М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман, Л.И.Звавич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ:

УЧЕБ. ПОСОБИЕ ДЛЯ 8—9 КЛ. С УГЛУБЛ. ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

7-е изд.— М.: Просвещение, 2001.—271 с.

В данном пособии содержатся задачи, способствующие систематическому углублению изучаемого материала и развитию навыков решения сложных задач, а также подготовке к вступительным экзаменам в X класс школ, гимназий и лицеев с углубленным изучением математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой сборник задач по курсу алгебры, предназначенный для учащихся 8—9 классов с углубленным изучением математики.

В пособии содержится тринадцать параграфов, охватывающих все основные темы курса алгебры восьмого и девятого общеобразовательных классов и ряд дополнительных вопросов, соответствующих программе математических классов. В начале каждого параграфа помещены справочный материал теоретического характера и решения нескольких типовых примеров.

Имеется приложение, в котором для самоконтроля учащихся предлагается двадцать проверочных работ, состоящих из пяти заданий каждая и охватывающих различные темы по всему курсу. Следует иметь в виду, что уровень сложности этих работ намеренно задан выше, чем предполагаемый уровень сложности письменного экзамена по алгебре за курс девятилетней школы в классах с углубленным изучением математики.

Несмотря на то что данный задачник адресован учащимся специализированных классов, думается, что его успешно можно использовать и в общеобразовательных школах и классах, в первую очередь для организации дифференцированной работы на уроках, занятий кружков и факультативов.

Часть материалов, составляющих содержание данного задачника, использовалась авторами для проведения семинаров в Московском городском институте усовершенствования учителей с учителями школ и классов с углубленным изучением математики.

В предлагаемой книге параграфы 4, 6, 7, 9 написаны М. Л. Галицким, параграфы 5, 8, 11—13 — А. М. Гольдманом, параграфы 1, 14 и приложение — Л. И. Звавичем, параграфы 2, 3, 10 — совместно М. Л. Галицким и А. М. Гольдманом; справочный материал к параграфам 4, 13 написан Л. И. Звавичем, к остальным параграфам — А. М. Гольдманом.

Авторы благодарят Ю. П. Дудницына и А. А. Фомина, чьи замечания способствовали улучшению содержания книги, и выражают глубокую признательность М. О. Гольдман, оказавшей большую помощь при подготовке рукописи.

Все замечания по данной книге просим присылать в издательство «Просвещение».

§ 1. ПОВТОРЕНИЕ И УГЛУБЛЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

1. Степень с натуральным показателем.

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n > 1$) называется произведение n множителей, каждый из которых равен a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}},$$

$$a^1 = a$$

2. Свойства степеней с натуральным показателем.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ где } a \neq 0 \text{ и } m > n;$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

3. Одночлены и многочлены.

Одночленами называются произведения чисел, переменных и их натуральных степеней (число, переменная и ее натуральная степень также являются одночленами).

Многочленами называются суммы одночленов. Например:

$$-4a^2b^3,\ 7,\ c,\ d^4 \text{ — одночлены;}$$

$$2a^5 - 1,\ 3ab^2 - 4abc \text{ — многочлены.}$$

4. Действия над многочленами.

При сложении и вычитании многочленов используются правила раскрытия скобок. Например:

$$(2ab - 5c) + (3a^2b + 3c) = 2ab - 5c + 3a^2b + 3c = 3a^2b + 2ab - 2c;$$

$$(2ab - 5c) - (3a^2b + 3c) = 2ab - 5c - 3a^2b - 3c = -3a^2b + 2ab - 8c.$$

При умножении одночлена на многочлен каждый член многочлена умножается на этот одночлен и произведения складываются.

При умножении двух многочленов каждый член первого из них умножается на каждый член второго и произведения складываются. Например:

$$2a(3a - 4b) = 6a^2 - 8ab;$$

$$(2a - b)(3a - 4b) = 6a^2 - 8ab - 3ab + 4b^2 = 6a^2 - 11ab + 4b^2.$$

5. Формулы сокращенного умножения.

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2;$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

6. Уравнения с одной переменной.

Уравнением с одной переменной называют равенство, содержащее переменную.

Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Например, число 2 является корнем уравнения $x^3-2=3x$; уравнение $(x-1)(x+2)=0$ имеет корни 1 и -2, причем других корней нет; уравнение $x^2+5=0$ не имеет корней.

Уравнения, имеющие одни и те же корни (либо не имеющие корней), называются равносильными.

Например, уравнения $(x-4)(x+4)=0$ и $|x|=4$ равносильны; уравнения $x^8+8=0$ и $\frac{1}{x-2}=0$ равносильны.

Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное исходному.

Если обе части уравнения умножить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения $3x^2=2x^2+1$ и $3x^2-2x^2=1$ равносильны; уравнения $3x^4=48$ и $x^4=16$ равносильны.

7. Линейные уравнения.

Уравнение вида $ax=b$, где a и b — числа, x — переменная, называется линейным уравнением с одной переменной. Если $a\neq 0$, то уравнение имеет один корень $x=\frac{b}{a}$.

Если $a=0$, то в случае, когда $b\neq 0$, уравнение не имеет корней; в случае, когда $b=0$, корнем уравнения является любое число.

8. Уравнение с двумя переменными и его график.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающих это уравнение в верное равенство.

Например, пара чисел $x=1$, $y=-1$ является решением уравнения $5x-3y=8$.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются равносильными.

Свойства, связанные с равносильностью, для уравнений с двумя переменными аналогичны соответствующим свойствам для уравнений с одной переменной.

Любое решение $(x;\ y)$ уравнения с двумя переменными изображается на координатной плоскости точкой с абсциссой x и ординатой y. Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех таких точек.

Например, график уравнения $2x-5y=1$ — прямая, проходящая через точки $(0;\ -0{,}2)$ и $(0{,}5;\ 0)$; график уравнения $x^2+y=0$ — квадратичная парабола с вершиной в точке $(0;\ 0)$, ветви которой направлены вниз.

9. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы. Уравнение вида $ax+by=c$, где a, b и c — числа, x и y — переменные, называется линейным уравнением с двумя переменными.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором $a\neq 0$ или $b\neq 0$, является прямая. Если $a=0$ и $b=0$, то в случае $c=0$ графиком является вся координатная плоскость, в случае $c\neq 0$ уравнение не имеет решений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая в верное равенство каждое из уравнений системы.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными может иметь единственное решение, бесконечно много решений и не иметь решений, что геометрически интерпретируется соответственно как пересечение, совпадение и параллельность прямых, являющихся графиками уравнений системы.

10. Функция и ее график. Линейная функция.

Функцией называют зависимость переменной y от переменной x, если каждому значению переменной x соответствует единственное значение y.

Множество значений переменной x называют областью определения функции.

Множество значений переменной y называют множеством значений функции.

Графиком функции называется множество всех таких точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Функция вида $y=kx+b$, где k и b — числа, x — переменная, называется линейной, ее график — прямая линия.

Упражнения

Вычислите **(1—7)**:

1.1. $(6{,}8547:2{,}19+0{,}6039:5{,}49):1{,}62.$

1.2. $(0{,}9893:0{,}13-6{,}4)\cdot 62{,}9-7{,}109.$

1.3. $\left(1\frac{1}{4}-14{,}05\right):0{,}04+13{,}8:\frac{1}{13}.$

1.4. $\left(1\frac{3}{4}:1{,}125-1{,}75:\frac{2}{3}\right)\cdot 1\frac{5}{7}$.

1.5. $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4{,}125}{2\frac{4}{7}:\frac{3}{35}}$.

1.6. $\dfrac{\left(19\frac{1}{6}+43{,}75\right):\frac{5}{6}}{(13{,}3-11{,}5):1\frac{4}{6}}-\dfrac{\left(26{,}8-23\frac{3}{7}\right):\frac{6}{35}}{0{,}5}$.

1.7. $\dfrac{20\frac{8}{15}\cdot 7{,}5-54{,}6:\frac{2}{5}}{3\frac{13}{21}\cdot 8{,}4-34{,}4:14\frac{1}{3}}+43{,}75:11\frac{2}{3}+24{,}6:1\frac{1}{5}$.

Найдите x из пропорции **(8—9)**:

1.8. $\dfrac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{x}=\dfrac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5{,}5-3\frac{1}{4}\right)}$.

1.9. $\dfrac{x}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\dfrac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}$.

1.10. Вычислите:

а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{8}-\frac{1}{11}$; г) $\frac{1}{11}-\frac{1}{14}$;

д) $\frac{1}{14}-\frac{1}{17}$; е) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 17}$;

ж) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 16}$;

з) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 23}$.

1.11. Вычислите:

а) $\underbrace{999\ldots 9}_{100\text{ раз}}+22$; б) $\underbrace{999\ldots 9}_{100\text{ девяток}}+\underbrace{22\ldots 2}_{100\text{ двоек}}$; в) $\underbrace{999\ldots 9}_{100\text{ девяток}}:99$;

г) $\underbrace{999\ldots 9}_{100\text{ девяток}}:\underbrace{999\ldots 9}_{50\text{ девяток}}$; д) $\underbrace{333\ldots 3}_{100\text{ троек}}\cdot 4$; е) $\underbrace{333\ldots 3}_{100\text{ троек}}\cdot 11$.

1.12. Выполните действия:

а) $((637637:7):11):13$; б) $((538538:13):11):7$;

в) $((753753:11):13):7$; г) $11\cdot 13\cdot 7$.

Найдите общую закономерность.

1.13. Докажите, что $(10n+5)^2=n\cdot(n+1)\cdot 100+25$.

Используя данный результат, объясните, почему

$$35^2=3\cdot 4\cdot 100+25=1225.$$

Вычислите устно: а) 85^2; б) 995^2; в) 9995^2.

1.14. Докажите, что $(10a+b)\cdot 11=100a+10(a+b)+b$. Используя данный результат, объясните, почему $35\cdot 11=385$ $(8=3+5)$, $75\cdot 11=825$ $(12=7+5)$.
Вычислите устно: а) $81\cdot 11$; б) $72\cdot 11$; в) $87\cdot 11$; г) $93\cdot 11$.

1.15. Докажите, что $a\cdot 5=\frac{10\cdot a}{2}$. Используя данный результат, объясните, почему $82\cdot 5=\frac{820}{2}=410$, $153\cdot 5=\frac{1530}{2}=765$.
Вычислите устно:
а) $94\cdot 5$; б) $846\cdot 5$; в) $4846\cdot 5$; г) $397\cdot 5$.

1.16. Докажите, что $a\cdot 25=\frac{100\cdot a}{4}$. Используя данный результат, объясните, почему $484\cdot 25=\frac{48400}{4}=12100$, $683\cdot 25=$
$=\frac{68300}{4}=17075$.
Вычислите устно: а) $48\cdot 25$; б) $64\cdot 25$; в) $6416\cdot 25$; г) $347\cdot 25$.

1.17. Вычислите: 11^2; 101^2; 1001^2; $(10^n+1)^2$.
Попробуйте угадать закономерность $\underbrace{100\ldots01}_{n\text{ цифр}}{}^2=$. Используя ее, вычислите 10001^2; 1000001^2.

1.18. Вычислите: 9^2; 99^2; 999^2; $(10^n-1)^2$.
Попробуйте угадать закономерность $\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ девяток}}{}^2=$.
Используя ее, вычислите 99999^2; 9999999^2.

1.19. Какие два наименьших стоящих подряд натуральных числа надо перемножить, чтобы получить в конце:
а) один нуль; б) два нуля; в) три нуля; г) три единицы.

1.20. Найдите все такие двузначные натуральные числа, при перестановке цифр в которых это число:
а) увеличивается на 9;
б) уменьшается на 63;
в) увеличивается на 75%.

1.21. Выписали все числа от 1 до 10 000.
а) Сколько раз написали цифру 0?
б) Сколько раз написали цифру 3?
в) Сколько раз написали цифру 1?

1.22. Напишите самое большое и самое маленькое шестизначное число, используя три цифры 5 и три цифры 0.

1.23. а) Пусть $a+b+c=2p$. Докажите, что
$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=16p(p-a)(p-b)(p-c).$$
б) Пусть $a+b+c+d=2p$. Докажите, что
$$4(cd+ab)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

1.24. Пусть $x_1+x_2=7$, $x_1\cdot x_2=2$. Найдите:
а) $x_1x_2^2+x_1^2x_2$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $x_1^2\cdot x_2^4+x_1^4\cdot x_2^2$;
г) $x_1^3+x_2^3$; д) $x_1^3x_2^6+x_1^6x_2^3$; е) $x_1^4+x_2^4$.

1.25. Пусть $a+\frac{1}{a}=3$. Найдите:

а) $a^2+\frac{1}{a^2}$; б) $\frac{a^4+1}{2a^2}$; в) $\frac{a^8+1}{a^4}$; г) $a^3+\frac{1}{a^3}$.

1.26. Пусть $a-\frac{1}{a}=\frac{2}{3}$. Найдите:

а) $a^2+\frac{1}{a^2}$; б) $a^3-\frac{1}{a^3}$; в) $\frac{a^{12}+1}{a^6}$.

1.27. Пусть

$$\begin{cases} x+y+z=7, \\ x+y+v=11, \\ x+z+v=15, \\ y+z+v=3. \end{cases}$$

Найдите: а) $x+y+z+v$; б) x; y; z; v.

1.28. Автомобиль проехал расстояние от A до B со скоростью v_1 километров в час за t_1 часов, а обратный путь от B до A за t_2 часов. Запишите алгебраическим выражением:
а) расстояние от A до B;
б) скорость v_2 движения автомобиля от B до A;
в) общее время движения туда и обратно;
г) среднюю скорость движения за все время пути.
Вычислите числовые значения этих выражений при $v_1=60$ км/ч, $t_1=4$ ч, $t_2=6$ ч.

1.29. Два пешехода отправились навстречу друг другу — один из пункта A в пункт B, другой из пункта B в пункт A. Через 2 ч они встретились на расстоянии 8 км от A и 6 км от B. Достигнув пункта назначения, они, не задерживаясь, пошли обратно. В каком месте пути они опять встретятся?

1.30. Напишите все трехзначные числа, записанные цифрами 1; 2; 5.
а) Сколько таких чисел?
б) Сколько из них делится на 2?
в) Сколько из них делится на 5?
г) Найдите сумму всех этих чисел.
д) Делится ли эта сумма на 111?

1.31. Найдите значение выражения $|x-3|+|x+4|$ при $x=-5$, $x=-3$, $x=-1$, $x=0$, $x=3$, $x=5$.

1.32. На координатной плоскости найдите точки A (3; -5); B (3; 3); C (8; 3); D (8; -5) и соедините их отрезками AB, BC, CD, DA.
а) Определите вид и периметр четырехугольника $ABCD$.
б) Найдите координаты какой-либо точки внутри этой фигуры.
в) На какие фигуры делит данную фигуру ось абсцисс?

Постройте график функции **(33—41)**:

1.33. $y=3$. **1.34.** $y=3-x$.

1.35. $y=5-2x$. **1.36.** $y=2x-3$.

1.37. $y=\begin{cases} x \text{ при } x\leqslant 0. \\ 2x \text{ при } x>0. \end{cases}$

1.38. $y=\begin{cases} 1-x \text{ при } x\leqslant 2. \\ 2x-5 \text{ при } x>2. \end{cases}$

1.39. $y=x^2$.

1.40. $y=\begin{cases} x^2 \text{ при } x<0. \\ x^3 \text{ при } x\geqslant 0. \end{cases}$

1.41. $y=x|x|$.

1.42. Рассматривается линейная функция $y=ax+b$. При каких значениях a и b ее график:
а) проходит через начало координат;
б) проходит через начало координат и точку $M(-1;\ 3)$;
в) параллелен графику функции $y=3x+5$;
г) отсекает на осях координат равные отрезки;
д) является биссектрисой координатного угла третьей четверти;
е) проходит через точки $M(3;\ 8)$ и $N(4;\ 8)$;
ж) проходит через точки $K(3;\ 5)$ и $N(-3;\ 7)$;
з) проходит только через те точки, координаты которых имеют один знак;
и) не проходит через точки, обе координаты которых положительны?

1.43. В 100 г 20%-ного раствора соли добавили 300 г ее 10%-ного раствора. Определите концентрацию полученного раствора.

1.44. Какое количество воды надо добавить к 100 г 70%-ной уксусной эссенции, чтобы получить 5%-ный раствор уксуса?

1.45. Цену на товар сначала повысили на 20%, а затем понизили на 20%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена?

1.46. Процентное содержание соли в растворе сначала снизилось на 20%, а затем повысилось на 20%. На сколько процентов изменилось первоначальное содержание соли?

1.47. Что больше: 20% от 10% данного числа или 10% от его 20%?

1.48. Какие из чисел $-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$ являются корнями уравнения $\dfrac{x^5+3x^4+2x^3-x^2-3x-2}{3x^2+x-2}=0$?

Решите уравнение **(49—60)**:

1.49. $3x=-7$.

1.50. $3x-8=5-7x$.

1.51. $\dfrac{8x+1}{3}=\dfrac{5x-1}{7}$.

1.52. $\dfrac{3x+11}{5}=\dfrac{5x-7}{15}$.

1.53. $\dfrac{7x-2}{111}=\dfrac{8x+5}{37}$.

1.54. $\dfrac{8x-3}{11}-\dfrac{5x+2}{2}=1$.

1.55. $\dfrac{3+7x}{7}=\dfrac{8+8x}{8}$.

1.56. $\dfrac{3x+1}{5}-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{7x+3}{15}$.

1.57. $\dfrac{x+3}{6}+\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{x+11}{2}$.

1.58. $(3x-1)^2+(4x+5)^2=(5x-7)^2$.

1.59. $(2x+7)(3x-1)-(5x-1)(x+3)=(x+1)^2$.

1.60. $(x-2)^3+(x+2)^3=2(x-3)(x^2+3x+9)$.

1.61. Петя выполняет некоторую работу за два дня. Коля выполняет эту работу за 3 дня, а Вася — за 6 дней.

а) За какое время они выполнят эту работу вместе?

б) За какое время они выполнят всю работу, если сначала третью часть ее выполнит один Петя, затем половину оставшегося — Коля, а уже остальное — Вася?

в) Кто выполнит работу быстрее: Петя один или Коля и Вася вместе?

г) Ребята выполнили эту работу вместе и получили 45 р. Сколько денег причитается каждому?

д) Первый день работал один Петя, а с начала второго дня к нему присоединились Коля и Вася. Когда работа была закончена, им заплатили 45 р. Как распределить полученные деньги?

е) То же, что и в пункте д), но в первый день работал один Коля.

ж) То же, что и в пункте д), но в первый день работал один Вася.

з) То же, что и в пункте д), но в первый день работали Коля и Вася вместе, затем Вася ушел, а Коля с Петей закончили работу.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

1. Рациональные выражения.

Алгебраические выражения, составленные с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля, называют целыми выражениями.

Отношение двух целых выражений называют дробным выражением.

Областью определения выражения (областью допустимых значений переменных) называют множество значений переменных, при которых выражение имеет смысл.

2. Основное свойство дроби.

При любых значениях a, b и c, где $b \neq 0$, $c \neq 0$, имеет место равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

3. Действия с дробями.

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c};$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Для выполнения сложения (вычитания) дробей с разными знаменателями необходимо привести эти дроби к общему знаменателю и использовать предыдущее правило.

Умножение и деление дробей, возведение дроби в степень:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

4. Разложение на множители выражений вида x^n-1 и $x^{2n-1}+1$ $(n\geqslant 2,\ n\in N)$.

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1);$$

$$x^{2n-1}+1=(x+1)(x^{2n-2}-x^{2n-3}+\ldots-x+1).$$

Пример 1. Разложите на множители многочлен

$$ab(b-a)+bc(b+c)-ac(a+c).$$

Решение. Разложить многочлен на множители означает представить его в виде произведения многочленов; обычно для этого используют группировку слагаемых, формулы сокращенного умножения, вынесение за скобку общего множителя.

$$ab(b-a)+bc(b+c)-ac(a+c)=$$
$$=ab^2-a^2b+b^2c+bc^2-a^2c-ac^2=$$
$$=(ab^2-ac^2)-(a^2b+a^2c)+(bc^2+b^2c)=$$
$$=a(b-c)(b+c)-a^2(b+c)+bc(b+c)=$$
$$=(b+c)(a(b-c)-a^2+bc)=(b+c)(ab-ac-a^2+bc)=$$
$$=(b+c)((ab-a^2)+(bc-ac))=(b+c)(a(b-a)+c(b-a))=$$
$$=(b+c)(b-a)(a+c).$$

Возможен и другой способ решения:

$$ab(b-a)+bc(b+c)-ac(a+c)=$$
$$=ab((b+c)-(c+a))+bc(b+c)-ac(a+c)=$$
$$=(b+c)(ab+bc)-(a+c)(ab+ac)=$$
$$=b(b+c)(a+c)-a(a+c)(b+c)=(b+c)(a+c)(b-a).$$

Пример 2. Найдите частное и остаток от деления многочлена $x^4-6x^3+5x^2-1$ на многочлен x^2+2x-1.

Решение. Деление многочлена на многочлен удобно выполнять «уголком» по аналогии с делением натуральных чисел.

$$\begin{array}{rl}
-\;x^4-6x^3+5x^2-1 & \big|\;x^2+2x-1 \\
\underline{x^4+2x^3-x^2} & \big|\;\overline{x^2-8x+22} \\
-\;-8x^3+6x^2-1 & \\
\underline{-8x^3-16x^2+8x} & \\
-\;22x^2-8x-1 & \\
\underline{22x^2+44x-22} & \\
-52x+21 &
\end{array}$$

Итак, частное равно $x^2-8x+22$, остаток равен $-52x+21$. Результат деления может быть записан в таком виде:

$$x^4-6x^3+5x^2-1=(x^2+2x-1)(x^2-8x+22)-52x+21$$

или

$$\frac{x^4-6x^3+5x^2-1}{x^2+2x-1}=x^2-8x+22+\frac{-52x+21}{x^2+2x-1}.$$

Пример 3. Найдите числа a и b из тождества

$$\frac{5x+11}{x^2+3x-10}=\frac{a}{x+5}+\frac{b}{x-2}.$$

Решение. Сложив две дроби в правой части тождества, перепишем его в виде

$$\frac{5x+11}{x^2+3x-10}=\frac{(a+b)x+(5b-2a)}{x^2+3x-10}.$$

Поскольку дроби в левой и правой части равенства тождественно равны, то они принимают равные значения при всех значениях x, отличных от 2 и -5. Отсюда

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 5b-2a=11. \end{cases}$$

Решив полученную систему, находим: $a=2$, $b=3$.

Упражнения

ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

2.1. Представьте в виде многочлена:

а) $(a+b)(a-b+1)-(a-b)(a+b-1)$;
б) $(a+3b)(a+b+2)-(a+b)(a+3b+2)$;
в) $(a^2-3a+1)(2a+1)^2$;
г) $(2b+3)(b-2)^3$;
д) $(a-1)^3+3(a-1)^2+3(a-1)+1$;
е) $(a+1)^4+(a-1)^4$;
ж) $(b-2)(b^4+2b^3+4b^2+8b+16)$;
з) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

2.2. Докажите, что при всех значениях переменных значение выражения:

а) $(x+2)^2-2(x+2)+1$ неотрицательно;
б) $(x-y)(x-y-6)+9$ неотрицательно.

2.3. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

а) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$ при $a=2{,}5$, $b=-3$;

б) $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$ при $x=0{,}75$, $y=1\frac{1}{3}$.

Разложите на множители **(4—10)**:

2.4. а) $a^4-2a^3+a^2-1$;
б) b^4-b^2-2b-1;
в) $c^8-c^4-2c^2-1$.

2.5. а) $a(a+2)-(b+1)(b-1)$;
б) $(a+b-2)(a+b)-(a-b)^2+1$.

2.6. а) $x^3-y^3+3y^2-3y+1$;
б) $8x^3+y^3+6y^2+12y+8$.

2.7. а) $(a+b)(a-b)^3-(a-b)(a+b)^3$;
б) $(a-b)^2(a+b)^5+(a+b)^2(a-b)^5$.

2.8. а) n^4-12n^2+16; б) m^4+2m^2+9; в) p^4+324.

2.9. а) x^4-x^3-x-1; б) $y^8-y^6-4y^2-16$.

2.10. а) $b^2+ab-2a^2-b+a$;
б) $(a+b)(a+b+2)-(a-b)(a-b-2)$;
в) $a(a+2)+b(b+2)-2(a+1)(b+1)+1$;
г) $(a+b)(a+b+2)+(a-b)(a-b+2)+2(a+b+1)\times$
$\times(a-b+1)-2$.

2.11. Упростите выражение:
$$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(b+c-a)^2.$$

2.12. Известно, что $a+b+c=12$ и $ab+bc+ca=-15$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

2.13. Известно, что $a-b+c=8$ и $a^2+b^2+c^2=110$. Найдите $ac-ab-bc$.

Разложите на множители **(14—18)**:

2.14. а) $a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)-4c^2$;
б) $1-a(a-b+c)+b(a-b+c)+c(b-a-c)$.

2.15. а) $xy(x+y)+yz(y-z)-xz(x+z)$;
б) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.

2.16. $x(y+z)^2+y(x+z)^2+z(x+y)^2-4xyz$.

2.17. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$.

2.18. $x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$.

2.19. Докажите, что $a^3+b^3+c^3=3abc$, если $a+b+c=0$.

2.20. Упростите выражение
$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})$$
при условии, что $a=b+1$.

2.21. Найдите наименьшее значение выражения
$(2a-1)(2a+1)+3b(3b-4a)$.

2.22. Найдите наибольшее значение выражения
$4b(5a-b)-(5a-2)(5a+2)$.

2.23. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2-2ab+b^2-2a+2$. При каких значениях a и b оно достигается?

2.24. Найдите наибольшее значение выражения $2ab-a^2-2b^2+4b$. При каких значениях a и b оно достигается?

2.25. Докажите, что из равенства $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ следует равенство $x=y=z$.

2.26. Докажите, что из равенства $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$ $=(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2$ следует, что $a=b=c$.

ДРОБНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Укажите допустимые значения переменных в выражении **(27—31):**

2.27. а) $\frac{3x}{5x^2+2x}$; б) $\frac{x^8-1}{x^4-1}$; в) $\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$.

2.28. а) $\frac{a-5}{|a|-5}$; б) $\frac{4}{2-|2b-3|}$; в) $\frac{5}{|3a-1|-|a+2|}$; г) $\frac{b}{b^2-3|b|}$.

2.29. а) $\frac{4x}{(2x+1)^4-(x-1)^4}$; б) $\frac{2y+1}{(5y-2)^5-(1-2y)^5}$.

2.30. а) $\frac{a^2-16}{a^2-6a+8}$; б) $\frac{2-4b}{2b^2+5b-3}$.

2.31. а) $\frac{4x+3y^2}{9y^4-16x^2}$; б) $\frac{8}{x^2+5xy-6y^2}$; в) $\frac{2a+3b}{b^2-9-a^2+6a}$.

Сократите дробь **(32—38):**

2.32. а) $\frac{(5a-4)^2+2(5a-4)(4-3a)+(3a-4)^2}{(2a+5)^2-2(2a+5)(5-3a)+(3a-5)^2}$;

б) $\frac{(4b+5)^2+32b^2-50+(4b-5)^2}{(4b-5)^2+(4b+5)^2+50-32b^2}$.

2.33. а) $\frac{64x^3-27y^6}{9y^4-16x^2}$; б) $\frac{a^{33}+1}{a^{11}-a^{22}+a^{33}}$.

2.34. а) $\frac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$; б) $\frac{b^4+4}{b^2-2b+2}$.

2.35. а) $\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{b^2-c^2-a^2-2ac}$; б) $\frac{x^{n+2}-4x^{n+1}+4x^n}{x^3-6x^2+12x-8}$.

2.36. а) $\frac{c^4-3c^2+2}{c^5+1}$; б) $\frac{x^{47}+x^{46}+\ldots+x+1}{x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1}$.

2.37. а) $\frac{a^4+2a^3-9a^2-18a}{a^2-a-6}$, вычислите значение дроби, если оно существует, при $a=-1{,}3$; $a=-2$; $a=3$;

б) $\frac{b^{12}-1}{(b^4+b^2+1)(b^3-b^2+b-1)}$, вычислите значение дроби, если оно существует, при $b=-2$; $b=1$.

2.38. $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

2.39. Упростите выражение и найдите его числовое значение:

а) $\frac{9a^2-24ab+16b^2-25}{3a-4b-5}$ при $a=\frac{1}{9}$, $b=2\frac{1}{3}$;

б) $\frac{x^8-y^8}{(x^4+y^4)(x^3+x^2y+y^2x+y^3)}$ при $x=17{,}0625$, $y=\frac{1}{16}$.

2.40. Выполните сложение или вычитание:

а) $\dfrac{4a^2b}{(2a-3)^2}-\dfrac{9b}{(3-2a)^2}$;

б) $\dfrac{x^2}{(x-3y)^3}+\dfrac{9y^2}{(3y-x)^3}$;

в) $\dfrac{yx^2+16}{(y-1)(x-4)}-\dfrac{16y+x^2}{xy-x-4y+4}$.

2.41. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$\frac{3a+2}{9a^2-6a+4}-\frac{18a}{27a^3+8}-\frac{1}{3a+2}$$

равно нулю.

2.42. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$(x-2y)^2-\frac{8y^2(2y^2-x^2)}{(2y+x)^2}$$

неотрицательно.

Преобразуйте в дробь выражение **(43—46)**:

2.43. $\dfrac{m^2-mn}{m^2n+n^3}-\dfrac{2m^2}{n^3-mn^2+m^2n-m^3}$.

2.44. $4x^2-\dfrac{8x^3+27y^3}{2x-3y}-9y^2$.

2.45. $\dfrac{1}{a^2-ac-ab+bc}+\dfrac{2}{b^2-ab-bc+ac}+\dfrac{1}{c^2-ac-bc+ab}$.

2.46. $\dfrac{a+2b}{3a-3b}+\dfrac{3c-a}{2c-2a}-\dfrac{a^2-bc}{ab+ac-bc-a^2}$.

Упростите выражение **(47—49)**:

2.47. $\dfrac{3q^3-81p^3}{18p^2q+6q^2p+2q^3}+\dfrac{81q^2p-54qp^2+9p^3}{2qp^2-12pq^2+18q^3}$.

2.48. $\dfrac{8-8x+2x^2}{x^4-4x^3+16x-16}-\dfrac{x}{x^2-4}$.

2.49. $\dfrac{x+2}{x^3-3x^2-4x+12}-\dfrac{3-x}{x^2-5x+6}$.

2.50. Выполните умножение:

а) $\dfrac{4x^2-6xy+9y^2}{2x-3y}\cdot\dfrac{9y^2-4x^2}{8x^3+27y^3}$;

б) $\dfrac{3-6x}{2x^2+4x+8}\cdot\dfrac{2x+1}{x^2+4-4x}\cdot\dfrac{8-x^3}{4x^2-1}$;

в) $\dfrac{a^2+ab}{5a-a^2+b^2-5b}\cdot\dfrac{a^2-b^2+25-10a}{a^2-b^2}$;

г) $\dfrac{a+b}{a^2-4b+4a-b^2}\cdot\dfrac{16-b^2-a^2-2ab}{a^2+ab}$.

2.51. Выполните действия:

а) $\left(\frac{2a^{n+1}}{b^{n-2}}\right)\cdot(0{,}25a^{3-2n}b^{2n+1})^3$;

б) $\left(\frac{a^{2n-1}\cdot b^{3n+2}}{c^{3-n}}\right)^4\cdot\left(\frac{a^{1-n}b^{2-2n}}{c^{3n+1}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{b^{2n-1}}\right)^3\cdot\left(\frac{c^{n+3}}{a^{n-1}}\right)^5$.

2.52. Выполните деление:

а) $\frac{27a^3-64b^3}{b^2-4}:\frac{9a^2+12ab+16b^2}{b^2+4b+4}$;

б) $\frac{6c\,(a^6-b^{12})}{a^2+ab^2+b^4}:(c^3\,(2a+2b^2)\,(3a^2-3ab^2+3b^4))$;

в) $\frac{2a^2+6ac-ab-3bc}{2ab-4a^2+bc-2ac}:\frac{2ac+ab+3bc+6c^2}{2ab+bc-4ac-2c^2}$;

г) $\frac{x^4-3x^2+1}{x^3-27}:\frac{x^2+x-1}{x^2+3x+9}$.

Упростите выражение **(53—56)**:

2.53. $\frac{x^2+(a+b)\,x+ab}{x^2-(a-c)\,x-ac}\cdot\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$.

2.54. $\frac{2x^2+xy-6y^2}{6x^2-5xy+y^2}:\frac{2x^2-7xy+6y^2}{3x^2-7xy+2y^2}$.

2.55. $\frac{x^2-xy+4x-5y-5}{x^2-4y^2}\cdot\frac{x^3-2x^2y-5x^2+10xy+25x-50y}{x^3+125}$.

2.56. $\frac{x^8-16}{x^2+2x+2}\cdot\frac{x^4+2x^2+4}{x^4-2x^3+4x^2-4x+4}$.

2.57. Определите x из пропорции:

а) $\frac{9-4a^2-4ab-b^2}{4a^2+2ab+3b-9}=\frac{3+2a+b}{x}$;

б) $\frac{a-b-5}{x}=\frac{a^2-10a-b^2+25}{a^2+2ab-5a-5b+b^2}$;

в) $\frac{a-b+c}{a^2-b^2+c^2+2ac}=\frac{x}{a^2+ab-bc-c^2}$.

2.58. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то:

а) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

б) $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$;

в) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$;

г) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{na+mc}{nb+md}$;

д) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$;

е) $\frac{na+mb}{pa+rb}=\frac{nc+md}{pc+rd}$.

2.59. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$\frac{4}{1-a}-\left(\frac{2a+2}{3-a}\right)^2\cdot\left(\frac{a+9}{a^2+2a+1}+\frac{2a}{1-a^2}\right)$$

не зависит от значения переменной.

2.60. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$\left(\frac{2}{2m-n}+\frac{6n}{n^2-4m^2}-\frac{4}{2m+n}\right):\left(1+\frac{4m^2+n^2}{4m^2-n^2}\right)$$

не зависит от значения переменной n.

Упростите выражение **(61—64)**:

2.61. $\left(\frac{x}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+8}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{2}{2-x}\right).$

2.62. $\left(\frac{1}{2-a}+\frac{6a-4-a^2}{a^3-8}-\frac{2-a}{a^2+2a+4}\right)\cdot\frac{a^3+4a^2+8a+8}{4-4a+a^2-a^3}.$

2.63. $\left(\frac{x-2y}{x^3+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right):\frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}.$

2.64. $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}\cdot\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{b-a-c}{abc}$ и вычислите его значение при $a=1{,}2,\ b=0{,}5,\ c=1{,}3.$

2.65. Докажите, что значение выражения положительно при всех допустимых значениях переменных:

а) $\frac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right);$

б) $\left(\frac{a^2}{4b^3}+\frac{2}{a}\right):\left(\frac{a}{2b^2}-\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\right):\dfrac{(a-2b)^2+8ab}{4+\frac{2a}{b}}.$

2.66. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$(b^2+b+ab+a)(2a-b-b^2+2ab)\left(\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a+5}{2a^2+ab-b^2}\right):$$
$$:(2b^2+a+5).$$

неположительно и не зависит от значения переменной a.

2.67. Докажите, что при любом значении $a>1$ значение выражения

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}+\frac{32}{1+a^{32}}$$

отрицательно.

2.68. Известно, что $\frac{4b+a}{5a-7b}=2$. Найдите:

а) $\frac{4a-5b}{3a+b}$; б) $\frac{3a^2-2ab+b^2}{5a^2+2b^2}$; в) $\frac{a^3-3ab^2}{4a^2b+3b^3}$.

Постройте график функции **(69—70)**:

2.69. а) $y=\frac{2}{x}$; б) $y=-\frac{3}{x}$; в) $y=\frac{4}{x+2}$; г) $y=\frac{1}{3-x}$;

д) $y=\frac{3}{x}-1$; е) $y=2-\frac{5}{x}$; ж) $y=\frac{3}{x+4}-3$; з) $y=1-\frac{1}{x-2}$.

2.70. а) $y=\frac{x-1}{x+1}$; б) $y=\frac{x+1}{x-3}$; в) $y=\frac{x-2}{2+x}$;

г) $y=\frac{x+3}{2-x}$; д) $y=\frac{x-1}{x^2-1}$; е) $y=\frac{x+2}{4-x^2}$;

ж) $y=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; з) $y=\frac{x^2+4x+3}{9-x^2}$.

2.71. Найдите частное и остаток от деления многочленов:

а) x^3-3x^2+7x-8 на $x-1$;
б) x^4+5x^3-6x+1 на x^2-3x+1;
в) $2x^5-6x^4+3x^3-2$ на x^2-x-2.

2.72. а) Представьте выражение $\frac{3x^2-6x+7}{x+1}$ в виде $ax+b+\frac{c}{x+1}$, где a, b и c — целые числа.

б) Представьте выражение $\frac{x^3-2x^2+7x+5}{x^2-4x+2}$ в виде $ax+b+$ $+\frac{cx+d}{x^2-4x+2}$, где a, b, c, d — целые числа.

2.73. При каких натуральных значениях n выражение $\frac{2n-3}{n+1}$ является целым числом?

2.74. При каких целых значениях n выражение $\frac{3n-1}{n+2}$ является натуральным числом?

2.75. При каких натуральных значениях n выражение

$\frac{3n^2-16n+21}{n-3}$ является натуральным числом?

2.76. При каких натуральных значениях n выражение $\frac{3n^2-26n+35}{4n-28}$ является целым числом?

2.77. Найдите a и b из тождества:

а) $\frac{1}{(x-6)(x+1)}=\frac{a}{x-6}+\frac{b}{x+1}$;

б) $\frac{2}{x^2+x-6}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$.

2.78. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$;

б) $\frac{1}{x(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+9)}+\frac{1}{(x+9)(x+12)}+$ $+\frac{1}{(x+12)(x+15)}$.

§ 3. ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

1. Определение и свойства делимости.

Целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если существует такое целое число c, что $a = bc$.

Если a делится на b, то ka делится на b (здесь и далее все числа целые, если это специально не оговаривается).

Если a и b делятся на c, то сумма $a+b$ и разность $a-b$ делятся на c.

Если a делится на k, b делится на n, то произведение ab делится на произведение kn.

Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.

2. Теорема о делении с остатком.

Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где q — целое, r — натуральное или нуль, причем r может принимать лишь b различных значений 0; 1; 2; ...; $b-1$.

Заметим, что если остаток r равен нулю, то число a делится на b.

3. Взаимно простые числа.

Два числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, кроме единицы.

Если число a делится на каждое из двух взаимно простых чисел b и c, то оно делится и на их произведение bc.

Если произведение ab делится на число c, причем числа a и c взаимно простые, то b делится на c.

4. Основная теорема арифметики.

Каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа.

Указанное в теореме представление называется каноническим разложением числа n.

5. Наибольший общий делитель.

Общим делителем чисел a и b называется число, на которое делятся оба числа a и b. Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается НОД $(a; b)$.

Для нахождения НОД $(a; b)$ можно использовать алгоритм Евклида, выполняя последовательно деление с остатком:

$$\begin{gathered}
a = bq_0 + r_1,\ 0 < r_1 < b, \\
b = r_1 q_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 = r_2 q_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n q_n.
\end{gathered}$$

(Процесс заканчивается после того, как первый раз получен нулевой остаток.) Тогда НОД $(a; b) = r_n$.

Другой способ нахождения НОД (a; b) состоит в разложении чисел a и b на простые множители, отыскании общих множителей, входящих в оба разложения, и вычислении произведения общих простых множителей в наименьших степенях, с которыми эти множители входят в разложение a и b.

6. Наименьшее общее кратное.

Общим кратным чисел a и b называется число, которое делится на a и на b. Наименьшее общее кратное обозначается НОК (a; b).

Для нахождения НОК (a; b) можно разложить на простые множители a и b и вычислить произведение всех простых множителей, входящих хотя бы в одно из разложений, причем простые множители, входящие в оба разложения, надо брать в наибольшей из степеней, с которыми этот множитель входит в разложение a и b.

Заметим, что НОД (a; b)$\cdot$НОК (a; b)$=ab$.

7. Разложение на множители выражений вида x^n-a^n и $x^{2n+1}+a^{2n+1}$.

Имеют место формулы:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}),$$
$$x^{2n+1}+a^{2n+1}=(x+a)(x^{2n}-x^{2n-1}a+\ldots-xa^{2n-1}+a^{2n}),$$

где $n\in \boldsymbol{N}$.

8. Принцип Дирихле.

Если $m>n$, то при отнесении каждого из m предметов к одному из n классов хотя бы в один класс попадет не менее двух предметов.

Пример 1. Докажите, что если a и b — целые числа, то $ab(a^2-b^2)$ делится на 6.

Доказательство. Поскольку $6=2\cdot3$ и числа 2 и 3 — взаимно простые, то для решения задачи достаточно показать делимость числа $ab(a^2-b^2)$ на 2 и на 3.

Если хотя бы одно из чисел a или b четно, то $ab(a^2-b^2)$ кратно 2. Если же оба числа a и b нечетны, то число $a+b$ четно и, значит, $ab(a^2-b^2)=ab(a+b)(a-b)$ кратно 2.

Если хотя бы одно из чисел a или b кратно 3, то произведение $ab(a^2-b^2)$ также кратно 3. Осталось рассмотреть случай, когда оба числа a и b не делятся на 3. По теореме о делении с остатком каждое из чисел при делении на 3 может давать остатки 1 или 2. Если остатки от деления чисел a и b на 3 одинаковые, то тогда разность $a-b$ делится на 3, если же остатки разные, то сумма $a+b$ делится на 3, так как сумма остатков равна 3. Во всех случаях число $ab(a^2-b^2)$ кратно 3.

Пример 2. Сумма двух целых чисел равна 101, а разность их квадратов — простое число. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим искомые числа через a и b. Тогда $a^2-b^2=p$, где p — простое, т. е. $(a-b)(a+b)=p$, поскольку $a+b=101$, то $101(a-b)=p$. Отсюда следует, что p делится на

101, но p — простое, значит, $p=101$. Имеем: $a-b=1$. Так как $a+b=101$, находим $a=51$, $b=50$.

Пример 3. Найдите все простые числа p, для которых число p^2+2 также простое.

Решение. Очевидно, что $p\neq 2$, так как $p^2+2=6$ не является простым, а $p=3$ удовлетворяет условию, так как $p^2+2=$ $=11$ — простое число. Покажем теперь, что не существует простых чисел $p>3$, для которых p^2+2 — простое число. Пусть $p>$ >3 — простое число, тогда p не делится на 3, значит, по теореме о делении с остатком $p=3n+1$ или $p=3n+2$, где $n\in \boldsymbol{N}$. Если $p=3n+1$, то $p^2+2=3(3n^2+2n+1)$ делится на 3, т. е. не является простым. Если же $p=3n+2$, то $p^2+2=3(3n^2+4n+2)$ также делится на 3, т. е. не является простым.

Пример 4. Можно ли разменять 100 р., имея рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры, так, чтобы всего в размене участвовало 29 купюр?

Решение. Пусть в размене участвуют x рублевых, y трехрублевых и z пятирублевых купюр, тогда $x+3y+5z=100$. Записав это равенство в виде $(x+y+z)+(2y+4z)=100$, заключаем, что $x+y+z=29$ — четное число, так как числа 100 и $2y+4z$ — четные. Следовательно, нельзя разменять 100 р. с помощью 29 купюр достоинством в 1 р., 3 р. и 5 р.

Пример 5. Сколько раз входит число 2 в разложение на простые множители числа $a=(n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n$, где $n\in \boldsymbol{N}$?

Решение. Поскольку

$$a=\frac{(2n)!}{n!}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2^n,$$

то число 2 входит n раз в разложение числа a.

Упражнения

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ДЕЛИМОСТЬ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

3.1. Докажите, что если a, b и c делятся на m, то $a+b-c$ делится на m.

3.2. Число a кратно 3. Докажите, что число $4a$ кратно 12.

3.3. Число a кратно 6. Докажите, что a^2-12a кратно 36.

3.4. Известно, что a кратно 3, b кратно 8. Докажите, что ab кратно 24.

3.5. Известно, что a кратно 3, b кратно 2. Докажите, что $2a+3b$ кратно 6.

3.6. Докажите, что сумма квадрата целого числа и самого числа есть число четное.

3.7. Докажите, что $1^3+2^3+\ldots+99^3$ делится на 100.

3.8. Докажите, что $1^3+2^3+\ldots+9^3$ не делится на 10.

3.9. Докажите, что число $mn(m+n)$, где m и n — целые числа, четное.

3.10. Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из $3n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ одинаковых цифр, делится на 37.

3.11. Докажите, что число:

а) $\overline{ab}-\overline{ba}$ кратно 9; б) $\overline{abc}-\overline{cba}$ кратно 99;

в) $\overline{ab}+\overline{ba}$ делится на 11; г) $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ делится на 11.

3.12. Число $a+\frac{1}{a}$ — целое. Докажите, что числа $a^2+\frac{1}{a^2}$, $a^3+\frac{1}{a^3}$ также являются целыми.

3.13. Известно, что $ab+cd$ делится на $a+c$. Докажите, что $ad+bc$ делится на $a+c$.

3.14. В классе 27 учащихся. Может ли каждый из них дружить ровно с девятью одноклассниками?

3.15. Каких чисел больше среди первых 1000 натуральных чисел: тех, которые делятся на 3 или на 5, или тех, которые не делятся ни на 3, ни на 5?

ТЕОРЕМА О ДЕЛЕНИИ С ОСТАТКОМ

3.16. Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел при делении на 4 дает остаток 1.

3.17. Число a четное, число b нечетное. Каким может быть число:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $3a+b$; д) a^2+b; е) $a+b^2$; ж) $a+2b$?

3.18. Число a делится на 3, число b не делится на 3. Делится ли на 3 число:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab.

3.19. Число a — четное. Может ли остаток от деления числа a на 6 быть равным 1? 3?

3.20. Число a кратно 3. Может ли остаток от деления числа a на 12 быть равным 2?

3.21. Число a при делении на 12 дает остаток 7. Чему равен остаток от деления числа a на 2; 3; 4; 6?

3.22. Числа a и b дают одинаковый остаток при делении на m. Докажите, что разность $a-b$ делится на m. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

3.23. Нечетное число a кратно 3. Чему равен остаток от деления числа a на 6?

3.24. Четное число a при делении на 3 дает остаток 1. Чему равен остаток от деления числа a на 6?

3.25. Напишите общий вид чисел, кратных 3 и дающих при делении на 4 остаток 1.

3.26. Четные числа a и b, не кратные 6, при делении на 6 дают разные остатки. Докажите, что сумма $a+b$ делится на 6.

3.27. Число a — четное, не кратное 4. Докажите, что число a^2 при делении на 32 дает остаток 4.

3.28. Число a не делится ни на 2, ни на 3. Найдите остаток от деления числа a^2 на 6.

3.29. Докажите, что если n не кратно ни 3, ни 2 и $n > 3$, то n^2 при делении на 24 дает остаток, равный 1.

3.30. Нечетные числа a и b дают разные остатки при делении на 4. Докажите, что $a^2 - b^2$ кратно 8.

3.31. Число a — четное, не кратное 6. Чему равен остаток от деления числа a^2 на 12?

3.32. Найдите все числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 5 дают остаток 3.

3.33. Найдите остаток от деления числа $10! + 49$ на 42.

3.34. Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 — остаток 1. Найдите остаток от деления числа a на 15.

3.35. Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 3 дает в остатке 2. Найдите остаток от деления числа a на 15.

3.36. Известно, что число a при делении на 3 дает остаток 1, а при делении на 4 — остаток 3. Найдите остаток от деления числа a на: а) 12; б) 6.

3.37. Существует ли такое целое число, которое при делении на 12 дает остаток 11, а при делении на 18 — остаток 1?

3.38. Докажите, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

3.39. Докажите, что если m и n — нечетные числа, то $m^2 - n^2$ кратно 8.

Докажите, что при любом натуральном n **(40—42)**:

3.40. а) $n(n+1)$ кратно 2; б) $n^2 + 3n$ кратно 2;
в) $n(3n+1)$ кратно 2; г) $n(n+1)^2(3n+2)$ кратно 4.

3.41. а) $n(2n-1)(2n+1)$ кратно 3; б) $n(2n^2+1)$ кратно 3;
в) $n^3 + 5n$ кратно 3; г) $n(n+1)(2n+1)$ кратно 6.

3.42. а) $n^3 - n$ кратно 6; б) $n^3 + 11n$ кратно 6;
в) $n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6; г) $n(n^2 + 6n + 5)$ кратно 6.

3.43. Докажите, что если число a не кратно 5, то или $a^2 + 1$ делится на 5, или $a^2 - 1$ делится на 5.

3.44. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на 3. Докажите, что a кратно 3 и b кратно 3.

3.45. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на 7. Докажите, что $a^2 + b^2$ делится на 49.

3.46. Докажите, что при любом натуральном n число вида: а) $3n - 1$; б) $4n - 1$ не является квадратом целого числа.

3.47. Числа 2146, 1991 и 1805 дают равные остатки при делении на натуральное число $n > 1$. Найдите n.

3.48. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел кратна 9.

3.49. Докажите, что число n^2+n+9:

а) не кратно 25 ни при каких натуральных n;

б) не кратно 49 ни при каких натуральных n.

3.50. Докажите, что $n^2+5n+16$ не кратно 169 ни при каких натуральных n.

ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

3.51. Верно ли, что числа n и $n+1$ взаимно просты?

3.52. Докажите, что при любом целом n число $n(n+1)^2(n+2)$ делится на 12.

3.53. Докажите, что при любом целом n число $(n^3+3n^2+2n)\times\times(n+7)$ делится на 24.

3.54. Докажите, что:

а) n^3+20n делится на 48, если n — четное число;

б) n^3+3n^2-n-3 делится на 48, если n — нечетное число.

3.55. При каких натуральных значениях n выражение $n(3n^3+4n^2-1)$ кратно 6?

3.56. Докажите, что при любом целом n число n^5-5n^3+4n кратно 120.

3.57. При каких натуральных значениях n число $n^6+2n^5-n^2-2n$ делится на 120?

3.58. Докажите, что $\frac{n^5}{120}+\frac{n^4}{12}+\frac{7n^3}{24}+\frac{5n^2}{12}+\frac{n}{5}$ при любом целом n есть число целое.

3.59. Докажите, что если натуральное число n не кратно 5, то n^8+3n^4-4 делится на 100.

3.60. Докажите, что:

а) n^2-1 делится на 8, если n^2-1 делится на 2;

б) n^3-4n делится на 48, если n^3-4n делится на 2;

в) n^3-9n делится на 162, если n^3-9n делится на 3;

г) n^3-16n делится на 384, если n^3-16n делится на 16.

3.61. Известно, что числа n и 6 взаимно просты. Докажите, что число n^2 при делении на 24 дает в остатке 1.

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

3.62. Докажите, что НОД двух (или нескольких) чисел кратен любому их общему делителю.

3.63. Найдите НОД чисел:

а) $2n$ и $2n+2$; б) $3n$ и $6n+3$;

в) $2n$ и $4n+2$; г) $30n+25$ и $20n+15$.

3.64. Докажите, что НОД $(n;\ n+k)=$НОД $(n;\ k)$.

3.65. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 35, а наименьшее общее кратное равно 42.

3.66. Найдите два натуральных числа, разность которых равна 66, а НОК равно 360.

3.67. Найдите НОД всех шестизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений).

3.68. Приведите пример четырехзначного числа, имеющего ровно три делителя.

3.69. Докажите, что только одно число, состоящее из четного числа одинаковых цифр, простое. Найдите это число.

3.70. Сумма двух чисел равна 463, а разность их квадратов — простое число. Найдите эти числа.

3.71. Докажите, что в натуральном ряду после простого числа, большего трех, не может стоять квадрат целого числа.

3.72. Отцу 50 лет, а произведение возрастов трех его сыновей 4199. Сколько лет каждому сыну?

3.73. Пусть p — простое число, $p>3$. Докажите:

а) $p=6k\pm 1$, $k\in \boldsymbol{N}$;

б) p^2-1 делится на 12;

в) p^2-1 делится на 24.

Докажите или опровергните утверждение **(74—78)**:

3.74. Для того чтобы сумма двух неравных натуральных чисел была простым числом, необходимо, чтобы они были разной четности. Является ли это утверждение достаточным?

3.75. Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была простым числом, необходимо, чтобы одно из них было простым. Является ли это утверждение достаточным?

3.76. Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была простым числом, необходимо, чтобы они были взаимно просты. Является ли это утверждение достаточным?

3.77. Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была составным числом, достаточно, чтобы они оба были простыми. Является ли это утверждение необходимым?

3.78. Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была составным числом, достаточно, чтобы они были простыми восьмизначными числами. Является ли это утверждение необходимым?

3.79. Найдите два трехзначных числа таких, что:

а) они взаимно просты;

б) каждое из них — простое число;

в) их сумма и их разность — простые числа;

г) каждое из них имеет ровно три делителя;

д) их произведение имеет ровно шесть делителей;

е) каждое из них имеет ровно четыре делителя;

ж) разность их квадратов — простое число.

3.80. Докажите, что четырехзначное число, не имеющее делителей, меньших 100,— простое.

3.81. Найдите все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел.

3.82. Докажите, что $2^{10}+5^{12}$ — составное число.

3.83. Числа p и $2p+1$ — простые ($p>3$). Докажите, что число $4p+1$ — составное.

3.84. Укажите все простые числа p, для которых число $8p^2+1$ — простое.

3.85. Среди натуральных чисел n, для которых $0{,}2(n^3-1)$ — целое, укажите такие n, что число $0{,}2(n^3-1)$ — простое.

3.86. Докажите, что не существует наибольшего простого числа.

3.87. Докажите, что в натуральном ряду существуют 1992 идущих подряд составных числа.

3.88. Найдите все такие натуральные числа n, что числа $n-2$, $n+24$, $n+26$ — простые.

3.89. Укажите число делителей числа:
а) 2^{25}; б) $2^3\cdot3^4$; в) 2700; г) $9!$.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

3.90. Докажите, что:
а) число $\underbrace{555\ldots53}_{1992\text{ цифры}}$ — является составным;
б) число $1000^{1000}-1$ является составным.

3.91. В числе $4758967\square$ напишите последнюю цифру такую, чтобы число делилось на 2; 5; 3; 9; 4; 25; 11.

3.92. Докажите, что число $49^{100}-14^{50}$ кратно 5.

3.93. Докажите, что разность двух десятизначных чисел, запись каждого из которых содержит все десять цифр, делится на 9.

3.94. Выписаны подряд 300 натуральных чисел, начиная с 1. Докажите, что полученное число делится на 3. Верно ли, что оно делится на 9?

3.95. Существует ли число, десятичная запись которого содержит шесть единиц и семь нулей, являющееся квадратом целого числа?

3.96. Может ли число вида 5^n+1 делиться на число вида 5^k-1, где n и k — натуральные числа?

3.97. Может ли сумма цифр квадрата целого числа равняться 1991?

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ ВЫРАЖЕНИЙ ВИДА x^n-a^n И $x^{2k+1}+a^{2k+1}$ В ЗАДАЧАХ НА ДЕЛИМОСТЬ

Докажите, что при любом натуральном значении n **(98—99)**:

3.98. а) 7^n-1 кратно 6; б) 15^n-1 кратно 7;
в) $3^{3n}-1$ кратно 13; г) $2^{4n}-1$ кратно 15.

3.99. а) 5^n+3 делится на 4; б) 7^n+5 делится на 6;
в) 13^n+5 делится на 6; г) 15^n+6 делится на 7.

3.100. Докажите, что:
а) нечетная натуральная степень числа 16, увеличенная на 1, кратна 17;

б) нечетная натуральная степень числа 23, увеличенная на 1, кратна 12;

в) нечетная натуральная степень числа 11, увеличенная на 13, кратна 12;

г) нечетная натуральная степень числа 6, увеличенная на 8, кратна 7.

3.101. Докажите, что:

а) четная натуральная степень числа 7, уменьшенная на 1, кратна 48;

б) четная натуральная степень числа 9, уменьшенная на 1, кратна 40;

в) четная натуральная степень числа 4, увеличенная на 14, кратна 15;

г) четная натуральная степень числа 5, увеличенная на 23, кратна 24.

3.102. Докажите, что при четном натуральном n:

а) 7^n-5^n делится на 24; б) 5^n-3^n делится на 16.

3.103. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $7^n-6\cdot 2^n$ кратно 5; б) 7^n+3^{n+1} кратно 4;

в) 5^n+2^{n+1} кратно 3; г) 9^n+4^{n+1} кратно 5.

3.104. Докажите, что при любом натуральном n:

а) 21^n+4^{n+2} кратно 17; б) 15^n+7^{n+1} кратно 8;

в) 13^n+3^{n+2} кратно 10; г) $5^n+7\cdot 9^n$ кратно 4.

3.105. Докажите, что при любом нечетном натуральном n:

а) 5^n+2^n кратно 7; б) 5^n+11^n+2 кратно 6;

в) $5^n+13\cdot 11^n-4$ кратно 6; г) $1^n+3^n+5^n+7^n$ кратно 8.

3.106. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$ делится на 19;

б) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ делится на 57;

в) $3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$ делится на 19;

г) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11.

3.107. Докажите, что:

а) $5^n+8^n-2^{n+1}$ кратно 3 при любом натуральном n;

б) $5^n+7^n-2^{n+1}$ кратно 3 при четном натуральном n.

3.108. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $1^n+3^n+5^n+7^n$ кратно 4;

б) $3^n+5^n+7^n+9^n$ кратно 4;

в) $5^n+7^n+9^n+11^n$ кратно 4;

г) $1^n+3^n+5^n+7^n+9^n+11^n+13^n+15^n$ кратно 8.

3.109. Докажите, что при любом натуральном n число 5^n-3^n+2n делится на 4.

УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

3.110. а) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Найдите это число.

б) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 4. Найдите это число.

3.111. Двузначное число в шесть раз больше суммы его цифр. Найдите это число.

3.112. Докажите, что не существует двузначного числа, равного произведению цифр, входящих в его десятичную запись.

3.113. Можно ли из двадцати монет достоинством 5, 20 и 50 к. составить сумму в 5 р.?

3.114. На мебельном комбинате изготовляют табуретки с четырьмя и с тремя ножками. На складе имеется 786 484 ножки. При изготовлении продукции должны быть использованы все ножки.

а) Можно ли изготовить одинаковое количество тех и других табуреток?

б) На какое минимальное число можно изготовить табуреток с четырьмя ножками больше, чем с тремя?

в) На какое минимальное число можно изготовить табуреток с четырьмя ножками меньше, чем с тремя?

г) Какое максимальное число табуреток можно изготовить?

д) Какое минимальное число табуреток можно изготовить?

е) Известно, что цена одной ножки выражается числом копеек, бо́льшим 50, но меньшим 80, а цена всех ножек — целым числом рублей. Сколько стоят все 786 484 ножки?

Решите в целых числах уравнение **(115—119)**:

3.115. а) $(x-2)(xy+4)=1$; б) $2x^2+xy=x+7$;
в) $x^2-xy-x+y=1$; г) $x^2-3xy=x-3y+2$.

3.116. а) $y+x=xy$; б) $y-x-xy=2$;
в) $3xy+2x+3y=0$; г) $y+4x+2xy=0$.

3.117. а) $x^2-xy-2y^2=1$; б) $x^2-3xy+2y^2=3$.

3.118. а) $x^2+xy-2y^2-x+y=3$; б) $2y^2-2x^2+3xy-2y+x=2$.

3.119. а) $y^2-2xy-2x=6$; б) $x^2+xy-y=2$.

3.120. Докажите, что уравнение:
а) $x^2-3y=17$; б) $3x^2-4y^2=13$
не имеет решений в целых числах.

3.121. Решите в целых числах уравнение:
а) $3x+2y=7$; б) $3y=2x+8$.

3.122. Решите в натуральных числах уравнение: $x+y+z=xyz$.

3.123. Решите в натуральных числах уравнение:
а) $1!+2!+3!+...+x!=y^2$; б) $x!+y!=4z+3$.

3.124. Решите в целых числах уравнение $19x^2+91y^2=1991$.

3.125. Решите в простых числах уравнение $x^2-4y^2=9$.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

3.126. При каких целых значениях n дробь $\frac{4n-5}{2n-1}$ есть натуральное число?

3.127. При каких целых значениях n дробь $\frac{n^2-n+3}{n+1}$ есть целое число?

3.128. При каких натуральных значениях n дробь $\frac{2n^2-3n+2}{2n-1}$ есть целое число?

3.129. Докажите, что сумма четырех различных двузначных чисел, записанных с помощью двух заданных цифр, не может быть квадратом целого числа.

3.130. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является квадратом целого числа.

3.131. Найдите 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного точного квадрата.

3.132. Найдите знаменатель дроби, полученной после сокращения $\frac{100!}{6^{100}}$.

3.133. Какой цифрой оканчивается число $9119^{1991^{91^{19}}}$?

3.134. Сколькими нулями оканчивается число 51! ?

3.135. а) Сколькими нулями оканчивается число 400! ?

б) Четной или нечетной является последняя ненулевая цифра числа 400! ?

3.136. Докажите, что если целое число a кратно 2, но не кратно 4, то у него четных делителей столько же, сколько и нечетных.

3.137. Докажите, что из любых ста целых чисел всегда можно выбрать:

а) два таких, что их разность делится на 99;

б) несколько таких чисел (или, быть может, одно), что их сумма делится на 99.

3.138. Докажите, что из n целых чисел всегда можно выбрать несколько таких чисел, что, поставив между ними знаки «+» и «—», получим число, делящееся на n.

3.139. Имеется n целых чисел. Докажите, что среди них найдутся несколько (или, быть может, одно) таких чисел, что сумма их делится на n.

3.140. Докажите, что существует число вида 19911991 ... 199100 ... 0, которое делится на 1992.

§ 4. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

1. Арифметический квадратный корень и его свойства.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен a, т. е. равенство $\sqrt{a}=b$ означает, что $b^2=a$ и $b\geqslant0$.

Если $a\geqslant0$ и $b\geqslant0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Если $a\geqslant0$ и $b>0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Если $a\geqslant0$, то $(\sqrt{a})^2=a$.

$\sqrt{a^2}=|a|$ при любом значении a.

2. Функция $y=\sqrt{x}$.

Функция $y=\sqrt{x}$ определена на множестве неотрицательных чисел и принимает неотрицательные значения.

Графиком функции $y=\sqrt{x}$ является полупарабола, симметричная графику функции $y=x^2$, где $x \geqslant 0$, относительно прямой $y=x$.

Большему значению аргумента x из области определения соответствует большее значение функции.

Пример 1. Докажите, что если $a \in \boldsymbol{N}$, то $\sqrt{a}$ либо натуральное число, либо иррациональное.

Доказательство. Пусть $\sqrt{a}=\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \neq 1$, причем m и n — взаимно простые. Тогда $a=\frac{m^2}{n^2}$, т. е. $\frac{m^2}{n^2} \in \boldsymbol{N}$. Но m^2 и n^2 — взаимно простые, поскольку числа m и n не имеют общих делителей и $n^2 \neq 1$, значит, $\frac{m^2}{n^2}$ не является натуральным числом. Пришли к противоречию.

Пример 2. Докажите, что $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ — иррациональное число.

Доказательство. Пусть $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}=r$, где r — рациональное. Тогда

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}=r-\sqrt{7},\ 8+2\sqrt{15}=r^2+7-2r\sqrt{7},$$
$$2\sqrt{15}+2r\sqrt{7}=r^2-1,\ \sqrt{15}+r\sqrt{7}=r_1,$$

где r_1 — рациональное. Отсюда $15+7r^2+2r\sqrt{105}=r_1^2$, т. е. $\sqrt{105}=\frac{r_1^2-15-7r^2}{2r}$ — рациональное число. Но $\sqrt{105}$ не натуральное, а значит, иррациональное (см. пример 1). Получили противоречие.

Пример 3. Вычислите $\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

Решение. 1-й способ. Пусть $x=\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, тогда $x^2=5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}-2\sqrt{25-24}$, $x^2=8$. Так как $x<0$, то $x=-2\sqrt{2}$.

2-й способ.

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=$$
$$=|\sqrt{3}-\sqrt{2}|-|\sqrt{3}+\sqrt{2}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}.$$

Пример 4. Вычислите $(2-\sqrt{5})\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

Решение. 1-й способ. Используем внесение множителя под знак корня:

$$(2-\sqrt{5})\sqrt{9+4\sqrt{5}}=-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2(9+4\sqrt{5})}=$$
$$=-\sqrt{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=-\sqrt{81-80}=-1.$$

2-й способ. Используем метод вынесения множителя из-под знака корня:

$$(2-\sqrt{5})\sqrt{9+4\sqrt{5}}=(2-\sqrt{5})\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}=(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})= \\ =4-5=-1.$$

Пример 5. Какое из чисел больше: $\sqrt{101}+\sqrt{103}$ или $\sqrt{99}+\sqrt{105}$?

Решение. Рассмотрим разность этих чисел:

$$\sqrt{101}+\sqrt{103}-\sqrt{99}-\sqrt{105}=\sqrt{101}-\sqrt{99}-(\sqrt{105}-\sqrt{103})= \\ =\frac{2}{\sqrt{101}+\sqrt{99}}-\frac{2}{\sqrt{105}+\sqrt{103}}>0,$$

так как знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй. Значит, $\sqrt{101}+\sqrt{103}>\sqrt{99}+\sqrt{105}$.

Упражнения

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

4.1. Проверьте равенство:

а) $\sqrt{81}=9$, $\sqrt{121}=11$, $\sqrt{441}=21$, $\sqrt{676}=26$;

б) $\sqrt{\frac{9}{4}}=1{,}5$, $\sqrt{1\frac{7}{9}}=\frac{4}{3}$, $\sqrt{1{,}44}=1{,}2$, $\sqrt{0{,}09}=0{,}3$;

в) $\sqrt{a^2}=a\ (a\geqslant 0)$, $\sqrt{a^6}=a^3\ (a\geqslant 0)$, $\sqrt{a^4}=a^2$, $\sqrt{a^8}=a^4$;

г) $\sqrt{25a^2}=-5a\ (a\leqslant 0)$, $\sqrt{\frac{a^2}{4}}=-\frac{a}{2}(a\leqslant 0)$, $\sqrt{\frac{4a^2}{49}}=\frac{2|a|}{7}$.

4.2. Объясните, почему неверно равенство:

а) $\sqrt{25}=-5$; б) $\sqrt{2{,}25}=-1{,}5$;

в) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}$; г) $\sqrt{(-3)^2}=-3$.

4.3. Пользуясь определением квадратного корня, найдите:

а) $(\sqrt{7})^2$, $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$, $(\sqrt{\sqrt{2}})^8$, $\left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{7}}}\right)^4$;

б) $(-\sqrt{11})^2$, $-(\sqrt{13})^2$, $-(-\sqrt{2})^2$, $-(-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$;

в) $(\sqrt{(-\sqrt{5})^2})^2$, $(-\sqrt{11})^4$, $(\sqrt{2})^{18}$, $(\sqrt{(\sqrt{2})^6})^4$;

г) $(2\sqrt{3})^4$, $\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$, $(\sqrt{(2\sqrt{3})^4})^2$, $(\sqrt{(\sqrt{(\sqrt{2})^4})^2})^6$.

4.4. Найдите:

а) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$, $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$, $\sqrt{\sqrt{625}}$, $\sqrt{2\sqrt{64}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{1024}}}$, $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^{18}}}}$;

б) $\sqrt{4a^2}$, $\sqrt{a^4b^8}$, $\sqrt{9a^2b^4}$, $\sqrt{81a^2b^6c^4}$.

4.5. Вычислите:

а) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$; б) $\sqrt{4+\sqrt{25}}$; в) $\sqrt{7+\sqrt{4}}$; г) $\sqrt{7-\sqrt{9}}$.

4.6. Найдите значение выражения:

а) $2{,}1+\sqrt{1{,}44}$; б) $3{,}2-\sqrt{5{,}76}$;
в) $\sqrt{256}+\sqrt{144}$; г) $\sqrt{1024}+\sqrt{729}-\sqrt{484}$;
д) $2\sqrt{0{,}25}+3\sqrt{11\frac{1}{9}}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}81}-0{,}5\sqrt{0{,}64}$.

4.7. Имеет ли смысл выражение:

а) $-\sqrt{15}$; б) $\sqrt{-289}$; в) $\sqrt{3-\sqrt{11}}$;
г) $\sqrt{\sqrt{123}-11}$; д) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$?

4.8. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{a}$; б) $\sqrt{-a}$; в) $\sqrt{a^2}$; г) $\sqrt{a^3}$; д) $\sqrt{-a^2}$;
е) $\sqrt{2a-a^2-1}$; ж) $\sqrt{-\frac{a^2}{5}+2a-5}$; з) $\sqrt{-a^5}$;
и) $\sqrt{-a^6}$?

4.9. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:

а) 49 см^2; б) 100 дм^2; в) 2,25 м^2; г) 5 м^2; д) 17 м^2; е) 30 дм^2.

4.10. Вычислите диаметр круга, если его площадь равна:

а) 25π см^2; б) 49π см^2; в) 7π дм^2; г) 11π дм^2;
д) $4\pi a^2$ дм^2 $(a>0)$; е) $9\pi\cdot c^6$ м^2 $(c>0)$.

Решите уравнение **(11—13)**:

4.11. а) $x^2=25$; б) $4y^2=81$; в) $z^2=3$; г) $x^2=7$.

4.12. а) $(x-2)^2=9$; б) $9(y+3)^2=1$; в) $(2z-1)^2=7$.

4.13. а) $x^2-10x+25=a^2$; б) $2x^2-16x+32=b$.

4.14. Одна из сторон прямоугольного участка составляет 25% другой его стороны. Найдите периметр участка, если его площадь равна 16 м^2.

4.15. Одна из сторон прямоугольного участка в 2 раза больше другой. Найдите периметр участка, если его площадь равна 8 м^2.

Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня **(16—19)**:

4.16. а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x}=\frac{2}{3}$; в) $\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$; г) $\sqrt{4x+1}=7$.

4.17. а) $\sqrt{7x-1}=1$; б) $\sqrt{3x-1}=0$; в) $\sqrt{3-5x}=1$; г) $\sqrt{7-2x}=3$.

4.18. а) $\sqrt{x}=-2$; б) $\sqrt{x}=1-\sqrt{2}$;
в) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2}-\sqrt{5}$; г) $\sqrt{5-x}=4\sqrt{3}-7$.

4.19. а) $\sqrt{x}=x$; б) $\sqrt{x}=-x$; в) $\sqrt{x-2}=2-x$; г) $\sqrt{x-3}=2-x$.

Упростите выражение (20—23):

4.20. а) $\sqrt{(a-3)^2}$ при $a \geqslant 3$;

б) $\sqrt{(b-4)^2}$ при $b<4$;

в) $\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$ при $2 \leqslant a \leqslant 4$;

г) $\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a-5)^2}$ при $a<3$.

4.21. а) $\sqrt{m^2-2m+1}$ при $m \leqslant 1$;

б) $\sqrt{9m^2-6m+1}$ при $m<\frac{1}{3}$;

в) $\sqrt{y^2-10y+25}+\sqrt{y^2-14y+49}$ при $y \geqslant 7$;

г) $\sqrt{z^2-4z+4}+\sqrt{z^2+8z+16}$ при $-4 \leqslant z \leqslant 2$.

4.22. а) $\sqrt{(a+1)^2-4a}$; б) $\sqrt{(a-3)^2+12a}$;

в) $\sqrt{(a^2-4)^2+16a^2}$; г) $\sqrt{(a^4+2)^2-8a^4}$.

4.23. а) $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ при $a \geqslant 3$;

б) $\sqrt{10a+23+\sqrt{a^4+4a^2+4}}$;

в) $\sqrt{a^2-13a+45+\sqrt{a^2-8a+16}}$ при $a \leqslant 4$;

г) $\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$.

4.24. Какое из чисел больше:

а) 2 или $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$ или $\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{2}$ или $\sqrt{19}$;

г) $3\sqrt{5}$ или $5\sqrt{3}$; д) $4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5}$; е) $\sqrt{5\sqrt{3}}$ или $\sqrt{6\sqrt{2}}$;

ж) $2\sqrt{3}$ или $\sqrt{6\sqrt{2}}$?

4.25. Найдите наибольшее целое число, меньшее числа:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{67}$; г) $\sqrt{95}$; д) $\sqrt{149}$; е) $\sqrt{274}$; ж) $\sqrt{1250}$.

4.26. Найдите наименьшее целое число, большее числа:

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{62}$; г) $\sqrt{103}$; д) $\sqrt{245}$; е) $\sqrt{893}$.

4.27. Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\sqrt{32}$; д) $\sqrt{105}$; е) $\sqrt{238}$; ж) $\sqrt{632}$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

4.28. Докажите, что сумма, разность и произведение рациональных чисел есть число рациональное.

4.29. Докажите, что если r_1 и r_2 — рациональные числа ($r_2 \neq 0$), то $\frac{r_1}{r_2}$ — рациональное число.

4.30. Известно, что сумма и разность двух чисел a и b есть рациональные числа. Докажите, что числа a и b также являются рациональными.

4.31. Известно, что числа r_1, r_2 и $r_3 \neq 0$ — рациональные. Объясните, почему рациональны числа:

а) $2r_1$; б) $\frac{r_1+2r_2}{3}$; в) $r_1^2+4{,}1$; г) $2r_1^2+3r_2+\frac{2}{3}$;

д) $\frac{3r_1-5r_2^2}{r_3}$; е) $\frac{r_1^2+2r_2^3-r_3^5}{2r_3^2}$; ж) $\frac{(7-3r_1)^2-\frac{3}{7}}{5r_3}$.

4.32. Докажите, что следующие числа иррациональны:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{13}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{15}$.

4.33. Какие из следующих чисел являются рациональными, какие — иррациональными:

а) $\sqrt{9}$; б) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt{16}$; г) $\sqrt{18}$; д) 0; е) $-\sqrt{5}$; ж) 0,666...; з) 0,(31); и) 0,010010001...?

4.34. Проверьте справедливость неравенств:

а) $6{,}1<\sqrt{38}<6{,}2$; б) $4{,}4<\sqrt{20}<4{,}5$;

в) $10{,}5<\sqrt{111}<10{,}6$; г) $21{,}5<\sqrt{463}<21{,}6$.

4.35. Найдите два первых десятичных знака после запятой числа:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{7}$; д) $\sqrt{10}$; е) $\sqrt{19{,}3}$; ж) $\sqrt{25{,}1}$; з) $\sqrt{25{,}35}$; и) $\sqrt{172}$; к) $\sqrt{173{,}46}$; л) $\sqrt{2543{,}105}$; м) $\sqrt{16837{,}24}$.

4.36. Сравните числа:

а) 1,(34) и 1,34; б) $\sqrt{7}$ и 3; в) $\sqrt{5}$ и 2; г) $\sqrt{17{,}3}$ и 4; д) $-54{,}72$ и $-54{,}679$; е) 3,1415 и $\frac{22}{7}$; ж) $-\sqrt{10}$ и $-3{,}16$; з) $3\frac{4}{7}$ и $\sqrt{12{,}8}$; и) $-\sqrt{29}$ и $-5\frac{5}{13}$.

4.37. Найдите два первых десятичных знака после запятой числа:

а) $1+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; д) $\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

е) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$; ж) $(\sqrt{3}+1)^2$; з) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; и) $\frac{5}{\sqrt{3}}$;

к) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

4.38. Число r — рациональное, α и β — иррациональные числа. Рациональным или иррациональным является число:

а) $r+\alpha$; б) $\alpha-r$; в) 2α; г) $\frac{\alpha}{3}$; д) α^2; е) $\alpha+\beta$; ж) $\alpha\cdot\beta$;

з) $\frac{\alpha}{\beta}$; и) $\sqrt{\alpha}$; к) $\sqrt{r+\alpha}$; л) $\alpha+2r$; м) $3\alpha+r$?

4.39. Докажите иррациональность числа:

а) $1+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; е) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; ж) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$; з) $\sqrt{7}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

4.40. Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма которых есть число рациональное.

4.41. Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых есть число рациональное.

4.42. Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное.

4.43. Докажите, что произведение рационального (отличного от нуля) и иррационального чисел есть число иррациональное.

4.44. Числа a, b и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — рациональные. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — рациональные числа.

4.45. Докажите, что число $\sqrt{3n+2}$ при любом натуральном n есть число иррациональное.

4.46. Докажите, что $\sqrt{mn}$ — иррациональное число, если $\sqrt{\frac{m}{n}}$ — иррациональное число (m, $n \in N$). Верно ли обратное утверждение?

ФУНКЦИЯ $y=\sqrt{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

4.47. Площадь квадрата может быть вычислена по формуле $S=a^2$, где a — сторона квадрата. Задайте формулой зависимость a от S.

4.48. Путь тела, падающего в безвоздушном пространстве, может быть вычислен по формуле $s=\frac{gt^2}{2}$, где t — время падения, g — ускорение силы тяжести ($g \approx 10$ м/с^2). Задайте формулой зависимость t от s. Найдите t, если $s=4500$ м.

4.49. Площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi R^2$, где R — радиус круга. Найдите зависимость R от S. Вычислите R, если $S=1256$ дм^2, считая $\pi \approx 3{,}14$.

4.50. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{-x}$; в) $y=\sqrt{|x|}$; г) $y=-\sqrt{x}$;
д) $y=2\sqrt{x}$; е) $y=\sqrt{2x}$; ж) $y=\sqrt{x-2}$;
з) $y=\sqrt{4-x}$; и) $y=\sqrt{2x-1}$; к) $y=1+\sqrt{x}$.

4.51. При каком значении a точка M (2; 3) принадлежит графику функции:

а) $y=a\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{ax}$; в) $y=\sqrt{x-a}$; г) $y=a\sqrt{-x}$;
д) $y=\sqrt{a|x|}$?

4.52. Используя свойства функции $y=\sqrt{x}$, найдите значения переменной x, при которых:

а) $\sqrt{x}<2$; б) $\sqrt{x}>3$; в) $\sqrt{x}<5$; г) $\sqrt{x}>7$;
д) $\sqrt{x}\leqslant 1$; е) $\sqrt{x-2}\leqslant 0$; ж) $\sqrt{x}>-1$;
з) $\sqrt{x}\geqslant -3$; и) $\sqrt{x}<-2$; к) $\sqrt{2x-1}<-1$;
л) $\sqrt{3x-1}<3-\sqrt{10}$.

4.53. Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x-2}=2$; в) $\sqrt{x}=6-x$; г) $\sqrt{x-1}=3-x$;
д) $\sqrt{-x}=x+2$; е) $\sqrt{|x|}=3$; ж) $\sqrt{x-2}=x-4$.

Найдите значение выражения **(54—56)**:

4.54. а) $\sqrt{121\cdot 64}$; б) $\sqrt{169\cdot 0{,}36}$;
в) $\sqrt{16\cdot\frac{4}{9}\cdot 0{,}25}$; г) $\sqrt{1{,}44\cdot 0{,}04\cdot 0{,}0001}$.

4.55. а) $\sqrt{27\cdot 12}$; б) $\sqrt{32\cdot 18}$; в) $\sqrt{45\cdot 10\cdot 18}$; г) $\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$.

4.56. а) $\sqrt{77\cdot 24\cdot 33\cdot 14}$; б) $\sqrt{5\cdot 6\cdot 8\cdot 20\cdot 27}$;
в) $\sqrt{21\cdot 65\cdot 39\cdot 35}$; г) $\sqrt{10\cdot 20\cdot 48\cdot 36\cdot 75\cdot 98}$.

4.57. Упростите выражение ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$):
а) $\sqrt{2b\cdot 3a\cdot 8a\cdot 12b}$; б) $\sqrt{12a\cdot 15b\cdot 35a\cdot 28b}$;
в) $\sqrt{30a^7\cdot 45b^3\cdot 75b^5\cdot 98a^3}$; г) $\sqrt{12a^{17}\cdot 21b^3\cdot 24b^5\cdot 42a^3}$.

Вынесите множитель из-под знака корня **(58—61)**:

4.58. а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{8}$; в) $\sqrt{48}$; г) $\sqrt{175}$.

4.59. а) $\sqrt{45}$; б) $\sqrt{72}$; в) $\sqrt{20}$; г) $\sqrt{128}$.

4.60. а) $\sqrt{363}$; б) $\sqrt{162}$; в) $\sqrt{1152}$; г) $\sqrt{432}$.

4.61. а) $\sqrt{12\cdot 15}$; б) $\sqrt{18\cdot 10}$; в) $\sqrt{20\cdot 35\cdot 14}$; г) $\sqrt{28\cdot 56\cdot 10\cdot 35}$.

4.62. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{\frac{81\cdot 25}{16}}$; б) $\sqrt{\frac{36}{49\cdot 121}}$; в) $\sqrt{\frac{9\cdot 16}{25\cdot 49}}$; г) $\sqrt{\frac{121\cdot 256}{25\cdot 100}}$.

4.63. Выполните действия ($a>0$, $b>0$):
а) $\sqrt{\frac{4a^2}{b^6}}$; б) $\sqrt{\frac{169a^6}{25b^{20}}}$; в) $\sqrt{\frac{49a^{18}}{81b^6}}$; г) $\sqrt{\frac{576a^{12}}{225b^{26}}}$.

4.64. Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{\frac{50}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{45}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{50}{81}}$; г) $\sqrt{\frac{567}{100}}$.

Вынесите множитель из-под знака корня ($a\geqslant 0$, $b>0$, $c>0$) **(65—67)**:

4.65. а) $\sqrt{a^3}$; б) $\sqrt{ab^6}$; в) $\sqrt{a^7b}$; г) $\sqrt{8a^2b^7c^9}$.

4.66. а) $\sqrt{\frac{a}{9}}$; б) $\sqrt{\frac{a^2b}{c^4}}$; в) $\sqrt{\frac{16a^6b}{c^9}}$; г) $\sqrt{\frac{50a^8c^7}{81b^5}}$.

4.67. а) $\sqrt{a^{2n}b^{4m}}$; б) $\sqrt{a^{2n+1}}$; в) $\sqrt{a^{4n+3}b^{2m+3}}$; г) $\sqrt{\frac{a^{6n+1}}{b^{4m}}}$.

4.68. Внесите множитель под знак корня:
а) $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$;
б) $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{a}$, $a\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}$, $b\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ($a>0$, $b>0$);

в) $(m-3)\sqrt{\frac{1}{m-3}}$, $(n-2)\sqrt{\frac{1}{2-n}}$, $(n-4)\sqrt{\frac{1}{2n-8}}$, $(5-n)\sqrt{\frac{1}{n-5}}$;

г) $(x-y)\sqrt{a}$, если $x \geqslant y$, $(a-b)\sqrt{m}$, если $a \leqslant b$, $a\sqrt{b}$, $b\sqrt{a}$.

4.69. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^3-b^3+a^2b-ab^2}$, если $a>b>0$;

б) $\sqrt{a^3+a^2-a-1}$, если $a>1$;

в) $a^3\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{2a-1}{a^4}}$, если $a<1$, $a \neq 0$;

г) $\frac{a^2}{2-a}\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{4(1-a)}{a^3}}$, если $a>2$.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ КОРНЕЙ

Упростите выражение **(70—72)**:

4.70. а) $\sqrt{28}-3\sqrt{63}$; б) $\sqrt{50}+\sqrt{98}-\sqrt{200}$;

в) $\sqrt{27}+\sqrt{12}+\sqrt{75}$; г) $\sqrt{20}+2\sqrt{45}-3\sqrt{500}$.

4.71. а) $\sqrt{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$; б) $\sqrt{14}+\sqrt{\frac{2}{7}}+\sqrt{\frac{7}{2}}$;

в) $\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{32}}$; г) $\sqrt{0{,}1}+\sqrt{1000}+\sqrt{10}$.

