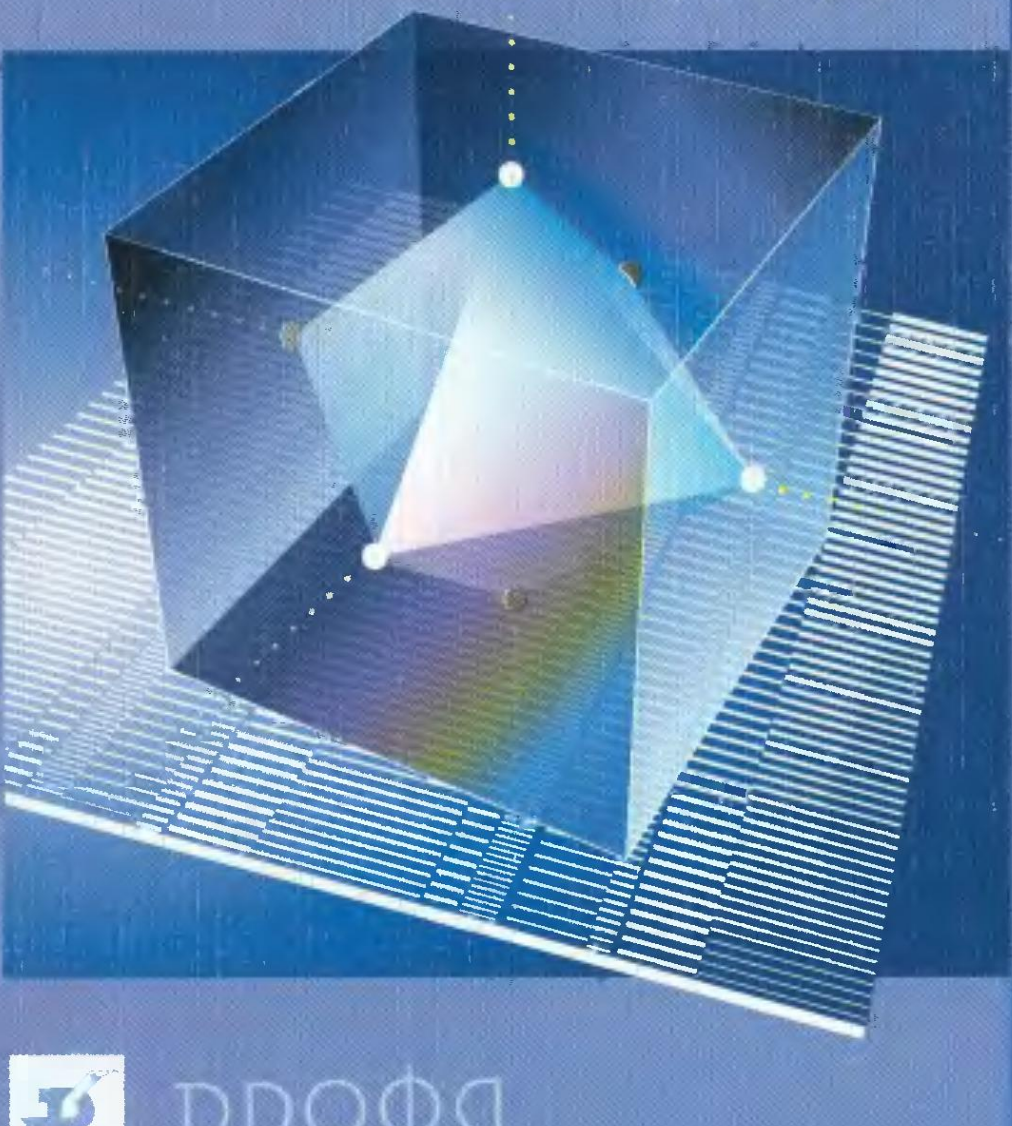
Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич

ГЕОМЕТРИЯ

методическое пособие

11 класс



дрофа

Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич

ГЕОМЕТРИЯ

методическое пособие

11 класс

Дрофа

Москва · 2005

УДК 372.851.4
ББК 74.262.21
П64

Потоскуев, Е. В.

П64 Геометрия. 11 кл. : методическое пособие к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — М. : Дрофа, 2005. — 220, [4] с. : ил.

ISBN 5-7107-8907-0

Предлагаемое методическое пособие призвано помочь учителю в работе по комплекту Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия. 11 кл.» для классов с углубленным и профильным изучением математики, состоящему из учебника и задачника, который может быть использован и в общеобразовательных классах с сильным составом учащихся.

В пособии приводятся общие рекомендации к изучению материала, содержится примерное почасовое планирование, контрольные работы, билеты к зачетам по каждой теме и к итоговому устному экзамену, приведены ответы к контрольным работам и задачам из билетов, а также задачи из раздела ЕГЭ «Геометрия» за 2001—2003 гг.

УДК 372.851.4
ББК 74.262.21

ISBN 5-7107-8907-0

Введение

О преподавании стереометрии в 11 классе с углубленным и профильным изучением математики

Учебно-методический комплект для изучения геометрии (стереометрии) в 10—11 классе предназначен, главным образом, для школ и классов с углубленным или профильным изучением математики, хотя может быть использован и в общеобразовательных классах с сильным составом учащихся и возможностью использования дополнительного учебного времени за счет факультативных занятий или спецкурсов. Речь идет, в том числе, и о классах, в которых углубление начинается с 8 класса, вследствие чего учащиеся этих классов к 10 классу уже достаточно сильно продвинуты в изучении математики, в частности планиметрии, а также о тех классах, где предпрофильное обучение начинается в девятом классе.

Следует иметь в виду, что на изучение геометрии в классах с профильным изучением математики отводится 3 часа в неделю, то есть, с одной стороны, в полтора раза больше, чем в общеобразовательных классах, а с другой стороны, получается дополнительно один час в неделю — всего 33—34 часа в год. Этого, конечно, очень мало. В этой связи, по нашему мнению, главным отличием изучения геометрии в классах с профильным изучением математики является не только углубление и расширение теоретического материала, но и методически верная подборка решаемых задач, как в количественном, так и в качественном отношении.

Прежде всего, необходимо решить все простейшие опорные задачи курса. Этими задачами ни в коем случае не нужно пренебрегать, какими бы простыми они ни казались. Однако следует учитывать, что методика решения таких задач в классах с профильным изучением математики, вообще говоря, отличается от методики их решения в общеобразовательных классах и классах гуманитарного направления. Только после решения всех опорных задач можно переходить к решению более сложных задач. Разумеется, сам отбор этих задач не только непрост, но и неоднозначен. В нашем задачнике мы выделили значком «☺» те задачи, которые считаем основными (среди них, в частности, находятся и все опорные задачи). Естественно, что такой выбор в определенном смысле является условным и, возможно, будет изменен учителем в процессе работы по этим учебнику и задачнику.

Мы не являемся сторонниками покупки учащимися различного рода «решебников», однако образцы решения и оформления задач, безусловно, могут и должны быть рекомендованы учащимся. В наших учебниках и задачниках имеется достаточное количество таких образцов к решениям многих задач различного уровня трудности.

Составляя задачный материал, мы не ставили себе целью включение трудных и уж тем более олимпиадных задач. Вместе с тем мы посчитали необходимым рассказать в книге для учителя о том, как можно решать ту или иную задачу из нашего задачника, сделать наиболее оптимальный рисунок по условию решаемой задачи. Это, разумеется, не означает, что предложенный нами способ решения данной задачи является единственным или наилучшим. Как известно, в большинстве случаев такой способ вообще трудно определить.

О некоторых методических аспектах организации и интенсификации процесса решения задач на уроках в классах с углубленным или профильным изучением математики мы рассказали в книге для учителя при изучении геометрии в 10 классе.

Если книга для учителя попадет в руки учащегося, то, как и в случае с решениями, помещенными в задачниках, он может изучать опубликованные в этой книге наши решения. Это будет большим подспорьем в развитии умения работать с текстом задачи, анализировать ход ее решения, и в итоге, овладевая методами решения геометрических задач, учащийся приобретет навык к самостоятельному их решению. Кроме того, он увидит правильно выполненный, конструктивный чертеж.

Значительной проблемой при преподавании геометрии является малое количество задач, которые учитель успевает рассмотреть с учащимися за время урока. Но все же, решая на каждом уроке по 2—3 задачи и дома к каждому уроку — по 4—5 задач, учащийся за отведенное учебное время может при умении и желании нарешать около 700 задач, что не так уж и мало. В каждом из наших задачников и для 10 класса, и для

11 класса более чем по 1000 задач, многие из которых содержат еще и подзадачи.

Можно посоветовать составлять домашнее задание из трех блоков. Первый блок состоит из 2—3 задач и предназначен для всех учеников класса; второй блок (также 2—3 задачи) в двух-трех вариантах предлагается для разных групп учащихся класса в зависимости от их успехов по предмету; третий блок содержит трудную и интересную задачу. При этом важно: выполнение заданий 1-го и 2-го блоков обязательно. Задача третьего блока решается по желанию, а ее правильное решение может быть оценено отличной оценкой только при безусловном решении обязательной части домашнего задания. Составление таких домашних заданий требует больших усилий со стороны учителя, вместе с тем может дать весьма хорошие результаты в обучении учащихся геометрии. В конце учебного года стоит еще раз проанализировать систему домашних заданий за прошедший год и постараться ее модернизировать.

Может быть, полезно по договоренности с учениками и при взаимном желании учеников и учителя завести «братскую» тетрадь. Эту тетрадь ведут по очереди все ученики класса: во время урока ученик делает записи не в своей тетради, а в «братской» (каждый ученик будет работать в этой тетради приблизительно один раз в два месяца). «Братская» тетрадь хранится в классе. Это дает возможность и ученикам, и учителю в любой момент посмотреть, что и как было выполнено на том или ином уроке.

Ученик, записавший урок и данное на нем домашнее задание, ставит свою подпись, и учитель может оценить качество его работы. (Мы неоднократно использовали «братскую» тетрадь в процессе преподавания геометрии, и это часто помогало в работе.) Вообще говоря, можно и приготовление домашнего задания производить в «братской» тетради, но этого мы не пробовали делать.

«Братская» тетрадь особенно важна для учащихся, пропустивших занятия по болезни. Каждый из таких учащихся может взять эту тетрадь домой для изучения и переписывания материала, изученного на пропущенном уроке.

Учителю целесообразно также продумать вопрос о требованиях, которые он будет предъявлять к записям учащихся в их рабочих тетрадях по геометрии.

В этой связи мы бы посоветовали учителю решить для себя следующие вопросы организации работы учащихся относительно тетрадей.

1. Учащиеся могут вести по две тетради. Одну — для записи лекций учителя и задач, решенных в классе, а другую — для выполнения домашних заданий. В таком случае учителю будет легче, например, собрать тетради у всех учащихся или части класса и ознакомиться с их домашними работами.

2. Удобной формой ведения домашних тетрадей может быть тетрадь со съемными блоками, которые сейчас широко продаются и используются многими учащимися. Если такие тетради ведут все учащиеся класса, то учитель может в конце урока попросить вынуть из тетради и сдать для проверки решения одной-двух указанных им задач из домашнего задания.

3. Целесообразно такое структурное устройство тетради ученика, чтобы он мог легко найти в ней любую задачу, решенную несколько уроков назад, более того, вспомнить, какие задачи и когда решались в процессе учебы. Для этого можно пронумеровать все страницы тетради и ввести для заполнения следующую таблицу-оглавление.

Номер урока	Дата	Номер страницы	Тема урока	Номера задач, решенных на уроке	Домашнее задание	Примечание	Самооценка

При этом в примечании ученик указывает номера заданных на дом задач, которые ему не удалось решить к данному уроку, и номера страниц тетради, на которых он решил (может быть, с помощью товарищей или учителя) эти задачи позднее.

Можно посоветовать учащимся отмечать на полях тетради наиболее важные разделы материала, рассмотренного на уроке. (Может быть, стоит разрешить учащимся карандашом отмечать в задачнике задачи, решенные в классе, буквой К, а решенные дома — буквой Д.)

Мы убеждены, что у каждого опытного учителя имеется много вариантов решения вопросов организации обучения геометрии, а также свои «маленькие хитрости» и «великие находки» в реализации этого процесса.

Формы домашних заданий должны быть разнообразными. В том числе возможны задания «на творческую переработку», суть которых состоит в следующем. Учитель задает учащимся, например, разобрать решение задачи, помещенное в нашем задачнике или учебнике, после чего ученик должен «творчески переработать» это решение, прорецензировать его и при возможности — предложить свой лучший или, во всяком случае, другой вариант решения этой задачи. (Можно использовать, например, задачи 1.035, 1.107, 1.112, 1.123, 2.164, 2.245, 2.418 и многие другие задачи из нашего задачника для 11 класса.) Для этой же цели можно использовать и задачи, решенные в данной книге.

Полезно также предлагать учащимся переносить тот или иной чертеж из задачника или учебника в свою тетрадь. (О важности чертежа на уроках стереометрии говорилось в нашей книге для учителя при работе в 10 классе.)

Очень важным и эффективным при изучении стереометрии является умение учащихся сделать правильный чертеж к каждой из теорем учебника и точно записать, что дано в условии этой теоремы и что требуется доказать.

При выполнении домашних заданий и при решении задач на уроках, а иногда и при выполнении контрольных работ учащиеся могут использовать помещенные в наших задачниках «Формулы планиметрии, стереометрии и тригонометрии», которые, в определенной мере, заменяют справочный материал.

Отметим, что выбор учителем нашего учебника и задачника в качестве основных дает большие возможности для подробного изучения стереометрии, но это вовсе не означает, что в процессе обучения геометрии не могут использоваться другие учебники, пособия и задачники. Так, например, наши учащиеся и в дальнейшем смогут заглядывать в целый ряд книг и использовать их. Приведем примерный список этих книг.

Атанасян Л. С. и др. Геометрия. Учебник для общеобразовательных учреждений.

Шарыгин И. Ф. Геометрия. Учебник для 10—11 классов.

Шарыгин И. Ф. Геометрия. Стереометрия. Задачник.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии.

Александров А. Д. и др. Геометрия (для классов с углубленным изучением математики). Учебник для общеобразовательных учреждений.

Киселев А. П. Стереометрия. (Факсимильное издание, «Дрофа», 1995). Учебник для общеобразовательных учреждений.

Рыбкин Н. А. Сборник задач по стереометрии (в одной обложке с вышеуказанным учебником А. П. Киселева).

Зив Б. Г. и др. Задачи по геометрии для 7—11 классов. (Библиотека учителя).

Гусев В. А. и др. Практикум по элементарной математике. Геометрия.

Аверьянов Д. И. и др. Сборник задач по геометрии для проведения устного экзамена в 9 и 11 классах (этой книгой мы пользуемся для проведения итоговой аттестации по геометрии в 9 и 11 классах и для проведения открытых зачетов по решению задач).

Звавич Л. И., Рязановский А. Р. Геометрия в таблицах (справочное пособие). М.: Дрофа, 1997 и все последующие годы.

Сборник задач по математике для поступающих в вузы под редакцией М. И. Сканави.

Говоров В. М. и др. Сборник конкурсных задач по математике.

При обучении геометрии можно также весьма плодотворно использовать рабочие тетради по стереометрии Литвиненко В. Н., привлекать к работе материалы журналов «Квант», «Математика в школе» и газеты «Математика».

