используйте теорему Виета. **35.** Нет. **36.** Указание. Представьте данные выражения в виде $\frac{1}{b+c}=\frac{c-b}{c^2-b^2}$; $\frac{1}{c+a}=\frac{c-a}{c^2-a^2}$; $\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}$. **37.** 4624. **38.** 4905. **39.** 1705. **40.** $S_{30}=-720$. **41.** $S_{40}=1760$. **42.** $S_{20}=100$. **43.** $S_n=n(n-4)$, $S_{5n}=5n(5n-4)$, $S_{n^2}=n^2(n^2-4)$. **44.** $S_{16}=1488$. **45.** 2, 6, 10, ..., $4n-2$, ... **46.** $\frac{n-1}{2}$. **47.** $x=15$. Указание. Слагаемые в левой части уравнения составляют арифметическую прогрессию. **49.** Воспользуйтесь равенством $a_n=S_n-S_{n-1}$. **50.** 101 100. Указание. Одинаковые числа составляют арифметическую прогрессию с $a_1=21$ и $d=d_1\cdot d_2$, где d_1, d_2 — разности данных арифметических прогрессий. **51.** а) $b_n=4\cdot 3^{n-1}$; б) $b_n=-\frac{3^{n-1}}{4^{n-5}}$; в) $b_n=\frac{1}{2^{n-5}}$; г) $b_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$; д) $b_n=(-1)^n\sqrt{2}\cdot 2^{n-1}$; е) $b_n=(2-\sqrt{3})^n$; ж) $b_n=\frac{(m-1)^{2n-1}}{2^{n-1}}$. **52.** б) $b_1=\frac{7}{4}$, $b_5=\frac{7}{64}$, $b_{n+3}=\frac{7}{2^{n+4}}$, $b_{3n}=\frac{7}{2^{3n+1}}$. **53.** а) $b_1=1$, $q=2$ или $b_1=-1$, $q=-2$; б) $b_1=1$, $q=3$ или $b_1=1$, $q=-3$; в) $b_1=3$, $q=2$ или $b_1=-3$, $q=-2$; г) $b_1=\frac{5}{2}$, $q=\frac{1}{2}$. **54.** $n=7$. **55.** $q=\frac{3}{4}$. **56.** $b_1=1$, $q=3$. **57.** Нет. Указание. Если 10, 11, 12 были бы членами некоторой геометрической прогрессии со знаменателем q, то $11=10\cdot q^m$, $12=10\cdot q^{m+k}$. Отсюда $q^k=\frac{12}{11}$. Представив $11^k=10^k\cdot(q^m)^k=10^k(q^k)^m=10^k\cdot\frac{12^m}{11^m}$, получим $11^{m+k}=10^k\cdot 12^m=$ $=5^k\cdot 3^m\cdot 2^{2m+k}$. Это равенство невозможно, так как противоречит единственности разложения числа на простые множители. **59.** $b_m=8\sqrt{2}$, $b_n=2^{\frac{m}{2n}+3}$. **61.** $q=8$. **62.** 81, 27, 9, 3. **63.** 16, 32, 64. **64.** $a=-\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+2)$, $b=-2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+2)$ или $a=\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+2)$, $b=2\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}+2)$. Указание. Используйте теорему Виета. **65.** $b_1=\frac{1}{5}$, $q=5$. **66.** $q=-\frac{2}{5}$. **67.** 1, 3, 9 или 9, 3, 1. Указание. Воспользуйтесь тем, что если числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то справедливо равенство $(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2$. **68.** а) $S_n=48(2^n-1)$; б) $S_n=\frac{1}{2^{n-1}}-2$.