4.72. а) $8\sqrt{\frac{a}{16}}-3\sqrt{\frac{a}{9}}$;

б) $(\sqrt{16ab}-\sqrt{121ab})-(5\sqrt{9ab}-3\sqrt{36ab})$;

в) $(\sqrt{a^3b}+2\sqrt{a^5b})-(2\sqrt{a^7b}-\sqrt{a^9b})$, где $a>0$, $b>0$;

г) $(\sqrt{a^5b^2}-3\sqrt{a^7b^4})-5\sqrt{a^9b^6}-2\sqrt{a^3b^8}$, где $a>0$, $b>0$.

4.73. Решите уравнение:

а) $3\sqrt{8x}+\sqrt{2x}=1$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{4x}-\frac{1}{3}\sqrt{9x}+\frac{1}{5}\sqrt{25x}=2$;

в) $\sqrt{\frac{x}{4}}-2\sqrt{\frac{x}{9}}=1$; г) $3\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{x}{8}}-4\sqrt{\frac{x}{32}}=1$.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Выполните умножение **(74—76)**:

4.74. а) $(3\sqrt{12}-\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$; б) $(4\sqrt{0{,}02}+\sqrt{8})\sqrt{2}$;

в) $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-5\sqrt{\frac{3}{8}}+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$;

г) $\left(2\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{10}+\sqrt{\frac{125}{2}}\right)\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}$.

4.75. а) $(2+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$; б) $(3+\sqrt{21})(\sqrt{3}-\sqrt{7})$;
в) $(1+\sqrt{15})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$; г) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})$.

4.76. а) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$; б) $(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$;
в) $\sqrt{3+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

4.77. Докажите, что следующие числа являются взаимно обратными:
а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; б) $7+4\sqrt{3}$ и $7-4\sqrt{3}$;
в) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; г) $(\sqrt{9+4\sqrt{5}})^5$ и $(\sqrt{9-4\sqrt{5}})^5$.

4.78. Решите уравнение:
а) $(2+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})=1-x$; б) $(7-2\sqrt{x})(1+\sqrt{x})=3-2x$;
в) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$; г) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$.

Выполните действия **(79—81)**:

4.79. а) $(1+\sqrt{2})^2$, $(2-\sqrt{3})^2$, $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$, $(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2$;
б) $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2$, $(2\sqrt{ab}+\sqrt{a})^2$, $(\sqrt{a^3b}+2\sqrt{ba^5})^2$, $(2\sqrt{a^3}-\sqrt{ab})^2$;
в) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)^2$, $(\sqrt{5}-\sqrt{2}-1)^2$, $(\sqrt{6}+\sqrt{2}-1)^2$, $(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$;
г) $(\sqrt{2}+1)^3$, $(\sqrt{3}-2)^3$, $(\sqrt{a}+1)^3$, $(\sqrt{a}-3)^3$.

4.80. а) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; б) $(\sqrt{3}+1)^3+(\sqrt{3}-1)^3$;
в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$;
г) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$.

4.81. а) $(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})$; б) $(a-2+\sqrt{5})(a+2-\sqrt{5})$;
в) $(\sqrt{7}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{7}-\sqrt{2}+1)$; г) $(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)$;
д) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}}$.

Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата **(82—83)**:

4.82. а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$; г) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

4.83. а) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$; б) $\sqrt{a+1-4\sqrt{a-3}}$;
в) $\sqrt{2+2\sqrt{1-a^2}}$; г) $\sqrt{3a-1+2\sqrt{2a^2-a}}$.

Вычислите **(84—85)**:

4.84. а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;
в) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; г) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

д) $\sqrt{|12\sqrt{3}-21|}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}$;

е) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}-\sqrt{|8\sqrt{2}-18|}-0{,}5\sqrt{32}$.

4.85. а) $(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}})^2$; б) $(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^4$;

в) $(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^6$; г) $(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}})^8$.

4.86. Вычислите значение выражения:

а) x^2-2x-1 при $x=1+\sqrt{3}$; б) x^2-3x-2 при $x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$;

в) x^2-4x-6 при $x=2-\sqrt{11}$; г) x^2-5x+3 при $x=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

Выполните деление **(87—88)**:

4.87. а) $(12\sqrt{45}-6\sqrt{20}):3\sqrt{5}$; б) $(15\sqrt{44}-24\sqrt{99}):3\sqrt{11}$;

в) $(4\sqrt{75}+2\sqrt{12}):2\sqrt{3}$; г) $(\sqrt{28}-\sqrt{252}+2\sqrt{63}):\sqrt{7}$.

4.88. а) $(a-b):(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; б) $(a-b):(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

в) $(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}):(\sqrt{a}+\sqrt{b})$; г) $(a\sqrt{8a}-b\sqrt{27b}):(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})$.

Разложите на множители **(89—92)**:

4.89. а) $\sqrt{21}-\sqrt{7}$; б) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; в) $2+\sqrt{6}$;

г) $7+\sqrt{14}-\sqrt{7}$; д) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{18}$; е) $\sqrt{5}+5-\sqrt{10}$.

4.90. а) $a+2\sqrt{a}$;

б) $a+\sqrt{ab}$, где $a>0$, $b>0$;

в) $\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a+b}$, где $a>b>0$;

г) $\sqrt{ab+ac}-\sqrt{b^2+bc}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

4.91. а) $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$; б) $a\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{ab}-1$;

в) $2+b\sqrt{a}-2\sqrt{ab}-\sqrt{b}$; г) $ab+a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+\sqrt{ab}$.

4.92. а) $x-6\sqrt{x}+5$; б) $a-5\sqrt{a}+6$; в) $a-3\sqrt{a}-4$; г) $b+\sqrt{b}-2$.

Сократите дробь **(93—94)**:

4.93. а) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$; б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$; в) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; г) $\frac{a-6\sqrt{a}+9}{a-9}$.

4.94. а) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$; б) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2+\sqrt{3}}$; в) $\frac{(1-\sqrt{7})^2}{\sqrt{7}-4}$; г) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2}$.

4.95. Решите уравнение:

а) $(x+1)\cdot\sqrt{3}=x+3$; б) $(x-1)\cdot\sqrt{2}=2x-1$;

в) $(2-x\sqrt{6})\cdot\sqrt{2}=2(x-\sqrt{6})$; г) $(x\sqrt{5}-2)\cdot\sqrt{10}=5x-2\sqrt{5}$.

4.96. Упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}$; б) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, где $a<0$, $b<0$;

в) $\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}+\sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a<0$, $b<0$;

г) $\frac{\sqrt{ab}-a}{\sqrt{-a}}$; д) $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$; е) $\frac{a-b}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$.

4.97. Вычислите значение функции:

а) $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)(2x+1)}{\sqrt{2x^2}}$ при $x=1-\sqrt{2}$;

б) $f(x)=\frac{(x+2)(x+4)(4x+1)}{\sqrt{3x^2}}$ при $x=\sqrt{3}-2$.

4.98. Докажите «формулы сложного радикала»:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Упростите сложные радикалы **(99—100)**:

4.99. а) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$; б) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; в) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; г) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$.

4.100. а) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; б) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;

в) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}}$.

Приведите к рациональному виду знаменатель дроби **(101—104)**:

4.101. а) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$, $\frac{-8}{\sqrt{12}}$, $\frac{8}{\sqrt{32}}$, $\frac{6}{\sqrt{18}}$, $\frac{a}{\sqrt{a^3b}}$, $\frac{ab}{\sqrt{a^5b^3}}$;

б) $\frac{a+3}{\sqrt{a^2-9}}$, $\frac{m\sqrt{n}}{n\sqrt{m}}$, $\frac{a-2}{\sqrt{4-a^2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{14}{3+\sqrt{2}}$, $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$;

г) $\frac{m-1}{\sqrt{m}+1}$, $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, $\frac{1}{\sqrt{a+3}-2}$, $\frac{2}{3-\sqrt{2x-1}}$.

4.102. а) $\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; б) $\frac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$;

в) $\frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}$; г) $\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

4.103. а) $\frac{b}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}$; б) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

в) $\frac{\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$; г) $\frac{\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}}$.

4.104. а) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$; б) $\dfrac{23}{\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{7-\sqrt{2}}}$; г) $\dfrac{50}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.

Приведите к рациональному виду числитель дроби **(105—107)**:

4.105. а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; г) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

4.106. а) $\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; в) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$; г) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{5}$.

4.107. а) $\dfrac{2-\sqrt{a+3}}{a-1}$; б) $\dfrac{2-\sqrt{3a-2}}{2-a}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{13-x}}{5x-20}$; г) $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+4}}{3x+3}$.

УПРАЖНЕНИЯ НА ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С КОРНЯМИ

4.108. а) $\dfrac{2}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{2}{5-2\sqrt{6}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}-\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{4}{\sqrt{5}+2}-\dfrac{3\sqrt{2,5}+\sqrt{1,5}}{\sqrt{2}}$;

г) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}+3}+\dfrac{3}{1-\sqrt{7}}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}$.

4.109. а) $\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$;

в) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)\sqrt{2-\sqrt{3}}+\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

г) $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{\sqrt{1,5}+1}\cdot\dfrac{15+3\sqrt{6}}{19\sqrt{3}}$.

Выполните действия **(110—112)**:

4.110. а) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-a}{\sqrt{3}}\right)\cdot\dfrac{2}{3+a\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{a-b}{a-\sqrt{2a}}\cdot\dfrac{a-2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}\right)$.

4.111. а) $\frac{x^2+x\sqrt{2}}{x^2+2}\left(\frac{x}{x-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)$;

б) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{\sqrt{2}}+1\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{\sqrt{2}}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{x^4+2x^2+4}$.

4.112. а) $\frac{a+2\sqrt{3}}{3a-3\sqrt{3}}-\frac{3c-a}{2a-2c}+\frac{a^2-c\sqrt{3}}{a^2-ac+c\sqrt{3}-a\sqrt{3}}$;

б) $\frac{4xy\,((x+\sqrt{2})^2-y^2)}{2-x^2-y^2+2xy}\left(1-\frac{2x}{x+y+\sqrt{2}}\right)$.

Упростите выражение **(113—118)**:

4.113. $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{a-b}{a^2+ab}$.

4.114. $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{4}}-\frac{1}{\sqrt{4a}}\right)$.

4.115. $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$.

4.116. $\dfrac{\frac{2a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{a-b}}{1+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}\cdot\dfrac{2b}{(a+b)\sqrt{a+b}-(a-b)\sqrt{a-b}}$.

4.117. $\dfrac{\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

4.118. $\dfrac{a-b}{a+b+\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}}+\dfrac{2(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2})}$.

Сравните числа **(119—124)**:

4.119. а) $\sqrt{19}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{37}-\sqrt{14}$ и $6-\sqrt{15}$.

4.120. а) $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ и $\frac{2}{1-\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ и $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

4.121. а) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$ и $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

4.122. а) $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{8}}}$ и $1+\sqrt{2}$; б) $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$ и $\sqrt{10}$.

4.123. а) $1+\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\sqrt{6+\sqrt{20}}}$ и $\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

4.124. а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$ и $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{1990}+\sqrt{1992}$ и $2\sqrt{1991}$.

Упростите выражение (125—127):

4.125. $\sqrt{\frac{3b+a^3}{2a}+\sqrt{3ab}}-\sqrt{\frac{3b+a^3}{2a}-\sqrt{3ab}}$, при $a>0$, $b>0$.

4.126. $\frac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$, при $0{,}5<a<3$.

4.127. $\frac{\sqrt{a^2-3a}+\sqrt{a^2-4a+3}}{\sqrt{6-2a}}$.

§ 5. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Формула корней квадратного уравнения.

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ находят по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Выражение b^2-4ac называют дискриминантом квадратного уравнения и обозначают буквой D.

Если $D>0$, то уравнение имеет два корня; если $D=0$, то уравнение имеет один корень; если $D<0$, то уравнение не имеет корней.

В случае когда второй коэффициент квадратного уравнения четен, т. е. $b=2k$, то корни удобнее находить по формуле

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Неполные квадратные уравнения, т. е. такие, в которых $b=0$ или $c=0$, удобнее решать методом разложения на множители левой части уравнения.

2. Теорема Виета.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т. е. если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то

$$x_1+x_2=-p \text{ и } x_1\cdot x_2=q.$$

Верно и обратное утверждение: если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$ и $x_1\cdot x_2=q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Пример 1. Решите уравнение

$$(4x^2+12x+9)^2+20x^2+60x+39=0.$$

Решение. Данное уравнение сводится к квадратному путем замены переменной. Запишем данное уравнение в виде $(2x+3)^4+$

$+5(2x+3)^2-6=0$. Пусть $y=(2x+3)^2$. Решая уравнение y^2+ $+5y-6=0$, находим $y_1=1$, $y_2=-6$ (не подходит, так как $y\geqslant 0$). Из уравнения $(2x+3)^2=1$ получаем $2x+3=1$ или $2x+3=-1$, откуда $x_1=-1$; $x_2=-2$.

Пример 2. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2-7x+$ $+1=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{x_1}{x_2^2}$ и $\frac{x_2}{x_1^2}$.

Решение. По теореме Виета имеем $x_1+x_2=3{,}5$, $x_1\cdot x_2=0{,}5$. Для составления квадратного уравнения с заданными корнями $\frac{x_1}{x_2^2}$ и $\frac{x_2}{x_1^2}$ можно воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета, для чего необходимо найти их сумму и произведение:

$$\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}=\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{(x_1x_2)^2}=$$

$$=\frac{(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)}{(x_1x_2)^2}=\frac{3{,}5\cdot(3{,}5^2-3\cdot 0{,}5)}{(0{,}5)^2}=150{,}5;$$

$$\frac{x_1}{x_2^2}\cdot\frac{x_2}{x_1^2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{0{,}5}=2.$$

Искомое уравнение имеет вид:

$$x^2-150{,}5x+2=0,\ \text{или}\ 2x^2-301x+4=0.$$

Пример 3. При каких значениях b уравнения

$$x^2+(b^2+3b+2)x=0 \ \text{и}\ x^2-2(b+2)x+b^2+5b+6=0$$

равносильны?

Решение. Уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают. Заметим, что $x=0$ является корнем первого уравнения при любом значении параметра b, значит, необходимым условием равносильности уравнений является наличие корня $x=0$ у второго уравнения. Найдем все значения параметра b, при которых $x=0$: $b^2+5b+6=0$, $b=-2$ или $b=-3$. Таким образом, если и существуют значения параметра b, при которых уравнения равносильны, то это могут быть лишь $b=-2$ или $b=-3$ (во всех других случаях $x=0$ является корнем первого уравнения, но не является корнем второго, что противоречит определению равносильности). Проверим теперь каждое из возможных значений параметра: при $b=-2$ оба уравнения принимают вид $x^2=0$, т. е. являются равносильными; при $b=-3$ оба уравнения принимают вид $x^2+2x=0$, т. е. также являются равносильными.

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x+a}{x+1}+\frac{a-3x}{x-3}=2$ имеет одно решение?

Решение. Областью определения уравнения является множество действительных чисел, кроме чисел 3 и -1. На указанном множестве данное уравнение равносильно уравнению, полученному умножением обеих частей на $(x-3)(x+1)$: $(x+a)\times\times(x-3)+(a-3x)(x+1)=2(x+1)(x-3)$. После раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и сокращения на 2 получим уравнение $2x^2+x(1-a)+a-3=0$. Замечая, что сумма коэффициентов в уравнении равна 0, находим $x_1=1$. По теореме Виета $x_2=0{,}5(a-3)$. Таким образом, при любом значении параметра a исходное уравнение имеет решение $x=1$. Для того чтобы уравнение имело одно решение, необходимо и достаточно, чтобы второй полученный корень x_2 не добавлял бы новых решений. Это возможно в двух случаях: либо x_2 не входит в область определения, т. е. $x_2=3$ или $x_2=-1$, либо x_2 совпадает с x_1, т. е. $x_2=1$. Отсюда находим соответствующие значения параметра a: $x_2=3$ при $a=9$, $x_2=-1$ при $a=1$, $x_2=1$ при $a=5$. Итак, искомые значения параметра равны 1; 5; 9.

Упражнения

НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение **(1—8)**:

5.1. а) $\frac{1}{9}x^2-9=0$; б) $4x^2=12{,}25$;

в) $\frac{2}{7}x^2-3{,}5=0$; г) $12{,}25-3x^2=6x^2$;

д) $4-9(2-5x)^2=0$; е) $5(x^2-2)^2-9{,}2=0$.

5.2. а) $3x^2-8x=0$; б) $15x+11x^2=0$; в) $12x=7x^2$;

г) $\frac{x^2}{3}=\frac{5x}{2}$; д) $2(3x-5)^2=9(3x-5)$; е) $(2x-1)^2=2-4x$.

5.3. а) $x^2+a=0$; б) $x^2-2x+1=a$;

в) $a^2x^2-4=0$; г) $a(x^2-6x+9)+4=0$.

5.4. а) $\frac{2x^2-3x}{4}=\frac{x^2+2x}{3}$; б) $\frac{5x-x^2}{2}=\frac{x^2+3x}{5}$;

в) $\frac{(2x-3)^2}{2}=\frac{6-4x}{5}$; г) $\frac{5x-2}{3}=\frac{(4-10x)^2}{2}$.

5.5. а) $\frac{x}{x-5}+\frac{x}{x+5}=2\frac{2}{3}$; б) $\frac{3x-2}{x-3}=\frac{x+2}{x+3}$;

в) $\frac{x-3}{x+3}=\frac{4(x+3)}{x-3}$; г) $\frac{2x+5}{x-2}=\frac{9x-18}{8x+20}$.

5.6. а) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; б) $\frac{1+x}{6}-\frac{6}{1+x}=\frac{4}{x+1}-\frac{x+1}{4}$;

в) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=3\frac{1}{3}$; г) $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{2x+1}=5{,}2$.

5.7. а) $x^2-5|x|=0$; б) $3x^2+4|x|=0$;

в) $2x^2+|x|-3x=0$; г) $4x^2-3|x|+x=0$.

5.8. а) $4x^2+\frac{x}{|x|}=0$; б) $x^2-\frac{4|x|}{x}=0$;

в) $x^2-\frac{3x^2}{|x|}=0$; г) $2x^2+\frac{x^2}{2|x|}=0$.

5.9. Напишите общий вид квадратного уравнения, в котором:
а) один из корней равен нулю;
б) оба корня равны нулю;
в) корни равны по модулю, но противоположны по знаку.

5.10. При каких значениях m ровно один из корней уравнения равен нулю:
а) $3x^2+x+2m-3=0$; б) $x^2-2x+m^2-1=0$;
в) $2x^2-mx+2m^2-3m=0$; г) $x^2+(m+3)x+|m|-3=0$?

5.11. При каких значениях m корни уравнения равны по модулю, но противоположны по знаку:
а) $x^2+(3m-5)x-2=0$;
б) $2x^2-(5m-3)x+1=0$;
в) $3x^2+(m^2-4m)x+m-1=0$;
г) $4x^2+(5|m|-1)x+3m^2+m=0$?

5.12. При каких значениях m оба корня уравнения равны нулю:
а) $3x^2+(m-1)x+1-m^2=0$;
б) $x^2-(3m^2+4m)x+9m^2-16=0$;
в) $2x^2+(3m^2-|m|)x-m^3-3m=0$;
г) $x^2+(16-m^4)x+m^3+8=0$?

5.13. Найдите число, удвоенный квадрат которого равен этому числу, уменьшенному в 3 раза.

5.14. Произведение двух последовательных натуральных чисел в два раза больше меньшего из них. Найдите эти числа.

5.15. Произведение трех последовательных натуральных чисел в три раза больше среднего из них. Найдите эти числа.

5.16. От вершины прямого угла по его сторонам одновременно начинают двигаться две материальные точки, скорости которых равны 5 см/с и 12 см/с. Через какое время расстояние между ними будет равно 52 см?

ПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение методом выделения квадрата двучлена **(17—19)**:

5.17. а) $x^2-6x+8=0$; б) $x^2+10x+9=0$;
в) $x^2-x-2=0$; г) $x^2+3x-40=0$;

5.18. а) $5x^2+3x-2=0$; б) $4x^2-3x-22=0$;
в) $5x^2-4x-12=0$; г) $3x^2+5x-2=0$.

5.19. а) $x^2+px+q=0$; б) $ax^2+bx+c=0$.

Решите уравнение **(20—22)**:

5.20. а) $x^2-x-90=0$; б) $x^2+5x-6=0$;
в) $4x^2-x-3=0$; г) $2x^2-7x+6=0$.

5.21. а) $25x^2+90x+81=0$; б) $36x^2-84x+49=0$;
в) $0{,}25x^2-x+1=0$; г) $\frac{4}{49}x^2+1\frac{5}{7}x+9=0$.

5.22. а) $x^2+5x-8=0$; б) $x^2-13x+4=0$;
в) $9x^2-4x-2=0$; г) $7x^2+18x+5=0$.

5.23. Вычислите с точностью до 0,01 приближенные значения корней уравнения:
а) $x^2-x-7=0$; б) $x^2+7x+3=0$;
в) $3x^2+x-5=0$; г) $2x^2-3x-3=0$.

Решите уравнение **(24—29)**:

5.24. а) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$; б) $x^2+2(1+\sqrt{8})x+8\sqrt{2}=0$;
в) $x^2-3x-5-\sqrt{7}=0$; г) $x^2+4x-\sqrt{3}+1=0$.

5.25. а) $(3x-2)(x-3)=20$;
б) $(x+2)(4x-5)=-3$;
в) $(8x-9)(3x+2)-(2x-3)(8x-2)=33x+20$;
г) $(4x-5)(3x+7)-(x-2)(4x+2)=33x+73$.

5.26. а) $(3x-8)(7x+5)=(3x-8)^2$;
б) $3(5x+3)(4x^2-1)=8(4x^2-1)^2$;
в) $3x-x^2=\frac{(x^2-3x)^2}{2}$;
г) $9((3x-4)^2-(2x-10)^2)=(x+6)^2(5x-14)^2$.

5.27. а) $\frac{(x-1)^2}{5}-\frac{x+4}{6}=\frac{2x-2}{3}$;
б) $\frac{(x+2)(x-5)}{3}-\frac{11x+12}{10}=2-\frac{x-2}{3}$;
в) $\frac{x^2+3x}{5}=\frac{10-x}{2}-\frac{3x^2+8x}{14}$;
г) $\frac{3x^2-14x+11}{14}=\frac{x+9}{2}-\frac{x^2+x+1}{5}$.

5.28. а) $\frac{(3x-4)^2}{5}+\frac{(2x-5)(x-1)}{2}=1+\frac{(x+2)^2}{5}$;
б) $\frac{(x+7)^2}{2}-\frac{x^2+5x}{3}=6+\frac{(5x+11)^2}{4}$;
в) $\frac{(x-3)(x-7)}{2}-6x=\frac{2x+8}{5}-\frac{(5x-3)^2}{2}$;
г) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{(x-3)^2}{8}=\frac{(x+3)^2}{4}-3x$.

5.29. а) $(2x-1)^2(x+5)=(x+1)^2(4x+5)$;
б) $(x+1)(x-2)^3-(x^2-4x-4)(x^2-x)=16$;
в) $(x-5)^3(x-1)-(x-8)^2(x^2-2)=49$;
г) $(x^2+2x-1)(x^2-x-3)-(x^2+10x+1)(x^2-9x-2)=66$.

5.30. Существует ли на окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y+1)^2=7$, точка:
а) с абсциссой, равной 1,5;
б) с ординатой, равной -3?

5.31. Существует ли на эллипсе, заданном уравнением $\frac{1}{4}(x-2)^2+$ $+\frac{1}{9}(y+2)^2=1$, точка:
а) с абсциссой, равной 4,1;
б) с ординатой, равной $-4{,}9$?

Решите уравнение **(32—34)**:

5.32. а) $x^2+5ax+4a^2=0$; б) $x^2-bx-2b^2=0$;
в) $x^2-3ax+2a^2=0$; г) $x^2+5bx-6b^2=0$.

5.33. а) $x^2-(2a-4)x-8a=0$;
б) $x^2+(3b-2)x-6b=0$;
в) $x^2-(3a-2)x+2a^2-a-3=0$;
г) $x^2-4bx+3b^2-4b-4=0$.

5.34. а) $ax^2-(a+1)x+1=0$;
б) $(a+1)x^2-2x+1-a=0$;
в) $abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0$;
г) $abx^2+(a^2-b^2)x+(a-b)^2=0$.

5.35. Дано соотношение:
а) $a^2-3ab-4b^2=0$; б) $21a^2-4ab-b^2=0$;
в) $\left(\frac{a+2b}{a-b}\right)^2-2\left(\frac{a+2b}{a-b}\right)=3$.
Выразите a через b.

5.36. Дано соотношение:
а) $2a^2+4a+2b^2-4b-5(a+1)(b-1)+4=0$;
б) $a^2+2b^2-3ab-7a+10b+12=0$.
Выразите b через a.

5.37. Найдите отношение двух чисел, если отношение произведения этих чисел к сумме их квадратов равно 0,3.

5.38. Найдите отношение двух чисел, если квадрат суммы этих чисел в 3 раза больше неполного квадрата разности этих чисел.

5.39. Найдите отношение двух положительных чисел, если отношение их среднего геометрического к среднему арифметическому равно 0,6.

Решите графически уравнение **(40—41)**:

5.40. а) $x^2-7x-8=0$; б) $x^2+x-12=0$;

в) $2x^2-5x+2=0$; г) $0{,}5x^2+3{,}5x-4=0$.

5.41. а) $x^2+|x|-6=0$; б) $x^2-2|x|-15=0$.

в) $2x^2+|x|-1=0$; г) $2x^2-3|x|-2=0$.

Решите уравнение **(42—47)**:

5.42. а) $x^2+(\sqrt{x})^2-2=0$; б) $x^2+\sqrt{x^2}-2=0$;

в) $x^2-3(\sqrt{x})^2-4=0$; г) $x^2-3\sqrt{x^2}-4=0$.

5.43. а) $x^2-5x-\frac{6|x|}{x}=0$; б) $x^2+\frac{5x^2}{|x|}-6=0$;

в) $\frac{x^3}{|x|}-7x+12=0$; г) $x|x|+7x+12=0$.

5.44. а) $x^2+(\sqrt{x-2})^2-5=0$; б) $x^2-(\sqrt{x+3})^2-8=0$;

в) $x^2-3x+\frac{3{,}5-x}{|x-3{,}5|}=0$; г) $x^2-4x\cdot\frac{|x-\pi|}{x-\pi}+2=0$.

5.45. а) $|x^2+5|=6x$; б) $|x^2+x-3|=x$;

в) $|x^2-x-8|=-x$; г) $|x^2+2x+3|=3x+45$.

5.46. а) $|x+3|=|2x^2+x-5|$;

б) $|3x^2-3x+5|=|2x^2+6x-3|$;

в) $|3x^2-6x-1|=2|3-x|$;

г) $3|2x^2+4x+1|=|x^2+5x+1|$.

5.47. а) $|x-2|x^2=10-5x$;

б) $(x^2-5x+6)^2+3|x-3|=0$;

в) $(7x^2-3x-4)^2+|7x+4|(x^2-1)^2=0$;

г) $6x-9=x^2(|x-3|+1)$.

5.48. Найдите все корни уравнения $x^2+x+\sqrt{6}-6=0$, удовлетворяющие условию $x<\sqrt{2}$.

5.49. Сравните меньший корень уравнения $x^2-14x+28=0$ с бóльшим корнем уравнения $x^2-2x-1=0$.

5.50. Сравните больший корень уравнения $x^2-(6-\sqrt{2})x+8-2\sqrt{2}=0$ с числом $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\frac{1}{2}(9-\sqrt{21})$.

5.51. Сравните меньший корень уравнения $x^2-3(\sqrt{14}+\sqrt{5})x+2(\sqrt{14}+\sqrt{5})^2=0$ с числом $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}-\frac{\sqrt{15-6\sqrt{6}}}{2\sqrt{6}-5}$.

5.52. Найдите все корни уравнения $2|x^2+2x-5|=x-1$, удовлетворяющие условию $x<\sqrt{2}$.

5.53. Найдите все корни уравнения $|x^2-x-3|+x+1=0$, удовлетворяющие условию $x>-\frac{\sqrt{14}}{3}$.

Решите уравнение (**54—60**):

5.54. а) $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{2x-1}{1-x}=3$; б) $\frac{x^2-2x+1}{x-3}+\frac{x+1}{3-x}=4$;

в) $\frac{2}{x-4}+\frac{4}{x^2-4x}=0{,}625$; г) $\frac{36}{x^2-12x}-\frac{3}{x-12}=3$.

5.55. а) $\frac{2x-5}{x+5}+\frac{3x+4}{x+2}=1$; б) $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{2x-3}{4x+3}=-7\frac{1}{11}$;

в) $\frac{4-3x}{x+1}+\frac{x+1}{4-3x}=\frac{50}{7}$; г) $\frac{2x-5}{3x+1}+\frac{21x+7}{2x-5}=8$.

5.56. а) $\frac{7}{x+1}-\frac{x+4}{2-2x}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$;

б) $\frac{x+0{,}5}{9x+3}+\frac{8x^2+3}{9x^2-1}=\frac{x+2}{3x-1}$;

в) $\frac{x+3}{4x^2-9}-\frac{3-x}{4x^2+12x+9}=\frac{2}{2x-3}$;

г) $\frac{1-2x}{6x^2+3x}+\frac{2x+1}{14x^2-7x}=\frac{8}{12x^2-3}$.

5.57. а) $\frac{30}{x^2-1}+\frac{7-18x}{x^3+1}=\frac{13}{x^2-x+1}$; б) $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{x^2+x+1}=\frac{2x+1}{1-x^3}$;

в) $\frac{65}{1-x^3}+\frac{17x-10}{x^2+x+1}=\frac{25}{x-1}$; г) $\frac{x^2+x+16}{x^2-x+1}-\frac{36-x}{x^3+1}=\frac{x-6}{x+1}$.

5.58. а) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6}+\frac{3}{x^2+9x+18}=\frac{1}{x+3}$;

в) $\frac{25}{4x^2+1}-\frac{8x+29}{16x^4-1}=\frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$;

г) $\frac{x-1}{x^3+3x^2+x+3}+\frac{1}{x^4-1}=\frac{x+2}{x^3+3x^2-x-3}$.

5.59. а) $\frac{6}{x^3-7x^2-7x+1}-\frac{8}{x^3-8x^2+x}=\frac{1}{x^2+x}$;

б) $\frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2+4x-8}+\frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2+4x+8}=\frac{2x+2}{x^2-4}$;

в) $\frac{38}{x^4-x^2+20x-100}+\frac{x+10}{x^2-x+10}=\frac{x+10}{x^2+x-10}$;

г) $\frac{4x}{8x^3+1}+\frac{1}{16x^4-4x^2+4x-1}=\frac{2}{4x^2+2x-1}$.

5.60. а) $\frac{x^2+(3-a)x-3a}{x^2-x-12}=0$; б) $\frac{x^2-(a+1)x+2a-2}{3x^2-7x+2}=0$;

в) $\frac{x^2-(3b-1)x+2b^2-2b}{x^2-7x+6}=0$; г) $\frac{x^2+(1-4b)x+3b^2-b}{2x^2+3x-5}=0$.

Решите уравнение **(61—69)**:

5.61. а) $x^2-7|x|+6=0$; б) $x^2-4|x|-21=0$;
в) $(x-2)^2-8|x-2|+15=0$; г) $(x+3)^2-|x+3|-30=0$.

5.62. а) $x^2+2x+2|x+1|=7$; б) $x^2-2x-5|x-1|+5=0$;
в) $4x^2-12x-5|2x-3|+15=0$; г) $9x^2-24x-|3x-4|=4$.

5.63. а) $x^2-|x-5|=5$; б) $x^2+|x+4|=4$;
в) $x^2+4x+|x+3|+3=0$; г) $x^2+17=9x+4|x-3|$.

5.64. а) $x=5+4\sqrt{x}$; б) $x-12\sqrt{x}+35=0$;
в) $2x-1=3\sqrt{2x-1}$; г) $3x-5-2\sqrt{3x-5}=0$.

5.65. а) $x-3+4\sqrt{x-3}=12$; б) $x+2-13\sqrt{x+2}=-42$;
в) $x+17=10\sqrt{x-4}$; г) $x=32+2\sqrt{x+3}$.

5.66. а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4-8x^2-9=0$;
в) $9x^4+23x^2-12=0$; г) $16x^4-409x^2+225=0$.

5.67. а) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$;
б) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0$;
в) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$;
г) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$.

5.68. а) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0$; б) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0$;
в) $4x^4-(b+36)x^2+9b=0$; г) $9x^4-(b-18)x^2-2b=0$.

5.69. а) $\dfrac{x-2}{x^3}=2x-x^2$; б) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2}=2x-6$;
в) $\dfrac{8x-4x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^3-4x}{x+1}$; г) $\dfrac{x^2-x-2}{x-3}=\dfrac{2x-4}{x^2-3x}$.

5.70. Решите уравнение $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, где $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$.

5.71. Решите уравнение $f(x)=-f(-|x|)$, где:
а) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

5.72. Найдите сумму квадратов корней уравнения:
а) $x^2+2|x|-1=0$; б) $x^2-4|x|+1=0$.

Решите уравнение **(73—74)**:

5.73. а) $(x+1)^2(x^2+2x)=12$;
б) $(x-2)^2(x^2-4x)+3=0$;
в) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$;
г) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)=28$.

5.74. а) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$; б) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2}-\dfrac{12-42x}{x^2+4x}=7$;
в) $\left(\dfrac{4x-5}{3x+2}\right)^2+\left(\dfrac{3x+2}{5-4x}\right)^2=4{,}25$; г) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}$.

Решите устно уравнение (**75—79**):

5.75. а) $x^2-6x+8=0$; б) $x^2-5x-6=0$;
в) $x^2+2x-24=0$; г) $x^2+9x+14=0$.

5.76. а) $3x^2-8x+5=0$; б) $2x^2+7x+5=0$;
в) $463x^2-102x-361=0$; г) $67x^2-105x-172=0$.

5.77. а) $x^2-7ax+12a^2=0$; б) $x^2+5bx+6b^2=0$;
в) $7x^2-4ax-3a^2=0$; г) $7x^2+13bx+6b^2=0$.

5.78. а) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$; б) $x^2+(\sqrt{3}-2)x-2\sqrt{3}=0$;
в) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{6})x+2\sqrt{3}=0$; г) $x^2-(\sqrt{5}-\sqrt{15})x-5\sqrt{3}=0$.

5.79. а) $2x^2-5x-7=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)-7$;

б) $3x^2+7x-2=3\cdot\left(-\frac{16}{3}\right)^2+7\cdot\left(-\frac{16}{3}\right)-2$;

в) $4x^2-3x+9=4\cdot(3{,}7)^2-3\cdot(3{,}7-3)$;
г) $5x^2+10x+3=5\cdot4{,}2\cdot(4{,}2-2)+3$.

Составьте квадратное уравнение с заданными корнями (**80—82**):

5.80. а) -7 и -2; б) 8 и -3; в) $1\frac{1}{3}$ и 2; г) $-3{,}4$ и 6.

5.81. а) $\frac{4}{7}$ и $\frac{4}{7}$; б) $-2\frac{2}{3}$ и $-2\frac{2}{3}$; в) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$; г) $-\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

5.82. а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; б) $3-\sqrt{5}$ и $3+\sqrt{5}$; в) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{2}$; г) $2-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$.

5.83. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известно, что один из корней уравнения равен:
а) $-\sqrt{6}$; б) $\sqrt{7}$; в) $2-\sqrt{5}$; г) $3+\sqrt{3}$.

5.84. Найдите пары чисел $(m;\ n)$, удовлетворяющие условиям:
а) $m+n=4$ и $mn=4$; б) $m+n=-5$ и $mn=6$;
в) $m+n=2$ и $mn=-48$; г) $m+n=-3$ и $mn=-18$.

✓ **5.85.** Не вычисляя корней уравнения $3x^2+8x-1=0$, найдите:

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1x_2^3+x_2x_1^3$; в) $\frac{x_1}{x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2}$; г) $x_1^4+x_2^4$.

✓ **5.86.** Не вычисляя корней уравнения $2x^2-5x-4=0$, найдите:

а) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$; б) $x_1x_2^4+x_2x_1^4$; в) $\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}$; г) $x_1^5+x_2^5$.

✓ **5.87.** Не вычисляя корней уравнения $2x^2-5x+1=0$, найдите разность квадратов его корней.

5.88. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2-7x-3=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:
а) x_1-2 и x_2-2; б) $2x_1+3$ и $2x_2+3$;
в) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$; г) $x_1+\frac{1}{x_2}$ и $x_2+\frac{1}{x_1}$.

5.89. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $4x^2-6x-1=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:
а) $x_1x_2^2$ и $x_2x_1^2$; б) $\frac{1}{x_1^2}$ и $\frac{1}{x_2^2}$;
в) $\frac{x_1}{x_2}+1$ и $\frac{x_2}{x_1}+1$; г) $\frac{2}{x_1^3}-1$ и $\frac{2}{x_2^3}-1$.

5.90. При каких значениях k произведение корней квадратного уравнения $x^2+3x+(k^2-7k+12)=0$ равно нулю?

5.91. При каких значениях k сумма корней квадратного уравнения $x^2+(k^2+4k-5)x-k=0$ равна нулю?

5.92. В уравнении $x^2-4x+a=0$ сумма квадратов корней равна 16. Найдите a.

5.93. В уравнении $x^2-2x+a=0$ квадрат разности корней равен 16. Найдите a.

5.94. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов его корней?

5.95. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-m)x-m-3=0$ наименьшая?

5.96. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-1)x+m^2-1{,}5=0$ наибольшая?

5.97. Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2-3|x|+1=0$.

5.98. При каких значениях p и q корни уравнения $x^2+px+q=0$ равны $2p$ и $\frac{q}{2}$?

5.99. При каких значениях параметра a один из корней квадратного уравнения $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ в два раза больше другого?

5.100. Известно, что корни уравнения $x^2-5x+a=0$ на 1 меньше корней уравнения $x^2-7x+3a-6=0$. Найдите a и корни каждого из уравнений.

5.101. Известно, что корни уравнения $x^2-13x+b=0$ равны соответственно квадратам корней уравнения $x^2+ax+6=0$. Найдите a и b и корни каждого из уравнений.

5.102. При каких значениях параметра c уравнение $5x^2-4x+c=0$:
а) имеет действительные различные корни;
б) имеет один корень;
в) не имеет действительных корней;
г) имеет хотя бы один общий корень с уравнением

$$x^2+13x-30=0?$$

Здесь и далее фраза «квадратное уравнение имеет один корень» означает наличие у уравнения корня двойной кратности.

5.103. При каких значениях параметра b уравнение $x^2+bx+4=0$:
а) имеет один из корней, равный 3;
б) имеет действительные различные корни;
в) имеет один корень;
г) не имеет действительных корней?

5.104. При каких значениях параметра b корни уравнения $4x^2+(3b^2-5|b|+2)x-3=0$ равны по модулю?

5.105. Найдите наибольшее целое значение k, при котором уравнение $x^2+x-k=0$ не имеет действительных корней.

5.106. Найдите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $x^2-2(a+2)x+12+a^2=0$ имеет два различных действительных корня.

5.107. При каком значении a уравнение

$$ax^2-(a+1)x+2a-1=0$$

имеет один корень?

5.108. При каком значении a уравнение

$$(a+2)x^2+2(a+2)x+2=0$$

имеет один корень?

5.109. При каких значениях a уравнение

$$(a^2-6a+8)x^2+(a^2-4)x+(10-3a-a^2)=0$$

имеет более двух корней?

5.110. При каких значениях a уравнение $2x^2+x-a=0$ имеет хотя бы один общий корень с уравнением $2x^2-7x+6=0$?

5.111. При каких значениях a уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень?

5.112. При каких значениях a уравнения

$$x^2+2(a-3)x+(a^2-7a+12)=0 \text{ и } x^2+(a^2-5a+6)x=0$$

равносильны?

5.113. Докажите, что корни уравнения $x^2+px+q=0$, где p и q — нечетные числа, иррациональны.

5.114. При каком соотношении между a, b и c уравнение

$0{,}75x^2+(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$ имеет один корень? Может ли данное уравнение иметь два действительных различных корня?

√ **5.115.** При каком значении параметра a уравнение

$$(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$$

имеет три корня?

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

5.116. Найдите двузначное число, если цифра его десятков на 2 больше цифры единиц, а произведение числа и суммы его цифр равно 900.

5.117. Одна из цифр двузначного числа на 3 меньше другой, а сумма квадратов этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равна 1877. Найдите это число.

5.118. В однокруговом шахматном турнире было сыграно 78 партий. Сколько человек участвовало в соревновании?

5.119. В период военных учений в системе обороны дивизии было создано несколько командных пунктов, причем каждый из них имел линию связи с любым другим из числа оставшихся. Сколько командных пунктов организовано, если количество линий связи равно 45?

5.120. Население города за 2 года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения этого города.

5.121. Производственное объединение получило задание увеличить вдвое объем выпускаемой продукции в течение двух лет. Каким должен быть ежегодный прирост продукции (в процентах), если он планируется одинаковым для каждого года?

5.122. С аэродрома вылетели одновременно два самолета: один — на запад, другой — на юг. Через два часа расстояние между ними было 2000 км. Найдите скорости самолетов, если скорость одного составляла 75% скорости другого.

5.123. Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера 20 км/ч.

5.124. Расстояние между станциями A и B равно 120 км. В полночь из A в B отправляется поезд. В 3 ч той же ночью из A в B отправляется другой поезд, проходящий в час на 10 км больше первого. Второй поезд прибывает в B на 2 ч позже первого. В котором часу второй поезд прибыл в B?

5.125. Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, выходят одновременно навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый пешеход не задержался на 1 ч на расстоянии 9 км от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на середине пути. После остановки первый пешеход увеличил свою скорость на 1 км/ч, и они встретились на расстоянии 4 км от места его остановки. Найдите скорость второго пешехода.

5.126. Экскаватор роет котлованы емкостью по 20 $м^3$. После того как был вырыт первый котлован, производительность экскаватора уменьшилась на 1 $м^3$/ч. Известно, что через 6,5 ч после начала работы было вырыто полтора котлована. Найдите первоначальную производительность экскаватора.

5.127. Два двигателя начали работу одновременно. Первый из них, прекратив работу на 2 ч позже второго, израсходовал 300 г топлива. Второй двигатель израсходовал 192 г топлива. Сколько топлива в течение одного часа расходует первый двигатель, если известно, что эта его характеристика на 6 г превышает соответствующую характеристику второго двигателя?

5.128. Бак емкостью 2400 $м^3$ наполняется топливом. При опорожнении этого бака производительность насоса на 10 $м^3$/мин выше, чем производительность насоса при заполнении. В результате время опорожнения бака на 8 мин меньше времени заполнения. Определите производительность насоса при заполнении бака.

5.129. В колхозе два поля засеяли пшеницей: с первого поля собрали 1080 ц зерна, а со второго поля — 750 ц. Площадь первого поля на 10 га больше площади второго. Если бы с 1 га первого поля собрали столько же пшеницы, сколько собрали с 1 га второго поля, а с 1 га второго поля собрали бы столько же, сколько собрали с 1 га первого поля, то с обоих полей собрали бы одинаковое количество зерна. Сколько центнеров зерна собрали с 1 га каждого поля?

5.130. Первый рабочий изготовил 60 деталей на 3 ч быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за 1 ч 30 деталей?

5.131. Баржа была разгружена с помощью двух подъемных кранов в течение 15 ч, причем первый кран приступил к работе на 7 ч позже второго. Известно, что первый кран, работая один, может разгрузить баржу на 5 ч быстрее, чем второй кран, работающий отдельно. За сколько времени может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно?

5.132. Имеется два одинаковых бака. При совместной работе двух насосов один бак наполняется водой за 3 ч 36 мин. За сколько времени наполнится каждый бак, если к нему подведен только один насос и с помощью второго насоса бак наполняется на 3 ч быстрее, чем с помощью первого?

5.133. Два тракториста могут вспахать зябь на 18 ч быстрее, чем один первый тракторист, и на 32 ч быстрее, чем один второй. За сколько часов может вспахать зябь каждый тракторист, работая один?

5.134. В сплав магния и алюминия, содержащий 22 кг алюминия, добавили 15 кг магния, после чего содержание магния в сплаве повысилось на 33%. Сколько весил сплав первоначально?

5.135. Имелось два слитка меди. Процент содержания меди в первом слитке был на 40 меньше, чем процент содержания меди во втором слитке. После того как оба слитка сплавили, получили слиток, содержащий 36% меди. Найдите процентное содержание меди в первом и во втором слитках, если в первом слитке было 6 кг меди, а во втором — 12 кг.

5.136. После смешения двух растворов, один из которых содержал 48 г, а другой 20 г безводного йодистого калия, получили 200 г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго.

5.137. В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили, а сосуд долили водой. Затем отлили столько же литров смеси и сосуд опять долили водой. После этого в сосуде оказалось чистого спирта втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

5.138. Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются через полчаса. Продолжая движение, первый прибывает в B на 11 мин раньше, чем второй в A. За какое время преодолел расстояние AB каждый пешеход?

5.139. Две точки движутся по двум окружностям, радиусы которых относятся как $1:6$. Найдите скорость движения каждой точки, если за 10 с точка, движущаяся по большей окружности, прошла на 2 м больше и совершила при этом в 5 раз меньше оборотов.

5.140. По окружности движутся два тела: первое тело проходит круг на 2 с быстрее второго. Если тела движутся в одном направлении, то они встречаются через каждые 60 с. Какую часть окружности проходит каждое тело за 1 с?

5.141. Придумайте задачу, решение которой приводит к уравнению:

а) $x(x-3)=180$; б) $\frac{42}{17-x}-\frac{40}{17+x}=1$;

в) $\frac{10}{10-x}+\frac{20}{x+50}=1$; г) $\frac{12}{x}+\frac{5}{x+1}=\frac{30}{x+2}-1$.

Решите эту задачу.

§ 6. НЕРАВЕНСТВА

1. Числовые неравенства и их свойства.

Число a больше числа b, если разность $a-b$ — положительное число. Число a меньше числа b, если разность $a-b$ — отрицательное число.

Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$ (свойство транзитивности отношения неравенства).

Если $a>b$ и $c \in \boldsymbol{R}$, то $a+c>b+c$.

Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$.

Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$.

Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$.

Если $a>b>0$ и $n \in \boldsymbol{N}$, то $a^n>b^n$ (в случае нечетного n условие $b>0$ избыточно).

Если $a^n>b^n$, $a>0$, $b>0$ и $n \in \boldsymbol{N}$, то $a>b$ (в случае нечетного n условия $a>0$, $b>0$ избыточны).

2. Неравенства с одной переменной, их системы и совокупности.

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Термин «решить неравенство» означает найти все его решения (или доказать, что их нет).

Неравенства называются равносильными, если множества их решений совпадают (неравенства, не имеющие решений, также равносильны).

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему, если ставится задача найти все числа, каждое из которых является решением каждого из указанных неравенств.

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность, если ставится задача найти все числа, каждое из которых является решением хотя бы одного из заданных неравенств.

Пример 1. Известно, что $2a+3b=5$ и $|b|<9$. Оцените значение a.

Решение. Из условия имеем $a=0{,}5(5-3b)$. Неравенство $|b|<9$ равносильно двойному неравенству $-9<b<9$. Умножая все части двойного неравенства на -3, получаем $-27<-3b<27$. Прибавляя ко всем частям полученного неравенства 5, имеем $-22<5-3b<32$. Наконец, умножая на 0,5 все части последнего неравенства, получаем оценку значения a: $-11<a<16$.

Пример 2. Докажите, что $(a+1)(a+2)(a+3)(a+6)>96a^2$, где $a>0$.

Доказательство. Рассмотрение разности обеих частей неравенства и сравнение ее с нулем, т. е. попытка доказательства неравенства по определению, в данном случае затруднительна.

Воспользуемся неравенством Коши между средним геометрическим и средним арифметическим двух положительных чисел: $a+1\geqslant 2\sqrt{a}$, $a+2\geqslant 2\sqrt{2a}$, $a+3\geqslant 2\sqrt{3a}$, $a+6\geqslant 2\sqrt{6a}$. Почленно перемножим полученные неравенства (это возможно, так как обе части каждого из них положительны): $(a+1)(a+2)(a+3)\times\times(a+6)\geqslant 96a^2$. Заметим, что равенство здесь возможно лишь в случае, когда каждое из четырех перемножаемых неравенств обращается в равенство, но это означает, что $a=1$, $a=2$, $a=3$ и $a=6$ одновременно, чего быть не может. Значит, $(a+1)(a+2)\times\times(a+3)(a+6)>96a^2$.

Пример 3. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3(x+1)+3{,}5(x+3)<5x-0{,}25(2-x), \\ |x|>a. \end{cases}$$

Решение. Умножая обе части первого неравенства на 4, раскрывая скобки и перенося все слагаемые, содержащие переменную, в левую часть, а все константы — в правую часть неравенства, получим $5x<-56$, откуда $x<-11{,}2$.

Решая второе неравенство, рассмотрим три случая. Если $a<0$, то любое действительное число x является решением неравенства, а значит, решение системы совпадает с решением первого неравенства. Если $a=0$, то решением неравенства $|x|>0$ является любое действительное число, отличное от нуля, а значит, и в этом случае решение системы совпадает с решением первого неравенства, так как $0\notin(-\infty;\ -11{,}2)$. Если же $a>0$, то решением неравенства $|x|>a$ является совокупность $\left[\begin{array}{l} x<-a, \\ x>a, \end{array}\right.$ и для отыскания решений системы необходимо сравнивать a с числом $-11{,}2$. Пересечением множеств $(-\infty;\ -11{,}2)$ и $(-\infty;\ -a)\cup(a;\ +\infty)$ является интервал $(-\infty;\ -11{,}2)$, если $0<a\leqslant 11{,}2$, и интервал $(-\infty;\ -a)$, если $a>11{,}2$.

Ответ: $(-\infty;\ -11{,}2)$ при $a\leqslant 11{,}2$; $(-\infty;\ -a)$ при $a>11{,}2$.

Упражнения

ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

6.1. Сравните числа a и b, если известно, что:

а) $a=b-0{,}2$; б) $b+3=a+2\sqrt{2}$;
в) $a-3=b-c$, где $c<3$; г) $a+2=b+c$, где $c\geqslant 2$;
д) $a+1=2b$, где $b>1$; е) $b+a=1+b^2$.

6.2. Сравните числа:

а) $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{9}$; б) $\frac{13}{12}$ и $\frac{12}{11}$;

в) $323 \cdot 325$ и 324^2; г) 74^2-27^2 и 73^2-26^2;
д) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{22}-\sqrt{10}$; е) $\sqrt{38}+\sqrt{20}$ и $\sqrt{37}+\sqrt{21}$.

6.3. Сравните выражения:
а) $(a-1)(a+2)$ и $(a+4)(a-3)$; б) $(a-2)^2$ и $4(1-a)$;
в) a^2+25 и $10a$; г) $(b+3)^2$ и $(b+2)(b+4)$;
д) b^2+5 и $2b+3$; е) $1-a$ и $\frac{1}{a}-1$ $(a>0)$;
ж) c^4+1 и $2c|c|$.

Докажите неравенство **(4—9)**:

6.4. а) $a^2+9b^2 \geqslant 6ab$; б) $\frac{(a+b)^2}{2} \leqslant a^2+b^2$;
в) $2a^2+b^2+c^2 \geqslant 2a(b+c)$; г) $a^2+b^2 \geqslant 2(a+b-1)$.

6.5. а) $(a^2-b^2)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$;
б) $(a^3-b^3)(a-b) \geqslant 3ab(a-b)^2$;
в) $(a^2-b^2)(a^4-b^4) \leqslant (a^3-b^3)^2$;
г) $(ab^2+a^3)(a-b) \geqslant (a^2b+b^3)(a-b)$.

6.6. а) $a^2-ab+b^2 \geqslant 0$; б) $a^2+6ab+10b^2 \geqslant 0$;
в) $a^2+3>2a$; г) $(b+1)(3-b)<5$.

6.7. а) $\frac{a}{a^2+a+1} \leqslant \frac{1}{3}$; б) $\frac{a}{a^2-4a+9} \leqslant \frac{1}{2}$;
в) $a^2+\frac{1}{a^2} \geqslant a+\frac{1}{a}$; г) $\frac{a^4+16}{a^2+4} \geqslant 2a$.

6.8. а) $9a^2-30|a|+25 \geqslant 0$; б) $b^2+25 \geqslant 10|b|$;
в) $a^2-4a+5 \geqslant 2|a-2|$; г) $b^2-2b+10 \geqslant 6|b-1|$.

6.9. а) $a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3$; б) $a^4+b^4+ab(a^2+b^2) \geqslant 0$;
в) $a^6+b^6 \geqslant a^4b^2+a^2b^4$; г) $a^6+b^6 \geqslant a^5b+ab^5$.

6.10. Докажите, что если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то:
а) $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$; б) $(a+b)^3 \leqslant 4(a^3+b^3)$;
в) $a^5+b^5 \geqslant a^4b+ab^4$; г) $a^5+b^5 \geqslant a^3b^2+a^2b^3$.

6.11. Докажите, что если $a \geqslant b$, то:
а) $a^3-b^3 \geqslant a^2b-ab^2$; б) $a^3-b^3 \geqslant 3ab(a-b)$;
в) $a^3-b^3 \geqslant ab^2-a^2b$; г) $a^5-b^5 \geqslant a^4b-ab^4$.

6.12. Докажите, что при любых a и b имеет место неравенство:
а) $a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4 \geqslant 0$;
б) $a^4-4a^3b+8a^2b^2-16ab^3+16b^4 \geqslant 0$.

6.13. Докажите, что для любых a, b, c и d имеют место неравенства:
а) $(a^2-b^2)(c^2-d^2) \leqslant (ac-bd)^2$
б) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$,
причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $ad=bc$.

6.14. Докажите, что для любых a и b таких, что $ab \geqslant 0$, имеет место неравенство $(a^2-b^2)^2 \geqslant (a-b)^4$.

6.15. Докажите, что если $a<b$, то $a<\frac{a+b}{2}<b$.

6.16. Докажите, что если $a<b<c$, то $a<\frac{a+b+c}{3}<c$.

6.17. Известно, что $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$.

Какой знак имеют выражения: ab, ac, cd, $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{d}{c}$, abc, bcd, $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{d}$, $\frac{c}{ad}$, $\frac{b}{cd}$, $abcd$, $\frac{ac}{bd}$, $\frac{abd}{c}$?

6.18. Какой знак имеет произведение ab, частное $\frac{a}{b}$, если известно, что:

а) a и b — числа одного знака;
б) a и b — числа разных знаков?

6.19. Положительными или отрицательными являются числа a и b, если известно, что:

а) $ab>0$; б) $\frac{a}{b}>0$; в) $ab<0$; г) $\frac{a}{b}<0$;

д) $a^2b>0$; е) $a^2b<0$; ж) $\frac{a}{b^2}<0$?

6.20. Известно, что $a>2$. Какой знак имеет выражение:

а) $3a-6$; б) $10-5a$; в) $2a-2$; г) $(a-2)(1-a)$;

д) $\frac{a-2}{a-1}$; е) $(a-3)^2(a-1)$; ж) $\frac{-5}{2-a}$; з) $\frac{(a-1)(2-a)}{5+a}$?

6.21. Известно, что $a<3$. Какой знак имеет выражение:

а) $2a-6$; б) $12-4a$; в) $2a-8$; г) $(a-5)(a-3)$;

д) $\frac{a-4}{3-a}$; е) $(a-1)^2(a-2)$; ж) $\frac{2}{3-a}$; з) $\frac{a-1}{(a-2)(3-a)}$?

6.22. Какой знак имеет выражение $(a-1)(a-4)$, если известно, что:

а) $a<1$; б) $a>4$; в) $1<a<4$; г) $a>5$?

6.23. Докажите, что если $a>1$ и $b>1$, то $ab+1>a+b$.

6.24. Докажите, что если $a>b$ и $b<2$, то $b(a+2)<b^2+2a$.

6.25. Докажите, что если $a>b>1$, то

$$a^2b+b^2+a>ab^2+a^2+b.$$

6.26. Докажите, что если $a<b<2$, то

$$a^2b+2b^2+4a<ab^2+2a^2+4b.$$

6.27. Докажите, что если $1<a<b<2$, то

$$a^2b-ab^2-a^2-ab+2b^2+2a-2b>0.$$

6.28. Докажите, что если $a \geqslant b \geqslant c$, то

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \geqslant 0.$$

6.29. Докажите, что:

а) если $a>2$, $b>3$, то $3a+5b>21$;

б) если $a>5$, $b<2$, то $2a-3b>4$;

в) если $a>5b$, $b>2c$, то $a>10c$;

г) если $a<2b+3c$, $b<5m+1$, $c<4m-2$, то $a<22m-4$.

6.30. Верно ли, что:

а) если $a>3$, $b>5$, то $ab>15$;

б) если $a<2$, $b<3$, то $ab<6$;

в) если $a>3$, то $a^2>9$;

г) если $a<2$, то $a^2<4$?

6.31. Верно ли, что:

а) если $a>3$, то $|a|>3$?

б) если $a<4$, то $|a|<4$;

в) если $a<-2$, то $|a|>2$;

г) если $-5<a<5$, то $|a|<5$?

6.32. Докажите, что если $|a|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, то $-\varepsilon<a<\varepsilon$.

6.33. Докажите, что если $|a|>M$ $(M>0)$, то $a<-M$ или $a>M$.

6.34. Верно ли, что:

а) если $a>b$, то $\frac{a}{b}>1$;

б) если $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, то $ad>bc$;

в) если $\frac{a}{b}>1$ и $a>0$, то $a>b$;

г) если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$?

6.35. Верно ли, что:

а) если $a>2$, то $\frac{6}{a}<3$;

б) если $a<2$, то $\frac{6}{a}>3$;

в) если $\frac{2}{a-3}>1$, то $3<a<5$;

г) если $2<a<3$, то $\frac{1}{a-2}>1$?

6.36. Верно ли, что:

а) если $a^2b\geqslant 0$, то $b\geqslant 0$;

б) если $\frac{a^2}{b}\leqslant 0$, то $b<0$;

в) если $a^2b<0$, то $b<0$;

г) если $\frac{a}{b^2}>0$, то $a>0$?

6.37. Сравните a и b, если известно, что:

а) $a<c$, $c<b$; б) $a>c$, $c\geqslant b$;

в) $a\leqslant c$, $c<b$; г) $a\geqslant c$, $c\geqslant b$;

д) $a>m=n\geqslant c>b$; е) $a\leqslant m\leqslant n=p\leqslant b$.

6.38. Сравните a и b, если известно, что:

а) $a > m$, $m > b+2$; б) $a \geqslant m$, $m > b+1$;

в) $a \geqslant m$, $m > b+c^2$; г) $a \geqslant m$, $m \geqslant b+|c|$.

6.39. Известно, что $a > b+3$, $b+1 > 7$. Докажите, что $a > 9$.

6.40. Сравните a и b, если известно, что:

а) $a-2 < c < b-3$; б) $2a+5 < c+2$ и $c-3 < 2(b-1)$;

в) $a > 1+m^2$, $b < 2m$; г) $a \leqslant 6n$, $b \geqslant n^2+9$.

6.41. Докажите, что если $a+c > b$ и $a-c < b$, то $c > 0$.

6.42. Сравните a и b, если известно, что:

а) $b-a < c$, $a-b > c$; б) $a+c > b+1$, $c < 1$.

6.43. Известно, что $2 < a < 3$. Оцените значение выражения:

а) $3a$; б) $-a$; в) $2a-1$; г) $3-4a$.

6.44. Известно, что $1 < a < 2$. Оцените значение выражения:

а) a^2+1; б) $a^2-6a+10$; в) $\frac{1}{3a+4}$; г) $\frac{18}{2a^2+1}$.

6.45. Известно, что $c-1 < a < b+2$, $2b-1 < 5$, $3c+2 > 11$. Оцените значение выражения:

а) $3a$; б) $\frac{a}{2}$; в) $2a+3$; г) $1-2a$.

6.46. Оцените значение a, если известно, что:

а) $a-b^2=1$; б) $a+|b| < 3$; в) $a+|b|=2$; г) $a-b^2 > 5$.

6.47. Оцените значение a, если известно, что:

а) $a+b=3$ и $b < 7$; б) $a+b > 3$ и $b < 2$;

в) $a+b < 5$ и $b > 1$; г) $a+b=7$ и $2 \leqslant b < 3$.

6.48. Оцените значение a, если известно, что:

а) $a+b=3$ и $|b| < 7$; б) $b-a=2$ и $|b| \geqslant 3$.

6.49. Сравните a и b, если известно, что:

а) $a=5b$ и $b > 0$; б) $5a=7b$ и $a > 0$;

в) $\frac{2a}{b} > 3$ и $b > 0$; г) $\frac{4b}{a} < 3$ и $a < 0$;

д) $\frac{2}{a} > \frac{3}{b}$ и $b > 0$; е) $\frac{3}{a} \leqslant \frac{1}{b}$ и $a > 0$.

6.50. Сравните a и b, если известно, что:

а) $\frac{a}{b}=\frac{n+1}{2n}$, $b > 0$, $n > 1$;

б) $\frac{a}{b}=\frac{2n+5}{7n}$, $b > 0$, $n > 1$.

6.51. Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше, чем их среднее геометрическое, т. е. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ $(a \geqslant 0;\ b \geqslant 0)$. Покажите, что равенство возможно лишь при $a=b$.

6.52. Докажите, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше, чем 2.

6.53. Докажите неравенство:

а) $a^2+b^2 \geqslant 2|ab|$; б) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$ (a и b — числа одного знака);

в) $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$; г) $\frac{a^2+4}{\sqrt{a^2+3}} > 2$.

6.54. Докажите, что если $a>0$, то $\frac{a+4}{2}+\frac{a+9}{2} > 5\sqrt{a}$.

6.55. Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа, то $\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2} \geqslant \sqrt{(a+b)(c+d)}$.

6.56. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c>0$, то $\frac{ac^2+b}{c} \geqslant 2\sqrt{ab}$.

6.57. Докажите, что если $mn=1$, $m>0$, то $a^2m+b^2n \geqslant 2ab$.

6.58. Докажите, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $(a^3+b)(a+b^3) \geqslant 4a^2b^2$. При каких a и b имеет место равенство?

6.59. Докажите, что при $a>0$, $b>0$ имеет место неравенство $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

6.60. Докажите неравенство $(a+b)(ab+9) \geqslant 12ab$ ($a>0$, $b>0$). При каких a и b имеет место равенство?

6.61. Докажите неравенство $b(a^2+1)+a(b^2+1) \geqslant 4ab$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$).

6.62. Докажите, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ имеет место неравенство $(a+1)(b+1)(ab+1) \geqslant 8ab$. При каких a и b имеет место равенство?

6.63. Докажите неравенство $\frac{5a}{3b}+\frac{12b}{5a} \geqslant 4$ (a и b — одного знака).

6.64. Докажите неравенство $(a^2b^2+36)\left(\frac{a}{4b}+\frac{9b}{a}\right) \geqslant 36ab$ ($a>0$, $b>0$). При каких значениях a и b имеет место равенство?

6.65. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c) > 24$, если $\frac{ab}{3}=\frac{3}{c}$ и $a>0$, $b>0$.

6.66. Докажите неравенство $\left(1+\frac{a^2}{bc}\right)\left(1+\frac{b^2}{ac}\right)\left(1+\frac{c^2}{ab}\right) \geqslant 8$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$).

6.67. Докажите неравенство $(ab+6)(2a+3b)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right) \geqslant 288$ ($a>0$, $b>0$). При каких значениях a и b имеет место равенство?

6.68. Докажите, что если $a>0$, то имеет место неравенство:

а) $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+a^2 \geqslant 2a$; б) $a^4+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a} \geqslant 4$;

в) $a^{10}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a} \geqslant 8$; г) $a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a} \geqslant 16$.

При каком значении a в каждом из неравенств имеет место равенство?

6.69. Докажите неравенство $a^4+b^4+2c^2 \geqslant 4abc$.

6.70. Докажите, что если $a<0$, то $a+\frac{1}{a} \leqslant -2$.

6.71. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+$ $+\frac{a+c}{b} \geqslant 6$.

6.72. Докажите, что если $a>0$, то $\frac{a+4}{2}+\frac{a+2}{4}+\frac{6}{a}>6{,}5$.

6.73. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, то

$$\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d} \geqslant 12.$$

Докажите неравенство **(74—86)**:

6.74. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

6.75. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant 4$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$.

6.76. $\left(1+\frac{bc}{ad}\right)\left(1+\frac{cd}{ab}\right)\left(1+\frac{ad}{bc}\right)\left(1+\frac{ab}{cd}\right) \geqslant 16$, $(a>0,\ b>0,\ c>0,$ $d>0)$.

6.77. $\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac} \geqslant 4$, $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$.

6.78. $a^2+b^2+\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} \geqslant 2$.

6.79. $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} \geqslant 3$, $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

6.80. $\frac{3a}{b+c+d}+\frac{3b}{a+c+d}+\frac{3c}{a+b+d}+\frac{3d}{a+b+c} \geqslant 4$, $(a>0,\ b>0,$ $c>0,\ d>0)$.

6.81. $(a+b)^2 \leqslant (1+c)\,a^2+\left(1+\frac{1}{c}\right) b^2$, $(c>0)$.

6.82. $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1$, $(|a| \leqslant 1;\ |b| \leqslant 1)$.

6.83. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ d \geqslant 0)$.

6.84. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $(a>0,\ b>0)$.

6.85. $\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$.

6.86. $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}+\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+d^2)}+\sqrt{(b^2+d^2)(a^2+d^2)}+$ $+\sqrt{(a^2+d^2)(a^2+c^2)} \geqslant 2(a+b)(c+d)$, $(a>0,\ b>0,\ c>0,$ $d>0)$.

6.87. Докажите, что если произведение двух положительных чисел есть число постоянное, то их сумма будет наименьшей, если эти числа равны.

6.88. Найдите наименьшее значение выражения $x+y$, если известно, что $xy=9$, $x>0$.

6.89. Найдите наименьшее значение выражения $2a+b$, если известно, что $ab=8$, $b>0$.

6.90. Найдите наименьшее значение выражения $3z+2t$, если известно, что $zt=6$, $z>0$.

6.91. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x+\frac{81}{x}$, $(x>0)$; б) $\frac{(x+3)(x+12)}{x}$, $(x>0)$;

в) $\frac{4z^2-7z+25}{z}$, $(z>0)$; г) $\frac{b^4+b^2+1}{b^2+1}$.

6.92. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $\frac{x}{16+x^2}$ $(x>0)$; б) $\frac{z^2}{4z^4+9}$;

в) $\frac{42z}{9z^2+49}$ $(z>0)$; г) $\frac{24x}{x^2+2x+25}$ $(x>0)$.

6.93. Докажите, что если сумма двух положительных чисел есть число постоянное, то их произведение будет наибольшим, если эти числа равны.

6.94. Найдите наибольшее значение xy, если известно, что $x+y=10$, $x>0$, $y>0$.

6.95. Найдите наибольшее значение xy, если известно, что $2x+y=6$ и $x>0$, $y>0$.

6.96. Найдите наибольшее значение xy, если известно, что $3x+4y=12$ и $x>0$, $y>0$.

6.97. Найдите наибольшее значение выражения $x(4-x)$, если известно, что $0<x<4$.

Докажите неравенство **(98—103)**:

6.98. а) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$;

б) $(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$;

в) $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$;

г) $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geqslant\frac{ab+ac+bc}{3}$.

6.99. а) $\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{da}+\frac{cd}{ab}+\frac{da}{bc}\geqslant 4$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$;

б) $a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$.

6.100. а) $a^4+b^4+c^4 \geqslant a+b+c$, если $abc=1$, $a>0$, $b>0$;

б) $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab} \geqslant a+b+c$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;

в) $\left(\frac{bc}{a}\right)^4+\left(\frac{ac}{b}\right)^4+\left(\frac{ab}{c}\right)^4 \geqslant a^2bc+b^2ac+c^2ab$;

г) $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

6.101. а) $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$;

б) $\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)^3 \geqslant 3$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

6.102. а) $3(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$;

б) $(a+b+c+d)^2 \leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

6.103. $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2 \geqslant ab+bc+ac$.

6.104. Докажите, что если $a>0$, то $a^n+\frac{1}{a^n} \geqslant a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}$.

6.105. Докажите, что если $a^2+b^2=1$, то $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$.

6.106. Докажите, что если $a+b=1$, то $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

6.107. Докажите, что если $a^2+b^2+c^2=1$, то $|a+b+c| \leqslant \sqrt{3}$.

6.108. Докажите, что если $1<a<2$, то $2<a+\frac{1}{a}<3$.

6.109. Докажите, что $4\left(\frac{a^2}{4b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-3\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{a}\right)+5>0$ при любых $a \neq 0$, $b \neq 0$.

6.110. Докажите, что $a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \geqslant 0$.
При каких a имеет место равенство?

6.111. Докажите, что $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$.

6.112. Докажите, что $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$.

6.113. Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<1$, $n \in \boldsymbol{N}$.

6.114. Докажите, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$.

6.115. Докажите неравенство $1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)<n^n$.

6.116. Докажите, что дробь $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ не меньше наименьшей и не больше наибольшей из дробей $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ..., $\frac{a_n}{b_n}$, $(b_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

6.117. Докажите неравенство:

а) $a \geqslant -|a|$; б) $a \leqslant |a|$;

в) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$; г) $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$.

6.118. Докажите неравенство:

а) $|a-1|+|a-2|\geqslant 1$;
б) $|a-2|+|a-5|\geqslant 3$;
в) $|a-1|+|a-2|+|a-3|\geqslant 2$;
г) $|a-1|+|a-2|+|a-3|+|a-4|\geqslant 4$.

6.119. Докажите неравенство:

а) $x^2+y^2-2x+4y+6>0$;
б) $2x^2+2y^2-2xy+4x-2y+5>0$.

6.120. Самолет пролетел путь от A до B по ветру и путь от B до A против ветра, причем скорость ветра не менялась. В другой раз самолет совершил рейс по тому же маршруту в безветренную погоду. В обоих случаях моторы самолета развивали одинаковую мощность. В каком случае на весь полет ушло меньше времени?

6.121. Два тракториста могут вспахать поле за t_1 дней. Если бы первый тракторист вспахал половину поля, а затем второй остальную часть, то потребовалось бы t_2 дней. Докажите, что $t_2\geqslant 2t_1$.

6.122. Докажите, что правильная дробь с положительными членами увеличивается с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число, а неправильная дробь уменьшается.

6.123. Какая из двух дробей ближе к единице: правильная $\frac{a}{b}$ или неправильная $\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b>0)$?

6.124. Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковые расстояния по течению и возвращаются обратно в пункты, откуда они начали движение. В какой реке на это передвижение потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

6.125. Два туриста вышли из пункта A в пункт B. Первый турист половину затраченного времени от начала движения шел со скоростью v_1 км/ч, затем — со скоростью v_2 км/ч. Второй же турист первую половину пути шел со скоростью v_1 км/ч, а вторую половину — со скоростью v_2 км/ч. Кто из них затратил меньше времени на прохождение пути от A до B?

6.126. Теплоход прошел путь AB по течению реки и обратно. Докажите, что средняя скорость теплохода в этом движении меньше его собственной скорости (собственную скорость теплохода и скорость течения реки считать постоянными).

6.127. Является ли решением неравенства $2x+3>7x-17$ значение x, равное:

а) 2; б) 6,5; в) $-\sqrt{3}$; г) $\sqrt{20}$?

6.128. Какие из чисел -3; -2; 0; 1; 2; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$ являются решениями неравенства $x^2<3x+1$?

6.129. Укажите какие-либо два решения неравенства:

а) $3x>7$; б) $4x<x+2$; в) $x^2<2$; г) $x^2>3x$.

6.130. Укажите какие-либо два целых решения неравенства:

а) $\frac{1}{x}<2$; б) $\frac{3-x}{x-5}<0$; в) $(x-3)(8-x)<0$; г) $x^2>1$.

Равносильны ли следующие неравенства **(131—133)**?

6.131. а) $2x-3>2$ и $2x-4>1$; б) $2x>6$ и $3x>12$;

в) $3-5x<x$ и $3<6x$; г) $3x+\frac{1}{x-3}>6+\frac{1}{x-3}$ и $3x>6$.

6.132. а) $2x^2<8x$ и $x<4$;

б) $(x-2)(x^2+1)<3(x^2+1)$ и $x-2<3$;

в) $(x-2)(x^2-9)>5(x^2-9)$ и $x-2>5$;

г) $\frac{1}{x-3}>2$ и $1>2(x-3)$.

6.133. а) $\frac{2x-1}{x^2+3}<2$ и $2x-1<2(x^2+3)$;

б) $\frac{3x-1}{x-3}<2$ и $3x-1<2x-6$;

в) $\frac{1}{x^2}<2$ и $2x^2>1$;

г) $\frac{1}{x^2}>3$ и $3x^2<1$.

Решите неравенства **(134—136)**:

6.134. а) $-3x+21>0$; б) $18-6x\leqslant 0$;

в) $x-(5-2x)\geqslant 3$; г) $2(x-2)-5(1-3x)<2$.

6.135. а) $\frac{2x-1}{3}<\frac{5x-2}{2}$;

б) $\frac{2x-1}{5}-\frac{3-x}{3}<2$;

в) $\frac{x-3}{2}>\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14$;

г) $5(x-2)-3\leqslant\frac{9(x-2)}{2}-3(2x-4)$.

6.136. а) $\frac{x-1}{3}-3\left(2x-\frac{5-2(x-1)}{4}\right)>x+2\frac{3}{4}$;

б) $\frac{x-2}{2}-\frac{3(2-x)}{10}+\frac{7x+1}{4}\leqslant\frac{x+11}{3}+\frac{13+16x}{20}$;

в) $2(3x-5)(x-1)-3\left(1-(2x+1)(3-x)+\frac{4-x}{2}\right)<13$;

г) $3\left(x-1+\frac{4-3x}{4}-\left(1-2\left(x-1-\frac{x+2}{5}\right)\right)\right)>5x-7$.

Решите неравенства **(137—138)**:

6.137. а) $(3-\sqrt{10})(2x-7)<0$; б) $3\sqrt{11}(5-2x)>10(5-2x)$;

в) $\frac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$; г) $(1-\sqrt{2})(4-5x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

6.138. а) $3\sqrt{2}-3>2x(1-\sqrt{2})$;

б) $(3\sqrt{10}-6\sqrt{3})x<5(2\sqrt{3}-\sqrt{10})$;

в) $(1+x\sqrt{3})\sqrt{2}<x+2\sqrt{3}$;

г) $\sqrt{6}(2-x)>5-2x$.

Найдите область определения функции **(139—140)**:

6.139. а) $y=\sqrt{3-5x}$; б) $y=\frac{1+x}{\sqrt{3-2(7-5x)}}$;

в) $y=\sqrt{2(3x-1)-7x+2}$; г) $y=\frac{3+4x}{\sqrt{3-2x-4(1-5x)}}$.

6.140. а) $y=\sqrt{-\sqrt{2}(2-3x)}$; б) $y=\frac{1}{\sqrt{(3x-1)\sqrt{2}-3x+2}}$;

в) $y=\sqrt{2-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})-2x}$; г) $y=\frac{2}{\sqrt{(x-\sqrt{3})\sqrt{3}-2x+1}}$.

Решите неравенства **(141—142)**:

6.141. а) $\frac{3}{2x-1}>0$; б) $\frac{-4}{3x-7}>0$;

в) $\frac{2-\sqrt{5}}{4-3x}\leqslant 0$; г) $\frac{2\sqrt{2}-3}{4+5x}<0$.

6.142. а) $\frac{2x+1}{x-2}<2$; б) $\frac{3-4x}{2x-1}<-2$;

в) $\frac{3-x}{4-x}>1$; г) $\frac{3+8x}{2x-5}>4$.

6.143. Решите неравенство (a — параметр):

а) $5x-a>ax-3$; б) $a(2x-1)<ax+5$;

в) $a(3-x)\geqslant 3x+a$; г) $3(2a+x)<1-ax$.

6.144. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

а) $\frac{2x-1}{5}-\frac{2x-2}{3}>2$;

б) $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x-1}{3}>1$;

в) $\frac{2x^2-5x+3}{6}-\frac{4-x}{12}\geqslant\frac{15+x^2}{3}-\frac{1-2x}{9}$;

г) $(x+4)^2-(x-10)^2\leqslant 140$.

6.145. Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству:

а) $\frac{1-x}{2}+3<3x-\frac{2x+1}{4}$;

б) $\frac{3-2x}{3}-1>\frac{3-2x}{6}-x$;

в) $(3x-5)(2x-5)-(2x-3)(x-3)+6x>(2x-5)^2+6$;

г) $\frac{(3x-7)(3x-2)}{3}-\frac{(8x-19)(x+1)}{4}<\frac{(6x-7)(2x-5)}{12}$.

6.146. Найдите все значения a, при которых квадратное уравнение:

а) $3x^2-2x+a=0$; б) $ax^2-3x-1=0$;
в) $(2a-1)x^2+2x-1=0$; г) $ax^2-(2a-1)x+a+2=0$
имеет два действительных и различных корня.

6.147. Найдите все значения a, при которых квадратное уравнение:

а) $x^2-4x+a=0$;

б) $5x^2-6ax-1=0$;

в) $(1-a)x^2+4x-3=0$;
г) $(3a-5)x^2-(6a-2)x+3a-2=0$
не имеет действительных корней.

6.148. Найдите все значения a, при которых квадратное уравнение:

а) $x^2-4x+a=0$;

б) $ax^2-9x-2=0$;

в) $(1-3a)x^2-4x-3=0$;
г) $(a-1)x^2-(2a+3)x+a+5=0$
имеет действительные корни.

6.149. Решите уравнение:

а) $|x-2|=x-2$; б) $|2x-3|=3-2x$;

в) $|2x-4|=10-5x$; г) $|-x-3|=\frac{2x}{3}+2$.

6.150. При каких значениях a уравнение $2x+3=2a+3x$ имеет положительное решение?

6.151. При каких значениях a уравнение $1+3x-ax=2+x$ имеет отрицательное решение?

6.152. При каких значениях a уравнение $a(3x-a)=6x-4$ имеет одно положительное решение?

6.153. При каких значениях a уравнение $a(x-1)=x-2$ имеет решение, удовлетворяющее условию $x>1$?

Решите систему неравенств **(154—157)**:

6.154. а) $\begin{cases} 2x-6>0, \\ 4x-20<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+7>0, \\ 2x-3>0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-5<0, \\ 7x+28<0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 18x-6<0, \\ 15-3x<0. \end{cases}$

6.155. а) $\begin{cases} 3(x-1)-2(2-3x)>5x-3, \\ 8x-3(2x+5)<2(x-7); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5(x+2)-9(x+1)-3<1-4(x+3), \\ 7(3+5x)<3x-5(x-2); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{7}{4}>\frac{5x}{2}-\frac{7}{8}, \\ \frac{2x+1}{4}<5-\frac{1-2x}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2x+1}{3}-3<x-\frac{3-2x}{5}, \\ \frac{x}{3}-\frac{7}{6}<\frac{5x}{3}-\frac{11}{6}. \end{cases}$

6.156. а) $\begin{cases} 3x-5>x-3, \\ 2x+4<3x+5, \\ 7-2x>x-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-1>3-5x, \\ 3x+2>3-4x, \\ -3+5x<2x+5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-3>3(x-2)-1, \\ 2-3(2-x)<5(2x-1), \\ 13-\frac{x}{2}>3(x+2)-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2x}{3}-1<3-2(1-2x), \\ 3x-5>1-2(1-x), \\ 1-2x<3(2x-1). \end{cases}$

6.157. а) $\begin{cases} (x-0{,}2)^2-(x+0{,}2)(x-0{,}2)>0{,}04, \\ (x+0{,}4)(x+0{,}04)-(x-0{,}4)(x-0{,}04)>0{,}044; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x-4}{4}-x+1<\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}, \\ 3-x>2x-10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{3}{4}(x-1)+\frac{7}{8}<\frac{1}{4}(x-1)+\frac{5}{2}, \\ \frac{x}{4}-\frac{2x-3}{3}<2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{(x-1)^2-1}{5}+\frac{x}{2}<\frac{2(x-1)^2+3}{10}+\frac{x-1}{2}+3, \\ 1-x>\frac{0{,}5(x-1)-1}{2}-\frac{2(x-1)+4{,}5}{3}. \end{cases}$

6.158. При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение:

а) $\begin{cases} x<3, \\ x>a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ x>a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\leqslant 7, \\ x\geqslant a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x\leqslant a, \\ x\geqslant 2? \end{cases}$

6.159. При каких значениях a система неравенств не имеет решений:

а) $\begin{cases} x<4, \\ x>a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\leqslant 2, \\ x>a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ x\geqslant a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x\leqslant a, \\ x>2? \end{cases}$

6.160. Существуют ли такие значения a, при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x>3, \\ x>a \end{cases}$ является промежуток:

а) $(5;\ +\infty)$; б) $(3;\ +\infty)$; в) $[3;\ +\infty)$; г) $(2;\ +\infty)$?

6.161. Существуют ли такие значения a, при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ x<a \end{cases}$ является промежуток:

а) $(-\infty;\ 7)$; б) $(-\infty;\ 5)$; в) $(-\infty;\ 5]$; г) $(-\infty;\ 2)$?

6.162. При каких значениях a система неравенств $\begin{cases} 3-7x<3x-7, \\ 1+2x<a+x \end{cases}$ не имеет решений?

6.163. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} 3(a-5x)<1+x, \\ 2-\frac{x}{2}>3+5(x-a) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

6.164. Решите двойное неравенство:

а) $-3<3-2x<1$; б) $-2<3x-1<-1$;

в) $0<4-3x<2$; г) $0<1-2x<1$.

Решите систему неравенств **(165—166)**:

6.165. а) $\begin{cases} -1<1-2x<2, \\ 3-5x>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0<1-3x<1, \\ 3-4x<2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -3<2x-3<-1, \\ 1-4x<0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -1<3-5x<0, \\ 4-2x<-3. \end{cases}$

6.166. а) $\begin{cases} 2x-3\leqslant 0, \\ \frac{2x-5}{x-2}\geqslant 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2\leqslant 5x-8, \\ \frac{2x-1}{2-x}<4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7<2x+1<11, \\ \frac{x+2}{x-5}<\frac{x-6}{x-3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -2<2-x<1, \\ \frac{x+3}{1-x}\leqslant\frac{8-x}{x-4}. \end{cases}$

6.167. Найдите середину промежутка, являющегося множеством решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} -\frac{13}{4}+\frac{3x}{4}\leqslant\frac{x-1}{4}-\frac{7}{8}, \\ 2\geqslant\frac{x}{4}+\frac{3-2x}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{5}+\frac{3x-1}{10}\geqslant\frac{2-x}{5}-0{,}3, \\ 1\geqslant\frac{x-1}{3}+0{,}5(x+3). \end{cases}$

6.168. Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее системе неравенств:

$$\begin{cases} 13-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}<14-\frac{7-8x}{2}, \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\frac{5(2x-6)}{2}. \end{cases}$$

6.169. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{3x-1}{6}<\frac{2-x}{12}-\frac{x+1}{2}+3, \\ x>\frac{5x-4}{10}-\frac{3x-1}{5}-2,5. \end{cases}$$

6.170. При каких значениях a уравнение $x^2-(2a-1)x+1-a=0$ имеет два различных действительных положительных корня?

6.171. При каких значениях a уравнение $x^2-(2a+4)x-5-2a=0$ имеет два различных действительных отрицательных корня?

6.172. При каких значениях a уравнение $x^2-(2a-6)x+3a+9=0$ имеет корни разных знаков?

6.173. При каких значениях a уравнение $x^2-(a-2)x-2-3a=0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $x_1<0$, $x_2>0$, $|x_1|>x_2$?

6.174. Найдите все значения a, при которых корни уравнения $x^2+(a+1)x-2a(a-1)=0$ меньше, чем 1.

6.175. Найдите все значения a, при которых один из корней уравнения $x^2-2ax+a^2-1=0$ меньше 1, а другой — больше 1.