В процессе изучения планиметрии в 7—9 классах была рассмотрена тема «Геометрические преобразования плоскости», в частности, движения и гомотетия. Изучение аналогичных преобразований в пространстве предусматривается в курсе стереометрии 11 класса, но некоторые идеи (например, применение центральной симметрии при знакомстве с параллелепипедом и применение гомотетии при изучении параллельных сечений пирамиды) могут быть вполне использованы и в курсе стереометрии в 10 классе.

Особенностью изучения теоретического материала стереометрии, на наш взгляд, является безусловное доказательство на уроках всех рассматриваемых теорем (кроме особо оговоренных случаев и, быть может, теорем темы «Геометрические преобразования пространства»), создание стройной системы доказательств этих теорем и вынесение их на устные зачеты, экзамены и т. п. Обращаем внимание читателя, что системы именно стройной, но «не уныло» строгой. Мы уже писали, что, на наш взгляд, совершенно не обязательно при изучении школьной геометрии приводить полную систему аксиом стереометрии, удовлетворяющую всем требованиям, предъявляемым к системе аксиом математической науки.

Изложение теоретического материала мы советовали бы вести лекционным методом, крупными тематическими блоками.

В нашем учебнике тема «Геометрические преобразования пространства» изложена довольно подробно, корректно и основательно. Вместе с тем любой учитель математики, в зависимости от условий и традиций своей школы, своих вкусов, может сам решить, на каком уровне изучать эту тему. Более того, очень важным и главным для учителя должен стать методически верный выбор как уровня сложности решаемых задач по этой теме, так и уровня требований, которые будет предъявлять учитель к учащимся при проверке их знаний. Разумеется, каждый ученик профильного класса должен хотя бы на наглядно-конструктивном уровне представлять весь изложенный в учебнике материал о геометрических преобразованиях пространства.

Две следующие темы курса стереометрии 11 класса — «Многогранники» и «Фигуры вращения» — необходимо изучить с должной подробностью и основательностью. Методические рекомендации по вопросам изучения каждой из этих тем предложены в данной книге в виде комментария, как по части изложения теоретического материала, так и относительно решения задач соответственно о многогранниках и фигурах вращения.

При изучении темы «Многогранники» можно проводить уроки решения задач по склеенным учащимися моделям многогранников. Например, провести урок-презентацию, посвященную видам пирамид. Каждый учащийся (или каждые два ученика) получает (получают) задание склеить модель той или иной пирамиды. На внешней стороне основания модели пирамиды должно быть написано, кто ее изготовил, и какие особенности имеет данная пирамида. На одной из боковых граней может быть изображена уменьшенная развертка данной пирамиды. (Задачи для склеивания многогранников имеются в задачнике 11 класса, с. 145.)

Приведем примеры некоторых заданий на изготовление моделей.

Нарисуйте развертку многогранника, свойства которого указаны в условии задачи, и склейте из нее многогранник, если этим многогранником является:

1. Пирамида, в основании которой лежит треугольник со сторонами 9 см, 12 см и 15 см, а все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°.

2. Пирамида, в основании которой лежит треугольник со сторонами 15 см, 15 см и 18 см, а все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°.

3. Пирамида $ABCD$, в основании которой лежит треугольник ABC, $AB = BC = BD = 10$ см, угол ABC равен 120°, а плоскости граней DAB и DBC перпендикулярны плоскости основания.

4. Пирамида $MABCD$, в основании которой лежит трапеция $ABCD$, $AB = BC = CD = 8$ см, $AD = 16$ см, а плоскости граней MAB и MCD перпендикулярны плоскости основания.

5. Тетраэдр, все грани которого — треугольники со сторонами 9 см, 10 см и 11 см.

На уроке учащиеся демонстрируют изготовленные ими модели, рассказывая при этом об их особенностях и способах изготовления. Кроме того, учащиеся могут найти в задачнике задачи, которым соответствует данная модель. А еще лучше, если они придумают задачи на склеивание многогранников самостоятельно.

Очень интересно можно провести урок по задачам, предложенным в задачнике под рубрикой «Может быть или не может быть?», с. 163—169. Такой урок можно провести и в форме научно-практической конференции, и в качестве открытого урока, и в виде работы с малыми группами.

Процесс изучения геометрии в 10 классе был очень насыщенным и очень напряженным. Были доказаны все базисные теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, рассмотрены основные вопросы о нахождении и вычислении углов и расстояний между ними, изучены векторный и координатный методы в пространстве.

Дальнейшее освоение стереометрии в 11 классе в значительной степени зависит от того, как усвоен стереометрический материал 10 класса.

В настоящее время часто обсуждается проблема перегрузки учащихся. Не ставя своей целью обсуждение всех компонентов этой перегрузки, заметим, что учебная перегрузка учащегося находится в полном соответствии уровня его знаний тем требованиям, которые предъявляются в данный момент к знаниям учащихся.

Многолетний опыт обучения геометрии свидетельствует о том, что если ученик обладает прочными и хорошими знаниями ранее пройденного геометрического материала, владеет высокой техникой вычислений и умениями решать опорные, базисные задачи, то перегрузки у такого ученика при изучении и планиметрии, и стереометрии не возникают. Если же ученик испытывает затруднения в устных вычислениях в пределах сотни и письменных — в пределах тысячи, если он слабо усвоил свойства треугольников, четырехугольников и окружностей, если им не понято большинство метрических соотношений в планиметрии, при этом формулы планиметрии он не понимает (не видит в них геометрического смысла), а лишь находит эти формулы в справочниках, да и то с трудом, то практически любое домашнее задание по стереометрии для него становится «перегрузкой». (Не новость, что снижение количества часов на математику в школьном образовании — абсолютно неверная идея. Именно снижение числа часов, особенно в младших классах, и приводит к перегрузке учащихся в среднем звене, а затем и в старших классах, поскольку эта перегрузка, как мы уже говорили выше, вызвана главным образом слабыми знаниями и умениями учеников, приобретенными ими в младшей школе.)

В настоящее время вводятся новые стандарты по геометрии, и нам кажется, что если уровень знаний ученика полностью соответствует этим стандартам, а учитель математики в своей работе методически верно организует учебный процесс, то при изучении стереометрии не возникает вопрос о перегрузках такого ученика.

Мы настоятельно советуем учащимся 11 класса пользоваться учебником и задачником по геометрии для 10 класса и постоянно к ним обращаться. В этой связи необходимо, чтобы наш комплект учебника и задачника для 10 класса был в школьных библиотеках в достаточном количестве.

Следует заметить, что в примерное почасовое планирование мы не включили отдельным блоком повторение курса стереометрии 10 класса. В действительности же в процессе изучения любой темы стереометрии в 11 классе мы так или иначе неоднократно обращаемся к ранее пройденному материалу курса стереометрии 10 класса. К тому же, возможно, было бы полезным постоянно обсуждать с учениками список теорем 10 класса (см. учебник геометрии для 10 кл., с. 195).

При изучении теоретического материала и при решении геометрических задач учащимся очень удобно использовать список теорем в порядке их изучения. Причем в этом списке присутствует не формулировка теоремы, а ее развернутое название. Например, теорема о двух параллельных прямых, одна из которых пересекает данную плоскость. Наличие такого списка у учащихся способствует:

• формированию у них представлений о логической структуре курса геометрии и о порядке следования изученных тем и теорем (что из чего следует и в каком порядке излагается);

• лучшему, сознательному усвоению и запоминанию учащимися ключевых вопросов курса стереометрии, а также возможности учащихся лучше и быстрее ориентироваться в пройденном материале;

• возможности учителя организовать на уроке быстрое повторение теории (учащимся предлагается найти в списке ту или иную теорему и по названию этой теоремы дать ее полную формулировку);

• возможности учащихся сократить запись логических обоснований при выполнении ими контрольных и других письменных работ. Наши ученики имеют право пользоваться данным списком теорем как на уроках, так и во время ответа у доски, на контрольных работах и даже на экзаменах. Правда, на экзаменах данный список дублируется текстом билетов, однако в билетах теоремы даны достаточно хаотично;

• в определенной мере формированию умения учащихся пользоваться справочными материалами (мы используем на уроках геометрии книгу «Геометрия в таблицах» Звавич Л. И., Рязановский А. Р. М., 1997 и все последующие годы издания, выпущенную в издательстве «Дрофа». Эта книга имеется у каждого из наших учащихся).

Список теорем может быть хорошей основой как для проведения систематического повторения курса стереометрии в 10 классе, так и для изучения и повторения этого курса в 11 классе.

Списки теорем курса стереометрии помещены в наших учебниках и задачниках для 10 и 11 классов. Мы советуем учащимся по мере изучения стереометрии переносить блоки этих списков в свой компьютер и всегда иметь перед глазами распечатку теорем из пройденного геометрического материала.

В наших книгах для учителя есть тексты контрольных работ, но нет текстов самостоятельных работ. На это имеется ряд причин. С одной стороны, нам кажется, что урочного времени не так уж и много, чтобы учитель «бездействовал» во время урока, а любое домашнее задание к тому же является самостоятельной работой. С другой стороны, учитель, любящий самостоятельные работы, найдет в наших задачниках обширный и благодатный материал для их составления.

В представленной книге для учителя предложены восемь контрольных работ. Рассматривая эти контрольные работы, учитель сам решит, полностью ли они соответствуют тому уровню знаний, который он собирается задать при работе с данным классом. При этом возможна как разгрузка контрольных работ за счет изменения текстов задач и введения значков необязательных заданий, так и усложнение текстов.

Каждая контрольная работа предваряется списком подготовительных задач. На своем опыте мы убедились, что предложение такого списка (его также можно назвать «подготовительным вариантом») помогает учащимся структурировать свои знания и конкретизировать свою подготовку на данный момент по данной теме.

К списку подготовительных задач учитель может добавить к каждой контрольной работе список теоретических вопросов, что также весьма плодотворно влияет на подготовку учащихся к контрольной работе. Такие вопросы можно заимствовать либо из списка теорем, либо из вопросов, предложенных в нашей книге для проведения зачетов.

Подготовительный набор задач к контрольной работе можно использовать различными способами.

1. Набор задач вывешивается в кабинете за 10 дней до проведения контрольной работы, и преподаватель по мере необходимости проводит консультации по той или иной задаче.

2. Набор задач вывешивается в кабинете или раздается в ксерокопиях каждому ученику за 10 дней до проведения контрольной работы, и на уроке, предшествующем контрольной работе, проводится обсуждение рассматриваемых задач.

3. Набор задач раздается каждому ученику на уроке, предшествующем контрольной работе, и рекомендуется для решения в качестве домашнего задания.

4. Набор задач раздается каждому ученику на уроке, предшествующем контрольной работе. При этом ученик допускается к выполнению контрольной работы только в том случае, если сдает на отдельных листах решения задач подготовительного набора.

5. Набор задач раздается каждому ученику за 10 дней до контрольной работы. Ученики сдают учителю или друг другу зачет по задачам данного набора и только в этом случае допускаются до выполнения контрольной работы.

6. Учитель использует подготовительный набор на уроке перед контрольной работой и аналогичные задачи дает на дом для подготовки.

Каждая форма имеет свои плюсы и минусы, и ее успех во многом зависит от интересов учителя и состава класса.

Если учитель посчитает, что контрольных работ слишком много, он может либо не проводить часть из них, либо соединить две контрольные работы в одну, убрав часть заданий, либо провести контрольную работу в виде самостоятельной работы на уроке или в виде домашней контрольной работы.

Первые шесть контрольных работ — тематические, седьмая и восьмая — обобщающие, итоговые. Учителю стоит внимательно отнестись к контрольной работе № 1, и, возможно, изменив ее содержание, сделать это содержание соответствующим уровню изучения данной темы в своем классе (об особенностях ее изучения мы уже говорили). Что касается контрольных № 7 и № 8, то их проведение в определенном смысле зависит от того, как предполагается проводить итоговую аттестацию по геометрии в данном классе.

Заметим, что повторению планиметрического материала и материала стереометрии 10 класса способствуют все предложенные нами зачеты в 11 классе. Каждый зачет состоит из 10 билетов. Любой из билетов содержит два теоретических вопроса, один из которых посвящен определенному материалу или планиметрии, или стереометрии 10 класса.

Для тех учителей, которые благоприятно относятся к проведению зачетов, нами разработаны и в данной книге предложены 3 *зачета* по темам курса.

Зачет № 1 по теме «Геометрические преобразования пространства». (Повторение по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве».)

Зачет № 2 по теме «Многогранники». (Повторение по теме «Векторы и координаты в пространстве».)

Зачет № 3 по теме «Фигуры вращения». (Повторение по теме «Повторение планиметрии».)

Наличие задач в зачетах 11 класса нам представляется необязательным. Но если учитель пожелает в зачет включить и решение задач по соответствующему разделу, то такие задачи можно предложить учащимся открытыми либо из наших задачников, либо из книги Аверьянова Д. И. и др. «Сборник задач по геометрии для проведения устного экзамена в 9 и 11 классах».

Очень важным остается глобальный вопрос о целях и задачах обучения школьной математике. Недаром стандарты по математике принимались с гораздо большими трудностями, чем стандарты по другим учебным предметам. Мы возьмем на себя смелость высказать мнение о том, что стандарты по математике практически невозможно выработать даже такими, чтобы их содержанием была удовлетворена хотя бы половина учителей математики. Эти стандарты непременно будут носить слишком уж индивидуальный характер, их содержание будет зависеть от взглядов и интересов той группы лиц, которая эти стандарты заказывает и готовит. К тому же трудности в создании и реализации стандартов порождаются еще и несоответствием количества отводимых на математику часов требованиям, которые предъявляются к тем знаниям и умениям учащихся, которые должны быть выработаны на уроках математики и которые требуются при изучении других школьных предметов. Это несоответствие обнаруживается как при проведении итоговой аттестации, так и при приеме в вузы.

Математика — предмет, изучающийся с первого по выпускной класс, и объем приобретаемых знаний по этому предмету чрезвычайно велик, а следовательно, велик и объем пробелов, накапливающихся у учащихся за годы полного обучения в школе. Заполнение этих пробелов, к сожалению, становится огромной задачей для учителя математики старших классов.

Специфика преподавания математики в старших классах во многом определяется еще и глубоким пониманием преподавателя математики того факта, что большинству его питомцев нужна хорошая оценка не только по «школьной составляющей» ЕГЭ, но и по всем задачам этого экзамена в целом (в частности, по геометрическим задачам).

Математику, в отличие от других предметов, сдают в большинство высших учебных заведений, независимо от того, какие это учебные заведения (математические, естественнонаучные, технические, экономические, военные, связанные с математической лингвистикой и т. д.). Иначе говоря, легче по пальцам пересчитать вузы, при поступлении в которые не будет требоваться представление балла по математике, полученного на ЕГЭ, чем те вузы, при поступлении в которые этот балл требуется.

Можно довольно долго обсуждать вопрос о том, нужен или не нужен итоговый экзамен по геометрии за курс полной школы. Еще сравнительно недавно этот экзамен был обязательным для всех школьников, затем он стал одним из экзаменов по выбору, но считалось «по умолчанию», что все выпускники классов с углубленным изучением математики сдают экзамен по геометрии. Этот экзамен был устным. На нем школьник, помимо знаний по геометрии, демонстрировал умение излагать свои мысли в устной форме. Однако письменный и устный экзамены имеют очень много существенных различий, и сводить весь итоговый контроль только к письменным (тем более только к тестовым) испытаниям было бы, на наш взгляд, совершенно неверно.