69. а) $S_5=605$; б) $S_7=-1\frac{11}{32}$; в) $S_9=31\sqrt{6}+30\sqrt{3}$; г) $S_6=-1\frac{52}{81}$. **70.** $S_{12}=15$ или $S_{12}=\frac{15(1-\sqrt[3]{2})}{1+\sqrt[3]{2}}$. **71.** $b_1=2$. **72.** $n=7$. **73.** $b_1=8$, $q=3$. **74.** $S_5=121$ или $S_5=\frac{181}{16}$. **76.** $b_1=64$, $q=\frac{1}{2}$. **77.** $S_{100}=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{22\ldots2}_{98\text{ двоек}}020$. **78.** $x=-1$. **79.** 65.
80. $\frac{(x^{2n}-1)(x^{2n+2}+1)}{x^{2n}(x^2-1)}+2n$ при $x\neq\pm1$, $x\neq0$, $4n$ при $x=\pm1$. **82.** $q=-\frac{1}{2}$. **83.** $S_5=121$. **84.** $S_6=728$. **85.** $S_5=\frac{45}{2}$ или $S_5=\frac{5}{2}$. **87.** Начиная с $n=101$. **88.** $N=1$; 1; 5; 331. **90.** а) 56 суток; б) 168 лет. **92.** Указание. а) $\frac{n}{n+10}=1-\frac{10}{n+10}\geqslant\frac{1}{11}$; б) $\frac{3n+5}{2n-1}=\frac{3}{2}+\frac{13}{4n-2}>\frac{3}{2}$. **96.** Нет. Например, последовательности $\left(\frac{1-n^2}{n}\right)$ и (n) не являются бесконечно малыми, а их сумма $\left(\frac{1}{n}\right)$ — бесконечно малая последовательность. **97.** Нет. Например, произведение последовательностей (n) и $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ является бесконечно малой последовательностью, однако множитель (n) не является бесконечно малой последовательностью. **104.** Начиная с $n=100$; 200; 10 000. **106.** Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ не существует. **108.** Нет. **109.** а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) 5. **110.** а) $\frac{37}{16}$; б) 2,5; в) $3\frac{1}{6}$. **111.** a_n+b_n и a_n-b_n не имеют предела; $(a_n\cdot b_n)$ и $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ могут иметь предел (например, $a_n=\frac{n}{n^2+1}$, $b_n=(-1)^n$), могут и не иметь предела. **112.** Указание. Воспользуйтесь равенством $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. **113.** а) 2; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$. **114.** Указание. Освободитесь от иррациональности в числителе. **116.** а), г). **119.** а) $a_5=-14$; б) $a_2=8$. Указание. $n^2+\frac{16}{n^2}=\left(n-\frac{4}{n}\right)^2+8$. **120.** а) $a_2=\frac{7}{2}$. Указание. $\frac{2n+3}{3n-4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6n+9}{6n-8}=\frac{2}{3}+\frac{17}{3(3n-4)}$; б) $a_1=\sqrt[3]{2}-1$. Указание. $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{(\sqrt[3]{(n+1)^3}-(\sqrt[3]{n})^3}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$. **123.** а) 1; б) 1; в) $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$; г) 2. **124.** а) 1,5; б) $-31{,}25$; в) $90\frac{10}{11}$; г) 7,2. **125.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{4}{33}$; в) $\frac{37}{30}$; г) $\frac{809}{330}$; д) $\frac{173}{90}$. **127.** а) $S=$ $=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; б) $S=3{,}5$. **128.** а) $S=\frac{a^2}{1-q^2}$; б) $S=\frac{|a^3(1+q)^3|}{1-q^6}$. **129.** а) $x=\pm3$; б) $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