6.176. Найдите все значения a, при которых корни уравнения $x^2-4x-(a-1)(a-5)=0$ больше, чем 1.

6.177. Найдите все значения a, при которых корни уравнения $x^2-2(a-1)x+a+1=0$ больше, чем 1.

6.178. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2-2(a+1)x+4a+1=0$ меньше 1, а другой больше 1?

6.179. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x+y=3 \end{cases}$ имеет решение $x<0$, $y>0$?

6.180. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x+3y=2a-1, \\ x-y=a \end{cases}$ имеет решение $x>0$, $y<0$?

6.181. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 3x-y=1-a, \\ x+y=2a+1 \end{cases}$ имеет решение $x\geqslant 1$, $y\leqslant 4$?

Решите совокупность неравенств **(182—186)**:

6.182. а) $\left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>2; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x<5, \\ x\leqslant 3; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x<7, \\ x>8; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x\geqslant 9, \\ x\geqslant 3. \end{array}\right.$

6.183. а) $\left[\begin{array}{l} x>3, \\ 5-2x<2(1-x); \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x<2, \\ 3x+5>3(x+1); \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} 2x-3>1, \\ 3-2x>2(1-x); \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x<2, \\ 3x+5>3(x+1). \end{array}\right.$

6.184. а) $\left[\begin{array}{l} 2<x<5, \\ x\leqslant 2; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 3<x<5, \\ x\geqslant 5; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} -1\leqslant x<0, \\ 0\leqslant x<2, \\ 2\leqslant x<5; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} -1<x<2, \\ 2\leqslant x<5, \\ x\geqslant 5. \end{array}\right.$

6.185. а) $\left[\begin{array}{l} x\leqslant 3, \\ x>3; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x<5, \\ x\leqslant 5; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x>7, \\ x\geqslant 7; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x<2, \\ x>2. \end{array}\right.$

6.186. а) $\left[\begin{array}{l} 1+\frac{3-x}{3}\leqslant\frac{2x-1}{5}, \\ -1>4x-4; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \frac{2x+1}{2}-\frac{2-x}{7}>1, \\ -4x-1<0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} \frac{3-2x}{5}<\frac{1-x}{2}, \\ 2-3x>x; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} \frac{3x-2}{4}>\frac{1-5x}{6}, \\ 3x-1\leqslant 3-2x. \end{array}\right.$

Найдите все значения x, удовлетворяющие условию **(187—188)**:

6.187. а) $\begin{cases} 0<x\leqslant 3, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 1, \\ x>2; \end{array}\right. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3\leqslant 2x-1\leqslant 7, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -1, \\ x\geqslant 3; \end{array}\right. \end{cases}$

в) $\begin{cases} -3x>-12+x, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x\geqslant 1 \end{array}\right. \\ 2x+1>-x-10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -2<3x-5<19, \\ \left[\begin{array}{l} 3x-1<5, \\ 2x-5>7. \end{array}\right. \end{cases}$

6.188. а) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ 2x-3<5, \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1, \\ 3x<1; \end{cases} \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<15, \\ 3-6x<15, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant 5, \\ 3<x-1<5; \end{cases} \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1<2x-1<5, \\ 2\leqslant 3x-1<11, \end{cases} \\ \begin{cases} 10\leqslant 4x-2<26, \\ 3<2x-1<11; \end{cases} \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<3, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 1, \\ x>5, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x\leqslant 5, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 0, \\ x>1. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

6.189. Докажите, что при $a<b$ каждое из неравенств

$$(x-a)(x-b)<0, \quad \frac{x-a}{x-b}<0, \quad \frac{x-b}{x-a}<0$$

равносильно двойному неравенству $a<x<b$.

6.190. Пользуясь результатом упражнения 189, решите неравенство:

а) $(x-2)(x-5)<0$; б) $(x-4)(x+3)\leqslant 0$;

в) $\frac{x-5}{x-3}<0$; г) $\frac{x-2}{x-9}<0$.

Решите неравенства **(191—192)**:

6.191. а) $(3-x)(2x-5)>0$; б) $(5-3x)(2x+1)>0$;

в) $\frac{5-x}{1-x}\leqslant 0$; г) $\frac{x+2}{5-2x}\geqslant 0$.

6.192. а) $x^2-5x<0$; б) $7x-x^2\geqslant 0$;

в) $x^2-3x+2\leqslant 0$; г) $4x+5-x^2\geqslant 0$.

6.193. Докажите, что при $a<b$ каждое из неравенств

$$(x-a)(x-b)>0, \ \frac{x-a}{x-b}>0, \ \frac{x-b}{x-a}>0$$

равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x<a, \\ x>b. \end{array}\right.$

6.194. Пользуясь результатом упражнения 193, решите неравенство:

а) $(x-1)(x-3)>0$; б) $(x-2)(x+5)\geqslant 0$;

в) $\frac{x-2}{x-7}>0$; г) $\frac{x-5}{x-3}\geqslant 0$.

Решите неравенство **(195—198)**:

6.195. а) $(2-x)(x-8)\leqslant 0$; б) $(1-x)(7-x)\geqslant 0$;

в) $\frac{3-5x}{7-x}\geqslant 0$; г) $\frac{7-2x}{x+1}\leqslant 0$.

6.196. а) $x^2-5x>0$; б) $4x-3x^2\leqslant 0$;

в) $x^2-8x+7\geqslant 0$; г) $3+2x-x^2\leqslant 0$.

6.197. а) $\frac{2}{x-3}<0$; б) $\frac{x^2+1}{x-2}<0$;

в) $(x^2+5)(2x-17)<0$; г) $(-x^2-3)(3x+7)\geqslant 0$.

6.198. а) $(x-3)^2(x-7)<0$; б) $(x-2)(2x-9)^2>0$;

в) $(x^2-10x+25)(2x-4)\leqslant 0$; г) $(9x^2-6x+1)(x-2)\geqslant 0$.

Для каждого значения a решите неравенство **(199—200)**:

6.199. а) $x^2-ax<0$; б) $(x-3)(x-a)\leqslant 0$;

в) $ax-3x^2<0$; г) $x^2-(a+1)x+a\geqslant 0$.

6.200. а) $\frac{x}{a}<3x-1$; б) $\frac{3x-1}{a-2}>x$;

в) $\frac{x-3}{a+1}<\frac{x-2}{a-3}$; г) $\frac{x-2}{a-3}>\frac{1-2x}{a}$.

6.201. Докажите, что неравенство $|x|<a$ $(a>0)$ равносильно двойному неравенству $-a<x<a$.

6.202. Пользуясь результатом упражнения 201, решите неравенство:

а) $|x|<3$; б) $|x|\leqslant 2$; в) $|2x-1|<3$; г) $|3-2x|<7$.

6.203. Решите неравенство:

а) $|x-3|<-2$; б) $|x-4|\leqslant 0$;
в) $|x-5|<0$; г) $|2x+1|\leqslant -3$.

6.204. Докажите, что неравенство $|x|>a$ $(a>0)$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x<-a, \\ x>a. \end{array}\right.$

6.205. Пользуясь результатом упражнения 204, решите неравенство:

а) $|x|>3$; б) $|x|\geqslant 7{,}3$; в) $|2x-4|\geqslant 6$; г) $|3-2x|>1$.

Решите неравенство **(206—208)**:

6.206. а) $|x-3|>-1$; б) $|x-5|\geqslant 0$;
в) $|2x-10|>0$; г) $|3x-5|\geqslant -2$.

6.207. а) $1<|x|<2$; б) $2<|x-3|\leqslant 5$;
в) $-1<|2x-3|<7$; г) $0<|2-3x|<1$.

6.208. а) $||x-3|-2|\leqslant 1$; б) $||x-4|-2|<3$;
в) $||2x-1|-2|>3$; г) $||3x-4|-5|>1$.

6.209. Для каждого значения a решите неравенство:

а) $|x-3|<a$; б) $|x-2|\leqslant a$;
в) $|x+5|>a$; г) $|3-2x|\geqslant a$.

6.210. При каких значениях a неравенство справедливо при любом значении x:

а) $|x|>a$; б) $|x|+2a-1\geqslant 0$;
в) $a|x|-1<0$; г) $2|3-5x|+2-3a>0$?

Решите неравенство **(211—212)**:

6.211. а) $|x-1|<2x-4$; б) $|x-3|<6-3x$;
в) $|x-4|>2x-1$; г) $|2x+5|<x+4$.

6.212. а) $|x-1|+|x-3|<x+1$;
б) $|x+2|-|x-3|\geqslant 2x-1$;
в) $|x-1|+|x-2|<3x-9$;
г) $|x-2|+|x-3|<6-3x$.

Решите систему неравенств **(213—216)**:

6.213. а) $\begin{cases} |x-1| \leqslant 2, \\ |x-4| \geqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-5| \leqslant 3, \\ |x-4| \geqslant 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |2x-5| < 3, \\ |3x-1| \leqslant 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x-3| < 5, \\ |x-2| \geqslant 1. \end{cases}$

6.214. а) $\begin{cases} 3-2x < 2-x, \\ -6 \geqslant -3x, \\ 3x-2 \geqslant 5x-9, \\ |x-4| < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x < 5, \\ x-3 < 1-\frac{x}{2}, \\ 2\left(1-\frac{x}{4}\right) < 3, \\ |x-3| \leqslant 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\left(1-\frac{x}{2}\right) > 2x-1, \\ |x-1|+|x-2| < 3-x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\left(\frac{x}{3}+2\right) \leqslant 1+x, \\ |x-9|+|x-10| > x-2. \end{cases}$

6.215. а) $\begin{cases} 3x-2 < x+6, \\ 3-2x > \frac{x}{2}-4, \\ |x-7|+|x-9| < 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-1 > x+2, \\ \frac{x}{2}-3 < \frac{x-1}{3}, \\ |x-3|+|x-16| < 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x-1| < 9-2x, \\ |x-5|+|x-6|+|x-7| > 15; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x-4| < x-3, \\ |x-1|+|x-2|+|x-3| < 6. \end{cases}$

6.216. а) $\begin{cases} |x-5| \leqslant 1, \\ (x-3)(x-5) > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |2x-1| < 5, \\ \frac{x+3}{x-2} \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x-2| < 5-x, \\ \frac{2x-9}{x-6} < 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x-3| \leqslant 2x-3, \\ \frac{3x-5}{x-1} < 2. \end{cases}$

6.217. Докажите, что неравенство $x^2 < a^2$ равносильно неравенству $|x| < a$ $(a > 0)$, а неравенство $x^2 > a^2$ равносильно неравенству $|x| > a$ $(a > 0)$.

Решите неравенство **(218—223)**:

6.218. а) $x^2 < 4$; б) $4x^2 \leqslant 9$; в) $(2x-5)^2 < 1$; г) $16-(2x-3)^2 \geqslant 0$.

6.219. а) $x^2 > 1$; б) $9x^2 \geqslant 16$; в) $(3-5x)^2 > 49$; г) $81-(3+2x)^2 \leqslant 0$.

6.220. а) $(3x-2)^2 > 0$; б) $(1-2x)^2 < 0$;

в) $x^2-6x+9 \geqslant 0$; г) $4x^2-4x+1 \leqslant 0$.

6.221. а) $(2x-1)^2 > -1$; б) $(3-x)^2+4 < 0$;

в) $x^2-8x+17 \leqslant 0$; г) $x^2+4x+7 \geqslant 0$.

6.222. а) $(x^2-9)(2x-3) < 0$; б) $(1-x^2)(3-5x) \geqslant 0$;

в) $\frac{x^2-4}{3x-5} \leqslant 0$; г) $\frac{2x+7}{9-x^2} \leqslant 0$.

6.223. а) $\frac{x^2-9}{x^2-1} \leqslant 0$; б) $\frac{x^2-25}{4-x^2} < 0$;

в) $(x^2-4)(4x^2-1) > 0$; г) $(x^2-1)(16-9x^2) \geqslant 0$.

6.224. При каких значениях a неравенство удовлетворяется при любых значениях x:

а) $(x-2)^2 > a$; б) $(x-3)^2 \geqslant 2a-7$;

в) $x^2-2x+1+a > 0$; г) $x^2+6x+a \geqslant 0$?

6.225. При каких значениях a уравнение не имеет корней:

а) $x^2-ax+9=0$; б) $x^2-(2a-1)x+1=0$?

6.226. При каких значениях a уравнение имеет два различных корня:

а) $3x^2-2ax+12=0$; б) $x^2+(1-a)x+1=0$?

Решите неравенство **(227—229)**:

6.227. а) $(x-1)^2(x-3) < 0$; б) $|x-5|(x-7) < 0$;

в) $(x-2)^2(x-1) \leqslant 0$; г) $|x-5|(3x-7) \leqslant 0$.

6.228. а) $|x-1|(x-1) > 0$; б) $|x-2|(x-2) \geqslant 0$;

в) $|x^2-16|(3-x) \geqslant 0$; г) $\frac{|x^2-9|}{2x-5} \geqslant 0$.

6.229. а) $(x-3)\sqrt{x-5} \geqslant 0$; б) $(x-5)\sqrt{x-2} \geqslant 0$;

в) $(1-x)\sqrt{2x-3} \geqslant 0$; г) $\frac{3x-1}{\sqrt{1-x}} \leqslant 0$.

Для каждого a решите неравенство **(230—231)**:

6.230. а) $(x-3)^2 < a$; б) $(5x+3)^2 > a$;

в) $(3-4x)^2 \leqslant a-1$; г) $(2-x)^2 \geqslant 3-a$.

6.231. а) $|x-a|(x-3) < 0$; б) $(x-a)|x-5| \leqslant 0$;

в) $(x-a)^2(x-7) \geqslant 0$; г) $(x-a)(2x+3)^2 > 0$.

Найдите область определения функции **(232—235)**:

6.232. а) $y=\sqrt{|x|-3}+\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{10-x}}$;

б) $y=\sqrt{7-|x-2|}+\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$;

в) $y=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{6-2x}+\sqrt{5+|2-3x|}$;

г) $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{-2x-8}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

6.233. а) $y=\frac{\sqrt{5x-6}}{\sqrt{7x-14}}$; б) $y=\sqrt{(3x-2)(x-5)}$;

в) $y=\sqrt{\frac{5x-6}{7x-14}}$; г) $y=\sqrt{3x-2}\sqrt{x-5}$.

6.234. а) $y=\sqrt{\frac{x^2}{|x|-3}}$; б) $y=\sqrt{|x|\,(x^2-16)}$;

в) $y=\sqrt{\frac{x^2-4x+4}{1-x^2}}$; г) $y=\sqrt{|x-5|\,(4-|x|)}$.

6.235. а) $y=\sqrt{x-2}\,\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\,\sqrt{6-x}$;

б) $y=\sqrt{(x-2)(x-3)}+\sqrt{(5-x)(6-x)}$;

в) $y=\frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{5-x}}+\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{7-2x}}$;

г) $y=\sqrt{\frac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\frac{4-x}{7-2x}}$.

6.236. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y=(x-1)(2x-5)$; б) $y=\frac{5-2x}{3x-12}$;

в) $y=x^2-4$; г) $y=16-25x^2$.

6.237. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x-1}<3$; б) $\sqrt{2x-3}\leqslant 4$;

в) $\sqrt{9-x^2}\geqslant 1$; г) $\sqrt{|x|-2}\leqslant 3$.

Постройте график функции **(238—239)**:

6.238. а) $y=|2x-5|+3x-1$;

б) $y=|x-5|+|x-2|$;

в) $y=\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{x^2-2x+1}$;

г) $y=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-12x+36}$.

6.239. а) $y=\frac{|x-1|}{x-1}$; б) $y=\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x-3|}{x-3}$;

в) $y=\frac{|x+2|}{x+2}(3-x)$; г) $y=\frac{|x+1|}{x+1}x+\frac{1-x}{|x-1|}$.

6.240. Решите уравнение:

а) $\frac{|x|-4}{|x-3|-1}=1$; б) $\frac{|x+2|-3}{|x|-1}=3$;

в) $x^2+2|x-1|-2=0$; г) $x^2+4|x+1|-8=0$;

д) $\frac{2}{x|x-1|}=-1$; е) $\frac{x|x|-1}{|x-2|}=-\frac{2}{3}$.

§ 7. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1. Определение степени с целым показателем.

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}, \text{ где } a\neq 0 \text{ и } n\in \boldsymbol{N};\ a^0=1, \text{ где } a\neq 0.$$

Таким образом, с учетом известного определения степени с натуральным показателем (см. § 1), определена степень с произвольным целым показателем.

2. Свойства степени с целым показателем.

Для любых целых m, n и произвольного $a\neq 0$ имеют место равенства:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\ a^m:a^n=a^{m-n},\ (a^m)^n=a^{mn}.$$

Для любого целого n и произвольных $a\neq 0$, $b\neq 0$ имеют место равенства:

$$(ab)^n=a^n\cdot b^n;\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Пример 1. Упростите выражение

$$((a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3})(b^3-a^2b-a^3)^{-1})^{-1}.$$

Решение. Преобразовывая выражения, содержащие степени с целым показателем, полезно помнить, что замена всех степеней с целым отрицательным показателем на степени с натуральным показателем не всегда приводит к наиболее рациональному решению. Часто бывает целесообразнее использовать свойства степеней, как, например, в данном случае:

$$((a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3})(b^3-a^2b-a^3)^{-1})^{-1}=$$
$$=((a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3})(a^3b^3(a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3}))^{-1})^{-1}=$$
$$((a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3})(a^3b^3)^{-1}(a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3})^{-1})^{-1}=$$
$$=((a^3b^3)^{-1})^{-1}=a^3b^3.$$

Пример 2. Решите уравнение $\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+(0{,}5-x)^{-2}=4{,}25.$

Решение. Используя определение степени с целым отрицательным показателем и свойство квадратов действительных чисел, запишем: $(0{,}5-x)^{-2}=\frac{1}{(0{,}5-x)^2}=\frac{1}{(x-0{,}5)^2}$. Введем новую переменную $y=(x-0{,}5)^2$. Уравнение примет вид: $y+\frac{1}{y}=4\frac{1}{4}$. Очевидно, что числа 4 и $\frac{1}{4}$ являются корнями данного уравнения, а других корней быть не может, поскольку уравнение это сводится к квадратному, т. е. имеет не более двух корней.

Итак, $(x-0{,}5)^2=4$ или $(x-0{,}5)^2=0{,}25$. В первом случае $x-0{,}5=\pm 2$, откуда $x_1=2{,}5$, $x_2=-1{,}5$. Во втором случае $x-0{,}5=\pm 0{,}5$, откуда $x_3=1$, $x_4=0$.

Упражнения

Вычислите **(1—4)**:

7.1. а) 2^{-4}; б) $(-1,7)^0$; в) $(0,2)^{-2}$; г) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

7.2. а) $(-1)^{-3}$; б) -5^{-2}; в) $16\cdot 2^{-3}$; г) $18\cdot 3^{-1}$.

7.3. а) $(-0,1)^{-3}$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; в) $\frac{3}{4^{-2}}$; г) $\frac{3^{-1}}{4}$.

7.4. а) $\frac{9\cdot 3^{-1}}{2}$; б) $9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$; в) $\frac{9\cdot 6^{-1}}{2^{-1}}$; г) $\frac{25^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{3\cdot 5^{-1}}$.

7.5. Представьте числа:

а) $64,\ 16,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32}$ в виде степени с основанием 2;

б) $81,\ 27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81}$ в виде степени с основанием $\frac{1}{3}$.

7.6. Представьте числа
а) 1000; 10; 1; 0,01; 0,0001 в виде степени числа 10;
б) $125,\ 5,\ 1,\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{625}$ в виде степени числа $\frac{1}{5}$.

Вычислите **(7—8)**:

7.7. а) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$; б) $(\sqrt{3})^{-4}$; в) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$; г) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$.

7.8. а) $\frac{(\sqrt{2}-1)^{-1}}{1+\sqrt{2}}$; б) $\frac{5+2\sqrt{6}}{(5-2\sqrt{6})^{-1}}$; в) $\frac{7+4\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-2)^{-2}}$; г) $\frac{(3+\sqrt{2})^{-2}}{11-6\sqrt{2}}$.

7.9. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало нулевых и отрицательных показателей:
а) m^3n^{-2}, a^0b^{-3}, $7x^{-1}y^0$, $7^{-1}a^{-2}b^3c^{-1}$;
б) $(a-b)(a+2)^{-2}$, $(x+y)(x-y)^{-1}$, $(m+n)^0(m-n)^{-3}$;
в) $\frac{5^{-1}xy^{-3}}{m^0z^{-2}}$, $\frac{2^{-1}a^{-2}b^{-2}}{4^{-2}a^0b^3}$, $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$, $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}+\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)^{-1}$;
г) $\left(\frac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}\right)^{-1}$, $\frac{2k(a+b)^{-2}}{4^{-1}(a-b)^{-1}}$, $(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}$.

Найдите значение выражения **(10—12)**:

7.10. а) $2^{-5}\cdot 2^4$; б) $5^3\cdot 5^{-7}\cdot 5^2$; в) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\cdot(1,5)^3$; г) $(\sqrt{2})^{-3}\cdot(\sqrt{2})^{-1}$.

7.11. а) $3^{-14}:3^{-16}$; б) $7^{-5}:7^{-3}$;
в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; г) $(\sqrt{3})^{-7}:(\sqrt{3})^{-3}$.

7.12. а) $(3^{-1})^{-2}$; б) $(2^{-3})^{-2}\cdot 2^{-3}\cdot 2^{8}$; в) $5^{-7}\cdot(5^{-2})^{-3}$; г) $((\sqrt{2})^{-3})^{-2}$.

7.13. Вычислите: а) $16^{-2}\cdot 8^{3}$; б) $7^{0}\cdot 7^{-2}$; в) $\frac{2^{-3}\cdot 4^{3}}{8^{-2}}$;

г) $\frac{3^{-12}\cdot 9^{5}}{27^{-4}\cdot 3^{12}\cdot 9^{-2}}$.

Упростите выражение (14—15):

7.14. а) $a^{10}a^{-2}a^{-3}$; б) $a^{10}:a^{-3}$; в) $b^{-2}:b^{5}$; г) $\frac{a^{-3}a^{2}a^{-1}}{a^{-5}}$.

7.15. а) $(2^{4}\cdot 2^{-4}b^{5}):(2^{-3}a^{-5}b^{-4})$; б) $\frac{1}{12a^{n-1}b^{-3}c^{-4}}:\left(\frac{5}{6}a^{-n}b^{n+1}c^{6}\right)$;

в) $\left(\frac{10}{3}x^{-6}y^{n-2}z^{2}\right):\frac{6^{-1}}{5^{-1}x^{4}y^{2}z^{-3}}$; г) $(x^{-2}y^{3})^{-3}\left(\frac{x^{3}}{2y^{2}}\right)^{-3}\left(\frac{-4x^{3}}{y^{4}}\right)^{-5}$.

Вычислите (16—17):

7.16. а) $\frac{((-2)^{3})^{2}\cdot(-2)^{-7}}{(-2)^{3}\cdot(-2)^{5}}$; б) $\frac{(2\cdot(-3)^{-2})^{-1}\cdot(-3)^{-2}}{4^{-1}\cdot(-3)^{-1}\cdot((-3)^{-2})^{-1}}$;

в) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\cdot(3{,}375)^{-1}}{(2{,}25)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$; г) $\frac{(0{,}4)^{-2}\cdot(2{,}5)^{-4}}{(0{,}16)^{-5}\cdot((6{,}25)^{-3})^{2}}$.

7.17. а) $\left(6-3\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^{0}\right)^{-2}$; б) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\frac{3}{4}\right)^{-1}$;

в) $\frac{2^{-2}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$;

г) $(1-(1-2^{-1})^{-1})^{-1}+(1+(1+2^{-1})^{-1})^{-1}$.

7.18. Упростите выражение:

а) $\frac{(ab^{-5}-a^{-5}b)^{-1}(a^{-3}+b^{-3})}{(a^{-1}b^{-4}-b^{-1}a^{-4})^{-1}}$; б) $\frac{(ab^{-7}-a^{-7}b)^{-1}(a^{-3}b+ab^{-3})}{(b^{-4}-a^{-4})^{-1}}$.

7.19. Упростите выражение и вычислите его значение при указанных значениях переменной:

а) $(3b^{-2}-2a^{-1})\left(\frac{b^{-2}}{3^{-1}}+\frac{1}{2^{-1}a}\right)\left(4a^{-2}+\frac{b^{-4}}{3^{-2}}\right)$ при $a=-2$, $b=\sqrt{3}$;

б) $\left(b^{-2}+\frac{a^{-3}}{2^{-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{-1}a^{3}}-b^{-2}\right)\left(b^{-4}+\frac{4}{a^{6}}\right)$ при $a=b=\sqrt{2}$;

в) $\left(\left(\frac{a^{-12}}{2^{-2}}-\frac{81}{b^{4}}\right):\left(\frac{2}{a^{6}}+9b^{-2}\right)\right):\left(\sqrt{2}a^{-3}-\frac{3}{b}\right)$ при $a=\sqrt{2}$, $b=6$;

г) $\left(\left(\frac{9^{-2}}{a^{-24}}-\frac{16}{b^{-8}}\right):\left(\frac{a^{12}}{3^{2}}+\frac{b^{4}}{2^{-2}}\right)\right):\left(\frac{3^{-1}}{a^{-6}}-\frac{1}{2^{-1}b^{-2}}\right)$ при $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$.

Упростите выражение (**20—26**):

7.20. а) $\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\frac{1}{b^{-n}}-\frac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; б) $\frac{a^{-2n}-b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}}\cdot\left(\frac{1}{a^{-n}}+\frac{1}{b^{-n}}\right)^{-1}$.

7.21. а) $\frac{(9a^{-2}-16b^{-2})^n}{(3a^{-1}-4b^{-1})^n}$; б) $\frac{(2a^{-3}+3b^{-2})^n}{(4a^{-6}-9b^{-4})^n}$.

7.22. а) $\left(\frac{a}{(b-a)^2}\right)^{-n}:\frac{a^{1-n}}{(a-b)^{1-2n}}$; б) $\frac{x^{-n-1}}{((x-y)^{4n+1})^{-1}}:((y-x)^4\cdot x^{-1})^n$.

7.23. $\left(1\frac{13}{25}a^8b^{-10}-\frac{4a^8}{5b^{10}}\right):\frac{0{,}2a^{-7}b^{-1}}{a^{-3}b^2}$.

7.24. $\left(\frac{(p-q)^3}{(2m)^{-2}(p+q)^2}\right)^2\cdot\left(\frac{p-q}{4^{-1}\cdot(p+q)^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{m}{2}\right)^{-4}$.

7.25. $\frac{1}{4}(b^{-1}+a^{-1})\cdot\frac{a^{-2}+b^{-2}}{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{-1}}\cdot\left(\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-1}$.

7.26. $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}+b^{-2}}\right)^{-1}\cdot\left(\left(\frac{b}{3a}\right)^{-1}+\left(\frac{a}{3b}\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot\frac{3(a^{-1}+b^{-1})}{(ab)^{-1}}$.

Решите уравнение (**27—31**):

7.27. а) $(-x)^{-1}=\frac{2}{3}$; б) $(2x+1)^{-1}=\frac{4}{5}$;

в) $(3x^{-1}+2)^{-1}=\frac{3}{7}$; г) $(5-(2x)^{-1})^{-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

7.28. а) $x^{-2}=\frac{4}{9}$; б) $(3x-1)^{-2}=\left(\frac{25}{4}\right)^{-1}$;

в) $(2-x^{-1})^{-2}=4$; г) $(17-(5x)^{-2})^{-1}=1$.

7.29. а) $\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^{-1}=\left(\frac{2x-6}{x}\right)^{-1}$; б) $\left(\frac{3x^{-1}+2}{6x^{-1}-1}\right)^{-1}=\left(\frac{x+2}{3}\right)^{-1}$;

в) $\frac{1-(1{,}5x)^{-1}}{(3x-2)^{-1}}=(3x)^{-1}+5x^{-1}$; г) $\frac{(3x)^{-1}-5^{-1}}{(3x-5)^{-1}}=1-(0{,}6x)^{-1}$.

7.30. а) $x+x^{-1}=2$; б) $x-3(-x)^{-1}=4$;

в) $x+(-x)^{-1}=1{,}5$; г) $x+9x^{-1}=6$.

7.31. а) $x^{-2}-3x^{-1}+2=0$;

б) $x^{-4}-5x^{-2}+4=0$;

в) $(2x+1)^{-2}-3(2x+1)^{-1}-4=0$;

г) $\left(\frac{x+4}{2}\right)^{-4}+\left(2+\frac{x}{2}\right)^{-2}-2=0$.

Решите неравенство (**32—33**):

7.32. а) $x^{-1}>0$; б) $(x+1)^{-1}<0$;

в) $(3-2x)^{-1}<0$; г) $(4x-2)^{-1}>0$.

7.33. а) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-1}<1$; б) $\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^{-1}<(\sqrt{3})^{-2}$;

в) $\frac{2x-5}{(2x)^{-1}-5^{-1}}<0$; г) $\frac{x^{-1}-3^{-1}}{3-x}>0$.

7.34. Найдите все целые значения n, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{2}{7} < 2^n < 3, \\ 3^n > 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^n < 3, \\ \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{5} < 3^n < 4, \\ 2 < \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^n < \frac{1}{3}, \\ 3^n > 0{,}1. \end{cases}$

7.35. Докажите тождество

$$\frac{(pq^{-1}+1)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q} \cdot \frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1} : \frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1} = 1.$$

7.36. Докажите тождество

$$\frac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}} + a^3(a^2-2ab+b^2)^{-2} = \frac{3a^2b-3ab^2+b^3}{(a-b)^4}.$$

7.37. Докажите тождество

$$\frac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}} \cdot \left(a^0 + \left(\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{2bc}.$$

Упростите выражение **(38—39)**:

7.38. а) $\frac{\sqrt{a^{-1}}+\sqrt{b^{-1}}}{\sqrt{a^{-2}}-\sqrt{b^{-2}}} : (\sqrt{b}-\sqrt{a})^{-1}$;

б) $\frac{\sqrt{a^{-1}}-1+(\sqrt{a^{-1}}+1)^{-1}}{(a+\sqrt{a})^{-1}}$;

в) $\frac{\sqrt{4-a^2}+a^2\sqrt{(4-a^2)^{-1}}}{(4-a^2)^{-1}} \cdot \sqrt{\left(1-\left(\frac{2}{a}\right)^{-2}\right)^{-1}}$;

г) $\left(\frac{1-\sqrt{a^{-1}}}{1+(\sqrt{a})^{-1}} + \frac{1+(\sqrt{a})^{-1}}{1-\sqrt{a^{-1}}}\right) \cdot \left(\frac{a^{-1}+1}{a^{-1}-1}\right)^{-1}$.

7.39. $((b-\sqrt{a})^{-1}+(b+\sqrt{a})^{-1}) \cdot \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}\right)^{-1}$;

б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{(1-a^2)^{-1}} + \frac{(\sqrt{2})^3}{a^{-2}}\right) : \left(\frac{a^{-2}}{1+a^{-2}}\right)^{-1}$;

в) $(\sqrt{a^{-1}}+a^{-1})^{-2} \cdot (\sqrt{a^{-2}}-a^{-2}) \cdot \frac{1+\sqrt{(\sqrt{a})^{-2}}}{1-\sqrt{(\sqrt{a})^{-2}}}$;

г) $\sqrt{a} - \frac{a^{-2}-a}{(\sqrt{a})^{-1}-\sqrt{a}} - \frac{a^{-2}-1}{\sqrt{a}+\sqrt{a^{-1}}} + 2(a\sqrt{a})^{-1}$.

7.40. Вычислите:

а) $\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1} - (2\sqrt{2})^{-1}\right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} - \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{-1}\right)$;

б) $\dfrac{4\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^{-1}+3\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)^{-1}}{(6^{-1}+(\sqrt{6})^{-1})^{-1}+(1+(\sqrt{6})^{-1})^{-1}}$.

7.41. Упростите выражение $\left(a+\left(1+\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$ и найдите его значение при $a=-\frac{1}{3}$.

7.42. Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{2}-x^{-1}}{4-\left(\frac{1}{x}\right)^{-2}}:\left(\frac{(2+x)^{-1}}{2^{-2}}-2x^{-1}-1\right)$ и найдите его значение при $x=-\frac{1}{2}$.

7.43. Упростите выражение

$$\frac{1-(a+x)^{-2}}{(1-(a+x)^{-1})^2}:\left(1-\left(\frac{2ax}{1-(a^2+x^2)}\right)^{-1}\right)^{-1}, \text{ если } x=\frac{1}{a-1}.$$

§ 8. ФУНКЦИЯ

1. Квадратичная функция*.

Функция вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b и c — числа, причем $a\neq 0$, называется квадратичной.

График квадратичной функции — парабола. Ветви параболы направлены вверх при $a>0$ и вниз при $a<0$. Абсцисса вершины параболы равна $-\frac{b}{2a}$. Прямая $x=-\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы.

2. Метод интервалов для решения неравенств.

Пусть требуется решить неравенство $f(x)>0$. Это можно сделать по следующей схеме.

1) Найти область определения функции $f(x)$.

2) Найти нули функции, т. е. корни уравнения $f(x)=0$.

3) На координатной прямой указать область определения функции и отметить в ней нули функции. Таким образом, область определения будет разбита на интервалы, в каждом из которых функция сохраняет знак. Для определения знаков значений функции в полученных интервалах достаточно найти знак значения функции в любой точке соответствующего интервала.

Замечание. Рассмотренный метод применим не только для рациональных функций, т. е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены, но и для любых функций, непрерывных на каждом из промежутков, входящих в область определения.

---

* О понятии функции, области ее определения, множестве значений и графике функции см. справочный материал к § 1.

3. Общие свойства функций.

Функция f называется четной, если:

1) область определения функции симметрична относительно нуля, т. е. для любого x, принадлежащего области определения, $-x$ также принадлежит области определения;

2) $f(-x)=f(x)$ для любого x из области определения функции.

Функция f называется нечетной, если:

1) область определения функции симметрична относительно нуля;

2) $f(-x)=-f(x)$ для любого x из области определения функции.

График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция f называется возрастающей на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция f называется убывающей на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума этой функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x)<f(x_0)$.

Точка x_0 из области определения функции f называется точкой минимума этой функции, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x)>f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках — экстремумами функции.

Функции f и g называют взаимно обратными, если:

1) область определения функции f совпадает с множеством значений функции g;

2) множество значений функции f совпадает с областью определения функции g;

3) $y_0=f(x_0)$ тогда и только тогда, когда $x_0=g(y_0)$ (для любого x_0 из области определения функции f и любого y_0 из области определения функции g).

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$.

П р и м е р. 1. Известно, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней и $a+c<b$. Определите знак c.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней, то график функции $f(x)$ не пересекает ось Ox, следовательно, соответствующая парабола целиком лежит либо в верхней, либо в нижней полуплоскости. Заметим, что данное в условии неравенство $a-b+c<0$ можно записать в виде $f(-1)<0$, т. е. существует значение аргумента $x=-1$ такое, что значение функции в этой точке отрицательно. Отсюда следует, что график функции $f(x)$ лежит в нижней полуплоскости, значит, $f(x)<0$ для всех действительных x. Но $c=f(0)$, поэтому $c<0$.

Пример 2. Решите неравенство $\frac{7}{x^2-5x+6}+1\geqslant\frac{9}{3-x}$.

Решение. Разложив знаменатель первой дроби на множители, перенеся все слагаемые в левую часть и приведя их к общему знаменателю, получим $\frac{x^2+4x-5}{(x-3)(x-2)}\geqslant 0$. Положим $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x-3)(x-2)}$ и решим неравенство $f(x)\geqslant 0$ методом интервалов.

1) Область определения функции — множество действительных чисел, кроме 2 и 3.

2) $f(x)=0$, если $x=1$ или $x=-5$.

3) Так как областью определения функции является множество действительных чисел, кроме чисел 2 и 3, то на координатной прямой выколем точки 2 и 3. Отметим нули функции — точки 1 и -5 (рис. 1). Поскольку решается нестрогое неравенство, то нули функции входят в множество решений (это принято изображать «жирными» точками на координатной прямой). Расставляя знаки значений функции в полученных интервалах, получаем, что $f(x)\geqslant 0$, если $x\leqslant -5$, $1\leqslant x<2$, $x>3$.

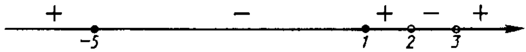

Рис. 1

Пример 3. Исследуйте на четность — нечетность функцию

$$f(x)=\frac{|x-5|(x+6)}{2x-1}-\frac{|x+5|(x-6)}{2x+1}.$$

Решение. Область определения функции — множество действительных чисел, кроме $\pm 0{,}5$, значит, область определения симметрична относительно нуля. Рассмотрим выражение $f(-x)$ и попытаемся выразить его через $f(x)$:

$$f(-x)=\frac{|-x-5|(-x+6)}{2(-x)-1}-\frac{|-x+5|(-x-6)}{2(-x)+1}=$$

$$=\frac{-|x+5|(x-6)}{-(2x+1)}-\frac{-|x-5|(x+6)}{-(2x-1)}=$$

$$=\frac{|x+5|(x-6)}{2x+1}-\frac{|x-5|(x+6)}{2x-1}=-f(x).$$

Значит, функция $f(x)$ по определению является нечетной.

Пример 4. Найдите функцию, обратную функции $y=x^2-$ $-4x+7$, где $x\in(-\infty;\ 2]$.

Решение. На промежутке $(-\infty;\ 2]$ данная функция убывает, а значит, обратима. Для получения формулы, задающей обратную функцию, заменим переменную x на y, y на x в аналитическом задании данной функции и из полученной формулы выразим переменную y: $x=y^2-4y+7$, $y^2-4y+(7-x)=0$, рассматривая последнее уравнение как квадратное относительно y, имеем $y=2\pm\sqrt{x-3}$. Поскольку область значений обратной функции — промежуток $(-\infty; 2]$ (совпадает с областью определения исходной функции), то перед корнем берем знак «минус», имеем: $y=2-\sqrt{x-3}$.

Упражнения

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Разложите на множители (**1—5**):

8.1. а) x^2-x-72; б) $-y^2-4y+21$;
в) $3a^2+8a+5$; г) $-4b^2+7b-3$.

8.2. а) $15u^2+u-2$; б) $-21v^2+8v+4$;
в) $20p^2+31p+12$; г) $-42q^2+59q-20$.

8.3. а) $49c^2-42c+9$; б) $-25-80d-64d^2$;
в) $-16n^2+6\frac{6}{7}n-\frac{36}{49}$; г) $11{,}25m^2+12m+3{,}2$.

8.4. а) x^4-13x^2+36; б) $-y^4+26y^2-25$;
в) $-36c^4+25c^2-4$; г) $100d^4-226d^2+2{,}25$.

8.5. а) $a^2+10ab+9b^2$; б) $-15u^2+2uv+v^2$;
в) $-8x^2-10xy-3y^2$; г) $7n^2-22mn+3m^2$.

Сократите дробь (**6—10**):

8.6. а) $\frac{a^2-6a+8}{8-0{,}5a^2}$; б) $\frac{27b^3+1}{3b^2+10b+3}$;
в) $\frac{8c^2+10c-3}{8c^3+36c^2+54c+27}$; г) $\frac{8d^3-12d^2+6d-1}{-14d^2+3d+2}$.

8.7. а) $\frac{x^2+(2-\sqrt{3})x-2\sqrt{3}}{x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}}$; б) $\frac{a^2+(\sqrt{2}-1)a-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+(1-3\sqrt{2})a-3a^2}$;
в) $\frac{b^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})b-\sqrt{6}}{-b^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})b+\sqrt{15}}$; г) $\frac{3y^2+(3\sqrt{6}-\sqrt{2})y-2\sqrt{3}}{2y^2-(\sqrt{3}-2\sqrt{6})y-3\sqrt{2}}$.

8.8. а) $\frac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$; б) $\frac{2b^4+7b^2+6}{3b^4+3b^2-6}$;
в) $\frac{3c^6-2c^3-5}{-6c^6+13c^3-5}$; г) $\frac{30d^6-2d^3-4}{6d^6-19d^3-7}$.

8.9. а) $\frac{6a^2+ab-2b^2}{4b^2-11ab+6a^2}$; б) $\frac{3n^2+mn-4m^2}{8m^2+18mn+9n^2}$;
в) $\frac{6v^2-13uv-5u^2}{3u^2+5uv-12v^2}$; г) $\frac{10c^2+cd-2d^2}{15c^2-31cd+10d^2}$.

8.10. а) $\frac{2x^2+(3a+4b)x+a^2+3ab+2b^2}{x^2+(a+b-2)x-2a-2b}$;
б) $\frac{2x^2+(4a-6b-1)x-2a+3b}{x^2+(3a-4b)x+2a^2-5ab+3b^2}$.

Упростите выражение **(11—14)**:

8.11. а) $\frac{x^2+x-20}{x-4}-\frac{2x^2-5x+3}{2x-3}-\frac{4-8x-5x^2}{x+2}$;

б) $\frac{x^2+x-56}{0{,}5x+4}-\frac{3x^2-x-14}{x+2}-\frac{6+7x-5x^2}{5x+3}$.

8.12. а) $\frac{(7x-x^2-12)^2}{x^2-8x+16}+\frac{2x^2-7x+5}{x-1}$;

б) $\frac{(-x^2-3x-2)^2}{x^2+4x+4}-\frac{2x^2-x-1}{x-1}$.

8.13. а) $\frac{(2-x)(2x^2-5x-3)}{x^3-3x^2-4x+12}+\frac{3x^2+4x-7}{3x^2+13x+14}$;

б) $\frac{6x^2+17x-10}{4x^2+12x-7}+\frac{x^3-2x^2-9x+18}{(3-x)(2x^2+3x-14)}$.

8.14. а) $\frac{(x^2+3x)^2-2x^2-6x-8}{x^4-5x^2+4}-\frac{4x^2+16x+16}{x^3+2x^2-4x-8}$;

б) $\frac{3x^2+30x+75}{x^3+5x^2-25x-125}-\frac{x^4-10x^2+9}{(x^2-4x)^2-2x^2+8x-15}$.

8.15. а) Найдите p и q, если точка $A\ (1;\ -2)$ является вершиной параболы $y=x^2+px+q$.

б) Найдите k и m, если точка $A\ (-2;\ -7)$ является вершиной параболы $y=kx^2+8x+m$.

8.16. а) Найдите a, b и c, если точка $M\ (-1;\ -7)$ является вершиной параболы $y=ax^2+bx+c$, пересекающей ось ординат в точке $N\ (0;\ -4)$.

б) Найдите a, b и c, если точка $M\ (1;\ 5)$ является вершиной параболы $y=ax^2+bx+c$, пересекающей ось ординат в точке $N\ (0;\ 1)$.

8.17. а) Найдите функцию $y=ax^2+bx+c$, если известно, что график ее проходит через точки $A\ (1;\ 4)$, $B\ (-1;\ 10)$, $C\ (2;\ 7)$.

б) Парабола $y=ax^2+bx+c$ проходит через точку $B\ (-1;\ 5)$ и имеет вершину $A\ (1;\ 1)$. Найдите ординату такой точки данной параболы, абсцисса которой равна 5.

Постройте график функции **(18—24)**:

8.18. а) $y=-0{,}2x^2+2$; б) $y=-3(x+1)^2+2$;

в) $y=-x(3x+2)$; г) $y=(2-x)(x-6)$.

8.19. а) $y=(x+2)^2-4(x+2)+3$; б) $y=-(x-1)^2+5(x-1)-4$;

в) $y=-(x+1)^2+6(x+1)-8$; г) $y=(x-2)^2-2(x-2)-3$.

8.20. а) $y=(x^2-2)^2-(x^2-1)^2$;

б) $y=(x+2)^3-(x+1)^3$;

в) $y=(x-1)^2(x-2)-(x-2)^2(x-1)$;

г) $y=(x-1)x(x+1)-x(x+1)(x+2)$.

8.21. а) $y=\sqrt{x^4+8x^2+16}$; б) $y=\sqrt{x^4-6x^2+9}$;

в) $y=1-\sqrt{x^4+2x^2+1}$; г) $y=1-\sqrt{x^4-4x^2+4}$.

8.22. а) $y=x^2-\frac{|x|}{x}$; б) $y=x^2-\frac{x^2}{|x|}$;

в) $y=1-x\,|x|$; г) $y=2x+x\sqrt{x^2}$.

8.23. а) $y=\frac{x^3}{(\sqrt{x})^2}-1$; б) $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}-1$;

в) $y=4x-\frac{x^3}{(\sqrt{x})^2}$; г) $y=4x-\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}$.

8.24. а) $y=x^2-3x-(\sqrt{3x-9})^2$; б) $y=x^2-3x-\sqrt{(3x-9)^2}$;

в) $y=x\,(\sqrt{x-3})^2-3x+8$; г) $y=x\sqrt{(x-3)^2}-3x+8$.

8.25. При каком значении b корнем квадратного трехчлена $f(x)=-3x^2+bx-2b-12$ является число 6? При найденном значении b определите второй корень трехчлена, постройте график функции $y=f(x)$, укажите промежутки возрастания и убывания функции, значения x, при которых $f(x)<0$, $f(x)>0$, $-9\leqslant f(x)<3$.

8.26. При каком значении c корнем квадратного трехчлена $f(x)=x^2-12x+c$ является число 9? При найденном значении c определите второй корень трехчлена, постройте график функции $y=f(x)$, укажите промежутки возрастания и убывания функции $y=f(x)$, значения x, при которых $f(x)<0$, $f(x)>0$, $-5\leqslant f(x-1)<7$.

8.27. Постройте график квадратного трехчлена $y=ax^2-(a+6)x+9$, если известно, что прямая $x=2$ является его осью симметрии.

8.28. Постройте график функции:

а) $y=x^2-6x+a$, если известно, что ее наименьшее значение равно 1;

б) $y=-x^2+4x+a$, если известно, что ее наибольшее значение равно 2.

8.29. Постройте график квадратного трехчлена:

а) $y=2x^2-(a+2)\,x+a$, если известно, что корни x_1 и x_2 связаны соотношением $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$;

б) $y=x^2+3x+a$, если известно, что его корни связаны соотношением $x_1^2x_2+x_2^2x_1=12$.

8.30. При каких значениях a множество значений функции $y=x^2-2x+a$ совпадает с областью определения функции $y=\sqrt{2x-a}$?

8.31. При каких значениях a множество значений функции $y=-x^2+4x+a$ не пересекается с областью определения функции $y=\sqrt{3x+a}$?

8.32. При каких значениях b графики функций $y=2bx^2+2x+1$ и $y=5x^2+2bx-2$ пересекаются в одной точке?

8.33. Даны функции $f(x)=2x^2$ и $g(x)=5x-c$.

а) Не выполняя построения, определите, пересекаются ли графики функций при $c=2$.

б) Исследуйте взаимное расположение графиков функций f и g в зависимости от параметра c.

8.34. Даны функции $f(x)=mx^2-3$ и $g(x)=4x+1$.

а) Не выполняя построения, определите, пересекаются ли графики функций при $m=-2$.

б) Исследуйте взаимное расположение графиков функций f и g в зависимости от параметра m.

8.35. Графики функций $y=x^2+6x-3$ и $y=(x+3)^2-25$ пересечены прямой $x=a$. Найдите расстояние между точками пересечения.

8.36. Графики функций $y=2x-x^2$ и $y=2x^2-20x+48$ пересечены прямой $y=a$. Найдите число точек пересечения в зависимости от a.

8.37. Графики функций $y=x^2+2x+4$ и $y=-3x^2-18x-25$ пересечены прямой $y=b^2$. Найдите число точек пересечения в зависимости от b.

8.38. При каких значениях параметра k вершина параболы $y=kx^2-7x+4k$ лежит во второй четверти?

8.39. При каких значениях c вершина параболы $y=x^2+6x+c$ находится на расстоянии, равном 5, от начала координат?

8.40. При каких значениях b вершина параболы $y=x^2+2bx+13$ находится на расстоянии, равном 5, от начала координат?

8.41. При каких значениях a вершина параболы $y=ax^2+2x+1$ находится на расстоянии $2\sqrt{2}$ от точки $A(1;\ 2)$?

8.42. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$ имеет два различных положительных корня.

8.43. Найдите все значения параметра k, при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2+2(k-1)x+3k+1=0$ удовлетворяет неравенству $x<-1$.

8.44. При каких значениях параметра a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2-(2a+1)x+4-a=0$?

8.45. При каких значениях параметра k число -2 заключено между корнями уравнения $-x^2+(3k-1)x+k-1=0$?

8.46. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $3x^2-4(3a-2)x+a^2+2a=0$ имеет корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $x_1<a<x_2$.

8.47. Изобразите на координатной плоскости множество точек, каждая из которых равноудалена от данной точки F и данной прямой, если:

а) $F(-4;\ 1)$, $y=-1$; б) $F(4;\ -1)$; $y=1$;

в) $F(1;\ 4)$, $y=3$; г) $F(-1;\ -4)$, $y=-3$.

8.48. На прямой $2x-y-5=0$ найдите такую точку M, сумма расстояний от которой до точек $A(-7;\ 1)$ и $B(-5;\ 0)$ была бы наименьшей.

8.49. а) Какую линию описывают вершины парабол $y=x^2+2px+p^2+p$, где $p\in\mathbf{R}$?

б) Какую линию описывают вершины парабол $y=x^2-2ax+2a^2$, где $a\in\mathbf{R}$?

8.50. Парабола $y=x^2+px+q$ пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=1$. При каких значениях p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox минимально? Найдите это расстояние.

НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенство **(51—54)**:

8.51. а) $(5x-2)(4x+3)\leqslant 0$; б) $(6x-5)(8x+1)>0$;
в) $8x^2+3x-5\geqslant 0$; г) $3x^2+5x-8<0$.

8.52. а) $2x^2-3x+5>0$; б) $3x^2-4x+2\geqslant 0$;
в) $x^2-10x+27<0$; г) $5x^2-12x+8\leqslant 0$.

8.53. а) $9x^2+12x+4\leqslant 0$; б) $49x^2-70x+25>0$;
в) $64x^2+112x+49\geqslant 0$; г) $25x^2-40x+16<0$.

8.54. а) $(x^2+1)^3<(3-x)^3$;
б) $8(x-2)^3>(x^2-3)^3$;
в) $(x^2-1)(x^2+4)\leqslant(2x^2-5)(x^2+4)$;
г) $(3x^2+4)(2x^2+1)\geqslant(2x^2+1)(2+5x^2)$.

8.55. Равносильны ли неравенства:
а) $5x^2>2x$ и $5x>2$; б) $3x^3<7x^2$ и $3x<7$;
в) $4x^5\leqslant 5x^4$ и $4x\leqslant 5$; г) $2x^3\geqslant 3x^2$ и $2x\geqslant 3$?

8.56. При каком значении a неравенства равносильны:
а) $|x-2|<3$ и $x^2-(a-1)x-a<0$;
б) $|x-1|\geqslant 2$ и $x^2-ax-a\geqslant 1$?

Решите неравенство **(57—60)**:

8.57. а) $(2x^2+3x+4)(x+3)\geqslant 0$; б) $(7+6x-x^2)(3x-5)<0$;
в) $(25x-x^3)(4-x^2)\leqslant 0$; г) $(x^4-27x)(x^2-4x-5)>0$.

8.58. а) $x^4-13x^2+36\leqslant 0$; б) $x^4-2x^2-15\geqslant 0$;
в) $x^4-12x^2+36>0$; г) $16x^4-24x^2+9\leqslant 0$.

8.59. а) $(x-1)^2(x^2-2)<(x-1)^2(6-2x)$;
б) $(x-1)^3(x-2)(2x-3)<(x-1)^3(x-2)^2$;
в) $(x-4)^3(x^2-10x+25)\geqslant(x-4)^3(5-x)$;
г) $(x-1)(2x-4)(x-3)^2\leqslant(x^2-3x+2)(x-3)^2$.

8.60. а) $(x^2-4x+4)(3x^2-2x-1)\leqslant 0$;
б) $(9x^2-6x+1)(x^2-6x+8)>0$;
в) $(x^2+x)^2(7x^2-5x-2)\geqslant 0$;
г) $(5x^2+6x+1)(x^4-4x^3+4x^2)\leqslant 0$.

8.61. Дана функция $f(x)=(x-3)^4(x+1)^3x^2$. Укажите все значения x, при которых:
а) $f(x)<0$; б) $f(x)\leqslant 0$; в) $f(x)>0$; г) $f(x)\geqslant 0$.

8.62. Дана функция $f(x)=(x+3)(x-2)^2(x+1)^3(x-4)^4$. Укажите все значения x, при которых график функции расположен: а) в верхней полуплоскости; б) в нижней полуплоскости.

8.63. Дана функция $g(x)=3-x-x^2$.
1) При каких значениях x имеет место неравенство $g(x)\leqslant 1$?
2) Найдите наибольшее значение функции $g(x)$.
3) Решите неравенство $g(x)>g(x^2)$.
4) При каких значениях a неравенство $g(x)<a$ выполняется при всех значениях x?

8.64. Решите неравенство:
а) $x^2-2(b-c)x+a^2>0$;
б) $x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^2b^2>0$, если a, b и c — длины сторон треугольника.

8.65. При каких значениях a решением неравенства $x^2-(a^2-2a-3)x+a^2+2\leqslant 0$ является отрезок $[2; 3]$?

8.66. При каких значениях a решением неравенства

$$x^2+(a^2-7)x+a^2+2a+6>0$$

является объединение промежутков $(-\infty; 1)$ и $(5; \infty)$?

Решите неравенство **(67—71)**:

8.67. $3x^2-b\leqslant ax$, если известно, что $a^2+12b<0$.

8.68. $5x^2-ax+b>0$, если известно, что $b>0{,}05a^2$.

8.69. $ax^2+bx+c\leqslant 0$, если известно, что $b^2<4ac$ и $a+c>b$.

8.70. $ax^2+x-b>0$, если известно, что $ab<-0{,}25$ и $b<9a+3$.

8.71. $ax^2+bx+c\geqslant 0$, если известно, что $b^2-4ac\leqslant 0$ и $a+b+c<0$.

Равносильны ли неравенства **(72—74)**:

8.72. а) $(2x+5)(3-2x)<0$ и $\frac{3-2x}{2x+5}<0$;

б) $(3x-5)(5+2x)\geqslant 0$ и $\frac{3x-5}{5+2x}\geqslant 0$?

8.73. а) $2x+\frac{3x-1}{x+1}>\frac{3x-1}{x+1}-4$ и $x>-2$;

б) $5x-\frac{2x+5}{x-4}\leqslant 10-\frac{2x+5}{x-4}$ и $x\leqslant 2$?

8.74. а) $\frac{1}{x}<1$ и $x>1$; б) $\frac{2}{x^2}>1$ и $x^2<2$;

в) $\frac{2}{|x|}<1$ и $|x|>2$; г) $\frac{3}{|x|}>1$ и $|x|<3$?

Решите неравенство **(75—82)**:

8.75. а) $\frac{3x-1}{2x+5}>3$; б) $\frac{2x-1}{3x+5}\leqslant-2$;

в) $\frac{7x+4}{3-2x}\geqslant2$; г) $\frac{5-6x}{3x+4}<1$.

8.76. а) $\frac{(x^2-9)(1-x)}{x^2+2x+1}\geqslant0$; б) $\frac{x^2+x-6}{(9-x)^3}\leqslant0$;

в) $\frac{x^2+6x+9}{5+4x-x^2}\geqslant0$; г) $\frac{x^2+8x+7}{4x^2+4x+1}<0$.

8.77. а) $\frac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)}>0$; б) $\frac{(x-1)^3}{(5x+10)^2(-1-3x)}<0$;

в) $\frac{x^2(6-x)^3(x+4)}{(x+7)^5}\geqslant0$; г) $\frac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}\leqslant0$.

8.78. а) $3-x\geqslant\frac{1}{2-x}$; б) $\frac{8-x}{x-10}\leqslant\frac{2}{2-x}$;

в) $\frac{2x-3}{4x-1}\geqslant\frac{x-2}{x+2}$; г) $\frac{x+1}{1-x}+\frac{x-1}{x}<2$.

8.79. а) $\frac{3x-5}{x^2+4x-5}\leqslant0{,}5$; б) $\frac{2x+3}{12-x-x^2}+0{,}5\geqslant0$;

в) $\frac{5-2x}{3x^2-2x-16}<1$; г) $\frac{5-4x}{3x^2-x-4}<4$.

8.80. а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\geqslant\frac{1}{x+2}$; б) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x}>\frac{3}{x-1}$;

в) $\frac{6}{x-1}\leqslant\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}$; г) $\frac{21}{x+1}<\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}$.

8.81. а) $\frac{14x(2x+3)}{x+1}<\frac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$;

б) $\frac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leqslant\frac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$;

в) $\frac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9}>\frac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$;

г) $\frac{(x^2-6x+9)(3x^2-2x-1)}{5-x}\leqslant\frac{(x^2-6x+9)(2+2x-4x^2)}{5-x}$.

8.82. а) $\left(\frac{x^2-2}{x+1}\right)^2>0$; б) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{6}{x-2}+9>0$;

в) $(x-3)^2+\frac{1}{x^2-6x+9}>2$; г) $x^2+\frac{x^2-8x+16}{x^2-2x+1}>\frac{8x-2x^2}{x-1}$.

8.83. Укажите все целые значения x, для которых не выполняется неравенство $1<\frac{3x-1}{2x+1}<2$.

8.84. Найдите множество значений x, при которых график функции $y=\frac{x-13}{x^2+x-6}$ не выходит за пределы полосы $0\leqslant y\leqslant 1$.

8.85. Укажите все целочисленные решения неравенства $0<|x^2-2x|<3$.

Решите систему неравенств **(86—89)**:

8.86. а) $\begin{cases} 2(x-1)-3(x-4)>x+5, \\ \frac{3x-4}{x^2+4x+4}\geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+3x+2>0, \\ \frac{x}{x+1}\leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x^2>1, \\ -2x^2+5x-3>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0, \\ x^2-4x<0. \end{cases}$

8.87. а) $\begin{cases} x^2-2x-3>0, \\ x^2-11x+28\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2-4x+1>0, \\ 3x^2-5x+2\leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{2-x}{x+1}\geqslant 1, \\ \frac{2-x}{x+1}\leqslant 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}>1, \\ \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\leqslant 2. \end{cases}$

8.88. а) $\begin{cases} x^2\leqslant 4, \\ x^2-x-6\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |2x-3|\leqslant 1, \\ x^2-4x+3\geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+2x-3\geqslant 0, \\ x^2+x-6\leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x^2-4}\,(x-3)\geqslant 0, \\ |x+2|\,(x^2-5x+6)\leqslant 0. \end{cases}$

8.89. а) $\begin{cases} x^2-14x+45<0, \\ x^2-11x+30>0, \\ \frac{2x-3}{x^2-x+2}>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2-5x-2>0, \\ 3x^2-7x-6<0, \\ 6x^2-11x-10\leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-x-20<0, \\ x^2-2x-8>0, \\ 2x^2+x-45<0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x^2-4x-3\leqslant 0, \\ \frac{1}{x^2}\geqslant 1, \\ 3x^2-20x-7<0. \end{cases}$

Решите совокупность неравенств **(90—91)**:

8.90. а) $\left[\begin{array}{l} x^2-3x+2\geqslant 0, \\ |2x-3|<1; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 3x^2-7x+4<0, \\ x^2-4\leqslant 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} 4x^2+7x-15\leqslant 0, \\ 20x^2-23x-21<0; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x^2-6x-27>0, \\ 4x^2+31x+60\leqslant 0. \end{array}\right.$

8.91. а) $\left[\begin{array}{l} x^2+16x+15\geqslant 0, \\ \dfrac{2x-1}{x+1}\geqslant 3; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 9x^2-4x-5<0, \\ \dfrac{5x-2}{3-2x}\leqslant 1; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x-1}<0, \\ \dfrac{x^2}{x+1}\leqslant 0; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{3-2x-x^2}\leqslant 1, \\ 11x-x^2>28. \end{array}\right.$

8.92. Найдите все значения x, при которых меньшее из двух выражений $1-x^2$ и $\frac{1-x}{2}$ не меньше, чем 0,5.

8.93. Найдите все значения x, при которых большее из двух выражений x^2+2x и $-\frac{x}{2}$ не больше, чем 0,5.

8.94. Найдите все значения x, при которых большее из двух выражений $2x-x^2$ и $x-2$ не меньше, чем 1.

8.95. Найдите все значения x, при которых меньшее из двух выражений x^2-2x-3 и $x-3$ не больше, чем -4.

Найдите область определения функции **(96—99)**:

8.96. а) $y=\sqrt{60x-25x^2-36}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{112x+64+49x^2}}$;

в) $y=\sqrt{5x^2+6x+1}+\dfrac{1}{3x+5}$; г) $y=\sqrt{3x+4}-\dfrac{1}{\sqrt{-2x^2-5x-2}}$.

8.97. а) $y=\sqrt{4-x\,|x|}$; б) $y=\sqrt{|x|\,(x-1)}$;

в) $y=\sqrt{(x-2)\sqrt{x}}$; г) $y=\sqrt{(1-x)\sqrt{x-2}}$.

8.98. а) $y=\sqrt{\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+7x+12}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{-x^2+6x-8}{x^2+5x+6}}$;

в) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+x-20}}+\sqrt{x^2+5x-14}$;

г) $y=\sqrt{20-x-x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{14-5x-x^2}}$.

8.99. а) $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{-4x^2+4x+3}{\sqrt{2x^2-7x+3}}}$; г) $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{6+7x-3x^2}}{-3x^2+2x+8}}$.

Решите неравенство **(100—102)**:

8.100. а) $|x^2+2x|\geqslant 3$; б) $|x^2+3x|\leqslant 4$;

в) $|2x^2+5x-4|<3$; г) $|3x^2-4x-2|>2$.

8.101. а) $x^2-5\,|x|+6<0$; б) $7\,|x|-x^2-12\leqslant 0$;

в) $x^2-|x|-12\geqslant 0$; г) $11\,|x|+20-3x^2>0$.

8.102. а) $|x^2-4|\,(x^2-1)\leqslant 0$; б) $|x^2-4|\,(x^2-4x+3)\leqslant 0$;
в) $|x^2-6x+9|<2x-6$; г) $x^2-2x+1<2\,|x-1|$.

8.103. Найдите целочисленные решения неравенства:
а) $|x^2+2x|\leqslant x$;
б) $|x^2+2x-3|<|6x-6|$;
в) $|x^2-9|\,(x^2-7\,|x|+10)<0$;
г) $|x^2-4x+3|+2<2\,|x-1|+|x-3|$.

Решите неравенство **(104—106)**:

8.104. а) $\left|\frac{x-1}{2-x}\right|\geqslant 1$; б) $\frac{1+|4-x|-x}{3-x}<1$;
в) $\frac{|x-1|+x+1}{2-x}\geqslant 2$; г) $\frac{|x-2|}{x+4}<1$.

8.105. а) $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}\leqslant 0$; б) $\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}>2$;
в) $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}<2x$; г) $\frac{|x^2+x-6|}{x^2-x+1}\geqslant 1$.

8.106. а) $x^2+6x-|x+3|+7<0$;
б) $x^2+0{,}5x-4\,|x+0{,}25|+3{,}0625\geqslant 0$;
в) $\frac{3x^2-5x-7\,|x-2|+15}{2x^2-x+1}\leqslant 1$;
г) $\frac{2x^2+15x-10\,|2x+3|+32}{2x^2+3x+2}>1$.

8.107. При каких значениях c графики функций $y=cx^2-x+c$ и $y=cx+1-c$ не имеют общих точек?

8.108. При каких значениях p графики функций $y=px^2-24x+1$ и $y=12x^2-2px-1$ не пересекаются?

8.109. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2+3x+a=0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1>0$?

8.110. Найдите все значения параметра b, для которых уравнение $x^2-2bx+b+6=0$ имеет: а) отрицательные корни; б) положительные корни; в) корни разных знаков.

8.111. При каких значениях a неравенство:
а) $x^2-(a+2)\,x+8a+1>0$; б) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$;
в) $ax^2+4x+a+3<0$; г) $ax^2-4ax-3\leqslant 0$
выполняется для всех действительных значений x?

8.112. При каких значениях b неравенство:
а) $x^2+2bx+1<0$;
б) $bx^2+4bx+5\leqslant 0$;
в) $bx^2+(2b+3)\,x+b-1\geqslant 0$;
г) $(4-b^2)\,x^2+2\,(b+2)\,x-1>0$
не имеет решений?

Для каждого значения a решите неравенство **(113—115)**:

8.113. а) $x^2-ax+3\leqslant 0$; б) $x^2+2x-a>0$;
в) $ax^2+3x-4\geqslant 0$; г) $ax^2-x+2<0$.

8.114. а) $x^2-2ax+2a^2-2a+1>0$;
б) $x^2-2ax+2a^2+4a+4\leqslant 0$;
в) $9x^2+12ax+5a^2\leqslant 4a-4$;
г) $16x^2+13a^2+4a>24ax-1$.

8.115. а) $\frac{x(x-a)}{x+3}\leqslant 0$; б) $\frac{x(x-3)}{x-a}\geqslant 0$;
в) $\frac{x^2-(a-3)x-3a}{x^2-4}\geqslant 0$; г) $\frac{24-5x-x^2}{x^2+(2a-5)x-10a}\leqslant 0$.

8.116. При каких значениях a не существует ни одного значения x, одновременно удовлетворяющего неравенствам $x^2-ax<0$ и $ax>1$?

8.117. При каких значениях a нули функции $f(x)=x^2+2(a-2)x+2a-5$ расположены между числами -2 и 4?

8.118. При каких значениях a нули функции $g(x)=x^2-4(a-3)x-20a+35$ расположены между числами -4 и 3?

8.119. При каком значении параметра a оба корня уравнения $x^2-(2a+1)x+4-a=0$ заключены между числами 1 и 3?

8.120. Найдите все значения параметра a, при которых все решения неравенства $x^2-2(a+4)x+4a+13\leqslant 0$ являются решениями неравенства $x^2+4|x|-5\leqslant 0$.

8.121. При каких значениях параметра a любое решение неравенства $x^2-3x+2<0$ является одновременно решением неравенства $ax^2-(3a+1)x+3>0$?

8.122. При каких значениях параметра p неравенство $px^2-4x+3p+1>0$ справедливо при всех положительных x?

8.123. Укажите все значения параметра k, при которых квадратный трехчлен x^2+kx+k^2+6k отрицателен при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству

$$8x^2+17<24x+2|x-1{,}5|.$$

8.124. Найдите все значения a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2+(1-a^2)x-a>0$, по модулю не превосходит 2.

8.125. Найдите все значения параметра b, при которых из неравенства $bx^2-x+1-b<0$ следует неравенство

$$x(x+1)^2(x-1)^3(x+2)^4<0.$$

8.126. Даны два утверждения:

1) уравнение $x^2+(k+2)x+1=0$ имеет два различных отрицательных корня;

2) уравнение $x^2+(1-k)x+4=0$ имеет два различных положительных корня.

При каких значениях параметра k оба утверждения истинны; оба утверждения ложны; одно из утверждений истинно, а другое ложно?

Найдите область определения функции (**127—129**):

8.127. а) $y=\frac{2}{\sqrt{x}-3}$; б) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

в) $y=\frac{3}{x-2\sqrt{x}}$; г) $y=\frac{2}{\sqrt{x^2-6x+8}-2}$.

8.128. а) $y=\frac{5x}{2|x+1|-5}$. При каком значении аргумента значение функции равно 2?

б) $y=\frac{1}{|x+2|-|x-2|}$. При каком значении аргумента значение функции равно 1?

в) $y=\frac{5}{|x-2|-|2x+3|}$. При каком значении аргумента значение функции равно -1?

г) $y=\frac{4x}{|x-3|-3|x+1|}$. При каком значении аргумента значение функции равно 4?

8.129. а) $y=\sqrt{12x^2-4x^3-9x}-\sqrt{2-|x|}$;

б) $y=\sqrt{|x-1|(3x-6)}+\frac{3}{x^2+4x-21}$;

в) $y=\frac{\sqrt{(x^2-4x-21)|x+2|}}{x^2+x-72}$;

г) $y=\sqrt{5-\sqrt{4x^2-20x+25}}-\sqrt{|x|(2x-10)}$.

Найдите область значений функции (**130—136**):

8.130. а) $y=x^2+2$; б) $y=3-4x^2$;
в) $y=3x-x^2$; г) $y=3x^2-6x+1$.

8.131. а) $y=\frac{5}{x-2}$; б) $y=\frac{x}{x+1}$; в) $y=\frac{2}{x^2+2}$; г) $y=\frac{x^2+1}{x}$.

8.132. а) $y=\sqrt{x-2}+3$; б) $y=|x-4|-2$;

в) $y=5-\sqrt{2x+1}$; г) $y=3-|2x+3|$.

8.133. а) $y=\sqrt{x^2+4}$; б) $y=4-2\sqrt{x^2+9}$;
в) $y=\sqrt{3x^2-6x+4}$; г) $y=\sqrt{8x-2x^2-7}$.

8.134. а) $y=1-\frac{5}{\sqrt{x-1}+1}$;

б) $y=2-\frac{3}{2x^2-8x+9}$;

в) $y=1-\sqrt{9-\sqrt{2x^2+6\sqrt{2}x+9}}$;

г) $y=3-\sqrt{16-\sqrt{4x^2-4\sqrt{3}x+3}}$.

8.135. а) $y=\begin{cases}(x-1)^3, \text{ если } x\geqslant 0,\\ \frac{1}{x-1}, \text{ если } x<0;\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}-x^2-2x, \text{ если } x<1,\\ -\frac{3}{x}, \text{ если } x\geqslant 1;\end{cases}$

в) $y=\begin{cases}2x^2+8x+6, \text{ если } x<-1,\\ 3\sqrt{x+1}, \text{ если } x\geqslant -1;\end{cases}$

г) $y=\begin{cases}\frac{8}{x}, \text{ если } x\leqslant -2,\\ x^3+4, \text{ если } -2<x\leqslant 0,\\ \frac{4}{x^2+1}, \text{ если } x>0.\end{cases}$

8.136. а) $y=\frac{x^3+8}{x+2}$; б) $y=\frac{(x^3+8)(x-4)}{x^2-2x-8}$;

в) $y=\frac{x^3-27}{x-3}$; г) $y=\frac{x^4+6x^3-27x-162}{x^2+3x-18}$.

Найдите наибольшее значение функции и значение аргумента, при котором достигается это наибольшее значение **(137—138)**:

8.137. а) $y=5-|x+8|$;

б) $y=2-\sqrt{x-2}$;

в) $y=x^2-2x+3$, если $x\in[1;\ 5]$;

г) $y=-x^2-4x+1$, если $x\in[-3;\ 0]$.

8.138. а) $y=\frac{2}{5+|3x-2|}$; б) $y=\frac{2}{x^2-2x+2}$;

в) $y=\frac{2x}{x^2+1}$; г) $y=\frac{x}{4x^2+9}$.

Найдите наименьшее значение функции и значение аргумента, при котором достигается это наименьшее значение **(139—140)**:

8.139. а) $y=\sqrt{4x^2-12x+9}-2$;

б) $y=3+\sqrt{x^2-3x+2}$;

в) $y=x^2+6x+11$, если $x\in[-4;\ 2]$;

г) $y=-x^2+2x+2$, если $x\in[-1;\ 2]$.

8.140. а) $y=-\frac{3}{|x+1|+1}$; б) $y=-\frac{2}{x^2+1}$;

в) $y=-\frac{x}{12x^2+3}$; г) $y=\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}$.

8.141. Функции f и g возрастают на промежутке X. Верно ли, что функции:

а) $f+g$, f^2 и fg возрастают на промежутке X;

б) $-f$, $\frac{1}{f}$ убывают на промежутке X?

Используя определение возрастания и убывания функции на промежутке, докажите, что функция **(142—144)**:

8.142. а) $y=\frac{5}{2x+1}$ убывает на $(-\infty;\ -0{,}5)$;

б) $y=\frac{4}{2-x}$ возрастает на $(2;\ \infty)$;

в) $y=\frac{21x-9}{3x-1}$ возрастает на $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$;

г) $y=\frac{4x+31}{x+7}$ убывает на $(-7;\ \infty)$.

8.143. а) $y=3x^2-4x+7$ убывает на $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$.

б) $y=-5x^2+6x+19$ возрастает на $(-\infty;\ 0{,}6]$.

в) $y=3\sqrt{4x+1}-1$ возрастает на $[-0{,}25;\ \infty)$;

г) $y=2+\sqrt{3-5x}$ убывает на $(-\infty;\ 0{,}6]$.

8.144. а) $y=x^3-3x$ возрастает на $[1;\ \infty)$;

б) $y=12x-x^3$ убывает на $[2;\ \infty)$;

в) $y=0{,}5x^2-2\sqrt{x}$ возрастает на $[1;\ \infty)$ и убывает на $[0;\ 1]$;

г) $y=\sqrt{x}-2x^2$ возрастает на $[0;\ 0{,}25]$ и убывает на $[0{,}25;\ \infty)$.

8.145. Дана функция $f(x)=x^2$. Докажите, что для любых значений аргумента x_1 и x_2 имеет место неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

8.146. Дана функция $f(x)=\sqrt{x}$. Докажите, что для любых значений аргумента $x_1>0$ и $x_2>0$ имеет место неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Исследуйте функцию на четность **(147—150)**:

8.147. а) $f(x)=9$; б) $\varphi(x)=0$;

в) $g(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;

г) $h(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$.

8.148. а) $f(x)=(x+3)\,|x-1|+(x-3)\,|x+1|$;

б) $\varphi(x)=(x+5)\,|x-3|-(x-5)\,|x+3|$;

в) $g(x)=\frac{|x-7|}{x+1}+\frac{|x+7|}{x-1}$;

г) $h(x)=\frac{|x-4|}{x+2}-\frac{|x+4|}{x-2}$.

8.149. а) $f(x)=(x+2)(x+3)(x+4)-(x-2)(x-3)(x-4)$;

б) $\varphi(x)=(x-5)^8(x+7)^{11}+(x+5)^8(x-7)^{11}$;

в) $g(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$;

г) $h(x)=(x^2-3x+5)(x^3-8x^2+2x-1)-(x^2+3x+5)\times$ $\times(x^3+8x^2+2x+1)$.

8.150. а) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x+1}-\frac{x^3+2x^2}{x-1}$;

б) $\varphi(x)=\frac{x^5-2x^2-3}{x-4}+\frac{x^5+2x^2+3}{x+4}$;

в) $g(x)=\frac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}+\frac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$;

г) $h(x)=\frac{(x-2)^3(x+1)^5(x-5)^7}{2x+1}+\frac{(x+2)^3(x-1)^5(x+5)^7}{2x-1}$.

8.151. Функция $y=f(x)$ является четной; известно, что:

а) $f(x)=\sqrt{x}$ при $x\geqslant 0$;

б) $f(x)=x^2-3x$ при $x\geqslant 0$;

в) $f(x)=x^2+4x+3$ при $x\leqslant 0$;

г) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ при $x\leqslant 0$.

Постройте график функции $y=f(x)$. Задайте данную функцию одной формулой.

8.152. Функция $y=g(x)$ является нечетной; известно, что:

а) $g(x)=x^2$ при $x\geqslant 0$;

б) $g(x)=x^2$ при $x\leqslant 0$;

в) $g(x)=x^2-2x$ при $x\geqslant 0$;

г) $g(x)=\sqrt{x}$ при $x>0$.

Постройте график функции $y=g(x)$. Задайте данную функцию одной формулой.

Найдите функцию, обратную данной. Укажите область определения и область значений обратной функции. Постройте графики данной функции и обратной в одной системе координат (**153—156**):

8.153. а) $y=2x$; б) $y=-3x$; в) $y=5x-1$; г) $y=3-4x$.

8.154. а) $y=\frac{3}{x-1}$; б) $y=\frac{2}{2-x}$; в) $y=\frac{3x}{2x-1}$; г) $y=\frac{1-x}{x+2}$.

8.155. а) $y=(x+3)^2$, $x\leqslant -3$; б) $y=(x-4)^2$, $x\geqslant 4$;

в) $y=x^2+8x-4$, $x\geqslant -4$; г) $y=x^2-2x+5$, $x\leqslant 1$.

8.156. а) $y=\sqrt{x-2}$; б) $y=\sqrt{3-x}$;

в) $y=4-\sqrt{x-1}$; г) $y=5+\sqrt{4-x}$.

Постройте график функции (**157—161**):

8.157. а) $y=\frac{x^2-4x+3}{9-3x}$; б) $y=\frac{x^2+5x+6}{9-x^2}$.

8.158. а) $y=x^2-|x|-6$; б) $y=|x^2-x-6|$.

8.159. а) $y=|-x^2+6x-8|$; б) $y=-x^2+6|x|-8$.

8.160. а) $y=x(|x|-4)$; б) $y=x|x-4|$.

8.161. а) $y=(x-3)(|x|+1)$; б) $y=|x-3|(x+1)$.

8.162. Постройте график функции $y=|x^2+4x+3|$ и найдите координаты точек пересечения этого графика с прямой $y=-2x-5$.

8.163. Постройте график функции $y=(2x-1)|4-x|$ и найдите координаты точек пересечения этого графика с прямой $y=4x-2$.

Постройте график функции (**164—176**):

8.164. а) $y=\frac{|x|}{x}(x^2+6x)$; б) $y=\frac{x}{|x|}(4x-x^2-3)$.

8.165. а) $y=\frac{|x-2|}{2-x}(x^2-2x)$; б) $y=\frac{x+2}{|x+2|}(x^2+4x+3)$.

8.166. а) $y=|||x|-2|-1|$; б) $y=|2-|1-|x|||$.

8.167. а) $y=|x^2-5|x|+6|$; б) $y=\sqrt{4x^2-4x^2|x|+x^4}$.

8.168. а) $y=||1-x^2|-3|$; б) $y=||x^2-2x|-3|$.

8.169. а) $y=2-\sqrt{|x-3|}$; б) $y=2-\sqrt{3-|x|}$;

в) $y=|2-\sqrt{|x-3|}|$; г) $y=|2-\sqrt{3-|x|}|$.

8.170. а) $y=\frac{|x|}{x-1}$; б) $y=\frac{|x|}{|x|-1}$;

в) $y=\left|\frac{x}{x-1}\right|$; г) $y=\frac{x}{|x-1|}$.

8.171. а) $y=\frac{x^2-5x-6}{8x-x^2-12}$; б) $y=\frac{2x^2-17x+21}{7+6x-x^2}$;

в) $y=\frac{x^4+4x^2-5}{4-4x^2}$; г) $y=\frac{13x^2-x^4-36}{x^2-x-6}$.

8.172. а) $y=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$; б) $y=\frac{\frac{x-2}{x}+\frac{x-2}{x+1}}{\frac{x-2}{x}-\frac{x-2}{x+1}}$.

8.173. а) $y=x(|x+2|+|x-4|)$;

б) $y=\frac{|x+2|+|x-4|}{x}$.

8.174. а) $y=(x-1)|x+1|+|x-1|(x+1)$;

б) $y=\frac{x^2-3x+2}{|x-1|}+\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}$.

8.175. а) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}+2}+\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}-2}}{\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}+2}-\sqrt{\dfrac{9+x^2}{3x}-2}}$.

8.176. а) $y=\dfrac{|x^3-3x+2|}{x-1}$; б) $y=\dfrac{|3x-x^3-2|}{x^2+x-2}$.

Постройте график функции и с его помощью укажите нули функции, интервалы знакопостоянства, промежутки монотонности, экстремумы функции, наибольшее и наименьшее значения функции, область значений функции (**177—178**):

8.177. а) $y=\begin{cases}3, \text{ если } x\leqslant -4,\\ |x^2-4|x|+3|, \text{ если } -4<x\leqslant 4,\\ 3-(x-4)^2, \text{ если } x>4;\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}8-(x+6)^2, \text{ если } x<-6,\\ |x^2-6|x|+8|, \text{ если } -6\leqslant x<5,\\ 3, \text{ если } x\geqslant 5.\end{cases}$

8.178. а) $y=\begin{cases}|||x|-1|-1|, \text{ если } |x|<2,\\ \sqrt{|x|-2}, \text{ если } |x|\geqslant 2;\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}2-\sqrt{4-|x|}, \text{ если } |x|\leqslant 4,\\ \dfrac{8}{|x|}, \text{ если } |x|>4.\end{cases}$

8.179. Дана функция $f(x)=x^2-6x$. Постройте графики функций:
а) $y=f(x)-2$; б) $y=f(x-2)$; в) $y=2f(x)$;
г) $y=f(2x)$; д) $y=-f(x)$; е) $y=f(-x)$;
ж) $y=f(|x|)$; з) $y=|f(x)|$; и) $y=|f(|x|)|$.

8.180. Даны функции $f(x)=x^2-4x+4$ и $g(x)=\dfrac{a^2+1}{x+3}$.
а) Докажите, что $f(x)$ возрастает на промежутке $[2; \infty)$.
б) Докажите, что $g(x)$ убывает на промежутке $[2; \infty)$.
в) Найдите все такие значения a, что $f(3)=g(3)$.
г) Решите уравнение $(x-2)^2=\dfrac{6}{x+3}$ на промежутке $[2; \infty)$.

8.181. Даны функции $f(x)=(x-3)^2$ и $g(x)=\dfrac{a^2+1}{4-x}$.
а) Докажите, что $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 3]$.
б) Докажите, что $g(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$.
в) Найдите все такие значения a, что $f(2)=g(2)$.
г) Решите уравнение $x^2-6x+9=\dfrac{2}{4-x}$ на промежутке $(-\infty; 3]$.

8.182. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, а функция $g(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X.

Решите уравнение (**183—187**):

8.183. а) $(x+1)^3=41-3x-x^3$; б) $3x^3+2x=4+(2-x)^3$.

8.184. а) $(x-1)^5+x^5=45-x^3-2x$;
б) $4x^5+2x^3+71=(3-x)^3+1$.

8.185. а) $x^{1991}+1=\sqrt{5-x}$; б)' $\sqrt{10+x}+5=-2x^{13}-6x$.

8.186. а) $2\sqrt{x-2}=\frac{9}{x}-1$; б) $\sqrt{3-x}=1-\frac{5}{x-4}$.

8.187. а) $\sqrt{x^2+3x+6}+\sqrt{x+1}=2$;
б) $\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{x-1}=3-x$.

§ 9. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. Уравнения высших степеней.

Основные методы решения уравнений высших степеней — замена переменной и разложение на множители. В отдельных случаях при решении уравнений целесообразно использовать свойства монотонности и ограниченности функций.

Используя метод разложения на множители, полезно помнить, что если число α является корнем многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится на $x-\alpha$, т. е. представим в виде $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$. Таким образом, зная корень многочлена, его легко разложить на множители (например, разделить $P(x)$ на $x-\alpha$ «уголком», получив в частном $Q(x)$. Заметим, что «угадать» корень часто удается, основываясь на следующем факте: любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

2. Системы уравнений.

Если ставится задача отыскания всех общих решений двух уравнений с двумя переменными[1] (вообще говоря, n уравнений с k переменными), то говорят, что задана система уравнений.

Каждая пара значений переменных (вообще говоря, упорядоченный набор k чисел), обращающая в верное равенство каждое уравнение системы, называется решением системы уравнений. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что таковых нет.

Две системы называются равносильными, если множества их решений совпадают. Если обе системы не имеют решений, то они также считаются равносильными.

---

[1] Подробнее об уравнении с двумя переменными и его графике см. справочный материал к § 1.

Решая системы уравнений, обычно заменяют данную систему другой, равносильной исходной, которую решать проще. При этом можно использовать следующие утверждения о равносильности систем уравнений:

1) если одно из уравнений системы заменить на равносильное уравнение, то получим систему, равносильную исходной;

2) если одно из уравнений системы заменить суммой каких-либо двух уравнений данной системы, то получим систему, равносильную исходной;

3) если одно из уравнений системы выражает зависимость какой-либо переменной, например x, через другие переменные, то, заменив в каждом уравнении системы переменную x на ее выражение через другие переменные, получим систему, равносильную исходной; например, системы уравнений

$$\begin{cases} x=y^2-1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=y^2-1 \\ (y^2-1)^2+y^2=4 \end{cases} \text{ равносильны.}$$

Основными средствами аналитического решения системы являются метод подстановки и метод введения новых переменных.