Математическое образование в России подразумевает в первую очередь развитие математической культуры учащихся, важными составными частями которой следует считать логическую культуру, культуру вербальную и культуру графическую. Неотъемлемым элементом математической культуры является развитие умения истолковывать поставленную задачу в формальных терминах, проводить рассуждения и доказательства, строить геометрические интерпретации, устно и письменно излагать решения задач и доказательства утверждений. С изменением формы итоговой аттестации, обусловленным введением единого государственного экзамена по математике, который включает в себя очень малый процент специфических заданий по геометрии, не представляется возможным в полной мере и объективно оценить в области геометрии уровень математической культуры выпускника класса с профильным изучением математики.

В этой связи мы бы советовали проводить в профильных классах если не экзамен, то хотя бы итоговый зачет по всему курсу стереометрии.

В публикуемых нами экзаменационных билетах содержится два теоретических вопроса. Ответ на первый вопрос предполагает, в частности, доказательство одной из важных теорем курса стереометрии. При ответе на второй вопрос билета учащийся должен продемонстрировать широту своих знаний по этому вопросу без обязательного доказательства каких-либо утверждений.

При подготовке к этому устному испытанию можно распределить билеты среди учащихся класса — назначить специалистов. Специалист оформляет письменный ответ на свой билет «вчерне», делает по нему сообщение, выслушивает замечания класса и учителя, после чего оформляет ответ окончательно. В результате в классе набирается материал с ответами на каждый билет, что может служить подспорьем для всех учащихся этого класса. При этом бывает забавно, когда на экзамене (или зачете) специалисту попадает его собственный билет. Но «лотерея» есть «лотерея»!

Конечно, как и любое методическое решение, такое мероприятие имеет свои плюсы и минусы, и учителю вместе с учениками самим решать, нужна ли такая процедура. Однако в наше время, когда массовыми тиражами издаются различные, иногда весьма непрофессиональные «решебники», «ответники» и другие «псевдопособия», все же лучше использовать билеты, написанные квалифицированно под руководством учителя.

Если раньше учитель математики в школе мог еще как-то, в определенном смысле, отстраниться от вопросов сдачи его выпускниками вступительных экзаменов в вуз и сосредоточиться только на выпускном экзамене в школе, то с введением ЕГЭ на учителя математики явно или неявно возлагается еще бóльшая ответственность.

Сейчас с введением профильного обучения много внимания уделяется возможности проведения элективных курсов, то есть курсов по выбору.

Все сказанное наводит на мысль о том, что в будущей профильной школе математика практически во всех профильных направлениях займет весьма важное место. Это, в свою очередь, означает, что учитель математики, опять же независимо от профиля, будет стремиться к увеличению числа учебных часов по своему предмету. Поэтому, как нам представляется, абсолютное большинство учителей математики будет заинтересовано во введении элективных курсов. С другой стороны, очень важно, какие элективные курсы пожелают вести учителя математики и как они распорядятся отведенным для этих курсов временем.

Можно прогнозировать, что очень многие из преподавателей математики захотят так или иначе, вольно или невольно, явно или неявно использовать элективные курсы для закрепления основной программы, и в частности для прагматической подготовки учащихся к ЕГЭ.

На наш взгляд, практически в любом элективном курсе по математике должна присутствовать (и на самом деле присутствует) прагматическая составляющая, поскольку изучение любого раздела математики связано с комплексным повторением и заполнением все тех же самых злополучных пробелов. С другой стороны, важно, в какой степени и как реализуется эта прагматическая составляющая.

Интерес учащихся к математике за годы, на наш взгляд, предшествующие профильному обучению, в основном уже сформирован. Рассматривая причины интереса к математике у своих учеников, учителю не стоит путать интерес к ней как к средству поступления в высшее учебное заведение с интересом к ней как собственно учебному предмету, как к замечательной науке.

Одной из важных задач введения элективных курсов является именно интеллектуальное развитие учащихся и повышение их интереса собственно к математике. Ученик, испытывающий интерес к математике, чувствует эстетическое удовлетворение от красиво решенной им задачи, от установленной им возможности приложения математики к другим наукам.

Если в изучении предметов естественнонаучного цикла очень важное место занимает эксперимент, и именно при подготовке, проведении и обсуждении результатов этого эксперимента формируются и развиваются интересы ученика к данному предмету, то в математике эквивалентом эксперимента является решение задач. Собственно, весь курс математики может быть построен и, как правило, строится на решении различных по степени важности и трудности задач. Совершенно ясно, что любую теорему тоже можно и нужно рассматривать как задачу, ее доказательство — как решение этой задачи, а использование в различных областях доказанного — как приложение этой теоремы-задачи.

Отметим еще одну общую для всей школы особенность элективных курсов. Элективный курс проводится для сравнительно небольшого числа учащихся, пожелавших выбрать данный элективный курс. Нам кажется, практически трудно найти школу, в которой имеются классы (пусть профильные или, как пока их называют, углубленные), которые сформированы из учащихся, имеющих равную по уровню математическую культуру. Иначе говоря, уровень математической подготовки учащихся как одной школы, так и одного класса различен. Поэтому одной из важных особенностей элективных курсов является их ориентация на различные по уровню математической культуры группы учащихся.

В настоящий момент мало опубликовано разработок по ведению элективных курсов, и учитель сам подбирает материал для этой работы.

Наш комплект, безусловно, может стать хорошей основой для ведения полугодовых и годовых элективных курсов по геометрии. Для этого можно использовать основной материал учебников и задачников комплекта, и особенно — материал их разделов «Приложения» и «Дополнения».

Мы можем посоветовать следующие *темы для элективных курсов* в профильной школе с использованием нашего комплекта.

1. Практикум решения задач по планиметрии. (Курс рассчитан на 30 часов по 2 часа в неделю.) Используется «Дополнение 2» из задачника для 10 класса.

2. Практикум решения задач повышенной трудности по стереометрии. (Курс рассчитан на 30 часов по 2 часа в неделю.) Используются задачи, отмеченные значком ♉ из задачников 10 и 11, и материал «Дополнения» задачника 11 класса: «Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений» и «Конкурсные задачи для поступающих в вузы».

3. Векторы и координаты в пространстве. (Курс рассчитан на 30 часов по 2 часа в неделю.) Используется материал глав 6 и 7 учебника и задачника 10 класса, а также из дополнения учебника 11 класса: «О векторном произведении двух векторов», «Об аналитической геометрии», «О поверхностях второго порядка».

4. Построения в геометрии. (Курс рассчитан на 30 часов по 2 часа в неделю.) Используется материал учебника и задачника 10 класса и дополнения к ним: «Задачи на построение при помощи циркуля и линейки», «Изображении фигур в параллельной проекции», «Методы построения сечений многогранников», а также материал очерка «О проективной геометрии» из учебника для 11 класса.

5. Преобразования в пространстве. (Курс рассчитан на 30 часов по 2 часа в неделю). Используется материал главы 1 учебника и задачника 11 класса, а также дополнение «О симметриях правильных многогранников».

6. Дополнительные вопросы геометрии. (Курс рассчитан на 60 часов по 2 часа в неделю.) Используется материал дополнений учебников и задачников 10 и 11 классов.

7. О различных ветвях геометрии. (Курс рассчитан на 30 часов по 2 часа в неделю.) Используются дополнения «О различных ветвях геометрии» и «Об аксиоматическом по-

строении геометрии» учебника для 11 класса. Это может быть исключительно интересный и познавательный элективный курс. Его можно вести совместно с учителем истории. Он может стать частью курса истории науки.

Авторы выражают благодарность учителю математики Тамаре Николаевне Потоскуевой за ценные замечания и большую помощь в подготовке рукописи к печати, а также учителям математики гимназии № 1567 Москвы Козулину Б. В. и Шляпочнику Л. Я., учителям математики города Тольятти Назаровой Л. П., Карпуховой Г. С., Костиной Т. К., Мирионковой Л. М., Пройдаковой О. Н., Тепловой Т. А. (лицей № 57); Анисифировой Т. М., Ахметовой М. В., Кобозевой Л. И. (лицей № 51); Ревтову В. М., Толмачевой О. Г. (лицей № 67) за экспериментальную работу по нашим учебным комплектам и ценные замечания.

Авторы будут благодарны за все замечания, присланные по адресам: г. Москва, 121096, а/я 534, Звавичу Л. И.; 445030, г. Тольятти, Потоскуеву Е. В. (до востребования).

Примерное почасовое планирование
(3 ч в неделю; 105 ч)

Преобразования пространства (1—11)

Отображения пространства. Определение преобразования пространства. Центральная симметрия пространства. Обратное преобразование. Композиция преобразований.

Движения пространства: определение движения; композиция движений. Общие свойства движений. О движениях первого и второго рода в пространстве. О равенстве фигур в пространстве. Свойства центральной симметрии пространства.

Симметрия относительно плоскости. Симметрия относительно плоскости в координатной форме. Свойства симметрии относительно плоскости.

Параллельный перенос. Параллельный перенос в координатах; свойства параллельного переноса.

Скользящая симметрия. Поворот вокруг оси. Осевая симметрия. Свойства осевой симметрии и поворота вокруг оси. Зеркальный поворот. Винтовое движение.

Взаимосвязь различных движений пространства. Композиция двух симметрий относительно плоскости. Семь различных видов движений пространства.

Гомотетия пространства. Формулы гомотетии пространства в координатах и ее свойства. Определение подобия пространства; разложение подобия в композицию гомотетии и движения. О подобии фигур в пространстве.

Контрольная работа № 1

Многогранники (12—19)

Внутренние и граничные точки, внутренность и граница геометрической фигуры. Выпуклая, связная, ограниченная геометрическая фигура. Пространственная область. Геометрическое тело, его внутренность и поверхность.

Многогранник и его элементы: вершины, ребра, грани, плоские углы при вершине, двугранные углы при ребрах. Эйлерова характеристика многогранника. Теорема Декарта—

Эйлера для выпуклого многогранника (без доказательства). Понятие о развертке многогранника. Свойства выпуклых многогранников.

О понятии объема тела. Свойства объемов тел. Равновеликие и равносоставленные тела. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Призма и параллелепипед (20—25)

Определение призмы и ее элементов. Количество вершин, ребер, граней, диагоналей у n-угольной призмы. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма. Призматическая поверхность. Перпендикулярное сечение призмы. Боковая и полная поверхности призмы; формулы вычисления их площадей. Формулы вычисления объемов прямой и наклонной призм.

Параллелепипед: наклонный, прямой, прямоугольный. Куб. Свойства диагоналей параллелепипеда. Свойство прямоугольного параллелепипеда. Объем параллелепипеда. Построение сечений призм и параллелепипедов различными методами.

Контрольная работа № 2

Трехгранные и многогранные углы (26—31)

Понятие о многогранном угле. Вершина, грани, ребра, плоские углы при вершине выпуклого многогранного угла. Многогранные углы при вершинах многогранников. Трехгранный угол. Теорема о плоских углах трехгранного угла (неравенство трехгранного угла). Теорема о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла. Теорема синусов и теорема косинусов трехгранного угла.

Пирамида (32—39)

Определение пирамиды и ее элементов. Количество вершин, ребер и граней у n-угольной пирамиды. Некоторые частные виды пирамид: пирамида, все боковые ребра которой равны между собой (все боковые ребра образуют равные углы с плоскостью ее основания); пирамида, все двугранные углы которой при ребрах основания равны между собой; пирамида, ровно одна боковая грань которой перпендикулярна плоскости ее основания; пирамида, две соседние боковые грани которой перпендикулярны плоскости ее основания; пирамида, две не соседние боковые грани которой перпендикулярны плоскости ее основания; пирамида, боковое ребро которой образует равные углы с ребрами основания, выходящими из одной данной вершины. Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей пирамиды.

Правильная пирамида и ее свойства. Апофема правильной пирамиды. Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей правильной пирамиды.

Контрольная работа № 3

Свойства параллельных сечений пирамиды. Усеченная пирамида, формулы вычисления ее боковой и полной поверхностей. Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей правильной усеченной пирамиды.

Объем пирамиды и формулы его вычисления.

Тетраэдры. Об объеме тетраэдра. Возможность выбора основания у тетраэдра. Свойство отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней. Правильный тетраэдр. Ортоцентрический тетраэдр. Равногранный тетраэдр (тетраэдр, все грани которого равны). Тетраэдр, все боковые грани которого образуют равные двугранные углы с плоскостью его основания. Формула $V = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot \rho(a;\ b) \cdot \sin \varphi$ вычисления объема тетраэдра, где a и b — длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, $\rho(a;\ b)$ — расстояние между этими прямыми, φ — угол между прямыми, содержащими эти ребра.

Отношение объемов двух тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы.

Правильные многогранники (40—45)

Виды, элементы и свойства правильных многогранников. Вычисление площадей поверхности и объемов правильных многогранников.

Контрольная работа № 4

Цилиндр и конус (48—57)

Поверхность и тело вращения. Цилиндр. Основания, образующие, ось, высота цилиндра. Цилиндрическая поверхность вращения. Сечения цилиндра плоскостью. Изображение цилиндра. Касательная плоскость к цилиндру. Развертка цилиндра. Вычисление площадей боковой и полной поверхностей цилиндра. Призма, вписанная в цилиндр и описанная около цилиндра. Вычисление объема цилиндра.

Конус вращения. Вершина, основание, образующие, ось, высота, боковая и полная поверхности конуса. Сечения конуса плоскостью. Равносторонний конус. Касательная плоскость к конусу. Изображение конуса. Развертка. Вычисление площадей боковой и полной поверхностей конуса. Свойства параллельных сечений конуса. Вписанные в конус и описанные около конуса пирамиды. Цилиндр, вписанный в конус.

Усеченный конус: основания, образующие, высота, боковая и полная поверхности. Вычисление площадей боковой и полной поверхностей усеченного конуса. Вычисление объемов конуса и усеченного конуса.

Контрольная работа № 5

Сфера и шар (58—70)

Шар и сфера. Хорда, диаметр, радиус сферы и шара. Изображение сферы. Уравнение сферы. Взаимное расположение плоскости и сферы. Пересечения шара и сферы с плоскостью. Плоскость, касательная к сфере и шару. Теоремы о касательной плоскости.

Шары и сферы, вписанные в двугранный угол, многогранный угол. Шары и сферы, вписанные в цилиндр, конус, многогранник и описанные около них. Шары и сферы, вписанные в правильные многогранники и описанные около них.

Шаровой сегмент, его основание и высота; сегментная поверхность. Шаровой слой, его основания и высота; шаровой пояс. Шаровой сектор и его поверхность.

Формулы для вычисления площадей сферы, сегментной поверхности, шарового пояса, поверхности шарового сектора.

Формулы для вычисления объемов шара, шарового сегмента, шарового сектора, шарового слоя.

Контрольная работа № 6

Практикум по решению задач курса стереометрии

Повторение теории

Контрольная работа № 7 (*обобщающая*)

Резерв времени на изучение избранных тем «Дополнения» 35 ч (71—105)

Контрольная работа № 8 (*обобщающая*)

Указания к решениям задач

В данном разделе предлагаются краткие решения и указания к решениям лишь ряда задач, помещенных в задачнике Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича «Геометрия. 11 класс» к учебнику тех же авторов «Геометрия. 11 класс» для классов с углубленным и профильным изучением математики.

Как и в задачнике «Геометрия. 10 класс» Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича, в задачнике «Геометрия. 11 класс» система задач к каждому разделу стереометрии подобрана по принципу: от простого — к сложному, что позволяет, с одной стороны, учителю дифференцированно и целенаправленно рекомендовать каждому ученику задачи определенной сложности, с другой стороны, каждому ученику самостоятельно выбирать для решения ту или иную задачу. Однако, прежде чем приступить к решению сложных задач, учащийся должен решить опорные (базисные, ключевые) задачи к данному разделу стереометрии.