130. $b_1=\frac{8}{3}$. **131.** $b_1=6$, $q=\frac{1}{3}$. **132.** $b_1=32$, $q=\frac{1}{3}$. **133.** $b_n=\frac{1}{4^{n-1}}$. **134.** $S=16$. **135.** $q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **136.** $S=2a^2$. **137.** в) Представьте общий член последовательности в виде $a_n=1+\frac{(-5)}{n^4+3n^2+6}$. **138.** а) Ограничена; б) ограничена; в) ограничена; г) не ограничена; е) не ограничена. **139.** а) $a_1=\frac{3}{2}$; б) $a_6=\frac{6591}{80}$. **148.** а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ $=\sqrt{b}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. **149.** $d=-3$; 1; -2; -5; ... . **150.** $n=9$. **151.** $a_n=2n-1$. **152.** а) $S_n=n(a+x)^2-n(n-1)ax$; б) $S_n=\frac{n-1}{2}$. **153.** $S_n=\frac{(3n+1)n}{12}$. **154.** $n=7$ или $n=4$. **155.** $S_n=n^2$. **156.** $|AB|=7$, $|BC|=9$, $|CD|=11$, $|DE|=13$, $|EF|=15$. **157.** $a_m=$ $=p-q-2(m-1)q$. **158.** Через 8 дней. **159.** 432. **161.** $S_{2n-1}=0$. **164.** $9p^2=100q$, $p<0$. **165.** $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Указание. Представьте общий член a_n в виде $a_n=$ $=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n(n+1)}{2}\right)$. **166.** $\left\{-\frac{1}{3};\ \frac{-1+\sqrt{3}}{3};\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3}\right\}$. Указание. Воспользуйтесь формулами Виета. **167.** а) $S_{10}=240$. **168.** $n=9$ или $n=16$. **169.** $a:b:c=3:4:5$. **170.** 36. **171.** $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \dots$. **172.** $q=2$. **173.** 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$. **175.** Указание. При доказательстве достаточности примените метод математической индукции. **176.** $b_m=\sqrt{A\cdot B}$, $b_n=A\cdot\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\right)^{\frac{m}{n}}$. **177.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **179.** $q=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **180.** $n=7$. **181.** Отношение крайних членов арифметической прогрессии должно быть равно $-3-2\sqrt{2}$. **182.** 3, 6, 12, 18. **183.** Примените неравенство Бернулли. **184.** $\left(\frac{S}{K}\right)^{\frac{n}{2}}$. **185.** а) $\{2;\ 4;\ 8\}$; б) $\left\{-\frac{1}{2};\ 1;\ -2\right\}$. **186.** а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{50}{11}$; в) $\frac{27}{26}$; г) $3\frac{\sqrt{3}}{2}$. **187.** $b,\ \frac{b}{11},\ \frac{b}{11^2},\ \dots$. **188.** $a=2(2-\sqrt{2})$. **189.** а) $\frac{37}{99}$; б) $\frac{3887}{16650}$; в) $\frac{217}{30}$. **190.** Стрелки совместятся через $\frac{12}{11}$ ч $=1$ ч 5 мин $27\frac{3}{11}$ с. Указание. Часовая стрелка движется медленнее минутной стрелки в $\frac{1}{12}$ раза. **191.** $n\geqslant 66$. **193.** 12,2 (27,8; 20; 12,2 или 17; 20; 23). **194.** 3; 9; 15; ...; 3; 9; 27; ... . **195.** $q=3\pm2\sqrt{2}$. **196.** $q=-2$. **197.** $S=\frac{9}{8}$. **198.** $S=$ $=b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. **199.** $S=\frac{\pi b}{4a}(a^2-b^2)$. **200.** а) 2000; б) 1000; в) 4250; г) 3000; е) $S_0=\frac{100\alpha}{np}$. **201.** а) 6; б) 3; в) 2; г) 4; е) $p=\frac{100\alpha}{S_0 n}$. **202.** а) 12 816,3. **203.** а) 20%; б) 25%;

в) 10%. **204.** 5. Не меньше, чем: а) 7513,15; б) 8571,43; в) 15 943,88. **205.** б) 328 808,64; в) 400 000; г) 4. **206.** 7.