Для графического решения системы двух уравнений с двумя переменными надо построить в одной системе координат графики обоих уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

Пример 1. Решите уравнение:

а) $x^3-5x-12=0$; б) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)=3x^2$.

Решение. а) Разложим на множители левую часть уравнения (это легко сделать, заметив предварительно, что число 3 является корнем уравнения), имеем:

$$(x^3-27)-(5x-15)=0,$$

$$(x-3)(x^2+3x+9-5)=0, \text{ откуда } x=3.$$

б) Записав уравнение в виде

$$4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)=3x^2,$$

разделим обе его части на x^2 (очевидно, что $x=0$ не является корнем уравнения). Имеем:

$$4\left(x+17+\frac{60}{x}\right)\left(x+16+\frac{60}{x}\right)=3.$$

Положим $y=x+16+\frac{60}{x}$. Получим квадратное уравнение

$$4(y+1)\cdot y=3, \text{ т. е. } 4y^2+4y-3=0,$$

откуда $y_1=0{,}5$, $y_2=-1{,}5$. Далее найдем x: из уравнения $x+16+\frac{60}{x}=0{,}5$ получаем $x_1=-8$, $x_2=-7{,}5$; уравнение $x+16+\frac{60}{x}=-1{,}5$ не имеет действительных корней.

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$$

Решение. Данная система является симметрической. Как и всякую симметрическую систему (т. е. такую, которая не меняется при замене в каждом уравнении x на y и y на x), ее целесообразно решать с помощью введения новых переменных $u=x+y$ и $v=xy$. Так как

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)=u(u^2-3v),$$

то данную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} u^3-3uv+v^3=17, \\ u+v=5. \end{cases}$$

Применяя формулу суммы кубов и осуществляя подстановку $u+v=5$ в первое уравнение, получим:

$$\begin{cases} 5(u^2-uv+v^2)-3uv=17, \\ u+v=5. \end{cases}$$

Далее, осуществляя равносильные переходы, имеем:

$$\begin{cases} 5(u^2+v^2)-8uv=17, \\ u+v=5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5((u+v)^2-2uv)-8uv=17, \\ u+v=5, \end{cases} \quad \begin{cases} 5(25-2uv)-8uv=17, \\ u+v=5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} uv=6, \\ u+v=5, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u=3 \\ v=2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2, \end{cases}$$

первая из которых решений не имеет, а решением второй системы являются пары чисел $(1;\ 2)$ и $(2;\ 1)$.

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, \\ 5x^2-2xy-y^2=5. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение системы на -5, второе — на 3 и сложим почленно полученные уравнения. Имеем однородное относительно x и y уравнение второй степени $10x^2-21xy-13y^2=0$, которое равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}y, \\ x=\frac{13}{5}y \end{array}\right.$ (это легко показать, найдя корни трехчлена $10t^2-21t-13$).

Итак, исходная система уравнений равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, \\ y=-2x \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, \\ y=\frac{5}{13}x, \end{cases}$$

решая которые находим ответ: $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$, $\left(\frac{13}{\sqrt{138}};\ \frac{5}{\sqrt{138}}\right)$, $\left(-\frac{13}{\sqrt{138}};\ -\frac{5}{\sqrt{138}}\right)$.

Замечание. Аналогичным образом к однородному уравнению второй степени относительно x и y сводится любая система уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2. \end{cases}$$

Пример 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(y+z)=20, \\ y(x+z)=18, \\ z(x+y)=14. \end{cases}$$

Решение. Сложив почленно все три уравнения системы, имеем:

$$2(xy+xz+yz)=52, \text{ т. е. } xy+xz+yz=26.$$

Подставляя в последнее равенство значения $xy+xz$, $yx+yz$, $zx+zy$ из первого, второго и третьего уравнений системы соответственно, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} yz=6, \\ xz=8, \\ xy=12. \end{cases} \qquad (1)$$

Почленно перемножив все три уравнения системы (1), получим $(xyz)^2=24^2$, откуда $xyz=24$ или $xyz=-24$. Подставляя в каждое из полученных равенств значения yz, xz и xy из первого, второго и третьего уравнений системы (1), находим две тройки решений: $(4;\ 3;\ 2)$, $(-4;\ -3;\ -2)$.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2=6x-|y-3|, \\ y^2=xy-9. \end{cases}$$

Решение. Пусть $(x_0,\ y_0)$ — решение системы. Тогда $6x_0-x_0^2=|y_0-3|$, откуда (ввиду неотрицательности модуля) $6x_0-x_0^2\geqslant 0$, т. е. $0\leqslant x_0\leqslant 6$ (1). Из второго уравнения системы имеем $x_0=\frac{y_0^2+9}{y_0}$ (очевидно, что $y_0\neq 0$). Если $y_0>0$, то $\frac{y_0^2+9}{y_0}\geqslant 6$, т. е. $x_0\geqslant 6$ и, учитывая условие (1), $x_0=6$. В этом случае $y_0=3$ (например, из первого уравнения системы). Подставляя пару (3; 6) во второе уравнение системы, убеждаемся, что она является решением. Если же $y_0<0$, то $x_0=\frac{y_0^2+9}{y_0}\leqslant -6$, что противоречит условию (1).

Упражнения

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решите уравнение (способом разложения левой части на множители) (**1—8**):

9.1. а) $x^3+x^2-4x-4=0$; б) $3x^3+5x^2+5x+3=0$;
в) $x^3-x^2-81x+81=0$; г) $x^3+3x^2-16x-48=0$;

9.2. а) $x^4+2x^3-x-2=0$; б) $x^4-3x^3+x-3=0$;
в) $2x^4+3x^3+16x+24=0$; г) $24x^4+16x^3-3x-2=0$.

9.3. а) $x^3+3x^2-6x-8=0$; б) $x^3+5x^2+15x+27=0$;
в) $8x^3-6x^2+3x-1=0$; г) $27x^3-15x^2+5x-1=0$.

9.4. а) $x^3+1991x+1992=0$;
б) $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12$;
в) $x^3+4x^2-5=0$;
г) $x^3-3x^2+2=0$.

9.5. а) $x^3-3x^2-6x+8=0$; б) $x^2|x-3|=6x-8$;
в) $x^3+8=3x|x+2|$; г) $x|x^2-6|=3x^2-8$.

9.6. а) $28x^3+3x^2+3x+1=0$; б) $126x^3-3x^2+3x-1=0$.

9.7. а) $(x^2+4x)(x^2+x-6)=(x^3-9x)(x^2+2x-8)$;
б) $(x^2+5x)(x^2-3x-28)=(x^3-16x)(x^2-2x-35)$.

9.8. а) $x^4-x^3-13x^2+x+12=0$; б) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$.

Решите уравнение (**9—11**):

9.9. а) $ax^3-2x^2-5x+6=0$, если известно, что один из его корней равен -2;
б) $x^3+ax^2-5x+6=0$, если известно, что один из его корней равен 3.

9.10. а) $x^3-x^2+ax+12=0$, если известно, что один из его корней равен -3;
б) $2x^3+11x^2+17x+a=0$, если известно, что один из его корней равен $-0{,}5$.

9.11. а) $x^4+4x-1=0$; б) $x^4-4x^3-1=0$.

Решите уравнение, выполнив подходящую замену переменной (12—17):

9.12. а) $9x^4-37x^2+4=0$; б) $25x^4+66x^2-27=0$;
в) $x^6+9x^3+8=0$; г) $27x^6-215x^3-8=0$.

9.13. а) $x^4-(a^2+3)x^2+3a^2=0$; б) $x^4-(a^3+2)x^2+2a^3=0$;
в) $x^6+(a^3-8)x^3-8a^3=0$; г) $x^6+(8a^3+27)x^3+216a^3=0$.

9.14. а) $(x^2-2x)^2-3x^2+6x-4=0$;
б) $(x^2-3x)^2-14x^2+42x+40=0$;
в) $(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0$;
г) $(x^2-5x+7)^2-(x-3)(x-2)-1=0$.

9.15. а) $(x-2)(x-3)^2(x-4)=20$;
б) $(x^2-3x)(x-1)(x-2)=24$;
в) $(x^2-5x)(x+3)(x-8)+108=0$;
г) $(x+4)^2(x+10)(x-2)+243=0$.

9.16. а) $x(x+4)(x+5)(x+9)+96=0$;
б) $x(x+3)(x+5)(x+8)+56=0$;
в) $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)=24$;
г) $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=1680$.

9.17. а) $4x^2-2|2x-1|=34+4x$;
б) $9x^2+2|3x+2|=20-12x$;
в) $x^4+x^2+4|x^2-x|=2x^3+12$;
г) $x^4+4x^3=30-7|x^2+2x|-4x^2$.

9.18. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-(a+1)\times\times|x|+a=0$ имеет три решения?

9.19. При каких значениях параметра a уравнение $x^4-(3a-1)x^2++2a^2-a=0$ имеет два решения?

9.20. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-2x)^2--(a+2)(x^2-2x)+3a-3=0$ имеет четыре решения?

9.21. Сколько решений имеет уравнение $(x+2)^2(x^2+4x+5)==a(a-1)$ в зависимости от a?

Решите уравнение методом замены переменной (22—32):

9.22. а) $\frac{3}{x^2-4x+1}-x^2=3-4x$; б) $\frac{12|x|-3x^2}{x^2-4|x|+1}=x^2-4|x|$;
в) $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1$;
г) $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

9.23. а) $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$;
б) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)+10=0$;
в) $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)-8=0$;
г) $\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{x}\right)-12=0$.

9.24. а) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$;
б) $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$;
в) $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$;
г) $78x^4-133x^3+78x^2-133x+78=0$.

9.25. а) $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$; б) $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$.

9.26. а) $(x+5)^4-13x^2(x+5)^2+36x^4=0$;
б) $2(x-1)^4-5(x^2-3x+2)^2+2(x-2)^4=0$.

9.27. а) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;
б) $3(x+2)^2+2(x^2-2x+4)^2=5(x^3+8)$.

9.28. а) $\dfrac{x^2}{1-2x^2}=12x^2+7x-6$;

б) $2x+1+\dfrac{4x^4}{2x+1}=5x^2$.

9.29. а) $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$;
б) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

9.30. а) $\dfrac{24x}{2x^2-3x+4}=\dfrac{12x}{x^2+x+2}+5$;

б) $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-1{,}5$.

9.31. а) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}$;

б) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\dfrac{13}{3}=0$.

9.32. а) $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3$; б) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x-3)^2}=7$.

Решите графически уравнение (**33—38**):

9.33. а) $3-x^2=\dfrac{6}{2-x}$; б) $2-2x-x^2=\dfrac{6}{x+3}$.

9.34. а) $\sqrt{x+3}=\dfrac{x^2+2x}{3}+1$; б) $1+\sqrt{2-x}=\dfrac{2}{x}$.

9.35. а) $1-x^3=\sqrt{3-x}$; б) $\sqrt{2x+4}-1=(x+1)^3$.

9.36. а) $(2-x)^3=2x-x^2$; б) $(x+2)^3+\dfrac{3}{x}+2=0$.

9.37. а) $\dfrac{4}{|x-1|}=|x-2{,}5|-1{,}5$; б) $|3-x|-3=2|x|-x^2$.

9.38. а) $(x-1)^3=|x^2-4x+3|$; б) $1+2x-x^2=\sqrt{|x-1|}$.

9.39. При каких значениях параметра a уравнение $|x+3|=a|x-2|$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

9.40. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{4-x^2}=|x|+a$ в зависимости от a?

9.41. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{1-x^2}=|x-a|$ в зависимости от a? Найдите решение уравнения в том случае, когда оно единственное.

9.42. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $\frac{x^2+(3b-1)x+2b^2-2}{x^2-3x-4}=0$ имеет одно решение.

9.43. Найдите значения параметра k, при которых уравнение $\frac{x^2+(3-2k)x+4k-10}{\sqrt{2x^2-2x-1}}=0$ имеет одно решение.

9.44. При каком значении a уравнение $x^{10}-a|x|+a^2-a=0$ имеет единственное решение?

9.45. При каком значении a уравнение $\frac{x^{1990}}{2}-\frac{x^2+a}{x^2+1}+a^2=0$ имеет единственное решение?

УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ. ЗАДАНИЕ ФИГУР НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ УРАВНЕНИЯМИ И НЕРАВЕНСТВАМИ

Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие соотношению **(46—51)**:

9.46. а) $xy-2=2x-y$; б) $y\sqrt{x}-1=y-\sqrt{x}$.

9.47. а) $9x^2+4y^2+13=12(x+y)$;
б) $20x^2+y^2-4xy+24x+9=0$.

9.48. а) $x^2+2{,}5y^2+3xy-y+1=0$;
б) $\frac{x^2+y^2+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2\sqrt{xy}$.

9.49. а) $(x^2+4)(y^2+1)=8xy$;
б) $x^2y^2+x^2+y^2-14xy+2x-2y+37=0$.

9.50. а) $(x^2+2x+2)(y^2-4y+6)=2$;
б) $(x^2-4|x|+5)(y^2+6y+12)=3$.

9.51. а) $\frac{x^4+1}{x^2}=\sqrt{4-|y|}$;
б) $\sqrt{4x^2-20x+25}+|\sqrt{y}-x|=6-\frac{9}{|5-2x|}$.

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют уравнению **(52—65)**:

9.52. а) $|y|=2-x$; б) $|y|=3x-4$;
в) $|y+1|=2-x$; г) $|y-2|=3x-4$.

9.53. а) $|y-x|=1$; б) $|y+x|=3$;
в) $|y-x|=x$; г) $|y+x|=y$.

9.54. а) $x^2-9y^2=0$; б) $4x^2-25y^2=0$;
в) $x^2-3xy+2y^2=0$; г) $3x^2+10xy+3y^2=0$.

9.55. а) $(y-2)^2=(x+1)^2$; б) $(2y+x-1)^2=(3x-y+1)^2$;
в) $|3y+2x-2|=|x-y+3|$; г) $y^2+4y=x^2-4x$.

9.56. а) $|y|=9-x^2$; б) $|y|=x^2-4x$;
в) $|y|=x^2-6x+8$; г) $|y|=8+2x-x^2$.

9.57. а) $x\,|y|=-2$; б) $|y|\,(x+1)=1$;
в) $|y|=\sqrt{x+2}-1$; г) $|y|=1-\sqrt{1-x}$.

9.58. а) $y^2=0{,}5x$; б) $y^2=-2x$;
в) $y^2-4y-x+5=0$; г) $y^2+y+x-0{,}75=0$.

9.59. а) $|y|=2\,|x|-x^2$; б) $|y|=x^2-4\,|x|+3$;
в) $|y|=|2x-x^2|$; г) $|y|=|x^2-4x+3|$.

9.60. а) $x^2=y^4$; б) $x^2-6x+9=y^4$;
в) $|x|=y^2-2y$; г) $|x|=y^2-3y+2$.

9.61. а) $|x|+|y|=2$; б) $|x-3|+|y|=1$;
в) $|y|-|x|=3$; г) $||x|-|y||=2$.

9.62. а) $\dfrac{(x-1)(y-x^2+3)}{y-1}=0$; б) $\dfrac{(x+2)(y^2-x)}{y^2-1}=0$;
в) $\dfrac{(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)}{x^2+y^2}=0$; г) $\dfrac{(x-y)(xy+2)}{x+y}=0$.

9.63. а) $x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y}$; б) $x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$;
в) $|x|+\dfrac{1}{|x|}=|y|+\dfrac{1}{|y|}$; г) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=\left|y+\dfrac{1}{y}\right|$.

9.64. а) $x^2+y^2=2x$; б) $x^2+y^2-4x+6y=12$;
в) $x^2+y^2=2\,|y|$; г) $x^2+y^2-2\,|x|+4y+1=0$.

9.65. а) $x^4-2x^2=y^2+2y$; б) $x^2-2x=y^4+2y^2$;
в) $x^4-2x^2=y^2+2\,|y|$; г) $x^2-2\,|x|=y^4+2y^2$.

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x;\ y)$ удовлетворяют неравенству **(66—72)**:

9.66. а) $y>3\,|x|-2$; б) $y\leqslant|3x-2|$;
в) $|y|\geqslant3x-2$; г) $|y|<3\,|x|-2$.

9.67. а) $(x-1)(y+2)\geqslant0$; б) $(|x|-1)(y+2)<0$;
в) $(x-1)(|y|+2)\leqslant0$; г) $|x-1|\,(y+2)>0$.

9.68. а) $xy\leqslant2$; б) $|x|\,y>2$;
в) $x\,|y|\geqslant2$; г) $|xy|<2$.

9.69. а) $y>x^2-4\,|x|+3$; б) $y\leqslant|x^2-4x+3|$;
в) $|y|\geqslant x^2-4x+3$; г) $|y|<|x^2-4x+3|$.

9.70. а) $x^2\geqslant y^2$; б) $x^4<y^4$;
в) $x^4>y^2$; г) $y^4\leqslant x^2$.

9.71. а) $y\geqslant\sqrt{|x|+1}-2$; б) $y+2<\sqrt{|x+1|}$;
в) $y\leqslant|2-\sqrt{x+1}|$; г) $|y|+2>\sqrt{x+1}$.

9.72. а) $|x|+|y|\leqslant3$; б) $|x-2|+|y-3|\leqslant0$;
в) $|y|-|x|\geqslant2$; г) $x^2+y^2-2|x|+4y+1\leqslant0$.

Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством, и вычислите ее площадь (**73—76**):

9.73. а) $x^2+y^2\leqslant 4x$; б) $x^2+y^2\leqslant 4\,|y|$.

9.74. а) $x^2+y^2+3\leqslant 4\,|x|$; б) $x^2+y^2+1\leqslant 2\,(|x|+|y|)$.

9.75. а) $(2\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\leqslant 4\,(1-\sqrt{xy})$;

б) $3xy+(x-\sqrt{xy}-y)(x+\sqrt{xy}-y)\leqslant 4$.

9.76. а) $|x|+|y|+|x-y|\leqslant 2$; б) $|x-1|+|y+1|+|x+y|\leqslant 2$.

Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную системой неравенств, и вычислите ее площадь (**77—78**):

9.77. а) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4\,(x+y-1), \\ y\geqslant |x-2|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-1|+|y-1|\geqslant 1, \\ |x-2|+|y-2|\leqslant 2. \end{cases}$

9.78. а) $\begin{cases} |x-y|\leqslant 1, \\ (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\leqslant\sqrt{1-x^2}, \\ x\leqslant\sqrt{1-y^2}. \end{cases}$

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Решите графически систему уравнений (**79—86**):

9.79. а) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=1, \\ y=x^2+2x-3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy=2, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

9.80. а) $\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=1, \\ x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=4, \\ 2x-y=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-2x=4y-y^2-1, \\ 4y+1=x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ y=x^2-7. \end{cases}$

9.81. а) $\begin{cases} y=(x-1)^2, \\ y=\dfrac{x^2+6x+5}{x+1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}, \\ y=\dfrac{8}{x+1}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=y+6, \\ y=\dfrac{4x^2-x^4}{x^2-4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{8+xy-2y-x^3}{2-x}=5, \\ y-2x=3. \end{cases}$

9.82. а) $\begin{cases} y=|x^2+6x+5|, \\ y-x=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |y|=x-3, \\ y=x^2-8x+15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy=3, \\ y^2=x-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=x^2-4x+7, \\ y\,|x-2|=4. \end{cases}$

9.83. а) $\begin{cases} y+|x^2+6x+8|=0, \\ (y+1)^2=(x+3)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+|x^2+6x+5|=0, \\ x^2+6x+9y+45=0. \end{cases}$

9.84. а) $\begin{cases} x+5y=4, \\ y=\sqrt{|x+2|}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+5x=12, \\ |y-1|=(x-1)^2. \end{cases}$

9.85. а) $\begin{cases} x^2+y^2+12=4x+6y, \\ y+|x-2|=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+7=4y-4x, \\ |y-2|=x+3. \end{cases}$

9.86. а) $\begin{cases} y=x^2+4x+3, \\ x=y^2+2y-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |y|=(x-2)^3, \\ x^2+y^2=6x-8. \end{cases}$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМЫ, СВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

Решите систему уравнений (**87—99**):

9.87. а) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y=3, \\ 2x-3y=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y=5, \\ -x+7y=13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+5y=8, \\ -3x+y=-2. \end{cases}$

9.88. а) $\begin{cases} \dfrac{7x-3y}{5}=\dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2}, \\ \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5\,(y+0{,}5x)-0{,}2\,(x+2)=1{,}1, \\ x+4=0{,}25\,(2x+3\,(y-0{,}5))+2y. \end{cases}$

9.89. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=1, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=4{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x}+\dfrac{y+1}{3y}=0{,}25, \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=3{,}5. \end{cases}$

9.90. а) $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7, \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+2y}+\dfrac{8}{y}=5, \\ \dfrac{10}{x+2y}-\dfrac{2}{y}=1. \end{cases}$

9.91. а) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13, \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+y}+\dfrac{7}{x-y}=1{,}9, \\ \dfrac{5}{x-y}-\dfrac{2}{2x+y}=1{,}15. \end{cases}$

9.92. а) $\begin{cases} 4x+5y=12+5\sqrt{7}, \\ 2x-\sqrt{7}y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y=6-2\sqrt{5}, \\ 2y-\dfrac{6x}{\sqrt{5}}=2. \end{cases}$

9.93. а) $\begin{cases} y-x=1, \\ x+|y|=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=3, \\ 3\,|y|-x=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+|y|=2, \\ 3x+|y|=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3\,|x|+2y=1, \\ 2\,|x|-y=3. \end{cases}$

9.94. а) $\begin{cases} |x|+y=5, \\ x+4y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3|y|=2, \\ 3x-y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x|+y=2, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2|y|=3, \\ x-3y=5. \end{cases}$

9.95. а) $\begin{cases} x+|y|=3, \\ |x|-y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2|x|+3y=8, \\ 2x-|y|=-4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x|+y=3, \\ x+2|y|=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2|x|+y=4, \\ 4x+3|y|=12. \end{cases}$

9.96. а) $\begin{cases} x+y=2, \\ |3x-y|=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=2; \\ |2x-3y|=1. \end{cases}$

9.97. а) $\begin{cases} |x-2|+|y-5|=1, \\ y-|x-2|=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-2|+2|y-1|=2, \\ x+|y-1|=3{,}5. \end{cases}$

9.98. а) $\begin{cases} |x-1|+y=4, \\ x-|y-2|=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+|y+1|=7, \\ |x-1|+y=5. \end{cases}$

9.99. а) $\begin{cases} |x+2|+|y|=2, \\ y+2=|x+2|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-3|+|y-2|=3, \\ y+|x-3|=5. \end{cases}$

9.100. Числа x, y и z связаны соотношениями

$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}}{z}=1 \text{ и } \frac{\frac{x}{2}+\frac{3y}{8}+\frac{z}{4}}{y}=1. \qquad \text{Найдите } \frac{y}{z}.$$

9.101. Найдите все значения параметра a, при которых система:

а) $\begin{cases} 3x+7y=20, \\ ax+14y=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a+1)x-y=a, \\ (a-3)x+ay=-9 \end{cases}$

имеет единственное решение.

9.102. Найдите все значения параметра b, при которых система:

а) $\begin{cases} bx-8y=12, \\ 2x-6y=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (b+1)x+y=3, \\ 2x-(b-2)y=6 \end{cases}$

не имеет решений.

9.103. Найдите все значения параметра c, при которых система:

а) $\begin{cases} 15x+cy=3, \\ 5x+10y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-(c-1)y=2, \\ (c+2)x+2y=4-c^2 \end{cases}$

имеет бесконечно много решений.

9.104. Найдите все значения параметра k, при которых прямые $3x+2ky=1$ и $3(k-1)x-ky=1$:

а) пересекаются в одной точке; б) совпадают; в) не имеют общих точек.

9.105. Найдите все значения параметра a, при которых выражение $x_0^2+y_0^2$ принимает наименьшее значение, где $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 3x-y=2-a, \\ x+2y=a+1. \end{cases}$

9.106. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} a^2x-ay=1-a, \\ bx+(3-2b)y=a+3 \end{cases}$$

имеет единственное решение (1; 1)?

9.107. Найдите все значения a, при которых система уравнений имеет единственное решение, укажите это решение:

а) $\begin{cases} 3|x|+y=2, \\ |x|+2y=a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+|y|=3, \\ 2x-|y|=a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=a, \\ y-|x|=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} ax-y=3a, \\ y-|x|=1. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**108—110**):

9.108. а) $\begin{cases} x+z=4, \\ y+z=5, \\ x+2y+4z=17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=-2, \\ y+z=-1, \\ x+z=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y=5, \\ y+2z=12, \\ z+2x=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=1, \\ y+z=7, \\ z-x=-2. \end{cases}$

9.109. а) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}, \\ 3x-2y+z-3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+2}{-2}, \\ 2x-3y-z+16=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ y+z+t=9, \\ z+t+x=8, \\ t+x+y=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ y+2z+t=4, \\ z+2t+x=4, \\ t+2x+y=4. \end{cases}$

9.110. а) $\begin{cases} 2x+y-z+v=5, \\ 2x+y-z+t=11, \\ 2x-z+v+t=17, \\ 2x+y+v+t=-1, \\ y-z+v+t=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+2z-v=11, \\ x+y+2z+t=13, \\ x+y-v+t=15, \\ x+2z-v+t=1, \\ y+2z-v+t=0. \end{cases}$

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Метод подстановки и алгебраического сложения

Являются ли равносильными системы уравнений (**111—115**):

9.111. $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 5x^2+2y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2xy=3y^2, \\ 5x^2+2y=3? \end{cases}$

9.112. $\begin{cases} 3x-5xy+1=0, \\ 4x-y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-5xy+1=0, \\ (y-4x)^2=4? \end{cases}$

9.113. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} (x+y)^2=9, \\ xy=2? \end{cases}$

9.114. $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} (x-y)(3x^2+4\,|y|)=3x^2+4\,|y|, \\ x+y=2? \end{cases}$

9.115. $\begin{cases} x+y=3, \\ 9-3xy=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-xy+y^2=4? \end{cases}$

Решите систему уравнений (**116—128**):

9.116. а) $\begin{cases} x(y+1)=16, \\ \dfrac{x}{y+1}=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+2}=2, \\ (x-1)^2+(y+2)^2=45; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+2y)(2x-y+1)=6, \\ \dfrac{2x-y+1}{x+2y}=\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+y=2(x-y), \\ (3x+y)^2+2(x-y)^2=96. \end{cases}$

9.117. а) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^3+x^2y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y+2=(x+y)^2, \\ (x+y)^2+(x-3y)^2=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-y^2=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=8. \end{cases}$

9.118. а) $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^4-y^4=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^4-y^4=15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^3-y^3=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^3+y^3=26. \end{cases}$

9.119. а) $\begin{cases} x+y=3a, \\ xy=2a^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=4a, \\ xy=3a^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=a, \\ xy=2a^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=3a, \\ xy=4a^2. \end{cases}$

9.120. а) $\begin{cases} x^2+y^2=5a^2, \\ xy=2a^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{a}, \\ xy=-a^2. \end{cases}$

9.121. а) $\begin{cases} x+y^2=2, \\ 2y^2+x^2=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y^3=2, \\ 2x+x^2+5y^3=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y^2=3, \\ x^4+y^4+6x=29; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3+y=1, \\ y^3-4y^2+4y+x^6=1. \end{cases}$

9.122. а) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^4+x^2y^2=90; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^3+y^3+xy^2+x^2y=65; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+xy^2=10, \\ y^3+x^2y=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ y^6+y^4x^2=80. \end{cases}$

9.123. а) $\begin{cases} x+y=4, \\ (x^2-y^2)(x-y)=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3-y^3=124, \\ x^2+xy+y^2=31; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y^2=3, \\ 3x+y^4=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+3y=1, \\ x^4+4y=12. \end{cases}$

9.124. а) $\begin{cases} x^2-y^2-2x+2y=0, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=xy, \\ x^2y=4y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+xy=6x, \\ x^2+y^2=3(x+y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2y=3x, \\ x^4+y^4=6xy. \end{cases}$

9.125. а) $\begin{cases} y^2-x^2=4-4x, \\ x^2+y^2-3xy=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x, \\ 4x^2+y^2+3xy=1. \end{cases}$

9.126. а) $\begin{cases} |x|+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ xy=1. \end{cases}$

9.127. а) $\begin{cases} |x|+y^2=13, \\ x+|y|=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x|+y^2=5, \\ |x|+|y|=3. \end{cases}$

9.128. а) $\begin{cases} |x|+y^2=5, \\ xy^2=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\,|y|=-1, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

9.129. Числа x, y и z связаны соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x+y}=\dfrac{4}{z}, \\ \dfrac{3}{x}=\dfrac{4}{y}+\dfrac{4}{z}. \end{cases}$$

Найдите отношение $\frac{x}{z}$, если $0<x<z$.

Решите систему уравнений (**130—138**):

9.130. а) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2y+xy^2=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3-y^3=65, \\ x^2y-xy^2=-20. \end{cases}$

9.131. а) $\begin{cases} x^2-xy=2, \\ y^2-xy=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-|xy|=2, \\ y^2-|xy|=-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^4+x^2y^2=20, \\ y^4+x^2y^2=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^4-3x^2y^2=4, \\ y^4+x^2y^2=5. \end{cases}$

9.132. а) $\begin{cases} x+y=5xy, \\ x-y=xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7-x+y-xy=0, \\ 5-y+x-xy=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-x+1=y, \\ y^2-y+1=x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=2, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=-22. \end{cases}$

9.133. а) $\begin{cases} 12x^2+2y^2-6x+5y=3, \\ 18x^2+3y^2-6x+8y=7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+2y^2-3x-5y=-4, \\ -2x^2-6y^2+2x+15y=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9y^2+6xy-4x-9y+2=0, \\ 27y^2+3xy-2x-42y+16=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x^2+xy-18x-4y+24=0, \\ 5x^2+xy-24x-4y+16=0. \end{cases}$

9.134. а) $\begin{cases} x^2+y=2, \\ y^2+x=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+2y=6, \\ y^2+4x=9. \end{cases}$

9.135. а) $\begin{cases} x^2+2y+1=0, \\ y^2+2x+1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0, \\ x^2-2xy+1=0. \end{cases}$

9.136. а) $\begin{cases} x^2-6y=-14, \\ y^2-4x=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x^2+12y=-5, \\ 4y^2-6x=-5. \end{cases}$

9.137. а) $\begin{cases} (x+xy^2+y^2)(x+y^2)^2=225, \\ (x-xy^2+y^2)(x+y^2)^2=25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (13x^4y^8-6x^2-6y^4)\,xy^2=356, \\ (5x^4y^8-6x^2-6y^4)\,xy^2=100; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x+2y)^2+(x+2y)(x+y)=28, \\ (x+y)^2+(x+2y)(x+y)=21; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3+2x^2y+xy^2-x-y=2, \\ y^3+2xy^2+x^2y+x+y=6. \end{cases}$

9.138. а) $\begin{cases} x^2+y^2+2xy-y+x=0, \\ x^2+y^2+xy+y+2x=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^3+y^3+2xy-x-y=2, \\ x^3+y^3-xy+2x+2y=5. \end{cases}$

Метод почленного умножения и деления уравнений системы

Решите систему уравнений (**139—147**):

9.139. а) $\begin{cases} x^5y^7=32, \\ x^7y^5=128; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^8y^6=64, \\ x^6y^8=256. \end{cases}$

9.140. а) $\begin{cases} (x+2y)(x-y)=4, \\ (x+2y)(x+y)=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y)^3(x-y)^2=27, \\ (x-y)^3(x+y)^2=9. \end{cases}$

9.141. а) $\begin{cases} (x+y)\,xy=6, \\ (x-y)\,xy=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy^2-x=9, \\ xy-xy^3=-18; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+xy^3=9, \\ xy+xy^2=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+xy+xy^2=6, \\ x^2+x^2y^2+x^2y^4=12. \end{cases}$

9.142. а) $\begin{cases} xy^3+x^3y=-10, \\ x^2y^4+x^4y^2=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12, \\ x^3y^4+x^4y^3=24. \end{cases}$

9.143. а) $\begin{cases} xy-x=2, \\ xy^3-xy^2=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-xy=0, \\ xy-xy^2=0. \end{cases}$

9.144. а) $\begin{cases} 2x^4=3x^2y+20, \\ 3y^2=2x^2y-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^8=x^4y^4+1, \\ 3y^8=x^4y^4+2. \end{cases}$

9.145. а) $\begin{cases} x^2+3xy+x+3y=8, \\ 3y^2+xy-2x-6y=-4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2-xy-3y^2+x+y=6, \\ 2x^2-5xy+3y^2+x-y=2. \end{cases}$

9.146. а) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=91; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3, \\ x^4+x^2y^2+y^4=21. \end{cases}$

9.147. а) $\begin{cases} x^3-x^2y+xy^2-y^3=5, \\ x^3+x^2y+xy^2+y^3=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4+4y^4-5x^2y^2=45, \\ x^2+2y^2+3xy=15. \end{cases}$

Замена переменной. Симметрические системы

Решите систему уравнений (**148—164**):

9.148. а) $\begin{cases} (x+y)^2-5(x+y)+4=0, \\ (x-y)^2-(x-y)-2=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3. \end{cases}$

9.149. а) $\begin{cases} x+xy+y=5, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy-29=x+y, \\ x^2+y^2=x+y+72; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-xy+y=1, \\ x^2+y^2+2x+2y=11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=4(x+y)-3, \\ 2x+2y=5-xy. \end{cases}$

9.150. а) $\begin{cases} xy+2x+2y=5, \\ x^2+y^2+3x+3y=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2-3xy+4x+4y=-9, \\ xy-3x-3y=7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+5x+5y+3xy=15, \\ x^2+y^2-x-y+xy=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x^2+2y^2-3x-3y+xy=-1, \\ x^2+y^2-2x-2y+3xy=1. \end{cases}$

9.151. а) $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=92, \\ xy=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^8+y^8+x^4+y^4=274, \\ xy=2. \end{cases}$

9.152. а) $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=\frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

9.153. а) $\begin{cases} x^3-y^3=7(x-y), \\ (x+1)(y+1)=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+xy+y=7, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

9.154. а) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=1, \\ x^2y+xy^2=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-2)(y-2)=4, \\ x^2+y^2+xy=3. \end{cases}$

9.155. а) $\begin{cases} (x^2-x)(y^2-y)=72, \\ (x+1)(y+1)=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y+1)^2-x-y=31, \\ xy=6. \end{cases}$

9.156. а) $\begin{cases} xy+x-y=7, \\ x^2y-xy^2=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y-xy^2=6, \\ xy+x-y=-5. \end{cases}$

9.157. а) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{y}=\frac{3}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=2, \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+xy=5, \\ xy+\frac{6(x-y)}{x+y}=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{xy}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2}, \\ x^2y+xy^2=-2. \end{cases}$

9.158. а) $\begin{cases} \frac{x^3}{y}-\frac{y^3}{x}=\frac{15}{2}, \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{3}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+2y}{y}+\frac{y-3x}{x}=1, \\ x\,|y|+x^2+y^2=1+2x. \end{cases}$

9.159. а) $\begin{cases} 2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-9\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+14=0, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

9.160. а) $\begin{cases} x^2+y^2+2x^2y=2xy+9, \\ x+3=x^2y+y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y^2+3xy=2\left(\frac{x}{y}+1\right), \\ 2(x^2y^2+xy)=\frac{3x}{y}+1. \end{cases}$

9.161. а) $\begin{cases} x^3+xy^2=10y, \\ x+x^2y+y^3=7y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3y+2x^2y^2+xy^3=4, \\ x+y+x^2y+y^2x=4. \end{cases}$

9.162. а) $\begin{cases} x^2+xy+2x+y=7, \\ y^2+xy+x+2y=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+x+y=-2, \\ y^2+xy+x+y=1. \end{cases}$

9.163. а) $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144, \\ x^2+4x+5y=24; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(2x+1)(3x+10y)=144, \\ x^2+2x+5y=6. \end{cases}$

9.164. а) $\begin{cases} x^3+y^3+2x^2y+2xy^2=21, \\ 2x^3+2y^3+x^2y+xy^2=24; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y+3xy^2=-4, \\ 5xy^2-2x^2y=52; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^4+2x^2y^2+y^4+x+y=28, \\ x^2+y^2-2x-2y=-1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2y^2-xy+x+y+2=0, \\ x^2+y^2-2xy+4x+4y+8=0. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**165—176**):

9.165. а) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0, \\ x^2-5xy+2y^2=-4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0, \\ y^2-x^2=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2-2xy-3x^2=0, \\ y^2-xy-2x^2=4. \end{cases}$

9.166. а) $\begin{cases} x^2-5y^2=-1, \\ 3xy+7y^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-3xy+3y^2=80, \\ x^2+xy-2y^2=-56; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ 2x^2-xy-y^2=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=2, \\ xy+y^2=4. \end{cases}$

9.167. а) $\begin{cases} x^2+3xy=4, \\ 4y^2+xy=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-4xy+y^2=6, \\ y^2-3xy=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ 2x^2-3xy+2y^2=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-2y^2=-2, \\ xy+y^2=1. \end{cases}$

9.168. а) $\begin{cases} x^2-2xy-5y^2=-2, \\ 3x^2+2xy+y^2=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2-2xy+y^2=4, \\ 3x^2-3xy+2y^2=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2-2xy+3y^2=3, \\ x^2-xy+2y^2=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+3xy-3y^2=1, \\ 2x^2-xy+y^2=2. \end{cases}$

9.169. а) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0, \\ x\,|y|+y\,|x|=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0, \\ y\,|y|-x\,|x|=15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0, \\ x\,|y|-y\,|x|=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x\,|x|-y\,|y|=2. \end{cases}$

9.170. а) $\begin{cases} x^2-2\,|x|\,y+y^2=4, \\ x^2-3\,|x|\,y-y^2=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2x\,|y|=3, \\ y^2+3x\,|y|=-2. \end{cases}$

9.171. а) $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^3-y^3=7\,(x-y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3-x=y^3-y, \\ 2x^2+3y^2=5xy. \end{cases}$

9.172. а) $\begin{cases} x^2-2xy=2x-3y, \\ y^2-3xy=4x-6y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=3x^2y, \\ y-x=2xy^2. \end{cases}$

9.173. а) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2+xy}+\dfrac{4}{y^2+xy}=\dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2+xy}-\dfrac{1}{y^2+xy}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+3xy}+\dfrac{3}{y^2-xy}=\dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2+3xy}-\dfrac{2}{y^2-xy}=-\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

9.174. а) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}+\dfrac{x-2y}{x+y}=4, \\ x^2+xy+y^2=21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3x-9y}{x+y}+\dfrac{2x+y}{x-y}=4, \\ x^2-y^2=48. \end{cases}$

9.175. а) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2-xy}+\dfrac{x^2}{y^2-xy}=1, \\ x^3-y^3=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4xy}{3xy-y^2}+\dfrac{9xy-3y^2}{x^2+2xy}=5, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

9.176. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{4}{x}, \\ x^2+2y^2=72; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{10}{x+y}, \\ x^2+y^2-2xy+2x-3y=1. \end{cases}$

Системы уравнений с тремя переменными

Решите систему уравнений (177—182):

9.177. а) $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=-1, \\ xz=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-2z=3, \\ x+z=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y-x=2, \\ 2y-z=3, \\ z^2+y^2-x^2=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=3, \\ x+z=0, \\ xy+xz+yz=-1. \end{cases}$

9.178. а) $\begin{cases} x+y+2z=6, \\ x+2y+z=5, \\ x^2+y^2+z^2=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy=6, \\ yz=2, \\ x^2+z^2=10. \end{cases}$

9.179. а) $\begin{cases} z-y=3, \\ z-x=4, \\ x^2+y^2+z^2=30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}, \\ x^2+y^2+z^2=26. \end{cases}$

9.180. а) $\begin{cases} xy=2, \\ xz=-3, \\ yz=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy^2z^3=108, \\ x^2y^3z=24, \\ x^3yz^2=18. \end{cases}$

9.181. а) $\begin{cases} xy+yz=9, \\ yz+xz=8, \\ xy+xz=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{8}{15}, \\ \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{9}{20}. \end{cases}$

9.182. а) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy+xz+yz=5, \\ x^2+y^2+z^2=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+yz=-1, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$

Разные системы

9.183. Найдите все пары чисел $(x;\ y)$, каждая из которых удовлетворяет системе:

а) $\begin{cases} y-|x-2y+1|=3, \\ |y|+|y-2|+(y-4)^2\leqslant 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+(3y-x-1)^2=2, \\ |x-3|+|4-x|+(x-1)^2\leqslant 4. \end{cases}$

9.184. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y^2-1)^2=4, \\ x^2+y^2=x-y, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x\leqslant 0$.

Решите систему уравнений (**185—189**):

9.185. $\begin{cases} x^2+5y^2-4xy+2x-6y+2=0, \\ 3x^2-2y^2+xy-3x+2y-1=0. \end{cases}$

9.186. $\begin{cases} x^2-2y^2-xy+2x-y+1=0, \\ 2x^2-y^2+xy+3x-5=0. \end{cases}$

9.187. $\begin{cases} x^2y^2-4x+4y^2=0, \\ x^2-4x+6-2y^6=0. \end{cases}$

9.188. $\begin{cases} x^2-y^2+2y-2=0, \\ 2x^2+y^2+2xy+x=0. \end{cases}$

9.189. $\begin{cases} x^2-xy+4=0, \\ |x-2|+y^2-4y=0. \end{cases}$

9.190. Решите в положительных числах систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+3z+4u=10, \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+\frac{4}{u}=10. \end{cases}$

Решите систему (**191—194**):

9.191. а) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=12, \\ xy+xz+yz=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4+y^4+z^4=3, \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=3. \end{cases}$

9.192. а) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=18, \\ x^2+y^2+z^2=108. \end{cases}$

9.193. а) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy-16=z^2. \end{cases}$

9.194. а) $\begin{cases} x^2+y^2+8=z, \\ 6x+2y-z\geqslant 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy=1, \\ x+y+\sqrt{1-4z^2}=2. \end{cases}$

Системы уравнений с параметрами

9.195. При каком значении параметра a система уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+y=a, \\ y-x^2=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=a, \\ y^2+2x=1 \end{cases}$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

9.196. При каких значениях параметра m система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=m, \\ x-y=m \end{cases}$ имеет единственное решение?

9.197. При каких значениях параметра a система уравнений имеет два решения:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ (x+y)^2=36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ xy=a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=2a-1, \\ xy=a-1? \end{cases}$

9.198. Найдите число решений системы уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ в зависимости от параметра a.

9.199. Сколько решений в зависимости от a имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ |x|=y-a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+10x=0, \\ y=|x-a|? \end{cases}$

9.200. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y-x^2=a, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет три решения? Найдите эти решения.

9.201. При каких значениях параметра p система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (py+x)(x-p\sqrt{3})=0 \end{cases}$$

имеет три решения?

9.202. При каких значениях параметра b система уравнений

а) $\begin{cases} |x|+4|y|=b, \\ |y|+x^2=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x|+2|y|=1, \\ |y|+x^2=b; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |y|+x^2=4, \\ x^2+y^2=b \end{cases}$

имеет четыре различных решения?

9.203. При каких значениях параметра c система уравнений

$$\begin{cases} 3|x|+|y|=c, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет восемь различных решений?

9.204. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a+3}-\dfrac{y}{a+2}+1=0, \\ \dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{y-2}=1, \end{cases}$$

где $a>0$, и докажите, что если a — целое число, то для каждого решения $(x;\ y)$ данной системы число $1+xy$ является квадратом целого числа.

9.205. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+2xy-6x-6y+10-a=0, \\ x^2+y^2-2xy-2x+2y+a=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Решите систему при найденных значениях a.

9.206. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=1, \\ y=ax^2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

9.207. Найдите все значения параметра a, при которых окружности $x^2+y^2=1$ и $(x-a)^2+y^2=4$ касаются.

9.208. Найдите все значения параметра a ($a>0$), при которых окружности $x^2+y^2=1$ и $(x-3)^2+(y-4)^2=a^2$ касаются. Найдите координаты точки касания.

9.209. Найдите все значения a ($a>0$), при которых окружность $x^2+y^2=a^2$ касается прямой $3x+4y=12$. Найдите координаты точки касания.

9.210. Прямая $y=5x+a$ проходит через центр окружности $x^2+y^2-2x+4y=21$. Найдите координаты точек пересечения прямой и окружности.

9.211. При каком значении параметра a прямая $y=x+1$ будет проходить через центр окружности $(x-1)^2+(y-a)^2=8$? Найдите координаты точек пересечения прямой и окружности.

9.212. Известно, что прямая $y=12x-9$ и парабола $y=ax^2$ имеют только одну общую точку. Найдите координаты этой точки.

9.213. При каких значениях b и r ($b>0$, $r>0$) окружность $(x-1)^2+(y-b)^2=r^2$ будет касаться прямых $y=0$ и $y=\frac{4}{3}x$? Найдите координаты точек касания.

9.214. Изобразите на координатной плоскости множество точек с координатами $(a;\ b)$ таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x+y=b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

9.215. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y-|x|+1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

§ 10. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Текстовые задачи, как правило, решают по следующей схеме: выбирают неизвестные; составляют уравнение или систему уравнений, а в некоторых задачах — неравенство или систему неравенств; решают полученную систему (иногда достаточно найти из системы какую-то комбинацию неизвестных, а не решать ее в обычном смысле).

Условно содержание текстовых задач можно классифицировать по следующим типам: задачи, связанные с понятиями «процентное содержание», «концентрация»; задачи на «движение»; задачи на «работу». Приведем примеры решения задач каждого типа.

Пример 1 (3)*.

Решение. Пусть в 40 т руды содержится x т железа. Тогда $(40-x)$ т составляют примеси. При выплавке стали количество железа не меняется, а количество примесей уменьшается. Поскольку из условия задачи следует, что в 20 т выплавленной стали содержится 94% железа, то $x=0,94\cdot 20$. Теперь вычислим процент примесей в руде:

$$\frac{40-x}{40}\cdot 100=\frac{40-0,94\cdot 20}{40}\cdot 100=53.$$

Ответ: 53%.

Пример 2 (39).

Решение. Пусть расстояние между городами A и B равно s км, скорость поезда, отправляющегося из города A, равна x км/ч, скорость поезда, отправляющегося из города B, равна y км/ч. Тогда $\frac{s}{2x}$ ч — время, за которое преодолевает половину пути первый поезд (отправляющийся из города A), $\frac{s}{2y}$ ч — время, за которое проходит половину пути второй поезд. Из условия задачи заключаем, что $\frac{s}{2x}-\frac{s}{2y}=1,5$. Кроме того, $(6x+6y)$ км — расстояние, которое преодолели бы оба поезда за 6 ч, если бы выехали одновременно, — равно $0,9s$ км. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{s}{2x}-\frac{s}{2y}=\frac{3}{2},\\ 6x+6y=0,9s.\end{cases}$$

Количество уравнений в системе меньше количества неизвестных, но в задаче требуется найти время, за которое каждый из поездов преодолевает расстояние s км, т. е. фактически требуется найти $t_1=\frac{s}{x}$ и $t_2=\frac{s}{y}$. Тогда первое уравнение системы примет вид $t_1-t_2=3$, а второе уравнение системы после деления обеих частей на $3s$ преобразуется к виду $\frac{2}{t_1}+\frac{2}{t_2}=\frac{3}{10}$. Решая систему уравнений относительно t_1 и t_2, находим $t_1=12$, $t_2=15$.

Ответ: 12 ч, 15 ч.

Пример 3 (80).

Решение. Пусть первая бригада изготовляла x деталей в час, а вторая бригада — y деталей в час. Тогда 72 детали бригады изготовили вместе за $\frac{72}{x+y}$ часа, значит, в первый день они

---

* Здесь и далее в скобках указан номер задачи из данного параграфа.

работали раздельно $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)$ ч. За время раздельной работы первая бригада изготовила $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x$ деталей, а вторая — $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y$ деталей. Из условия задачи заключаем:

$$\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8. \qquad (1)$$

Во второй день первая бригада изготовляла $(x+1)$ деталей в час, а вторая — $(y-1)$ деталей в час. Значит, 72 детали бригады изготовили вместе за $\frac{72}{x+y}$ часа, таким образом, во второй день бригады работали раздельно $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)$ часов и изготовили за это время $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)$ деталей — первая бригада и $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)$ деталей — вторая. Из условия задачи заключаем, что

$$\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)=8. \qquad (2)$$

Итак, условия (1) и (2) дают систему уравнений

$$\begin{cases}\left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8,\\ \left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8.\end{cases}$$

Положим $x-y=u$, $\frac{72}{x+y}=v$, тогда

$$\begin{cases}(7-v)u=8,\\ (5-v)(u+2)=8.\end{cases}$$

Выразим из первого уравнения переменную u и подставим во второе уравнение системы: $\begin{cases}u=\frac{8}{7-v},\\ (5-v)\left(\frac{4}{7-v}+1\right)=4.\end{cases}$

Второе уравнение последней системы приводится к виду v^2-12v+ $+27=0$, откуда $v_1=3$, $v_2=9$. Теперь находим соответствующие значения u: $u_1=2$, $u_2=-4$ (не удовлетворяет условию задачи $x>y$). Следовательно, для определения x и y имеем систему уравнений $\begin{cases}x-y=2,\\ \frac{72}{x+y}=3\end{cases}$ откуда $x=13$, $y=11$.

Ответ: 13 деталей в час изготовляла первая бригада, 11 деталей в час изготовляла вторая бригада.

Задачи

10.1. Найдите отношение двух чисел, если известно, что разность первого числа и 10% второго числа составляет 50% суммы второго числа и 50% первого.

10.2. Свежие грибы содержат 90% влаги, сушеные — 12%. Сколько сушеных грибов получится из 10 кг свежих?

10.3. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

10.4. Антикварный магазин, купив два предмета за 225 р., продал их, получив 40% прибыли. За какую цену был куплен магазином каждый предмет, если при продаже первого предмета было получено 25% прибыли, а второго — 50%?

10.5. Стоимость 70 экземпляров первого тома книги и 60 экземпляров второго тома составляла 230 р. В действительности за все эти книги уплатили 191 р., так как была произведена скидка: на первый том — 15%, а на второй том — 20%. Найдите первоначальную цену каждого из томов.

10.6. Третий и четвертый кварталы года предприятие работало по новой технологии, что позволило повысить производительность труда на 50%. На сколько процентов предприятие выпустило больше продукции за год, если бы новая технология использовалась уже со второго квартала?

10.7. Заведующий лабораторией получил премию, равную 40% своего оклада, а его заместитель — 30% своего оклада. Премия начальника оказалась на 45 р. больше премии заместителя. Каков оклад заведующего лабораторией, если он на 50 р. больше оклада заместителя?

10.8. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$ м. Найдите катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}\%$, а другой — на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин станет равной 14 м.

10.9. Каково минимально возможное число учеников в выпускном классе средней школы, если известно, что процент неуспевающих учеников в классе заключен в пределах от 2,5% до 2,9%?

10.10. Из ста учеников девятых классов на первом экзамене получили отличные и хорошие оценки 80%, на втором экзамене — 72%, на третьем — 60%. Какое может быть наименьшее число учащихся, получивших отличные и хорошие оценки на всех трех первых экзаменах?

10.11. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 280.

10.12. Двузначное число в 4 раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в 2,25 раза больше самого числа. Найдите это число.

10.13. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 3. Найдите это число, если разность квадратов его цифр по модулю в 2 раза больше квадрата разности его цифр.

10.14. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

10.15. Сумма кубов цифр двузначного числа равна 243, а произведение суммы его цифр на произведение цифр этого числа равно 162. Найдите это двузначное число.

10.16. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найдите это число.

10.17. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 17, а сумма квадратов его цифр равна 109. Если из этого числа вычесть 495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

10.18. Принятых в институт первокурсников первоначально распределили поровну по учебным группам. В связи с сокращением числа специальностей количество групп уменьшилось на 9, всех первокурсников перераспределили по новым группам, причем так, что группы снова получились равные по численности. Известно, что всего 1512 первокурсников и число студентов в группе стало меньше 28. Сколько стало групп?

10.19. Четыре школьника сделали в магазине канцелярских товаров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 к.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 к.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 к; четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?

10.20. Четверо рабочих обрабатывают детали с постоянной производительностью. Если первый будет работать 2 ч, второй — 4 ч и четвертый — 6 ч, то вместе они обработают 260 деталей. Если второй и четвертый будут работать по 6, а третий — 2 ч, то будет обработано 270 деталей. Если второй и четвертый будут работать по 1 ч, то они успеют обработать 40 деталей. Сколько деталей будет обработано, если первый, третий и четвертый рабочий будут работать по 1 ч?

10.21. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Сколько каких оценок получили студенты группы?

10.22. Около дома посажены липы и березы, причем их общее количество больше 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше, чем лип. Если же увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

10.23. Квартал застроен девятиэтажными и шестнадцатиэтажными домами, причем шестнадцатиэтажных домов меньше, чем девятиэтажных. Если число шестнадцатиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число девятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено девятиэтажных и сколько шестнадцатиэтажных домов?

10.24. Сумма, равная 53 к., составлена из трехкопеечных и пятикопеечных монет, общее число которых меньше 15. Если в этом наборе монет трехкопеечные монеты заменить пятикопеечными, а пятикопеечные — трехкопеечными, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более чем в 1,5 раза. Сколько трехкопеечных монет было в наборе?

10.25. За самостоятельную работу ученикам были выставлены оценки «2», «3», «4» и «5». Оценки «2», «3», «5» получило одинаковое число учеников, а оценок «4» поставлено больше, чем всех остальных, вместе взятых. Оценки выше «3» получили менее 10 учеников. Сколько троек и сколько четверок было поставлено, если писали работу не менее 12 учеников и каждый писавший получил оценку?

10.26. Смешали 10%-ный и 25%-ный растворы соли и получили 3 кг 20%-ного раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано?

10.27. Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количество этих металлов находится в отношении 2:3, а в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

10.28. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляют смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1:2, то температура смеси будет 35 °С, а если 3:4, то температура смеси будет 33 °С. Найдите температуру воды в каждом сосуде (считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры).

○ **10.29.** Имеются два сосуда, содержащих 4 кг и 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом сосуде?

10.30. Плотность первого металла на 4 г/см^3 больше плотности второго металла. Из 6 кг первого металла и 4 кг второго изготовили сплав, деталь из которого имеет массу 0,5 кг. Если бы такая же по объему деталь была изготовлена только из второго металла, то ее масса была бы на 20% меньше. Найдите плотность первого металла.

10.31. Из двух растворов с различным процентным содержанием спирта и массой m г и n г отлили по одинаковому количеству раствора. Каждый из отлитых растворов долили в остаток от другого раствора, после чего процентное содержание спирта в обоих полученных растворах стало одинаковым. Сколько раствора было отлито из каждого сосуда?

10.32. Имеются три смеси, составленные из трех элементов A, B и C. В первую смесь входят только элементы A и B в весовом отношении 1:2, во вторую смесь входят только элементы B и C в весовом отношении 1:3, в третью смесь входят только элементы A и C в весовом отношении 2:1. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A, B и C содержались в весовом отношении 11:3:8?

10.33. Допуская, что стрелки часов движутся без скачков, определите, через какое время после того, как часы показывали 4 ч, минутная стрелка догонит часовую.

10.34. Длина обода переднего колеса экипажа на a м меньше длины обода заднего колеса. Переднее колесо на расстоянии b м сделало столько же оборотов, сколько заднее на расстоянии c м $(c>b)$. Найдите длину обода каждого колеса.

10.35. Мальчик сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

10.36. Из пункта A в пункт B, расположенный в 24 км от A, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт B на 4 ч раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на 4 км/ч скоростью, то на путь из A в B он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

10.37. От пристани A отправились одновременно вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

10.38. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выезжают велосипедист и автобус. Время, затрачиваемое велосипедистом на проезд из A в B, на 2 ч 40 мин больше времени, которое тратит автобус на проезд из B в A, а сумма этих времен в $5\frac{1}{3}$ раза больше времени, прошедшего от начала движения велосипедиста и автобуса до момента их встречи. Какое время велосипедист затрачивает на проезд из A в B, а автобус — на проезд из B в A?

10.39. Два поезда отправляются навстречу друг другу из городов A и B. Если поезд из города A отправится на 1,5 ч раньше, чем поезд из города B, то они встретятся на середине пути. Если оба поезда выйдут одновременно, то через 6 ч они еще не встретятся, а расстояние между ними составит десятую часть первоначального. За сколько часов может проехать каждый поезд расстояние между A и B?

10.40. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Двигаясь без остановок с постоянной скоростью, они встретились через 30 ч после выхода. Сколько времени затратил на прохождение пути AB каждый поезд, если известно, что первый прибыл в B на 25 ч позже, чем второй прибыл в A?

10.41. Два пешехода выходят одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются через 3 ч. Если бы они оба вышли из пункта A и пошли в пункт B, причем второй вышел бы на 3 ч позднее первого, то второй пешеход догнал бы первого, пройдя две трети расстояния от A до B. Сколько времени потребуется первому пешеходу на путь из пункта A в пункт B?

10.42. Из двух пунктов, расстояние между которыми 2400 км, выезжают одновременно навстречу друг другу пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на 3 ч раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 ч позже фактического момента встречи. Найдите скорости поездов.

10.43. Велосипедист отправляется с некоторой скоростью из пункта A в пункт B, отстоящий от A на расстоянии 60 км. Прибыв в B, он сразу же выезжает обратно с той же скоростью, но через 1 ч после выезда из B делает остановку на 20 мин, после чего продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких пределах заключена скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он затратил времени не более, чем на путь от A до B.

10.44. Два туриста вышли из пункта A в пункт B одновременно. Первый турист каждый километр проходит на 5 мин быстрее второго. Первый, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 мин, снова пошел в B. Каково расстояние между A и B, если известно, что второй турист прошел его за 2,5 ч и оба туриста пришли в B одновременно?

10.45. Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 ч 41 мин. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту, а потом под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если скорость ходьбы туриста составляет: в гору — 4 км/ч, по ровному месту — 5 км/ч, под гору — 6 км/ч, а расстояние между A и B (по дороге) равно 9 км?

10.46. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу, один из A в B, другой из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 км от B, второй раз — в 6 км от A через 6 ч после первой встречи. Найдите расстояние между A и B и скорости обоих туристов.

10.47. Из городов A и B, расстояние между которыми 70 км, одновременно выехали навстречу друг другу автобус и велосипедист и встретились через 1 ч 24 мин. Продолжая движение с той же скоростью, автобус прибыл в B и после 20-минутной стоянки отправился в обратный рейс. Найдите скорости автобуса и велосипедиста, зная, что автобус догнал велосипедиста через 2 ч 41 мин после первой встречи.

10.48. На расстояние 100 км грузовой автомобиль расходует не менее, чем на 10 л бензина больше, чем легковой. Расходуя 1 л бензина, грузовой автомобиль проходит на 5 км меньше, чем легковой. Какое расстояние может преодолеть легковой автомобиль, расходуя 1 л бензина?

10.49. Три мотоциклиста стартуют одновременно из одной точки кольцевого шоссе в одном направлении. Первый мотоциклист впервые догнал второго, сделав 4,5 круга после старта, а за 0,5 ч до этого он впервые догнал третьего мотоциклиста. Второй мотоциклист впервые догнал третьего через 3 ч после старта. Сколько кругов в час делает первый мотоциклист?

10.50. По шоссе навстречу пешеходу движутся велосипедист и мотоциклист. В момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был от них в 8 км, а когда мотоциклист встретил пешехода, велосипедист отставал от мотоциклиста на 4 км. Какое расстояние будет между мотоциклистом и велосипедистом, когда пешеход встретит велосипедиста?

10.51. Из пункта A по шоссе в одном направлении выезжают одновременно два автомобиля, через час вслед за ними выезжает третий автомобиль. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго, если известно, что третий автомобиль не обгонял первых двух?

10.52. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий машину,— в 30 км от базы (между базой и домом первого приятеля). Они двинулись в путь одновременно, причем владелец машины поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца машины, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость машины? (Все скорости считаются постоянными.)

10.53. Три пловца должны проплыть из A в B и обратно. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. На пути от A до B все пловцы прошли некоторую точку C одновременно. Третий пловец, доплыв до B и сразу повернув назад, встречает второго в 9 м от B, а первого в 15 м от B. Найдите скорость третьего пловца, если расстояние между A и B равно 55 м.

10.54. От пристани A вниз по реке, скорость течения которой равна v км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/ч. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определите все те значения v, при которых к моменту возвращения катера в A плот проходит более 15 км.

10.55. Два судна двигаются прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник становится прямоугольным. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти 120 км. Найдите расстояние между судами в начальный момент времени.

10.56. В реку впадает приток. Катер отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 ч на весь путь от A до B. Затем катер возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 ч. Собственная скорость катера, т. е. скорость катера в стоячей воде, равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость течения притока?

10.57. В озеро впадают две реки. Лодка отплывает от пристани A на первой реке, плывет 36 км вниз по течению до озера, далее 19 км по озеру (в озере нет течения) и 24 км по второй реке вверх против течения до пристани B. На весь путь от A до B лодка затрачивает 8 ч. Из них 2 ч она плывет по озеру. Скорость течения первой реки на 1 км/ч больше, чем скорость течения второй реки. Найдите скорость течения каждой реки. (Собственная скорость лодки постоянна.)

10.58. От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли теплоход и плот. Теплоход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 ч и отправился обратно в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй теплоход, отплывший из A на 40 ч позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянна, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости теплоходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определите скорости теплоходов и скорость течения реки.

10.59. Две точки A и B начинают одновременно сближаться по меньшей дуге окружности, равной 150 м, и встречаются через 10 с. Если же точки начнут двигаться по большей дуге, то они встретятся через 14 с. Найдите длину окружности и скорости движения точек, если точка A может пройти всю окружность за время, за которое точка B пройдет 90 м.

10.60. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

10.61. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом через каждые 3 ч. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 20 мин. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

10.62. Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами, по 60 ящиков в каждой; при этом в 21 ящике были груши, а в остальных — яблоки. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине, если известно, что в первой машине на один ящик с грушами приходилось в 3 раза больше ящиков с яблоками, чем во второй?

10.63. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работать на 30 мин раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 27 м, оказалось, что он отстает от первого на 1 м. С какой скоростью копали экскаваторы, если известно, что второй выкапывает в час на 4 м больше, чем первый?

10.64. Двум землекопам было поручено вырыть канаву за 3 ч 36 мин. Однако первый приступил к работе тогда, когда второй уже вырыл треть канавы и перестал копать. В результате канава была вырыта за 8 ч. За сколько часов каждый землекоп может вырыть канаву?

10.65. Две трубы, работая совместно, наполняют бассейн за 6 ч. За какое время наполняет бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что в течение 1 ч из первой трубы вытекает на 50% больше воды, чем из второй?

10.66. 60 деталей первый рабочий изготавливает на 3 ч быстрее, чем второй. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготавливают за 1 ч 30 деталей?

10.67. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, из которых первая вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 ч 36 мин. Вторая глава была перепечатана за 8 ч, из которых 2 ч работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Какое время потребуется второй машинистке, чтобы одной перепечатать третью главу?

10.68. Резервуар объемом 18 $м^3$ можно наполнить по двум трубам. Обе трубы, работая одновременно, заполняют резервуар за 3 ч. Если сначала вода поступает только через бóльшую трубу, а после того как резервуар заполнится на 3/4 объема, труба будет перекрыта и одновременно будет открыта меньшая труба, то для заполнения всего объема понадобится 6 ч. Сколько воды поступает за 1 ч через каждую из труб?

10.69. Бассейн может наполняться водой с помощью двух насосов разной производительности. Если половину бассейна наполнить, включив лишь первый насос, а затем, выключив его, продолжить наполнение с помощью второго насоса, то весь бассейн наполнится за 2 ч 30 мин. При одновременной работе обоих насосов бассейн наполняется за 1 ч 12 мин. Какую часть бассейна наполняет за 20 мин работы насос меньшей производительности?

10.70. В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на 1/3 бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым через 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

10.71. В цехе проходит соревнование между тремя токарями. За определенный период времени первый и второй токари обработали в 3 раза больше деталей, чем третий токарь, а первый и третий токари — в 2 раза больше, чем второй. Какой из токарей победил в соревновании?

10.72. На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в строй третий участок, в результате чего производительность шахты увеличилась в полтора раза. Сколько процентов составляет производительность второго участка от производительности первого, если известно, что за четыре месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за весь год?

10.73. Три бригады, работая одновременно, выполняют норму по изготовлению деталей за некоторое число часов. Если бы первые две бригады работали в 2 раза медленнее, а третья бригада — в 4 раза быстрее, чем обычно, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют эту же норму в 2 раза быстрее, чем вторая бригада совместно с третьей. Во сколько раз первая бригада делает деталей за 1 ч больше, чем третья?

10.74. Совхоз располагает тракторами четырех марок — А, Б, В и Г. Бригада из одного трактора марки А, двух тракторов марки Б и одного трактора марки В производит вспашку поля за 2 дня. Бригада из одного трактора марки В и двух тракторов марки Г тратит на эту работу 3 дня, а бригада из трех тракторов марок Б, В и Г — шесть дней. За сколько времени выполнит эту работу бригада, составленная из четырех тракторов различных марок?

10.75. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, выполняют всю работу за 7,5 ч, первый, третий и пятый — за 5 ч, первый, третий и четвертый — за 6 ч, четвертый, второй и пятый — за 4 ч. За какой промежуток времени выполняют эту работу все пять человек вместе?

10.76. В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через первую трубу бак может быть наполнен на 1 ч быстрее, чем через вторую трубу. Если бы емкость бака была больше на 2 м^3, а пропускная способность второй трубы была бы больше на $\frac{4}{3}\,\frac{м^3}{ч}$, то для наполнения бака через вторую трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется для прохождения 2 м^3 воды через первую трубу. Какова емкость бака, если известно, что за время его наполнения через вторую трубу через первую трубу могло бы поступить 3 м^3 воды?

10.77. Через 2 ч после того как первый трактор начал пахать поле, к нему присоединился второй, и они вместе закончили вспашку. Если бы тракторы поменялись ролями, то они закончили бы вспашку на 24 мин позднее. Сколько времени тракторы работали вместе, если известно, что первый может вспахать четверть поля на 3 ч быстрее, чем второй — треть поля?

10.78. Токарь и его ученик получили наряд на изготовление деталей. По нему ученик должен был изготовить 35 деталей, а токарь — 90 деталей. Токарь и ученик начали работу одновременно. Сначала токарь сделал 30 деталей, обрабатывая в час вдвое больше деталей, чем ученик. Затем он стал обрабатывать в час на 2 детали больше и закончил работу на 1 ч позже ученика. Если бы токарь все детали обрабатывал с той же производительностью, что и при работе над 60 деталями в первом случае, то он закончил бы работу на 30 мин позже ученика. Сколько деталей в час обрабатывал ученик?

10.79. Двое рабочих работали одно и то же время и изготовили вместе (работая с постоянной производительностью труда и независимо один от другого) 150 деталей. Если бы оба рабочих работали с производительностью первого рабочего, то для изготовления 150 деталей им потребовалось бы времени на 1/2 ч меньше. Если бы оба рабочих работали с производительностью второго рабочего, то для изготовления 150 деталей им потребовалось бы времени на 3/4 ч больше. Сколько деталей изготовит второй рабочий за восьмичасовой рабочий день?

10.80. Две бригады рабочих начали работу в 8 ч. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 ч выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала за 1 ч на одну деталь больше, а вторая бригада за 1 ч на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 ч и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 ч. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

10.81. Объем грунта, который вынимает за 1 ч первый экскаватор, меньше, чем объем грунта, который вынимает за 1 ч второй экскаватор. Оба экскаватора начали работать вместе и вырыли котлован объемом 240 м^3. Потом первый экскаватор начал рыть второй котлован, а второй экскаватор продолжал рыть первый котлован. Через 7 ч после начала их работы объем первого котлована оказался на 480 м^3 больше объема второго котлована. На другой день второй экскаватор вынимал за 1 ч на 10 м^3 больше, а первый за 1 ч вынимал на 10 м^3 меньше. Вырыв вместе котлован объемом 240 м^3, первый экскаватор стал рыть другой котлован, а второй экскаватор продолжал рыть первый. Теперь объем первого котлована стал на 480 м^3 больше объема второго котлована уже через 5 ч после начала работы экскаваторов. Сколько м^3 грунта в 1 час вынимает каждый экскаватор?

10.82. К двум бассейнам подведены две трубы разного диаметра (к каждому бассейну своя труба). Через первую трубу налили в первый бассейн определенный объем воды и сразу после этого во второй бассейн через вторую трубу налили такой же объем воды, причем на все это вместе ушло 16 ч. Если бы через первую трубу вода текла столько времени, сколько через вторую, а через вторую — столько времени, сколько через первую, то через первую трубу налилось бы воды на 320 $м^3$ меньше, чем через вторую. Если бы через первую трубу проходило воды на 10 $м^3$/ч меньше, а через вторую — на 10 $м^3$/ч больше, то чтобы налить в бассейны (сначала в первый, а потом во второй) первоначальные объемы воды, ушло бы 20 ч. Сколько времени лилась вода через каждую из труб?

10.83. Имеются три не сообщающихся между собой резервуара, причем объем третьего не меньше объема второго. Первый резервуар имеет объем V и может быть заполнен первым шлангом за 3 ч, вторым шлангом — за 4 ч, третьим шлангом — за 5 ч. К каждому из резервуаров может быть подключен любой из этих трех шлангов. После того как к каждому из резервуаров подключают по одному шлангу каким-либо способом, все шланги одновременно включаются. Как только какой-нибудь резервуар наполнится, соответствующий шланг отключается и не может быть подключен в дальнейшем к другому резервуару. Заполнение считается оконченным, если наполнены все три резервуара. При самом быстром способе подключения заполнение окончится через 6 ч. Если бы все резервуары сообщались, то заполнение окончилось бы через 4 ч. Найдите объемы второго и третьего резервуаров.

§ 11. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1. Арифметический корень *n*-й степени и его свойства. Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$) из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$.

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Последнее свойство называется основным свойством корня.

2. Степень с рациональным показателем и ее свойства.

Если $a > 0$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

Если $\frac{m}{n} > 0$, $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Для любых $a>0$, $b>0$ и любых рациональных чисел p и q выполняются следующие свойства:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q},$$
$$a^p : a^q = a^{p-q},$$
$$(a^p)^q = a^{pq},$$
$$(ab)^p = a^p b^p,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

3. Иррациональные уравнения и неравенства.

При решении иррациональных уравнений, как правило, применяют преобразование, связанное с возведением обеих частей уравнения в натуральную степень. Следует помнить, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получается уравнение, равносильное исходному. Если же возводить обе части уравнения в четную степень, то, вообще говоря, получается уравнение, являющееся следствием исходного, т. е. такое, которое, кроме корней исходного уравнения, может содержать и другие корни (их называют посторонними). Значит, в этом случае необходимо проверить все найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

Возможен и другой путь решения иррациональных уравнений — переход к равносильным системам, в которых учитывается область определения уравнения и требование неотрицательности обеих частей уравнения, возводимых в четную степень.

При решении иррациональных неравенств либо используют метод интервалов, либо с помощью некоторых равносильных преобразований заменяют данное иррациональное неравенство системой (или совокупностью систем) рациональных неравенств.

Пример 1. Внесите множитель под знак корня: $xy\sqrt[4]{-x}$.

Решение. $\sqrt[4]{-x}$ определен при $x \leqslant 0$. Значит, знак множителя перед корнем определяется знаком переменной y. Если $y \geqslant 0$, то $xy \leqslant 0$, $-xy \geqslant 0$, следовательно,

$$xy\sqrt[4]{-x} = -(-xy)\sqrt[4]{-x} = -\sqrt[4]{(-xy)^4(-x)} = -\sqrt[4]{-x^5y^4}.$$

Если $y<0$, то $xy \geqslant 0$, следовательно,

$$xy\sqrt[4]{-x} = \sqrt[4]{-x^5y^4}.$$

Ответ: $\sqrt[4]{-x^5y^4}$ при $y<0$, $-\sqrt[4]{-x^5y^4}$ при $y \geqslant 0$.

Пример 2. Найдите область определения выражения $(3-|5a+2|)^{-3,4}$.

Решение. Поскольку степень с отрицательным рациональным показателем определена только при положительном основании, область определения данного выражения составляют те и только те значения a, которые удовлетворяют неравенству $3-|5a+2|>0$, т. е. $|5a+2|<3$, откуда $-3<5a+2<3$, $-5<5a<1$; таким образом, $-1<a<0{,}2$.

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение $x\sqrt[3]{x^2}+(2a-3)x^{\frac{5}{6}}-6a=0$ имеет два решения?

Решение. Область определения уравнения — промежуток $[0;\ \infty)$. На этом множестве имеет место тождественное равенство $x\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{5}{3}}$, значит, данное уравнение — квадратное относительно $x^{\frac{5}{6}}$. Корни этого уравнения (по теореме Виета) 3 и $-2a$, следовательно, данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^{\frac{5}{6}}=3, \\ x^{\frac{5}{6}}=-2a. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет одно решение при любом значении параметра a, а потому совокупность имеет два решения тогда и только тогда, когда второе ее уравнение имеет одно решение, не совпадающее с решением первого уравнения совокупности, т. е. при $\begin{cases} -2a\geqslant 0, \\ -2a\neq 3. \end{cases}$ Таким образом, получаем ответ: $a\leqslant 0$, $a\neq -1{,}5$.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{10-3x}=x+6$.

Решение. I способ. На основании определения арифметического квадратного корня можно утверждать, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 10-3x=(x+6)^2, \\ x+6\geqslant 0. \end{cases}$$

Заметим, что условие $10-3x\geqslant 0$ является в данном случае избыточным, так как оно следует из первого уравнения полученной системы.

Решая уравнение системы, находим два корня: -2 и -13, второй корень не удовлетворяет неравенству системы, т. е. не является корнем исходного уравнения.

Замечание. Аналогичным образом можно показать, что любое уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

II способ. Умножим обе части уравнения на 3 и введем новую переменную $y=\sqrt{10-3x}$. Тогда уравнение примет вид: $3y=28-y^2$, откуда $y_1=4$, $y_2=-7$ (не удовлетворяет условию $y\geqslant 0$). Таким образом, $\sqrt{10-3x}=4$. Обе части последнего уравнения неотрицательны, значит, возводя их в квадрат, приходим к равносильному уравнению $10-3x=16$, откуда $x=-2$.

III способ. Заметим, что $x=-2$ является корнем данного уравнения. Левая часть уравнения — функция убывающая на своей области определения, как композиция убывающей линейной функции и возрастающей функции $y=\sqrt{t}$. Правая часть уравнения — возрастающая линейная функция. Значит, данное уравнение имеет не более одного корня (см. § 8, № 182), который уже определен.

Упражнения

КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ

Вычислите значение числового выражения **(1—4)**:

11.1. а) $\sqrt[3]{-2^3}-\sqrt[3]{(-2)^3}$; б) $\sqrt[6]{(-3)^6}-\sqrt[5]{-3^5}$.

11.2. а) $\sqrt[3]{125\cdot 8}-0{,}5\cdot\sqrt[10]{1024}$; б) $1{,}5\cdot\sqrt[9]{512}-\sqrt[3]{216\cdot 1000}$.

11.3. а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{1}{4096}}}-\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}}$.

11.4. а) $\sqrt[3]{54\cdot 32}-\sqrt[4]{8\cdot 162}+\sqrt[3]{42\frac{7}{8}}$;

б) $\sqrt[4]{648\cdot 1250}-\sqrt[3]{256\cdot 54}-\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

При каких значениях переменной определено выражение **(5—6)**:

11.5. а) $\sqrt[4]{9-x^2}$; б) $\sqrt[5]{\frac{x}{3-x}}$; в) $\sqrt[6]{\frac{2-x}{x+3}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{x-2}{|x|-2}}$?

11.6. а) $\sqrt[8]{-5a^2+7a-2}$; б) $\sqrt[7]{\frac{1}{\sqrt{a}-1}}$;

в) $\sqrt[10]{|a|-|a+2|}$; г) $\sqrt[9]{\frac{2a}{a^3+8a^2-20a}}$?

Решите уравнение **(7—9)**:

11.7. а) $x^5=25$; б) $x^6=10$; в) $2x^4-15=0$; г) $3x^3+13=0$.

11.8. а) $\sqrt[3]{2x-3}=2$; б) $\sqrt[4]{3x+5}=3$;

в) $3\sqrt[5]{3x-1}+2=0$; г) $2\sqrt[6]{5x+2}-1=0$.

11.9. а) $x^8-9x^4+18=0$; б) $x^6-3x^3-10=0$;

в) $x^{12}=21+4x^6$; г) $2x^5=15-x^{10}$.

11.10. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt[3]{35}$; б) $\sqrt[4]{67}$; в) $\sqrt[5]{-463}$; г) $\sqrt[6]{1112}$.

11.11. Оцените значение выражения $\sqrt[4]{a}$, если известно, что:

а) $16\leqslant a\leqslant 39{,}0625$; б) $10^{-8}<a\leqslant 0{,}1296$.

11.12. Оцените значение выражения $\sqrt[3]{a}$, если известно, что: а) $-27 \leqslant a < 42{,}875$; б) $-0{,}512 < a \leqslant -0{,}085184$.

11.13. Определите знак числа:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{7{,}3}-\sqrt[3]{3{,}7}}{\sqrt[4]{1{,}001}-1}$; б) $(\sqrt[5]{3{,}5}-\sqrt[5]{\pi})(\sqrt[6]{0{,}999}-1)$;

в) $(\sqrt[7]{-6{,}5}-\sqrt[7]{-5{,}6})(\sqrt[4]{0{,}3}-\sqrt[4]{0{,}2})$; г) $\dfrac{\sqrt[9]{-1990}-\sqrt[9]{-1991}}{\sqrt[8]{0{,}51}-\sqrt[8]{0{,}8}}$.

Решите неравенство **(14—16)**:

11.14. а) $\sqrt[3]{x-1} < 2$; б) $\sqrt[3]{x+1} \geqslant 2$;
в) $\sqrt[4]{x-2} \geqslant 3$; г) $\sqrt[4]{x+2} \leqslant 3$.

11.15. а) $3x^5-10>0$; б) $4x^5+5 \leqslant 0$;
в) $5x^6-30 \geqslant 0$; г) $8x^6-7<0$.

11.16. а) $x^8-5x^4+6 \geqslant 0$; б) $x^6+x^3-42<0$;
в) $x^{12}-x^6-20<0$; г) $x^{14}+7x^7+12 \geqslant 0$.

Постройте график функции **(17—18)**:

11.17. а) $y=1-\sqrt[4]{x}$; б) $y=\sqrt[4]{-x}$; в) $y=\sqrt[4]{|x|}$;
г) $y=\sqrt[4]{x+1}-1$; д) $y=\sqrt[4]{|x-1|}$; е) $y=\sqrt[4]{|x|-1}$.

11.18. а) $y=2-\sqrt[3]{x}$; б) $y=\sqrt[3]{-x}$; в) $y=\sqrt[3]{|x|}$;
г) $y=\sqrt[3]{x-1}+1$; д) $y=\sqrt[3]{|x+1|}$; е) $y=\sqrt[3]{|x|+1}$.

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ n-й СТЕПЕНИ

Вычислите значение выражения **(19—22)**:

11.19. а) $0{,}5\cdot\sqrt[3]{96}\cdot\sqrt[3]{1\frac{1}{3}}-\dfrac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$;

б) $2\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{62{,}5}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}-\dfrac{\sqrt[3]{0{,}25}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

11.20. а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}-\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-64}}$;

б) $\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt{32}+\dfrac{\sqrt[5]{-729}}{\sqrt[5]{3}}$.

11.21. а) $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt[5]{6-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{6+2\sqrt{17}}$.

11.22. а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt[4]{52}}\cdot\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{52}-\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}}\cdot\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}+\sqrt{2}}$.

Вынесите множитель за знак корня (23—27):

11.23. а) $\sqrt[3]{-3000}$; б) $\sqrt[4]{48}$; в) $\sqrt[5]{-486}$; г) $-1{,}5\sqrt[5]{-160}$.

11.24. а) $\sqrt[3]{24a^6}$; б) $\sqrt[3]{-54b^9}$; в) $\sqrt[4]{32a^5}$; г) $\sqrt[5]{64b^7}$.

11.25. а) $\sqrt[4]{162a^6}$, где $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[4]{32b^4}$, где $b \leqslant 0$;
в) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, где $a \leqslant 0$; г) $\sqrt[6]{a^{11}b^6}$, где $b \geqslant 0$.

11.26. а) $\sqrt[4]{243a^4b^{12}c^8}$, где $a \leqslant 0$;
б) $\sqrt[6]{128a^{12}b^6c^{18}}$, где $b \geqslant 0$;
в) $\sqrt[4]{a^7b^4c^8}$; г) $\sqrt[6]{a^6b^7c^{13}}$.

11.27. а) $\sqrt[4]{-a^5b^4}$; б) $\sqrt[6]{-a^6b^7}$;
в) $\sqrt[4]{-a^7b^4c^8}$; г) $\sqrt[6]{-a^6b^7c^{13}}$.

Внесите множитель под знак корня (28—32):

11.28. а) $3\sqrt[3]{3}$; б) $-5\sqrt[5]{5}$; в) $2\sqrt[4]{3}$; г) $-2\sqrt[6]{0{,}25}$.

11.29. а) $a\sqrt[3]{5}$; б) $-b\sqrt[5]{3}$;
в) $a\sqrt[4]{3}$, где $a \geqslant 0$; г) $b\sqrt[6]{2}$, где $b \leqslant 0$.

11.30. а) $ab\sqrt[4]{2}$, где $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;
б) $ab\sqrt[4]{3}$, где $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$;
в) $-ab\sqrt[4]{2}$, где $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$;
г) $-ab\sqrt[4]{3}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

11.31. а) $a\sqrt[6]{a}$; б) $b\sqrt[4]{-b}$; в) $-a\sqrt[4]{2}$; г) $b\sqrt[6]{3}$.

11.32. а) $ab\sqrt[4]{a}$; б) $-ab\sqrt[8]{b^3}$; в) $ab\sqrt[6]{-a}$; г) $-ab\sqrt[10]{-b}$.

Сравните числа (33—34):

11.33. а) $\sqrt[4]{26}$ и $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{47}$;
в) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; г) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[3]{3}$.

11.34. а) $-\sqrt[10]{10}$ и $-\sqrt[4]{\sqrt[5]{99}}$; б) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$;
в) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ и $\sqrt[3]{5}$; г) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

Расположите числа в порядке возрастания (35—36):

11.35. а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{18}$; б) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$.

11.36. а) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt[10]{25}$; б) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[10]{7\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$.

Вычислите значение выражения (37—39):

11.37. а) $\dfrac{4-3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8})^2}$; б) $\dfrac{(\sqrt[4]{24}+\sqrt[4]{6})^2}{4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}$;

в) $\dfrac{(\sqrt[3]{9}+\sqrt{3})^2}{\sqrt[3]{3}+2\sqrt[6]{3}+1}$; г) $\dfrac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45})^2}$.

11.38. а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[9]{26+15\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{17\sqrt{5}-38}$; г) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}-5}\cdot\sqrt[6]{49+20\sqrt{6}}$.

11.39. а) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

в) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; г) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Сократите дробь **(40—43)**:

11.40. а) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$.

11.41. а) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$.

11.42. а) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}$; б) $\dfrac{b\sqrt{b}+\sqrt[3]{a^2}}{a^2+b^4\sqrt{b}}$.

11.43. а) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}\,(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}}$; б) $\dfrac{1-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{b}-b}$.

Избавьтесь от знака корня в знаменателе дроби **(44—48)**:

11.44. а) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\dfrac{18}{\sqrt[4]{27}}$; в) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{8}}$; г) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{-49}}$.

11.45. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; в) $\dfrac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$; г) $\dfrac{29}{3+\sqrt[3]{2}}$.