Любая задача может быть решена не единственным методом, и решения задач, приведенные в этом пособии, не претендуют на единственно возможные. Наоборот, авторы предполагают нахождение как учителями, так и учениками других, более рациональных решений. К тому же авторы не пытались дать какие-то сверхрациональные или сверхоригинальные решения; наши решения в основном рабочие и достаточно стандартные.

Следует особо отметить, что эти решения ни в коем случае нельзя принимать за образцы оформления заданий ввиду, например, отсутствия в них полных аргументированных обоснований некоторых утверждений, что обусловлено невозможностью подробного разбора огромного количества всех задач в небольшой по объему книге.

Глава 1. Преобразования пространства

Тема «Геометрические преобразования пространства» занимает важное место в изучении стереометрии 11 класса и может изучаться на различных уровнях сложности. Это распространяется как на теоретический, так и на задачный материал. Она может быть изучена обзорно, с решением небольшого круга простейших задач и, напротив, может быть изучена достаточно подробно с решением многих и многих задач различной степени сложности. Каждый учитель сам выберет подходящий его классу уровень изучения этой темы.

При углубленном изучении планиметрии учащиеся достаточно хорошо овладевают геометрическими преобразованиями плоскости и умеют применять их в качестве рабочего аппарата при решении планиметрических задач как на доказательство и вычисление, так и задач конструктивного характера, поэтому они сравнительно легко смогут перейти к изучению геометрических преобразований пространства в 11 классе.

Если же изучение планиметрии проходило на общеобразовательном уровне, то учителю в 11 классе либо потребуется дополнительное время на изучение темы «Геометрические преобразования», либо эту тему придется изучать в уменьшенном объеме, а при решении задач соответственно уменьшить использование метода геометрических преобразований.

Вследствие недостаточно глубокого понимания учащимися «природы» геометрических преобразований они испытывают затруднения в их применении при решении задач как на доказательство и вычисление, так и на построение. В этой связи необходимо объяснить учащимся, что сущность понятия «геометрическое преобразование пространства» в геометрии, по сути, та же, что и сущность понятия «функция числового аргумента» в алгебре: геометрическое преобразование пространства можно рассматривать как своеобразную «геометрическую функцию», областью определения и множеством значений которой являются точечные множества — геометрические фигуры. Тогда понятия «образ» и «прообраз» в теории геометрических преобразований становятся аналогами понятий «значение аргумента» и «значение функции» в теории числовых функций.

Существенным в теории геометрических преобразований является свойство любого геометрического преобразования взаимно-однозначно отображать любую фигуру на ее образ, а пересечение любых двух фигур — на пересечение их образов при этом преобразовании. Это замечательное свойство геометрических преобразований является одним из опорных моментов при решении геометрических задач на доказательство и построение методом геометрических преобразований.

По нашему мнению, главным отличием изучения геометрии в классах с математическим углублением является не какое-то особое усложнение или формализация теоретического материала, а методически верная подборка решаемых задач, как в количественном, так и в качественном отношении. Прежде всего, необходимо решить все простейшие, опорные задачи курса. Этими задачами ни в коем случае не следует пренебрегать, какими бы простыми они ни казались. Другое дело, что методика их решения в классах с углубленным и профильным изучением математики, вообще говоря, отличается от методики решения в общеобразовательных классах и классах гуманитарной направленности.

§ 1—2. Отображения пространства. Преобразования пространства

Изложение теоретического материала этой главы авторы советуют вести лекционным методом, излагая материал крупными тематическими блоками (методом укрупненных дидактических единиц).

Изучив отображения и геометрические преобразования пространства, учащиеся должны уметь четко различать виды отображений одной геометрической фигуры на другую, при этом они должны знать, что: как при отображении $V \xrightarrow{«в»} V'$, так и при отображении $V \xrightarrow{«на»} V'$, любая точка $M \in V$ имеет единственный образ $M' \in V'$; при отображении «*в*» не исключено существование во множестве V' точек, которые не имеют прообраза в V, в то время как при отображении «*на*» не исключено существование в V' таких точек, которые имеют в V более одного прообраза; если геометрическая фигура F при преобразовании g отображается на фигуру F', то фигура F' называется образом фигуры F при преобразовании g, а фигура F — прообразом фигуры F' при том же преобразовании g или образом этой фигуры при преобразовании, обратном преобразованию g, т. е. при преобразовании g^{-1}; при биективном (взаимно-однозначном) отображении множества V на множество V' образы любых двух различных точек различны и две любые различные точки множества V' являются образами двух различных точек множества V.

Важным является следующий факт: преобразованием пространства является лишь взаимно-однозначное (биективное) отображение этого пространства на себя. Следствием этого является обратимость любого преобразования пространства (существование обратного ему преобразования).

В нашем учебнике концептуально каждое преобразование пространства (кроме преобразования подобия) задается «алгоритмически-конструктивно» как отображение пространства на себя с последующим доказательством биективности заданного отображения, иначе говоря, доказывается, что построенное отображение является преобразованием пространства, после чего вводятся соответствующие название и определение, а также символическое обозначение этого преобразования, изучаются его свойства.

Заметим, что ни параллельное, ни центральное проектирования пространства на плоскость не являются преобразованиями пространства, так как при этом все точки проектирующей прямой отображаются на одну и ту же точку плоскости проекций — точку ее пересечения с проектирующей прямой.

Первым из преобразований, которые рассматриваются в учебнике, является центральная симметрия пространства. На примере центральной симметрии начинают изучаться вопросы о наличии преобразования, обратного данному и совпадающего с самим преобразованием, о координатной записи преобразования, о его неподвижных точках, неподвижных прямых и неподвижных плоскостях, о композиции преобразований.

Учащимся следует пояснить, что при изучении геометрических преобразований пространства интерес вызывает наличие неподвижных точек, неподвижных прямых и неподвижных плоскостей каждого из рассматриваемых преобразований.

По определению фигура F является неподвижной при данном преобразовании g, если преобразование g отображает эту фигуру на себя, т. е. $g(F) = F$. В геометрии различают два вида «неподвижности фигуры F» при данном преобразовании g:

1) каждая точка фигуры F неподвижна (отображается на себя) при данном преобразовании g; в этом случае иногда говорят, что фигура F локально неподвижна, локально инвариантна;

2) фигура F преобразованием g отображается на себя, но среди точек этой фигуры существуют как точки, каждая из которых неподвижна при преобразовании g, так и такие точки, которые не являются неподвижными точками этого преобразования g, но отображаются преобразованием g на точки

фигуры F; в этом случае иногда говорят, что фигура F глобально неподвижна, глобально инвариантна.

Например, любая прямая, проходящая через точку A, глобально неподвижна (глобально инвариантна) при симметрии с центром A; любая прямая (плоскость), перпендикулярная плоскости α, глобально инвариантна (глобально неподвижна) при симметрии относительно плоскости α, но сама плоскость α локально неподвижна при симметрии S_α, так как каждая точка плоскости α при симметрии S_α отображается на себя.

Следует обратить внимание учащихся на вопрос о равенстве двух преобразований. По определению два преобразования g_1 и g_2 пространства называются равными, если образы любой точки пространства при этих преобразованиях совпадают, т. е. для любой точки M пространства имеет место $\left.\begin{matrix} g_1(M) = M' \\ g_2(M) = M' \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow g_1 = g_2$. Важным является не путь, не траектория перемещения («путешествия») данной точки M при каждом из преобразований g_1 и g_2, а тот факт, что в результате любого из преобразований g_1 и g_2 точка M, образно выражаясь, «пришла» в точку M'.

Необходимо детально рассмотреть также вопрос о композиции двух преобразований.

Для всяких двух преобразований g_1 и g_2 пространства можно построить третье преобразование g_3, которое называют композицией преобразований g_1 и g_2 и обозначают символически $g_3 = g_2 \circ g_1$, при этом имеем:

$$g_1(M) = M',\ g_2(M') = M'' \Rightarrow g_3(M) = (g_2 \circ g_1)(M) = g_2(g_1(M)) =$$
$$= g_2(M') = M''.$$

При таком определении композиции $g_2 \circ g_1$ преобразований g_1 и g_2 сначала применяется преобразование g_1 («правое») и к его результату применяется преобразование g_2.

Введенное обозначение вполне естественно, так как запись $(g_2 \circ g_1)(M) = g_2(g_1(M))$ в теории геометрических преобразований аналогична записи $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ в теории функций. Иными словами, понятие «композиция преобразований» в курсе геометрии аналогично понятию «сложная функция» («суперпозиция функций») в курсе алгебры.

Учащиеся должны знать, что композиция двух преобразований не обладает свойством коммутативности (переместительности), т. е. не для всяких преобразований g_1 и g_2 выполняется равенство $g_2 \circ g_1 = g_1 \circ g_2$. В справедливости этого утверждения они могут убедиться на конкретных примерах.

1.004. ☺ Можно ли взаимно однозначно отобразить: а) поверхность куба на поверхность другого куба; б) поверхность куба на поверхность прямоугольного параллелепипеда; в) поверхность куба на сферу; г) поверхность тетраэдра на сферу; д) сферу с «выколотой» точкой на плоскость? Сделайте соответствующие рисунки.

Решение. а) Достаточно кубы расположить так, чтобы совпали их центры, а грани одного были параллельны граням другого. Тогда поверхность одного куба взаимно-однозначно отображается на поверхность другого куба посредством центрального проектирования из их общего центра.

в) Достаточно центр сферы совместить с центром куба, тогда поверхность куба взаимно-однозначно отображается на сферу посредством центрального проектирования из их общего центра.

д) Если в сфере с диаметром AB «выколота» точка A, то достаточно плоскость расположить так, чтобы она была перпендикулярна прямой AB. Тогда посредством центрального проектирования с центром A осуществляется взаимно однозначное отображение данной сферы с «выколотой» точкой A на эту плоскость.

1.009. Две окружности центрально-симметричны. Могут ли они лежать: а) в одной плоскости; б) на одной сфере; в) в различных плоскостях?

Решение. а) Так как центральная симметрия — движение, то данные две окружности равны. Две равные окружности могут лежать в одной плоскости. При этом, если эти окружности пересекаются в точках A и B, то их центром симметрии служит середина отрезка AB; если окружности касаются, то центром их симметрии служит точка касания; если окружности не имеют общих точек, то центром их симметрии является точка пересечения общих внутренних касательных этих окружностей.

б) При симметрии относительно центра сферы любая ее точка отображается на точку этой же сферы. Центрально-симметричные окружности, не лежащие в одной плоскости, могут быть расположены только в двух параллельных плоскостях. Поэтому две данные окружности могут лежать на одной сфере, если отрезок с концами в их центрах перпендикулярен этим плоскостям: середина перпендикуляра является центром этой сферы, а ее радиус равен $\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}$, где r — радиус данных окружностей, d — длина перпендикуляра.

в) См. 1.109 (б).

1.017. Даны точки $A(3; 2; 1)$ и $B(-1; 2; 6)$. Найдите координаты образа точки B при композиции центральных симметрий: а) $Z_A \circ Z_O$; б) $Z_O \circ Z_A$, где точка O — начало координат.

Решение. а) Пусть $B_1(x_1; y_1; z_1) = Z_O(B)$, $B_2(x_2; y_2; z_2) = Z_A(B_1)$. Тогда, пользуясь координатными формулами центральной симметрии относительно начала координат и формулами деления отрезка пополам, получаем: $x_1 = 1$; $y_1 = -2$; $z_1 = -6$; $x_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$; $y_2 = 2 \cdot 2 - (-2) = 6$; $z_2 = 2 \cdot 1 - (-6) = 8$. Таким образом, $(Z_A \circ Z_O)(B) = B_2(5; 6; 8)$.

б) Пусть $C_1(x_1; y_1; z_1) = Z_A(B)$, $C_2(x_2; y_2; z_2) = Z_O(C_1)$. Тогда: $x_1 = 2 \cdot 3 - (-1) = 7$; $y_1 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$; $z_1 = 2 \cdot 1 - 6 = -4$; $x_2 = -7$; $y_2 = -2$; $z_2 = 4$. Таким образом, $(Z_O \circ Z_A)(B) = C_2(-7; -2; 4)$.

§ 3. Движения пространства. Общие свойства движений

Движения пространства, являясь основным объектом при изучении вопросов геометрических преобразований пространства в школьной геометрии, обладают многими свойствами, аналогичными свойствам движений плоскости, которые были изучены в курсе планиметрии. Поэтому изложению теоретического материала этого параграфа целесообразно предпослать повторение аналогичного планиметрического материала и лекционным методом подробно или обзорно рассмотреть общие свойства движений пространства.

В этом же параграфе изучаются некоторые свойства одного из видов движений — центральной симметрии.

В учебнике доказано, что движение отображает любой тетраэдр на равный ему тетраэдр. Учащиеся должны знать, что важным свойством любого движения является то, что это движение или меняет ориентацию любого тетраэдра, или ориентация любого тетраэдра при данном движении остается неизменной. В этой связи все движения пространства подразделяются на два рода. Именно, движение пространства, при котором ориентация тетраэдра сохраняется, называется движением первого рода; движение пространства, меняющее ориентацию тетраэдра, называется движением второго рода. Например, тождественное преобразование является движением первого рода, а центральная симметрия пространства — движением второго рода. Далее учащиеся познакомятся с другими движениями первого и второго родов.

Учащимся необходимо объяснить важность введенного определения равенства фигур: фигура F_2 пространства называется равной фигуре F_1, если существует движение, отображающее фигуру F_1 на F_2. На основании этого определения не требуется применять признаки равенства фигур для выяснения, равны ли фигуры F_1 и F_2, а достаточно найти хотя бы одно движение пространства, отображающее F_1 на F_2, тогда по определению фигуры F_1 и F_2 считаются равными.

1.019. Может ли движение пространства иметь ровно одну неподвижную точку? А ровно две?

Решение. Примером движения, имеющего ровно одну неподвижную точку, может служить центральная симметрия.

Допустим, что некоторое движение f имеет две неподвижные точки A и B. Так как при любом движении прямая отображается на прямую и сохраняется расстояние между любыми точками, то середина отрезка AB также при этом движении отображается на себя, т. е. появляется третья неподвижная точка этого движения, что противоречит условию задачи. Более того, каждая точка прямой AB является неподвижной точкой движения f. Значит, ровно две неподвижные точки никакое движение пространства иметь не может.

1.028. ☺ Может ли движение пространства иметь ровно три неподвижные точки? А ровно четыре?

Решение. Допустим, что некоторое движение f имеет три неподвижные точки A, B и C. Если эти точки лежат на одной прямой, то каждая точка этой прямой неподвижна при движении f (см. 1.019). Если точки A, B и C не принадлежат одной прямой, то каждая из прямых AB, BC и AC является множеством неподвижных точек движения f (см. 1.019). Более того, в этом случае вся плоскость ABC является множеством неподвижных точек движения f, что противоречит условию задачи. Таким образом, не существует движения пространства, которое имело бы ровно три неподвижные точки.

Не может движение иметь и ровно четыре неподвижные точки, так как любые три из этих неподвижных точек определяют или проходящую через них прямую неподвижных точек, или проходящую через них плоскость неподвижных точек, что противоречит условию.

1.040. Даны точка O и фигура F. Рассмотрим все точки пространства, симметричные точке O относительно всех точек фигуры F. Какую фигуру они образуют, если фигура F: а) отрезок; б) прямая; в) плоскость; г) треугольник; д) куб; е) шар? Ответ поясните на рисунке.