Глава XII

1. $A_{10}^6=151\,200$. **2.** $A_6^2=30$; $A_9^2-A_6^2=42$. **3.** 60 480. **4.** 10 артистов. **5.** 1 512 000. **6.** а) $x=10$; б) $x=15$. **7.** 120. **8.** 5040. **9.** а) 2! 18! 19; б) 18·19! **10.** $7\cdot 6\cdot P_5=5040$. **11.** а) $x=7$; б) $x=9$. **12.** 120. **13.** 1320. **14.** 5040. **15.** а) 120; б) $3\cdot A_5^2=60$; в) 40. **16.** а) 120; б) 60; в) 24. **18.** 13 983 816. **19.** а) 2002; б) $C_8^3\cdot C_6^2=840$; в) 56; г) 62. **20.** $C_{10}^4C_{10}^7C_{10}^5=6\,350\,400$. **21.** $C_9^3C_6^3C_3^3=1680$. **22.** 254 940. **23.** $(n-1)!\times$ $\times(n-2)$. **24.** а) $C_8^2C_{42}^3=321\,440$; б) 372 652. **25.** $\dfrac{nm(n-1)(m-1)}{4}$. **26.** 4680. **27.** 2520. **28.** 126 000. **29.** 2520. **30.** $C_m^kC_n^{r-k}$. **31.** а) 3; б) 6; в) 3; 14; г) 9; д) 12; е) 5. **32.** 14 400. **33.** 100; 90. **34.** 768. **35.** 134. **36.** 7 920 400. **37.** $p\approx 0{,}08$. а) Да; б) нет; в) нет; г) 8000. **38.** а) $P(A)\approx 0{,}257$; $P(B)\approx 0{,}248$; $P(C)\approx 0{,}495$; б) 51 400, 49 600 и 99 000. **39.** $P(A)\approx\dfrac{7451}{30\,000}$. а) Нет; б) приблизительно 348. **40.** а) 0,694; б) 0,710; в) 0,708; г) 0,702. *Гипотеза:* вероятность поражения цели равна 0,7. **42.** а) $P(A)=\dfrac{1}{2}$; б) $P(B)=\dfrac{2}{3}$. **43.** а) $P(A_2)=P(A_{12})=\dfrac{1}{36}$; $P(A_3)=P(A_{11})=\dfrac{1}{18}$; $P(A_4)=P(A_{10})=\dfrac{1}{12}$; $P(A_5)=P(A_9)=\dfrac{1}{9}$; $P(A_6)=P(A_8)=\dfrac{5}{36}$; $P(A_7)=\dfrac{1}{6}$; б) $P(B)=\dfrac{1}{3}$; в) $P(D)=\dfrac{13}{18}$; г) игра несправедливая; P (выигрыш I) $=\dfrac{1}{3}$; P (выигрыш II) $=\dfrac{2}{3}$. Для уравнения шансов на выигрыш достаточно, например, считать, что первый игрок выигрывает и в случае, когда сумма очков равна 7. Тогда P (выигрыш I) $=P$ (выигрыш II) $=\dfrac{1}{2}$. **44.** а) $P(A)=\dfrac{1}{2}$; б) $P(B)=\dfrac{3}{4}$. **45.** а) $P(u_i)=0{,}01$, $i=1, 2, \ldots, 100$; б) $P(A)=0{,}33$; в) $P(B)=0{,}06$; г) $P(C)=0{,}18$; д) существует. Если событие D: «на карточке написано число, делящееся на 9», то $P(D)=0{,}11$. **46.** б) $P(A)=\dfrac{1}{4}$; $P(B)=\dfrac{1}{4}$; $P(C)=\dfrac{1}{2}$; $P(D)=\dfrac{3}{4}$. **47.** а) M — мальчик, D — девочка. Равновероятные исходы: $U_1=$(M,M,M), $U_2=$(MMD), $U_3=$(MDM), $U_4=$ $=$(MDD), $U_5=$(DMM), $U_6=$(DMD), $U_7=$(DDM), $U_8=$(DDD) (рис. 130). $P(U_i)=\dfrac{1}{8}$; $i=1, 2, \ldots, 8$; б) $P(A)=\dfrac{1}{8}$; $P(B)=\dfrac{3}{8}$; $P(C)=\dfrac{3}{8}$; $P(D)=\dfrac{1}{8}$; $P(E)=\dfrac{1}{4}$; $P(F)=\dfrac{3}{4}$. **48.** а) Равновероятные исходы: $U_1=$(ММММ), $U_2=$(МММД), $U_3=$(ММДМ), $U_4=$ $=$(ММДД), $U_5=$(МДММ), $U_6=$(МДМД), $U_7=$(МДДМ), $U_8=$(МДДД), $U_9=$(ДМММ), $U_{10}=$(ДММД), $U_{11}=$(ДМДМ), $U_{12}=$(ДМДД), $U_{13}=$(ДДММ), $U_{14}=$(ДДМД), $U_{15}=$(ДДДМ), $U_{16}=$(ДДДД); б) $P(A)=\dfrac{11}{16}$; $P(B)=\dfrac{5}{16}$; $P(C)=\dfrac{3}{8}$; $P(D)=\dfrac{1}{2}$. **49.** а) $P(A)=\dfrac{33}{59}$; б) $P(B)=\dfrac{7}{118}$; в) $P(A)=\dfrac{C_n^3}{C_m^3}$, $P(B)=\dfrac{C_{m-n}^3}{C_m^3}$. **50.** а) $P(A)=\dfrac{2C_{14}^4}{C_{20}^{10}}$;