11.46. а) $\dfrac{1}{3+\sqrt[4]{2}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}$.

11.47. а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}$.

11.48. а) $\dfrac{2}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

Решите уравнение **(49—51)**:

11.49. а) $\sqrt[4]{x}-3\sqrt[8]{x}-4=0$; б) $3\sqrt{x}=7-4\sqrt[28]{x^7}$.

11.50. а) $4\sqrt[4]{x^3}-x\sqrt{x}=3$; б) $5\sqrt{x+1}=6-\sqrt[12]{x^3+3x^2+3x+1}$.

11.51. а) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}=\dfrac{8}{\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}}$.

11.52. Найдите значение выражения:

а) $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[8]{a})(1+\sqrt[16]{a})(1+\sqrt[32]{a})(1-\sqrt[32]{a})$ при $a=1991$;

б) $(a-\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$ при $a=5$.

Постройте график функции (53—56):

11.53. а) $y=\sqrt[4]{x^2-6x+9}$; б) $y=1-\sqrt[4]{9+6x+x^2}$.

11.54. а) $y=\sqrt[6]{x^2+4x+4}$; б) $y=2-\sqrt[6]{x^2-4x+4}$.

11.55. а) $y=\sqrt[4]{(x^2+2x+1)^2}+\sqrt[4]{(x^2-2x+1)^2}$;

б) $y=\sqrt[6]{(x^3-3x^2+3x-1)^2}-\sqrt[6]{(x^2+6x+9)^3}$.

11.56. а) $y=\sqrt[6]{x^2-2|x|+1}$; б) $y=1-\sqrt[4]{x^2-4|x|+4}$.

11.57. Докажите, что среднее арифметическое а) четырех; б) трех положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Упростите выражение (58—64):

11.58. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}$.

11.59. $\left(\dfrac{(a+\sqrt[3]{a^2b}):(b+\sqrt[3]{ab^2})-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3$.

11.60. $\left(\dfrac{(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):\dfrac{a+b}{2}$.

11.61. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{a}{b}+2\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$.

11.62. $((\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-1}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-1})^{-2}:\dfrac{a-b}{4(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.

11.63. $\left(\dfrac{\dfrac{1}{a}-a}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}-1\right)}+\sqrt[3]{a}\right)^{-3}$.

11.64. $\left(\sqrt[4]{a^2-2a+1}+\dfrac{a}{\sqrt{1-a}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{\sqrt{a+1}}{a-1}\right)$.

11.65. Решите уравнение

$$\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot\frac{1+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}}=2-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

11.66. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\left(\frac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right)\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

неотрицательно и не зависит от x.

Вычислите значение числового выражения **(67—68)**:

11.67. а) $81^{0,75}\cdot 32^{-0,4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+256^{0,5}$;

б) $16^{-0,75}\cdot 25^{-0,5}+64^{-\frac{4}{3}}\cdot 9^{1,5}-100^{-0,5}$.

11.68. а) $(0,5)^{-4}+16^{0,5}-(0,0625)^{-0,75}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5}$;

б) $(0,008)^{-\frac{1}{3}}\cdot 125^{\frac{2}{3}}-\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:(2,5)^{-2}\cdot(0,75)^{-1}$.

11.69. Докажите, что число $a=\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-0,5}\cdot 10^{-3}+10000^{-0,75}\right)^{0,5}$ является корнем уравнения $110x^2-21x+1=0$.

11.70. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа

$$a=64^{\frac{2}{3}}\cdot 16^{-\frac{3}{2}}(0,5)^{-2}+(-3,375)^{-\frac{1}{3}}$$

и

$$b=(0,25)^{-1,5}+(81)^{-0,25}-(0,125)^{-\frac{4}{3}}.$$

11.71. Докажите, что число $a=1989^{1991}-463^{462}$ делится на число

$$b=\frac{(-3)^{-3}}{(19)^{-1}}+(0,5)^{-4}-625^{0,25}-(2,25)^{-1,5}.$$

При каких значениях переменной определено выражение **(72—73)**:

11.72. а) $(2-3x)^{0,4}$; б) $(5x+2)^{-\frac{2}{3}}$; в) $(x^2-3)^{-0,91}$; г) $(5-x^2)^{\frac{7}{9}}$?

11.73. а) $\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^{-0,2}$; б) $(3x^2-23x+14)^{\frac{2}{7}}$;

в) $\left(\frac{x^2}{5x-x^2-6}\right)^{0,7}$; г) $(5-|2x-5|)^{-\frac{4}{11}}$?

Решите уравнение **(74—75)**:

11.74. а) $x^{\frac{1}{3}}=2$; б) $x^{\frac{2}{5}}=2$; в) $(2x-1)^{\frac{2}{3}}=3$; г) $(2-3x)^{\frac{4}{7}}=-1$.

11.75. а) $(x^2-1)^{\frac{1}{3}}=2$; б) $(1-|x|)^{0,8}=2$;

в) $(3-2x^3)^{\frac{2}{3}}=9$; г) $(3x^2+13|x|)^{0,75}=8$.

В каких пределах изменяется значение выражения (**76—78**):

11.76. а) $x^{0,5}$; б) $x^{0,75}$; в) $4x^{0,5}+3x^{0,75}$, если известно, что $16<x\leqslant 81$?

11.77. а) $x^{0,4}$; б) $2-5x^{0,4}$, если известно, что $243^{-1}\leqslant x<32^{-1}$?

11.78. а) $x^{0,5}$; б) $x^{\frac{1}{3}}$; в) $x^{\frac{1}{6}}$; г) $2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}$, если известно, что $10^{-6}\leqslant x<0{,}015625$?

11.79. Определите знак числа:

а) $\left(5^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{1}{3}}\right)\left(0{,}7^{\frac{2}{7}}-1\right)$; б) $\dfrac{5^{-\frac{1}{3}}-6^{-\frac{1}{3}}}{1-0{,}7^{-\frac{2}{7}}}$;

в) $\dfrac{(1{,}1991)^{0,2}-1}{1-(1{,}1991)^{-0,2}}$; г) $2-0{,}1991^{-0,7}-1{,}991^{0,8}$.

Постройте график функции (**80—81**):

11.80. а) $y=x^{\frac{1}{2}}$; б) $y=1-x^{\frac{1}{2}}$; в) $y=(1-x)^{\frac{1}{2}}$;

г) $y=|x|^{\frac{1}{2}}$; д) $y=|1-x|^{\frac{1}{2}}$; е) $y=(1-|x|)^{\frac{1}{2}}$.

11.81. а) $y=x^{\frac{1}{3}}$; б) $y=-x^{\frac{1}{3}}-1$; в) $y=1-(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

г) $y=|x|^{\frac{1}{3}}$; д) $y=-|x-8|^{\frac{1}{3}}$; е) $y=(|x|-2)^{\frac{1}{3}}$.

11.82. Решите графически уравнение:

а) $x^2+(-x)^{\frac{1}{3}}-2=0$; б) $(x+2)^{1,5}+x=10$;

в) $|x-1|^{0,2}+2x=x^2+1$; г) $x^2+4x+(x+2)^{\frac{1}{3}}+2=0$.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вычислите значение числового выражения (**83—85**):

11.83. а) $((2+15^{0,25})(2-15^{0,25}))^{-1}\cdot(5^{0,5}-3^{0,5})$;

б) $\left((3\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}-16^{-0,25}\right)\left(16^{-\frac{1}{4}}+3^{-0,5}\right)$.

11.84. а) $10^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(7\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}+\dfrac{3}{2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}}\right)$;

б) $(9^{-1}+2^{-2}-0{,}5\cdot 9^{-0,5})(2^{-1}+81^{-0,25})$.

11.85. а) $9\left(\left(2\sqrt{54}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(3\sqrt{0{,}375}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-4}$;

б) $\left(1+4^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)^{0{,}5}$.

Выполните действия **(86—89)**:

11.86. а) $(a^{-0{,}5}+0{,}5a^{0{,}75})^2$; б) $\left(b^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)^3$.

11.87. а) $(a^{-0{,}5}-a^{0{,}5})^{-1}\cdot(a+a^{-1}-2)$;

б) $\left(b^{-\frac{2}{5}}-b^{0{,}8}\right)(b^{1{,}6}+b^{-0{,}8})\left(b^{\frac{4}{5}}+b^{-0{,}4}\right)$.

11.88. а) $(a^{1{,}8}+1)\left(a^{\frac{6}{5}}+a^{\frac{3}{5}}+1\right)(a^{0{,}6}-1)$;

б) $\left(b^{\frac{7}{4}}-2\right)(b^{3{,}5}+2b^{1{,}75}+4)(8+b^{5{,}25})$.

11.89. а) $\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{-\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{12}}+a^{1{,}5}\right)$;

б) $\left(b^{\frac{8}{3}}+b^{-\frac{1}{15}}+b^{-2{,}8}\right)\left(b^{\frac{4}{3}}-b^{-\frac{7}{5}}\right)$.

Сократите дробь **(90—92)**:

11.90. а) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}+5}{25-a^{\frac{1}{3}}}$; б) $\dfrac{x^{0{,}25}-3^{0{,}5}}{3-x^{0{,}5}}$.

11.91. а) $\dfrac{a^{1{,}5}-b^{1{,}5}}{b-a}$; б) $\dfrac{a+b}{a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$.

11.92. а) $\dfrac{a^{0{,}75}-b^{0{,}5}}{a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{12}}}$; б) $\dfrac{b^{\frac{8}{7}}-a^{0{,}8}}{a^{\frac{6}{5}}+b^{\frac{12}{7}}}$.

11.93. Представьте выражение в виде степени с основанием x:

а) $x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$; б) $x^2\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}$;

в) $\dfrac{x^2\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2}}}{\sqrt[15]{x^4}}$; г) $\dfrac{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x\sqrt[5]{x}}}$.

Упростите выражение (94—95):

11.94. $(ab^{-3}+a^{-3}b)^{-1}(a^{-4}+b^{-4})\left(\sqrt{(0,5)^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-9}$.

11.95. $\frac{8b-a}{6}\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}\right)$.

11.96. Упростите выражение

$$\left(\frac{0,5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}}+\frac{(2-a)^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{4}}}{2}\right):(2a-a^2)^{\frac{1}{4}}.$$

Может ли значение данного выражения быть равным:

а) 1; б) $-\frac{1}{3}$?

11.97. Существует ли такое значение переменной m, при котором значение выражения

$$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{m}+1}-\frac{3}{m+1}-\frac{1-m^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{m^2}-1}\right)^{-1}\left(1+m^{-\frac{1}{3}}\right)^2-m^{-\frac{2}{3}}$$

отрицательно?

Упростите выражение (98—100):

11.98. $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+1}-\frac{b^{\frac{1}{4}}}{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+1\right)-2a^{\frac{1}{4}}}\right)(a-b)$.

11.99. $\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^2}{a^{-1}+b^{-1}-\left(a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)}-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

11.100. $\frac{\left((a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}+\left((a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\left((a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left((a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}$.

Докажите, что при всех допустимых значениях переменных, при которых выражение имеет смысл, его значение не зависит от значений переменных (101—103):

11.101. $$\frac{10^{-0,5}(a+b)^{-1}}{\sqrt{2,5}}\cdot\left(\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}-\sqrt[4]{b^3}\right)(\sqrt[4]{a^3}+b^{0,75})}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\sqrt{ab}\right).$$

11.102. $$0,25\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{a}+1}+\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\frac{2a^{\frac{1}{4}}-2}{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}+1\right).$$

11.103. $$\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a+b+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}}+\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3}{a-b-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}.$$

Упростите выражение (104—107):

11.104. $$\frac{\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)}-2a+\frac{4a^2}{a-b}.$$

11.105. $$\frac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^3b})}{(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}})\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2}.$$

11.106. $$\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(1+\left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^{-1}+\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3(1-\sqrt[3]{x})}+$$
$$+\frac{\sqrt[3]{x}\left(1-x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(x^{-\frac{2}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{6(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

11.107. $$\frac{(1-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^{-1})(4(xy)^{\frac{1}{2}}(z-x-y+2\sqrt{xy})^{-1}-1)}{\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}$$

и вычислите его значение при $x=126025$, $y=18225$, $z=729$.

Докажите, что для всех положительных значений переменной имеет место неравенство **(108—110)**:

11.108. $\dfrac{x^{-1,25}+x^{-2}}{x^{-2}+x^{-1,75}}<2+\dfrac{x^{-0,5}-x^{-1,5}}{x^{-1,5}+x^{-1}}$.

11.109. $(x^2+6x+9)^{0,5}>\dfrac{x^2\sqrt[4]{9}+9\sqrt{x}}{x\sqrt[4]{9}+3\sqrt{x}}$.

11.110. $\left(\dfrac{1+8(b-4)^{-1}}{(b+16b^{-1}-8)^{-1}}-\left(\dfrac{1}{225}\right)^{-0,5}\right):\dfrac{b^{-2}-4b^{-2,5}}{b^{-1}+4b^{-1,5}}>16$,

если $b\neq 4$, $b\neq 16$.

11.111. При каких значениях x имеет место неравенство

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}}+\dfrac{2^{1,5}}{x^{-2}}\right):\left(\dfrac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)^{-1}<1,5$?

11.112. Решите уравнение:

а) $\left(x^{\frac{8}{3}}-2x^2\right)^{\frac{1}{3}}-2\left(x^{\frac{2}{3}}-2\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{81}$;

б) $(x^{2,4}+3x^2)^{0,2}+3(x^{0,4}+3)^{0,2}=\sqrt[5]{4096}$.

11.113. При каком значении a уравнение $x^2\sqrt[3]{x^2}-(a+2)x^{\frac{4}{3}}+2a=0$ имеет единственное решение?

11.114. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $x^{3,2}+(2a-3)x\sqrt[5]{x^3}-6a=0$? Найдите эти решения.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Докажите, что уравнение не имеет решения **(115—117)**:

11.115. а) $\sqrt{5-x}+2=0$; б) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{5x+8}+1=0$;

в) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-3}=0$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2}=0$.

11.116. а) $\sqrt{x-8}+3=\sqrt{7-x}$; б) $\sqrt{8-x^2}-2\sqrt{x-3}=1$;

в) $5\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x^2}=\dfrac{1}{2-x}$; г) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{5x-5}=2$.

11.117. а) $\sqrt{10+\sqrt{x-x^2}}=3$; б) $\sqrt{x+17}+\sqrt{x}=4$;

в) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x-6}=x^2$; г) $\sqrt{1-x}=\sqrt[3]{x-2}$.

Равносильны ли уравнения **(118—119)**:

11.118. а) $\sqrt{x-5}=9$ и $x-5=81$;

б) $\sqrt[3]{2-x}=-3$ и $2-x=-27$;

в) $\sqrt[4]{2-x}=-3$ и $2-x=81$;

г) $\sqrt[5]{-x^3-1}=-1$ и $x^3+1=1$?

11.119. а) $\sqrt{x-5}=x$ и $x^2=x-5$; б) $\sqrt[3]{2x+1}=x$ и $2x+1=x^3$;

в) $\sqrt[4]{x-2}=|x|$ и $x-2=x^4$; г) $\sqrt[5]{x-1}=-x$ и $x-1=-x^5$?

Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня (**120—122**):

11.120. а) $\sqrt{x^2-1}=2$; б) $\sqrt{3-2x^2}=1$;
в) $\sqrt{|x-3|+2}=3$; г) $\sqrt{5-|1-x^2|}=2$.

11.121. а) $\sqrt{7-3x}=x+7$; б) $\sqrt{15+3x}=1-x$;
в) $3x+5=\sqrt{3-x}$; г) $2x+\sqrt{34-5x}=7$.

11.122. а) $x=\sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{x+1}=-x$;
в) $\sqrt{5+|x-2|}=1-x$; г) $\sqrt{3-|x+3|}=x+2$.

Решите уравнение, используя введение новой переменной (**123—126**):

11.123. а) $x-\sqrt{x}=30$; б) $\sqrt{x}-\frac{6}{\sqrt{x}}=1$;
в) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=2$; г) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=3$.

11.124. а) $\sqrt{8-x}=2-x$; б) $\sqrt{x-3}=x-5$;
в) $3x=10\sqrt{x-2}$; г) $3\sqrt{x+2}=2x-5$.

11.125. а) $\sqrt{2-x}-20=\sqrt[4]{2-x}$;
б) $\sqrt{5+2x}=10-3\sqrt[4]{5+2x}$;
в) $\sqrt{x^2-2x-1}=\frac{14}{\sqrt{x^2-2x-1}}-5$;
г) $10\sqrt{x^2-x-1}=13-\frac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}$.

11.126. а) $x^2+4=5\sqrt{x^2-2}$;
б) $x^2+3\sqrt{x^2-3x}=3x+10$;
в) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$;
г) $x^2+\sqrt{x^2-x+9}=x+3$.

Решите уравнение, используя свойство монотонности функций (**127—129**):

11.127. а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$; б) $2\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=5$;
в) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=2$; г) $\sqrt{7+3x}-\sqrt{5-4x}+1=0$.

11.128. а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=3-x$;
б) $2\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=9-x$;
в) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{7-x}$;
г) $\sqrt{7+3x}-\sqrt{5-4x}=1-2\sqrt{x+2}$.

11.129. а) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x+7}=3$; б) $\sqrt[3]{3-5x}-\sqrt[3]{x+1}=2$;
в) $\sqrt{x-1}+x=\frac{3}{x-1}$; г) $1+\sqrt{2-x}=x^3-\frac{1}{x-2}$.

Решите уравнение (130—144):

11.130. а) $\sqrt{4x^2+5x-2}=2$; б) $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$;
в) $\sqrt{23+3x-5x^2}=3$; г) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$.

11.131. а) $\sqrt{x^2-16}=\sqrt{5x+8}$; б) $\sqrt{-2x-1}=\sqrt{x^2-36}$;
в) $\sqrt{14+|x|}=\sqrt{x^2-16}$; г) $\sqrt{3|x|+3}=\sqrt{x^2-25}$.

11.132. а) $(3x+5)\sqrt{5x^2+22x-15}=0$;
б) $(2x+3)\sqrt{23x-14-3x^2}=0$;
в) $(2-x)\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$;
г) $(x+1)\sqrt{x^2-x-6}=6x+6$.

11.133. а) $\sqrt{x-5}=a+1$; б) $\sqrt{4-x}=a-2$;
в) $\sqrt{2x-a}=\sqrt{x}$; г) $\sqrt{3+2x}=\sqrt{a-x}$.

11.134. а) $\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1$; б) $1+2\sqrt{5x^2-5x+1}=6x$;
в) $|x-7|=2\sqrt{2x-8}-3$; г) $\sqrt{4-x}=3-|x-1|$.

11.135. а) $\sqrt{x+1}=2+\sqrt{x-7}$; б) $\sqrt{x-13}=\sqrt{x+8}-3$;
в) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$; г) $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$.

11.136. а) $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}=\sqrt{3}$; б) $\sqrt{x+5}=2+\sqrt{5x+5}$;
в) $\sqrt{x+4}-3=\sqrt{7-0{,}5x}$; г) $\sqrt{x+8}+1=\sqrt{7x+9}$.

11.137. а) $\sqrt{x+7}=\sqrt{3x+19}-\sqrt{x+2}$;
б) $\sqrt{5x+4}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$;
в) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-11}$;
г) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{3x-18}$.

11.138. а) $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$; б) $\dfrac{7x-2}{\sqrt{3x-8}}=3\sqrt{2x+3}$;
в) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{\sqrt{x+6}}{x+4}$; г) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}$.

11.139. а) $\sqrt{5x-5}=\dfrac{4}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}$;
б) $0{,}3\sqrt{2x+13}+0{,}1\sqrt{x+3}=\dfrac{x+5}{\sqrt{2x+13}}$;
в) $\dfrac{\sqrt{13x-20}}{\sqrt{x^2-5x+6}}=\dfrac{2}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}$;
г) $\dfrac{\sqrt{2x+7}}{\sqrt{21x^2-123x-18}}=\dfrac{1}{\sqrt{3x-18}}-\dfrac{1}{\sqrt{7x+1}}$.

11.140. а) $\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$;

б) $3\sqrt{\frac{x}{x-1}}-2{,}5=3\sqrt{1-\frac{1}{x}}$;

в) $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}=\frac{10}{3}$;

г) $4\sqrt{3-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{x}{3x-1}}=3$.

11.141. а) $\sqrt{3x-15}-2x=3-\sqrt{5-x}$;
б) $\sqrt{x-4}+4=x+\sqrt{8-2x}$;
в) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}$;
г) $\sqrt{x^2-2x-3}-\sqrt{3x-x^2}=\sqrt{x-3}$.

11.142. а) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}+x=2$;
б) $\sqrt{13-5x}+2=x-\sqrt{5-3x}$.

11.143. а) $\sqrt{5+4x-x^2}=x^2-2x+4$;
б) $\sqrt{2x^2-4x+3}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2+2x-x^2$.

11.144. а) $x^2+2+\frac{4}{x^2-2x+2}=2x+\sqrt{12-x^2+4x}$;
б) $\sqrt{4x-x^2}=x^3-12x+18$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенства (**145—153**):

11.145. а) $\sqrt{3x+2}>1$; б) $\sqrt{3x-2}\leqslant 3$;
в) $2\sqrt{5x-3}\geqslant 3$; г) $5-2\sqrt{4x+1}>0$.

11.146. а) $\sqrt{4x^2-12x+9}\geqslant 2$; б) $\sqrt{25x^2-10x+1}<1$;
в) $\sqrt{5-|2x-1|}>2$; г) $\sqrt{5-|2x-1|}<2$.

11.147. а) $\sqrt{x-2}\geqslant a$; б) $\sqrt{x+1}<a$;
в) $\sqrt{|x|-2}>a$; г) $\sqrt{|x|+1}\leqslant a$.

11.148. а) $2\sqrt{12+x-x^2}+1>0$; б) $\sqrt{x^2+6x+8}\geqslant -1$
в) $\sqrt{4x^2-5x-6}\leqslant 0$; г) $\sqrt{3x^2-7x-6}\geqslant 0$.

11.149. а) $\sqrt{5x+7}<\sqrt{2-3x}$; б) $\sqrt{3-7x}\geqslant\sqrt{6x-8}$;
в) $\sqrt{x^2-3}\geqslant\sqrt{4x-6}$; г) $\sqrt{4x+7}<\sqrt{x^2-2x}$.

11.150. а) $\sqrt{3x^2-10x+7}>2$; б) $\sqrt{2x^2+5x+11}\geqslant 3$;
в) $\sqrt{x^2+17x}<4$; г) $\sqrt{x^2-24x}\leqslant 5$.

11.151. а) $(x-2)\sqrt{x-1} \geqslant 0$; б) $(x+3)\sqrt{2-x} \leqslant 0$;
в) $(2x-9)\sqrt{3x-4} \geqslant 0$; г) $(4x+7)\sqrt{3-5x} \leqslant 0$.

11.152. а) $(3x^2-16x+21)\sqrt{2x+5} \leqslant 0$;
б) $(5x^2+17x+14)\sqrt{4-3x} \leqslant 0$;
в) $(2x+3)\sqrt{6+x-x^2} \geqslant 0$;
г) $(5x-7)\sqrt{x^2-9x+14} \leqslant 0$.

11.153. а) $\dfrac{6-2x}{\sqrt{x^2+7x+12}} < 0$; б) $\dfrac{3x+15}{\sqrt{x^2-5x-24}} > 0$;
в) $x^2 \geqslant 8\sqrt{x}$; г) $27\sqrt{-x} - x^2 \leqslant 0$.

Решите неравенство, используя введение новой переменной **(154—155)**:

11.154. а) $\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{5-\sqrt{x+3}} \geqslant 0$; б) $\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{2\sqrt{x+1}-5} \geqslant 0$;
в) $\dfrac{7}{\sqrt{x-1}+5} < 1 + \dfrac{2}{5-\sqrt{x-1}}$; г) $\dfrac{5}{\sqrt{x+2}+4} < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-4}$.

11.155. а) $\sqrt{15-x} \leqslant x+5$; б) $x-9 < 3\sqrt{x+1}$;
в) $\dfrac{2x+1}{x} - 2\sqrt{2+\dfrac{1}{x}} \geqslant 3$; г) $\dfrac{x}{2-x} - \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}} \leqslant \dfrac{1}{4}$;
д) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x+4}+2 < 0$.

§ 12. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

1. Способы задания последовательностей.

Числовая последовательность задана, если всякому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число a_n. Обозначение: (a_n).

Последовательность чаще всего задают с помощью формулы n-го члена или рекуррентно.

Если задана формула $a_n = f(n)$, где $n \in \boldsymbol{N}$, f — некоторая функция, то последовательность задана формулой n-го члена. Например, последовательность (a_n), заданная формулой $a_n = n^2$, $n \in \boldsymbol{N}$, имеет вид: 1; 4; 9; 16; 25; ... .

Последовательность задана рекуррентно, если определены один или несколько первых ее членов и дана формула, выражающая n-й член последовательности через предыдущие. Например, (a_n): $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \boldsymbol{N}$ (данная последовательность называется последовательностью Фибоначчи), т. е. (a_n): 1; 1; 2; 3; 5; 8; ... .

2. Монотонность и ограниченность последовательности.

Последовательность (a_n) называется возрастающей (убывающей), если для любого номера n имеет место неравенство

$$a_{n+1} > a_n \ (a_{n+1} < a_n).$$

Последовательность (a_n) называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (m), что для любого номера n имеет место неравенство $a_n \leqslant M$ $(a_n \geqslant m)$.

Последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу.

3. Метод математической индукции.

Метод математической индукции используется для доказательства утверждений, зависящих от натурального аргумента. Для доказательства утверждения методом математической индукции необходимо:

1) проверить справедливость утверждения для $n=1$ (либо для первого натурального числа, для которого доказывается утверждение);

2) в предположении, что утверждение верно для натурального числа $n=k$, доказать справедливость утверждения для следующего натурального числа $n=k+1$.

Первый шаг называется базисом индукции, второй — индукционным шагом.

4. Арифметическая прогрессия.

Числовая последовательность называется арифметической прогрессией, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, т. е. арифметической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентно следующим образом: $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$, где $n \in \boldsymbol{N}$ (число d называют разностью прогрессии).

Формула n-го члена: $a_n=a_1+d(n-1)$, $n \in \boldsymbol{N}$. Характеристическое свойство: последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов, т. е. $a_n=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$, где $n \geqslant 2$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Формула суммы первых n членов: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ или $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n$, $n \in \boldsymbol{N}$.

5. Геометрическая прогрессия.

Числовая последовательность называется геометрической прогрессией, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, отличное от нуля, т. е. геометрической прогрессией называется последовательность, заданная рекуррентно следующим образом: $b_1=b$, $b_{n+1}=b_n q$, где $n \in \boldsymbol{N}$ (q называют знаменателем прогрессии).

Формула n-го члена: $b_n=b_1 q^{n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Характеристическое свойство: последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, т. е. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$.

Формула суммы первых n членов: $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}$ или $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $n \in \mathbf{N}$, $q \neq 1$ (в случае $q = 1$ очевидно, что $S_n = nb_1$).

6. Предел последовательности.

Число a называется пределом последовательности (a_n), если для любого положительного числа ε можно указать такой номер N, что для всякого натурального числа $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность называется сходящейся, если она имеет предел. Обозначение: $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Если последовательность имеет предел, то он единственен. Если последовательность имеет предел, то она ограничена. Если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то существуют пределы последовательностей $(a_n + b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ и $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, причем

$$\lim_{n \to \infty}(a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \to \infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$$

(утверждение для частного верно в случае, если $b_n \neq 0$ при любом $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} b_n \neq 0$).

Теорема о сходимости монотонной и ограниченной последовательности: всякая возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел; всякая убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел.

7. Бесконечная геометрическая прогрессия.

Если (b_n) — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия $(|q| < 1)$, то сумма ее вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

П р и м е р 1. Найдите наибольший член последовательности $a_n = 119n - 3n^2$.

Р е ш е н и е. Функция $f(x) = 119x - 3x^2$ достигает наибольшего значения в точке $x_0 = \frac{119}{6} = 19\frac{5}{6}$. Ближайшее целое значение $n = 20$, значит, a_{20} — наибольший член последовательности, $a_{20} = 1180$.

Пример 2. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена: $a_n=\frac{5n+3}{10n-9}$, $n\in \boldsymbol{N}$. Найдите все такие n, что $|a_n-0{,}5|<0{,}1$.

Решение. $\left|\frac{5n+3}{10n-9}-\frac{1}{2}\right|<0{,}1$; так как $10n-9>0$ для любого $n\in \boldsymbol{N}$, то $\frac{15}{2(10n-9)}<\frac{1}{10}$, $\frac{10n-9}{15}>5$, $n>8{,}4$. Таким образом, условию удовлетворяют все натуральные числа $n\geqslant 9$.

Пример 3. Докажите, что $3^n-2^n\geqslant n$, $n\in \boldsymbol{N}$.

Доказательство. При $n=1$ утверждение верно. Пусть при $n=k$ утверждение справедливо, т. е. $3^k-2^k\geqslant k$. Докажем его справедливость для $n=k+1$. Имеем:

$$3^{k+1}-2^{k+1}=3(3^k)-2^{k+1}\geqslant 3(2^k+k)-2^{k+1}=$$
$$=3\cdot 2^k+3k-2\cdot 2^k=3k+2^k>k+1.$$

Таким образом, на основании принципа математической индукции утверждение доказано для любого натурального n.

Пример 4. Могут ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

Решение. Если $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ являются членами арифметической прогрессии, то $\sqrt{5}-\sqrt{2}=dn$ и $\sqrt{5}-\sqrt{3}=dm$, где $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$. Тогда $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{n}{m}$, $\sqrt{5}(m-n)=m\sqrt{2}-n\sqrt{3}$, $5(m-n)^2=$ $=2m^2+3n^2-2mn\sqrt{6}$, откуда следует, что $\sqrt{6}$ — рациональное число. Получим противоречие. Следовательно, числа $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

Упражнения

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

12.1. Напишите первые шесть членов последовательности (a_n), заданной формулой n-го члена:

а) $a_n=5$; б) $a_n=\frac{n^2-9}{n}$; в) $a_n=\frac{2^n+1}{10-n^2}$;

г) $a_n=\frac{(-1)^n}{9n-10}$; д) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n!}$; е) $a_n=2^n+(-2)^n$;

ж) $a_n=(-1)^n+(-1)^{n+1}$; з) $a_n=2^{n^2}$; и) $a_n=\frac{2^{2^n}}{2^{2n}}$;

к) $a_n=\frac{2^{n^2}}{2^{2^n}}$; л) $a_n=n^{(-1)^n}$; м) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}+1}{2}\,|(-1)^n n^3|$.

12.2. Напишите первые шесть членов последовательности (b_n), заданной рекуррентно:

а) $b_1=9,\ b_{n+1}=0{,}1b_n+10$;

б) $b_1=-3,\ b_{n+1}=9-2b_n$;

в) $b_1=5,\ b_{n+1}=(-1)^n\,b_n-8$;

г) $b_1=1,\ b_{n+1}=b_n!$;

д) $b_1=b_2=1,\ b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$;

е) $b_1=-1,\ b_2=1,\ b_{n+2}=3b_{n+1}-2b_n$;

ж) $b_1=-10,\ b_2=2,\ b_{n+2}=|b_n|-6b_{n+1}$.

12.3. Напишите первые шесть членов последовательности:

а) четных натуральных чисел, не делящихся на 4;

б) нечетных натуральных чисел, делящихся на 3;

в) натуральных чисел, которые при делении на 10 дают остаток 9;

г) натуральных чисел, кратных 3 и 4;

д) квадратов простых чисел;

е) приближенных значений числа $\sqrt{5}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$ (по недостатку).

Составьте, если это возможно, формулу n-го члена для каждой из последовательностей.

12.4. Подберите одну из возможных формул n-го члена последовательности:

а) 4; 16; 36; 64; 100; ...;

б) $1;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{9};\ \ldots$;

в) $1;\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{6};\ \frac{5}{8};\ \frac{6}{10};\ \ldots$;

г) $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots$;

д) $2;\ -2;\ 2;\ -2;\ 2;\ \ldots$;

е) 3; 1; 3; 1; 3; ...;

ж) $-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ -\frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ -\frac{5}{6};\ \ldots$;

з) $\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5};\ \frac{2\cdot 8}{4\cdot 6};\ \frac{3\cdot 9}{5\cdot 7};\ \frac{4\cdot 10}{6\cdot 8};\ \frac{5\cdot 11}{7\cdot 9};\ \ldots$;

и) 19; 32; 45; 58; 71; ...; к) 99; 74; 49; 24; -1; ...;

л) $1;\ \frac{4}{3};\ \frac{9}{5};\ \frac{16}{7};\ \frac{25}{9};\ \ldots$; м) $1\cdot 2;\ 3\cdot 4;\ 5\cdot 8;\ 7\cdot 16;\ 9\cdot 32;\ \ldots$;

н) 1; 2; 6; 24; 120; ...; о) 6; 12; 24; 48; 96; ...;

п) 0; 5; 8; 17; 24; ...; р) 1; 5; 19; 65; 211; ... .

12.5. Докажите, что последовательности, заданные следующими формулами, являются убывающими:

а) $a_n=910-25n$;

б) $b_n=-9n^2+10n+25$;

в) $c_n=\frac{2n+9}{n+3}$;

г) $d_n=\frac{9^n+1}{3^{2n}}$;

д) $u_n=\frac{n}{n^2+1}$;

е) $x_n=\frac{n+1}{n^2+2n+5}$.

12.6. Докажите, что последовательности, заданные следующими формулами, являются возрастающими:

а) $a_n=9n-10$; б) $b_n=n^2+2n-3$; в) $c_n=\frac{3n+4}{n+2}$;
г) $d_n=3\cdot2^n-1$; д) $u_n=3^n-2^n$.

12.7. Докажите, что последовательности, заданные следующими формулами, не являются возрастающими и не являются убывающими:

а) $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$; б) $b_n=\frac{2n-7}{2n-9}$;
в) $c_n=3n^2-17n+1$; г) $d_n=3+12n-\frac{1}{9}n^3$.

12.8. Найдите наибольший член последовательности, заданной формулой n-го члена:
а) $a_n=10+9n-2n^2$; б) $a_n=18n-n^3$;
в) $a_n=-n^3+25n-1$; г) $a_n=\frac{n}{n^2+4}$.

12.9. Найдите наименьший член последовательности, заданной формулой n-го члена:
а) $a_n=n^2-17n+21$;
б) $a_n=(n-1)(n-3)(n-5)$;
в) $a_n=n^2+\frac{16}{n}$.

12.10. Докажите, что у последовательности (a_n), заданной формулой $a_n=\frac{n+1}{n}$, не существует наименьшего члена.

12.11. Докажите, что у последовательности (b_n), заданной формулой $b_n=\frac{2n}{n+3}$, не существует наибольшего члена.

12.12. Является ли ограниченной последовательность, заданная формулой n-го члена:

а) $17-5n$; б) $17n-5$; в) $\frac{1}{n}$;
г) $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; д) $\frac{n+1}{2n-1}$; е) $(-1)^n n^2$;
ж) $\frac{n^2}{1000n-9}$; з) $|154n-n^3|$; и) $(-1)^{n-1}\cdot\frac{n^3}{2511n^2+910}$?

12.13. Докажите, что последовательность (a_n), заданная формулой $a_n=\frac{10n-4}{n^2+6n}$, ограничена снизу.
Проверьте, является ли число 1 верхней границей для данной последовательности. Если является, то можно ли найти меньшую верхнюю границу?

12.14. Последовательность (c_n) задана формулой $c_n=2^n$. Проверьте справедливость равенства $c_{n+1}+c_{n+2}=6c_n$.

12.15. Последовательность (u_n) задана формулой $u_n=2^n+3^n$. Верно ли равенство $\frac{u_{n+1}+u_{n+2}}{6}-u_n=3^n$?

12.16. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1=0$, $a_{2n}=a_{2n-1}+k$; $a_{2n+1}=ka_{2n}$, где k — действительное число ($k\neq0$; $k\neq1$). Найдите: а) a_6; б) a_9. Докажите, что $a_{2n}=\frac{k^{n+1}-k}{k-1}$.

12.17. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n=(-1)^{n+1}$. Последовательность (b_n) задана формулой $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Выразите n-й член последовательности b_n через n.

12.18. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы формулами $a_n=\frac{3n+1}{n^2+3n+5}$, $b_n=\frac{4}{n}$. Докажите, что для любого $n\in\boldsymbol{N}$ имеет место неравенство $a_n\leqslant b_n$.

12.19. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы формулами $a_n=\frac{4n^2+1}{5n+2}$, $b_n=2n$. Докажите, что любой член последовательности (a_n) не превосходит члена последовательности (b_n) с соответствующим номером.

12.20. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы формулами $a_n=\frac{5n+4}{n+1}$ и $b_n=\frac{5n+11}{n+2}$. Докажите, что:

а) последовательность (a_n) — возрастающая;

б) последовательность (b_n) — убывающая;

в) для любого $n\in\boldsymbol{N}$ $a_n<b_n$. Существует ли такое число c, что для любого $n\in\boldsymbol{N}$ $a_n<c<b_n$? Если существует, то докажите, что это число единственное.

12.21. Последовательность (u_n) задана формулой $u_n=2n^2-11n+442$. Является ли членом этой последовательности число: а) 463; б) 876? Если является, то укажите номер этого члена.

12.22. Последовательность (y_n) задана формулой $y_n=n^3+n^2-9n+383$. Является ли членом этой последовательности число 1112? Если является, то укажите номер этого члена.

12.23. Найдите все члены последовательности (a_n), заданной формулой $a_n=n^2-3n$, для которых выполняется неравенство $a_n<3$.

12.24. Укажите номера тех членов последовательности (x_n), заданной формулой $x_n=\frac{2n+3}{12-n-n^2}$, которые не превосходят $-0{,}5$.

12.25. Для каких членов последовательности (y_n), заданной формулой $y_n=|n^2-2n-3|$, не выполняется условие $y_n>2$?

12.26. Сколько членов последовательности (u_n), заданной формулой $u_n=|16-3n|$, принадлежит множеству значений функции $y=-2x^2+3x+7$?

12.27. Существуют ли члены последовательности (x_n), заданной формулой $x_n = 78 - 15n$, принадлежащие области определения функции $y = \sqrt{144 - x^2} + \frac{x}{x-3}$? Если существуют, то укажите их.

12.28. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{(-1)^n + 9}{10n - 9}$. Сколько членов последовательности принадлежит промежутку $(0,02;\ 0,22)$?

12.29. Докажите, что ни один из членов последовательности (a_n), заданной формулой $a_n = 6n + 5$, при делении на 18 не может дать в остатке 10.

12.30. Существуют ли члены последовательности (b_n), заданной формулой $b_n = 8n - 6$, которые при делении на 12 дают в остатке 3?

12.31. Существуют ли члены последовательности (c_n), заданной формулой $c_n = n^3 - n + 2$, которые при делении на 6 дают в остатке 4?

12.32. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{4n-1}{3n+2}$. Укажите наименьший из номеров членов последовательности, для которых выполняется неравенство:

а) $\left|x_n - \frac{4}{3}\right| < 0,1$; б) $\left|x_n - \frac{4}{3}\right| < 0,01$.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

12.33. Докажите, что сумма первых n чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

12.34. Докажите, что сумма первых n чисел вида $a_n = 3n - 2$ равна $\frac{n(3n-1)}{2}$.

12.35. Докажите, что сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

12.36. Докажите, что сумма кубов n первых натуральных чисел равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Докажите, что при любом $n \in N$ выполняется равенство (**37—51**):

12.37. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$.

12.38. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

12.39. $2\cdot 2+3\cdot 5+\ldots+(n+1)(3n-1)=\frac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

12.40. $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\ldots+(4n+1)5^{n-1}=n5^n$.

12.41. $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\ldots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}=n2^{2n+1}$.

12.42. $1+6+20+\ldots+(2n-1)2^{n-1}=3+2^n(2n-3)$.

12.43. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

12.44. $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$.

12.45. $\frac{1}{5\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 19}+\ldots+\frac{1}{(7n-2)(7n+5)}=\frac{n}{5(7n+5)}$.

12.46. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

12.47. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{(2n+1)}$.

12.48. $\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)}{n+2}$.

12.49. $1+\frac{7}{3}+\frac{13}{9}+\ldots+\frac{6n-5}{3^{n-1}}=\frac{2\cdot 3^n-3n-2}{3^{n-1}}$.

12.50. $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$.

12.51. $\frac{1\cdot 2^1}{3!}+\frac{2\cdot 2^2}{4!}+\frac{3\cdot 2^3}{5!}+\ldots+\frac{n2^n}{(n+2)!}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$.

Методом математической индукции докажите, что при $n\in \boldsymbol{N}$:

12.52. n^3+5n кратно 6.
12.53. $n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6.
12.54. $7^{2n}-1$ кратно 24.
12.55. 13^n+5 кратно 6.
12.56. 15^n+6 кратно 7.
12.57. 9^n+3 кратно 4.
12.58. 7^n+9 кратно 8, если n — нечетное.
12.59. 3^n+7 кратно 8, если n — четное.
12.60. 7^n+3n-1 кратно 9.
12.61. $7^n+12n+17$ кратно 18.
12.62. $6^n+20n+24$ кратно 25.
12.63. $5^n+2\cdot 3^n+5$ кратно 8.
12.64. 5^n-3^n+2n кратно 4.
12.65. $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.
12.66. 4^n-3^n-7 кратно 84, если n — четное.
12.67. Докажите, что если $0<a<b$, то $a^n<b^n$ $(n\in \boldsymbol{N})$.

Докажите неравенство (**68—72**):

12.68. $4^n>7n-5$, если $n\in \boldsymbol{N}$.
12.69. $2^n>5n+1$, если $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant 5$.
12.70. $3^{n-1}>2n^2-n$, если $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant 5$.
12.71. $3^n-2^n\geqslant n$, если $n\in \boldsymbol{N}$.

12.72. $4^n \geqslant n^2+3^n$, если $n \in \boldsymbol{N}$.

12.73. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1=3$, $a_{n+1}=7a_n+3$. Докажите, что $a_n=0{,}5(7^n-1)$.

12.74. Последовательность (b_n) задана рекуррентно: $b_1=4$, $b_{n+1}=3b_n-2$. Выразите b_n через n.

12.75. Последовательность (c_n) задана рекуррентно: $c_1=6$, $c_{n+1}=2c_n-3n+2$. Докажите, что $c_n=2^n+3n+1$.

12.76. Последовательность (d_n) задана рекуррентно: $d_1=7$, $d_2=27$, $d_{n+2}=6d_{n+1}-5d_n$. Найдите d_n.

12.77. Последовательность (u_n) задана рекуррентно: $u_1=4$, $u_{n+1}=3u_n-2$. Докажите, что все члены последовательности с нечетными номерами делятся на 4.

12.78. Последовательность (u_n) задана рекуррентно: $u_1=3$, $u_2=15$, $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$. Докажите, что:

а) все члены последовательности кратны 3;

б) все члены последовательности с четными номерами кратны 15.

12.79. Последовательность (u_n) задана рекуррентно: $u_1=1$, $u_{n+1}=u_n+8n$. Докажите, что любой член последовательности является квадратом целого числа.

12.80. Докажите, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости и имеющих общую точку, делят плоскость на $2n$ частей.

12.81. В плоскости проведено n различных прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что эти прямые разбивают плоскость на $\frac{n(n+1)}{2}+1$ частей.

12.82. В плоскости проведено n различных окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что окружности разбивают плоскость на n^2-n+2 частей.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

12.83. Сумма второго, четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно -168. Найдите первый член и разность прогрессии.

12.84. В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с четными номерами равна 25, а сумма членов с нечетными номерами равна 10. Найдите седьмой член прогрессии.

12.85. При каком значении разности арифметической прогрессии, седьмой член которой равен 3, произведение четвертого и девятого членов будет наибольшим?

12.86. В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных попарных произведений четвертого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

12.87. Сумма первых n членов некоторой последовательности определяется по формуле: а) $S_n=3n^2-n$; б) $S_n=\frac{2n^3}{n+1}$. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

12.88. Числа a_k, a_l, a_m являются членами арифметической прогрессии. Докажите, что $3(a_k^2+a_l^2+a_m^2)=(a_k+a_l+a_m)^2+$ $+6(a_k-a_l)^2$, если $l=\frac{k+m}{2}$.

12.89. Тринадцатый член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых 25 ее членов.

12.90. В арифметической прогрессии сумма четвертого, восьмого, девятнадцатого и двадцать третьего членов равна 30. Найдите сумму 26 первых членов прогрессии.

12.91. Между числами $-13{,}5$ и $-3{,}7$ вставлено семь чисел так, что они вместе с данными составляют арифметическую прогрессию. Принадлежит ли разность этой прогрессии множеству значений функции $y=1+x-x^2$?

12.92. Между числами $-19{,}88$ и $19{,}91$ вставлено n чисел так, что они вместе с данными составляют арифметическую прогрессию. При каком значении n разность этой прогрессии принадлежит области определения функции $y=\sqrt{7|x|-x^2-12}$?

12.93. Найдите арифметическую прогрессию, в которой среднее арифметическое n первых ее членов равно $2n$.

12.94. В арифметической прогрессии сумма восьми первых членов равна 32, а сумма двадцати первых членов равна 200. Найдите сумму первых 28 членов прогрессии.

12.95. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии равна 20, а сумма первых ее двадцати членов равна 15. Найдите сумму первых 35 членов прогрессии.

12.96. Сумма первых семнадцати членов арифметической прогрессии равна 85, а сумма первых ее двадцати одного члена равна 189. Сколько положительных трехзначных чисел содержится в этой прогрессии?

12.97. Даны две арифметические прогрессии. В первой из них сумма второго и пятого членов на 15 меньше суммы третьего и седьмого членов, а сумма первых тридцати членов равна 2385. Во второй прогрессии первый член равен 2, а разность равна 3. Найдите сумму первых сорока чисел, встречающихся в обеих прогрессиях.

12.98. В арифметической прогрессии 3; 6; 9; ... содержится 463 члена, в арифметической прогрессии 2; 6; 10; ... содержится 351 член. Сколько одинаковых членов содержится в этих прогрессиях?

12.99. Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась $-122{,}5$, если первый член прогрессии — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2x^2+21x-50<0$, а разность прогрессии — большее из чисел 0,5 и $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{102-20\sqrt{2}}}$?

12.100. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-7x+a=0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2-19x+b=0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

12.101. В арифметической прогрессии $S_n=S_m$ $(n\neq m)$. Докажите, что $S_{n+m}=0$.

12.102. Могут ли числа: а) 3; $\sqrt{7}$; 9; б) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

12.103. Может ли в арифметической прогрессии, все члены которой являются натуральными числами, содержаться ровно 1992 члена, являющихся квадратами целых чисел?

12.104. Мать дарит каждой из пяти своих дочерей в день ее рождения, начиная с пяти лет, столько книг, сколько дочери лет. Возрасты пяти дочерей составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 2. Сколько лет было каждой дочери, когда у них составилась библиотека общей численностью в 495 книг?

12.105. Шары одинакового радиуса расположили один раз в форме правильного треугольника, а другой — в форме прямоугольника. Найдите количество шаров, если известно, что и на стороне треугольника, и на большей стороне прямоугольника располагается на два шара больше, чем на меньшей стороне прямоугольника.

12.106. Для асфальтирования участка длиной 99 м используются два катка. Первый каток был установлен в одном конце участка, второй — в противоположном. Работать они начали одновременно. За первую минуту второй каток прошел 1,5 м, а за каждую последующую — на 0,5 м больше, чем за предшествующую. Первый каток в каждую минуту проходил 5 м. Через сколько минут оба катка встретились?

12.107. Сумма членов арифметической прогрессии и ее первый член положительны. Если увеличить разность этой прогрессии на 4, не меняя первого члена, то сумма ее членов увеличится в 3 раза. Если же первый член исходной прогрессии увеличить в 5 раз, не меняя ее разности, то сумма членов увеличится также в 3 раза. Найдите разность исходной прогрессии.

12.108. Найдите четыре целых числа, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, в которой наибольший член равен сумме квадратов остальных членов.

12.109. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии в 5 раз меньше суммы следующих восьми членов.

Найдите отношение суммы первых восьми членов прогрессии к сумме ее первых четырех членов.

12.110. В арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов. Найдите отношение суммы первых $2n$ членов к сумме следующих $2n$ членов.

12.111. В арифметической прогрессии отношение суммы первых семи членов к сумме последних семи членов равно $-0{,}2$, а отношение суммы всех членов без первых двух к сумме всех членов без последних двух равно 3. Найдите число членов арифметической прогрессии.

12.112. В треугольнике ABC из вершины B проведены высота BD и биссектриса BE. Величины углов BEC, ABD, ABE и CAB в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите длину высоты треугольника, проведенной из вершины A, если известно, что $AC=1$ см.

12.113. В трапеции $ABCD$ (AD — основание) проведены диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O. Величины углов AOB, ACB, ACD, BDC и ADB в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите длину основания AD трапеции, если $AC=1$ см.

12.114. Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу вписанного круга.

12.115. В сосуде имеется несколько одинаковых кранов, которые открывают один за другим через равные промежутки времени. Через 8 ч после того, как был включен последний кран, сосуд был заполнен. Время, в течение которого были открыты первый и последний краны, относится как 5:1. Через сколько времени заполнится сосуд, если открыть все краны одновременно?

12.116. Докажите, что если корни уравнения $x^4+px^2+q=0$ образуют арифметическую прогрессию, то $9p^2=100q$.

12.117. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^8+ax^4+1=0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

12.118. Докажите, что если (a_n) — арифметическая прогрессия, все члены которой положительны, а разность отлична от нуля, то имеют место неравенства:

$$a_1a_n<a_2a_{n-1}<a_3a_{n-2}<\dots .$$

12.119. В однокруговом баскетбольном турнире участвовало n команд. После окончания турнира оказалось, что очки, набранные командами, образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место, если за победу в каждой встрече команда получала 2 очка, за поражение очки не начислялись, а ничьих в баскетболе нет?

12.120. Бригада рабочих могла выполнить всю работу за 24 ч, если бы работали одновременно все рабочие. Однако по плану в первый час работал один рабочий, во второй час — два рабочих, в третий — три и т. д. до тех пор, пока в работу не включились все рабочие. И только несколько часов перед завершением работы работала вся бригада. Время работы, предусмотренное планом, было бы сокращено на 6 ч, если бы с самого начала работы работала вся бригада, за исключением пяти рабочих. Найдите количество рабочих.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

12.121. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 357, а третий член прогрессии на 255 больше первого. Найдите разность между первым и вторым членами прогрессии.

12.122. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 3, а сумма их квадратов равна 21. Найдите эти числа.

12.123. Верно ли, что $\frac{a^2+b^2}{a}=\frac{b^2+c^2}{c}$, если известно, что a, b и c — три последовательных члена геометрической прогрессии?

12.124. В геометрической прогрессии первый член положителен. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых трех ее членов принимает наименьшее значение?

12.125. Седьмой член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых тринадцати ее членов.

12.126. В последовательности с четным числом членов сумма членов, стоящих на четных местах, в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Верно ли, что данная последовательность является геометрической прогрессией?

12.127. Сумма первых n членов некоторой последовательности определяется по формуле: а) $S_n=\frac{5^n}{2^n+3^n}$; б) $S_n=2\cdot 5^n-3$. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией?

12.128. Найдите сумму членов геометрической прогрессии с пятнадцатого по двадцать первый включительно, если сумма первых семи членов прогрессии равна 14, а сумма первых четырнадцати ее членов равна 18.

12.129. В геометрической прогрессии с четным числом членов сумма всех ее членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

12.130. Числа a_1, a_2, a_3, a_4 составляют геометрическую прогрессию. Найдите произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$, если известно, что $a_1+a_2+a_3+a_4=15$ и $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=1{,}875$.

12.131. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-3x+a=0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2-12x+b=0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b.

12.132. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+ax+4=0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2+bx+16=0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b.

12.133. Найдите число членов геометрической прогрессии, у которой отношение суммы первых 11 членов к сумме последних 11 членов равно 0,125, а отношение суммы всех членов без первых девяти к сумме всех членов без последних девяти равно 2.

12.134. Докажите, что сумма первого, четвертого и седьмого членов геометрической прогрессии не больше, чем $-1{,}5$, если первый член прогрессии — меньший корень уравнения $x^4+16=8x^2+3\sqrt{4-x^2}$.

12.135. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

12.136. Длины трех отрезков составляют геометрическую прогрессию. При каких значениях знаменателя прогрессии из этих отрезков можно составить треугольник?

12.137. В острый угол вписаны n кругов, касающихся один другого. Докажите, что радиусы этих кругов образуют геометрическую прогрессию. Укажите зависимость между знаменателем прогрессии и величиной острого угла.

12.138. В квадрат со стороной 1 вписан квадрат наименьшей площади. В полученный квадрат вписан квадрат наименьшей площади и т. д. Всего построено таким образом n квадратов. Найдите сумму площадей всех построенных квадратов.

12.139. Трое рабочих обрабатывали одинаковые детали. К концу месяца оказалось, что количество деталей, обработанных первым, вторым и третьим рабочими, образуют геометрическую прогрессию. Месячный заработок каждого рабочего складывался из части, пропорциональной количеству обработанных деталей, и премии. У первого рабочего он составил 150 р., у второго — 180 р., у третьего — 250 р. Определите размеры премий, если известно, что у первого и второго рабочих они одинаковы, а у третьего — в полтора раза больше.

12.140. Алик, Миша и Вася покупали блокноты и трехкопеечные карандаши. Алик купил 2 блокнота и 4 карандаша, Миша — блокнот и 6 карандашей, Вася — блокнот и 3 карандаша. Оказалось, что суммы, которые уплатили Алик, Миша и Вася, образуют геометрическую прогрессию. Сколько стоит блокнот?

12.141. Три брата, возрасты которых образуют геометрическую прогрессию, делят между собой некоторую сумму денег пропорционально своему возрасту. Если бы они это проделали через три года, когда самый младший окажется вдвое моложе самого старшего, то младший получил бы на 105 р., а средний — на 15 р. больше, чем сейчас. Сколько лет каждому из братьев?

12.142. В трех растворах проценты содержания (по массе) спирта образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 2:3:4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в весовом отношении 3:2:1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

12.143. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют (из одного места) по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше его. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту обгона его вторым, за время на $\frac{2}{3}$ мин больше, чем первый. Найдите скорость первого конькобежца.

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ НА АРИФМЕТИЧЕСКУЮ И ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ПРОГРЕССИИ

12.144. Верно ли, что три числа, взятые в одном и том же порядке и составляющие арифметическую и геометрическую прогрессии одновременно, равны между собой?

12.145. Восьмой член арифметической прогрессии с ненулевой разностью равен 60. Известно, что первый, седьмой и двадцать пятый члены составляют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

12.146. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 3. В геометрической прогрессии первый член равен 5, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выясните, что больше: сумма первых семи членов арифметической прогрессии или сумма первых шести членов геометрической прогрессии.

12.147. Три различных числа a, b и c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа $a+b$, $b+c$ и

$c+a$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

12.148. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

12.149. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите первый член арифметической прогрессии.

12.150. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой, одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найдите первый член геометрической прогрессии.

12.151. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 1 и 9, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Найдите исходные три числа.

12.152. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 14. Если от первого числа отнять 15, а второе и третье увеличить соответственно на 11 и 5, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найдите исходные три числа.

12.153. В арифметической прогрессии, содержащей девять членов, первый член равен 1, а сумма всех членов равна 369. Геометрическая прогрессия также имеет девять членов, причем первый и последний ее члены совпадают с соответствующими членами данной арифметической прогрессии. Найдите пятый член геометрической прогрессии.

12.154. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три составляют арифметическую прогрессию, причем сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних чисел равна 24.

12.155. Цифры трехзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если из данного числа вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же к цифрам данного числа, начиная с разряда сотен, прибавлять соответственно 8, 5 и 1, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию. Найдите исходное число.

12.156. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 155, а сумма первых двух членов геометрической прогрессии равна 9. Найдите эти прогрессии, если первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической прогрессии, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической прогрессии.

12.157. Три отличных от нуля числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел образуют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные знаменатели последней прогрессии.

12.158. Даны две геометрические прогрессии с положительными членами a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 образуют арифметическую прогрессию и $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$. Докажите, что $a_1+b_1=a_3+b_3$.

12.159. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$, а числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 образуют геометрическую прогрессию. Докажите, что $a_1=b_3$, $a_2=b_2$, $a_3=b_1$.

12.160. Первый член возрастающей арифметической прогрессии равен 0,2. Найдите разность прогрессии, если известно, что при делении каждого ее члена на номер этого члена получается геометрическая прогрессия и число членов прогрессии больше трех.

12.161. Найдите трехзначное положительное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, отличным от единицы, а цифры числа, меньшего на 200, образуют арифметическую прогрессию.

12.162. Ваня, Миша, Алик и Вадим ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных каждым из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Алик поймал столько же рыб, сколько Вадим, а Вадим поймал бы на 12 рыб больше, то количества рыб, пойманных юношами, образовывали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша?

СУММИРОВАНИЕ

12.163. Вычислите: $1-2+3-4+5-6+\ldots 999999-1000000$.

12.164. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 165, которые при делении на 7 дают в остатке 5.

12.165. Найдите сумму всех четных трехзначных натуральных чисел, делящихся на 7.

12.166. Вычислите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1112 и не делящихся на 15.

12.167. Среди чисел вида $3n+1$, где $n\in \boldsymbol{N}$, найдите сумму первых тридцати, которые при делении на 5 дают в остатке 2.

12.168. Среди чисел вида $\frac{5n+2}{7}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, найдите сумму первых семидесяти целых чисел.

12.169. Найдите сумму: $2^2-4^2+6^2-8^2+\ldots+(4k-2)^2-(4k)^2$.

12.170. Найдите сумму $S=a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{2k-1}^2-a_{2k}^2$, где последовательность (a_k) — арифметическая прогрессия.

12.171. Докажите, что для арифметической прогрессии (a_n) имеет место равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Найдите сумму **(172—175)**:

12.172. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

12.173. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$.

12.174. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)$.

12.175. $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+\ldots+n(3n-1)$.

12.176. Найдите сумму первых n членов последовательности, заданной формулой k-го члена $a_k=3k^2+3k+1$.

12.177. Найдите сумму всех попарных произведений чисел 1, 2, 3 ..., k.

12.178. Найдите сумму $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

12.179. Найдите сумму первых n членов последовательности, заданной формулой k-го члена $a_k=k(k+1)^2$.

Найдите сумму **(180—184)**:

12.180. $1+18+75+\ldots+n(2n-1)^2$.

12.181. $1+12+45+\ldots+n^2(2n-1)$.

12.182. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

12.183. $\frac{1}{2\cdot7}+\frac{1}{7\cdot12}+\ldots+\frac{1}{(5m-3)(5m+2)}$.

12.184. $\frac{1}{5\cdot11}+\frac{1}{11\cdot17}+\ldots+\frac{1}{(6k-1)(6k+5)}$.

12.185. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию, причем $a_i \neq 0$ $(i=1, \ldots, n)$, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Найдите сумму **(186—187)**:

12.186. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

12.187. $\frac{1}{2\cdot5\cdot8}+\frac{1}{5\cdot8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)(3k+5)}$.

12.188. Докажите, что если отличные от нуля числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ составляют арифметическую прогрессию с ненулевой разностью d, то справедливо равенство

$$\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right).$$

12.189. Найдите сумму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+k\cdot k!$.

12.190. Найдите сумму $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$.

12.191. Найдите сумму первых n членов последовательности, заданной формулой k-го члена $a_k=\frac{-k^2-k+1}{k(k+1)}$.

12.192. Найдите сумму первых k членов последовательности, заданной формулой n-го члена $a_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

12.193. Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 5, заключенных между натуральными числами k и n, если $k<n$.

12.194. Найдите сумму первых m членов последовательности, заданной формулой n-го члена $a_n=2(n+3^{n-1})-3$.

12.195. Найдите сумму первых k членов последовательности, заданной формулой n-го члена $a_n=15-4n-\frac{1}{5^n}$.

12.196. Найдите сумму $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+50\cdot 2^{49}$.

12.197. Найдите сумму $5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{n\ \text{пятерок}}$.

12.198. Найдите сумму $S=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2+\ldots+\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)^2$.

12.199. Найдите сумму $S=a+2a^2+3a^3+\ldots+na^n$.

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. БЕСКОНЕЧНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

12.200. Известно, что последовательность (a_n) сходится.
а) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$;
б) Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$?

12.201. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$?

12.202. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$?

12.203. Известно, что каждый член сходящейся последовательности (a_n) положителен. Может ли быть отрицателен предел последовательности?

12.204. Приведите пример последовательности (a_n), сходящейся к нулю, все члены которой положительны.

12.205. Объясните, почему последовательность с общим членом $a_n=(-1)^n$ не имеет предела.

12.206. Последовательность (a_n) сходится, последовательность (b_n) расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательности (a_n+b_n)?

12.207. Может ли последовательность (a_n+b_n) иметь предел, если каждая из последовательностей (a_n) и (b_n) расходится?

12.208. Имеет ли предел последовательность:
а) 1; 2; 3; ...; n; ...; б) 1^2; 2^2; 3^2; ...; n^2; ...?

12.209. Чему равен предел последовательности:
а) 1; 2; 3; 4; 4; 4; ...; б) 1; 2; 3; 5; 5; 5; ...?

12.210. Известно, что последовательность (a_n) имеет предел, равный a. Чему равны пределы последовательностей, получающихся из данной путем отбрасывания: а) одного, б) шестидесяти семи, в) тысячи первых ее членов?

12.211. а) Чему равны пределы последовательностей $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(-\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$?

б) Объясните, почему если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n a_n=0$.

12.212. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.

12.213. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$?

12.214. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$?

12.215. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=b$. Можно ли сделать какой-либо вывод о пределе последовательности (a_n)?

12.216. Могут ли какие-нибудь члены сходящейся последовательности быть равными пределу этой последовательности?

12.217. Может ли последовательность (a_n) быть расходящейся, если известно, что последовательность (a_n^2) сходится?

Вычислите предел **(218—222)**:

12.218. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+1}{3n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n-63\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2+5n+2}$.

12.219. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n+1}{2n^2-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{(n+2)(4n-1)}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{5n+1}{3n+2}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n}-\frac{5}{n^2}\right)$.

12.220. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n+1}-\frac{6n^3}{4n^2-1}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n^2}{2n+1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-1)^3}{(2n+1)(n+1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(3-n)^3}{n^2+1}$.

12.221. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{\sqrt{n^2+3n+10}+3n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1}-2n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)(n+3)}-n)$.

12.222. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^{-n}}{1+3^{-n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^{-n}+3\cdot5^{-n}}{7+3^{-n}+7^{-n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^{n+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+4^n}{4^{n+1}+3}$.

12.223. Найдите предел последовательности (a_n), если:

а) $a_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $a_n=\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2}$;

в) $a_n=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{(n+1)(n+2)}-\frac{n}{3}$;

г) $a_n=\frac{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}{2^{n+1}}$;

д) $a_n=\frac{1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)}{2n^3+1}$;

е) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$.

12.224. Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(4); б) 11,(12); в) 0,4(63); г) 1,99(2).

12.225. Найдите сумму:

а) $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}}+\ldots$;

б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}+\ldots$.

12.226. Первый член бесконечной геометрической прогрессии (a_n) равен a, ее знаменатель равен q. Найдите сумму:

а) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots$;

б) $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots$;

в) $(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2+(a_5+a_6)^2+\ldots$;

г) $(a_1-a_2)^2+(a_3-a_4)^2+(a_5-a_6)^2+\ldots$;

д) $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{4}a_3+\frac{1}{8}a_4+\ldots$;

е) $\left(a_1+\frac{1}{2}\right)+\left(a_2-\frac{1}{4}\right)+\left(a_3+\frac{1}{8}\right)+\left(a_4-\frac{1}{16}\right)+\ldots$;

ж) $\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_6}{a_3}+\frac{a_8}{a_4}+\ldots$;

з) $(a_1+a_2+a_3)^2+(a_4+a_5+a_6)^2+(a_7+a_8+a_9)^2+\ldots$.

12.227. Первый член бесконечной геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов как 9:10. Найдите первый член прогрессии, если ее сумма равна 12.

12.228. Первый член бесконечной геометрической прогрессии на 8 больше второго, а сумма ее членов равна 18. Найдите третий член прогрессии.

12.229. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов ее членов равна 1,125. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

12.230. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найдите сумму кубов членов этой прогрессии.

12.231. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна $9\frac{1}{7}$. Найдите сумму квадратов членов этой прогрессии.

12.232. Решите неравенство $|x+x^2+...+x^n+...|<1$, где $|x|<1$.

12.233. Решите уравнение $x^{-2}+x^{-4}+...+x^{2(1-n)}+...=0{,}125$, если известно, что переменная x не принадлежит множеству решений неравенства $x^6+2x^4-x^2\leqslant 2$.

12.234. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, второй член которой, удвоенное произведение первого члена на четвертый и третий член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной $\frac{1}{3}$.

12.235. Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член первой прогрессии является знаменателем второй, а знаменатель первой прогрессии является первым членом второй прогрессии. Отношение суммы первой прогрессии к сумме квадратов всех ее членов равно $\frac{8}{3}$, а такое же отношение для второй прогрессии равно 4,5. Найдите сумму каждой из этих прогрессий.

12.236. Второй член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен -2, а отношение суммы членов этой прогрессии к сумме квадратов ее членов равно $\frac{3}{32}$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются первый и четвертый члены исходной прогрессии.

12.237. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем сумма первого и шестого членов равна 62, а произведение четвертого и восьмого членов равно 4. Найдите сумму этой прогрессии.

12.238. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что сумма квадратов первых пятнадцати ее членов равна сумме первых тридцати ее членов, а сумма кубов первых пятнадцати ее членов в три раза меньше суммы первых сорока пяти членов данной прогрессии.

12.239. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна 13,5, содержит член, равный $\frac{1}{3}$. Отношение суммы всех членов прогрессии, стоящих до него, к сумме всех членов прогрессии, стоящих после него, равно 78. Найдите порядковый номер этого члена прогрессии.

12.240. Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получили новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с данным, и т. д. Найдите предел суммы периметров и предел суммы площадей этих квадратов.

12.241. Сторона равностороннего треугольника равна a. На высоте его построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника построен еще равносторонний треугольник и т. д. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

12.242. В равносторонний треугольник со стороной a вписан круг. В этот круг вписан новый равносторонний треугольник. В этот треугольник опять вписан круг и т. д. Найдите сумму длин окружностей и сумму площадей всех этих кругов.

12.243. Найдите сумму ряда:

а) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots$; б) $\frac{1}{4\cdot11}+\frac{1}{11\cdot18}+\frac{1}{18\cdot25}+\ldots$;

в) $\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{7\cdot11}+\frac{1}{11\cdot15}+\ldots$; г) $\frac{1}{2\cdot9}+\frac{1}{9\cdot16}+\frac{1}{16\cdot23}+\ldots$.

§ 13. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}.$$

2. Теоремы сложения.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;$$
$$\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m;\ n,\ k,\ m\in\boldsymbol{Z};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$
$$\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m;\ n,\ k,\ m\in\boldsymbol{Z}.$$

3. Формулы двойного аргумента.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2};\quad k,\ m\in\boldsymbol{Z}.$$

4. Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента.

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};$$
$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

5. Формулы понижения степени.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

6. Формулы половинного аргумента.

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\ \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

7. Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение.

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;\ n,\ k\in\mathbf{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;\ n,\ k\in\mathbf{Z}.$$

8. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).$$

9. Преобразование выражения $a\cos\alpha+b\sin\alpha$ **путем введения вспомогательного аргумента.**

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi),\ a^2+b^2\neq 0,$$

где вспомогательный аргумент φ определяется из условий

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{ и }\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример 1. Сколько целых значений может принимать выражение $3\sin^2 x+5\sin 2x$?

Решение.

$$3\sin^2 x+5\sin 2x=\frac{3-3\cos 2x}{2}+5\sin 2x=$$

$$=1{,}5-\left(\frac{3}{2}\cos 2x-5\sin 2x\right)=1{,}5-\sqrt{25+2{,}25}\cdot\cos(2x+\varphi),$$

где $\sin\varphi=\frac{5}{\sqrt{27{,}25}}$ и $\cos\varphi=\frac{3}{2\sqrt{27{,}25}}$.

Таким образом, учитывая ограниченность косинуса, имеем:

$$1{,}5-\sqrt{27{,}25}\leqslant 3\sin^2 x+5\sin 2x\leqslant 1{,}5+\sqrt{27{,}25}.$$

Поскольку $5<\sqrt{27{,}25}<5{,}4$ то $3\sin^2 x+5\sin 2x$ может принимать десять целых значений (от -3 до 6).

Пример 2. Вычислите без таблиц значение выражения $\sin 18° \cos 36°$.

Решение.

$$\sin 18° \cos 36° = \frac{4 \sin 18° \cos 18° \cos 36°}{4 \cos 18°} = \frac{2 \sin 36° \cos 36°}{4 \cos 18°} =$$
$$= \frac{\sin 72°}{4 \cos 18°} = \frac{\cos 18°}{4 \cos 18°} = \frac{1}{4}.$$

Пример 3. Известно, что $\cos(\alpha - 60°) = \frac{3}{5}$. Найдите $\sin \alpha$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества получаем, что $\sin(\alpha - 60°) = \pm\frac{4}{5}$. Далее имеем: $\sin \alpha = \sin((\alpha - 60°) + 60°) = \sin(\alpha - 60°)\cos 60° + \cos(\alpha - 60°)\sin 60° = \pm\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \pm 4}{10}$.

Пример 4. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d. Найдите сумму $S_n = \sin a_1 + \sin a_2 + \sin a_3 + \ldots + \sin a_n$.

Решение. 1) Если $d = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $S_n = n \sin a_1$. 2) Если $d \neq 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то домножим и разделим S_n на $2 \sin \frac{d}{2}$ и, поскольку $a_k + \frac{d}{2} = a_{k+1} - \frac{d}{2}$, получим:

$$S_n = \frac{1}{2 \sin \frac{d}{2}}\left(\cos\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \cos\left(a_1 + \frac{d}{2}\right) + \cos\left(a_2 - \frac{d}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \cos\left(a_2 + \frac{d}{2}\right) + \ldots + \cos\left(a_n - \frac{d}{2}\right) - \cos\left(a_n + \frac{d}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2 \sin \frac{d}{2}}\left(\cos\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \cos\left(a_n + \frac{d}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2 \sin \frac{d}{2}} \cdot 2 \sin \frac{a_n + \frac{d}{2} - a_1 + \frac{d}{2}}{2} \cdot \sin \frac{a_n + \frac{d}{2} + a_1 - \frac{d}{2}}{2} = \frac{\sin \frac{dn}{2} \sin\left(a_1 + \frac{d(n-1)}{2}\right)}{\sin \frac{d}{2}}$$

Пример 5. Найдите наибольшее значение выражения $\cos^{13} x + \sin^{14} x$.

Решение. Поскольку для всех действительных значений x выполняются неравенства $\cos^{13} x \leqslant \cos^2 x$ и $\sin^{14} x \leqslant \sin^2 x$, то $\cos^{13} x + \sin^{14} x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Кроме того, $\cos^{13} 0 + \sin^{14} 0 = 1$, т. е. существует такое значение x, при котором значение выражения равно 1. Значит, наибольшее значение выражения равно 1.

Упражнения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Найдите значение выражения **(1—4)**:

13.1. а) $2 \sin 30° - \sqrt{3} \sin 60° \operatorname{ctg} 45° \operatorname{tg} 30°$;
б) $4 \cos 45° \operatorname{ctg} 60° \operatorname{tg} 60° - 3 \sin 45°$.

13.2. а) $\dfrac{6 \sin 30° \cos 30°}{\cos^2 30° - \sin^2 30°}$; б) $\dfrac{1 - 2\sin^2 60°}{2\cos^2 60° - 1}$.

13.3. а) $(0{,}75 \operatorname{tg}^2 30° - \sin^2 60° + \operatorname{tg}^2 45° + \cos 60°)^{-1}$;
б) $(2 \cos 30° - \operatorname{ctg} 45° + \sin^2 60° + \operatorname{ctg}^2 60°)^{-1}$.

13.4. а) $\sqrt{(1 - 2\sin 45°)^2} - \sqrt{(1 - 2\cos 45°)^2}$;
б) $\sqrt{(\operatorname{tg} 60° - 2)^2} - \sqrt{(\operatorname{ctg} 30° - 2)^2}$.

13.5. Верно ли утверждение:
а) если $0° < \alpha < 90°$, то α — угол I четверти;
б) если α — угол I четверти, то $0° < \alpha < 90°$?

13.6. Какой знак имеет сумма $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, если α, β и γ — углы треугольника?

Углом какой четверти является угол α, если известно, что **(7—8)**:

13.7. а) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$; б) $\sin\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0$;
в) $\cos\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; г) $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha < 0$?

13.8. а) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$; б) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$;
в) $|\operatorname{tg}\alpha| + \operatorname{tg}\alpha = 0$; г) $\operatorname{ctg}\alpha - |\operatorname{ctg}\alpha| = 0$?

13.9. а) Укажите несколько значений α, при которых: $\sin\alpha = -1$; $\cos\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.
б) Укажите все значения α, при которых: $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

13.10. Известно, что $\sin\beta = 0{,}5$.
а) Верно ли, что $\beta = 30°$?
б) Укажите несколько углов, синус которых равен 0,5.
в) Укажите все углы, синус которых равен 0,5.

13.11. Известно, что $\cos\beta = 0{,}5$.
а) Верно ли, что $\beta = 300°$?
б) Укажите несколько углов, косинус которых равен 0,5.
в) Укажите все углы, косинус которых равен 0,5.

13.12. Возможно ли равенство:
а) $\sin\alpha = \sqrt{3} - 2$; б) $\cos\beta = -\sqrt{2}$; в) $\sin\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;
г) $\cos\beta = \dfrac{\pi}{3}$; д) $\sin\alpha = m + \dfrac{1}{m}$, где $m \neq 0$;
е) $\cos\beta = 2a - a^2 - 2$?

Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения **(13—14)**:

13.13. а) $1+\sin\alpha$; б) $1-\cos\alpha$; в) $2-3\sin\alpha$;
г) $3+2\cos\alpha$; д) $|\cos\alpha|$; е) $-|\sin\alpha|$.

13.14. а) $2\cos^2\alpha-1$; б) $1-2\sin^2\alpha$; в) $2-5|\cos\alpha|$;
г) $|2-5\cos\alpha|$; д) $4-3|\sin\alpha|$; е) $|3+4\sin\alpha|$.

13.15. Возможно ли равенство:
а) $\sin\alpha+2\cos\alpha=3$; б) $3\sin\alpha-2\cos\alpha=5$;
в) $5\cos\alpha-3\sin\alpha=8$; г) $2\sin\alpha+5\cos\alpha=-7$?

Найдите значение выражения **(16—18)**:

13.16. а) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.

13.17. а) $\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-1}$;
б) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-2}$.

13.18. а) $\dfrac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos(-\pi)-\sin\frac{\pi}{4}}$; б) $\dfrac{4\operatorname{tg}0-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}{\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$.

Определите знак выражения **(19—20)**:

13.19. а) $\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{5\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{9}$;
б) $\sin\frac{4\pi}{7}\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{11}\right)$.

13.20. а) $\sin\frac{5\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{4}\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{8}$;
б) $\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\cos\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{9\pi}{11}\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{9}\right)$.

Сравните два числа **(21—23)**:

13.21. а) $\cos\frac{\pi}{11}$ и $\cos^2\frac{\pi}{11}$; б) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\sin^2\frac{\pi}{7}$.

13.22. а) $\sin\frac{\pi}{10}$ и $\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{9}$; б) $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$.

13.23. а) $\cos\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$; б) $\sin\frac{11\pi}{10}$ и $\sin\frac{11\pi}{10}\cos\frac{\pi}{9}$.

13.24. Известно, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Докажите неравенство:
а) $\sin\alpha>\sin^2\alpha$; б) $\cos\alpha>\cos^2\alpha$;
в) $\sin\alpha>\sin\alpha\cos\alpha$; г) $\sin\alpha<\operatorname{tg}\alpha$.

13.25. Докажите, что $\sin\alpha+\cos\alpha>1$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

13.26. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

13.27. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

13.28. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha=-3\frac{3}{7}$ и $\pi<\alpha<2\pi$. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

13.29. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

13.30. Известно, что $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $a>0$. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

Вычислите **(31—36)**:

13.31. а) $\sin 225^\circ \cos 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ$;

б) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$.

13.32. а) $\sin(-300^\circ)\cos(-135^\circ)\operatorname{tg}(-210^\circ)\operatorname{ctg}(-120^\circ)$;

б) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

13.33. а) $1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}+\ldots$;

б) $1-\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}-\cos^3\frac{\pi}{4}+\ldots$.

13.34. а) $1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6}+\ldots$;

б) $1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^3\frac{\pi}{6}+\ldots$.

13.35. а) $\cos(-7{,}9\pi)\operatorname{tg}(-1{,}1\pi)-\sin 5{,}6\pi\operatorname{ctg} 4{,}4\pi$;

б) $\sin 5{,}9\pi\operatorname{tg}(-0{,}6\pi)+\cos 3{,}6\pi\operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$.

13.36. а) $\sin(-1{,}3\pi)\cos(-1{,}7\pi)\operatorname{tg}(-0{,}7\pi)+\sin 0{,}8\pi\cos 1{,}8\pi\operatorname{tg} 1{,}2\pi$;

б) $\operatorname{ctg} 2{,}2\pi\sin 2{,}7\pi\sin(-3{,}2\pi)+\operatorname{ctg}(-2{,}3\pi)\cos(-3{,}7\pi)\times$ $\times\cos 1{,}2\pi$.

Упростите выражение **(37—42)**:

13.37. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)\operatorname{ctg}(\pi-\beta)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\operatorname{tg}(2\pi+\beta)$.

13.38. а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\alpha+\sin^2(3\pi+\alpha)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$;

б) $\cos(3\pi-\beta)+\operatorname{ctg}(3{,}5\pi-\beta)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)\operatorname{ctg}(\pi+\beta)$.

13.39. а) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\beta+\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$.

13.40. а) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $(1-\cos^2\beta)\operatorname{tg}^2\beta+1-\operatorname{tg}^2\beta$.

13.41. а) $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)^2-(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)^2$; б) $\operatorname{ctg}^6\beta-\frac{\cos^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}{\sin^2\beta-\operatorname{tg}^2\beta}$.

13.42. а) $\dfrac{\sin 150°-\cos 240°}{\operatorname{ctg} 730° \operatorname{ctg} 800°+\operatorname{tg} 730° \operatorname{tg} 800°}$;

б) $\sin 750° \sin 150°+\cos 930° \cos(-870°)+\operatorname{tg} 600°$.

13.43. Вычислите:

а) $\operatorname{ctg} 1°\cdot\operatorname{ctg} 3°\cdot\operatorname{ctg} 5°\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg} 89°$;

б) $\operatorname{tg} 88°\cdot\operatorname{tg} 86°\cdot\operatorname{tg} 84°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 2°$.

13.44. Исключите параметр t из системы:

а) $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=5\sin t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\sin t\cos t. \end{cases}$

Докажите тождество **(45—48)**:

13.45. а) $(-\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)$;

б) $1+\cos\beta-\sin\beta-\operatorname{ctg}\beta=(1-\operatorname{ctg}\beta)(1-\sin\beta)$.

13.46. а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

б) $\frac{1-\cos^4\beta-\sin^4\beta}{\operatorname{tg}^2\beta}=2\cos^4\beta$.

13.47. а) $\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}=\frac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}$; б) $\frac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}=\frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha+\sqrt{3}}$.

13.48. а) $\frac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}$;

б) $\frac{\cos\beta+\sin\beta-\cos^2\beta\sin\beta-\sin^2\beta\cos\beta}{\sin\beta\operatorname{tg}\beta+\cos\beta\operatorname{ctg}\beta}=\sin\beta\cos\beta$.

13.49. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найдите:

а) $\frac{3\sin\alpha-5\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; б) $\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}$; в) $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{2\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$.

13.50. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha=-2$. Найдите:

а) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$; б) $\frac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$;

в) $\frac{\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения и значения переменной, при которых они достигаются (51—52):

13.51. а) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha$; б) $3\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha$.

13.52. а) $3\cos^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $2\sin^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

Упростите выражение **(53—54)**:

13.53. а) $(\operatorname{ctg}(6{,}5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+\frac{2\sin^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}$;

б) $\left(\frac{\cos(2{,}5\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(3\pi+\alpha)}-\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

13.54. а) $\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{(\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha))^2-1}$.

Докажите, что при всех допустимых значениях переменных выражение принимает одно и то же значение **(55—56)**:

13.55. $\frac{\cos^4\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

13.56. $\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2}{\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Упростите выражение **(57—59)**:

13.57. а) $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\sqrt{\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}\beta)+\sin^2\beta(1+\operatorname{ctg}\beta)}$, если $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

13.58. а) $\operatorname{ctg}\alpha-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, если $\pi<\alpha<2\pi$;

б) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

13.59. а) $\sqrt{4\cos^2\alpha+4\cos\alpha+1}-\sqrt{4-4\sin^2\alpha}$, если $\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\pi$;

б) $\sqrt{2-2\cos^2\beta}+\sqrt{2\sin^2\beta-2\sqrt{2}\sin\beta+1}$, если $\frac{3\pi}{4}\leqslant\beta\leqslant\pi$.

Докажите неравенство **(60—64)**:

13.60. а) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\leqslant 0{,}25$; б) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geqslant 0{,}5$.

13.61. а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\geqslant 0{,}25$; б) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha\geqslant 0{,}125$.

13.62. а) $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|\geqslant 2$; б) $9\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha\leqslant 4$.

13.63. а) $\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\geqslant 6$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\geqslant 6$.

13.64. а) $|\sin(\sin\alpha)|<0{,}5\sqrt{3}$; б) $0{,}5<\cos(\sin\alpha)\leqslant 1$.

13.65. Найдите $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$.

13.66. Найдите $\cos\alpha+\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=a$.

13.67. Известно, что $\sin^2\alpha\cos^2\alpha=a$. Найдите $\frac{\sin^{10}\alpha}{1-\operatorname{tg}^4\alpha}+\frac{\cos^{10}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^4\alpha}$.

13.68. Вычислите $\sin^2\alpha-\sin^4\alpha$, если $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}+$
$+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения **(69—70)**:

13.69. а) $2\cos^2\alpha-3\sin\alpha$; б) $3\sin^2\beta+2\cos\beta$.

13.70. а) $1-\sqrt{\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}$; б) $1+\sqrt{\sin^2\beta+2\cos^2\beta}$.

13.71. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sin^2 x\cos^4 x\,(2-\sin^2 x).$$

13.72. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}$; б) $\frac{1}{\cos^4\beta}-\operatorname{tg}^2\beta$.

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

Вычислите **(73—77)**:

13.73. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha=-0{,}5$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)$, если $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

13.74. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$, если $\sin\beta=-0{,}8$ и $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

13.75. а) $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=-\frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$;

б) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, $\cos\beta=-\frac{1}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

13.76. а) $\dfrac{\cos\frac{21\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20}+\cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{24}+\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8}}$; б) $\dfrac{\sin\frac{15\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{21}+\cos\frac{4\pi}{21}\cos\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{7\pi}{24}\sin\frac{23\pi}{24}}$.

13.77. а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{24}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{24}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{24}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}-1}{\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{24}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{24}}$.

13.78. Найдите $\cos\beta$, если $\cos\alpha=0{,}6$, $\cos(\alpha+\beta)=0$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

13.79. Найдите $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

13.80. Найдите $\alpha-\beta$, если $\sin\alpha=\frac{40}{41}$, $\sin\beta=-\frac{9}{41}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

13.81. Найдите $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=-0{,}5$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

13.82. Докажите, что $\alpha-\beta=30°$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{4-a}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{a-1}{\sqrt{3}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

13.83. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin\gamma=\frac{3}{\sqrt{11}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$.