Решение. а) Пусть в качестве фигуры F дан отрезок AB. Тогда из $Z_A(O) = A_1$ и $Z_B(O) = B_1$ следует соответственно $OA_1 = 2OA$ и $OB_1 = 2OB$. Значит, отрезок A_1B_1 параллелен отрезку AB и $|A_1B_1| = 2|AB|$. Если M — любая точка отрезка AB и $Z_M(O) = M_1$, то точка M_1 принадлежит отрезку A_1B_1. В силу произвольного выбора точки M на отрезке AB приходим к выводу: множеством всех точек, симметричных точке O относительно всех точек отрезка AB, является такой отрезок A_1B_1, что $A_1B_1 \| AB$ и $|A_1B_1| = 2|AB|$.

Аналогично решаются остальные задачи этого номера.

1.042. При отображении f куб отобразился на другой куб. Могут ли эти кубы быть неравными? Может ли это отображение быть движением? На какую фигуру при этом отобразится правильный тетраэдр?

Решение. Если ребра данного куба и его образа при отображении f не равны, то эти кубы не равны и отображение f не является движением; правильный тетраэдр при этом отобразится на не равный ему правильный тетраэдр.

Если же ребра данного куба и его образа при отображении f равны, то данные кубы равны. Это означает, что данное отображение f — движение пространства. А так как при любом движении сохраняются длины отрезков, величины плоских, двугранных и многогранных углов, то образом правильного тетраэдра при отображении f является равный ему правильный тетраэдр.

1.045. ☺ Напишите уравнения образа прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \quad t \in \boldsymbol{R} \\ z = -t, \end{cases}$$

при симметрии относительно начала координат.

Решение. Центральная симметрия с центром в начале координат отображает любую точку $M(x;\ y;\ z)$ пространства на такую точку $M'(x';\ y';\ z')$, что векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ противоположны, поэтому эта симметрия задается формулами: $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$. Значит, точка (3; 5; 0) данной прямой отображается при симметрии Z_O на точку (–3; –5; 0). Так как прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую, то направляющий вектор $\vec{p}\,(-2; 3; -1)$ данной прямой является направляющим и для ее образа при этой симметрии. Тогда искомые параметрические уравнения образа данной прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = -3 - 2t, \\ y = -5 + 3t, \quad t \in \boldsymbol{R}. \\ z = -t, \end{cases}$$

§ 4. Симметрия относительно плоскости

Перед изучением преобразования симметрии относительно плоскости в пространстве необходимо повторить планиметрический материал о преобразовании симметрии относительно прямой в плоскости. После определения и рассмотрения свойств преобразования симметрии относительно плоскости следует выделить аналогичные свойства этих симметрий, подчеркнув, что как симметрия относительно прямой в плоскости, так и симметрия относительно плоскости в пространстве являются движениями второго рода. Желательно, чтобы учащиеся построили тетраэдр, симметричный данному тетраэдру относительно данной плоскости, и убедились в противоположной ориентации этих тетраэдров. Это означает, что композиция четного числа симметрий относительно плоскости есть движение первого рода, а композиция нечетного числа таких симметрий — движение второго рода.

Интерес представляют фигуры пространства, имеющие плоскости симметрии. О многогранниках, имеющих плоскости симметрии, ученики могут прочитать в конце учебника в очерке «О симметриях правильных многогранников».

1.052. В правильном тетраэдре окрашены две грани. Сколько плоскостей симметрии у окрашенного таким образом тетраэдра?

Решение. Пусть окрашены грани ABC и PBC правильного тетраэдра $PABC$. Нужно найти такую плоскость, при симметрии относительно которой тетраэдр отображается на себя, при этом окрашенный треугольник отображается на окрашенный, а неокрашенный — на неокрашенный.

Обозначим H и K — середины соответственно ребер AP и BC. Тогда при симметрии относительно плоскости HBC точки B и C являются неподвижными, а точки A и P взаимно симметричны.

Это означает, что при симметрии относительно плоскости HBC окрашенные грани ABC и PBC отобразятся одна на другую, а каждая из граней APB и APC отобразится на себя. Таким образом, плоскость BCH является плоскостью симметрии окрашенного тетраэдра.

Можно доказать, что плоскость APK также является плоскостью симметрии данного тетраэдра.

1.058. В кубе окрашены одним цветом: а) две грани; б) три грани. Сколько плоскостей симметрии имеет окрашенный таким образом куб?

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Пусть окрашены две смежные грани ADD_1A_1 и $A_1B_1C_1D_1$ куба. Плоскостями симметрии этого куба служат только две плоскости: плоскость BCD_1 и плоскость, перпендикулярная ребру BC и проходящая через его середину.

Если окрашены две противоположные грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба, то такой куб имеет пять плоскостей симметрии. Ими являются: плоскость ACC_1; плоскость BDD_1; плоскость, перпендикулярная ребру BC и проходящая через его середину; плоскость, перпендикулярная ребру AB и проходящая через его середину; плоскость, перпендикулярная ребру AA_1 и проходящая через его середину.

б) Пусть окрашены три грани ABB_1A_1, BCC_1B_1 и $A_1B_1C_1D_1$ куба, имеющие общую вершину B_1. Этот куб имеет три плоскости симметрии: плоскость BDD_1; плоскость AB_1C_1; плоскость A_1B_1C.

Если окрашены три последовательно смежные грани ADD_1A_1, $D_1A_1B_1C_1$ и B_1C_1CB куба, то такой куб имеет две плоскости симметрии: плоскость, перпендикулярная ребру BC и проходящая через его середину; плоскость, перпендикулярная ребру AB и проходящая через его середину.

1.066. Точки A и B расположены в одном полупространстве относительно данной плоскости α и не лежат в ней. Постройте в плоскости α такую точку M, сумма расстояний от которой до точек A и B была бы наименьшей.

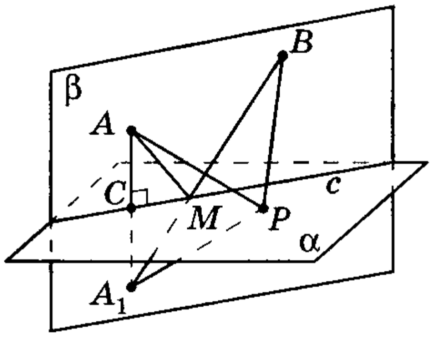


Рис. 1

Решение. Построим точку $A_1 = S_\alpha(A)$ (рис. 1). Так как преобразование симметрии — движение и $S_\alpha(A) = A_1$, $S_\alpha(M) = M$ (M — точка плоскости симметрии), то $AM = A_1M$. Значит, $AM + MB = A_1M + MB$. Но длина ломаной A_1MB будет наименьшей, если все три точки A_1, M и B будут лежать на одной прямой. Это означает, что точка M, удовлетворяющая условию задачи, должна быть точкой пересечения прямой A_1B и плоскости α, т. е. $M = A_1B \cap \alpha$. Таким образом, приходим к следующему пути решения задачи.

Строим точку $A_1 = S_\alpha(A)$ и проводим плоскость β через прямую AA_1 и точку B. Обозначим: $c = \alpha \cap \beta$, $M = A_1B \cap c = A_1B \cap \alpha$ (см. рис. 1). Точка M — искомая.

Для доказательства того, что точка $M = A_1B \cap \alpha$ является искомой, достаточно в плоскости α выбрать любую точку $P \neq M$ и доказать, что $AM + MB < AP + PB$. Справедливость этого неравенства следует из того, что, во-первых, $AM + MB = A_1M + MB = A_1B$, и, во-вторых, в треугольнике A_1PB справедливо неравенство $A_1P + PB > A_1B = A_1M + MB = AM + MB$.

1.068. Через прямую p проводятся всевозможные плоскости. Точка M удалена от прямой p на расстояние b. Какую фигуру образуют все точки, симметричные точке M относительно этих плоскостей?

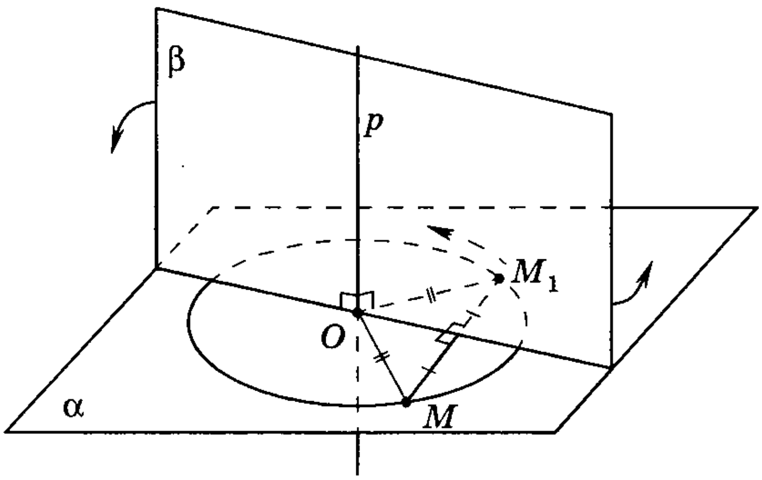


Рис. 2

Решение. Проведем через точку M плоскость $\alpha \perp p$ и обозначим: $O = \alpha \cap p$. Если β — одна из плоскостей, проходящих через прямую p и $S_\beta(M) = M_1$, $S_\beta(O) = O$, то $OM = OM_1 = b$ и $OM \perp p$, $OM_1 \perp p$ (рис. 2).

Когда плоскость β будет вращаться вокруг прямой p, в плоскости α будет вращаться вокруг точки O точка M_1, симметричная точке M. Это означает, что множество всех точек, симметричных точке M относительно всех плоскостей, проходящих через прямую p, образует окружность с центром O и радиусом b. Эта окружность проходит через точку M и расположена в плоскости $\alpha \perp p$.

1.073. Напишите уравнения образа прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \quad t \in \boldsymbol{R} \\ z = -t, \end{cases}$$

при симметрии относительно плоскости Oxy.

Решение. Если образом точки $M(x;\ y;\ z)$ при симметрии относительно плоскости Oxy является точка $M'(x';\ y';\ z')$, то координаты этих точек связаны соотношениями $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$. Такими же соотношениями связаны координаты любого вектора и его образа при симметрии относительно плоскости Oxy.

Точка $A(3;\ 5;\ 0)$ данной прямой расположена в плоскости Oxy, поэтому при симметрии относительно этой плоскости она отображается на себя; направляющий вектор $\vec{p}(-2;\ 3;\ -1)$ данной прямой при этой симметрии отображается на вектор $\vec{q}(-2;\ 3;\ 1)$, который служит направляющим для образа данной прямой при данной симметрии. Поэтому параметрические уравнения прямой, симметричной данной прямой при симметрии относительно плоскости Oxy, имеют вид:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \quad t \in \boldsymbol{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

1.074. ☺ Напишите уравнение образа плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$ при симметрии относительно плоскости Oxz.

Решение. Если образом точки $M(x;\ y;\ z)$ при симметрии относительно плоскости Oxz является точка $M'(x';\ y';\ z')$, то координаты этих точек связаны соотношениями $x' = x$, $y' = -y$,

$z' = z$. Такими же соотношениями связаны координаты любого вектора и его образа при симметрии относительно плоскости Oxz.

Точка (1; 1; 0) данной плоскости при симметрии относительно плоскости Oxz отображается на точку (1; −1; 0); вектор $\vec{n}(2; 3; -1)$ нормали данной плоскости отображается при этой симметрии на вектор $\vec{m}(2; -3; -1)$, который служит вектором нормали для образа данной плоскости при данной симметрии. Поэтому уравнение плоскости, симметричной данной плоскости относительно плоскости Oxz, имеет вид:

$$2(x - 1) - 3(y + 1) - (z - 0) = 0 \text{ или } 2x - 3y - z - 5 = 0.$$

§ 5. Параллельный перенос. Скользящая симметрия

Параллельный перенос пространства определяется аналогично параллельному переносу плоскости и обладает многими свойствами, аналогичными свойствам параллельного переноса плоскости. Примечательно, что параллельный перенос на ненулевой вектор неподвижных точек не имеет, но любая прямая, параллельная вектору $\vec{p}$, является неподвижной прямой при переносе на этот вектор, равно как и любая плоскость, параллельная вектору $\vec{p}$, является неподвижной плоскостью при параллельном переносе на этот вектор; при этом на каждой из этих прямых и плоскостей индуцируется параллельный перенос на вектор $\vec{p}$.

1.079. Через стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ провели две параллельные плоскости и в них построили два равных треугольника ABM и DCK ($AM = DK$ и $BM = CK$), расположив их в одном полупространстве относительно плоскости данного параллелограмма. Найдите расстояние между центроидами треугольников ABM и DCK, если $AB = a$, $BC = b$.

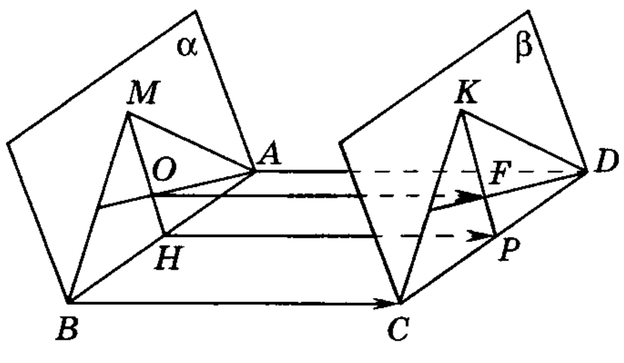


Рис. 3

Решение. Из условия задачи следует, что $AM \parallel DK$ и $BM \parallel CK$ (рис. 3). Учитывая, что $AM = DK$ и $BM = CK$, приходим к выводу: при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ вершины треугольника ABM отображаются соответственно на вершины треугольника DCK.

Параллельный перенос — движение, поэтому середина H стороны AB треугольника ABM отображается при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ на середину P стороны DC треугольника DCK, а центроид O треугольника ABM — на центроид F треугольника DCK, т. е. $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BC}$. Так как $|\overrightarrow{BC}| = b$, то расстояние между центроидами O и F данных треугольников равно b.

1.089. *В основании пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро PA пирамиды перпендикулярно ее основанию. Через середину ребра PB проведено сечение, параллельное плоскости APD. Какова площадь сечения, если площадь грани APD равна 32?*

Решение. Пусть точка K — середина ребра PB. Так как сечение параллельно плоскости APD, то секущая плоскость пересекает: плоскость грани ABP по прямой, параллельной AP; плоскость грани BCP — по прямой, параллельной BC; плоскость грани PCD — по прямой, параллельной PD; плоскость основания $ABCD$ — по прямой, параллельной AD. Поэтому проводим: 1) $KL \| AP$, $L \in AB$; 2) $KM \| BC$, $M \in PC$; 3) $MH \| PD$, $H \in CD$.

Четырехугольник (трапеция) $KLHM$ — искомое сечение. По теореме Фалеса точки L, H, M — середины отрезков соответственно AB, CD, CP.

Для вычисления площади трапеции $LHMK$ рассмотрим параллельный перенос на вектор $\vec{p} = \overrightarrow{LA}$. Этот перенос отображает плоскость сечения на плоскость грани APD, причем $\vec{p}(L) = A$, $\vec{p}(K) = E$, $\vec{p}(M) = F$, $\vec{p}(H) = D$, где $E \in PA$, $F \in PD$, откуда: $\vec{p}$ (четырехугольник $LHMK$) = четырехугольник $ADFE$.

Параллельный перенос — движение, поэтому площади четырехугольников $LHMK$ и $ADFE$ равны. Найдем площадь четырехугольника $ADFE$.