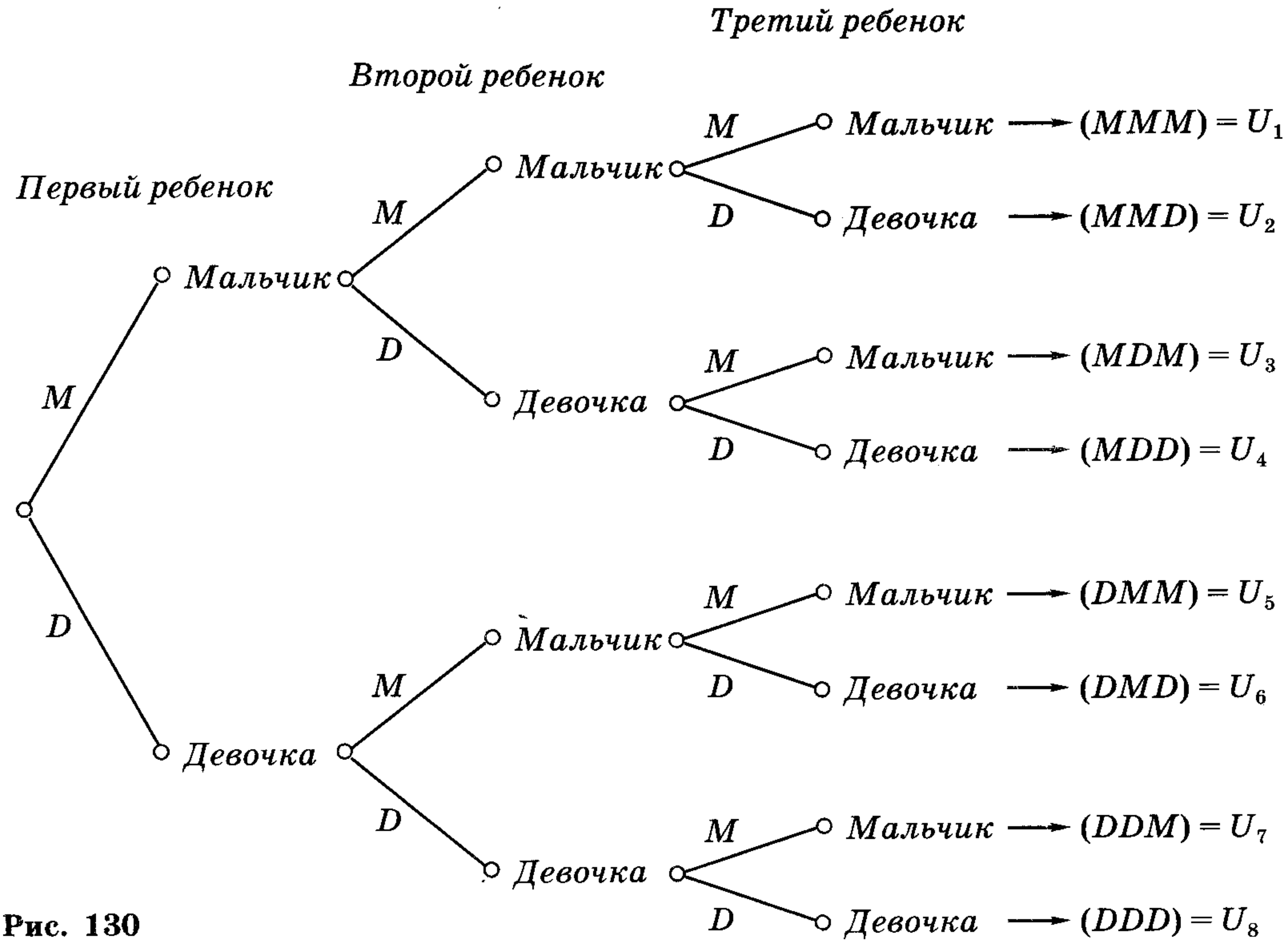


Рис. 130

б) $2C_6^2\,\dfrac{C_{14}^8}{C_{20}^{10}}=\dfrac{315}{586}$. **51.** а) $n=C_{100}^5$, $P(A)=\dfrac{1}{n}\,C_{85}^5$; б) $P(B)=\dfrac{1}{n}\,C_{15}^5$; в) $P(C)=\dfrac{1}{n}\,C_{85}^3\cdot C_{15}^2$; г) $P(B_1)=\dfrac{C_n^r}{C_m^r}$; $P(C_1)=\dfrac{C_n^sC_{m-n}^{r-s}}{C_m^r}$. **52.** а) $P(A)=\dfrac{1}{28}$; б) $P(B)=\dfrac{3}{4}$; в) $P(C)=\dfrac{15}{28}$; г) $P(D)=\dfrac{5}{14}$. **53.** $P(A)=\dfrac{1}{9!}$. **54.** а) $P(A)=\dfrac{C_{12}^3C_8^2}{C_{20}^5}=\dfrac{385}{769}$; б) $P(B)=\dfrac{C_e^kC_{n-e}^{m-k}}{C_n^m}$. **55.** $P(A)=\dfrac{47}{5370}$. **56.** а) $P(A)=\dfrac{60}{253}$; б) $P(B)=\dfrac{15}{253}$. **57.** $P(A)=\dfrac{1}{40\,320}$. **58.** 1) E; 2) K; 3) G; 4) E; 5) G; 6) H; 7) E. **59.** 1) $A=A_1\cap A_2\cap A_3$; 2) $B=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$; 3) $C=A_1\cup A_2\cup A_3$; 4) $D=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$. **60.** 0,07. **61.** 0,8. **62.** 0,96. **63.** 0,3. **64.** $\dfrac{11}{51}$. **65.** $\dfrac{49}{143}$. **66.** $\dfrac{14}{35}$. **67.** $\dfrac{140}{143}$. **68.** $\dfrac{31}{35}$. **69.** $\dfrac{2}{3}$. **70.** Независимы. **71.** Независимы. **72.** Зависимы. **73.** $\dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$. **74.** $\dfrac{15}{54}$. **75.** $\dfrac{2}{3}$. **76.** $\dfrac{1}{3}$. **77.** $\dfrac{1}{3}$. **78.** 0,28. **79.** а) 0,146; б) 0,0162. **80.** 0,1792. **81.** 0,25. **82.** 0,088. **83.** 0,046. **84.** 0,0016. **85.** 0,999936.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Виленкин Наум Яковлевич
Сурвилло Геннадий Станиславович
Симонов Александр Сергеевич
Кудрявцев Александр Иванович

АЛГЕБРА

Учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Б. Грызлова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *А. С. Побезинский*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технические редакторы *Е. А. Сиротинская, Л. В. Марухно, Н. А. Киселева*
Корректоры *Л. А. Ермолина, О. В. Крупенко, Н. И. Новикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 24.10.05. Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,91+0,36 форз. Усл. кр.-отт. 55,06. Уч.-изд. л. 20,65+0,58 форз. Тираж 23 000 экз. Заказ № 6897

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Московские учебники и Картолитография». 125252, Москва, ул. Зорге, 15.