13.84. Пусть $\operatorname{tg}\alpha=(\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}\beta=(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}\gamma=2\sin x\cos x$. Докажите, что $\alpha=\beta+\gamma$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$.

Докажите тождество **(85—88)**:

13.85. а) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$; б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$.

13.86. а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; б) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$.

13.87. а) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\frac{\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-1}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$.

13.88. а) $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\beta\sin 2\beta-\cos 2\beta=1$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения **(89—91)**:

13.89. а) $\sin\alpha+\cos\alpha$; б) $\sqrt{3}\cos\beta-\sin\beta$.

13.90. а) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\beta+\sqrt{6}\cos\beta$.

13.91. а) $3\sin\alpha+4\cos\alpha$; б) $2\sin\beta-5\cos\beta$.

Упростите выражение **(92—94)**:

13.92. а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin^2\alpha$;

б) $\cos^2\beta+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\beta\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\beta\right)$.

13.93. а) $\cos(\alpha-\beta)(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1)+(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

б) $(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1)\cos(\alpha+\beta)+(1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

13.94. а) $\frac{\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}-\operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta-\frac{\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

Докажите неравенство **(95—96)**:

13.95. а) $\sin(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos(\alpha-\beta)<\cos\alpha+\sin\beta$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

13.96. а) $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $0<\beta<\frac{\pi}{4}$.

13.97. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

13.98. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

13.99. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)$, если известно, что

$$2\cos^2\alpha+(6-\sqrt{2})\cos\alpha-3\sqrt{2}=0.$$

13.100. Найдите: а) $\cos\alpha$, если $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=0{,}6$ и $\frac{7\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{3}$;

б) $\sin\alpha$, если $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\frac{5\pi}{4}$.

13.101. Найдите величины α и β углов ромба, если

$$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=1.$$

13.102. Углы треугольника связаны соотношением $\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. Докажите, что треугольник равнобедренный.

13.103. В каких пределах находится отношение суммы катетов к гипотенузе в прямоугольном треугольнике?

Вычислите (104—107):

13.104. а) $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\sin 2\beta$ и $\cos 2\beta$, если $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

13.105. а) $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

13.106. а) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg} 2\alpha=3$;
б) $\operatorname{ctg}\beta$, если $\operatorname{tg} 2\beta=-5$.

13.107. $\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\cos(\pi-4\alpha)=-\frac{1}{3}$.

Докажите справедливость формулы **(108—109):**

13.108. а) $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; б) $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

13.109. а) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; б) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

Вычислите (110—113):

13.110. а) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$;

б) $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$ и $\operatorname{ctg} 2\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{2}{3}$.

13.111. а) $\dfrac{\cos\alpha}{2-3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$;

б) $\dfrac{2\sin\alpha}{4+5\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-2$.

13.112. а) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-3$; б) $\cos 4\beta$, если $\operatorname{tg}\beta=2$.

13.113. а) $\sin 3\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$; б) $\cos 3\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=0{,}5$.

13.114. Найдите величину угла A треугольника ABC, если:
а) $\sin^4 A=\cos^4 A+0{,}5$;

б) $\sin^3 A\cos A=0{,}25-\cos^3 A\sin A$.

13.115. Докажите неравенство:

а) $\sin 2\alpha<2\cos\alpha$, если $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$, если $0<\alpha<\pi$.

Вычислите **(116—118)**:

13.116. а) $8\sin^2\frac{15\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{17\pi}{16}-1$; б) $\sin^4\frac{23\pi}{12}-\cos^4\frac{13\pi}{12}$.

13.117. а) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{8}$.

13.118. а) $\sin^2\frac{\pi}{13}+\sin^2\frac{11\pi}{26}$; б) $\cos^2\frac{3\pi}{34}+\cos^2\frac{7\pi}{17}$.

13.119. Что больше: $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$?

13.120. Найдите значение выражения $\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}$, если известно, что $4\sin^2\alpha-9\cos\alpha-6=0$.

Докажите тождество **(121—124)**:

13.121. $1+\cos(3\pi+3\alpha)\cos 2\alpha-\cos(1{,}5\pi-3\alpha)\sin 2\alpha=2\sin^2 2{,}5\alpha$.

13.122. $\operatorname{tg}^4\alpha\,(8\cos^2(\pi-\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)-1)=8\sin^4\alpha$.

13.123. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=1$.

13.124. $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

13.125. Сократите дробь $\dfrac{4\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{4\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2 2(\alpha-\pi)}$.

13.126. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}$.

13.127. Вычислите $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta$, если $\cos 2\beta=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

13.128. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin 2\alpha=-\frac{1}{3}$;

б) $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$, если $\sin 2\beta=0{,}25$.

13.129. Найдите:

а) $\cos 2\alpha$, если $\dfrac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=-0{,}5$;

б) $\sin 2\alpha$, если $\dfrac{\cos\alpha+2\sin\alpha}{2\sin\alpha-3\cos\alpha}=-2$.

Упростите выражение **(130—133)**:

13.130. а) $0{,}125\cos 4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
б) $\sin^2\beta\operatorname{tg}\beta-\cos^2\beta\operatorname{ctg}\beta+2\operatorname{ctg}2\beta$.

13.131. а) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{2\cos 2\alpha}{1+\sin(2\alpha+1{,}5\pi)}$;

б) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\beta}-\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\sin\beta}{\cos 2\beta}$.

13.132. а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)+0{,}5\sin 2\alpha$; б) $2\sin^2\left(\beta-\frac{5\pi}{4}\right)+\sin 2\beta$.

13.133. а) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\beta}}$, если $2\pi\leqslant\beta\leqslant 4\pi$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения **(134—137)**:

13.134. а) $3\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$; б) $\cos^2\beta-2\cos 2\beta$.

13.135. а) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; б) $\sin^6\beta+\cos^6\beta$.

13.136. а) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin(0{,}5\pi+\alpha)}$; б) $\frac{\sin(2{,}5\pi+2\beta)}{\sqrt{2}\cos(1{,}5\pi+\beta)-1}$.

13.137. а) $\cos 2\alpha-|\cos\alpha|$; б) $\cos 2\alpha+|\sin\alpha|$.

13.138. Найдите $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha+\sin\alpha=m$. При каких значениях m условие задачи имеет смысл?

13.139. Найдите $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)$, если

$$\cos\beta\sin(3{,}5\pi+\beta)=m.$$

При каких значениях m условие задачи имеет смысл?

13.140. Известно, что $\sin x-\cos x=t$, где $|t|\leqslant\sqrt{2}$ и $t\neq 1$. Найдите $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

13.141. Найдите $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=b$ и $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=3$.

13.142. Найдите $\sin\alpha$, если известно, что $\cos 2\alpha=-\cos\alpha$ и $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

13.143. Найдите $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=a \text{ и } \frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi.$$

Вычислите **(144—145)**:

13.144. а) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$;

б) $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

13.145. а) $\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{\pi}{18}$;

б) $\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}$.

13.146. Проверьте справедливость равенства:

а) $8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ - \sin 10^\circ = 2\sin^2 40^\circ$;

б) $\sin 50^\circ + 8\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 2\cos^2 20^\circ$.

13.147. Известно, что α и β — величины смежных углов параллелограмма. Докажите, что

$$\frac{1-\sin 2\alpha}{(\cos\beta+\sin\alpha)^2} = \frac{1+\cos 2\beta}{2\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

13.148. Докажите, что если α и β — острые углы прямоугольного треугольника, то:

а) $$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\beta-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{tg}^4\left(\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

б) $$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\cos(\pi+\beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\alpha-\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0.$$

13.149. Найдите величины α и β смежных углов параллелограмма, если известно, что $\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{2}\sin(\alpha-\beta)$.

13.150. В равнобедренном треугольнике α — величина угла при основании, β — величина угла при вершине, причем $\cos\alpha+\sqrt{3}\cos\beta=0$. Найдите α и β.

13.151. Найдите величины острых углов α и β прямоугольного треугольника, если $\sin 2\alpha = 1+\sin(3\alpha-\beta)$.

13.152. Найдите величины α и β острых углов прямоугольного треугольника, если $\cos\alpha+\sin(\alpha-\beta)=1$.

13.153. В равнобедренном треугольнике α и β — величины углов при основании и вершине соответственно. Найдите α и β, если известно, что $\sqrt{2}\cos\alpha+\cos\beta=1$.

13.154. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $6\sin^2\alpha \geqslant 4+\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha \geqslant -\frac{1}{9}$.

13.155. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $9\cos^2\alpha \leqslant 5+9\sin\alpha$ и $\cos 2\alpha \geqslant \frac{7}{9}$.

13.156. Вычислите: а) $\sin 36^\circ$; б) $\sin 18^\circ$.

13.157. Рациональным или иррациональным числом является $\operatorname{tg}^2 3\alpha$, если известно, что $\cos 2\alpha = -0{,}1$?

13.158. Рациональным или иррациональным числом является $\operatorname{ctg}^2 4{,}5\alpha$, если известно, что

$$\cos 3\alpha = 0{,}25\left(\sqrt{21-12\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\right)?$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ОБРАТНО

Проверьте справедливость равенства **(159—161)**:

13.159. а) $\cos 47°+\cos 73°=\cos 13°$; б) $\sin 87°-\sin 27°=\cos 57°$.

13.160. а) $\cos 29°-\cos 31°=\sin 1°$; б) $\sin 18°+\sin 42°=\cos 12°$.

13.161. а) $\sin 93°-\cos 63°=\sin 33°$; б) $\cos 14°-\sin 16°=\cos 46°$.

13.162. Вычислите:

а) $\dfrac{2\sin^2 49°-1}{\cos 53°-\cos 37°}$; б) $\dfrac{\sin 11°-\sin 49°}{1-2\cos^2 54°30'}$.

Упростите выражение **(163—164)**:

13.163. а) $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$; б) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\beta-\sin\alpha}$.

13.164. а) $\dfrac{\sin 4\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 7\alpha}$; б) $\dfrac{\sin 7\beta+\sin 11\beta}{\cos 10\beta-\cos 8\beta}$.

Докажите справедливость формулы **(165—167)**:

13.165. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$.

13.166. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

13.167. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$.

13.168. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{24}\right)$; б) $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{20}\right)$.

13.169. Вычислите:

а) $\sin 15°\cos 7°-\cos 11°\cos 79°-\sin 4°\sin 86°$;

б) $\cos 17°\cos 73°-\sin 13°\cos 21°-\cos 4°\cos 86°$.

13.170. Докажите тождество:

а) $1+2\cos 2\alpha=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

б) $\sqrt{3}-2\sin 2\beta=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)$.

13.171. Преобразуйте в произведение:

а) $\sqrt{2}-2\cos\alpha$; б) $0{,}5+\sin\beta$.

13.172. Докажите тождество:

а) $1-4\sin^2\alpha=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

б) $3-4\cos^2\beta=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$.

13.173. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 3\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}$; б) $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha}$.

Докажите тождество **(174—175)**:

13.174. а) $\dfrac{\sin 5\alpha - 2\sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha}{1-\cos 5\alpha - 2\sin^2 3\alpha} = \operatorname{ctg} 5{,}5\alpha;$

б) $\dfrac{2\cos^2 2\beta + \cos 5\beta - 1}{\sin 5\beta + 2\cos 2\beta \sin 2\beta} = \operatorname{ctg} 4{,}5\beta.$

13.175. а) $\dfrac{\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \cos\alpha \operatorname{tg} 2\alpha;$

б) $\dfrac{2\cos\beta + \cos 3\beta + \cos 5\beta}{\cos 3\beta + \sin\beta \sin 2\beta} = 4\cos 2\beta.$

13.176. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\frac{2\cos^2\alpha + \cos 4\alpha - 1}{\cos^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\alpha}{2}}.$$

Упростите выражение **(177—178)**:

13.177. а) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta);$

б) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$

13.178. а) $\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right);$

б) $\sin^2\left(\beta + \frac{5\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\beta + \frac{7\pi}{12}\right).$

13.179. Докажите, что $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60° = \frac{8\cos 20°}{\sqrt{3}}.$

13.180. Верно ли равенство

$$0{,}5\sin 40° - \cos 30° + \cos 20° \cos 10° = 2\sqrt{3}\sin^2 20° \cos 20°?$$

13.181. Докажите, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12} + 2\alpha\right) = \sin 2\alpha.$$

13.182. Верно ли равенство

$$\cos^2 73° + \cos 47° \cos 73° + \cos^2 47° = 0{,}75?$$

13.183. Найдите $\dfrac{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = t$.

При каких значениях t условие задачи не имеет смысла?

13.184. Известно, что $2\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = b$. Укажите допустимые значения параметра b и найдите произведение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right)$.

13.185. Известно, что $\cos^2 2\beta + (2a-5)\sin 2\beta + 10a - 1 = 0$. Укажите допустимые значения параметра a и найдите произведение $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right)\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \beta\right)$.

Вычислите значение выражения **(186—191)**:

13.186. $\dfrac{\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$.

13.187. $\cos 2\alpha-\cos 6\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

13.188. $\sin 5\alpha-\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

13.189. $\cos 3\alpha-\cos 5\alpha$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

13.190. $\cos 8\alpha+\cos 6\alpha+2\sin 5\alpha\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

13.191. $\cos 12\alpha-\cos 6\alpha-2\cos 7\alpha\cos 5\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

13.192. Найдите $\sin 2\alpha\cos 5\alpha-\sin\alpha\cos 6\alpha$, если $\sin\alpha=a$.

13.193. Найдите $\cos 7\alpha\cos 4\alpha-\cos 8\alpha\cos 3\alpha$, если $\cos\alpha=a$.

Вычислите **(194—197)**:

13.194. а) $\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{7\pi}{16}\sin\dfrac{5\pi}{24}$;

б) $\sin\dfrac{7\pi}{16}\sin\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{7\pi}{24}\sin\dfrac{\pi}{16}\sin\dfrac{\pi}{24}$.

13.195. а) $\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$; б) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$.

13.196. а) $\cos 24^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ+\sin 42^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 9^\circ-\operatorname{tg} 63^\circ+\operatorname{tg} 81^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ$.

13.197. а) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$;

б) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

Докажите тождество **(198—199)**:

13.198. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

13.199. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

Найдите сумму **(200—201)**:

13.200. $\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)+\ldots+\cos(\alpha+n\varphi)$.

13.201. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+n\varphi)$.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ СЕРИИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ПОВТОРЕНИЯ

Серия 1. ***Делимость целых чисел***

1. Числа a и b таковы, что $0<a<b$. Может ли b делиться на a? Может ли b делиться на a^{1991}? Может ли a делиться на b?
2. Число 1989 выписано подряд 1991 раз. Можно ли между выписанными числами расставить знаки «$+$» и «$-$» таким образом, чтобы результат был равен 10000?
3. При каких натуральных значениях n число $\frac{2n+5}{3}$ целое?
4. Может ли число $6n+5$, где n — натуральное, при делении на 9 давать остаток 1?
5. Докажите, что ни при каком натуральном n число:
   а) $3n+2$; б) $5n+3$; в) $7n+5$ не является точным квадратом.
6. Докажите, что сумма двух последовательных четных чисел не может быть квадратом целого числа.
7. При каких натуральных значениях n число $7\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ нулей}}7$ делится на 11?
8. Докажите, что числа:
   а) $2n-1$ и $2n+1$; б) $2n+1$ и $3n+2$ взаимно просты.
9. Докажите, что при любом n число:
   а) n^4-n^2 кратно 12; б) n^9-n^3 кратно 504.
10. Докажите, что при любом нечетном n число:
    а) n^4+14n^2+49 делится на 64; б) 5^n-5 делится на 24.
11. Докажите, что при любом четном n число:
    а) $n^2(n^2-4)$ делится на 64; б) 7^n-7 делится на 8.
12. Докажите, что все простые числа, бо́льшие 2, имеют вид $4k+1$ или $4k-1$, где k — натуральное число.
13. Известно, что числа p и $4p+1$ — простые ($p>3$). Докажите, что при делении на 6 число p дает остаток 1.
14. Существуют ли в натуральном ряду четыре последовательных нечетных числа, каждое из которых — простое?
15. Три простых числа, бо́льшие 3, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что ее разность делится на 6.
16. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 1991?

Серия 2. ***Квадратные корни***

1. Докажите, используя определение квадратного корня, что: а) $\sqrt{25}=5$; б) $\sqrt{49}\neq-7$; в) $\sqrt{63}\neq 8$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}+1$;

б) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}-3$;

в) $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$;

г) $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$;

д) $(\sqrt{5}-3)\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

3. Сравните два числа: а) $\sqrt{0{,}63}$ и $\sqrt{0{,}83}$; б) $\sqrt{0{,}63}$ и $\sqrt[3]{0{,}63}$; в) $\sqrt{1{,}63}$ и $\sqrt[3]{1{,}63}$; г) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; д) $\sqrt{6}-\sqrt[3]{3}$ и 1.

4. Вычислите:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

5. Постройте график функции: а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{x^2}$; в) $y=(\sqrt{x})^2$; г) $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$; д) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}$; е) $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}$.

Серия 3. ***Квадратные уравнения***

1. Докажите, что

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=ax^2+bx+c.$$

2. Решите уравнение:

а) $x^2=9$;

б) $(x-3)^2=7$;

в) $(5x+7)^2=11$;

г) $25x^2+70x+38=0$;

д) $\frac{1}{7}x^2-x-3=0$;

е) $2x^2+3x+5=0$;

ж) $16x^2+88x+121=0$;

з) $16x^2-88x+121=0$;

и) $121x^2-88x+16=0$.

3. Докажите, что если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ $a+b+c=0$, то $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$.

4. Докажите, что если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ $a-b+c=0$, то $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$.

5. Докажите, что если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ $b=2m$ и $m^2 \geqslant ac$, то корни можно вычислить по формуле $x_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}$, где $m^2-ac=\frac{D}{4}$.

6. Решите уравнение $x^2-4ax-5a^2=0$:
а) относительно x; б) относительно a.

7. Решите квадратное уравнение $a^2-ab-2ac+13bc-15c^2-2b^2=0$:
а) относительно a; б) относительно b; в) относительно c.

8. Покажите, что уравнение $2x^2-2x(1+2y)+4y^2+1=0$ имеет действительное решение только при $y=\frac{1}{2}$, и найдите это решение.

9. Найдите все такие значения x и y, при которых выполняется равенство $x^2+4xy+13y^2-6y+1=0$.

10. Докажите, что при всех натуральных значениях n уравнение $x^2-2x-4n-1=0$ не имеет целых корней.

11. Докажите, что при всех значениях α уравнение
$$x^2-(2\cos\alpha-3)x+\cos^2\alpha-4\cos\alpha+7=0$$
не имеет действительных корней.

12. Докажите, что ни при каких значениях a уравнение $\cos^2 x+\cos x-a^4-5a^2-6=0$ не имеет решений.

13. При каких значениях a уравнение $(x^2-3x-4)(x^2-a)=0$ имеет ровно три корня?

14. При каких значениях a уравнение $(x^2-a)(x^2+3ax+a)=0$ имеет ровно два корня?

Серия 4. ***Дробно-рациональные уравнения***

Решите уравнение **(1—10)**:

1. $\frac{3x+1}{5x-6}=0.$

2. $\frac{9x^2-1}{3x+1}=0.$

3. $\frac{5x+7}{49-25x^2}=0.$

4. $x^2+\frac{3x-1}{x+4}=16-\frac{1-3x}{x+4}.$

5. $\frac{x^2-3x}{x^2+7x-30}=\frac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30}.$

6. $\frac{1}{3x+2}+\frac{3}{5x+6}=\frac{2}{7x+8}.$

7. $\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x-3}.$

8. $\frac{x-a}{x-3}=5.$

9. $\frac{x^2-5x+4}{x-a}=0.$

10. $\frac{x^2-(4+a)x+4a}{x-1}=0.$

Серия 5. ***Теорема Виета***

1. Не решая уравнения $3x^2-x-1=0$, найдите:
а) x_1+x_2; б) $x_1\cdot x_2$; в) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$;
г) $x_1^2+x_2^2$; д) $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$; е) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;
ж) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; з) $x_1x_2^4+x_1^4x_2$; и) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

2. Составьте квадратное уравнение с корнями:

а) $x_1=-3,\ x_2=5$; б) $x_1=x_2=-7$;
в) $x_1=3a+1,\ x_2=5a-2$; г) $x_1=6-\sqrt{5},\ x_2=6+\sqrt{5}$;
д) $x_1=\sqrt{7}-\sqrt{6},\ x_2=-\sqrt{7}+\sqrt{6}$; е) $x_1=\sqrt{7}-\sqrt{6},\ x_2=\sqrt{7}+\sqrt{6}$.

3. Не решая квадратного уравнения $3x^2-x-1=0$, составьте новое уравнение, корни которого:
а) противоположны корням данного;
б) обратны корням данного;
в) в 5 раз больше корней данного.

4. При каких значениях a разность корней уравнения $3x^2-x+a=0$ равна $7\frac{1}{3}$?

5. При каких значениях a частное корней уравнения $3x^2+ax+1=0$ равно 27?

6. Найдите корни уравнения, применив теорему, обратную теореме Виета:
а) $x^2-(37+a)x+37a=0$;
б) $x^2-(5-\sqrt{3})x-5\sqrt{3}=0$;
в) $x^2-(8-\sqrt{5})x+5(3-\sqrt{5})=0$;
г) $x^2-(3a+5)x+(2a+1)(a+4)=0$.

7. Решите систему уравнений, применив теорему Виета:

а) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=7, \\ xy=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-3y=7, \\ xy=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ xy(x+y)=30. \end{cases}$

Серия 6. ***Уравнения с параметрами.***

Для каждого значения параметра a решите уравнение **(1—10)**:

1. $|x|=a$. **2.** $ax=3$. **3.** $a(a-1)x=a$.

4. $\frac{x-a}{x-3}=0$. **5.** $x^2+ax+36=0$.

6. $\frac{x^2-a^2}{x-3}=0$. **7.** $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$.

8. $\frac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x}=0$.

9. $\frac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x-3}=0$.

10. $\frac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{2x-a}=0$.

Серия 7. ***Неравенства с параметрами.***

Для каждого значения параметра a решите неравенство **(1—9)**:

1. $|x-3|<a$.

2. $|x-4|>a$.

3. $ax<3$.

4. $(a^2-1)x>a-1$.

5. $(x-3)(x-a)<0$.

6. $\frac{x^2-a}{x+3}\leqslant 0$.

7. $x^2+ax+9>0$.

8. $x^2+ax+9\leqslant 0$.

9. $ax^2+6x-4<0$.

Серия 8. ***Квадратичная функция.***

1. Постройте график функции:

а) $y=x^2-4x-3$; б) $y=x^2+4x+11$; в) $y=-x^2+3$;

г) $y=\frac{1}{2}x^2-x$; д) $y=-3x^2+6x-1$; е) $y=x|x-2|$;

ж) $y=|x|(x-2)$; з) $y=x^2-|2x-1|$; и) $y=|x^2-2x|+1$;

к) $y=|x^2-1|-2x$.

2. Найдите квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$, если:

а) вершина параболы $M(-2;\ 3)$ и график проходит через точку $N(3;\ -2)$;

б) график пересекает ось Ox в точках $M(3;\ 0)$ и $N(7;\ 0)$ и проходит через точку $K(8;\ 20)$;

в) график проходит через точки $N(0;\ -1)$, $K(1;\ 1)$ и $F(-1;\ -5)$;

г) график проходит через точки $M(1;\ 1)$, $K(2;\ 13)$ и $F(-1;\ 7)$.

3. Пусть $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, $y(0)<y(3)$ и $y(3)>y(5)$.

а) Сравните a с нулем.

б) Сравните b с нулем.

в) В каких пределах может изменяться отношение $\frac{b}{a}$?

Серия 9. ***Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции.***

1. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y=x^2-7$;

б) $y=2(x-5)^2-1$;

в) $y=x^2-4x-1$;

г) $y=2x^2-x+3$.

2. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y=-x^2+1$;

б) $y=-(x-7)^2-3$;

в) $y=-x^2-8x+11$;

г) $y=-4x^2-x-3$.

3. При каком значении a наименьшее значение функции $y=x^2-2x+a$ равно 6?

4. При каком значении a наименьшее значение функции $y=x^2-ax+7$ равно 6?

5. При каком значении a наименьшее значение функции $y=ax^2-2x+7$ равно 6?

6. При каком значении a наибольшее значение функции $y=ax^2+(a-3)x+1$ равно 4?

7. В фигуру, ограниченную параболой $y=4-x^2$ и осью Ox, поместили прямоугольник, две вершины которого лежат на параболе, а две — на оси Ox. Найдите наибольший из периметров этих прямоугольников.
8. Фигура ограничена параболами $y=x^2-4x-7$ и $y=-x^2+9$. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного оси Oy и лежащего внутри данной фигуры.
9. Фигура ограничена параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x+3$. Найдите длину наибольшего отрезка, параллельного оси Ox и лежащего внутри фигуры.

Серия 10. ***Решение квадратных неравенств.***

1. Решите неравенство:
а) $x^2-3x-4>0$; б) $x^2-5x-6\leqslant 0$; в) $x^2\geqslant 16$;
г) $x^2-7x+143>0$; д) $x^2-17x-143<0$; е) $x^2-18x+81>0$;
ж) $x^2-18x+81\leqslant 0$; з) $(3-5x)(x+11)<0$.
2. Решите неравенство:
а) $|x^2-7x+5|\leqslant 5$; б) $|x^2-3x|\leqslant x$;
в) $|x^2-3x|>x$; г) $|x^2-4x+1|<|x^2-1|$.
3. При каких значениях параметра a неравенство $x^2-3ax+1>0$ выполняется для всех действительных x?
4. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+5x+3>0$ выполняется при всех положительных x?
5. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+(3a^2-1)x-3>0$ выполняется при $x=1$?
6. При каких значениях параметра a все решения неравенства $x^2-3x-4<0$ являются решениями неравенства $x^2-a<0$?
7. При каких значениях параметра b все решения неравенства $x^2-5x+4\leqslant 0$ являются решениями неравенства $x^2-b^2>0$?

Серия 11. ***Графики функций.***

1. Постройте график функции:
а) $y=x^2$; б) $y=\frac{1}{x}$; в) $y=|x|$; г) $y=x^3$; д) $y=\sqrt{x}$;
е) $y=\sqrt[3]{x}$; ж) $y=\frac{1}{x^2}$; з) $y=\sqrt{1-x^2}$.
2. Постройте график функции:
а) $y=|x-1|+|x|$; б) $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$; в) $y=\frac{2x^2+3x}{|x|}$;
г) $y=\sqrt{x^2+4x+4}-2$; д) $y=\sqrt{4x^2+4x+1}+2|x|$.
3. Постройте график функции:
а) $y=x^2-6x+3$; б) $y=|x^2-6x+3|$;
в) $y=x^2-6|x|+3$; г) $y=|x^2-6|x|+3|$;
д) $y=|x^2-6x+3|-3$; е) $y=|x|(x-6)+3$;
ж) $y=x|x-6|+3$; з) $y=x^2-5x+|x-3|$;
и) $y=|x^2-5x|+x-3$; к) $y=|x-2|(|x|-3)-3$.

4. Постройте график функции:

а) $y=\frac{1}{x+2}$; б) $y=\frac{1}{x}-3$; в) $y=\frac{1}{x-3}+1$; г) $y=\frac{x-2}{x-3}$;

д) $y=\left|\frac{x-2}{x-3}\right|$; е) $y=\frac{|x|-2}{|x|-3}$; ж) $y=\left|\frac{|x|-2}{|x|-3}\right|$; з) $y=\frac{|x|-2}{x-3}$;

и) $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; к) $y=\left|x-\frac{3}{x+2}\right|+\frac{x^2+2x+3}{x+2}$.

5. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{x-2}$; б) $y=\sqrt{|x|-3}$;

в) $y=\sqrt{5-x}$; г) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$;

д) $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$; е) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

Серия 12. ***Замена переменной при решении уравнений.***

1. Решите уравнение:

а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $7x^4-x^2-6=0$; в) $3x^4-5x^2+2=0$.

2. Решите уравнение:

а) $(5x^2+x-1)^2-(5x^2+x-1)-2=0$;

б) $(3x^2-x-1)^2-18x^2+6x-1=0$.

3. Решите уравнение:

а) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$;

б) $x^2+5x+8+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$;

в) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$;

г) $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0$.

4. Решите уравнение:

а) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)=105$;

б) $x(x+1)(x+2)(x+3)=3$.

5. Решите уравнение:

а) $x^2+1+\frac{1}{x^2+1}=5{,}2$;

б) $\frac{3x+7}{5x-1}+\frac{5x-1}{3x+7}=5{,}2$;

в) $\frac{x^2+5x-1}{2x-1}+\frac{2x-1}{x^2+5x-1}=5{,}2$;

г) $\frac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\frac{15x-10}{2x^2-5x+4}=6$;

д) $\left(2-\frac{9x+1}{x^2+6x+1}\right)^2+\left(2+\frac{18x+2}{2x^2+3x+1}\right)^2=8$.

6. Решите уравнение:

а) $x^2-x(2a^2-a+2)+a^4-a^3-4a^2-11a-3=0$;

б) $x^4-x^3-2x^2(2+a)-x(11-a)+a^2-2a-3=0$.

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+5y=11, \\ 2x-3y=17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+5y=20, \\ 6x+10y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 20x-15y=51, \\ 4x-3y=10{,}2. \end{cases}$

2. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax-5y=a \\ 2x-10y=2 \end{cases}$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений?

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y=3, \\ x^2-3xy+5y^2=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+4y=12, \\ x^2+y^2=5{,}76; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x-12y=60, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

4. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 7x-24y=168 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$

а) имеет два решения;
б) имеет одно решение;
в) не имеет решений?

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+5xy+7y^2=31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x^2+3xy+5y^2=47; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0; \\ x^2+3xy+y^2=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=5, \\ 2x^2+xy-2y^2=-1. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+z+u=7, \\ x+y+z+t=11, \\ x+y+u+t=-5, \\ x+z+u+t=-13, \\ y+z+u+t=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}+u^{-1}=7, \\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}+t^{-1}=11, \\ x^{-1}+y^{-1}+u^{-1}+t^{-1}=-5, \\ x^{-1}+z^{-1}+u^{-1}+t^{-1}=-13, \\ y^{-1}+z^{-1}+u^{-1}+t^{-1}=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xyz=1, \\ xyt=2, \\ xtz=4, \\ yzt=27. \end{cases}$

7. При каких значениях a, b, c график функции $y=ax^2+bx+c$ проходит через точки $M(1;\ -3)$ и $N(6;\ -48)$ и имеет с осью абсцисс одну общую точку?

8. При каких значениях a и b выражения $\frac{3x^2+5x-1}{x^2-4x-5}$ и $3+\frac{a}{x+1}+$ $+\frac{b}{x-5}$ равны при всех допустимых значениях x?

9. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} y^2+2y(2+x)+(x^2+2x)(4-x^2)=0; \\ y-ax-3a=0 \end{cases}$$

имеет не менее трех различных решений?

Серия 14. ***Арифметическая прогрессия.***

1. Найдите сумму семи первых членов арифметической прогрессии, если $a_2=7$, $a_4=11$.
2. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии, если $a_5+a_6=11$.
3. Найдите наибольшую из возможных сумм n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1=137$, $a_2=121$.
4. Найдите последовательность общих членов двух арифметических прогрессий $-7, 11, 29, \ldots$ и $-3, 11, 25, \ldots$.
5. Докажите, что если сумма первых n членов последовательности задается формулой $S_n=3n^2+5n$, $n\in \boldsymbol{N}$, то эта последовательность является арифметической прогрессией.
6. Докажите, что если сумма первых n членов последовательности задается формулой $S_n=2n^2+7n+1$, $n\in \boldsymbol{N}$, то, начиная со второго члена, эта последовательность является арифметической прогрессией.
7. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия, $a_1=a$, $a_n=b$ $(a>0;\ b>0)$. Выразите через a, b и n сумму

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}.$$

8. Может ли среди членов бесконечной арифметической прогрессии быть:

   а) ровно одно целое число;

   б) ровно два целых числа;

   в) ровно одно иррациональное число?

Серия 15. ***Геометрическая прогрессия.***

1. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:

   а) $b_2=7$, $b_3=-1$; б) $b_3=2$; $b_5=8$;

   в) $b_{17}=-131$, $b_{185}=243$; г) $\begin{cases} b_2+b_3=7, \\ b_3+b_4=49. \end{cases}$

2. Между числами 5 и 25 вставьте еще семь членов геометрической прогрессии.
3. При каких значениях a корни уравнений $x^2-5x+4=0$ и $2x-a=0$ различны и составляют геометрическую прогрессию?
4. При каких значениях a корни уравнений $x^2-5x+a=0$ и $4x-1=0$ различны и составляют геометрическую прогрессию?
5. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots$ составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q. Выразите через a_1 и q:

   а) $a_1+a_2+a_3+\ldots$; б) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots$; в) $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots$.

6. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют геометрическую прогрессию. Выразите через a_1, n и q сумму:

а) $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$;

б) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$;

в) $(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\ldots+(a_n+1)^2$;

г) $\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\ldots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2$.

7. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если одно из них удвоить, то эти числа, взятые в том же порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если первое из них равно 1.

8. Три числа составляют арифметическую прогрессию, сумма которой равна 12. Если одно из них удвоить, то эти числа, взятые в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

9. Два положительных неравных числа являются первым и третьим членами арифметической и третьим и первым членами геометрической прогрессии. У какой из этих прогрессий сумма трех первых членов больше?

10. На графике функции $y=x^2$ взяты три точки, абсциссы которых составляют геометрическую прогрессию. Составят ли геометрическую прогрессию их ординаты?

11. На графике функции $y=x^2$ взяли три точки, абсциссы которых составили арифметическую, а ординаты — геометрическую прогрессию. Докажите, что по крайней мере одна из этих точек не имеет рациональной абсциссы.

*Серия 16. **Тригонометрические выражения.***

1. Найдите тригонометрические функции угла α, если:

а) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=-2\sqrt{6}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

2. Постройте на единичной окружности точки, указав их координаты:

а) $P_{\frac{\pi}{6}}$, $P_{\frac{5\pi}{6}}$, $P_{\frac{7\pi}{6}}$, $P_{\frac{11\pi}{6}}$;

б) $P_{\frac{\pi}{3}}$, $P_{\frac{2\pi}{3}}$, $P_{\frac{4\pi}{3}}$, $P_{\frac{5\pi}{3}}$;

в) $P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{3\pi}{4}}$, $P_{\frac{5\pi}{4}}$, $P_{\frac{7\pi}{4}}$.

3. Пусть α — угол I четверти. Постройте на единичной окружности точки, соответствующие углам:

а) $\alpha,\ \pi-\alpha,\ \pi+\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{3\pi}{2}-\alpha,\ \frac{3\pi}{2}+\alpha$;

б) $\alpha+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

в) $\pm\alpha+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

г) $\alpha+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$;

д) $(-1)^n\alpha+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

е) $\frac{\alpha+\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

4. При каких значениях a число $\frac{\pi}{6}$ является корнем уравнения $3\cos 6x+2\sin 5x+5\cos 4x-3\sin 3x+2\cos 2x-\sin^2 x=a$?

5. При каких значениях a и b числа $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$ являются корнями уравнения $a\cos^2 3x+b\cos 4x=\sin^2 x$?

6. Решите неравенство:

а) $x\cos 8>\cos 8$;

б) $x^2-x(\cos 4+\cos 3)+\cos 4\cos 3<0$.

7. Постройте график функции:

а) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

б) $y=\sin^2(\operatorname{ctg} x)+\cos^2(\operatorname{ctg} x)$;

в) $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}$;

г) $y=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.

8. Вычислите:

а) $\sin\frac{\pi}{36}\sin\frac{2\pi}{36}\sin\frac{3\pi}{36}\ldots\sin\frac{71\pi}{36}$;

б) $\cos\frac{\pi}{36}+\cos\frac{2\pi}{36}+\cos\frac{3\pi}{36}+\ldots+\cos\frac{35\pi}{36}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{72}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{72}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{72}\ldots\operatorname{tg}\frac{35\pi}{72}$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{72}+\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{72}+\ldots+\operatorname{ctg}\frac{71\pi}{72}$.

9. а) Задайте на микрокалькуляторе любое число. Найдите его синус, найдите синус того, что получится, и т. д. На каком шаге и на каком значении перестали меняться показания? Почему?

б) То же с косинусом.

ОБОБЩАЮЩИЕ ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ

Работа 1

1. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{2}\,(x-a)}{2x-a}-\left[\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

2. Автомобиль, идущий со скоростью 100 км/ч, выехал из пункта A в пункт B и в пункте C встретился с велосипедистом, выехавшим на полтора часа раньше из пункта B в пункт A со скоростью 10 км/ч. Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч больше, а скорость велосипедиста на 5 км/ч больше, то встреча произошла бы на 10 км ближе к пункту A. Найдите расстояние от B до C.
3. Найдите $\cos\alpha$, если $\cos(60°+\alpha)=-\frac{3}{5}$, $120°<\alpha<210°$.
4. Докажите, что при всех натуральных n, начиная с 5, $2^n>n^2$.
5. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $2(3-2x)\geqslant|y-x^2|+|y+x^2|$.

Работа 2

1. Упростите выражение

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+(\sqrt{x}+1)^2(1-\sqrt{x})^{-2}}:\left[\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1-\sqrt[4]{x})}-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1+\sqrt[4]{x})}\right]^{-2}-\frac{1}{2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}}.$$

2. Если велосипедист и мотоциклист выедут одновременно из двух пунктов навстречу друг другу, то они встретятся через 1 ч 20 мин. Если они выедут одновременно в одном направлении, то мотоциклист догонит велосипедиста через 4 ч. Найдите отношение скорости мотоциклиста к скорости велосипедиста.
3. $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sqrt{3}\sin 2\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}$.
4. Докажите, что $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$, $n\in \boldsymbol{N}$.
5. Решите уравнение

$$\left(|x|+2+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\sqrt{6}\right)\left(|x|+2+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\sqrt{5}\right)=0.$$

Работа 3

1. Вычислите $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ при $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a>0$, $b>0$.
2. Если второй каменщик начнет работу на 4,5 дня позже первого, то на всю работу уйдет 21 день. За сколько дней каждый из них может выполнить эту работу один, если у первого на это уйдет на 9 дней больше, чем у второго?
3. Упростите выражение
$$|\operatorname{tg}(\alpha+\pi)|\sin^4\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\sin^3\alpha\sqrt{1-\cos^2(\pi+\alpha)}.$$
Найдите его значение для каждого натурального n, если $\alpha=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$.
4. Докажите, что $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133, где $n\in\boldsymbol{N}$.
5. Решите уравнение $1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}$.

Работа 4

1. Упростите выражение $\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-0,5}-(x+1)^{-0,5}}$ при $x=\frac{a^2+1}{2a}$, где $0<a<1$.
2. Три бригады, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за a дней. Если сначала будет работать в течение двух дней одна первая бригада, а затем в течение одного дня вторая и третья, то выполненной окажется $\frac{1}{3}$ работы. За какое время может выполнить всю работу одна первая бригада? При каких значениях a задача имеет решения?
3. Упростите выражение
$$\frac{2\cos^2 2\alpha-\sqrt{3}\sin\left(4\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)-1}{2\cos^2\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}+\frac{\sin\left(4\left(\alpha+\frac{\pi}{24}\right)\right)}{\sin\left(4\left(\frac{\pi}{24}-\alpha\right)\right)}$$
и вычислите его значение, если это возможно, при $a=\frac{\pi}{7}$; $\alpha=\frac{13\pi}{24}$.
4. Пусть члены последовательности вычисляются по формуле $a_n=(2n+1)\cdot 3^n$. Докажите, что сумма первых n членов последовательности вычисляется по формуле $S_n=n\cdot 3^{n+1}$.
5. По двум взаимно перпендикулярным шоссе начинают двигаться по направлению к их пересечению две машины. Первая машина находится от места пересечения на расстоянии 60 км и движется со скоростью 40 км/ч, а вторая — на расстоя-

нии 40 км и движется со скоростью 30 км/ч. Через какое время расстояние между машинами станет минимальным? (Проехав место пересечения шоссе, каждая машина движется дальше.)

Работа 5

1. Упростите выражение
$$\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1+\frac{1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}\right]^{-2}:(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}).$$
2. В двух сосудах по 5 л каждый содержится раствор соли. Первый сосуд содержит 3 л $p\%$-ного раствора, а второй — 4 л $2p\%$-ного раствора одной и той же соли. Сколько литров надо перелить из второго сосуда в первый, чтобы получить в нем 10%-ный раствор соли? При каких значениях p задача имеет решение?
3. Вычислите без таблиц и микрокалькулятора
$$\sin^2 11°+\sin^2 131°+\sin^2 109°.$$
4. Докажите, что произведение любых четырех натуральных чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, сложенное с четвертой степенью разности этой прогрессии, есть полный квадрат.
5. Решите неравенство $\frac{11x-9}{x+5}\geqslant x$.

Работа 6

1. Упростите выражение
$$\frac{1-(m+x)^{-2}}{\left(1-\frac{1}{m+x}\right)^2}:\left(1-\frac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right)^{-1} \text{ при } x=\frac{1}{m-1}.$$
2. Двое рабочих, работая одновременно, выполняют некоторую работу за 15 мин. Сколько времени потребуется второму рабочему, чтобы одному выполнить эту работу, если известно, что один первый рабочий выполнил бы эту работу на m часов быстрее, чем второй?
3. $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите: 1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\sin 2\alpha$;
3) $\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha+3\cos\alpha}$.
4. Найдите такие целые числа n и m, чтобы $7n+3m=87$, а их сумма была наименьшей и положительной.
5. При каких значениях a корни уравнения $x^2-5x-6=0$ перемежаются с корнями уравнения $x^2-(8-5a)x-a-9=0$?

Работа 7

1. Упростите выражение

$$\left(x+a^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1-\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\sqrt[10]{(x-a)^3}.$$

2. Моторная лодка прошла 60 км против течения реки и 60 км по течению реки, затратив на путь против течения на 50 мин больше, чем на путь по течению. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 21 км/ч.
3. Вычислите без таблиц и микрокалькулятора

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

4. Если к четырем последовательным членам арифметической прогрессии прибавить соответственно 7; 1; -3; -6, то получим четыре первых члена бесконечной геометрической прогрессии. Найдите ее сумму.
5. При каких значениях a множества значений функций $y=ax^2-4x-3$ и $y=x^2+2ax-6$ совпадают?

Работа 8

1. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ при $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$, $a>0$, $0<b<1$.
2. Если двузначное число разделить на некоторое целое число, то в частном получится 4, а в остатке 6. Если же в делимом поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 3, а в остатке 9. Найдите первоначальное двузначное число.
3. Докажите, что выражение $\dfrac{\sin 3x}{1-2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)}$ не принимает значения $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ни при каких значениях x.
4. Сумма квадратов членов бесконечной геометрической прогрессии в 3 раза больше суммы ее членов и в 3,6 раза меньше суммы четвертых степеней ее членов. Найдите второй член прогрессии.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x^2+3xy+8y^2=6, \\ x^2+xy+y^2=1. \end{cases}$

Работа 9

1. Упростите выражение

$$b\left(\left(\frac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})-\sqrt[4]{a}\right)^{-4}.$$

2. Двое рабочих, работая последовательно один за другим, выполнили некоторую работу. Первый работал $\frac{5}{9}$ того времени, которое необходимо второму для выполнения одному всей работы. Если бы они работали вдвоем одновременно, то окончили бы работу на 6 ч 40 мин раньше, причем первый выполнил бы $\frac{4}{5}$ той работы, которую на самом деле сделал второй. За сколько времени каждый из них в отдельности мог бы выполнить всю эту работу?
3. Вычислите без таблиц и микрокалькулятора

$$8\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ.$$

4. Сумма первых n членов некоторой последовательности выражается формулой $S_n=5n^2-7n+3$. Докажите, что члены этой последовательности, начиная со второго, образуют арифметическую прогрессию.
5. Найдите площадь фигуры, заданной соотношением

$$|3x-5|+|2y+7|\leqslant 6.$$

Работа 10

1. Упростите выражение

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b)(b^{-0,5}+3a^{-0,5})^{-1}}:\frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{b^{-0,5}+a^{-0,5}}.$$

2. Две трубы вместе наполняют бассейн за 6 ч. Определите, за сколько часов наполняет бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что из первой трубы в час вытекает на 50% больше воды, чем из второй.
3. Найдите множество значений выражения

$$\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha.$$

4. Найдите наименьший и наименьший по модулю члены последовательности $a_n=3n^2-118n+115$.
5. Для каждого значения a решите неравенство $\frac{ax}{x-1}>1$.

Работа 11

1. Решите уравнение

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\leqslant\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

3. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно, расстояние между которыми 56 км. Через 2 ч они встречаются и без остановки продолжают двигаться в прежних направлениях с прежней скоростью. Определите скорость каждого велосипедиста, если первый прибыл в B на 1 ч 10 мин раньше, чем второй прибыл в A.
4. Найдите $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, если $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$ и $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{4}$.
5. Упростив выражение для $f(x)$, постройте график этой функции:

$$f(x)=\left(\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^{-2}\left(\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)}+1\right)\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)^{-1}.$$

Работа 12

1. Докажите методом математической индукции равенство

$$1\cdot2+2\cdot5+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1).$$

2. Решите неравенство

$$\frac{|x-10|}{x^2-3x-2}\geqslant\frac{|x-10|}{x^2-4x-5}.$$

3. Найдите $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$ и $180°<\alpha+\beta<360°$.
4. Дорога из села в город сначала идет в гору, а затем под уклон. Велосипедист проехал этот путь за 5 ч, а обратно за 5 ч 30 мин. Определите расстояние от города до села, если путь в гору (от села) на 30 км меньше спуска, а скорость на спуске на 5 км/ч больше, чем на подъеме.
5. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\,(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}.$$

Работа 13

1. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством
$$|x-3|+2|y|\leqslant 6.$$

2. Три первых члена геометрической прогрессии являются первым, четвертым и двадцать пятым членами возрастающей арифметической прогрессии. Найдите эти числа, если их сумма равна 114.

3. Найдите $\cos\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{5\alpha}{4}$, если $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{7}$, и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

4. Упростите выражение
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2a-1}}-\sqrt{2a+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{2a+1}}-\frac{1}{\sqrt{2a-1}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{4a^2-1}}{(2a-1)\sqrt{2a+1}-(2a+1)\sqrt{2a-1}}\right)^{-1}.$$

5. Смешали 30%-ный и 10%-ный раствор соляной кислоты и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Работа 14

1. От пункта A до пункта B по реке 24 км. С какой скоростью должна идти лодка, чтобы на путь туда и обратно затратить не менее 7 и не более 10 ч, если скорость течения 1 км/ч? (В ответе укажите скорость лодки в стоячей воде.)
2. Вычислите без таблиц и микрокалькулятора
$$\frac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ\cos 60^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ\sin 150^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}.$$

3. В сберегательный банк поместили некоторую сумму, и через 2 года она возросла на 512 р. 50 к. Сколько денег было положено в банк, если вкладчикам выплачивается 5% годовых?

4. Докажите, что все решения неравенства $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8}\leqslant 0$ являются решениями неравенства $\frac{12+x-x^2}{x^2-10x+25}\geqslant 0$.

5. Девятый и девяносто второй члены некоторой арифметической прогрессии являются соответственно семьдесят третьим и пятым членами другой арифметической прогрессии. Найдите отношение разности первой прогрессии к разности второй прогрессии.

Работа 15

1. При каких значениях a все решения неравенства $x^2-1\leqslant 0$ являются решениями неравенства $x^2+ax-11\leqslant 0$?
2. Сложили три различных четырехзначных числа, записанных одними и теми же цифрами. Докажите, что данная сумма всегда делится на 3.
3. Двое рабочих изготовляют вместе за 8 ч 136 деталей. Если бы первый рабочий делал на 2 детали в час меньше, а второй на одну деталь больше, то на изготовление одной детали второй рабочий тратил бы на 4 мин меньше, чем первый. Сколько деталей в час изготовляет первый рабочий?
4. Найдите $\cos 2\alpha$, если $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$.
5. Решите уравнение

$$13x-3x^2-\frac{x}{\sqrt{x-1}}-\frac{4-x}{\sqrt{x-1}}+|4-x|=3x|4-x|-\frac{4}{\sqrt{x-1}}+4.$$

Работа 16

1. Решите неравенство $\frac{1}{2x}\geqslant\frac{1}{1-x}$.
2. Найдите $\dfrac{\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, если $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.
3. На заводе рабочий день уменьшился с 8 до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы количество продукции за день работы увеличилось более чем на 5%?
4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 64, а сумма ее первых трех членов равна 65. Найдите третий член прогрессии.
5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}3x-2y=a,\\ x^2+y^2=9\end{cases}$ имеет единственное решение?

Работа 17

1. Решите неравенство $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}\geqslant 2$.
2. Из точек A и B, расстояние между которыми по прямой равно 1 м, начинают одновременно двигаться в одном направлении два тела. Первое тело движется с постоянной скоростью

из точки A, а второе — с начальной скоростью 16 м/с и с некоторым постоянным ускорением. Известно, что через 1 с после начала движения второе тело находилось от точки A на расстоянии не большем, чем 15 м, а еще через 1 с — не меньшем, чем 25 м. Определите скорость первого тела, если через 3 с после начала движения расстояние между телами составило 2 м.

3. Докажите, что для углов любого треугольника ABC справедливо равенство $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

4. Докажите, что $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot 223}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 224}<\frac{1}{15}$.

5. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $6\cos^2\alpha+\sin\alpha-5=0$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

Работа 18

1. Упростите выражение

$$\left((x-y)\cdot\frac{x-\dfrac{x^2y-y^2}{x+y+xy}}{x+y-\dfrac{xy}{x+y}}-\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2+x^2y+xy^2}\right):\frac{x^3+x^2y-x^2-xy^2-y^3+y^2}{x+xy+y}.$$

2. Перемножили все двузначные числа. На какую наибольшую степень числа 3 делится это произведение?

3. Пусть $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{11}}$, $\sin\gamma=\frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$. Найдите:

а) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; б) $\alpha+\beta+\gamma$.

4. Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив это время между собой поровну. Известно, что во второй бригаде 3 девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по 1 ч, а остальное время юноши распределили между собой поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше девяти часов. Сколько человек в каждой бригаде?

5. Вершины M и F прямоугольника $KNFM$ лежат на оси Ox, а K и N — на параболе $y=1-0{,}25x^2$. Длина диагонали $MN=\frac{4}{9}\sqrt{13}$. Найдите площадь прямоугольника.

Работа 19

1. Пусть $a-\frac{1}{a}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$. Найдите $a^4+\frac{1}{a^4}$.
2. Найдите два натуральных числа, разность кубов которых равна 127.
3. Величины углов образуют арифметическую прогрессию 5°; 10°; 15°; ... . Какое наименьшее число членов этой последовательности, начиная с первого, надо взять, чтобы сумма их косинусов была равна нулю?
4. Постройте график функции $y=\frac{2x}{|x-1|+|x+1|}$.
5. Решите неравенство $x^2-(\sqrt[5]{5}+\sqrt{2})\,x+\sqrt[10]{800}<0$.

Работа 20

1. Докажите, что $\sin\frac{39\pi}{160}+\cos\frac{39\pi}{160}<\sqrt{2}$.
2. На покупку тетрадей в клетку и в линейку можно затратить не более 1 р. 40 к. Тетрадь в клетку стоит 3 к., в линейку — 2 к. Число купленных тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более чем на 9. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество тетрадей, при этом тетрадей в линейку нужно купить как можно меньше. Сколько тетрадей в клетку и сколько в линейку можно купить при указанных условиях?
3. При каких целых значениях a неравенство $\frac{4x^2-x(2a-9)+30}{x^2+3x+7}>0$ выполняется при всех x?
4. Даны прогрессии 0; 5; 10; 15; ... и -2; 5; 12; 19; ... . Найдите сумму десяти первых чисел, являющихся их общими членами.
5. Постройте график функции $y=|x^2-x|-3x$.

ТЕКСТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ ДЛЯ IX КЛАССОВ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

1991 год

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{25{,}3^3-13{,}7^3}{11{,}6}+13{,}7\cdot 25{,}3$.
2. Решите уравнение $\frac{x-5}{|x-1|-4}=1$.
3. Решите неравенство $\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x^2+x-12}\leqslant 0$.
4. Докажите утверждение $\frac{\cos(170^\circ+\alpha)-\sin(100^\circ-\alpha)}{\sin(280^\circ-\alpha)}=2$.
5. Расстояние 450 км один из поездов проходит на 1,5 ч быстрее другого. Найдите скорость каждого поезда, если известно, что первый проходит 240 км за то же время, что второй проходит 200 км.

Вариант 2

1. Выполните действия $\frac{82{,}6^3+31{,}6^3}{114{,}2}-82{,}6\cdot 31{,}6$.
2. Решите уравнение $\frac{7+x}{|x+1|-6}=-1$.
3. Решите неравенство $\frac{x^2-7x+10}{(x+3)(x^2-3x+10)}\geqslant 0$.
4. Докажите утверждение $\frac{\sin(290^\circ+\alpha)-\cos(340^\circ-\alpha)}{\sin(110^\circ+\alpha)}=-2$.
5. Расстояние, равное 840 км, один из поездов проходит на 2 ч быстрее другого. В то время как первый поезд проходит 63 км, второй проходит 54 км. Сколько времени тратит каждый поезд на прохождение этого расстояния?

1993 год

Вариант 1

Работа 1

1. Решите уравнение $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{x+1}$.
2. Докажите утверждение $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ=1$.
3. Упростив выражение, сравните полученное число с нулем: $(2\sqrt{6}-5)^2-10\sqrt{49-20\sqrt{6}}+1$.
4. Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2+2x-1 \text{ при } x<1, \\ \frac{4}{x+1} \text{ при } x\geqslant 1 \end{cases}$ и, ис-

пользуя его, определите область значений функции и все целые значения, принимаемые функцией ровно в двух различных точках.

5. Два пешехода идут с постоянными скоростями навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 15 км. Второй вышел из B на 1 ч 15 мин позже, чем первый из A, и до встречи находился в пути 45 мин. Прибыв в B, первый пешеход сразу повернул обратно. Какова скорость первого пешехода, если в A он пришел одновременно со вторым пешеходом?
6. Найдите наибольшее c, при котором система

$\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=6, \\ x-2y=c \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\dfrac{4}{x^2+6x+9}+\dfrac{6}{9-x^2}=\dfrac{1}{x-3}$.
2. Докажите утверждение $4\cos 36^\circ \cos 72^\circ=1$.
3. Упростив выражение, сравните полученное число с нулем: $(4-3\sqrt{2})^2+8\sqrt{34-24\sqrt{2}}-2$.
4. Постройте график функции $y=\begin{cases} \dfrac{2}{x-3} \text{ при } x\leqslant 2, \\ -x^2+8x-14 \text{ при } x>2 \end{cases}$ и, используя его, определите область значений функции и все целые значения, принимаемые функцией ровно в трех различных точках.
5. Из пункта M в пункт K, расстояние между которыми 260 км, одновременно выехали автомобиль и автобус. Доехав до K, автомобиль сразу повернул обратно и встретил автобус через 4 ч после своего выезда из M. Найдите скорость автобуса, если он прибыл в K на 1 ч 18 мин раньше, чем автомобиль в M. (Скорость автомобиля и автобуса считать постоянными.)
6. Найдите наименьшее a, при котором система уравнений

$\begin{cases} y-x+a=0, \\ 2x^2-3x+y^2+y=17 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

Вариант 1

Работа 2

1. Упростите выражение $\left(\dfrac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}-2x^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\dfrac{1+x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{2}{3}}}$.

2. Докажите утверждение $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\alpha\right|\geqslant 1$.

3. Решите уравнение $\dfrac{1}{x-3+\frac{8}{x}}-\dfrac{1}{x+2+\frac{8}{x}}=\dfrac{5}{24}$.

4. При каких значениях n сумма первых n членов арифметической прогрессии 7; 11; ... не превосходит 375?

5. При изготовлении первой партии деталей мастер в течение 1 ч работал один, после чего к нему присоединился ученик, и через 4,5 ч после начала работы мастера работа была выполнена.

   При изготовлении второй партии деталей, в 1,5 раза большей, чем первая, ученик начал помогать мастеру через 40 мин после начала работы последнего. По окончании работы выяснилось, что мастер изготовил в 2,6 раза больше деталей, чем ученик. Считая производительности мастера и ученика постоянными, определите, за сколько часов мастер, работая один, изготовит первую партию деталей.

6. Изобразите на координатной плоскости область, задаваемую неравенствами $y\geqslant 2x^2+4x-1$ и $x+y\leqslant 2$, и аналитически найдите такое p, при котором отрезок прямой $x=p$, лежащей внутри области, имеет наибольшую длину.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\left(1+2a^{\frac{2}{3}}-\dfrac{a+a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+1}\right)\cdot\dfrac{1-a^{\frac{2}{3}}}{1-a^{\frac{4}{3}}}$.

2. Докажите утверждение $\left|\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right|\geqslant 1$.

3. Решите уравнение $(x^2+x-2)(x^2+x-12)=144$.

4. При каких значениях n сумма первых n членов арифметической прогрессии 19; 13; ... не меньше -240?

5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, а в тот момент времени, когда он прошел $\frac{1}{3}$ пути, из B в A выехал велосипедист. Встреча между ними произошла через 1 ч 30 мин после выезда велосипедиста. Если бы велосипедист выехал из B спустя 2 ч после выхода пешехода из A, то к моменту встречи он проделал бы расстояние в 1,4 раза большее, чем пешеход. Считая скорости пешехода и велосипедиста постоянными, найдите время, за которое пешеход пройдет расстояние от A до B.

6. Изобразите на координатной плоскости область, занимаемую неравенствами $y-2x\geqslant 5$ и $y+x^2+4x\leqslant 0$, и аналитически найдите такое a, при котором отрезок прямой $x=a$, лежащей внутри области, имеет наибольшую длину.

Оценка «5» ставится за любые пять верно выполненных заданий.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1

1.1. 2. **1.2.** 69. **1.3.** $-140{,}6$. **1.4.** $-1\frac{5}{6}$. **1.5.** 1. **1.6.** $36\frac{1}{6}$. **1.7.** 24,875. **1.8.** 25. **1.9.** 5. **1.10.** е) $\frac{5}{34}$; ж) $\frac{5}{16}$; з) $\frac{5}{69}$. **1.17.** $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}2\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}1$. **1.18.** $\underbrace{99\ldots9}_{n-1\text{ раз}}8\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ раз}}1$. **1.19.** а) 4 и 5; б) 24 и 25; в) 375 и 376; г) таких нет. **1.20.** а) 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89; б) 81, 92; в) 12, 24, 36, 48. **1.21.** а) 2893; б) 4000; в) 4001. **1.22.** 555000; 500055. **1.24.** г) 301; д) 2408; е) 2017. **1.25.** а) 7; б) 3,5; в) 47; г) 18. **1.26.** а) $2\frac{4}{9}$; б) $2\frac{8}{27}$; в) $7\frac{199}{729}$. **1.27.** а) 12; б) 9, 3, 1, 5. **1.28.** а) 240 км; б) 40 км/ч; в) 10 ч; г) 48 км/ч. **1.29.** На расстоянии 4 км от A. **1.30.** а) 6; б) 2; в) 2; г) 1776; д) да. **1.42.** г) $|a|=1$, $b\neq0$; з) $a>0$, $b=0$; и) $a\leqslant0$, $b\leqslant0$. **1.43.** 12,5%. **1.44.** 1300 г. **1.45.** Снизилась на 4%. **1.46.** Снизилось на 4%. **1.47.** Они равны. **1.48.** -2, 1. **1.51.** $-\frac{10}{41}$. **1.56.** 0,625. **1.57.** Нет решений. **1.59.** $1\frac{2}{3}$. **1.60.** $-2{,}25$. **1.61.** а) За 1 день; б) за $3\frac{2}{3}$ дня; в) одинаково; г) 22 р. 50 к.— Пете, 15 р.— Коле, 7 р. 50 к.— Васе; д) 33 р. 75 к.— Пете, 7 р. 50 к.— Коле, 3 р. 75 к.— Васе; е) 15 р.— Пете, 25 р.— Коле, 5 р.— Васе; ж) 18 р. 75 к.— Пете, 12 р. 50 к.— Коле, 13 р. 75 к.— Васе; з) 13 р. 50 к.— Пете, 24 р.— Коле, 7 р. 50 к.— Васе.

§ 2

2.1. а) $2a$; б) $4b$; д) a^3; ж) b^5-32. **2.3.** а) 8; б) -1. **2.4.** а) $(a^2-a-1)(a^2-a+1)$. Указание. $a^4-2a^3+a^2-1=(a^2-a)^2-1$; б) $(b^2-b-1)(b^2+b+1)$. Указание. $b^4-b^2-2b-1=(b^2)^2-(b+1)^2$; в) $(c^4-c^2-1)\cdot(c^2+c+1)(c^2-c+1)$. **2.5.** а) $(a+b+1)(a-b+1)$; б) $(2a-1)(2b-1)$. **2.8.** а) $(n^2-2n-4)(n^2+2n-4)$. Указание. $n^4-12n^2+16=n^4-8n^2+16-4n^2=(n^2-4)^2-(2n)^2$; б) $(m^2+2m+3)\times\times(m^2-2m+3)$; в) $(p^2+6p+18)(p^2-6p+18)$. Указание. $p^4+324=p^4+36p^2+{}+324-36p^2=(p^2+18)^2-(6p)^2$. **2.9.** а) $(x^2+1)\cdot(x^2-x-1)$; б) $(y^2+2y+2)\times\times(y^2-2y+2)(y^4-y^2-4)$. **2.10.** а) $(b-a)(b+2a-1)$; б) $4a(b+1)$; в) $(a-b+1)\times\times(a-b-1)$; г) $4a(a+2)$. **2.12.** 174. Решение. $12^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+{}+2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2+2(-15)$, откуда $a^2+b^2+c^2=174$. **2.13.** -23. **2.14.** а) $(a+b+3c)\cdot(a+b-c)$; б) $(1+a-b+c)(1-a+b-c)$. **2.15.** а) $(x+z)\times\times(x+y)(y-z)$; б) $(a-b)(c-a)(b-c)$. **2.16.** $(x+y)(y+z)(z+x)$. **2.17.** $(a+b)\times\times(b+c)(c+a)$. **2.18.** $-3(x+y)(y+z)(z+x)$. **2.20.** $a^{64}-b^{64}$. Указание. Умножьте данное выражение на $a-b$ и 6 раз последовательно примените формулу разности квадратов. **2.21.** -1. Указание. Исходное выражение тождественно равно $(2a-3b)^2-1$. **2.22.** 4. **2.23.** 1; $a=b=1$. **2.24.** 4; $a=b=2$. **2.25.** Решение. Умножим обе части данного равенства на 2, перенесем все слагаемые в левую часть и после группировки получим $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$. Поскольку каждое слагаемое неотрицательно, то сумма их равна 0 тогда и только тогда, когда $x-y=y-z=z-x=0$, т. е. $x=y=z$. **2.27.** в) $x\neq\pm1$; $x\neq0$. **2.28.** в) $a\neq1{,}5$, $a\neq-0{,}25$; г) $b\neq0$, $b\neq\pm3$. **2.29.** а) $x\neq-2$, $x\neq0$; б) $y\neq\frac{3}{7}$. **2.30.** а) $a\neq2$, $a\neq4$. Указание. $a^2-6a+8=a^2-2a-(4a-8)=(a-2)(a-4)$; б) $b\neq-3$, $b\neq0{,}5$. **2.31.** а) $x\neq\pm0{,}75y^2$; б) $x\neq y$, $x\neq-6y$; в) $a+b\neq3$, $a-b\neq3$. **2.32.** а) 0,16; б) $0{,}64\ b^2$. **2.33.** а) $-\frac{16x^2+12xy^2+9y^4}{4x+3y^2}$; б) $\frac{a^{11}+1}{a^{11}}$. **2.34.** а) $\frac{1}{a^2+a+1}$. Указание. $a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2=(a^2-a+1)(a^2+a+1)$; б) b^2+2b+2. Указание. $b^4+4=(b^2+2)^2-(2b)^2=(b^2+2b+2)(b^2-2b+2)$. **2.35.** а) $\frac{c-a-b}{a+b+c}$; б) $\frac{x^n}{x-2}$. **2.36.** а) $\frac{(c^2-2)(c-1)}{c^4-c^3+c^2-c+1}$; б) $x^{32}+x^{16}+1$. Решение. 1-й способ. $\frac{x^{47}+x^{46}+\ldots+x+1}{x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1}=$

$$=\frac{(x^{47}+\ldots x^{32})+(x^{31}+\ldots+x^{16})+(x^{15}+\ldots+x+1)}{x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1}=$$

$$=\frac{x^{32}(x^{15}+\ldots+x+1)+x^{16}(x^{15}+\ldots+x+1)+(x^{15}+\ldots+x+1)}{x^{15}+x^{14}+\ldots+x+1}=$$

$$=\frac{(x^{15}+\ldots+x+1)(x^{32}+x^{16}+1)}{x^{15}+\ldots+x+1}=x^{32}+x^{16}+1.$$

2-й способ. Умножая числитель и знаменатель исходной дроби на $x-1$ и используя формулу разложения на множители выражения x^n-1, получим $\frac{x^{48}-1}{x^{16}-1}=\frac{(x^{16})^3-1}{x^{16}-1}=x^{32}+x^{16}+1$. **2.37.** а) a^2+3a; $-2{,}21$ при $a=-1{,}3$; значение дроби не существует при $a=-2$ и при $a=3$; б) $(b+1)(b^4-b^2+1)$; -13 при $b=-2$, значение дроби не существует при $b=1$. **2.38.** $\frac{a+b+c}{2}$. **2.39.** а) -4; б) 17. **2.40.** в) $x+4$. **2.42.** Указание. Выражение тождественно равно $\frac{x^4}{(2y+x)^2}$. **2.43.** $\frac{m}{n(m-n)}$. **2.44.** $\frac{6xy(2x+3y)}{8y-2x}$. **2.45.** $\frac{1}{(b-a)(b-c)}$. **2.46.** $\frac{11a+b}{6(a-b)}$. **2.47.** 1,5. **2.48.** $-\frac{1}{x+2}$. **2.49.** $\frac{1}{x-3}$. **2.50.** а) -1; б) $\frac{3}{2(x-2)}$; в) $\frac{a(b-a+5)}{(a-b)^2}$; г) $\frac{4-a-b}{a^2-ab}$. **2.51.** а) $a^{15}b^{15}$; б) a^4b^{17}. **2.52.** а) $\frac{(3a-4b)(b+2)}{b-2}$; б) $\frac{a-b^2}{c^2}$; в) $\frac{2c-b}{b+2c}$; г) $\frac{x^2-x-1}{x-3}$. **2.53.** $\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$. **2.54.** $\frac{x+2y}{2x-y}$. **2.55.** $\frac{x-y-1}{x+2y}$. Указание. $x^2-xy+4x-5y-5=x^2-xy-x+5x-5y-5=x(x-y-1)+5(x-y-1)=$ $=(x-y-1)(x+5)$. **2.56.** x^6-8. Указание. $x^8-16=(x^4-4)(x^4+4)=(x^2-2)\times$ $\times(x^2+2)((x^2+2)^2-(2x)^2)=(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, $x^4-2x^3+4x^2-$ $-4x+4=(x^2+2)^2-2x(x+2)=(x^2+2)(x^2-2x+2)$. **2.57.** а) $-2a-3$; б) $a+b$; в) $a-c$. **2.59.** -4. **2.60.** $-\frac{1}{2m}$. **2.61.** $\frac{1}{x+2}$. **2.62.** $\frac{a+2}{(a-2)(a-1)}$. **2.63.** $\frac{1}{x+y}$. **2.64.** $0{,}5a(a+c-b)$; 1,2. **2.66.** Указание. На множестве допустимых значений переменных исходное выражение тождественно равно $-(b+1)^2$. **2.67.** Указание. Данное выражение тождественно равно $\frac{64}{1-a^{64}}$. **2.68.** а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{9}{22}$; в) $\frac{2}{19}$. **2.73.** 4. **2.74.** -9, -3, 5. **2.75.** $n\geqslant4$. **2.76.** $n=4k-1$, где k — натуральное, $n\neq7$. **2.77.** а) $a=\frac{1}{7}$, $b=-\frac{1}{7}$; б) $a=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$. **2.78.** а) $\frac{5}{x(x+5)}$; б) $\frac{5}{x(x+15)}$.

3.6. Решение. $n^2+n=n(n+1)$ — произведенне двух последовательных целых чисел, значит, одно из них четное, т. е. делится на 2. **3.7.** Указание. Сгруппировав первое и последнее слагаемое, второе и предпоследнее и т. д., воспользуйтесь формулой суммы кубов. **3.8.** Решение. $1^3+2^3+\ldots+9^3=(1^3+9^3)+$ $+(2^3+8^3)+(3^3+7^3)+(4^3+6^3)+5^3=10n+125$ не делится на 10. **3.9.** Решенне. Если одно из чисел m или n четное, то mn, значит, и $mn(m+n)$ — четное. Если же оба числа нечетные, то $m+n$, значит, и $mn(m+n)$ — четное. **3.10.** Указаине. Число делится на 111, значит, н на 37. **3.12.** Указание. Если $a+\frac{1}{a}=k$, то $a^2+\frac{1}{a^2}=k^2-2$, $a^3+\frac{1}{a^3}=k^3-3k$. **3.13.** Решение. $ad+bc=$ $=(a+c)(b+d)-(ab+cd)$, поскольку уменьшаемое делится на $a+c$, вычитаемое делится иа $a+c$ по условию, то разность, т. е. $ad+bc$, делится на $a+c$. **3.14.** Нет. Решение. Пусть каждый нз 27 учеников дружит ровно с девятью одноклассникамн, тогда количество дружащих пар равно $\frac{27\cdot 9}{2}$ — не целое число. **3.19.** Нет. **3.20.** Нет. Указание. Если предположить, что $3k=12q+2$, где k и q — целые, то отсюда следует, что 2 делится на 3. **3.23.** 3. **3.24.** 4. **3.25.** $12n-3$, $n\in \boldsymbol{N}$. **3.28.** 1. **3.29.** Решение. Так как n не кратно 2, то $n=2k+1$ и $n^2-1=(n+1)(n-1)=$ $=4k(k+1)$. Поскольку $k(k+1)$ делится на 2, то n^2-1 делится на 8. Так как n не кратно 3, то лнбо $n+1$, либо $n-1$ кратно 3, т. е. n^2-1 кратно 3. Следовательно, n^2-1 кратно 24, т. е. $n^2=24m+1$. **3.31.** 4. **3.32.** $15n+13$. **3.33.** 7. Указание. 10! делится на 42. **3.34.** 7. **3.35.** 11. **3.36.** а) 7; б) 1. **3.37.** Нет. **3.39.** Указание. $m^2-n^2=(m^2-1)-(n^2-1)$. Далее воспользуйтесь № 38. **3.40.** б) Указание. $n^2+3n=n(n+1)+2n$. Далее используйте № 40, *а*. **3.42.** б) Указание. $n^3+11n=(n^3-n)+12n$. Далее используйте № 42, *а*. **3.46.** а) Решение. Пусть существует $a\in \boldsymbol{Z}$ такое, что $a^2=3n-1$. Ясно, что a не кратно 3 (в противном случае левая часть равенства кратна 3, а правая нет). Тогда $a=3k\pm1$, где $k\in \boldsymbol{Z}$. Имеем $(3k\pm1)^2=3n-1$, откуда $3(3k^2\pm2k-n)=-2$. Пришли к противоречию, так как левая часть равенства — целое число, кратное 3, а правая нет. **3.47.** 31. Решение. Поскольку три данных числа дают равные остатки при делении на n, то $2146-1991=155$ делится на n, $1991-1805=186$ делится на n. Значит, $186-155=31$ кратно n, но $n>1$, а 31 — простое чнсло, значит $n=31$. **3.49.** а) Решенне. $n^2+n+9=(n+3)(n-2)+15$. Если $n+3$ кратно 5, то и $n-2$ кратно 5, отсюда $(n+3)(n-2)$ кратно 25 и $(n+3)(n-2)+15$ не кратно 25. Если же $n+3$ не кратно 5, то и $n-2$ не кратно 5, тогда $(n+3)(n-2)$ не кратно 5 и $(n+3)(n-2)+15$ не делится на 5, значит, и на 25; б) Указание. $n^2+n+9=$ $=(n+4)(n-3)+21$. **3.50.** Указание. $n^2+5n+16=(n-4)^2+13n$. **3.51.** Да. **3.55.** $n\in \boldsymbol{N}$. **3.57.** $n\in \boldsymbol{N}$. Решенне. $n^6+2n^5-n^2-2n=n^5(n+2)-n(n+2)=(n+2)$ $\times(n^5-n)=(n-1)n(n+1)(n+2)(n^2+1)$. Заметим, что $n-1$, n, $n+1$ и $n+2$ — четыре последовательных натуральных числа при $n>1$ (если $n=1$, то данное число делится на 120, поскольку в этом случае оно равно 0). Значит, по крайней мере одно из них кратно 3 и два из них — последовательные четные числа, одно из которых делится на 2, другое — на 4. Итак, $(n-1)n(n+1)(n+2)$ делится на 3 и на 8. Если при делении n на 5 остаток равен 0, 1, 3 или 4, то число n, $n-1$, $n+2$ и $n+1$ соответственно делится на 5. Еслн же $n=5q+2$, где $q\geqslant 0$ — целое, то $n^2+1=25q^2+20q+5$ кратно 5. Таким образом, $(n-1)n(n+1)(n+2)(n^2+1)$

делится на 5. Поскольку числа 3, 5 и 8 взаимно простые, то даиое число делится и на их произведеиие, т. е. иа 120. **3.61.** Р е ш е и и е. Число n не является четиым числом, так как n и 6 взаимно просты. $n^2-1=(n-1)(n+1)$ — произведение двух последовательных четных чисел, поэтому n^2-1 кратно 8. Число n не кратно 3, так как n и 6 взаимио просты, значит, $n-1$ или $n+1$ кратно 3. Итак, n^2-1 делится иа 3. Числа 3 и 8 взаимно просты, поэтому n^2-1 делится на 24 (их произведение), т. е. $n^2=24m+1$. **3.63.** а) 2; б) 3; в) 2; г) 5. **3.65.** 14 и 21. **3.67.** 3. Р е ш е н и е. Поскольку сумма цифр каждого рассматриваемого шестизначного числа равиа 21, то каждое из чисел кратно 3, ио не кратно 9. Заметим, что $123465-123456=9$, значит, НОД является делителем числа 9. Таким образом, НОД равен 3. **3.69.** 11. **3.70.** 232 и 231. **3.71.** У к а з а н и е. Предположив противное, имеем n^2-1 — простое число. **3.72.** 13, 17 и 19. **3.73.** в) Р е ш е н и е. Поскольку $p>3$ — простое, то p — нечетное; $p^2-1=(p-1)(p+1)$ — произведение двух последовательных четных чисел, поэтому делится на 8. Рассмотрим числа $p-1$, p, $p+1$. Это три последовательных целых чнсла, значит, одно из них кратно 3, этим числом не может быть число p, так как оно простое и больше 3. Значнт, p^2-1 кратно 3. Следовательно, p^2-1 кратно 24, так как 3 и 8 взаимно просты. **3.81.** 5. У к а з а н и е. Используйте то, что единственным четным простым числом является число 2. **3.82.** Р е ш е н и е. $2^{10}+5^{12}=(2^5+5^6)^2-2\cdot 2^5\cdot 5^6=(2^5+5^6)^2-$ $-10^6=(2^5+5^6-10^3)(2^5+5^6+10^3)$. Итак, даиное число разложено на два миожителя, каждый из которых больше 1. **3.83.** Р е ш е н и е. Число $p>3$ — простое, зиачит, $p=6k\pm 1$, $k\in \boldsymbol{N}$ (см. № 73, *а*). Тогда $2p+1=12k\pm 2+1$, но по условию $2p+1$ — простое, следовательно, $2p+1=12k-1$ и $p=6k-1$, тогда $4p+1=$ $=3(8k-1)$ — составиое. **3.84.** 3. У к а з а н и е. Проверьте $p=2$ и $p=3$. Используя утверждение № 73, покажите, что $8p^2+1$ делится на 3 при $p>3$. **3.85.** 6. Р е ш е н и е. Число оканчивается цифрой 1 или 6, поскольку n^3-1 кратно 5. Значит, $n=5k+1$, $k\in \boldsymbol{N}$; тогда $0{,}2(n^3-1)=0{,}2(125k^3+75k^2+15k)=k(25k^2+$ $+15k+3)$ — простое число лишь при $k=1$. **3.86.** Р е ш е н и е. Пусть p — наибольшее простое число. Выпишем все простые числа 2, 3, 5, ..., p и рассмотрим число $n=2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot p+1$ (произведение всех простых чисел, увеличенное на 1); число n не является простым (оно больше наибольшего из простых), значит, имеет некоторый простой делитель p_i. Число $2\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot p$ также делится на p_i, так как p_i — одии из миожителей. Отсюда заключаем, что p_i — делитель 1. Пришли к противоречию. **3.87.** У к а з а н и е. Рассмотрите 1992 числа $1993!+2$, $1993!+3$, ..., $1993!+1993$, каждое из которых, очевидио, составное. **3.88.** 5. Р е ш е и и е. $-2=3\cdot(-1)+1$, $24=3\cdot 8+0$, $26=3\cdot 8+2$. Видим, что числа -2, 24 и 26 при делеиии иа 3 дают разные остатки, значит, и числа $n-2$, $n+24$ и $n+26$ при делении на 3 дают разные остатки. Возможных остатков лишь три: 0, 1, 2. Следовательио, одно из чисел $n-2$, $n+24$, $n+26$ делится на 3. Так как эти числа простые, то одно из иих равио 3. Ясно, что этим числом может быть лишь число $n-2$, откуда $n=5$. Проверкой убеждаемся, что при $n=5$ все три числа — простые. **3.89.** а) 26; б) 20; в) 36; г) 160. **3.90.** У к а з а и и е. а), б) Число делится иа 3. **3.92.** У к а з а н и е. 49^{100} окаичивается цифрой 1, а число 14^{50} — цнфрой 6. **3.95.** Нет. Р е ш е и н е. Пусть существует целое число a такое, что десятичиая запись числа a^2 содержит шесть едииц и семь иулей. Тогда по признаку делимости a^2 кратно 3, зиачит, a кратио 3 (так как 3 — простое число), отсюда a^2 кратно 9. Получили противоречие с призиаком делимости на 9. **3.96.** Нет. Р е ш е н и е. Чнсло 5^n+1 оканчивается 26 при $n>1$ или равно 6 при $n=1$, значит, не кратно 4. Число 5^k-1 оканчивается 24 при $k>1$ или равно 4 при $k=1$, значит, кратно 4. **3.97.** Нет. Р е ш е н и е. Пусть существует целое число a такое, что сумма цифр числа a^2 равна 1991. Тогда a^2 не кратно 3, значит, и a не кратно 3, т. е. $a=3k\pm1$. Итак, $a^2=9k^2\pm6k+1=3b+1$, т. е. число a^2, следовательно, и сумма цифр числа a^2 при делении на 3 дает в остатке 1. Пришли к противоречию, так как 1991 при делении на 3 дает в остатке 2. **3.99.** а) У к а з а н и е. $5^n+3=(5^n-1)+4$. **3.103.** У к а з а н и е. а) $7^n-6\cdot2^n=(7^n-2^n)-5\cdot2^n$; б) $7^n+3^{n+1}=(7^n-3^n)+4\cdot3^n$; в) $5^n+2^{n+1}=(5^n-2^n)+3\cdot2^n$; г) $9^n+4^{n+1}=(9^n-4^n)+5\cdot4^n$. **3.104.** У к а з а н и е. а) $21^n+4^{n+2}=(21^n-4^n)+17\cdot4^n$; б) $15^n+7^{n+1}=(15^n-7^n)+8\cdot7^n$; в) $13^n+3^{n+2}=(13^n-3^n)+10\cdot3^n$; г) $5^n+7\cdot9^n=8\cdot9^n-(9^n-5^n)$. **3.105.** У к а з а н и е. б) $5^n+11^n+2=(5^n+1)+(11^n+1)$; в) $5^n+13\cdot11^n-4=(5^n+1)+(11^n+1)+12\cdot11^n-6$; г) $1^n+3^n+5^n+7^n=(1^n+7^n)+(3^n+5^n)$. **3.106.** У к а з а н и е. а) $7\cdot5^{2n}+12\cdot6^n=7(25^n-6^n)+19\cdot6^n$; б) $7^{n+2}+8^{2n+1}=57\cdot7^n+8(64^n-7^n)$; в) $3^{3n+2}+5\cdot2^{3n+1}=9(27^n-8^n)+19\cdot8^n$; г) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n=3^n((12^n-1)+11)$. **3.107.** У к а з а н и е. а) $5^n+8^n-2^{n+1}=2(5^n-2^n)+(8^n-5^n)$; б) $5^n+7^n-2^{n+1}=2(5^n-2^n)+(7^n-5^n)=2(5^{2k}-2^{2k})+(49^k-25^k)$, где $n=2k$. **3.108.** У к а з а н и е. а) Если n нечетное, то $1^n+3^n+5^n+7^n$ делится на 8; если n четное, то $n=2k$ и $1^n+3^n+5^n+7^n=1^k+9^k+25^k+49^k=(49^k-1)+(25^k-1)+(9^k-1)+4$ делится на 4; г) если n нечетное, то условие, очевидно, выполняется; если n четное, то $n=2k$ и $1^k+9^k+25^k+49^k+81^k+121^k+169^k+225^k=(225^k-1)+(169^k-1)+(121^k-1)+(81^k-1)+(49^k-1)+(25^k-1)+(9^k-1)+8$ кратно 8. **3.109.** У к а з а н и е. Если n четное, то $n=2k$, 25^k-9^k+4k делится на 4. Если n нечетное, то $5^{2k+1}-3^{2k+1}+4k+2=(5^{2k+1}-1)-(3^{2k+1}+1)+4k+4$ делится на 4. **3.110.** а) 37; б) 64. **3.111.** 54. **3.112.** У к а з а н и е. Предположив противное, получим равенство $10x=y(x-1)$ и, используя то, что x и $x-1$ взаимно простые, покажите, что $x=1$. **3.113.** Нет. Р е ш е н и е. Пусть x, y, z — количество 5-, 20- и 50-копеечных монет соответственно. Тогда $\begin{cases}5x+20y+50z=500,\\ x+y+z=20.\end{cases}$ Вычитая из первого уравнения системы второе, имеем: $3y+9z=80$. Получили противоречие, так как левая часть равенства — целое число, делящееся на 3, а правая нет. **3.114.** а) Нет; б) на 5; в) на 2; г) 262161; д) 196621; е) 589863 р. **3.115.** а) $(3;\ -1)$, $(1;\ -5)$; б) $(1;\ 6)$, $(7;\ -12)$, $(-1;\ -4)$, $(-7;\ 14)$. У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде $x(2x+y-1)=7$; в) $(2;\ 1)$, $(0;\ 1)$. У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде $(x-y)(x-1)=1$; г) $(2;\ 0)$, $(-1;\ 0)$. У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде $(x-3y)(x-1)=2$. **3.116.** а) $(0;\ 0)$, $(2;\ 2)$; б) $(4;\ -2)$, $(-2;\ 0)$, $(2;\ -4)$, $(0;\ 2)$. У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде $(y+1)(x-1)=-3$; в) $(0;\ 0)$, $(-3;\ -1)$. У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде $(x+1)(3y+2)=2$; г) $(0;\ 0)$, $(-1;\ -4)$. У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде $(y+2)(2x+1)=2$. **3.117.** а) $(\pm1;\ 0)$. У к а з а н и е. $x^2-xy-2y^2=(x-2y)(x+y)$; б) $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(5;\ 2)$, $(-5;\ -2)$. **3.118.** а) $(\pm2;\ 1)$. У к а з а н и е. $x^2+xy-2y^2-x+y=(x-y)(x+2y-1)$; б) $(1;\ 1)$. У к а з а н и е. $2y^2-2x^2+3xy-2y+x=(2x+y-1)(2y-x)$. **3.119.** а) $(-3;\ 0)$, $(1;\ -2)$, $(1;\ 4)$, $(-3;\ -6)$. У к а з а н и е. Записав уравнение в виде $(y^2-1)-2x(y+1)=5$, разложите на множители левую часть; б) $(0;\ -2)$, $(2;\ -2)$. У к а з а н и е. Записав уравнение в виде $(x^2-1)+y(x-1)=1$, разложите на множители левую часть. **3.120.** а) Р е ш е н и е. Из уравнения следует, что x не кратно 3, т. е. $x=3k\pm1$, $k\in\mathbb{Z}$; подставив $x=3k\pm1$ в уравнение, получим $3(3k^2\pm2k-y)=16$. Пришли к противоречию, так как левая часть — целое число, делящееся на 3;

б) Указание. Из уравнения следует, что x — нечетное число. **3.121.** а) $(7-2n; 3n-7)$, где $n\in\mathbf{Z}$. Решение. Записав уравнение в виде $2(x+y)=7-x$, заключаем, что $7-x$ кратно 2, т. е. $7-x=2n$, где $n\in\mathbf{Z}$ и $x=7-2n$. Далее из уравнения находим $y=3n-7$; б) $(3n-4; 2n)$, где $n\in\mathbf{Z}$. **3.122.** (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1 2), (3; 2; 1). Указание. Пусть для определенности $x\leqslant y\leqslant z$, тогда $x+y+z\leqslant 3z$, откуда $xyz\leqslant 3z$, т. е. $xy\leqslant 3$. Но поскольку $x^2\leqslant xy$, то $x^2\leqslant 3$, т. е. $x=1$. **3.123.** а) (1; 1), (3; 3). Решение. При $x=1$ имеем $y^2=1$, откуда $y=1$ $(y\in\mathbf{N})$; при $x=2$ решений нет, при $x=3$ получаем $y=3$. Пусть $x\geqslant 4$, тогда левая часть уравнения имеет вид $33+k$, где k оканчивается нулем, так как 5!, 6!, ... оканчиваются нулем. Итак, при $x\geqslant 4$ левая часть уравнения — число, оканчивающееся на 3. Но квадраты целых чисел не могут оканчиваться на 3, поэтому уравнение решений не имеет; б) (1; 3; 1), (3; 1; 1). Решение. Поскольку $4z+3$ — нечетно, то левая часть уравнения — нечетное число. Значит, или x, или y меньше 2. Пусть для определенности $x=1$, тогда $y!=4z+2$. Правая часть последнего равенства не кратна 4, значит, $y<4$. Проверкой убеждаемся, что решение (1; 3; 1). Второе решение получается перестановкой x и y. **3.124.** (10; 1), (10; -1), (-10; 1), (-10; -1). Решение. Запишем уравнение в виде $19(x^2-100)=91(1-y^2)$ (1). Поскольку числа 19 и 91 взаимно просты, получаем x^2-100 кратно 91, $1-y^2$ кратно 19, т. е. $x^2-100=91n$, $1-y^2=19k$, где n, $k\in\mathbf{Z}$. Подстановкой в равенство (1) убеждаемся, что $k=n$. Имеем $\begin{cases}x^2-100=91k,\\ 1-y^2=19k,\end{cases}$ где $k\in\mathbf{Z}$. $x^2=91k+100\geqslant 0$, откуда $k\geqslant -\frac{100}{91}$; $y^2=1-19k\geqslant 0$, откуда $k\leqslant\frac{1}{19}$. Таким образом, $k=0$ или $k=-1$. При $k=0$ получим $x^2=100$, $y^2=1$, т. е. четыре ответа; при $k=-1$ решений в $\mathbf{Z}$ нет. **3.125.** (5; 2). Решение. $(x-3)(x+3)=4y^2$; x — простое, и очевидно, что $x\neq 2$, значит, x — нечетное. Итак, $x-3$ и $x+3$ — четные числа, причем одно из них кратно 2, а другое кратно 4, следовательно, $4y^2$ делится на 8, т. е. y^2 делится на 2, значит, y кратно 2, причем y — простое, значит, $y=2$, откуда $x=5$. **3.126.** -1; 0; 2. **3.127.** -6; -2; 0; 4. Указание. $\frac{n^2-n+3}{n+1}=n-2+\frac{5}{n+1}$. **3.128.** 1. **3.131.** 500^2+1, 500^2+2, ..., 500^2+1000. **3.132.** $2^3\cdot 3^{52}$. **3.133.** 9. **3.134.** 12. **3.135.** а) 99; б) четная. **3.137.** Решение. а) При делении на 99 целое число может давать любой из 99 различных остатков (0; 1; ...; 98). Поскольку имеем 100 целых чисел, то найдутся по крайней мере два из них, которые дают одинаковые остатки при делении на 99 (принцип Дирихле). Разность этих двух чисел делится на 99. б) Пусть a_1, a_2, ..., a_{100} — произвольные целые числа. Рассмотрим 100 других целых чисел: a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$. Применив к ним результат пункта a, получим утверждение задачи. **3.139.** Решение. Пусть даны n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Рассмотрим n других целых чисел a_1, a_1+a_2, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Возможны два случая: 1) хотя бы одио из иих делится на n; 2) ни одно из них ие делится на n. В первом случае утверждение доказаио. Рассмотрим второй случай. Всего чисел n, при делении на n ненулевых остатков $n-1$. Отсюда по прииципу Дирихле существует по крайней мере два числа с одииаковыми остатками при делении на n. Разиость этих двух чисел делится на n и является требуемой в условии суммой нескольких исходных чисел. **3.140.** Решение. Рассмотрим 1992 числа: 1991, 19911991, 199119911991,

..., $\underbrace{19911991\ldots1991}_{1991 \text{ повторено } 1992 \text{ раза}}$. Ни одно из этих чисел не делится на 1992 (все они нечетные), т. е. все они при делении на 1992 имеют ненулевой остаток. Но при делении на 1992 существует 1991 различных ненулевых остатков, а рассматриваемых чисел 1992. Следовательно, среди этих чисел есть по крайней мере два числа с одинаковыми остатками (принцип Дирихле). Значит, разность этих двух чисел делится на 1992, причем имеет требуемый в условии задачи вид.