Так как $LA = KE = MF = |\vec{p}|$, то $LA \| KE \| MF \| AB \| CD$. Следовательно, точки E и F — середины сторон соответственно AP и DP треугольника ADP. Поэтому треугольники PEF и PAD гомотетичны с коэффициентом гомотетии $k = \frac{1}{2}$. Значит, $S_{\triangle PEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle PAD}$. Откуда $S_{ADFE} = \frac{3}{4} S_{\triangle ADP} = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24$. Тогда $S_{KLHM} = S_{ADFE} = 24$ (кв. ед.).

§ 6. Поворот вокруг оси. Осевая симметрия. Зеркальный поворот. Винтовое движение

Прежде чем приступать к рассмотрению поворота пространства вокруг оси на ориентированный угол, необходимо повторить поворот плоскости вокруг точки на ориентированный угол. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство.

Любая плоскость α разбивает все пространство на два полупространства, и если из точек одного полупространства угол AOB, расположенный в плоскости α, наблюдается ориентированным положительно (вращение от OA к OB наблюдается из точек этого полупространства против часовой стрелки), то из точек другого полупространства угол AOB наблюдается ориентированным отрицательно. Чтобы достичь однозначности в определении ориентации угла поворота в плоскости α, расположенной в пространстве, предлагается договориться: «с какой стороны смотреть на плоскость α». С этой целью всякий раз ось вращения будем ориентировать так, чтобы на плоскость α, перпендикулярную оси вращения, «смотреть» с «положительного направления» этой оси. В таком случае мы получаем поворот в плоскости α на положительно ориентированный угол, если этот поворот наблюдается против часовой стрелки из любой точки положительной полуоси. Если же из любой точки положительной полуоси этот поворот наблюдается по часовой стрелке, то будем считать, что вращение в плоскости α происходит на отрицательно ориентированный угол.

Таким образом, мы будем рассматривать преобразование вращения пространства вокруг **ориентированной прямой** (т. е. вокруг оси), и всякий раз для определения угла поворота нам придется «смотреть» с положительного направления оси вращения на плоскость, перпендикулярную этой оси. Однако это преобразование поворота часто называют просто «поворотом вокруг прямой», имея в виду поворот вокруг ориентированной прямой. Кроме того, так как в дальнейшем рассматривается поворот только на ориентированный угол, то слово «ориентированный» опускается, а ориентация угла указывается знаком «+» или «−».

Осевая симметрия пространства может быть определена «конструктивно» с использованием понятия: «пара симметричных точек относительно прямой» или как поворот пространства вокруг прямой на угол $180°$.

Интерес представляют фигуры пространства, имеющие оси симметрии. О многогранниках, имеющих оси симметрии, ученики могут прочитать в конце учебника в очерке «О симметриях правильных многогранников».

1.094. Постройте тетраэдр, имеющий одну ось симметрии.

Указание. Рассмотрите тетраэдр $PABC$, в котором лишь $AP = BP = AC = BC$.

1.110. ☺ Постройте ось симметрии фигуры, являющейся объединением двух прямых, проходящих через: а) скрещивающиеся ребра куба; б) противоположные ребра правильного тетраэдра; в) скрещивающиеся диагонали противоположных граней куба; г) скрещивающиеся диагональ куба и диагональ его грани.

Решение. а) Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Осью симметрии фигуры, являющейся объединением двух прямых, проходящих через скрещивающиеся ребра AA_1 и BC, является прямая AB, перпендикулярная каждому из этих ребер.

б) В правильном тетраэдре прямая, проходящая через середины противоположных ребер, перпендикулярна каждому из них, поэтому она является осью симметрии фигуры, являющейся объединением двух прямых, проходящих через эти ребра.

в) Осью симметрии фигуры, являющейся объединением двух прямых, проходящих через скрещивающиеся диагонали AD_1 и B_1C противоположных граней ADD_1A_1 и BCC_1B_1 куба, является прямая, проходящая через центры этих граней.

г) Рассмотрим скрещивающиеся диагональ BD_1 куба и диагональ B_1C его грани BCC_1B_1. Можно доказать, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C и пересекает эту плоскость в центроиде M правильного треугольника AB_1C. При этом, если точка O — центр грани BCC_1B_1, то AO — высота правильного треугольника AB_1C, проходящая через точку M. Таким образом, прямая AO перпендикулярна каждой из прямых BD_1 и B_1C, следовательно, прямая AO — ось симметрии фигуры, являющейся объединением скрещивающихся прямых BD_1 и B_1C.

1.121. ☺ Даны точки $A(1;\ 3;\ -1)$ и $B(7;\ 5;\ -1)$. Приведите примеры движений, отображающих точку A на точку B.

Решение. Так как середина любого отрезка является его центром симметрии, то при симметрии относительно точки

(4; 4; −1), являющейся серединой отрезка AB, точка A отображается на точку B.

Параллельный перенос может быть задан как вектором переноса, так и парой соответственных точек. В нашем случае точка A отобразится на точку B при переносе на вектор $\overrightarrow{AB}(6; 2; 0)$.

Из определения пар точек, симметричных относительно плоскости, следует, что точка A отобразится на точку B при симметрии относительно плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину.

Составим уравнение этой плоскости, для чего в качестве вектора нормали к этой плоскости выберем вектор $\vec{n}(3; 1; 0)$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}(6; 2; 0)$, а в качестве данной точки плоскости примем середину отрезка AB — точку (4; 4; −1). Тогда получаем следующее уравнение плоскости симметрии: $3(x-4)+(y-4)=0$ или $3x+y-16=0$.

Точка A может быть отображена на точку B также при симметрии относительно прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину. В качестве направляющего вектора этой прямой примем вектор $\vec{p}(1; -3; 0)$, а в качестве данной точки — точку (4; 4; −1). Ось симметрии задается следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 4 - 3t, \qquad t \in \mathbf{R}. \\ z = -1, \end{cases}$$

1.122. Дана точка $M(3; 1; 2)$. Найдите координаты точки H—образа точки M при вращении вокруг оси Ox на угол 90°.

Решение. Координаты x', y', z' точки M' — образа точки $M(x; y; z)$ при повороте вокруг оси Ox на угол φ вычисляются по формулам:

$x'=x$, $y'=y\cdot\cos\varphi - z\cdot\sin\varphi$, $z'=y\cdot\sin\varphi+z\cdot\cos\varphi$.

Найдем координаты x', y', z' точки H при $\varphi = 90°$. Получаем: $x'=3$, $y'=1\cdot\cos 90° - 2\cdot\sin 90° = -2$, $z' = 1\cdot\sin 90° + 2\cdot\cos 90° = 1$, т. е. $R_{Ox}^{90°}(M) = H(3; -2; 1)$.

§ 7—8. Взаимосвязь различных движений пространства. Гомотетия и подобие пространства

На первый взгляд кажется, что каждое из изученных видов движений пространства существует вне какой-либо связи с другими его видами, «автономно». В действительности «обстановка в мире движений пространства далека от их взаимной независимости», поэтому следует обратить внимание учащихся на взаимосвязи различных видов движений пространства.

Оказывается, можно каждое из движений пространства разложить в композицию симметрий относительно некоторых плоскостей (зеркальных отражений от некоторых плоскостей). В самом деле:

— композиция двух симметрий относительно пересекающихся плоскостей есть поворот вокруг прямой пересечения этих плоскостей на удвоенный угол между ними (справедливо обратное утверждение: поворот вокруг оси может быть разложен (неоднозначно) в композицию зеркальных отражений от плоскостей, пересекающихся по оси поворота под углом, равным половине угла поворота);

— композиция двух симметрий относительно параллельных плоскостей есть параллельный перенос на вектор, который перпендикулярен этим плоскостям и имеет длину, равную удвоенному расстоянию между ними (справедливо обратное утверждение: параллельный перенос может быть разложен (неоднозначно) в композицию зеркальных отражений от плоскостей, перпендикулярных вектору переноса, расстояние между которыми равно половине длины вектора переноса);

— композиция двух симметрий относительно совпадающих плоскостей есть тождественное преобразование (перенос на нулевой вектор);

— композиция симметрий относительно трех попарно взаимно перпендикулярных плоскостей является центральной симметрией относительно общей точки пересечения этих плоскостей (справедливо обратное утверждение: центральную симметрию можно разложить в композицию симметрий относительно трех попарно взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся в центре симметрии);

— скользящая симметрия пространства представляет собой композицию симметрии S_α относительно плоскости α и параллельного переноса на вектор $\vec{p}$, который параллелен этой плоскости. Но параллельный перенос на вектор $\vec{p}$ есть композиция двух симметрий относительно параллельных плоскостей, перпендикулярных этому вектору, поэтому «скользящая симметрия» пространства есть композиция симметрии относительно трех плоскостей, две из которых параллельны между собой и перпендикулярны третьей плоскости;

— зеркальный поворот пространства представляет собой композицию поворота R_a^φ вокруг оси α на угол φ и симметрии S_α относительно плоскости α, перпендикулярной этой оси. Но поворот вокруг оси может быть разложен в композицию зеркальных отражений от плоскостей, пересекающихся по оси поворота под углом, равным половине угла поворота. Это означает, что зеркальный поворот пространства есть композиция симметрий относительно трех плоскостей, две из которых пересекаются между собой и перпендикулярны третьей плоскости;

— винтовое движение пространства представляет собой композицию поворота R_a^φ вокруг оси α на угол φ и переноса на вектор $\vec{p}$, который параллелен этой оси. Но поворот вокруг оси может быть разложен в композицию зеркальных отражений от плоскостей, пересекающихся по оси поворота под углом, равным половине угла поворота, а параллельный перенос на вектор $\vec{p}$ есть композиция двух симметрий относительно параллельных плоскостей, перпендикулярных этому вектору. Это означает, что винтовое движение пространства представляет собой композицию симметрий относительно четырех плоскостей, две из которых пересекаются, а две другие параллельны между собой и перпендикулярны прямой пересечения первых двух.

Таким образом, любое движение пространства есть композиция не более четырех симметрий относительно плоскости. При этом любое движение первого рода представимо в виде композиции двух или четырех зеркальных симметрий, а движение второго рода есть либо зеркальная симметрия, либо представимо в виде композиции трех зеркальных симметрий относительно трех плоскостей.

Разложение движений в композицию двух плоскостных симметрий находит применение при решении разнообразных задач на построение, вычисление и доказательство.

Определения и свойства преобразований гомотетии и подобия пространства аналогичны соответственно определениям и свойствам таких же преобразований плоскости, поэтому изучение первых следует начинать с повторения вторых. Как и подобие плоскости, подобие пространства с коэффициентом k можно разложить в композицию движения и гомотетии с некоторым центром и тем же коэффициентом.

Учащиеся должны знать, что при подобном преобразовании пространства сохраняется величина угла (плоского и двугранного), параллельные прямые (плоскости) отображаются на параллельные прямые (плоскости), перпендикулярные прямая и плоскость — на перпендикулярные прямую и плоскость. Это означает, что при подобном преобразовании пространства образом любой фигуры является похожая на нее фигура, т. е. фигура, имеющая такую же форму, что и данная фигура, но отличающаяся от нее лишь своими размерами.

Нередко доказательство подобия двух фигур основывается на признаках подобия этих фигур. Однако имеется другой путь доказательства подобия двух фигур, основанный на свойствах преобразований подобия. Действительно, если ввести определение: «Фигура F_1 называется подобной фигуре F, если существует преобразование подобия пространства, отображающее фигуру F на фигуру F_1», то для доказательства подобия фигуры F_1 фигуре F достаточно найти хотя бы одно такое преобразование подобия, которое фигуру F отображает на фигуру F_1, тогда по определению подобия двух фигур фигуры F и F_1 подобны. Используя такое определение подобных фигур, учащиеся выработают навык использовать геометрические преобразования как аппарат решения задач.

1.132. ☺ Пусть плоская фигура имеет: а) центр симметрии; б) ось симметрии. Сохраняется ли это свойство у подобной ей фигуры?

Указание. Точка A называется центром симметрии данной фигуры F, если образ любой точки фигуры F при симметрии относительно точки A принадлежит этой же фигуре.

Пусть при данном подобии фигура F отображается на фигуру F'. Преобразование подобия, изменяя линейные размеры фигуры, сохраняет ее форму и отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой. Это означает, что если точка A была серединой отрезка BC фигуры F, то точка A' — образ точки A при данном подобии — будет серединой отрезка $B'C'$ — образа отрезка BC при этом подобии (отрезок $B'C' \subset F'$). Иначе говоря, точки фигуры F, симметричные относительно центра A, отображаются на точки фигуры F', симметричные относительно точки A'. Это означает, что свойство фигуры быть центрально-симметричной является инвариантным как при движениях, так и при подобных преобразованиях.

То же самое можно сказать и о фигурах, обладающих осью симметрии.

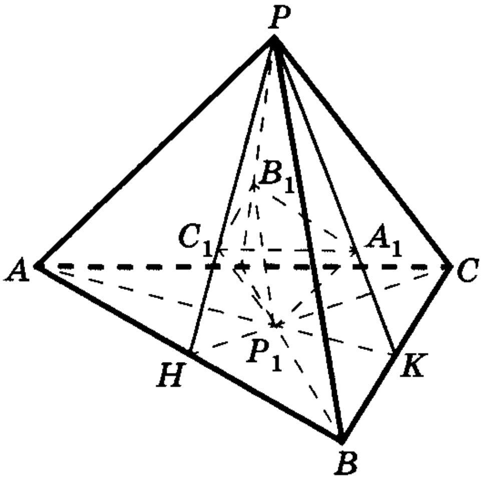


Рис. 4

1.134. Докажите, что тетраэдр, вершинами которого служат центры P_1, A_1, B_1, C_1 граней правильного тетраэдра $PABC$, подобен этому тетраэдру. Найдите коэффициент подобия, отображающего тетраэдр $PABC$ на тетраэдр $P_1A_1B_1C_1$.

Решение. Пусть точки H и K — середины ребер соответственно AB и BC тетраэдра $PABC$, точка A_1 — центр грани PBC, точка P_1 — центр грани ABC (рис. 4). Это означает, что $A_1P : A_1K = P_1A : P_1K = 2 : 1$. Тогда в треугольнике APK имеем: $A_1K : PK = P_1K : AK = 1 : 3$, откуда следует, что $A_1P_1 : AP = A_1K : PK = 1 : 3$ и $A_1P_1 \| AP$.

Аналогично можно доказать, что $A_1B_1 : AB = 1 : 3$ и $A_1B_1 \| AB$, $A_1C_1 : AC = 1 : 3$ и $A_1C_1 \| AC$, $B_1C_1 : BC = 1 : 3$ и $B_1C_1 \| BC$, $B_1P_1 : BP = 1 : 3$ и $B_1P_1 \| BP$, $C_1P_1 : CP = 1 : 3$ и $C_1P_1 \| CP$.

Из этих соотношений между ребрами тетраэдров $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$ следует, что тетраэдр $P_1A_1B_1C_1$ — правильный, грани тетраэдров попарно параллельны, поэтому эти тетраэдры подобны; коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$.

Задачи после главы 1. Преобразования пространства

1.136. ♉ При некотором отображении пространства точка $(x; y; z)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ отображается на точку: а) $(-x; -y; z)$; б) $(x; |y|; z)$; в) $(0; y; 0)$; г) $(y; x; z)$; д) $(x; 3y; z)$. 1) Какое из этих отображений является преобразованием пространства? 2) Имеет ли отображение неподвижные: а) точки; б) прямые; в) плоскости?

Решение. 1) Отображение пространства, при котором точка $(x; y; z)$ отображается на точку: а) $(-x; -y; z)$; г) $(y; x; z)$; д) $(x; 3y; z)$, является преобразованием, так как между точками пар $(x; y; z)$ и $(-x; -y; z)$, $(x; y; z)$ и $(y; x; z)$, $(x; y; z)$ и $(x; 3y; z)$ существует взаимно-однозначное соответствие.

При отображении $(x; y, z) \longrightarrow (x; |y|; z)$ любая точка $(x; y; z)$ имеет единственный образ $(x; |y|; z)$, но любая точка $(x; |y|; z)$

при $y \neq 0$ имеет два прообраза: $(x; y; z)$ и $(x; -y; z)$. Значит, это отображение не является преобразованием пространства.

При отображении $(x; y; z) \longrightarrow (0; y; 0)$ все точки пространства, имеющие одну и ту же ординату «y», отображаются на одну и ту же точку $(0; y; 0)$. Значит, это отображение не является преобразованием пространства.

Указания к задачам вопроса 2 даны в разделе «Ответы и указания к задачам» задачника.

1.139. ♉ Нарисуйте треугольную пирамиду, имеющую две плоскости симметрии.

Указание. Рассмотрите пирамиду $PABC$, в которой лишь $AP = BP = AC = BC$.

1.143. ♉ Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

Решение. Допустим, ограниченная фигура F имеет два центра симметрии — точки A и B (эти точки должны быть расположены внутри фигуры F). Пусть M и K — точки пересечения прямой AB с границей данной фигуры.

Так как точки M и K симметричны относительно точки A, то точка A — середина отрезка KM, а так как M и K симметричны относительно и точки B, то точка B — также середина отрезка KM. Но любой отрезок имеет лишь одну середину. Это означает, что точки A и B должны совпадать, т. е. фигура F может иметь лишь один центр симметрии.

1.144. ♉ Имеет ли ось симметрии фигура, состоящая из двух скрещивающихся прямых? Поясните ответ на рисунке.

Указание. Любые две скрещивающиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр, при симметрии относительно которого каждая из них отображается на себя. Это означает, что прямая, проходящая через перпендикуляр двух скрещивающихся прямых, является единственной осью симметрии фигуры, состоящей из этих скрещивающихся прямых.

1.145. ♉ Докажите, что если ограниченная фигура имеет центр симметрии и ось симметрии, то центр симметрии лежит на оси симметрии.

Указание. Пусть точка A — центр симметрии фигуры F, прямая c — ось симметрии этой фигуры. Допустим, что $A \notin c$.

Через A и c проходит единственная плоскость α, линию пересечения которой с границей фигуры F обозначим γ.

Пусть M и K — точки пересечения границы данной фигуры и прямой, проходящей через точку A перпендикулярно оси c.

Так как точки M и K симметричны относительно точки A, то точка A — середина отрезка KM, а так как M и K симметричны относительно прямой c, то середина отрезка KM должна принадлежать прямой c. Значит, $A \in c$ и наше предположение о том, что $A \notin c$, неверно.

1.152. ♉ $PABC$ — правильный тетраэдр. Точки A_1, B_1, C_1, P_1 — центроиды его граней соответственно BCP, ACP, ABP, ABC. Докажите, что тетраэдр $P_1A_1B_1C_1$ гомотетичен данному тетраэдру. Найдите центр и коэффициент этой гомотетии.

Указание. См. 1.134.

1.155. ♉ Точка M не принадлежит данным пересекающимся плоскостям α и β. Найдите в плоскости α точку A, а в плоскости β точку B такие, чтобы треугольник ABM имел наименьший периметр.

Указание. Проведем через точку M плоскость γ, перпендикулярную прямой пересечения данных плоскостей α и β, и обозначим: $m = \alpha \cap \gamma$, $n = \beta \cap \gamma$. Плоскость γ перпендикулярна каждой из плоскостей α и β.

Теперь в плоскости γ построим точки $M_1 = S_m(M)$ и $M_2 = S_n(M)$, затем построим точки A и B пересечения прямой M_1M_2 с прямыми m и n.

Точки A и B — искомые, так как $MA = M_1A$, $MB = M_2B$, поэтому $MA + AB + BM = M_1A + AB + M_2B$, где отрезки M_1A, AB, M_2B — звенья ломаной, расположенные на одной прямой.

Глава 2. Многогранники

§ 9. Понятие многогранника

В учебнике Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича «Геометрия. 10 класс» авторы придерживаются концепции изучения начальных и основополагающих вопросов стереометрии с помощью изображений таких многогранников, как куб, правильный тетраэдр, параллелепипед, призма, пирамида. При этом каждому многограннику в тексте учебника не дается строгое определение, а вводится его наглядное описание. Но многогранники — один из основных видов пространственных тел, которые являются объектом изучения стереометрии. Поэтому каждый из упомянутых многогранников нуждается в последующем строгом, корректном определении и последовательном изучении определенных его свойств. Этому и посвящена настоящая глава учебника 11 класса.

Изложение теории начала этой главы авторы советуют вести лекционным методом, крупными тематическими блоками (методом укрупненных дидактических единиц).

Прежде чем ввести определение многогранника, учитель, обращаясь к наглядности (рисункам, моделям), последовательно вводит определения: выпуклой и связной геометрических фигур; внутренней и граничной точек геометрической фигуры, ее внутренности и границы; связной и ограниченной геометрической фигуры; пространственной области, геометрического тела и его поверхности; многогранника как геометрического тела, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников. Далее определяются элементы многогранника: вершины, ребра, грани, диагонали, двугранные и трехгранные углы (с замечанием, что о многогранных углах отдельно речь пойдет позднее), при этом сообщается, что в школе изучаются лишь выпуклые многогранники. Полезно сравнить определение выпуклого многогранника с определением выпуклого многоугольника и рассмотреть модели некоторых выпуклых и невыпуклых многогранников.

Далее, эмпирически (на моделях и рисунках многогранников) учащиеся должны убедиться, что для числа В вершин, числа Р ребер и числа Г граней любого выпуклого многогранника выполняется равенство $В - Р + Г = 2$, после чего формулируется теорема Декарта—Эйлера для выпуклых многогранников. (Теорема принимается без доказательства.)

Изложение лекционного материала о введении понятия многогранника завершается рассмотрением вопроса о развертках многогранников.

На более позднем уровне, после изучения различных призм, параллелепипедов, пирамид в нашем задачнике предлагается для решения достаточное количество задач на изготовление разверток многогранников с последующим склеиванием из них этих многогранников. К ним относятся задачи № 2.360—2.383. Кроме того, после изучения фигур вращения в задачах № 3.480—3.485 требуется изготовить развертку многогранника при условии, что в него вписан шар или около него описан шар. Наиболее интересные задачи (всего 55 задач) о развертках многогранников ждут учащихся в конце нашего задачника «Геометрия. 11 класс», в Дополнении «Может быть или не может быть?».

При решении задач необходимо обратить особое внимание на выработку у учащихся умений строить «просторные» и красивые изображения многогранников с последующими дополнительными построениями на этих изображениях. Учащийся должен выработать привычку начинать решение стереометрической задачи с построения наглядного и аккуратного рисунка, на котором изображены многогранники, заданные в условии задачи, а также фигуры, изображения которых необходимо дополнительно построить, чтобы увидеть ту картину, которая «зашифрована» в условии задачи.

Учащийся должен: знать, как в параллельной проекции изображаются куб, прямой и наклонный параллелепипеды, пирамида, правильная пирамида (правильный тетраэдр) и уметь строить эти изображения; уметь строить изображения прямых и плоскостей, параллельных и перпендикулярных ребрам и граням данного многогранника; уметь строить сечения многогранников методом следов, методом внутреннего проектирования и комбинированным методом; уметь на изображении многогранника выделять его невидимые элементы штриховыми линиями; на изображении многогранника научиться «видеть» углы между его ребрами и гранями, линейные углы двугранных углов между его гранями и уметь их вычислять, используя условие задачи.

Иначе говоря, учащийся должен научиться так аккуратно, верно и наглядно выполнять рисунок к задаче, чтобы этот рисунок стал надежным помощником при ее решении.

2.019. ♉ Дан шестигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ — ромб со стороной 6 и углом BAD, равным 60°. Ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости $ABCD$, причем $AA_1 = 7$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите: а) длины остальных ребер; б) угол между плоскостью ABC и прямой A_1C_1; в) угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$; г) самую большую диагональ шестигранника.

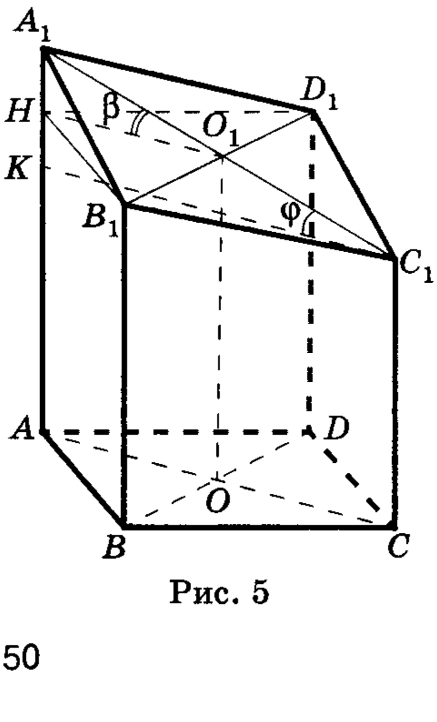


Рис. 5

Решение. а) Так как ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости грани $ABCD$, то они попарно параллельны (рис. 5).

Если $O = AC \cap BD$ и O_1 — середина отрезка A_1C_1, то отрезок OO_1 является средней линией трапеции AA_1C_1C, поэтому он равен 6. Это означает, что $B_1O_1 \| BD$. А так как $BD = 6$ ($\triangle ABD$ — правильный), то четырехугольник BDD_1B_1 — квадрат, откуда $DD_1 = 6$.

Пусть H — такая точка на ребре AA_1, что $AH = BB_1 = 6$. Тогда в прямоугольных треугольниках A_1B_1H и A_1D_1H находим соответственно $A_1B_1 = \sqrt{A_1H^2 + B_1H^2} = \sqrt{37}$, $A_1D_1 = \sqrt{A_1H^2 + D_1H^2} = \sqrt{37}$. Аналогично находим $C_1D_1 = C_1B_1 = \sqrt{37}$.

б) Прямая AC — ортогональная проекция наклонной A_1C_1 на плоскость ABC. Следовательно, угол $\varphi = \angle(A_1C_1, (ABC)) = \angle(A_1C_1, AC)$. Пусть $AK = 5$ ($K \in AA_1$), тогда $KC_1 \parallel AC$ и $\angle(A_1C_1, AC) = \angle(A_1C_1, KC_1)$. В прямоугольном $\triangle A_1C_1K$ находим: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1K}{KC_1} = \dfrac{2}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$, откуда $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

в) Так как $AH = BB_1 = DD_1 = 6$, то $(HB_1D_1) \| (ABC)$. Поэтому угол β между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ABC равен углу между плоскостями $A_1B_1C_1$ и HB_1D_1, пересекающимися по прямой B_1D_1. Учитывая, что $A_1O_1 \perp B_1D_1$ ($A_1B_1C_1D_1$ — ромб) и $HO_1 \perp B_1D_1$ ($\triangle HB_1D_1$ — правильный), имеем: $\beta = \angle A_1O_1H$. Тогда в прямоугольном $\triangle A_1O_1H$ находим: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{A_1H}{HO_1} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$, откуда $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

г) Самой большой диагональю шестигранника является диагональ A_1C, длина которой равна $\sqrt{A_1A^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 108} = \sqrt{157}$.

§ 10—11.1. Объемы многогранников. Определение призмы. Виды призм

Объем прямоугольного параллелепипеда

Строгое обоснование вывода формул для вычисления объемов тел в стереометрии весьма сложно. Однако этот вопрос может быть решен, если принять без доказательства принцип

Кавальери: «Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются равновеликие между собой фигуры, то объемы этих тел равны».

В нашем курсе мы выводим формулы объемов тел, основываясь на еще более сильном (и интуитивно понятном) утверждении: «Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются фигуры, площади которых относятся как $m : n$, то объемы данных тел относятся как $m : n$».

Сначала мы находим объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами основания a, b и высотой 1, расположив данный параллелепипед и единичный куб так, чтобы их основания находились в одной плоскости, а сами многогранники были расположены по одну сторону от этой плоскости. Тогда площади сечений, образованных при пересечении обоих многогранников любой плоскостью, параллельной плоскости оснований этих многогранников, относятся как $(a \cdot b) : 1$. Это означает, что их объемы также относятся как $(a \cdot b) : 1$, т. е. $V_{\text{пар}} : 1 = (a \cdot b) : 1$, откуда объем $\boldsymbol{V_{\text{пар}}}$ прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, 1 равен $\boldsymbol{a \cdot b \cdot 1}$, т. е. $\boldsymbol{V_{\text{пар}} = a \cdot b \cdot 1 = a \cdot b}$. Затем находим объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c, для чего прямоугольный параллелепипед с измерениями 1, a, b и данный параллелепипед с измерениями a, b, c расположим так, чтобы грань со сторонами 1 и a первого параллелепипеда и грань со сторонами c и a второго параллелепипеда лежали в одной плоскости, и оба параллелепипеда находились по одну сторону от этой плоскости. Тогда площади сечений, образованных при пересечении обоих многогранников любой плоскостью, параллельной плоскости оснований этих многогранников, относятся как $\frac{1 \cdot a}{c \cdot a} = \frac{1}{c}$. Это означает, что их объемы также относятся как $1 : c$. А так как объем параллелепипеда с измерениями 1, a, b равен ab, то для объема V прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c выполняется соотношение $1 : c = (a \cdot b) : V$, откуда $V_{\text{пар}} = a \cdot b \cdot c$.

Определение призмы. Виды призм

2.036. ♉ Каждое ребро треугольной призмы равно a. Зная, что плоские углы одного из трехгранных углов призмы равны между собой, найдите площадь сечения, делящего призму на симметричные части.

Решение. Так как все ребра призмы равны, то ее основания — правильные треугольники, а все три плоских угла одного из ее трехгранных углов равны по 60°. Значит, данная призма является наклонной. Пусть A_1 — вершина этого трехгранного угла призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 6).

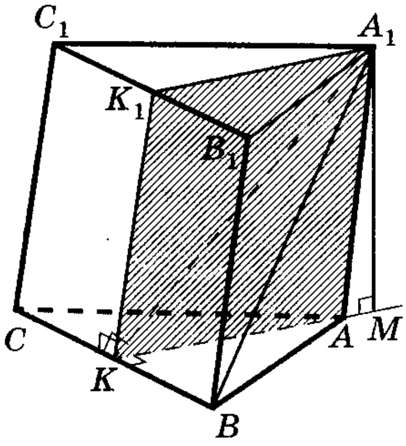


Рис. 6

Плоскостью симметрии данной призмы является плоскость, проходящая через ребро AA_1 и середину ребра BC перпендикулярно этому ребру. Сечением призмы этой плоскостью является параллелограмм AA_1K_1K. Найдем его площадь.

Пусть $A_1M \perp (ABC)$. Тогда $S_{\text{сеч}} = AK \cdot A_1M$.