§ 4.

4.4. а) $2-\sqrt{3}$; $\sqrt{5}-2$; 5; 4; 4; a^3; б) $2|a|$, a^2b^4, $3|a|b^2$, $9|ab^3|c^2$. **4.8.** б) $a\leqslant 0$; г) $a\geqslant 0$; д) $a=0$; е) $a=1$; ж) $a=5$; з) $a\leqslant 0$; и) $a=0$. **4.13.** а) $5\pm a$; б) $4\pm\sqrt{\frac{b}{2}}$. **4.19.** а) 0; 1; б) 0; в) 2; г) нет решений. **4.20.** а) $a-3$; б) $4-b$; в) 2; г) $8-2a$. **4.21.** в) $2y-12$; г) 6. **4.22.** а) $|a-1|$; в) a^2+4. **4.23.** а) $a+1$; б) $|a+5|$; в) $7-a$; г) $|a+10|$. **4.24.** е) $\sqrt{5\sqrt{3}}>\sqrt{6\sqrt{2}}$; ж) $2\sqrt{3}>\sqrt{6\sqrt{2}}$. **4.32.** а) Решение. Пусть $\sqrt{5}=\frac{m}{n}$, где $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in\boldsymbol{N}$, а дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Тогда $m^2=5n^2$, т. е. m^2 делится на 5, значит, m делится на 5. Итак, $m=5k$, откуда $(5k)^2=5n^2$ или $n^2=5k^2$. Следовательно, n^2 кратно 5, значит, и n кратно 5. Получили противоречие с несократимостью дроби $\frac{m}{n}$. **4.33.** г) Иррациональное; д) рациональное. **4.38.** а) — г) Иррациональное; д) — з) может быть как рациональным, так и иррациональным; и) — м) иррациональное. **4.39.** ж) Указание. Достаточно доказать иррациональность числа $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; з) Решение. Пусть $\sqrt{7}+\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$, где r — рациональное, тогда $\sqrt{7}+\sqrt{2}=r-\sqrt{3}$, $9+2\sqrt{14}=r^2-2r\sqrt{3}+3$, откуда $\sqrt{14}+r\sqrt{3}=0{,}5r^2-3$. После возведения обеих частей равенства в квадрат и уединения квадратного корня имеем: $\sqrt{42}=\frac{1}{2r}((0{,}5r^2-3)^2-3r^2-14)$, т. е. $\sqrt{42}$ — рационально, поскольку r — рационально. С другой стороны, легко показать, что $\sqrt{42}$ — иррационально. **4.44.** Решение. Поскольку $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — рациональные, то число $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ — рациональное. Из равенств $\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}$ и $\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}$ следует рациональность чисел $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$. **4.46.** Указание. Предположив противное, воспользуйтесь равенством $m=\sqrt{mn}\cdot\sqrt{\frac{m}{n}}$, правая часть которого — иррациональна (см. № 43). **4.48.** $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$, 30 с. **4.52.** д) $0\leqslant x\leqslant 1$; е) $x=2$; з) $x\geqslant 0$. **4.68.** в) $\sqrt{m-3}$, $-\sqrt{2-n}$, $\sqrt{0{,}5n-2}$, $-\sqrt{n-5}$; г) $\sqrt{a(x-y)^2}$, $-\sqrt{m(a-b)^2}$, $\sqrt{a^2b}$ при $a\geqslant 0$ и $-\sqrt{a^2b}$ при $a<0$, $\sqrt{b^2a}$ при $b\geqslant 0$ и $-\sqrt{b^2a}$ при $b<0$. **4.69.** а) $(a+b)\cdot\sqrt{a-b}$; г) $-\sqrt{a}$. **4.73.** г) 0,32. **4.78.** б) Нет решений; г) $\frac{1}{49}$. **4.80.** г) $40\sqrt{6}$. **4.81.** в) $4+2\sqrt{2}$. Указание. Используйте формулу разности квадратов. **4.82.** а) $\sqrt{3}+1$; г) $3+\sqrt{3}$. **4.83.** а) $\sqrt{a-1}+1$; б) $|\sqrt{a-3}-2|$; в) $\sqrt{1-a}+$

$+\sqrt{1+a}$; г) $\sqrt{2a-1}+\sqrt{a}$. **4.84.** а) 4; б) 6; в) 2; г) 10; д) -6; е) 0. **4.86.** а) 1. Решение. $x^2-2x-1=x(x-2)-1=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)-1=1$. **4.94.** г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.95.** а) 3; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **4.96.** в) 1; г) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$. Указание. Из условия следует, что $a<0$, значит, $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\sqrt{-b}$ и $-a=(\sqrt{-a})^2$; д) $\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$; е) $-\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$. **4.97.** а) 1; б) -1. **4.100.** а) $\sqrt{5}-2$; б) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}-1$; г) $1+\sqrt{2}$. **4.103.** а) $\frac{b}{|b|}\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$; б) $2+\sqrt{3}$. **4.104.** а) $2\sqrt{2}-2$. Указание. Используйте тот факт, что $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$; в) $-(\sqrt{5}+\sqrt{7-\sqrt{2}})(\sqrt{2}+1)$. **4.109.** а) 0; в) 1; г) 1. **4.113.** $\frac{1}{a}$. **4.114.** $2a$. **4.115.** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **4.116.** 1. **4.117.** 1. **4.118.** $\frac{3(a+b)}{a-b}$. **4.119.** а) $\sqrt{19}<\sqrt{7}+\sqrt{3}$. **4.122.** б) Первое меньше. **4.123.** а) Первое больше. **4.124.** б) Первое меньше. Указание. Достаточно сравнить числа $\sqrt{1992}-\sqrt{1991}$ и $\sqrt{1991}-\sqrt{1990}$, которые соответственно равны числам $\frac{1}{\sqrt{1992}+\sqrt{1991}}$ и $\frac{1}{\sqrt{1991}+\sqrt{1990}}$. **4.125.** $\sqrt{\frac{6b}{a}}$ при $a^3\geqslant 3b$, $a\sqrt{2}$ при $a^3<3b$. **4.126.** a. **4.127.** $\frac{\sqrt{-a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{2}}$. Указание. Из условия следует, что $a<0$.

§ 5

5.8. а) $-0{,}5$; б) 2; в) ± 3; г) нет решений. **5.10.** в) $m=1{,}5$; г) $m=3$. **5.11.** а) $m=1\frac{2}{3}$; б) таких m нет; в) $m=0$; г) $m=-0{,}2$. **5.12.** а) $m=1$; б) $m=-1\frac{1}{3}$; в) $m=0$; г) $m=-2$. **5.13.** 0 или $\frac{1}{6}$. **5.14.** 1 и 2. **5.15.** 1; 2; 3. **5.16.** Через 4 с. **5.27.** б) $-2{,}7$; 8; в) $-6\frac{1}{29}$; 2. **5.29.** б) ± 2; г) -1; $\frac{61}{85}$. **5.32.** а) $-4a$; $-a$; г) $-6b$; b. **5.33.** б) $-3b$; 2; в) $2a-3$; $a+1$. **5.35.** а) $a=-b$ или $a=4b$; б) $a=-\frac{b}{7}$ или $a=\frac{b}{3}$. **5.36.** а) $b=0{,}5(a+3)$ или $b=2a+3$; б) $b=0{,}5a-2$ или $b=a-3$. **5.37.** 3 или $\frac{1}{3}$. **5.38.** 2 или $\frac{1}{2}$. **5.39.** 9 или $\frac{1}{9}$. **5.42.** а) 1; б) ± 1. **5.43.** а) 6; б) ± 1; в) 3; 4; $\frac{-7-\sqrt{97}}{2}$; г) $\frac{7-\sqrt{97}}{2}$. **5.44.** а) $\frac{\sqrt{29}-1}{2}$; б) $\frac{1\pm\sqrt{45}}{2}$; в) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; г) $2+\sqrt{2}$; $-2\pm\sqrt{2}$. **5.45.** а) 1; 5; б) 1; $\sqrt{3}$; в) -2; $-2\sqrt{2}$; г) -6; 7. **5.46.** а) ± 2; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; б) 1; 8; в) ± 1; $1\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{3}$; г) -1; $-0{,}4$; $\frac{-17\pm\sqrt{177}}{14}$. Указание. Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности двух уравнений $f(x)=\pm g(x)$. **5.47.** а) 2; $-\sqrt{5}$. Указание. Поскольку левая часть неотрицательна, то $10-5x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 2$ и $|x-2|=2-x$; б) 3. Указание. Левая часть уравнения — сумма двух неотрицательных величин, значит, равенство нулю возможно тогда и только тогда, когда одновременно оба слагаемых обращаются в нуль; в) $-\frac{4}{7}$; 1; г) 3. Указание. Запишите уравнение в виде $x^2|x-3|+(x-3)^2=0$. **5.48.** $-\sqrt{6}$. Указание. $-\sqrt{6}$ и $\sqrt{6}-1$ — корни данного уравнения. **5.49.** Меньший корень первого уравнения больше, чем больший корень второго. **5.50.** Больший корень уравнения больше данного числа. Указание. 2 и $4-\sqrt{2}$ — корни уравнения, данное в условии число равно $\sqrt{21}-2$. **5.51.** Меньший корень уравнения меньше данного числа. Указание. $\sqrt{14}+\sqrt{5}$ и $2(\sqrt{14}+\sqrt{5})$ — корни уравнения, данное в условии число равно 6. **5.52.** $\frac{\sqrt{113}-5}{4}$. Указание. Уравнение $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности двух уравнений $f(x)=\pm g(x)$ при условии, что $g(x)\geqslant 0$. **5.53.** $1-\sqrt{5}$. **5.55.** в) $-0{,}3$; $1\frac{5}{22}$; г) -6; $-\frac{12}{19}$. **5.57.** в) -4; $-2{,}5$; г) -2; $\frac{7}{9}$. **5.58.** а) 0; б) -8. **5.59.** б) Нет решений; г) $-0{,}25$; 0,5. **5.60.** а) a при $a\neq -3$, $a\neq 4$; г) при $b=\frac{2}{3}$ и $b=-\frac{1}{2}$ — один корень $x=b$; при $b=1$, $b=-2{,}5$ и $b=0{,}5$ — один корень $x=3b-1$; при других b — два корня $x=b$, $x=3b-1$. **5.61.** а) ± 6; ± 1. Указание. Уравнение является квадратным относительно $|x|$; г) -9; 3. **5.62.** б) -3; 0; 2; 5. Указание. Записав уравнение в виде $(x-1)^2-5|x-1|+4=0$, введите переменную $y=|x-1|$; г) $-\frac{1}{3}$; 3. Указание. Пусть $y=|3x-4|$, тогда уравнение имеет вид $y^2-y-20=0$. **5.63.** в) -3; -2; г) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{13+\sqrt{53}}{2}$. **5.64.** а) 25. Указание. Уравнение является квадратным относительно $\sqrt{x}$; б) 25; 49. **5.65.** в) 13; 53. Указание. Записав уравнение в виде $x-4-10\sqrt{x-4}+21=0$, введите переменную $y=\sqrt{x-4}$; г) 46. **5.66.** в) $\pm\frac{2}{3}$; г) $\pm 0{,}75$; ± 5. **5.67.** в) 4; -2. Указание. Записав уравнение в виде $(x-1)^4-(x-1)^2-72=0$, введите переменную $y=(x-1)^2$; г) 0; -4. Указание. Пусть $y=(x+2)^2$, тогда уравнение имеет вид $y^2+2y-24=0$. **5.68.** а) ± 3; $\pm a$; б) ± 2; $\pm 3a$; в) ± 3; $\pm\frac{\sqrt{b}}{2}$ при $b\geqslant 0$; г) $\pm\frac{\sqrt{b}}{3}$ при $b\geqslant 0$. **5.69.** а) 2; б) $-0{,}5$; 1; 3; в) -3; 0; 2; г) -2; 1; 2. **5.70.** ± 1. **5.71.** а) -1; б) 0. **5.72.** а) $2(3-2\sqrt{2})$. Указание. Рассматривая уравнение как квадратное относительно $|x|$, получим $|x|=\sqrt{2}-1$. Тогда $x_1^2+x_2^2=2|x|^2=2(3-2\sqrt{2})$. **5.73.** а) -3; 1. Указание. Введите переменную $y=(x+1)^2$; б) $2\pm\sqrt{3}$; 1; 3; в) -2; -1. Указание. Введите переменную $y=x^2+3x+2$; г) 2; 3; $\frac{5\pm 3\sqrt{5}}{2}$. **5.74.** а) -3; 1; $-7\pm\sqrt{61}$. Указание. Введите переменную $y=\frac{x^2-2x}{4x-3}$, тогда уравнение примет вид $y+5=-\frac{4}{y}$; б) 1; 2; $19\pm\sqrt{349}$. **5.79.** г) $-4{,}2$; 2,2. Указание. Представив правую часть уравнения как $5\cdot 4{,}2^2+10\cdot(-4{,}2)+3$, легко видеть, что $x_1=-4{,}2$; кроме того, по теореме

Виета $x_1+x_2=-2$. **5.83.** а) $x^2-6=0$; в) $x^2-4x-1=0$. **5.85.** а) $7\frac{7}{9}$. Указание. По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{8}{3}$, $x_1x_2=-\frac{1}{3}$. Воспользуйтесь равенством $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. **5.86.** г) Указание. $x_1^5+x_2^5=(x_1+x_2)(x_1^4-x_1^3x_2+x_1^2x_2^2-$ $-x_1x_2^3+x_2^4)=(x_1+x_2)((x_1^2+x_2^2)^2-x_1^2x_2^2-x_1x_2(x_1^2+x_2^2))$. **5.87.** $\pm\frac{5\sqrt{17}}{4}$. Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{5}{2}$, $x_1x_2=\frac{1}{2}$. $|x_1^2-x_2^2|=\sqrt{(x_1^2-x_2^2)^2}=$

$$=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)^2-4x_1^2x_2^2}=\sqrt{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-4x_1^2x_2^2}=$$

$=\sqrt{\left(\frac{25}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}}=\frac{5\sqrt{17}}{4}$, откуда $x_1^2-x_2^2=\pm\frac{5\sqrt{17}}{4}$. **5.89.** в) x^2+9x- $-9=0$. **5.90.** 3; 4. **5.91.** 1. **5.95.** 1. **5.96.** -1. **5.97.** 14. Решение. Пусть $|x|=t$; $t_1+t_2>0$ и $t_1t_2>0$ (по теореме Виета), $D>0$, значит, уравнение $t^2-3t+1=0$ имеет два положительных корня, следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня. Тогда $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2(t_1^2+t_2^2)=2((t_1+t_2)^2-2t_1t_2)=2(9-2)=14$. **5.98.** $p=q=0$ или $p=1$, $q=-6$. **5.99.** $a=\frac{2}{3}$. **5.100.** $a=6$; 2 и 3 — корни первого уравнения, 3 и 4 — корни второго уравнения. **5.101.** $a=-5$, $b=36$, корни первого уравнения равны 2; 3, корни второго уравнения равны 4; 9 или $a=5$, $b=36$, корни первого уравнения равны -2; -3, корни второго уравнения равны 4; 9. **5.104.** $\pm\frac{2}{3}$; ±1. **5.107.** $-\frac{1}{7}$; 0; 1. **5.108.** 0. **5.109.** 2. **5.111.** -2. **5.112.** 3; 4. **5.114.** $a=b=c$; нет. Указание. $D=-2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=$ $=-(a-b)^2-(a-c)^2-(b-c)^2\leqslant 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c$. **5.115.** -1. **5.116.** 75. **5.117.** 14 или 41. **5.118.** 13 человек. **5.119.** 10. **5.120.** 5%. Указание. Пусть x — средний ежегодный процент роста, тогда $20000+200x+0{,}01x(20000+200x)=22050$, откуда $x=5$. **5.121.** $\approx 42\%$. **5.122.** 800 км/ч, 600 км/ч. **5.123.** 4 км/ч. **5.124.** В 6 ч. Указание. Пусть x км/ч — скорость первого поезда, тогда $(x+10)$ км/ч — скорость второго. Имеем $\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=1$, откуда $x=30$. **5.125.** 3 км/ч. Указание. Пусть x км/ч — скорость второго пешехода, тогда $\frac{9}{x}+1+\frac{4}{x+1}=\frac{15}{x}$. **5.126.** 5 м^3/ч. Указание. Пусть x м^3/ч — начальная производительность экскаватора, тогда $6{,}5-\frac{20}{x}=\frac{10}{x-1}$. **5.127.** 30 г. Указание. Пусть x г — искомая величина, тогда $\frac{300}{x}-\frac{192}{x-6}=2$. **5.128.** 50 м^3/мин. **5.129.** 18 ц, 15 ц. Указание. Пусть x га — площадь второго поля, тогда $\frac{750}{x}\cdot(x+10)=\frac{1080}{x+10}\cdot x$. **5.130.** 9 ч. Указание. Пусть x деталей в час — производительность второго рабочего, тогда $\frac{60}{x}-\frac{60}{30-x}=3$. **5.131.** 20 ч, 25 ч. **5.132.** 9 ч, 6 ч. **5.133.** 42 ч, 56 ч. **5.134.** 25 кг. **5.135.** 20%, 60%. **5.136.** 40%, 25%. **5.137.** 10 л. **5.138.** 55 мин, 66 мин. **5.139.** 1 м/с, 1,2 м/с. **5.140.** $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$.

6.1. а) $a<b$; б) $a>b$; в) $a>b$; г) $a\geqslant b$; д) $a>b$; е) $a\geqslant b$. **6.6.** а) Указанне. $a^2-ab+b^2=\frac{1}{2}((a-b)^2+a^2+b^2)\geqslant 0$. **6.8.** в) Указанне. $a^2-4a+5-2|a-2|=(|a-2|-1)^2\geqslant 0$. **6.30.** а) Верно; б) неверно. **6.31.** а) Верно; б) неверно. **6.34.** в) Верно; г) верно. **6.35.** а) Верно; б) неверно; в) верно. **6.36.** а) Неверно; б) неверно; в) верно; г) верно. **6.37.** б) $a>b$; д) $a>b$. **6.38.** а) $a>b$; б) $a>b$; в) $a>b$; г) $a\geqslant b$. **6.40.** а) $a<b$; г) $a\leqslant b$. **6.42.** а) $a>b$; б) $a>b$. **6.46.** а) $a\geqslant 1$; б) $a<3$; в) $a\leqslant 2$; г) $a>5$. **6.47.** а) $a>-4$; б) $a>1$; в) $a<4$; г) $4<a\leqslant 5$. **6.48.** а) $-4<a<10$; б) $a\leqslant -5$ нлн $a\geqslant 1$. **6.49.** а) $a>b$; б) $a>b$; в) $a>b$; г) $a<b$; д) $a<b$; е) $a>b$. **6.50.** а) $a<b$. Указанне. Так как $n>1$, то $n+1<2n$; б) $a<b$. **6.68.** в) Решенне. $a^{10}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a}=\left(a^{10}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a}\geqslant 2a^4+\frac{2}{a^2}+\frac{4}{a}=2\left(a^4+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{4}{a}\geqslant 4a+\frac{4}{a}=4\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqslant 8$. Равенство нмеет место только при $a=1$. **6.86.** Указанне. Воспользуйтесь неравенством нз упражнення 6.83. **6.88.** 6. **6.89.** 8. **6.90.** 12. **6.91.** а) 18; б) 27; в) 13; г) 1. **6.92.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{12}$; в) 1; г) 2. **6.94.** 25. **6.95.** 4,5. **6.96.** 3. **6.97.** 4. **6.100.** Указанне. Воспользуйтесь последовательно несколько раз неравенством нз упражнення 6.98, *а*. **6.115.** Решенне. Воспользуемся неравенством о среднем геометрнческом н среднем арнфметнческом положнтельных неравных чнсел: $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\times(2n-1)=\sqrt{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}=\sqrt{1\cdot(2n-1)}\cdot\sqrt{3(2n-3)}\cdot\sqrt{5\cdot(2n-5)\cdot}\ldots\times\sqrt{(2n-1)\cdot 1}<\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot\frac{3+(2n-3)}{2}\cdot\frac{5+(2n-5)}{2}\cdot\frac{(2n-1)+1}{2}=\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{n\text{ множнтелей}}=n^n$

6.116. Решенне. Обозначнм нанменьшую нз дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ через m н нанбольшую — через M. Тогда можно запнсать: $m\leqslant\frac{a_1}{b_1}\leqslant M$, $m\leqslant\frac{a_2}{b_2}\leqslant M$, ..., $m\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant M$. Так как $b_1>0$, $b_2>0$, ..., $b_n>0$, то, освобождаясь от знаменателей, получнм $mb_1\leqslant a_1\leqslant Mb_1$, $mb_2\leqslant a_2\leqslant Mb_2$, ..., $mb_n\leqslant a_n\leqslant Mb_n$. Суммнруя неравенства н вынося множнтелн m н M за скобкн, получнм: $m(b_1+b_2+\ldots+b_n)\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n\leqslant M(b_1+b_2+\ldots+b_n)$. Разделнв почленно на $b_1+b_2+\ldots+b_n>0$, получнм $m\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\leqslant M$. **6.118.** а) $|a-1|+|a-2|=|a-1|+|2-a|\geqslant|a-1+2-a|=1$. Равенство наступает прн $a=1$. **6.119.** б) Указанне. Представьте левую часть неравенства в внде $(x-y)^2+(x+2)^2+(y-1)^2$. **6.120.** В безветренную погоду. **6.124.** Время двнження по реке с быстрым теченнем больше. **6.125.** Первый турнст. **6.136.** а) $x<\frac{13}{49}$; б) $x\leqslant 4$; в) $x<6$; г) $x>8$. **6.137.** в) $x<\frac{1}{2}$; г) $x\leqslant 1$. **6.138.** а) $x>-1{,}5$; б) $x>-\frac{5}{3}$; в) $x<\sqrt{2}$; г) $x<\frac{2-\sqrt{6}}{2}$. **6.140.** б) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; \sqrt{3}-2]$; г) $(-\infty; -2(\sqrt{3}+2))$.

6.143. а) $x<\frac{3-a}{a-5}$, еслн $a>5$; $x>\frac{3-a}{a-5}$, еслн $a<5$; нет решенй, еслн $a=5$.

6.144. а) -6; б) -2; в) -5; г) 8. **6.145.** а) 2; б) 1; в) 2; г) 3. **6.146.** а) $a<\frac{1}{3}$. **6.147.** а) $a>4$. **6.148.** в) $a\leqslant\frac{7}{9}$; г) $a\leqslant\frac{29}{4}$. **6.149.** а) $x\geqslant 2$; б) $x\leqslant 1{,}5$; в) 2; г) -3. **6.150.** $a<1{,}5$. **6.151.** $a>2$. **6.152.** $a>-2$, $a\neq 2$. **6.153.** $a<1$. **6.156.** а) $1<x<3$; б) $\frac{4}{7}<x<\frac{8}{3}$; в) $\frac{1}{7}<x<\frac{16}{7}$; г) $x>4$. **6.157.** а) $0{,}05<x<0{,}1$. **6.158.** а) $a<3$; б) $a<5$; в) $a\leqslant 7$; г) $a\geqslant 2$. **6.159.** а) $a\geqslant 4$; б) $a\geqslant 2$; в) $a>5$; г) $a\leqslant 2$. **6.160.** а) $a=5$; б) $a\leqslant 3$; в), г) не существует. **6.161.** а) Не существует; б) $a=5$; в) $a>5$; г) $a=2$. **6.162.** $a\leqslant 2$. **6.163.** $a>\frac{21}{127}$. **6.164.** а) $1<x<3$; б) $-\frac{1}{3}<x<0$. **6.165.** а) $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$. **6.166.** а) $x=1{,}5$; в) $3{,}6<x<5$; г) $1<x\leqslant 2{,}5$. **6.167.** а) 0,925; б) $-0{,}5$. **6.168.** 1. **6.169.** 5. **6.170.** $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$. **6.171.** $a<-2{,}5$, $a\neq -3$. **6.172.** $a<-3$. **6.173.** $-\frac{2}{3}<a<2$. **6.174.** $-0{,}5<a<2$. **6.175.** $0<a<2$. **6.176.** $2<a<4$. **6.177.** $3\leqslant a<4$. **6.178.** $a<0$. **6.179.** $a>3$. **6.180.** $\frac{1}{5}<a<1$. **6.181.** $a=2$. **6.182.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $x<5$; в) $(-\infty;\ 7)\cup(8;\ +\infty)$. **6.183.** а) $x>3$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $\boldsymbol{R}$; г) $x>1$. **6.184.** а) $x<5$; б) $x>3$; в) $-1\leqslant x<5$; г) $x>-1$. **6.185.** а) $\boldsymbol{R}$; б) $x\leqslant 5$; в) $x\geqslant 7$; г) $\boldsymbol{R}\setminus\{2\}$. **6.186.** а) $\left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)\cup[3;\ +\infty)$; б) $x>-\frac{1}{4}$; в) $x<\frac{1}{2}$; г) $\boldsymbol{R}$. **6.187.** б) $3\leqslant x\leqslant 4$, $x=-1$; г) $1<x<2$, $6<x<8$. **6.188.** а) $1<x<4$, $0<x<\frac{1}{3}$; б) $-2<x<15$; в) $1<x<6$; г) $-2<x\leqslant 5$. **6.199.** а) $0<x<a$, если $a>0$; $a<x<0$, если $a<0$; нет решений, если $a=0$; б) $3\leqslant x\leqslant a$, если $a>3$; $a\leqslant x\leqslant 3$, если $a<3$; $x=3$, если $a=3$. **6.200.** а) $x>\frac{a}{3a-1}$, если $a<0$ или $a>\frac{1}{3}$; $x<\frac{a}{3a-1}$, если $0<a<\frac{1}{3}$; нет решений при $a=0$, $a=\frac{1}{3}$; б) $x<\frac{1}{5-a}$, если $a<2$ или $a>5$; $x>\frac{1}{5-a}$, если $2<a<5$; нет решений при $a=2$, $a=5$; в) $x>\frac{11-a}{4}$, если $a<-1$ или $a>3$; $x<\frac{11-a}{4}$, если $-1<a<3$; нет решений, если $a=-1$, $a=3$; г) $x>\frac{a-1}{a-2}$, если $0<a<2$ или $a>3$; $x<\frac{a-1}{a-2}$, если $a<0$ или $2<a<3$; x — любое действительное число, если $a=2$; нет решений при $a=0$, $a=3$. **6.207.** а) $-2<x<-1$, $1<x<2$; б) $-2\leqslant x<1$, $5<x\leqslant 8$; в) $-2<x<5$; г) $\frac{1}{3}<x<1$, $x\neq\frac{2}{3}$. **6.208.** а) $0\leqslant x\leqslant 2$, $4\leqslant x\leqslant 6$; б) $-1<x<9$; в) $x<-2$ или $x>3$; г) $x<-\frac{2}{3}$; $0<x<\frac{8}{3}$; $x>\frac{10}{3}$. **6.209.** а) $3-a<x<3+a$, если $a>0$; нет решений, если $a\leqslant 0$; б) $2-a\leqslant x\leqslant 2+a$, если $a>0$; $x=2$, если $a=0$; нет решений, если $a<0$; в) $x<-a-5$ или $x>a-5$, если $a>0$; $x\neq -5$, если $a=0$; x — любое действительное число, если $a<0$; г) $x\leqslant\frac{3-a}{2}$ или $x\geqslant\frac{3+a}{2}$, если $a>0$; x — любое действительное число, если $a\leqslant 0$. **6.210.** а) $a<0$; б) $a\geqslant\frac{1}{2}$; в) $a\leqslant 0$; г) $a<\frac{2}{3}$. **6.211.** а) $x>3$; б) $x<1{,}5$; в) $x<\frac{5}{3}$; г) $-3<x<-1$. **6.212.** а) $1<x<5$; б) $x\leqslant 3$; в) $x>6$; г) $x<1$. **6.213.** а) $x=-1$; б) $6\leqslant x\leqslant 8$, $x=2$. **6.214.** а) $3<x\leqslant 3{,}5$; б) $1\leqslant x<2\frac{1}{3}$; в) $0<x<\frac{8}{7}$; г) $x>17$. **6.215.** а) $0{,}5<x<2{,}8$; б) $3<x<16$; в) $x<1$; г) $3{,}5<x<4$. **6.216.** а) $5<x\leqslant 6$; б) $-2<x<2$; в) $3<x<3{,}5$; г) $2\leqslant x<3$. **6.222.** а) $x<-3$, $1{,}5<x<3$; б) $-1\leqslant$ $\leqslant x\leqslant\frac{3}{5}$; $x\geqslant 1$. **6.223.** а) $-3\leqslant x<-1$, $1<x\leqslant 3$; б) $x<-5$; $-2<x<2$, $x>5$. **6.224.** а) $a<0$; б) $a\leqslant 3{,}5$; в) $a>0$; г) $a\geqslant 9$. **6.225.** а) $-6<a<6$; б) $-0{,}5<a<1{,}5$. **6.226.** а) $a<-6$; $a>6$; б) $a<-1$, $a>3$. **6.227.** а) $x<3$, $x\neq 1$; б) $x<7$, $x\neq 5$; в) $x\leqslant 1$, $x=2$; г) $x\leqslant\frac{7}{3}$, $x=5$. **6.228.** а) $x>1$; б) $x\geqslant 2$; в) $x\leqslant 3$, $x=4$; г) $x>2{,}5$, $x=-3$. **6.229.** а) $x\geqslant 5$; б) $x\geqslant 5$, $x=2$; в) $x=1{,}5$; г) $x\leqslant\frac{1}{3}$. **6.230.** а) $3-\sqrt{a}<x<3+\sqrt{a}$, если $a>0$; нет решенний, если $a\leqslant 0$; б) $x<\frac{-3-\sqrt{a}}{5}$, $x>\frac{-3+\sqrt{a}}{5}$, если $a>0$; $x\neq-\frac{3}{5}$, если $a=0$; x — любое действительное число, если $a<0$; в) $\frac{3-\sqrt{a-1}}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3+\sqrt{a-1}}{4}$, если $a>1$; $x=\frac{3}{4}$, если $a=1$; нет решений, если $a<1$; г) $x\leqslant 2-\sqrt{3-a}$, $x\geqslant 2+\sqrt{3-a}$, если $a<3$; x — любое действительное число, если $a\geqslant 3$. **6.231.** а) $x<3$, если $a\geqslant 3$; $x<3$, $x\neq a$, если $a<3$; б) $x\leqslant a$, $x=5$, если $a<5$; $x\leqslant a$, если $a\geqslant 5$; в) $x\geqslant 7$, $x=a$, если $a<7$; $x\geqslant 7$, если $a\geqslant 7$; г) $x>a$, если $a\geqslant-\frac{3}{2}$; $x>a$, $x\neq-\frac{3}{2}$, если $a<-\frac{3}{2}$. **6.232.** а) $(-\infty;\ 3]\cup[3;\ 10)$; б) $[-2;\ 1{,}5)$; в) $(-\infty,\ -3]\cup\{3\}$; г) $\{-4\}$. **6.233.** а) $(2;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]\cup[5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 1{,}2]\cup(2;\ +\infty)$; г) $[5;\ +\infty)$. **6.234.** а) $(-\infty;\ -3)\cup\{0\}\cup(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -4]\cup\{0\}\cup[4;\ +\infty)$; в) $(-1;\ 1)\cup\{2\}$; г) $[-4;\ 4]\cup\{5\}$. **6.235.** а) $[3;\ 5]$; б) $(-\infty;\ 2]\cup[3;\ 5]\cup[6;\ +\infty)$; в) $\left[-\frac{2}{3};\ 3{,}5\right)$; г) $\left[-\frac{2}{3};\ 3{,}5\right)\cup[4;\ 5)$. **6.236.** а) $y>0$ при $x<1$, $x>2$; $y<0$ при $1<x<2{,}5$; в) $y>0$ при $x<-2$, $x>2$; $y<0$ при $-2<x<2$. **6.237.** а) $\frac{1}{2}\leqslant x<5$; б) $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{19}{2}$; в) $-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$; г) $-11\leqslant x\leqslant -2$; $2\leqslant x\leqslant 11$. **6.240.** а) $3\leqslant x<4$, $x>4$; б) $-0{,}5$; в) $-1+\sqrt{5}$; 0; г) $-2+\sqrt{8}$, -2.

§ 7

7.7. а) 5; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{4}{3}$; г) 4. **7.8.** а) 1; б) 1; в) 1; г) $\frac{1}{49}$. **7.9.** г) $\frac{1-x}{1+x}$; $\frac{8k(a-b)}{(a+b)^2}$; $\frac{1}{ab}$. **7.10.** а) 0,5; б) $\frac{1}{25}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{4}$. **7.11.** а) 9; б) $\frac{1}{49}$; в) $\frac{3}{2}$;

г) $\frac{1}{9}$. **7.12.** а) 9; б) 2048; в) $\frac{1}{5}$; г) 8. **7.13.** а) 2; б) 49; в) 512; г) 9. **7.15.** г) $-\frac{y^{17}}{128x^{18}}$. **7.16.** а) $-\frac{1}{512}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{8}{27}$; г) 1. **7.17.** г) $-0{,}4$. **7.18.** а) $\frac{1}{a^2b^2}$; б) 1. **7.19.** а) 0; б) $\frac{3}{16}$; в) 1; г) 13. **7.20.** а) a^nb^n; б) $\frac{1}{a^nb^n}$. **7.21.** а) $(3a^{-1}+4b^{-1})^n$. **7.22.** а) $\frac{a-b}{a}$; б) $\frac{x-y}{x}$. **7.23.** $\frac{18a^{12}}{5b^7}$. **7.24.** $16(p-q)^4(p+q)^2$. **7.25.** 0,25. **7.26.** 1. **7.27.** а) $-1{,}5$; б) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{9}{82}$. **7.28.** а) $\pm 1{,}5$; б) $\frac{7}{6}$; $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; г) $\pm\frac{1}{20}$. **7.29.** а) 1; -12; б) 1; -3; в) 2; $-\frac{2}{3}$; г) нет решений. **7.30.** а) 1; б) 1; 3; в) 2; $-\frac{1}{2}$; г) 3. **7.31.** а) 1; $\frac{1}{2}$; б) ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; в) -1; $-\frac{3}{8}$; г) -2; -6. **7.32.** а) $x>0$; б) $x<-1$; в) $x>1{,}5$; г) $x>0{,}5$. **7.33.** а) $x>-1$, $x\neq 2$; б) $x<-\frac{1}{3}$, $x\neq -2$; в) $x>0$, $x\neq 2{,}5$; г) $x>0$, $x\neq 3$. **7.34.** а) 1; б) -1; в) -1; г) -2. **7.38.** а) $\sqrt{ab}$; б) 1; в) 8; г) -2. **7.39.** а) 2; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) 0. **7.41.** 2. **7.42.** $\frac{2}{17}$. **7.43.** $\frac{a^3}{2(a-1)}$.

§ 8

8.6. в) $\frac{4c-1}{(2c+3)^2}$; г) $-\frac{(2d-1)^2}{7d+2}$. **8.7.** а) $\frac{x+2}{x-1}$; в) $\frac{\sqrt{2}-b}{b-\sqrt{5}}$; г) $\frac{3y-\sqrt{2}}{2y-\sqrt{3}}$. **8.8.** в) $\frac{c^3+1}{1-2c^3}$; г) $\frac{2(5d^3-2)}{2d^3-7}$. **8.9.** а) $\frac{3a+2b}{3a-4b}$; б) $\frac{n-m}{2m+3n}$; в) $\frac{2v-5u}{3u-4v}$; г) $\frac{2c+d}{3c-5d}$. **8.10.** а) $\frac{2x+a+2b}{x-2}$; б) $\frac{2x-1}{x+a-b}$. **8.11.** б) -9. **8.12.** а) $(x-2)^2$; б) x^2. **8.13.** а) -1; б) 1. **8.14.** а) $\frac{x}{x-2}$; б) $\frac{x}{5-x}$. **8.15.** а) $p=-2$, $q=-1$. **8.16.** а) $a=3$, $b=6$, $c=-4$. **8.17.** а) $y=2x^2-3x+5$; б) 17. **8.21.** г) Указание. $y=1-|x^2-2|$. **8.24.** а) Указание. $y=(x-3)^2$, $x\geqslant 3$; б) Указание. $y=(x-3)^2$ при $x\geqslant 3$, $y=x^2-9$ при $x<3$; в) Указание. $y=x^2-6x+8$, $x\geqslant 3$. **8.25.** $b=30$; $x=4$; возрастает на $(-\infty;\ 5]$, убывает на $[5;\ \infty)$; $f(x)<0$ при $x<4$, $x>6$; $f(x)>0$ при $4<x<6$; $-9\leqslant f(x)<8$ при $3\leqslant x\leqslant 7$, $x\neq 5$. **8.27.** Указание. $a=2$. **8.28.** Указание. а) $a=10$; б) $a=-2$. **8.29.** Указание. а) $a=1$; б) $a=-4$. **8.30.** $a=2$. Решение. $y_1=x^2-2x+a=$ $=(x-1)^2+a-1$, значит, $E(y_1)=[a-1;\ \infty)$; $y_2=\sqrt{2x-a}$, значит, $D(y_2)=$ $=\left[\frac{a}{2};\ \infty\right)$. Итак, $E(y_1)=D(y_2)$ при $a-1=\frac{a}{2}$, т. е. при $a=2$. **8.31.** $a<-3$. **8.32.** $b=4$, $b=2{,}5$ **8.34.** б) Графики не пересекаются при $m<-1$, одна точка пересечения при $m=-1$, $m=0$, две точки пересечения при $m>-1$, $m\neq 0$. **8.35.** 13. **8.36.** Две точкн пересечения при $a>1$, $a<-2$, три точки пересечения при $a=1$, $a=-2$; четыре точки пересечения при $-2<a<1$. **8.37.** При $-\sqrt{3}<b<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<b<\sqrt{3}$ точек пересечения нет; при $b=\pm\sqrt{2}$, $b=\pm\sqrt{3}$ одна точка пересечения; при $b<-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}<b<\sqrt{2}$, $b>\sqrt{3}$ две точки пересечения. **8.38.** $-1{,}75<k<0$. **8.39.** $c=5$, $c=13$. **8.40.** $b=\pm 3$, $b=\pm 4$. **8.41.** $a=-\frac{1}{3}$, $a=1$. **8.42.** $a>4$. **8.43.** $k<-4$, $k=5$. Решение. Если $D=0$, то $k=0$ или $k=5$. В случае $k=0$ уравнение имеет вид $x^2-2x+1=0$, его корень $x=1$ не удовлетворяет неравенству $x<-1$. В случае $k=5$ уравнение имеет вид $x^2+8x+16=0$, его корень $x=-4<-1$. Если же $D>0$, то для того, чтобы ровно одни корень уравнення удовлетворял условию $x<-1$, необходнмо и достаточно, чтобы значенне квадратного трехчлена в точке $x=-1$ было отрицательно или $x=-1$ являлся бы бо́льшим корнем трехчлена. В первом случае имеем систему неравенств $\begin{cases} k^2-5k>0, \\ 1-2k+2+3k+1<0, \end{cases}$ откуда $k<-4$. Если же $x_1=-1$, то $k=-4$; тогда $x_2=11$ и $x_2>x_1$ и, значит, полученное значение параметра условию задачи не удовлетворяет. **8.44.** $a>1\frac{3}{7}$. **8.45.** $k<-0{,}6$. **8.46.** $a<0$, $a>1{,}25$. **8.47.** б) $y=-\frac{1}{4}(x-4)^2$; в) $y=0{,}5x^2-x+4$. **8.48.** $M(1;\ -3)$. Указание. Пусть $M(x;\ 2x-5)$, тогда $f(x)=\sqrt{(x+7)^2+(2x-6)^2}+\sqrt{(x+5)^2+(2x-5)^2}=$ $=\sqrt{5(x-1)^2+80}+\sqrt{5(x-1)^2+45}$. Наименьшее значение $f(x)$ достигается при $x=1$. **8.49.** а) Прямую $y=-x$. Указание. Покажите, что $x_0=-p$, $y_0=p$ ($p\in\boldsymbol{R}$), где $(x_0;\ y_0)$ — координаты вершины параболы; б) Параболу $y=x^2$. **8.50.** $p=-2$, $q=0$; 1. Решеиие. По условию $x_0=1$ — решение уравнения $x^2+px+q=2x-3$, откуда $q=-p-2$. Итак, $y=x^2+px-p-2$ — заданиая фуикция, $x_1=-\frac{p}{2}$ — абсцисса вершины параболы, тогда $y=-\frac{p^2}{4}-p-2$. Пусть d — расстояние от вершины параболы до оси Ox, тогда $d=|y_1|=\left|\frac{p^2}{4}+p+2\right|=$ $=\frac{p^2}{4}+p+2=\left(\frac{p}{2}+1\right)^2+1$. Наимеиьшее значение d равно 1 и достигается при $p=-2$, в этом случае $q=0$. **8.54.** а) $-2<x<1$; б) $x=1$; в) $x\leqslant -2$; $x\geqslant 2$. **8.55.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **8.56.** а) $a=5$; б) $a=2$. **8.59.** а) $-4<x<1$, $1<x<2$; б) $x<2$; $x\neq 1$; в) $x=4$; $x\geqslant 5$; г) $1\leqslant x\leqslant 2$, $x=3$. **8.60.** а) $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$, $x=2$; б) $x<2$, $x\neq\frac{1}{3}$, $x>4$; в) $x\leqslant -\frac{2}{7}$, $x=0$, $x\geqslant 1$; г) $-1\leqslant x\leqslant -0{,}2$; $x=0$; $x=2$. **8.63.** а) $x\leqslant -2$, $x\geqslant 1$; б) 3,25; в) $x<0$, $x>1$; г) $a>3{,}25$. **8.64.** б) $x\in\boldsymbol{R}$. Указаиие. $D=(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)<0$. **8.65.** $a=-2$. Указание. $x=2$ и $x=3$ — корни данного квадратного трехчлена. **8.66.** $a=-1$. **8.67.** Нет решеиий. **8.68.** $x\in\boldsymbol{R}$. **8.69.** Нет решений. **8.70.** $x\in\boldsymbol{R}$. Указание. $D<0$ и $f(3)>0$, где $f(x)=ax^2+x-b$. **8.71.** Нет решений при $b^2-4ac<0$, $x=-\frac{b}{2a}$ при $b^2-4ac=0$. **8.72.** а) Да; б) нет. **8.73.** а) Нет; б) да. **8.74.** а) Нет; б) нет; в) да; г) иет. **8.78.** а) $x\leqslant\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $2<x\leqslant\frac{5+\sqrt{5}}{2}$; б) $x<2$, $x=6$, $x>10$. **8.81.** в) $-5<x<\frac{1}{2}$, $x>2$, $x\neq 3$; г) $-\frac{3}{7}\leqslant x\leqslant 1$, $x=3$, $x>5$. **8.82.** а) $x\neq\pm\sqrt{2}$, $x\neq -1$; б) $x\neq 2$, $x\neq 2\frac{1}{3}$; в) $x\neq 2$, $x\neq 3$, $x\neq 4$; г) $x\neq\pm 2$,

$x\neq 1$. **8.83.** -3; -2; -1; 0; 1; 2. **8.84.** $x\geqslant 13$. **8.85.** 1. Указание. Решение неравенства: $-1<x<3$, $x\neq 0$, $x\neq 2$. **8.88.** а) $x=-2$; б) $x=1$; в) $x=-3$, $1\leqslant x\leqslant 2$; г) $x=\pm 2$, $x=3$. **8.89.** г) $-\frac{1}{3}<x\leqslant 1$, $x\neq 0$. **8.90.** а) $x\in\boldsymbol{R}$; б) $-2\leqslant x\leqslant 2$; в) $-3\leqslant x<1{,}75$; г) $x<-3$, $x>9$. **8.91.** а) $x\leqslant -15$, $x\geqslant -4$; б) $x<1$, $x>1{,}5$; в) $x<1$; г) $x<-3$; $-2\leqslant x\leqslant 0$, $x>1$. **8.92.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 0$. Указание. Сравнив выражения $1-x^2$ и $\frac{1-x}{2}$, получим: $1-x^2\leqslant\frac{1-x}{2}$ при $x\leqslant -\frac{1}{2}$ или $x\geqslant 1$, $1-x^2>\frac{1-x}{2}$ при $-\frac{1}{2}<x<1$. Таким образом, искомые значения x определяются совокупностью двух систем неравенств $\begin{cases} x\leqslant -\frac{1}{2}, \\ x\geqslant 1, \\ 1-x^2\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ и $\begin{cases} -\frac{1}{2}<x<1, \\ \frac{1-x}{2}\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$ **8.93.** $-1\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{6}-2}{2}$. **8.94.** $x=1$, $x\geqslant 3$.

8.95. $x\leqslant -1$, $x=1$. **8.96.** а) $\{1,2\}$; б) $\left(-\infty;-\frac{8}{7}\right)\cup\left(-\frac{8}{7};\infty\right)$. **8.97.** а) $(-\infty;2]$; б) $\{0\}\cup[1;\infty)$; в) $\{0\}\cup[2;\infty)$; г) $\{2\}$. **8.99.** в) $[-0{,}5;0{,}5)$; г) $\left[-\frac{2}{3};2\right)\cup\{3\}$. **8.102.** а) $-1\leqslant x\leqslant 1$, $x=\pm 2$; б) $x=-2$, $1\leqslant x\leqslant 3$; в) $3<x<5$; г) $-1<x<3$, $x\neq 1$. Указание. Пусть $y=|x-1|$, тогда неравенство имеет вид $y^2-2y<0$. **8.103.** а) 0. Указание. Поскольку при любом $x\in\boldsymbol{R}$ $|x^2+2x|\geqslant 0$, то из условия, учитывая свойство транзитивности неравенств, заключаем, что $x\geqslant 0$. Значит, $x^2+2x\geqslant 0$ и $|x^2+2x|=x^2+2x$; б) -8; -7; -6; ...; -1; 0; 2. Указание. Приведите неравенство к виду $|x-1|(|x+3|-6)<0$, откуда $-9<x<3$, $x\neq 1$; в) ± 4. Указание. Неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} 2<|x|<5, \\ |x|\neq 3;\end{cases}$ г) 3; 4. Указание. Учитывая, что $x^2-4x+3=|x-1|\cdot|x+3|$, приведите неравенство к виду $(|x-1|-1)(|x-3|-2)<0$, откуда $0<x<1$, $2<x<5$. **8.106.** б) $x\leqslant -3{,}25$, $-1{,}25\leqslant x\leqslant 0{,}75$, $x\geqslant 2{,}75$; в) $-3\leqslant x\leqslant 0$, $4\leqslant x\leqslant 7$. Указание. Умножение обеих частей неравенства на $2x^2-x+1$ приводит к неравенству, равносильному данному. **8.107.** $c<-\frac{1}{7}$, $c>1$. **8.108.** $12\leqslant p<14$. **8.109.** $0<a\leqslant 2{,}25$. **8.110.** а) $-6<b\leqslant -2$; б) $b\geqslant 3$; в) $b<-6$. **8.111.** а) $0<a<28$; б) $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{3}$; в) $a<-4$; г) $-\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant 0$.

8.112. а) $-1\leqslant b\leqslant 1$; б) $0\leqslant b<\frac{5}{4}$; в) $b<-\frac{9}{16}$; г) $b\leqslant -2$. **8.114.** а) $x\in\boldsymbol{R}$ при $a\neq 1$, $x\neq 1$ при $a=1$; б) $x=-2$, при $a=-2$, нет решений при $a\neq -2$; в) $x=-1\frac{1}{3}$ при $a=2$, нет решений при $a\neq 2$; г) $x\in\boldsymbol{R}$ при $a\neq -0{,}5$, $x\neq -0{,}375$ при $a=-0{,}5$. **8.116.** $-1\leqslant a\leqslant 1$. Решение. При $a>0$ система неравенств $\begin{cases} x^2-ax<0, \\ ax>1\end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} 0<x<a, \\ x>\frac{1}{a}\end{cases}$ которая не имеет решений тогда и только тогда, когда $a\leqslant\frac{1}{a}$, откуда (с учетом условия $a>0$) получаем $0<a\leqslant 1$.

При $a=0$ условие задачи, очевидно, выполняется. При $a<0$ система неравенств $\begin{cases} x^2-ax<0, \\ ax>1 \end{cases}$ равносильна системе $\begin{cases} a<x<0, \\ x<\dfrac{1}{a}, \end{cases}$ которая не имеет решений тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{a}\leqslant a$, откуда (с учетом условия $a<0$) получаем $-1\leqslant a<0$. **8.117.** $0{,}5<a<3{,}5$. **8.118.** Таких a нет. **8.119.** $\dfrac{\sqrt{19}-2}{2}\leqslant a<\dfrac{4}{3}$. **8.120.** $-3\leqslant a<-1$. **8.121.** $a\leqslant\dfrac{1}{2}$. **8.122.** $p>1$. **8.123.** $-\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\leqslant k\leqslant -4+2\sqrt{3}$. Указание. Приведите неравенство к виду $y^2-\dfrac{1}{4}y-\dfrac{1}{8}<0$, где $y=|x-1{,}5|$, откуда $1<x<2$. **8.124.** $-2\leqslant a\leqslant -0{,}5$. **8.125.** $\dfrac{1}{2}\leqslant b\leqslant 1$. **8.126.** При $k>5$ оба утверждения истинны, при $k\leqslant 0$ оба утверждения ложны, при $0<k\leqslant 5$ первое утверждение истинно, второе ложно. Указание. Уравнение $x^2+(k+2)x+$ $+1=0$ имеет два различных отрицательных корня тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D>0, \\ -\dfrac{k+2}{2}<0, \end{cases}$ откуда $k>0$. Уравнение $x^2+(1-k)x+4=0$ имеет два различных положительных корня тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D>0, \\ -\dfrac{1-k}{2}>0, \end{cases}$ откуда $k>5$.

8.127. в) $(0;\ 4)\cup(4;\ \infty)$. **8.129.** а) $[-2;\ 0]\cup\{1{,}5\}$; б) $\{1\}\cup[2;\ 3)\cup(3;\ \infty)$; в) $(-\infty;\ -9)\cup$ $\cup(-9,\ -3]\cup\{-2\}\cup[7;\ 8)\cup(8;\ \infty)$; г) $\{0{,}5\}$. **8.130.** б) $(-\infty;\ 3]$; в) $(-\infty;\ 2{,}25]$. **8.131.** а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; в) $(0;\ 1]$; г) $(-\infty;\ -2]\cup$ $\cup[2;\ \infty)$. **8.132.** б) $[-2;\ \infty)$; в) $(-\infty;\ 5]$. **8.133.** а) $[2;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ -2]$; в) $[1;\ \infty)$. Указание. $y=\sqrt{3x^2-6x+4}=\sqrt{3(x-1)^2+1}\geqslant 1$ для всех $x\in\mathbb{R}$; г) $[0;\ 1]$. Указание. $y=\sqrt{1-2(x-2)^2}$. **8.134.** а) $[-4;\ 1)$; б) $[-1;\ 2)$; в) $[-2;\ 1]$; г) $[-1;\ 3]$. **8.135.** а) $[-1;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ 1]$; в) $[-2;\ \infty)$; г) $[-4;\ 4]$. **8.136.** а) $[3;\ \infty)$; б) $[3;\ 12)\cup(12;\ \infty)$; в) $[6{,}75;\ \infty)$; г) $[6{,}75;\ 27)\cup(27;\ \infty)$. **8.138.** в) $y(1)=1$; г) $y(1{,}5)=\dfrac{1}{12}$. **8.140.** г) $y(-2)=0$. **8.148.** в) Нечетная; г) четная. **8.149.** а) Четная; б) нечетная; в) четная; г) четная. **8.150.** а) Нечетная; б) четная; в) четная; г) четная. **8.151.** а) $y=\sqrt{|x|}$; б) $y=x^2-3|x|$; в) $y^2=x^2-4|x|+3$; г) $y=\dfrac{1}{|x|-1}$. **8.152.** а) $y=x|x|$; б) $y=-x|x|$; в) $y=x(|x|-2)$; г) $y=\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$. **8.160.** а) Рис. 2; б) рис. 3. **8.161.** а) Рис. 4; б) рис. 5. **8.162.** $(-4;\ 3)$, $(-1-\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}-3)$. **8.163.** $(0{,}5;\ 0)$, $(2;\ 6)$, $(6;\ 22)$. **8.165.** а) Рис. 6. **8.166.** а) Рис. 7. **8.167.** б) Рис. 8. Указание. $y=|x^2-2|x||$. **8.169.** в) Рис. 9; г) рис. 10. **8.173.** а) Рис. 11. **8.174.** б) Рис. 12. **8.175.** а) Указание. $y=x^2+1$ при $x>0$, $y=-(x^2+1)$ при $x<0$; б) Рис. 13. Указание. $y=\dfrac{3}{x}$ при $0<x<3$, $y=\dfrac{x}{3}$ при $x\geqslant 3$. **8.176.** а) Рис. 14. Указание. $y=|x^2+x-2|$ при $x>1$, $y=-|x^2+x-2|$ при $x<1$; б) Указание. $y=|x-1|$ при $x<-2$, $x>1$, $y=-|x-1|$ при $-2<x<1$. **8.180.** г) 3.

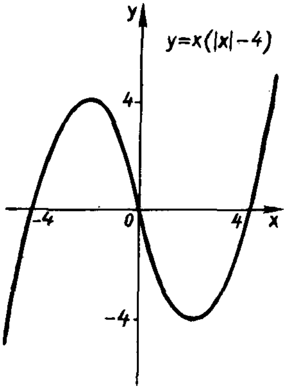

Рис. 2

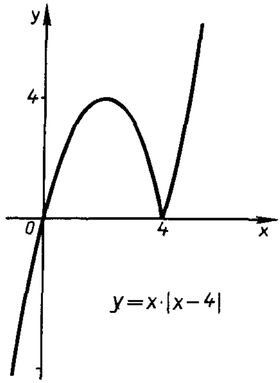

Рис. 3

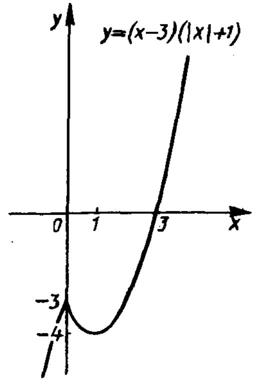

Рис. 4

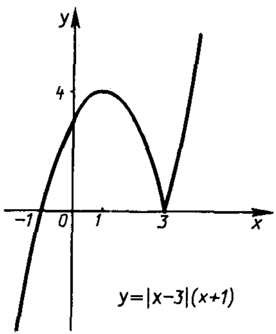

Рис. 5

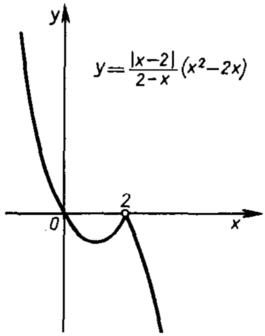

Рис. 6

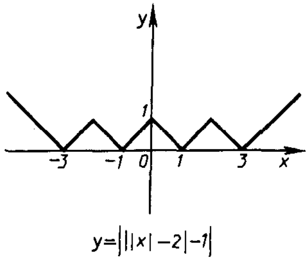

Рис. 7

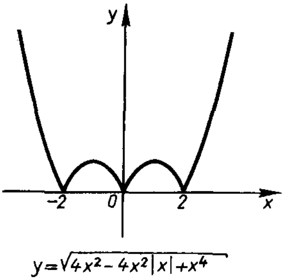

Рис. 8

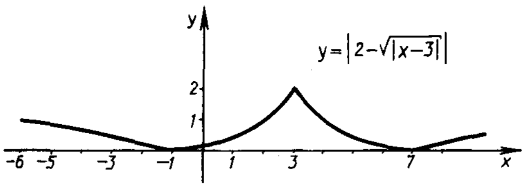

Рис. 9

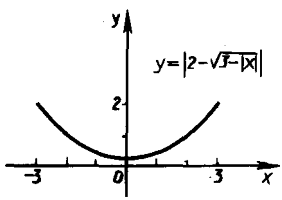

Рис. 10

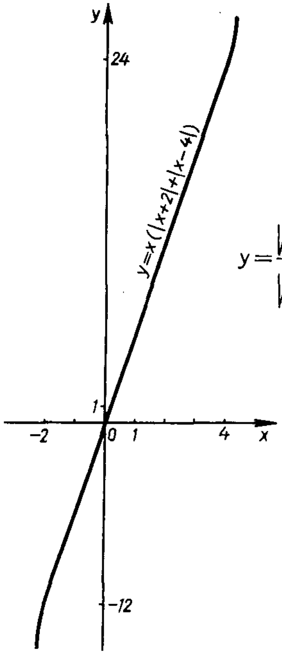

Рис. 11

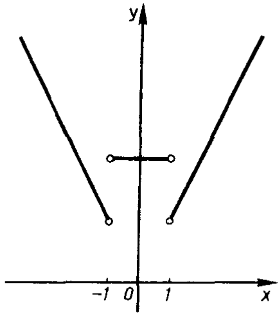

Рис. 12

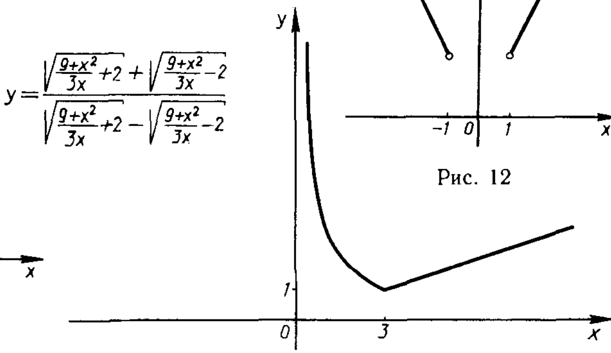

Рис. 13

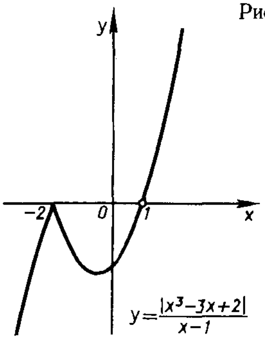

Рис. 14

8.181. г) 2. **8.183.** а) 2; б) 1. **8.184.** а) 2; б) -1. **8.185.** а) 1; б) -1. **8.186.** а) 3; б) -1. **8.187.** а) -1. Решение. Область определения уравнения — $[-1;\ \infty)$, на данном промежутке функция x^2+3x+6 возрастает, значит, возрастает функция $\sqrt{x^2+3x+6}$, откуда следует, что левая часть уравнения — возрастающая на $[-1;\ \infty)$ функция (как сумма двух возрастающих функций). Правая часть уравнения — постоянная, уравнение, следовательно, имеет не более одного решения. Корень $x=-1$ легко угадать; б) 1. Указание. Левая часть уравнения — возрастающая на $[1;\ \infty)$ функция, а правая часть — убывающая.

§ 9

9.1. в) -9; 1; 9; г) -4; -3; 4. **9.2.** а) -2; 1; б) -1; 3; в) -2; $-1{,}5$; г) $-\dfrac{2}{3}$; 0,5. **9.3.** а) -4; -1; 2; б) -3; в) 0,5; г) $\dfrac{1}{3}$. **9.4.** а) -1. Указание. Левая часть уравнения — возрастающая на $\boldsymbol{R}$ функция, значит, уравнение имеет единственное решение; б) 1. Указание. Приведите уравнение к виду $x^3+5x-6=0$, далее рассуждения аналогичны рассуждениям в 4, *а*; в) 1;

$\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$; г) 1; $1\pm\sqrt{3}$. **9.5.** а) -2; 1; 4; б) 2; 4; в) -2; -1; 4; г) -1; 2; 4. **9.6.** а) $-0{,}25$. Указание. Запишите уравнение в виде $(3x)^3+(x+1)^3=0$, далее разложите левую часть уравнения, используя формулу суммы кубов; б) $\frac{1}{6}$. **9.9.** а) -2; 1; 3, $a=1$; б) -2; 1; 3, $a=-2$. **9.10.** а) -3; 2; $a=-8$. Указание. Подставляя значение $x=-3$ в уравнение, покажите, что $a=-8$. Левую часть уравнения разложите на множители: $x^3-x^2-8x+12=x^3-2x^2+$ $+x^2-8x+12=x^2(x-2)+(x-2)(x-6)=(x-2)(x^2+x-6)$; б) -3; -2; $-0{,}5$, $a=6$. **9.11.** а) $\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$. Указание. Разложите на множители левую часть уравнения: $x^4+4x-1=x^4+2x^2+1-2x^2+4x-2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2=$ $=(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1-\sqrt{2})$; б) Указание. Заменой переменной $y=\frac{1}{x}$ уравнение сводится к уравнению из 4, *а*. **9.12.** а) ±2, $\pm\frac{1}{3}$; б) $\pm0{,}6$; в) -2; -1; г) $-\frac{1}{3}$; 2. **9.13.** а) $\pm a$; $\pm\sqrt{3}$; б) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{a^3}$ при $a\geqslant0$; в) $-a$; 2; г) $-2a$; -3. **9.15.** в) -1; 6; $\frac{5\pm\sqrt{97}}{2}$; г) -7; -1; $-4\pm\sqrt{3}$. **9.17.** а) -3; 4; б) -2; $\frac{2}{3}$; в) -1; 2. Указание. Введите переменную $y=|x^2-x|$; г) -3; 1. Указание. Введите переменную $y=|x^2+2x|$. **9.21.** Нет решений при $0<a<1$; одно решение при $a=0$, $a=1$; два решения при $a<0$, $a>1$. Указание. Записав уравнение в виде $(x+2)^4+(x+2)^2-a^2+a=0$, покажите, что оно равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}(x+2)^2=a-1,\\(x+2)^2=-a.\end{array}\right.$ **9.24.** г) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$. **9.25.** а) 1; 2; б) $-1\pm\sqrt{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. Указание. Разделив обе части уравнения на x^2, введите переменную $y=x-\frac{2}{x}$, после чего уравнение примет вид $y^2-y-6=0$. **9.27.** б) 1; 2; $\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$. Указание. Разделив обе части уравнения на $(x+2)^2$, введите переменную $y=\frac{x^2-2x+4}{x+2}$. **9.29.** а) $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$; $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. Указание. Разделите обе части уравнения на x^2, введите переменную $y=2x+\frac{1}{x}$, тогда $(y-3)(y+5)=9$, откуда $y=-6$ или $y=4$; б) -6; -4; $\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$. **9.30.** а) 1; 2. Указание. Разделив числитель и знаменатель каждой дроби на x, положите $y=x+\frac{2}{x}$, тогда уравнение примет вид $\frac{24}{2y-3}=\frac{12}{y+1}+5$; б) $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. **9.31.** а) $7\pm\sqrt{34}$; б) 1; 4. Указание. Разделите на x числитель и знаменатель каждой дроби и положите $y=x+\frac{4}{x}$. **9.32.** а) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Указание. Выделяя квадрат разности в левой части уравнения, получите $\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x+1}=3$,

откуда $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x+1}-3=0$, далее введите переменную $y=\frac{x^2}{x+1}$; б) $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.
9.33. а) -1; 0; 3; б) -4; -1; 0. **9.34.** а) -2; 1; б) 1; 2. **9.35.** а) -1; б) -2; 0. **9.36.** а) 1; 2; 4; б) -3; -1. **9.37.** а) -1; 5; б) -1; 0; 3. **9.38.** а) 1; 2; б) 0; 2. **9.39.** $x=-3$ при $a=0$, $x=-0{,}5$ при $a=1$. **9.40.** При $|a|>2$ нет решений, при $a=2$ одно решение, при $-2\leqslant a<2$ два решения. **9.41.** При $|a|>\sqrt{2}$ нет решений, при $|a|=\sqrt{2}$ одно решение, при $|a|<\sqrt{2}$ два решения; $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $a=\sqrt{2}$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $a=-\sqrt{2}$. **9.44.** $a=0$. Решение. Если x_0 — корень уравиеиия, то $-x_0$ также является корнем уравнения, значит, для единственности решения необходимо, чтобы $x_0=0$. В этом случае из уравнения получим $a^2-a=0$, т. е. $a=0$ или $a=1$. Проверим достаточность каждого из полученных значений параметра: при $a=0$ уравнение имеет вид $x^{10}=0$, т. е. решение единствеино; при $a=1$ уравнение имеет вид $x^{10}-|x|=0$, корнями которого являются числа ±1 и 0. **9.45.** $a=1$. **9.46.** а) $(-1;\ y)$, $y\in\boldsymbol{R}$; $(x;\ 2)$, $x\in\boldsymbol{R}$; б) $(1,\ y)$, $y\in\boldsymbol{R}$; $(x;\ -1)$, $x\geqslant0$. **9.47.** а) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{3}{4};\ -\frac{3}{2}\right)$. **9.48.** а) $(-3;\ 2)$. Указание. Рассматривая уравнение как квадратное относительно x, получите $D=-(y-2)^2$, откуда $y=2$. Другой способ: умножая на 4 обе части уравнения, представьте уравнение в виде $(2x+3y)^2+(y-2)^2=0$; б) $(1;\ 1)$. **9.49.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. Указание. Прнведите уравнение к виду $(x-2y)^2+(xy-2)^2=0$; б) $(2;\ 3)$, $(-3;\ -2)$. Указание. Приведите уравнение к виду $(xy-6)^2+(x-y+1)^2=0$. **9.50.** а) $(-1;\ 2)$. Решение. $(x^2+2x+2)(y^2-4y+6)=((x+1)^2+1)((y-2)^2+2)\geqslant\geqslant1\cdot2=2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=-1$ и $y=2$; б) $(2;\ -3)$, $(-2;\ -3)$. **9.51.** а) $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$. Указание. $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant2$ для всех $x\neq0$, $\sqrt{4-|y|}\leqslant2$ для всех $y\in\boldsymbol{R}$; б) $(1;\ 1)$, $(4;\ 16)$. Решенне. Используя неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим и неотрицательность модуля действительного числа, имеем: $|2x-5|+$
$+\frac{9}{|5-2x|}+|\sqrt{y}-x|\geqslant2\sqrt{|2x-5|\cdot\frac{9}{|2x-5|}}+0=6$, причем равенство достигается только тогда, когда $|2x-5|=\frac{9}{|2x-5|}$ и $\sqrt{y}=x$, откуда находим решения $(4;\ 16)$, $(1;\ 1)$. **9.53.** в) Объединение двух лучей с общим началом в точке $(0;\ 0)$: $y=0$ при $x\geqslant0$, $y=2x$ при $x\geqslant0$. **9.54.** в) Объединение двух прямых $y=x$ и $y=0{,}5x$. **9.55.** г) Объедииеиие двух прямых $y=-x$ и $y=x-4$. Указанне. Записав уравнение в виде $y^2+4y+4=x^2-4x+4$, получим $(y+2)^2=(x-2)^2$, откуда $|y+2|=|x-2|$, т. е. $y+2=x-2$ или $y+2=2-x$. **9.56.** в) Рис. 15. **9.58.** б) Рис. 16; в) рнс. 17. **9.59.** б) Рис. 18; в) объедииение двух симметричных относительно оси Ox парабол $y=x^2-2x$ и $y=2x-x^2$. **9.60.** г) Рис. 19. **9.61.** б) Квадрат с вершинами в точках $(2;\ 0)$, $(3;\ 1)$, $(4;\ 0)$, $(3;\ -1)$; г) рис. 20. **9.62.** в) Объедииеиие окружности с цеитром $(0;\ 0)$ радиуса 2 и двух прямых $y=\pm x$, исключая точку $(0;\ 0)$. **9.63.** а) Объединение ветвей гиперболы $xy=1$ и прямой $y=x$, исключая точку $(0;\ 0)$; в) объедииение ветвей гипербол $xy=\pm1$ и прямых $y=\pm x$, исключая точку $(0;\ 0)$. **9.64.** а) Окружиость с центром $(1;\ 0)$ радиуса 1; в) объединеине двух окружиостей с цеитрами $(0;\ 1)$ и $(0;\ -1)$ и радиусов 1; г) Указание. Запишите уравиеине в виде $(|x|-1)^2+$

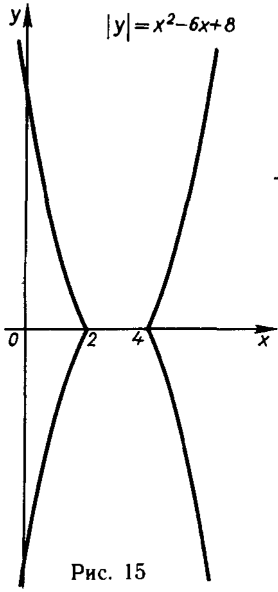

Рис. 15

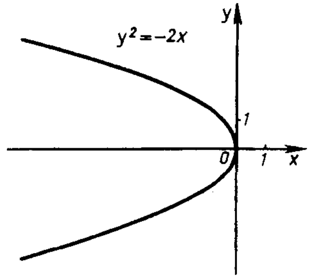

Рис. 16

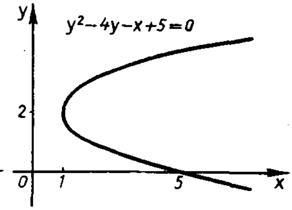

Рис. 17

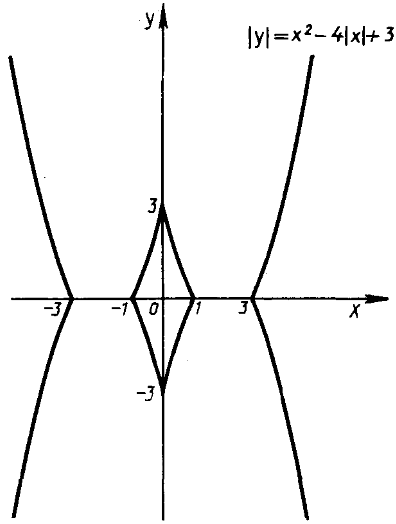

Рис. 18

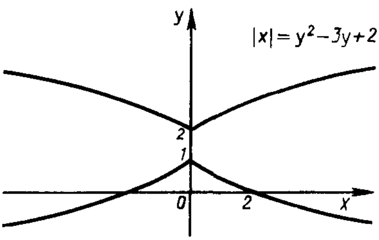

Рис. 19

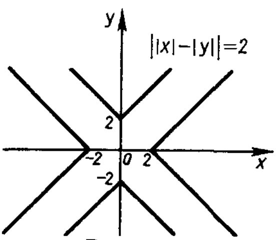

Рис. 20

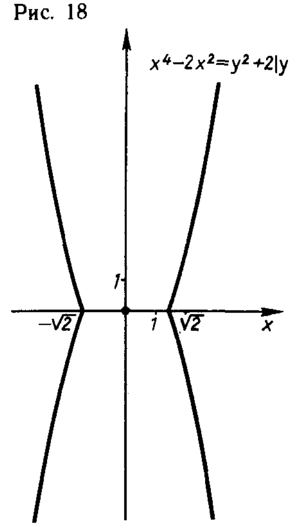

Рис. 21

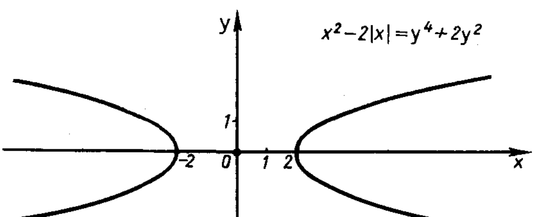

Рис. 22

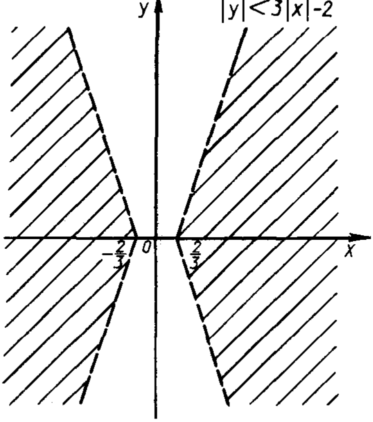

Рис. 23

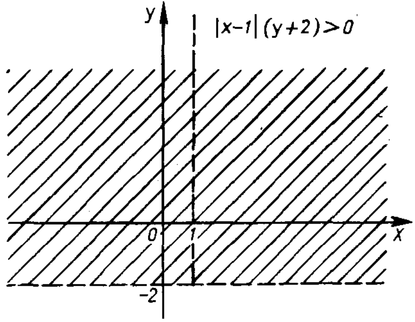

Рис. 24

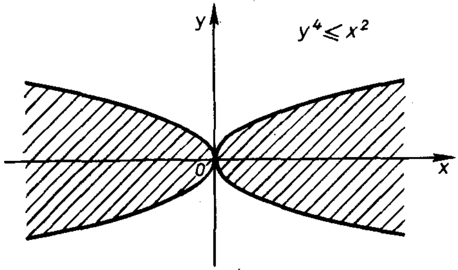

Рис. 26

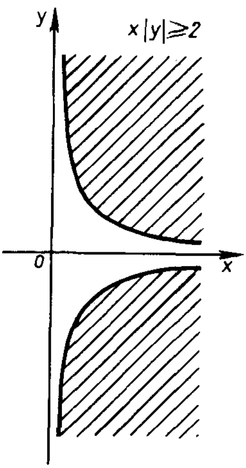

Рис. 25

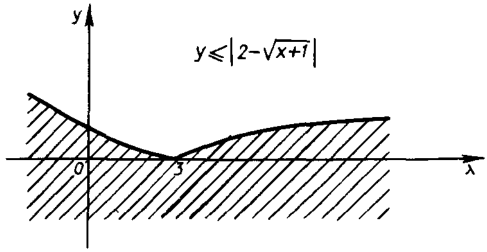

Рис. 27

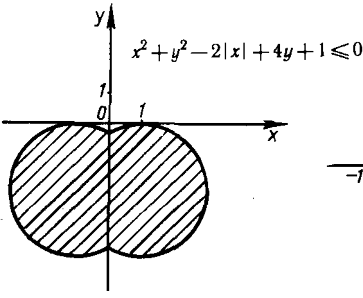

Рис. 28

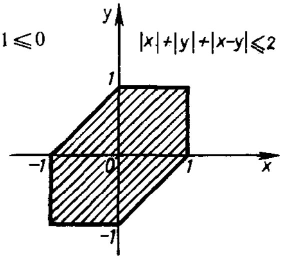

Рис. 29

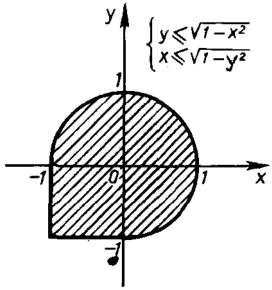

Рис. 30

$+(y+2)^2=4$. **9.65.** а) Объединение двух парабол $y=x^2-2$ и $y=-x^2$. Указание. Запишите уравнение в виде $(x^2-1)^2=(y+1)^2$; в) рис. 21; г) рис. 22. **9.66.** г) Рис. 23. **9.67.** г) Рис. 24. **9.68.** в) Рис. 25. **9.70.** г) Рис. 26. **9.71.** в) Рис. 27. **9.72.** б) Точка $(2; 3)$; г) рис. 28. **9.73.** а) 4π; б) 8π. **9.74.** а) 2π. Указание. Искомая фигура — объединение двух кругов с центрами $(2; 0)$ и $(-2; 0)$ радиусов 1; б) 4π. Указание. Искомая фигура — объединение четырех кругов с центрами $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$ и $(1; -1)$ радиусов 1. **9.75.** а) 2. Указание. Искомая фигура — прямоугольный треугольник с вершинами в точках $(0; 4)$, $(1; 0)$ и $(0; 0)$; б) 2π. Указание. Искомая фигура — часть круга с центром $(0; 0)$ радиуса 2, лежащая в I и III координатных углах. **9.76.** а) 3. Указание. Искомая фигура изображена на рисунке 29. **9.77.** а) $4+2\pi$; б) 7. Указание. Искомая фигура — часть квадрата с вершинами $(2; 0)$, $(4; 2)$, $(2; 4)$, $(0; 2)$, не лежащая внутри другого квадрата с вершинами $(1; 0)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(0; 1)$. **9.78.** а) 1; б) $1+0{,}75\pi$. Искомая фигура изображена на рисунке 30. **9.81.** а) $(4; 9)$; б) $(7; 1)$; в) $(-3; -9)$; г) $(-2; -1)$. **9.82.** а) $(-5; 0)$, $(-2; 3)$, $(0; 5)$; б) $(3; 0)$, $(4; -1)$, $(6; 3)$; в) $(3; 1)$; г) $(1; 4)$, $(3; 4)$. **9.83.** а) $(-5; -3)$, $(-4; 0)$, $(-3; -1)$, $(-2; 0)$, $(-1; -3)$; б) $(0; -5)$, $(-6; -5)$, $(-3; -4)$. **9.84.** а) $(-6; 2)$, $(-1; 1)$, $(-11; 3)$; б) $(3; -3)$, $(2; 2)$, $(4; -8)$, $(-5; 37)$. **9.85.** а) $(1; 3)$, $(2; 4)$, $(3; 3)$; б) $(-3; 2)$, $(-2; 1)$, $(-2; 3)$. **9.86.** а) $(-2; -1)$, $(-1; 0)$; б) $(2; 0)$, $(3; 1)$, $(3; -1)$. **9.90.** а) $(2; 1)$; б) $(1; 2)$. **9.92.** а) $(3; \sqrt{7})$; б) $(-\sqrt{5}; -2)$. **9.93.** в) $(1; 1)$, $(1; -1)$; г) $(1; -1)$, $(-1; -1)$. **9.94.** а) $(5; 0)$, $(-3; 2)$; б) $(1; 2)$, $(-1; 4)$; в) $(1; 1)$; г) $(-1; -2)$. **9.95.** а) $(1; 2)$; б) $(-1; 2)$; в) $(-10; -7)$, $\left(3\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $(2; 1)$, $\left(-\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$; г) $(0; 4)$, $(2{,}4; -0{,}8)$, $(-12; -20)$. **9.97.** а) $(1{,}5; 5{,}5)$, $(2{,}5; 5{,}5)$; б) $(3; 0{,}5)$, $(3; 1{,}5)$. **9.98.** а) $(x; 5-x)$, где $x\geqslant 3$; б) $(x; 6-x)$, где $1\leqslant x\leqslant 7$. **9.99.** а) $(t; t)$, где $-2\leqslant t\leqslant 0$; $(t; -t-4)$, где $-4\leqslant t<-2$; б) $(t; t+2)$, где $0\leqslant t\leqslant 3$; $(t; 8-t)$, где $3<t\leqslant 6$. **9.100.** $\frac{5}{7}$. **9.105.** $a=\frac{1}{17}$. **9.106.** $a=1$, $b=-1$. **9.107.** а) $a=4$, $(0; 2)$; б) $a=6$, $(3; 0)$; в) $a>2$, $\left(\frac{a-2}{2}; \frac{a+2}{2}\right)$; г) $a\leqslant -1$, $a=-\frac{1}{3}$, $a>1$. **9.108.** а) $(1; 2; 3)$; б) $(1; -3; 2)$; в) $(1; 2; 5)$; г) $(5; 4; 3)$. **9.109.** а) $(5; 5; -2)$; б) $(-3; 2; 4)$; в) $(1; 2; 3; 4)$; г) $(1; 1; 1; 1)$. **9.110.** а) $(4; -9; -9; -3; 3)$; б) $(10; 9; -2{,}5; 3; -1)$. **9.116.** г) $(3; -1)$, $(-3; 1)$. **9.117.** б) $(2; 0)$, $(-1; -1)$. **9.120.** б) $(a; -a)$. **9.121.** а) $(1; 1)$, $(1; -1)$; б) $(1; 1)$, $(2; 0)$; в) $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; \sqrt{5})$, $(-2; -\sqrt{5})$; г) $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 2)$. **9.122.** б) $(3; 2)$, $(2; 3)$; в) $(2; 1)$. **9.123.** а) $(3; 1)$, $(1; 3)$; б) $(5; 1)$, $(-1; -5)$; в) $(1; 1)$, $(1; -1)$, $\left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $(2; -1)$, $(-2; -1)$. **9.124.** а) $(\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$, $(3; -1)$, $(-1; 3)$; б) $(0; 0)$, $(2; 2)$, $(-2; -2)$; в) $(0; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 3)$. **9.125.** а) $(0; 2)$, $(2; 0)$, $(0; -2)$; б) $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(-0{,}5; 0)$. **9.126.** а) $(2; -1)$, $(-2; -1)$; б) $(1; 1)$, $(-1; -1)$. **9.127.** а) $(-4; 3)$, $(-4; -3)$; б) $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(-1; 2)$, $(1; -2)$. **9.128.** а) $(-1; 2)$, $(-1; -2)$, $(-4; 1)$, $(-4; -1)$; б) $(-1; 1)$, $(-1; -1)$. **9.129.** 0,25. **9.131.** б), в), г) $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; -1)$, $(-2; 1)$. **9.132.** а) $(0; 0)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; б) $(3; 2)$, $(-2; -3)$; в) $(1; 1)$. **9.133.** а) $(1; -1)$, $\left(\frac{6}{7}; -\frac{1}{7}\right)$; б) $(1; 2)$, $(1; 0{,}5)$; в) $(-1; 1)$, $\left(x; \frac{2}{3}\right)$, где $x \in \boldsymbol{R}$; г) $(-1;\ 9)$, $(4;\ y)$, где $y \in \boldsymbol{R}$. **9.134.** а) $(1;\ 1)$, $(-2;\ -2)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Указание. Вычтите из одного уравнения системы другое; б) $(2;\ 1)$, $(-4;\ -5)$, $(0;\ 3)$. Указание. Рассмотрите разность уравнений системы и, записав полученное уравнение в виде $(x-2)^2-(y-1)^2=0$, получите $y=x-1$ или $y=3-x$. **9.135.** а) $(-1;\ -1)$. Указание. Сложите уравнения системы; б) $(1;\ 1)$. **9.136.** а) $(2;\ 3)$. Указание. Сложите уравнения системы и запишите полученное уравнение в виде $(x-2)^2+(y-3)^2=0$; б) нет решений. **9.137.** а) $(4;\ 1)$, $(4;\ -1)$, $(1;\ 2)$, $(1;\ -2)$. Указание. Сложите уравнения системы; б) $(2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $(1;\ \sqrt{2})$, $(1;\ -\sqrt{2})$. Указание. Рассмотрите разность уравнений системы; в) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. Указание. Сложите уравнения системы и преобразуйте полученное уравнение к виду $(2x+3y)^2=49$; г) $(1;\ 1)$. Указание. Сложите уравнения системы и получите $x+y=2$. **9.138.** а) $(0;\ 1)$, $(-3;\ 1)$. Указание. Рассмотрите разность уравнений системы; б) $(1;\ 1)$. Указание. Рассмотрите разность уравнений системы. **9.139.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; б) $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ -2)$. **9.140.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; б) $(2;\ 1)$. **9.141.** б) $(3;\ 2)$; в) $(1;\ 2)$, $(8;\ 0{,}5)$; г) $(2;\ 1)$. **9.142.** а) $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$; б) $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$. **9.143.** а) $(2;\ 2)$, $\left(-\frac{2}{3};\ -2\right)$; б) $(0;\ a)$, $a \in \boldsymbol{R}$, $(b;\ 1)$, $b \in \boldsymbol{R}$. **9.144.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ 1)$. Указание. Перемножьте уравнения системы; б) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $(1;\ -1)$, $(-1;\ 1)$. **9.145.** а) $(1;\ 1)$, $(7;\ -2)$. Указание. Почленно разделите одно уравнение системы на другое, предварительно преобразовав первое уравнение к виду $(x+3y)(x+1)=8$, а второе — к виду $(x+3y)(y-2)=-4$; б) $(2;\ 1)$, $(-4;\ -2)$. Указание. Записав систему в виде $\begin{cases}(x+y)(2x-3y+1)=6,\\(x-y)(2x-3y+1)=2,\end{cases}$ разделите почленно одно уравнение на другое. **9.146.** а) $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$, $(-3;\ -1)$, $(-1;\ -3)$. Указание. Используйте равенство $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$; б) $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$, $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$. **9.147.** а) $(2;\ 1)$. Указание. Преобразуйте систему к виду $\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=5,\\(x^2+y^2)(x+y)=15\end{cases}$ и почленно разделите одно уравнение на другое; б) $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $\left(2\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-2\sqrt{2};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Указание. Используйте равенство $x^4+4y^4-5x^2y^2=(x^2+2y^2+3xy)(x^2+2y^2-3xy)$. **9.149.** б) $(6;\ 7)$, $(7;\ 6)$, $(-5+\sqrt{6};\ -5-\sqrt{6})$, $(-5-\sqrt{6};\ -5+\sqrt{6})$. **9.150.** а) $(1;\ 1)$; б) $(-1;\ -1)$; в) $(1;\ 1)$; г) $(1;\ 1)$. **9.152.** а) $(0{,}5;\ 0{,}5)$, $(0{,}5;\ -0{,}5)$, $(-0{,}5;\ 0{,}5)$, $(-0{,}5;\ -0{,}5)$. Указание. Введите переменные $u=|x|$, $v=|y|$; б) $(1;\ 2)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. **9.153.** а) $(-1+\sqrt{6};\ -1+\sqrt{6})$, $(-1-\sqrt{6};\ -1-\sqrt{6})$, $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$; б) $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$. **9.154.** а) $(2;\ 2)$, $(-2+2\sqrt{2};\ -2-2\sqrt{2})$, $(-2-2\sqrt{2};\ -2+2\sqrt{2})$; б) $(1;\ -2)$, $(-2;\ 1)$. **9.155.** а) $(3;\ 4)$, $(4;\ 3)$, $(11+2\sqrt{31};\ 11-2\sqrt{31})$, $(11-2\sqrt{31};\ 11+2\sqrt{31})$; б) $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $(-3+\sqrt{3};\ -3-\sqrt{3})$, $(-3-\sqrt{3};\ -3+\sqrt{3})$. **9.157.** в) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; $\left(\sqrt{\frac{7}{3}};\ \sqrt{21}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}};\ -\sqrt{21}\right)$; г) $(-1;\ -1)$, $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$. **9.158.** б) $(1;\ 1)$, $(1-\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2})$. **9.159.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$,

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\ \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};\ -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; б) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$. **9.160.** а) $(2;\ 1)$, $(0;\ 3)$, $(-3;\ 0)$. Указание. Умножьте второе уравнение на 2 и сложите с первым, полученное таким образом уравнение является квадратным относительно $x-y$; б) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $\left(2\sqrt{13};\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-2\sqrt{13};\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. **9.161.** а) $(0;\ 0)$, $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{13}};\ \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{13}};\ -\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$. Указание. В случае $y\neq 0$ разделите обе части каждого уравнения на y и введите переменные $u=x^2+y^2$, $v=\frac{x}{y}$; б) $(1;\ 1)$. **9.162.** а) $(1;\ 2)$, $(-2{,}6;\ -3{,}4)$; б) $(1;\ -2)$. **9.163.** а) $(-4;\ 4{,}8)$, $(3;\ 0{,}6)$. Указание. Введите переменные $u=x^2+x$, $v=3x+5y$; б) нет решений. **9.164.** а) $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$; б) $(4;\ -1)$; в) $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$; г) $(-1;\ -1)$, $(-2+\sqrt{2};\ -2-\sqrt{2})$, $(-2-\sqrt{2};\ -2+\sqrt{2})$. **9.165.** а) $(\sqrt{10};\ \sqrt{10})$, $(-\sqrt{10};\ -\sqrt{10})$, $(4;\ 2)$, $(-4;\ -2)$; б) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$; в) $(2;\ 4)$, $(-2;\ -4)$; г) $(1;\ 3)$, $(-1;\ -3)$. **9.166.** в) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{7}};\ -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt{7}};\ \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$. **9.167.** б) $(-1;\ 1)$, $(1;\ -1)$; в) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{7}};\ \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{7}};\ -\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$; г) $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$. **9.168.** а) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(1;\ -1)$, $(-1;\ 1)$; б) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{10}};\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}};\ -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; в) $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$, $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$; г) $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$. **9.169.** а) $(1;\ 1)$, $\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $(-4;\ -1)$; в) $(1;\ -1)$; г) $(1;\ -1)$, $(1{,}5;\ 0{,}5)$. **9.170.** а) $(1;\ -1)$, $(-1;\ -1)$, $\left(2\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(-2\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; б) $(-1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{7}};\ \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{7}};\ -\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$. **9.171.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{3}};\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\ -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$; б) $(t;\ t)$, где $t\in\boldsymbol{R}$, $\left(\frac{3}{\sqrt{19}};\ \frac{2}{\sqrt{19}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{19}};\ -\frac{2}{\sqrt{19}}\right)$. **9.172.** а) $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $(1{,}6;\ -3{,}2)$; б) $(0;\ 0)$, $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2}\right)$. **9.173.** а) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. **9.174.** а) $(2\sqrt{3};\ \sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{7};\ \sqrt{7})$, $(2\sqrt{7};\ -\sqrt{7})$; б) $(8;\ 4)$, $(-8;\ -4)$, $(7;\ 1)$, $(-7;\ -1)$. **9.175.** а) $(1;\ -1)$. **9.176.** а) $(2\sqrt{6};\ 2\sqrt{6})$, $(-2\sqrt{6};\ -2\sqrt{6})$, $(8;\ -2)$, $(-8;\ 2)$; б) $(-1;\ -1)$, $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$. **9.177.** а) $(1;\ 2;\ -3)$, $(3;\ 0;\ -1)$; б) $(2;\ 1;\ -1)$; в) $(-1;\ 1;\ -1)$; г) $(1;\ 2;\ -1)$, $(-1;\ 4;\ 1)$. **9.178.** а) $(1;\ 1;\ 2)$; б) $(3;\ 2;\ 1)$, $(-3;\ -2;\ -1)$. **9.179.** б) $(4;\ 1;\ 3)$, $\left(-\frac{23}{7};\ -\frac{27}{7};\ \frac{4}{7}\right)$. **9.180.** а) $(1;\ 2;\ -3)$, $(-1;\ -2;\ 3)$. Указание. Перемножив почленно все уравнения системы, получите $xyz=\pm 6$; б) $(1;\ 2;\ 3)$, $(-1;\ -2;\ -3)$. **9.181.** а) $(1;\ 3;\ 2)$, $(-1;\ -3;\ -2)$; б) $(1;\ 2;\ 3)$. **9.182.** а) $(1;\ 1;\ 2)$; б) $(-2;\ 1;\ 1)$, $(1;\ 1;\ -2)$, $(-1;\ -1;\ 2)$, $(2;\ -1;\ -1)$. **9.183.** а) $(5;\ 3)$. Указание. Из первого уравнения следует, что

$y\geqslant 3$, значит, $|y|=y$ и $|y-2|=y-2$. Неравенство системы преобразуйте к виду $(y-3)^2\leqslant 0$, откуда $y=3$; б) (2; 1). **9.184.** (0; -1). Решение. При $x=0$ имеем $y=-1$. Если $x<0$, то $(x-2)^2>4$, и, учитывая, что для всех $y\in\boldsymbol{R}$ $(y^2-1)^2\geqslant 0$, получаем $(x-2)^2+(y^2-1)^2>4$, т. е. первое уравнение системы решений не имеет. **9.185.** (1; 1). Указание. Первое уравнение системы перепишите в виде $(x-2y+1)^2+(y-1)^2=0$. Другой способ: первое уравнение системы рассмотрите как квадратное относительно x, тогда $D=-(y-1)^2$. **9.186.** (1; 1), $\left(-2\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$. Указание. Преобразуйте систему к виду $\begin{cases}(x+y+1)(x-2y+1)=0.\\(x+y+1)(2x-y+1)=6\end{cases}$

9.187. (2; 1), (2; -1). Решение. Записав второе уравнение системы в виде $(x-2)^2=2(y^6-1)$, получим $y^6\geqslant 1$, т. е. $y^2\geqslant 1$. С другой стороны, из второго уравнения $y^2=\frac{4x}{4+x^2}$, для всех $x\in\boldsymbol{R}$ $\frac{4x}{4+x^2}\leqslant 1$, значит, $y^2\leqslant 1$. Таким образом, $y^2=1$ и $x=2$. **9.188.** (-1; 1). Решение. Записав первое уравнение системы в виде $(y-1)^2=x^2-1$, имеем $x^2\geqslant 1$, т. е. $x\leqslant -1$ или $x\geqslant 1$. Второе уравнение системы перепишем в виде $(x+y)^2=-x^2-x$, откуда $x^2+x\leqslant 0$, т. е. $-1\leqslant x\leqslant 0$. Таким образом, $x=-1$, далее получаем $y=1$. **9.189.** (2; 4). **9.190.** а) (1; 1; 1); б) (1; 1; 1; 1). Указание. Сложите уравнения системы и воспользуйтесь тем, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2. **9.191.** а) (2; 2; 2), (-2; -2; -2). Указание. Условие $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$ равносильно условию $x=y=z$; б) (1; 1; 1), (1; 1; -1), (1; -1; 1), (1; -1; -1), (-1; 1; 1), (-1; 1; -1), (-1; -1; 1), (-1; -1; -1). **9.192.** а) (1; 1; 1); б) (6; 6; 6). **9.193.** б) (4; 4; 0). Решение. Из второго уравнения системы следует, что $xy\geqslant 16$, т. е. x и y — одного знака, но их сумма равна 8, значит, $x>0$ и $y>0$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем: $8=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\geqslant 2\sqrt{16}=8$, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $x=y=4$. Из второго уравнения находим $z=0$. **9.194.** а) (3; 1; 18); б) (1; 1; 0,5), (1; 1; $-0{,}5$). Указание. Если $x>0$ и $y>0$, то $2=x+y+\sqrt{1-4z^2}\geqslant 2\sqrt{xy}+\sqrt{1-4z^2}\geqslant 2$. Равенство возможно тогда и только тогда, когда $x=y=1$ и $1-4z^2=0$. Если $x<0$ и $y<0$, то $y=\frac{1}{x}$, $x+\frac{1}{x}\leqslant -2$, и, учитывая, что $\sqrt{1-4z^2}\leqslant 1$, заключаем, что $2=x+\frac{1}{x}+\sqrt{1-4z^2}\leqslant$ $\leqslant -2+1=-1$, получили противоречие. **9.195.** а) $a=6$, (3; 3); $a=-6$, (-3; -3); б) $a=2$, (1; 1); $a=-2$, (-1; -1); в) $a=0$, (-1; 2); г) $a=1$, (0; 1). **9.196.** $m=0$, $m=2$. **9.197.** а) $a=2{,}5$; б) $a=18$; в) $a=\pm 0{,}5$; г) $a=0{,}75$. **9.198.** Нет решений при $a<0{,}5$, $a>1$; четыре решения при $a=0{,}5$, $a=1$; восемь решений при $0{,}5<a<1$. **9.199.** а) Нет решений при $a<-3\sqrt{2}$, $a>3$; одно решение при $a=3$; два решения при $-3<a<3$, $a=-3\sqrt{2}$; три решения при $a=-3$; четыре решения при $-3\sqrt{2}<a<-3$; б) нет решений при $a<-5-5\sqrt{2}$, $a>-5+5\sqrt{2}$; одно решение при $a=-5\pm 5\sqrt{2}$; два решения при $-5-5\sqrt{2}<$ $<a<-5+5\sqrt{2}$. **9.200.** $a=-2$, (0; -2), ($\sqrt{3}$; 1), ($-\sqrt{3}$; 1). **9.201.** $p=\pm\sqrt{2}$, $p=\pm\sqrt{3}$. **9.204.** ($-a-3$; 0), (a^2+3a; a^2+3a+2). **9.205.** $a=1$, (2; 1). Указание. Преобразуйте систему к виду $\begin{cases}(x+y-3)^2=a-1\\(x-y-1)^2=1-a.\end{cases}$ **9.206.** $a\geqslant\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

9.207. $a=\pm1$, $a=\pm3$. **9.208.** $a=4$, (0,6; 0,8); $a=6$, $(-0{,}6;\ -0{,}8)$. **9.209.** $a=2{,}4$, (1,44; 1,92). **9.210.** (2; 3), $(0;\ -7)$. **9.211.** $a=2$, (3; 4), $(-1;\ 0)$. **9.212.** (1,5; 9). **9.213.** $b=r=0{,}5$; (1; 0), (0,6; 0,8). **9.214.** Рис. 31. Указание. Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром (0; 0) радиусом $|a|$, второе — уравнением прямой $y=b-x$. Если $|b|=\sqrt{2}|a|$, то прямая касается окружности, т. е. система имеет единственное решение. Если $|b|<\sqrt{2}|a|$, то прямая пересекает окружность, т. е. система имеет два решения. Если $|b|>\sqrt{2}|a|$, то прямая и окружность не пересекаются и система решений не имеет. Итак, $|b|\leqslant\sqrt{2}|a|$.

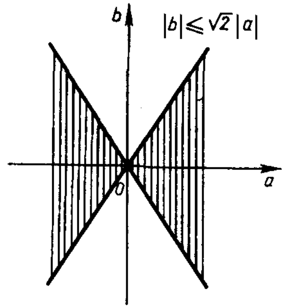

Рис. 31

9.215. $a=2$. Решение. Если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы, то $(-x_0;\ y_0)$ также является ее решением. Значит, для единственности решения необходимо, чтобы $x_0=-x_0$, т. е. решение имело вид $(0;\ y_0)$. Подставляя пару чисел $(0;\ y_0)$ во второе уравнение системы, получим $y_0=\pm1$; из первого уравнения соответственно получим $a=2$, $a=0$. Проверим достаточность полученных условий. При $a=0$ система принимает вид $\begin{cases} y=|x|-1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ она имеет три решения $(0;\ -1)$, (1; 0), $(-1;\ 0)$. При $a=2$ система принимает вид $\begin{cases} y=2x^4+|x|+1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ она имеет единственное решение (0; 1), так как для всех $x\in\boldsymbol{R}$ $y=2x^4+|x|+1\geqslant1$ (равенство при $x=0$), с другой стороны (из второго уравнения) $y^2=1-x^2\leqslant1$, т. е. $-1\leqslant y\leqslant1$, значит, $y=1$.

§ 10

10.2. $1\frac{3}{22}$ кг. **10.3.** 53%. **10.4.** 90 р., 135 р. **10.5.** Цена первого тома 2 р., второго тома 1,5 р. **10.8.** 3 м, 6 м. **10.9.** 35. Решение. Пусть n — количество учащихся, k — количество неуспевающих. Тогда $2{,}5\leqslant\frac{k}{n}\cdot100\leqslant2{,}9$, откуда $\frac{1000}{29}k\leqslant n\leqslant40k$ (1). При $k=1$ имеем $34\frac{14}{29}\leqslant n\leqslant40$, т. е. минимально возможное число учащихся равно 35. При $k\geqslant2$ все значения n, удовлетворяющие неравенству (1), не соответствуют смыслу задачи (n — количество учащихся в классе). **10.12.** 36. **10.16.** 63. **10.19.** 39 к. Решение. Пусть x к. стоит пенал, y к.— ластик, z к.— карандаш и t к.— тетрадь. Тогда $\begin{cases} x+y=40, \\ y+z=12, \\ x+z+2t=50. \end{cases}$ Из данной системы уравнений необходимо определить $x+t$. Для этого, сложив почленно все уравнения системы, получим $x+y+z+t=51$, и поскольку $y+z=12$, то $x+t=39$. **10.20.** 65. **10.21.** 11 человек получили оценку 2, 7 человек — оценку 3, 10 человек — оценку 4, 2 человека — оценку 5. **10.22.** 11 лип, 5 берез. **10.23.** 9 девятиэтажных, 8 шестнадцатиэтажных. **10.24.** 6. Решение. Пусть x — количество трехкопеечных, y — количество пятикопеечных монет. Тогда

$\begin{cases} 3x+5y=53, & (1) \\ x+y<15, & (2) \\ 3y+5x>\frac{53}{1,5}. & (3). \end{cases}$ Сложив почлениo уравнение (1) и неравенство (3), получим $8(x+y)>53\left(1+\frac{2}{3}\right)$, т. е. $x+y>11\frac{1}{24}$. Учитывая условие (2) и то, что $x+y\in\mathbf{Z}$, имеем три возможности: $\begin{cases} x+y=12, \\ 3x+5y=53 \end{cases}$ (данная система не имеет целых решений), $\begin{cases} x+y=13, \\ 3x+5y=53, \end{cases}$ откуда $x=6$, $\begin{cases} x+y=14 \\ 3x+5y=53 \end{cases}$ (данная система не имеет целых решений). **10.25.** 2 тройки, 7 четверок. **10.27.** 1 кг, 7 кг. **10.28.** 21°, 42°. Указание. Если температура воды в первом сосуде $x°$, а во втором $y°$, то $\frac{x+2y}{3}=35$ и $\frac{3x+4y}{7}=33$. **10.29.** 1,64 кг, 1,86 кг. Указание. Пусть в первом сосуде содержится x кг кислоты, а во втором — y кг. Тогда $\frac{x+y}{10}=0,35$. Если взять по a кг каждого раствора, то $\frac{\frac{ax}{4}+\frac{ay}{6}}{2a}=0,36$, т. е. $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=0,72$. **10.31.** $\frac{mn}{m+n}$ г. **10.32.** 3; 4; 15. Указание. Пусть x — количество первой смеси, y — второй и z — третьей. Тогда $A=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}z$, $B=\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y$, $C=\frac{3}{4}y+\frac{1}{3}z$. Имеем систему $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}z\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y\right)=11:3, \\ \left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}z\right):\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{3}z\right)=11:8, \end{cases}$

откуда $x:z=1:5$ и $y:z=4:15$. **10.33.** $21\frac{9}{11}$ мин. **10.34.** $\frac{ab}{c-b}$ м — длина обода переднего колеса, $\frac{ac}{-b}$ м — длина обода заднего колеса. **10.35.** 50 ступенек. **10.36.** 4 км/ч. **10.37.** 14 км/ч, 2 км/ч, **10.38.** 4 ч, $1\frac{1}{3}$ ч. **10.39.** 12 ч, 15 ч. **10.40.** 75 ч, 50 ч. **10.41.** 9 ч. **10.42.** 60 км/ч, 100 км/ч. **10.43.** Не более 20 км/ч. Решение. Пусть v км/ч — первоначальная скорость велосипедиста, тогда $\frac{60}{v}$ ч — время, затраченное на путь от A до B, $\left(\frac{4}{3}+\frac{60-v}{v+4}\right)$ ч — время, затраченное на путь от B до A. Имеем неравенство $\frac{4}{3}+\frac{60-v}{v+4}\leqslant\frac{60}{v}$, откуда с учетом, что $v>0$, получаем $v^2+16v-720\leqslant 0$, т. е. $0<v\leqslant 20$. **10.44.** 10 км. Указание. Пусть v_1 км/ч, v_2 км/ч — скорости первого и второго туристов соответственно, s км — расстояние AB. Тогда $\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}=\frac{1}{12}$, $s=2,5v_2$ и $\frac{2s}{5v_1}+\frac{1}{6}+\frac{s}{v_1}=\frac{s}{v_2}$. **10.45.** 4 км. **10.46.** 30 км, 6 км/ч, 4 км/ч. **10.47.** 35 км/ч, 15 км/ч. **10.48.** 5 км $<s\leqslant 10$ км. **10.49.** 3. **10.50.** 8 км. **10.51.** 1,125. Указание. Пусть v_1, v_2, v_3 — скорости первого, второго и третьего автомобилей соответ-

ственно, тогда $\frac{v_1}{2v_1-v_3}=\frac{3}{2}$ и $\frac{v_2}{2v_2-v_3}=2$, откуда $\frac{v_3}{v_1}=\frac{4}{3}$ и $\frac{v_3}{v_2}=\frac{3}{2}$. Таким образом, $\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{2}:\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$. **10.52.** 60 км/ч. Указание. Скорость машины x км/ч и скорость пешехода y км/ч удовлетворяют системе уравнений $2\cdot\frac{46-30}{x+y}+\frac{30}{x}=1$ и $\frac{11}{y}-\frac{46-30-11}{x}=2\frac{2}{3}$. **10.53.** 1 м/с. Указание. Пусть x м/с, y м/с и z м/с — скорости первого, второго и третьего пловцов соответственно, s м — расстояние AC. Тогда имеем систему $\frac{s}{x}=\frac{s}{y}+5=\frac{s}{z}+10$, $\frac{55-9}{y}=\frac{55+9}{z}+5$, $\frac{55-15}{x}=\frac{55+15}{z}+10$. **10.54.** 5 км/ч$<v<$10 км/ч. Решение. Пусть через 1 ч плот окажется в точке B, а встреча произошла в точке C. Требуется определить, при каких v имеет место неравенство $v\left(\frac{AC}{10+v}+\frac{AC}{10-v}+1\right)>15$ (*). Выразим AC через v: $\frac{BC}{v}$ ч — время, за которое плот проплыл расстояние BC, $\frac{BC+v}{10+v}$ ч — время, за которое катер проплыл расстояние AC, тогда $\frac{BC}{v}=\frac{BC+v}{10+v}$, откуда $BC=\frac{v^2}{10}$ и $AC=v+\frac{v^2}{10}=\frac{10v+v^2}{10}$. Подставляя найденное значение AC в неравенство (*), после преобразований получим $v^2+25v-150>0$, откуда $v>5$. Кроме того, из условия очевидно, что $v<10$. **10.55.** 240 км. **10.56.** 290 км, 2 км/ч. **10.57.** 2,5 км/ч, 1,5 км/ч. **10.58.** 15 км/ч, 3 км/ч. **10.59.** 360 м, 12 м/с, 3 м/с. Указание. Пусть x м/с и y м/с — скорости точек, s м — длина большей дуги окружности, тогда имеет место система уравнений
$$\begin{cases}10x+10y=150,\\ 14x+14y=s,\\ \frac{s+150}{x}=\frac{90}{y}.\end{cases}$$
10.60. 15 с, 18 с. Указание. Пусть x и y — скорости точек, c — длина окружности (расстояние измеряется в единицах длины, время — в секундах). Тогда $\begin{cases}\frac{c}{y}-\frac{e}{x}=3,\\ 90x-90y=c;\end{cases}$ решая систему относительно $t_1=\frac{c}{x}$ и $t_2=\frac{c}{y}$, находим $t_1=15$ с, $t_2=18$ с. **10.61.** 36 мин, 45 мин. Указание. Пусть s — длина кольцевой дороги, t_1 ч и t_2 ч — время прохождения дороги каждым из автомобилей (для определенности считаем $t_1<t_2$). Тогда $\begin{cases}3\cdot\frac{s}{t_1}-3\cdot\frac{s}{t_2}=s,\\ \left(\frac{s}{t_1}+\frac{s}{t_2}\right)\cdot\frac{1}{3}=s,\end{cases}$ откуда $t_1=0{,}6$ и $t_2=0{,}75$. **10.62.** 6 ящиков, 15 ящиков. **10.63.** 14 м/ч, 18 м/ч. **10.64.** 9 ч, 6 ч или 4 ч 48 мин, 14 ч 24 мин. **10.65.** 10 ч, 15 ч. **10.66.** 9 ч. Указание. Пусть производительность первого и второго рабочего x дет/ч и y дет/ч соответственно, тогда $x+y=30$ и $\frac{60}{y}-\frac{60}{x}=3$, откуда $y=10$. **10.67.** 3 ч. Указание. Пусть

первая машинистка может напечатать главу за x ч, а вторая — за y ч, тогда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}$ и $\frac{8}{x}+\frac{6}{y}=2$. Искомое число часов равно $\frac{1}{3}y$. **10.68.** 4,5 м^3, 1,5 м^3. Указание. Если за 1 ч из большей трубы поступает x м^3 воды, а из меньшей — y м^3 воды, то $3x+3y=18$ и $\frac{13,5}{x}+\frac{4,5}{y}=6$. **10.69.** $\frac{1}{9}$. **10.70.** 8 ч, 6 ч. **10.71.** Первый токарь. **10.72.** 60%. Решение. Пусть x, y и z — производительности первого, второго и третьего участников соответственно, тогда $\begin{cases} x+y+z=1,5\,(x+y), \\ 4\,(x+z)=12y. \end{cases}$ Разделив на x каждое уравнение системы, получим систему двух линейных уравнений относительно $\frac{y}{x}$ и $\frac{z}{x}$, из которой $\frac{y}{x}=\frac{3}{5}$, т. е. y составляет 60% от x. **10.73.** В 4 раза. Указание. Пусть x, y и z — количества деталей, которые изготовляют в час соответственно первая, вторая и третья бригады. Тогда $x+y+z=0,5x+0,5y+4z$ и $x+y=2\,(y+z)$, откуда $x:z=4$. **10.74.** 1,5 дня. Указание. Из условия следует, что $А+2Б+В=\frac{1}{2}$, $В+2Г=\frac{1}{3}$ и $Б+В+Г=$ $=\frac{1}{3}$. Складывая почленно первое и второе равенства и вычитая третье, получаем $А+Б+В=\frac{2}{3}$. **10.75.** 3 ч. **10.76.** 2 м^3. Указание. Если емкость бака V м^3, пропускные способности первой и второй труб x м^3/ч и y м^3/ч соответственно, то $\frac{V}{y}-\frac{V}{x}=1$, $\frac{V+2}{V+\frac{4}{3}}=\frac{2}{x}$ и $x\cdot\frac{V}{y}=3$. **10.77.** 6 ч. Указание. Пусть первый трактор может вспахать все поле за x ч, второй — за y ч, тогда $\frac{y}{3}-\frac{x}{4}=3$. Если тракторы работали вместе t ч, то $\frac{2}{x}+t\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$, $\frac{2}{y}+(t+0,4)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=1$. Исключив t из двух последних уравнений, получим $3x=2y$. Решив систему уравнений $3x=2y$ и $\frac{y}{3}-\frac{x}{4}=3$, получим $x=12$, $y=18$. После чего находим $t=6$. **10.78.** 5 деталей в час. Указание. Если производительность ученика x деталей в час, то $\frac{30}{2x}+\frac{60}{2x+2}=\frac{35}{x}+1$ и $\frac{90}{2x+2}-\frac{35}{x}=0,5$. Решая полученную систему двух уравнений с одной переменной, получим $x=5$. **10.79.** 160 деталей. **10.80.** 13 деталей, 11 деталей. **10.81.** 100 м^3, 140 м^3. **10.82.** 10 ч, 6 ч. **10.83.** $\frac{2}{15}V$, $2V$.

§ 11

11.5. в) $-3<x\leqslant 2$; г) $x\neq\pm 2$. **11.6.** б) $a\geqslant 0$, $a\neq 1$; в) $a\leqslant -1$. **11.9.** а) $\pm\sqrt[4]{3}$; $\pm\sqrt[4]{6}$; б) $\sqrt[3]{5}$; $-\sqrt[3]{2}$; в) $\pm\sqrt[6]{7}$; г) $-\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[5]{3}$. **11.11.** а) $2\leqslant\sqrt[4]{a}\leqslant 2,5$; б) $0,01<\sqrt[4]{a}\leqslant 0,6$. **11.12.** а) $-3\leqslant\sqrt[3]{a}<3,5$; б) $-0,8<\sqrt[3]{a}\leqslant -0,44$. **11.13.** б) минус; г) минус. **11.14.** г) $-2\leqslant x\leqslant 79$. **11.16.** а) $x\leqslant -\sqrt[4]{3}$, $-\sqrt[4]{2}\leqslant x\leqslant\sqrt[4]{2}$, $x\geqslant\sqrt[4]{3}$; б) $-\sqrt[3]{7}<x<\sqrt[3]{6}$;

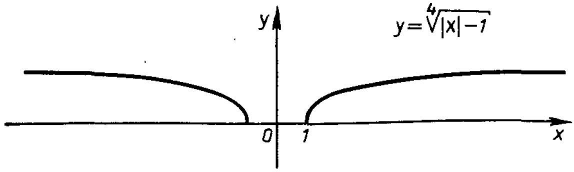

Рис. 32

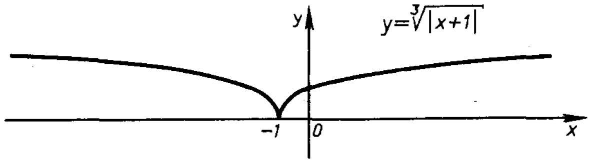

Рис. 33

в) $-\sqrt[6]{5}<x<\sqrt[6]{5}$; г) $x\leqslant-\sqrt[7]{4}$; $x\geqslant-\sqrt[7]{3}$. **11.17.** е) Рис. 32. **11.18.** д) Рис. 33. **11.21.** а) 2; б) -2. **11.25.** в) $-ab\sqrt[6]{b}$; г) $ab\sqrt[6]{a^5}$. **11.26.** а) $-3a|b^3|c^2\sqrt[4]{3}$; б) $2a^2b|c^3|\sqrt[6]{2}$; в) $a|b|c^2\sqrt[4]{a^3}$; г) $|ab|c^2\sqrt[6]{bc}$. **11.27.** а) $-a|b|\sqrt[4]{-a}$; б) $-|a|b\sqrt[6]{-b}$; в) $-a|b|c^2\sqrt[4]{-a^3}$; г) $|ab|c^2\sqrt[6]{-bc}$. **11.31.** а) $\sqrt[6]{a^7}$; б) $-\sqrt[4]{-b^5}$; в) $-\sqrt[4]{2a^4}$ при $a\geqslant0$, $\sqrt[4]{2a^4}$ при $a<0$, г) $\sqrt[6]{3b^6}$ при $b\geqslant0$, $-\sqrt[6]{3b^6}$ при $b<0$. **11.32.** а) $\sqrt[4]{a^5b^4}$ при $b\geqslant0$, $-\sqrt[4]{a^5b^4}$ при $b<0$; г) $\sqrt[10]{-a^{10}b^{11}}$ при $a\geqslant0$, $-\sqrt[10]{-a^{10}b^{11}}$ при $a<0$. **11.37.** в) 3; г) $\frac{1}{3}$. **11.38.** а) 1; б) -1; в) 1; г) -1. **11.39.** а) 2; б) 2; в) 4; г) 3. **11.43.** б) $\frac{1+\sqrt[4]{b}}{\sqrt{b}}$, где $b\neq1$. **11.45.** г) $9-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. **11.48.** б) $0{,}5(2-\sqrt[4]{8})$. **11.49.** а) 4^8; б) 1. **11.50.** а) 1; $3\sqrt[3]{3}$; б) 0. **11.51.** а) 8; б) 81. **11.52.** а) -1990; б) 31. **11.56.** б) Рис. 34. **11.57.** Р е ш е н и е. а) Дважды применяя соответствующее неравенство для двух положительных чисел, имеем:

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd};$$

б) I с п о с о б. Для доказательства неравенства $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ положим $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$ и будем доказывать, что $x^3+y^3+z^3\geqslant3xyz$. Поскольку $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+3xz(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz$, то имеем $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)=(x+y+z)\times\times((x+y+z)^2-3xy-3xz-3yz)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\geqslant0$, так как $x>0$, $y>0$ и $z>0$ (по условию числа a, b и c — положительные) и очевидное

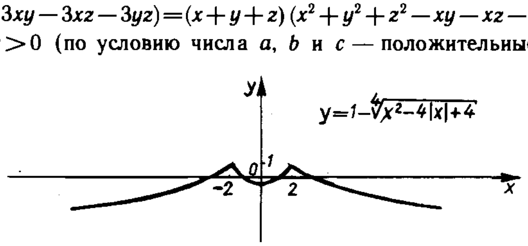

Рис. 34

неравенство $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$ равносильно неравенству $x^2+y^2+z^2-$ $-xy-xz-yz\geqslant 0$. Заметим, что неравенство вырождается в равенство тогда и только тогда, когда $x=y=z$, т. е. при $a=b=c$. II с п о с о б. В неравенстве $\frac{x+y+z+t}{4}\geqslant\sqrt[4]{xyzt}$, которое доказано в пункте a, положим $a=x$, $b=y$, $c=z$ и будем подбирать число t так, чтобы $\frac{x+y+z+t}{4}=\frac{a+b+c}{3}$, откуда $t=$ $=\frac{a+b+c}{3}$. Имеем $\frac{a+b+c}{3}=\frac{x+y+z+t}{4}=\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\geqslant$ $\geqslant\sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}$. Тогда $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4\geqslant abc\cdot\frac{a+b+c}{3}$, т. е. $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geqslant abc$ или $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$. **11.58.** $2+\sqrt[3]{a^2}$, где $a\neq\pm 1$. **11.60.** 2 при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a\neq b$. **11.65.** $x>0$, $x\neq 1$. **11.66.** У к а з а н и е. Исходное выражение тождественно равно $2\sqrt[4]{y}$. **11.70.** $9x^2+66x-23=0$. У к а з а н и е. $a=\frac{1}{3}$, $b=-7\frac{2}{3}$. **11.71.** У к а з а н и е. Число 1989^{1991} оканчивается на 9, число 463^{462} оканчивается на 9, значит, a делится на $b=10$. **11.72.** в) $x<-\sqrt{3}$, $x>\sqrt{3}$; г) $-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}$. **11.73.** в) $x=$ $=0$, $2<x<3$; г) $0<x<5$. **11.74.** а) 8; б) $4\sqrt{2}$; в) $0{,}5(3\sqrt{3}+1)$; г) нет решений. **11.75.** а) ± 3; б) нет решений; в) $-\sqrt[3]{12}$; г) ± 1. **11.76.** в) $(40,\ 117]$. **11.77.** б) $\left(\frac{3}{4},\ 1\frac{4}{9}\right]$. **11.78.** г) $(-0{,}148,\ 3{,}22)$. **11.79.** в) Плюс; г) минус. **11.82.** а) -1; б) 2; в) 0; 2; 1; г) -1. **11.85.** а) 4; б) 3. **11.89.** а) $a^{-2}+a^{2{,}25}$; б) $b^4-b^{-4{,}2}$. **11.94.** $\frac{1}{8ab}$. **11.96.** $\frac{1}{2a-a^2}$, $0<a<2$. а) Да, при $a=1$. б) нет. **11.97.** Нет. У к а з а н и е. Данное выражение тождественно равно $m^{\frac{1}{3}}$. **11.98.** $a+b$, где $a>0$, $b>0$. **11.99.** $a+b$, где $a>0$, $b>0$. **11.100.** $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, где $a+b>0$, $a-b>0$, $b\neq 0$. **10.101.** У к а з а н и е. Данное выражение тождественно равно 0,2. **11.102.** У к а з а н и е. Данное выражение тождественно равно 1. **11.103.** У к а з а н и е. Данное выражение тождественно равно 2. **11.104.** $2(b+a)$, где $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. **11.105.** a, где $a>0$; $b>0$. **11.106.** $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)}$, где $x>0$. **11.107.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$; 463. **11.108.** У к а з а н и е. Разность дробей левой и правой частей неравенства равна $2-x^{\frac{1}{4}}$. Поскольку для всех $x>0$ имеет место $x^{\frac{1}{4}}>0$, то $2-x^{\frac{1}{4}}<2$. **11.109.** У к а з а н и е. Разность левой и правой частей неравенства равна $\sqrt{3x}$. **11.110.** У к а з а н и е. Левая часть неравенства тождественно равна $(b+1)\left(b^{\frac{1}{2}}+4\right)^2$. Для всех $b>0$ (область определения) имеем $b+1>1$ и $\left(b^{\frac{1}{2}}+4\right)^2>4^2$, откуда $(b+1)\left(b^{\frac{1}{2}}+4\right)^2>$ >16. **11.111.** $x\in\boldsymbol{R}$, $x\neq 0$, $x\neq\pm 1$. У к а з а н и е. Левая часть неравенства тождественно равна $\sqrt{2}$. **11.112.** а) $5\sqrt{5}$; б) 1. **11.113.** $a<0$, $a=2$. **11.114.** При $a=-1{,}5$, $a>0$ одно решение: $x=\sqrt[8]{243}$; при $a\leqslant 0$, $a\neq -1{,}5$ два решения: $x=\sqrt[8]{243}$, $x=\sqrt[8]{-32a^5}$.

11.119. в) Равносильны. **11.121.** в) -1; г) 0,75. **11.122.** а) $0,5(1+\sqrt{5})$; б) $0,5(1-\sqrt{5})$; в) -2. Указание. Поскольку $x\leqslant 1$, то $|x-2|=2-x$. **11.125.** в) $1\pm\sqrt{6}$; г) -1, 2; $0,1(5\pm\sqrt{134})$. **11.127.** в) 3; г) -1. **11.128.** а) 1; б) 4; в) 3; г) -1. **11.129.** а) 1; б) -1; в) 2; г) 1. **11.133.** в) $x=a$ при $a\geqslant 0$, нет решений при $a<0$. **11.134.** а) 3; б) 0,25; в) 6; 12; г) 0; 3; 4. **11.136.** а) 3; 6; б) -1; в) 12; г) 1. **11.137.** а) 2. **11.139.** а) 6; б) -2; в) $\frac{15+\sqrt{34}}{6}$; г) 9. **11.140.** в) $-\frac{10}{17}$; $1\frac{3}{7}$; г) 0,5. **11.141.** в) 0. Указание. Область определения уравнения состоит из одной точки 0; г) 3. **11.142.** а) Нет решений. Решение. Область определения уравнения: $x\geqslant 3$. Переписав уравнение в виде $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=2-x$, заметим, что $2-x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 2$. **11.143.** а) Нет решений. Указание. $\sqrt{5+4x-x^2}=$ $=\sqrt{9-(x-2)^2}\leqslant 3$, равенство достигается при $x=2$, $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\geqslant 3$, равенство достигается при $x=1$; б) 1. **11.144.** а) 2. Решение. Для всех $x\in\boldsymbol{R}$ имеем $\sqrt{12-x^2+4x}=\sqrt{16-(x-2)^2}\leqslant 4$, причем равенство достигается при $x=2$. Заметим, что $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ для всех $x\in\boldsymbol{R}$, тогда, используя неравенство Коши, имеем $x^2-2x+2+\frac{4}{x^2-2x+2}\geqslant 2\sqrt{(x^2-2x+2)\cdot\frac{4}{x^2-2x+2}}=4$, причем равенство достигается при $x=0$ и $x=2$. Таким образом, $x=2$ — корень исходного уравнения; б) 2. Решение. Область определения уравнения задается неравенством $4x-x^2\geqslant 0$, т. е. $0\leqslant x\leqslant 4$. Заметим, что $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(x-2)^2}\leqslant 2$, равенство достигается при $x=2$. Таким образом, получаем, что $x^3-12x+18\leqslant 2$, т. е. $x^3-12x+16\leqslant 0$, откуда $(x-2)^2(x+4)\leqslant 0$ и $x\leqslant -4$ или $x=2$. Учитывая область определения уравнения, заключаем, что $x=2$ — корень исходного уравнения. **11.146.** в) $0<x<1$; г) $-2\leqslant x<0$, $1<x\leqslant 3$. **11.149.** в) $x\geqslant 3$; г) $-1,75\leqslant x<-1$, $x>7$. **11.151.** а) $x=1$, $x\geqslant 2$; б) $x\leqslant -3$, $x=2$; в) $x=1\frac{1}{3}$, $x\geqslant 4,5$; г) $x\leqslant -1,75$, $x=0,6$. **11.153.** г) $x\leqslant -9$, $x=0$. **11.155.** б) $-1\leqslant x<24$. Указание. Положив $\sqrt{x+1}=y$, запишите данное неравенство в виде $y^2-3y-10<0$.

§ 12

12.4. д) $(-1)^{n+1}\cdot 2$; е) $(-1)^{n+1}+2$; з) $\frac{n(n+6)}{(n+2)(n+4)}$; и) $13n+6$; к) $124-25n$; л) $\frac{n^2}{2n-1}$; м) $(2n-1)\cdot 2^n$; н) $n!$; о) $3\cdot 2^n$; п) $n^2+(-1)^n$; р) 3^n-2^n. **12.8.** а) $a_2=20$; б) $a_2=28$. Указание. $a_n<0$ при $n\geqslant 5$; в) $a_3=47$; г) $a_2=0,25$. Указание. $\frac{n}{n^2+4}\leqslant\frac{n}{4n}=\frac{1}{4}$, причем равенство достигается при $n=2$. **12.9.** а) $a_8=a_9=-51$; б) $a_4=-3$. Указание. $a_1=a_3=a_5=0$, $a_n>0$ при $n>5$; в) $a_2=12$. **12.10.** Указание. Последовательность убывает, причем $a_n>1$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$. **12.11.** Указание. Последовательность возрастает, причем $b_n<2$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$. **12.12.** а) Ограничена сверху; б) ограничена снизу; в), г), д) ограничена; е) не ограничена; ж), з) ограничена снизу; и) не ограничена. **12.13.** Число 1— наименьшая верхняя граница. Указание. $a_2=1$. **12.15.** Да. **12.16.** а) k^3+k^2+k; б) k^5+k^4+ $+k^3+k^2$. **12.17.** $0,5(1+(-1)^{n+1})$. **12.21.** а) Да, $n=7$; б) нет. **12.22.** Да, $n=9$. **12.23.** a_1, a_2, a_3. **12.24.** 4; 5; 6. **12.25.** y_3. Указание. Покажите, что неравенство $y_n>2$ выполняется при $n<1-\sqrt{6}$, $n>1+\sqrt{6}$, $1-\sqrt{2}<n<1+\sqrt{2}$, и учтите, что

$n \in \boldsymbol{N}$. **12.26.** 6. У к а з а н и е. $E(y)=\left(-\infty; 8\frac{1}{8}\right]$. Из условия $|3n-16| \leqslant 8\frac{1}{8}$, с учетом того, что n — натуральное, получите возможные значения n: 3, 4, 5, 6, 7, 8. **12.27.** Да, a_6. **12.28.** 41. Р е ш е н и е. Если n — четное, то $x_n=\frac{10}{10n-9}$, решая относительно n неравенство $0{,}02<x_n<0{,}22$, находим $n=6, 8, ..., 50$ (всего 23 значения). Если n — нечетное, то $x_n=\frac{8}{10n-9}$, в этом случае из соответствующего неравенства получаем $n=5, 7, ..., 39$ (всего 18 значений). **12.30.** Нет. **12.31.** Нет. У к а з а н и е. Используйте то, что n^3-n кратно 6. **12.32.** а) 12; б) 122. **12.77.** У к а з а н и е. Докажите, что $u_n=3^n+1$. **12.78.** У к а з а н и е. Докажите, что $u_n=4^n-1$. **12.79.** У к а з а н и е. Докажите, что $u_n=(2n-1)^2$. **12.83.** $a_1=-6$; $d=4$ или $a_1=18$; $d=-4$. **12.84.** 8. **12.85.** $-0{,}25$. **12.86.** -8. **12.87.** а) Да; б) нет. **12.89.** 125. **12.90.** 195. **12.91.** Принадлежит. У к а з а н и е. $d=\frac{49}{40}$, $E_y=\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$. **12.92.** 9, 10, 11, 12. **12.93.** $a=2$, $d=4$. У к а з а н и е. В равенство $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=2n$, справедливое для любого натурального n, подставьте $n=1$ и $n=2$ и найдите a_1 и d. Проверкой убедитесь, что в прогрессии с найденным первым членом 2 и разностью 4 выполняется требуемое условие. **12.94.** 392. **12.95.** -35. **12.96.** 450. **12.97.** 12380. У к а з а н и е. Числа, встречающиеся в обеих прогрессиях, образуют арифметическую прогрессию с первым членом 17 и разностью 15. **12.98.** 116. **12.99.** 14 или 35. У к а з а н и е. $a=-12$, $d=0{,}5$. **12.100.** $a=10$, $b=88$. **12.102.** а), б) Нет. **12.103.** Нет. У к а з а н и е. Если в прогрессии есть один квадрат целого числа, то их (квадратов) — бесконечно много. **12.104.** 10; 12; 14; 16; 18. **12.105.** 15. У к а з а н и е. Если на стороне треугольника расположено x шаров, то $0{,}5x(x+1)=x(x-2)$. **12.106.** 11 мин. У к а з а н и е. Пусть встреча состоится через x мин, тогда $0{,}5(2\cdot 1{,}5+0{,}5(x-1))+$ $+5x=99$. **12.107.** 1. **12.108.** -1, 0, 1, 2. Р е ш е н и е. Из условия имеем: $a+3d=a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2$, откуда $3a^2+a(6d-1)+5d^2-3d=0$. Требование неотрицательности дискриминанта квадратного относительно a уравнения приводит к неравенству $24d^2-24d-1\leqslant 0$. Так как $d>0$, то получаем $0<d<\frac{12+\sqrt{168}}{24}$. Поскольку d — целое и $1<\frac{12+\sqrt{168}}{24}<2$, то $d=1$. Тогда $3a^2+5a+2=0$, и ввиду того, что a — целое, находим $a=-1$. **12.109.** 3. **12.110.** 0,2. У к а з а н и е. Из условия $S_{3n}=S_{4n}-S_{3n}$ получите $2a=d(1-n)$. В этом случае $\frac{S_{2n}}{S_{4n}-S_{2n}}=\frac{2a+d(2n-1)}{2a+d(6n-1)}=\frac{dn}{5dn}=0{,}2$. **12.111.** 13. У к а з а н и е. Из условий $\frac{S_7}{S_n-S_{n-7}}=-0{,}5$ и $\frac{S_n-S_2}{S_{n-2}}=3$ получите равенства $6a+11d+nd=0$ и $2a-5d+$ $+nd=0$. Исключив из полученных соотношений a, покажите, что $2nd=26d$, откуда (с учетом $d\neq 0$) $n=13$. **12.112.** $0{,}5\sqrt{3}$ см. **12.113.** 1 см. **12.115.** 24 ч. **12.116.** Р е ш е н и е. Биквадратное уравнение имеет две пары корней, попарно равных по модулю и противоположных по знаку $-x_1$, $-x_2$, x_2, x_1. Поскольку корни образуют арифметическую прогрессию, то $2x_2=x_1-x_2$, т. е. $3x_2=x_1$. Кроме того, $x_1^2+x_2^2=-p$ и

$x_1^2 \cdot x_2^2 = q$. Имеем $-p = 10x_2^2$, $q = 9x_2^4$. Значит, $9p^2 = 100q$. **12.117.** $-9\frac{1}{9}$. **12.119.** 0 очков. Решение. Общее количество игр равно $0{,}5n(n-1)$, значит количество очков, набранных всеми командами, равно $n(n-1)$. Пусть последняя команда набрала x очков, d — разность прогрессии, тогда $0{,}5(2x + d(n-1))n$ — количество очков, набранных всеми командами. Из уравнения $n(n-1) = 0{,}5(2x+d)\cdot(n-1)$ находим $2x = (n-1)(2-d)$, поскольку $d \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$, то $x \leqslant 0$, значит, $x = 0$. **12.120.** 25. **12.121.** -51 или 510. **12.122.** 1; -2; 4 или 4; -2; 1. **12.123.** Да. **12.124.** $-0{,}5$. **12.125.** 8192. **12.126.** Нет, например последовательность 1; 3; 1; 3; ... . **12.127.** а) Нет; б) нет. **12.128.** $1\frac{1}{7}$. **12.129.** 2. **12.130.** 64. **12.131.** $a=2$, $b=32$ или $a=-18$, $b=-288$. **12.132.** $a=-5$, $b=-10$, или $a=5$, $b=10$, или $a=-5$, $b=10$, или $a=5$, $b=-10$. **12.133.** 38. Указание. Из условий $S_{11} = 0{,}125(S_n - S_{n-11})$ и $S_n - S_9 = 2S_n - 9$ получите равенства $q^{n-11} = 8$ и $q^9 = 2$. Таким образом, $q^{n-11} = q^{27}$, т. е. $n = 38$. **12.134.** Решение. Заметим, что $x = -2$ — корень уравнения, причем областью определения уравнения является отрезок $[-2, 2]$, значит, $x = -2$ — меньший корень. Итак, $b_1 = -2$, $b_1 + b_1q^3 + b_1q^6 = -2(1 + q^3 + q^6) = -2((q^3 + 0{,}5)^2 + 0{,}75) \leqslant -2\cdot 0{,}75 = -1{,}5$. **12.135.** Могут, $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. **12.136.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **12.137.** $q = \operatorname{ctg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$. **12.138.** $1 - \frac{1}{2^n}$.

12.139. 60 р.; 90 р. **12.140.** 18 к. **12.142.** 12%, 24%, 48%. **12.143.** 600 м/мин. **12.144.** Да. **12.145.** 3. **12.146.** Больше сумма геометрической прогрессии. **12.147.** -2. **12.148.** 27. **12.149.** 10 или 70. **12.150.** 12,4 или 2. **12.151.** 1; 5; 9 или 17; 5; -7. **12.152.** 18; -6; 2 или 2; -6; 18. **12.153.** 9. **12.154.** 2; 6; 18; 30 или 32; 16; 8; 0. **12.155.** 421. **12.156.** 2; 5; 8; ... и 3; 6; 12; ... или $\frac{25}{2}$; $\frac{79}{6}$; $\frac{83}{6}$ ... и $\frac{2}{3}$; $\frac{25}{3}$; $\frac{625}{6}$; ... . **12.157.** $3 - 2\sqrt{2}$; 1; $3 + 2\sqrt{2}$. **12.160.** 0,2. **12.161.** 842 или 248. **12.162.** 6 рыб. **12.163.** $-500\,000$. **12.164.** 1886. **12.165.** 35 392. **12.166.** 577 203. Указание. Искомая сумма есть разность суммы всех натуральных чисел, не превосходящих 1112, и суммы всех натуральных чисел до 1112, делящихся на 15. **12.167.** 6735. Указание. Рассмотрите случаи $n = 5k$, $n = 5k+1$, $n = 5k+2$, $n = 5k+3$ и $n = 5k+4$, покажите, что лишь в случае $n = 5k+2$, где k — целое неотрицательное число, числа вида $3n+1$ дают при делении на 5 остаток 2. Далее найдите сумму тридцати первых членов арифметической прогрессии с первым членом 7 и разностью 15. **12.168.** 12 145. **12.169.** $-8k^2 - 4k$. **12.170.** $\frac{k(a_1^2 - a_{2k}^2)}{2k-1}$. **12.172.** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **12.173.** $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$. **12.174.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. **12.175.** $n^2(n+1)$. **12.176.** $n^3 + 3n^2 + 3n$. **12.177.** $\frac{k(k+1)(3k^2-k-2)}{24}$. **12.178.** $0{,}25n^2(n+1)^2$. **12.179.** $\frac{1}{12}n \times (n+1)(n+2)(3n+5)$. Решение. Поскольку $a_1 = 1\cdot 2^2 = (2-1)\cdot 2^2 = 2^3 - 2^2$, $a_2 = 2\cdot 3^2 = (3-1)\cdot 3^2 = 3^3 - 3^2$, ..., $a_n = n(n+1)^2 = ((n+1)-1)(n+1)^2 = (n+1)^3 - (n+1)^2$, то $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3) - (2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2) = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} -$

$-\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$. **12.180.** $\frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{6}$.
12.181. $\frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$. **12.182.** $\frac{n}{n+1}$. Указание. Используйте равенство $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. **12.184.** $\frac{k}{5(6k+5)}$. **12.186.** $\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$.
Указание. Используйте равенство $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\right.$ $\left.-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$. **12.187.** $\frac{3k^2+7k}{20(3k+2)(3k+5)}$. Указание. Используйте равенство $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}-\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}\right)$.
12.189. $(k+1)!-1$. Решение. $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+k\cdot k!=(2-1)\cdot1!+$ $+(3-1)\cdot2!+(4-1)\cdot3!+\ldots+((k+1)-1)\cdot k!=2!-1!+3!-2!+4!-3!+\ldots+$ $+(k+1)!-k!=(k+1)!-1$. **12.190.** $1-\frac{1}{(n+1)!}$. Указание. Используйте равенство $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$. **12.191.** $-\frac{n^2}{n+1}$. Решение. Поскольку $a_k=-1+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-1$, то $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-1\right)+$ $+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-1\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-1\right)=1-\frac{1}{n+1}-n=$ $=-\frac{n^2}{n+1}$. **12.192.** $1-\frac{1}{(k+1)^2}$. **12.193.** $2(n^2-k^2)$. Решение. Пусть S_1 — сумма всех дробей (в том числе и сократимых), заключенных между числами k и n, тогда $S_1=k+\frac{5k+1}{5}+\frac{5k+2}{5}+\ldots+n=\frac{1}{5}(5k+5k+1+5k+2+\ldots+$ $+5n)=0{,}5(k+n)(5n-5k+1)$. Поскольку число 5 простое, то дробь со знаменателем 5 сократима тогда и только тогда, когда данная дробь — целое число. Найдем сумму S_2 всех целых чисел, заключенных между k и n: $S_2=k+k+1+k+2+\ldots+$ $+n=0{,}5(k+n)(n-k+1)$. Искомая сумма равна $S_1-S_2=2(n^2-k^2)$. **12.194.** 3^m+ $+m^2-2m-1$. **12.195.** $-2k^2+13k+0{,}25\cdot5^{-k}-0{,}25$. **12.196.** $49\cdot2^{50}+1$.
12.197. $\frac{5(10^{n+1}-9n-10)}{81}$. **12.198.** $\frac{(a^{2n}-1)(a^{2n+2}+1)}{a^{2n}(a^2-1)}+2n$, если $a\neq\pm1$, $4n$, если $a=\pm1$. **12.199.** $0{,}5n(n+1)$ при $a=1$; $\frac{a}{(a-1)^2}(na^{n+1}-a^n(n+1)+1)$ при $a\neq1$. **12.220.** а) $-0{,}75$. **12.221.** а) 0,5; в) 0,25. **12.222.** г) 0,25. **12.223.** а) 0,5; б) 1,5; в) $-0{,}5$; д) $\frac{1}{6}$. Указание. Покажите, что $a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3(2n^3+1)}$. **12.227.** 4.
12.228. $1\frac{1}{3}$. **12.229.** $b=1$, $q=\frac{1}{3}$. **12.232.** $-1<x<0{,}5$. **12.233.** -3, 3. **12.234.** 1,125.
12.235. $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$. **12.236.** $8x^2-63x-8=0$ или $24x^2-37x-72=0$. **12.237.** $42\frac{2}{3}$.
12.238. $\frac{1}{3}$. **12.239.** 4. **12.240.** $(8+4\sqrt{2})a$, $2a^2$. **12.241.** $6a(2+\sqrt{3})$, $a^2\sqrt{3}$. **12.242.** $\frac{2}{3}\pi a\sqrt{3}$, $\frac{\pi a^2}{9}$. **12.243.** а) 1; б) $\frac{1}{28}$.

13.13. г) 5; 1; е) 0; -1. **13.14.** в) 2; -3; г) 7; 0. **13.15.** а), б), в), г) нет. **13.21.** а) $\cos\frac{\pi}{11} > \cos^2\frac{\pi}{11}$. **13.22.** а) Первое больше. **13.23.** а), б) Первое меньше. **13.25.** Указание. Используйте неравенство треугольника, определение синуса и косинуса. **13.34.** а) $0{,}5\cdot(3-\sqrt{3})$. **13.35.** а) 0. **13.36.** а) 1; б) 1. **13.43.** а) 1; б) 1. **13.44.** б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $x^2-2y=1$. **13.50.** б) 0,25; в) не существует. Указание. Умножьте знаменатель дроби на $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$, после чего разделите числитель и знаменатель на $\sin^3\alpha$. **13.52.** а), б) Наибольшего и наименьшего значений не существует. **13.53.** а) 1; б) 1. **13.54.** а) $\cos^2\alpha$; б) $0{,}5\operatorname{ctg}^2\alpha$. **13.55.** Указание. Значение выражения равно -1. **13.56.** Указание. Значение выражения равно 2. **13.59.** а) -1; б) 1. **13.62.** б) Указание. Покажите, что разность левой и правой части доказываемого неравенства равна $\frac{-(3\cos^2\alpha-2)^2}{\sin^2\alpha}$. **13.64.** а) Указание. Используйте неравенство $-\frac{\pi}{3}<-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1<\frac{\pi}{3}$. **13.67.** a^3-a^2. **13.68.** $\frac{2}{9}$. **13.69.** а) 3,125; -3. Решение. $2\cos^2\alpha-3\sin\alpha=2-2\sin^2\alpha-3\sin\alpha=-2t^2-3t+2$, где $t=\sin\alpha$, т. е. $-1\leqslant t\leqslant 1$. Функция $y(t)=-2t^2-3t+2$ возрастает на $[-1, -0{,}75]$ и убывает на $[-0{,}25, 1]$. Значит, наибольшее значение функции $y(t)$ равно $y(-0{,}75)=3{,}125$. Кроме того, $y(-1)=3$, $y(1)=-3$, следовательно, наименьшее значение функции $y(t)$ равно $y(1)=-3$; б) $3\frac{1}{3}$; -2. **13.70.** а) 0; $-1{,}125$. Указание. Приведите выражение к виду $2t^2-t-1$, где $t=|\cos\alpha|$, $t\in[0; 1]$; б) 3,125; 2. **13.71.** 0,25. Решение. $\sin^2 x\cos^4 x(2-\sin^2 x)=(1-\cos^2 x)\cos^4 x(1+\cos^2 x)=(1-\cos^4 x)\cos^4 x=t-t^2$, где $t=\cos^4 x$, т. е. $0\leqslant t\leqslant 1$. Функция $y(t)=t-t^2$ достигает наибольшего значения при $t=0{,}5$, $y(0{,}5)=0{,}25$. **13.72.** а) -1. Решение. $\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}-1=t^2+t-1$, где $t=\frac{1}{\cos\alpha}$, т. е. $|t|\geqslant 1$. Функция $y(t)=t^2+t-1$ убывает на $(\infty, -1]$ и возрастает на $[1, \infty)$. Поскольку $y(-1)=-1$ и $y(1)=1$, то наименьшее значение функции $y(t)$ при $|t|\geqslant 1$ достигается при $t=-1$ и равно -1; б) 1. Указание. Рассмотрите функцию t^2-t+1, где $t=\frac{1}{\cos^2\beta}$, т. е. $t\geqslant 1$. **13.77.** а) $\sqrt{3}$. **13.81.** $\frac{\pi}{4}$. **13.89.** а) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; б) 2; -2. **13.91.** а) 5; -5; б) $\sqrt{29}$, $-\sqrt{29}$. **13.92.** а) 1,5; б) 1,5. **13.93.** а) 0; б) 0. **13.94.** а) $\operatorname{tg}^2\beta$; б) -1. **13.99.** $-2+\sqrt{3}$ или $2+\sqrt{3}$. Указание. Покажите, что $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=\pm 1$. **13.100.** б) $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$. Указание. $\sin\alpha=\sin\left(\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; далее покажите, что $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{12}{13}$. **13.101.** $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; $\beta=\frac{\pi}{3}$. Решение. Поскольку $\alpha+\beta=\pi$, то, используя формулы приведения, перепишем условие в виде

$\sin\frac{3\beta}{2}+\cos\frac{3\beta}{2}=1$, откуда $\sin\left(\frac{3\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\beta}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4}<\frac{3\beta}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{11\pi}{6}$. Таким образом, $\beta=\frac{\pi}{3}$, тогда $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. **13.103.** $(1, \sqrt{2}]$. Указание. Искомое отношение равно $\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)$, где α — острый угол прямоугольного треугольника. **13.107.** $\frac{4}{9}$. **13.114.** а) 60°; б) 15° или 75°. **13.116.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.117.** а) $-2\sqrt{2}$; б) 2. **13.118.** а) 1; б) 1. **13.119.** $\operatorname{tg}2\alpha>2\operatorname{tg}\alpha$. **13.120.** 0,875. **13.125.** $\frac{8\cos 2\alpha+1}{2(\cos 2\alpha-1)}$. **13.126.** $3+2\sqrt{2}$. Указание. Записав выражение $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ (см. № 108 (б)), найдите $\operatorname{tg}\alpha$. **13.127.** $-3\frac{1}{3}$. **13.130.** а) 0,125; б) 0. **13.131.** а) 1; б) 1. **13.132.** а) 0,5; б) 1. **13.133.** а) $2\cos\alpha$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$, $2\sin\alpha$ при $\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$; б) $-\cos\frac{\beta}{4}$ при $2\pi\leqslant\beta\leqslant3\pi$, $\sin\frac{\beta}{4}$ при $3\pi<\beta\leqslant4\pi$. **13.134.** а) 2; 1; б) 2; -1. **13.135** а) 1; 0,5; б) 1; 0,25. **13.136.** а) 3; -1; б) $\sqrt{2}-1$; $-\sqrt{2}-1$. **13.137.** а) 0; $-1{,}125$; б) 1,125; 0. **13.138.** $0{,}5\,m^2$; $|m|<\sqrt{2}$. **13.139.** $m+0{,}5$; $-1\leqslant m\leqslant 0$. **13.140.** $\frac{1\pm\sqrt{2-t^2}}{t-1}$. **13.144.** а) 0,25; б) 0,125. **13.145.** а) 0,125; б) $\frac{1}{32}$. **13.149.** $\alpha=135°$, $\beta=45°$. **13.150.** $\alpha=30°$, $\beta=120°$. **13.151.** $\alpha=15°$, $\beta=75°$ или $\alpha=75°$, $\beta=15°$. **13.152.** $\alpha=60°$, $\beta=30°$. **13.153.** $\alpha=45°$, $\beta=90°$. **13.154.** $\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. Решение. Записав первое неравенство в виде $6\cos^2\alpha+\cos\alpha-2\leqslant0$, находим, что $-\frac{2}{3}\leqslant\cos\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. Из второго неравенства получаем, что $\cos\alpha\leqslant-\frac{2}{3}$ или $\cos\alpha\geqslant\frac{2}{3}$. Таким образом, $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. **13.155.** $\pm\frac{4\sqrt{2}}{7}$. **13.156.** а) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$; б) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **13.157.** Рациональным. **13.158.** Рациональным. **13.169.** а) 0; б) 0. **13.173.** а) 0,5; б) 2. **13.176.** 2; -2. **13.177.** а) 1; б) 1. **13.178.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\beta$. **13.180.** Да. **13.183.** $t\sqrt{2}$; $|t|>\sqrt{2}$. **13.184.** $2\leqslant b\leqslant3$; $2{,}75-b$. **13.185.** $-0{,}5\leqslant a\leqslant0{,}5$; $a-0{,}5$. **13.186.** $\frac{8}{27}$. **13.192.** $a(2(1-2a^2)^2-1)$. **13.193.** $4a(1-a^2)(2a^2-1)$. **13.195.** а) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **13.197.** а) $-0{,}5$; б) $-0{,}5$. **13.200.** $\dfrac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, если $\varphi\neq2\pi k$,

$k \in \mathbf{Z}$; $(n+1)\cos\alpha$, если $\varphi=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **13.201.** $\dfrac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\left(\alpha+\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, если $\varphi\neq 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $(n+1)\sin\alpha$, если $\varphi=2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Серия 1.

2. Нет. **3.** $n=3k-1$, $k\in\mathbf{N}$. **4.** Нет. **7.** n — четное. **16.** Нет. Решение. Пусть существуют целые числа a, b и c такие, что $b^2-4ac=1991$. Перепишем данное равенство в виде $(b-1)(b+1)=4ac+1990$. Числа $b-1$ и $b+1$ одинаковой четности, если оба эти числа нечетные, то левая часть — нечетное число, а правая — четное, получаем противоречие. Если же оба числа $b-1$ и $b+1$ четиые, то левая часть — число, делящееся на 4, а правая — нет. Получили противоречие.

Серия 3.

7. а) $a_1=2b-3c$, $a_2=5c-b$; б) $b_1=0{,}5(a+3c)$, $b_2=5c-a$; в) $c_1=\dfrac{2b-a}{3}$. $c_2=0{,}2(a+b)$. **8.** $x=1$. **9.** $x=-\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$. **13.** $a=0$, $a=1$, $a=16$. **14.** $a<0$; $0<a\leqslant\dfrac{4}{9}$.

Серия 4.

4. 4. **5.** $-3{,}5$. **6.** $-\dfrac{18}{17}$; -1. **7.** Нет решеиия. **8.** $x=0{,}25(15-a)$ при $a\neq 3$, иет решений при $a=3$. **9.** $x=1$ при $a=4$; $x=4$ при $a=1$; $x=1$, $x=4$ при $a\neq 1$ и $a\neq 4$. **10.** $x=4$ при $a=1$ или $a=4$; $x=a$, $x=4$ при $a\neq 1$ и $a\neq 4$.

Серия 5.

4. $a=-40{,}25$. **5.** $a=\pm 9\dfrac{1}{3}$. **7.** а) $(1;\ 6)$, $(6;\ 1)$; б) $(1;\ 3)$, $(6;\ 0{,}5)$; в) $(1,\ -2)$, $\left(6,\ -\dfrac{1}{3}\right)$; г) $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $(5;\ 1)$, $(1;\ 5)$.

Серия 6.

1. Нет решений при $a<0$, $x=0$ при $a=0$, $x=\pm a$ при $a>0$. *2.* Нет решений при $a=0$, $x=\dfrac{3}{a}$ прн $a\neq 0$. **3.** Нет решений при $a=1$; $x\in\mathbf{R}$ при $a=0$; $x=\dfrac{1}{a-1}$ при $a\neq 0$ и $a\neq 1$. **4.** Нет решений при $a=3$, $x=a$ при $a\neq 3$. **5.** Нет решений при $|a|<12$; $x=$ $=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-144}}{2}$ при $|a|\geqslant 12$. **6.** $x=-3$ при $|a|=3$, $x=\pm a$ при $|a|=3$. **7.** $x=a$, $x=a+1$. **8.** $x=1$ при $a=0$; $x=-1$ при $a=-1$; $x=a$, $x=a+1$ при $a\neq -1$ и $a\neq 0$. **9.** $x=2$ при $a=2$, $x=4$ при $a=3$, $x=a$, $x=a+1$ при $a=2$ и $a\neq 3$. **10.** $x=1$ при $a=0$; $x=-2$ при $a=-2$; $x=a$, $x=a+1$ при $a\neq -2$ и $a\neq 0$.

Серия 7.

1. Нет решений при $a\leqslant 0$, $3-a<x<3+a$ при $a>0$. **2.** $x\in\mathbf{R}$ при $a<0$, $x\neq 4$ при $a=0$; $x<4-a$, $x>4+a$ при $a>0$. **3.** $x>\frac{3}{a}$ при $a<0$, $x\in\mathbf{R}$ при $a=0$, $x<\frac{3}{a}$ при $a>0$. **4.** $x\in\mathbf{R}$ при $a=-1$, нет решений при $a=1$, $x>\frac{1}{a+1}$ при $|a|>1$, $x<\frac{1}{a+1}$ при $|a|<1$. **5.** $a<x<3$, нет решений при $a=3$, $3<x<a$ при $a>3$, при $a<3$. **6.** $x<-3$ при $a<0$; $x<-3$, $x=0$ при $a=0$; $x<-3$, $-\sqrt{a}\leqslant x\leqslant\sqrt{a}$ при $0<a<9$; $x<-3$, $-3<x\leqslant 3$ при $a=9$; $x\leqslant-\sqrt{a}$, $-3<x\leqslant\sqrt{a}$ при $a>9$. 7. $x\in\mathbf{R}$ при $|a|<6$, $x<\frac{-a-\sqrt{a^2-36}}{2}$, $x>\frac{-a+\sqrt{a^2-36}}{2}$ при $|a|>6$; $x\neq 3$ при $a=-6$; $x\neq-3$ при $a=6$. **8.** Нет решений при $|a|<6$, $\frac{-a-\sqrt{a^2-36}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-a+\sqrt{a^2-36}}{2}$ при $|a|>6$, $x=3$ при $a=-6$, $x=-3$ при $a=6$. **9.** $x\in\mathbf{R}$ при $a<-2{,}25$; $x\neq\frac{4}{3}$ при $a=-2{,}25$; $x<\frac{-3+\sqrt{9+4a}}{a}$, $x>\frac{-3-\sqrt{9+4a}}{a}$ при $-2{,}25<a<0$; $x<\frac{2}{3}$ при $a=0$; $\frac{-3-\sqrt{9+4a}}{a}<x<\frac{-3+\sqrt{9+4a}}{a}$ при $a>0$.

Серия 8.

2. а) $y=-0{,}2x^2-0{,}8x+2{,}2$; б) $y=4x^2-40x+84$; в) $y=-x^2+3x-1$; г) $y=5x^2-3x-1$. **3.** а) $a<0$; б) $b>0$; в) $-8<\frac{b}{a}<-3$.

Серия 9.

1. а) -7; б) -1; в) -5; г) 2,875. **2.** а) 1; б) -3; в) 27; г) $-2{,}9375$. **3.** $a=7$. **4.** $a=\pm 2$. **5.** $a=1$. **6.** $a=-3$. 7. 10. **8.** 18. **9.** 2.

Серия 10.

2. а) $0\leqslant x\leqslant 2$, $5\leqslant x\leqslant 7$; б) $x=0$, $2\leqslant x\leqslant 4$; в) $x<0$, $0<x<2$, $x>4$; г) $0<x<0{,}5$, $x>2$. **3.** $-\frac{2}{3}<a<\frac{2}{3}$. **4.** $a\geqslant 0$. **5.** $a<-\frac{4}{3}$, $a>1$. **6.** $a\geqslant 16$. 7. $-1<b<1$.

Серия 12.

2. а) $-0{,}2$; 0; $0{,}1\,(-1\pm\sqrt{61})$; б) 0; $\frac{1}{3}$; $\frac{1\pm\sqrt{97}}{6}$. **3.** а) 1; $0{,}5\,(3\pm\sqrt{5})$; б) -1, $0{,}5\,(-3\pm\sqrt{5})$; г) 0,5, 2. **4.** а) $-4{,}4$; б) $0{,}5\,(-3\pm\sqrt{13})$. **5.** а) -2; 2; б) $-3{,}6$; $\frac{6}{11}$; в) 1; 4; $0{,}1\,(-23\pm\sqrt{609})$; г) 1; 3; $5\pm 3\sqrt{2}$; д) $-\frac{1}{9}$, $\frac{-15\pm\sqrt{177}}{8}$. **6.** а) $x=a^2+2a+3$, $x=a^2-3a-1$; б) нет решений при $a<-3{,}25$; $x=0{,}5\,(3\pm\sqrt{13-4a})$ при $-3{,}25\leqslant a<2$; $x=0{,}5\,(3\pm\sqrt{13-4a})$, $x=-1\pm\sqrt{a-2}$ при $a\geqslant 2$.

Серия 13.

2. а) $a \neq \pm 1$; б) $a=-1$; в) $a=1$. **4.** а) $|a|>6{,}72$; б) $|a|=6{,}72$; в) $|a|<6{,}72$. **6.** а) $(-3; 14; 6; -10; -6)$; б) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{14}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{10}; -\frac{1}{6}\right)$; в) $\left(\frac{2}{9}; 1{,}5; 3; 6\right)$. **7.** $a=-3$, $b=12$, $c=-12$ или $a=-1{,}08$, $b=-1{,}44$, $c=-0{,}48$. **8.** $a=0{,}5$, $b=16{,}5$. **9.** $a \leqslant -6-2\sqrt{5}$, $-6+2\sqrt{5} \leqslant a \leqslant 4-2\sqrt{3}$, $a \geqslant 4+2\sqrt{3}$.

Серия 14.

1. 77. **2.** 55. **3.** 657. **4.** Арифметическая прогрессия с первым членом 11 и разностью 126. **7.** $\frac{n-1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. **8.** а) Да; б) нет; в) нет.

Серия 15.

3. $a=-4$, $a=0{,}5$, $a=4$, $a=32$. **4.** $a=-7{,}8125$, $a=0{,}0625$, $a=4$. **6.** б) $\frac{q^n-1}{a_1 q^{n-1}(q-1)}$;

в) $\frac{a_1^2(1-q^{2n})}{1-q^2}+\frac{2a_1(1-q^n)}{1-q}+n$; г) $\frac{a_1^2(1-q^{2n})}{1-q^2}+\frac{q^{2n}-1}{a_1^2 q^{2n-2}(q^2-1)}+2n$.

7. $1{,}2+\sqrt{3}$, $7+4\sqrt{3}$ или $1{,}2-\sqrt{3}$, $7-4\sqrt{3}$. **8.** $4-2\sqrt{2}$, 4, $4+2\sqrt{2}$ или $4+2\sqrt{2}$, 4, $4-2\sqrt{2}$. **9.** У арифметической прогрессии. **10.** Да.

Серия 16.

4. $a=-6{,}75$. **5.** $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$. **6.** а) $x<1$; б) $\cos 3<x<\cos 4$. **8.** а) 0; б) 0; в) 1; г) 0.

Обобщающие и проверочные работы

Работа 1.

1. $\frac{\sqrt{ax}}{a-2x}$. **2.** 30 км. **3.** $-0{,}1(4\sqrt{3}+3)$. **5.** 40.

Работа 2.

1. $\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$. **2.** 2. **3.** $\frac{14\sqrt{7}-24}{49}$. **5.** $\sqrt{6}-2-\frac{1}{2\sqrt{3}}$; $2+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\sqrt{6}$.

Работа 3.

1. $a+b$. **2.** 42 дня и 33 дня. **3.** 0,25 при $n=4k$, $k \in \boldsymbol{N}$; $-0{,}125\sqrt{3}$ при $n=4k+1$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 0$; $0{,}125\sqrt{3}$ при $n=4k+2$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 0$; 0,25 при $n=4k+3$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \geqslant 0$. **5.** $x=5$ при $a=-0{,}5$; $x=-\frac{2}{3}$ при $a=\frac{4}{3}$; $x=-1$ при $a=1$; $x=a-2$, $x=4-2a$ при $a \neq -0{,}5$, $a \neq \frac{4}{3}$, $a \neq 1$.

1. $\frac{1-a}{2a}$. 2. $\frac{3a}{a-3}$ дней, $3<a<6$. 3. 0; при $\alpha=\frac{\pi}{7}$ значение выражения равно 0; при $\alpha=\frac{13\pi}{24}$ выражение не определено. 5. Через 1,44 ч.

Работа 5.

1. $1-x^2$. 2. $\frac{3(10-p)}{2(p-5)}$; $\frac{50}{7}\leqslant p\leqslant 10$. 3. 1,5. 5. $x<-5$, $x=3$.

Работа 6.

1. $\frac{m^3}{2(m-1)}$. 2. $0{,}25(2m+1+\sqrt{4m^2+1})$. 3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{24}{25}$; $-\frac{5}{11}$. 4. $n=21$, $m=-20$. 5. $a<0$, $a>\frac{21}{29}$.

Работа 7.

1. $\sqrt{x-a}$. 2. 3 км/ч. 3. $-0{,}125$. 4. 16. 5. $a=1$.

Работа 8.

1. $\frac{1}{b}$. 2. 54. 4. $-\frac{2}{3}$. 5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}; \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}; -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$.

Работа 9.

1. 1. 2. 12 ч и 15 ч. 3. 1,5. 5. 12.

Работа 10.

1. $\frac{1}{ab}$. 2. 10 ч и 15 ч. 3. $[-\sqrt{2}; -1)\cup(-1, 1)\cup(1; \sqrt{2}]$. 4. $a_{20}=-1045$, $a_1=0$. 5. $\frac{1}{1-a}<x<1$ при $a<0$; нет решений при $a=0$; $1<x<\frac{1}{1-a}$ при $0<a<1$; $x>1$ при $a=1$; $x<\frac{1}{1-a}$, $x>1$ при $a>1$.

Работа 11.

1. -6, 7. 2. $-4\leqslant x\leqslant 1$, $x=2$. 3. 16 км/ч, 12 км/ч. 4. $\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{130}}$, $\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{130}}$. Указание. $f(x)=0{,}25(x^2-4)$, $x>2$.

Работа 12.

2. $x \leqslant -3$, $-1 < x < 0{,}5\,(3-\sqrt{17})$, $0{,}5\,(3+\sqrt{17}) < x < 5$, $x=10$. **3.** $225°$. **4.** 90 км. **5.** 1.

Работа 13.

1. 36. **2.** 2; 14; 98. **3.** $\dfrac{1-7\sqrt{42}}{98}$. **4.** $1-\sqrt{4a^2-1}$.
6. 150 г, 450 г.

Работа 14.

1. 5 км/ч $\leqslant v \leqslant$ 7 км/ч. **2.** 0,5. **3.** 5000 р. **5.** $-\dfrac{68}{83}$.

Работа 15.

1. $-10 \leqslant a \leqslant 10$. **3.** 8 деталей. **4.** 0,8. **5.** $1 < x \leqslant 4$.

Работа 16.

1. $0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}$, $x > 1$. **2.** $-5\dfrac{2}{3}$. **3.** Более чем на 20%. **4.** 5. **5.** $|a| = 3\sqrt{13}$.

Работа 17.

1. $-2 < x \leqslant -1{,}5$, $-1 < x \leqslant 1$. **2.** 11 м/с или $9\dfrac{2}{3}$ м/с. **5.** $-0{,}25\sqrt{2}$.

Работа 18.

2. На 3^{44}. **3.** а) 1; б) $2{,}5\pi$. **4.** 9 человек. **5.** $\dfrac{32}{27}$.

Работа 19.

1. $8\dfrac{39}{49}$. **2.** 6, 7. **3.** 35.

Работа 20.

1. 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку. **3.** $a = -6, -5, -4, \ldots, 14, 15$.
4. 1625.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Галицкий Михаил Львович
Гольдман Александр Михайлович
Звавич Леонид Исаакович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

Учебное пособие для 8—9 классов
с углубленным изучением математики

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова
Редакторы Л. М. Котова, Л. Н. Белоновская
Младшие редакторы Л. И. Заседателева, Н. В. Сидельковская
Художники Ю. В. Пахомов, Е. П. Титков, Л. М. Чернышов
Художественный редактор Е. Р. Дашук
Технические редакторы Л. М. Абрамова, М. М. Широкова, Н. А. Киселева
Корректор Н. С. Соболева

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Подписано к печати с диапозитивов 26.09.2000. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17 + 0,31 форзац. Усл. кр.-отт. 17,81. Уч.-изд. л. 14,88 + 0,37 форзац. Тираж 30 000 экз. Заказ № 2957.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.