В ромбе AA_1B_1B со стороной a и острым углом 60° находим $A_1B^2 = 3a^2$. Тогда в прямоугольном $\triangle A_1BK$ имеем: $A_1K^2 =$
$$= A_1B^2 - BK^2 = 3a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{11a^2}{4}.$$

Обозначив $AM = x$ и заметив, что прямоугольные треугольники A_1AM и A_1MK имеют общую высоту A_1M, получаем
$$a^2 - x^2 = \frac{11a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + x\right)^2,$$ откуда $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Тогда: $A_1M =$
$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}};\ S_{\text{сеч}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

§ 11.2. Боковая и полная поверхности призмы

Следует обратить внимание учащихся на тот факт, что в определении призмы ее боковыми гранями являются параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными **сторонами оснований** этой призмы.

Учащиеся должны четко различать понятия «Призма», «Призматическая поверхность» и «Призматическое тело». Необходимость введения понятий призматической поверхности и призматического тела обусловлена следующим обстоятельством.

Не для любой наклонной призмы существует плоскость, перпендикулярная боковым ребрам и пересекающая каждое из этих ребер. Именно ребер, а не их продолжения. (В качестве примера достаточно рассмотреть призму, одна из боковых граней которой — параллелограмм, не содержащий высоты, опущенной на ту его сторону, которая является боковым ребром призмы. Такой параллелепипед можно нарисовать.) Тогда секущая плоскость, перпендикулярная боковым ребрам, будет пересекать, по крайней мере, одно из оснований призмы, и перпендикулярным сечением призмы будет многоугольник, число сторон которого не равно числу сторон основания призмы. В таком случае на помощь приходит перпендикулярное сечение призматической поверхности, порожденной данной призмой, и мы получаем теорему: «Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро».

Аналогично, при нахождении объема наклонной призмы используется площадь перпендикулярного сечения призматического тела, полученного из данной призмы (теорема 14).

2.054. ☺ Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, диагональ которой равна a и образует: а) с плоскостью основания угол в 60°; б) с плоскостью боковой грани угол в 30°.

Решение. а) Пусть диагональ $BD_1 = a$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образует угол в 60° с плоскостью ABC, т. е. $\angle DBD_1 = 60°$ (рис. 7). Тогда в прямоугольном треугольнике BDD_1 имеем: $DD_1 = BD_1 \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $BD = \frac{BD_1}{2} = \frac{a}{2}$. Значит, $AB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, поэтому $S_{бок} = 4AB \cdot DD_1 = 4 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. б) В прямоугольном $\triangle ABD_1$ имеем (рис. 7): $AD_1 = BD_1 \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AB = \frac{a}{2}$.

$$D_1D = \sqrt{D_1A^2 - AD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, $S_{бок} = 4AB \cdot DD_1 = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}$.

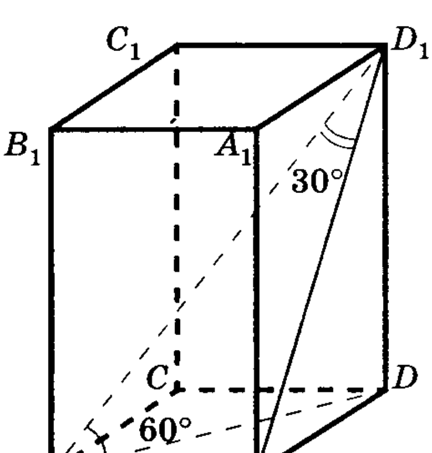


Рис. 7

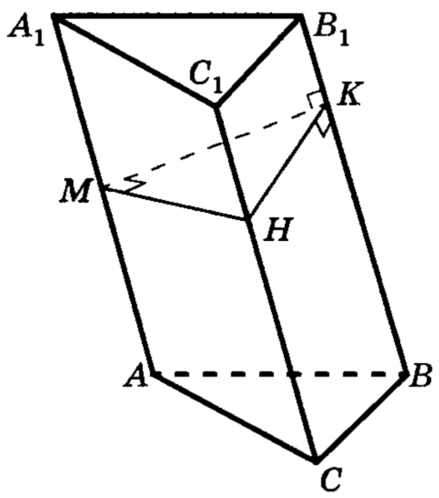


Рис. 8

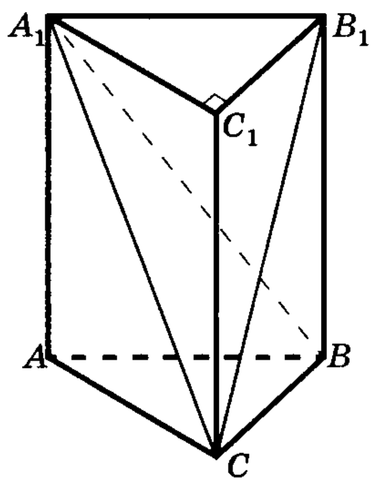


Рис. 9

2.055. Сечением наклонной треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого Q. Боковое ребро призмы равно a. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Указание. Если b — длина катета $MH = MK$ треугольника MKH — перпендикулярного сечения, c — длина его гипотенузы HK (рис. 8), то $b^2 = 2Q$, $c = 2\sqrt{Q}$. Тогда $S_{\text{бок}} = (2 \cdot \sqrt{2Q} + 2\sqrt{Q}) \cdot a = 2a\sqrt{Q}(\sqrt{2} + 1)$.

2.056. ♉ Диагонали боковых граней прямой треугольной призмы равны 9 см, $10\sqrt{2}$ см и 15 см. Основание призмы — прямоугольный треугольник. Найдите стороны основания и площадь боковой поверхности призмы.

Решение. Пусть $A_1B = 15$ см, $A_1C = 10\sqrt{2}$ см, $B_1C = 9$ см, $A_1A = B_1B = C_1C = h$ (рис. 9).

В прямоугольных треугольниках A_1AB, A_1AC, B_1BC имеем: $AB^2 = A_1B^2 - A_1A^2 = 225 - h^2$; $AC^2 = A_1C^2 - A_1A^2 = 200 - h^2$; $BC^2 = B_1C^2 - B_1B^2 = 81 - h^2$.

Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный с катетами AC и BC, то $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Значит, $225 - h^2 = 281 - 2h^2$, откуда $h^2 = 56$ и $h = 2\sqrt{14}$. Тогда $AB = 13$ см, $AC = 12$ см, $BC = 5$ см и $S_{\text{бок}} = (13 + 12 + 5) \cdot 2\sqrt{14} = 60\sqrt{14}$ (см^2).

§ 11.3. Объем призмы

Полезно сообщить учащимся о том, что: любое сечение призмы плоскостью, параллельной ее основанию, делит данную призму на две призмы так, что отношение боковых по-

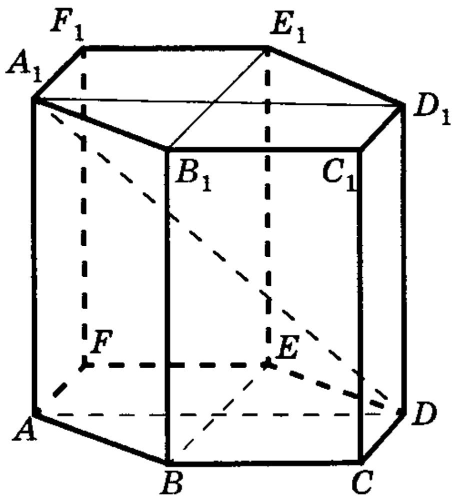


Рис. 10

верхностей и отношение объемов этих призм равно отношению длин их боковых ребер; любое сечение призмы плоскостью, параллельной ее боковому ребру, делит данную призму на две призмы так, что отношение объемов этих призм равно отношению площадей их оснований.

2.067. ♉ Найдите объем правильной шестиугольной призмы, площадь боковой поверхности которой равна 324 см^2, а боковое ребро и большая диагональ относятся, как 3 : 5.

Решение. Пусть $AB = a$ (рис. 10). Тогда $S_{\text{бок}} = 6a \cdot h$, где $h = A_1A$.

Так как $AD = 2a$, $A_1A = \frac{3}{5}A_1D$, то из $A_1D^2 = AD^2 + A_1A^2 = AD^2 + \frac{9}{25}A_1D^2 = 4a^2 + \frac{9}{25}A_1D^2$ находим: $A_1D = \frac{5}{2}a$.

Тогда $A_1A = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}a = \frac{3}{2}a$.

Таким образом, получили: $S_{\text{бок}} = 324 = 6a \cdot \frac{3}{2}a = 9a^2$, откуда $a = 6$. Значит, $h = \frac{3}{2}a = 9$, следовательно, $V = S_{\text{осн}} \cdot h = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 6 \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 9 = 486\sqrt{3}$.

2.073. ♉ Основание призмы — треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см. Боковое ребро призмы равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите длину ребра куба, равновеликого этой призме.

Решение. Так как боковое ребро призмы равно 4 и составляет с плоскостью основания угол в 45°, то высота призмы равна $2\sqrt{2}$. Площадь основания призмы равна $\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, а ее объем равен $2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$. Значит, ребро равновеликого ей куба равно 2 см.

2.074. ☺ Стороны основания наклонной треугольной призмы равны 1,7 дм, 2,8 дм и 3,9 дм. Одна из вершин верхнего основания удалена от каждой стороны нижнего основания на 1,3 дм. Найдите объем призмы.

Решение. Из условия задачи следует, что основание перпендикуляра, проведенного из вершины верхнего основания, равноудаленной от всех сторон нижнего основания, совпадает с центром окружности, вписанной в это основание. Длина этого перпендикуляра равна высоте данной призмы. Площадь основания равна $\sqrt{4{,}2 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}3} = 2{,}1$, а его периметр равен 8,4. Тогда радиус описанной окружности равен $\frac{2 \cdot 2{,}1}{8{,}4} = 0{,}5$, высота призмы равна $\sqrt{1{,}3^2 - 0{,}5^2} = 1{,}2$, а ее объем — 2,52 дм³.

2.075. ♉ Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, периметр которого равен 5,6 дм, а $\angle ACB = 60°$. Ребро CC_1 призмы равно 0,6 дм и образует со сторонами AC и BC основания углы по 60°; диагональ AC_1 боковой грани призмы равна 1,4 дм. Найдите объем призмы.

Решение. Согласно условию, имеем: $C_1C = 6$ см, $C_1A = 14$ см, периметр треугольника ABC равен 56 см.

Пусть C_1K и C_1P — высоты граней — параллелограммов ACC_1A_1 и BCC_1B_1 соответственно (рис. 11), а C_1O — высота данной призмы. Из равенства прямоугольных треугольников C_1CK и C_1CP следует $C_1K = C_1P$. Тогда $OK = OP$ (как проекции равных наклонных), причем $OK \perp AC$, $OP \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Это означает, что точка O — основание высоты C_1O призмы — принадлежит биссектрисе CM угла ACB.

Найдем стороны треугольника ABC.

В прямоугольном $\triangle C_1CK$: $\angle C_1CK = 60°$ и $C_1C = 6$, поэтому $CK = 3$ (как катет, лежащий против угла в 30°), $C_1K = C_1C \times \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Тогда в прямоугольном $\triangle C_1AK$ находим $AK = \sqrt{C_1A^2 - C_1K^2} = \sqrt{14^2 - (3\sqrt{3})^2} = 13$, значит, $AC = CK + KA = 16$ и сумма $AB + BC$ длин сторон AB и BC основания ABC призмы равна $56 - 16 = 40$.

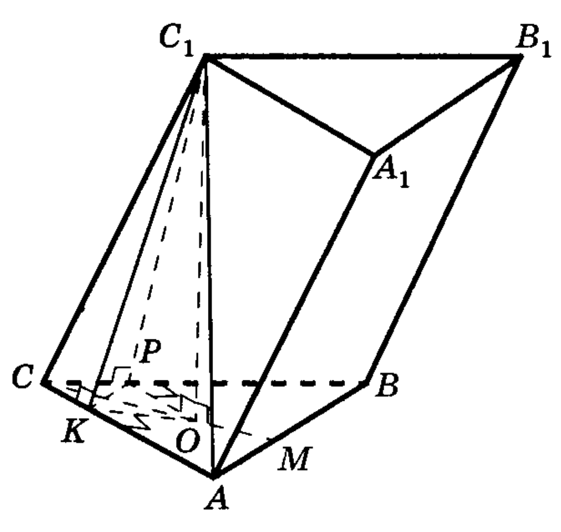


Рис. 11

Если $BC = x$, то $AB = 40 - x$, при этом в треугольнике ABC имеем: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 60°$ или $(40 - x)^2 = 256 + x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot 0{,}5$, откуда $x = 21$. Значит, $BC = 21$, $AB = 19$.

Далее находим площадь основания ABC и высоту C_1O призмы. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{28 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12} = 84\sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике OCK, в котором $\angle OCK = 30°$, находим $OC = \dfrac{CK}{\cos 30°} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$, а в прямоугольном $\triangle C_1CO$: $C_1O = \sqrt{C_1C^2 - OC^2} = \sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}$. Теперь получаем искомый объем призмы:

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot C_1O = 84\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 504\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{)}.$$

2.076. ♉ Вершина A_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ проектируется в центр ее нижнего основания ABC, а ребро AA_1 составляет со стороной AB основания угол в 45°. Найдите объем и площадь боковой поверхности призмы, если треугольник ABC — правильный со стороной a.

Решение. Пусть точка O — центр основания ABC призмы, точки H, M и K — середины соответственно AB, BC и AC (рис. 12). Тогда CH и BK — высоты в $\triangle ABC$, значит, A_1H и A_1K — высоты граней соответственно AA_1B_1B и AA_1C_1C. Так как $BC \perp AM$ и $BC \perp A_1O$, то $BC \perp (AA_1M)$, откуда $BC \perp PM$, значит, грань CC_1B_1B — прямоугольник. Кроме того, $A_1H = A_1K$ (как наклонные, имеющие равные проекции OH и OK). Поэтому площадь боковой поверхности призмы равна: $S_{бок} = AB \cdot (2A_1H + A_1A)$.

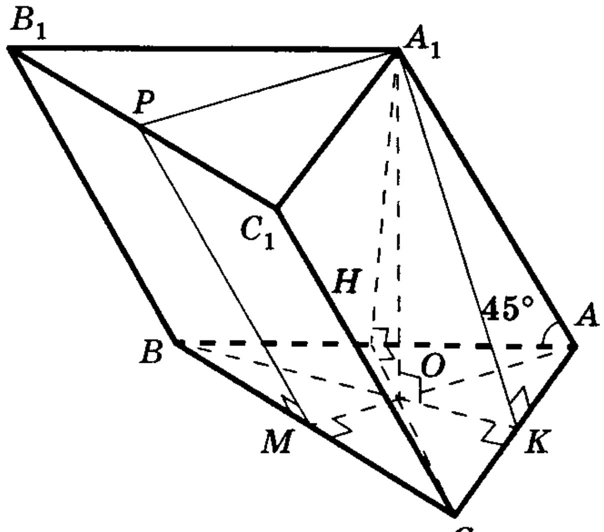


Рис. 12

В $\triangle AA_1H$: $AH = 0{,}5AB = 0{,}5a$; $A_1H = AH = 0{,}5a$; $A_1A = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда

$$S_{бок} = a \cdot \left(2 \cdot 0{,}5a + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^2(2 + \sqrt{2})}{2}.$$

В прямоугольном $\triangle AA_1O$: $A_1O = \sqrt{A_1A^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Тогда объем V призмы равен $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

2.077. ♉ Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, у которого меньшая диагональ равна c. Найдите объем призмы.

Решение. Пусть грань AA_1B_1B данной призмы $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости основания ABC и является ромбом с меньшей диагональю $AB_1 = c$; O — точка пересечения диагоналей ромба (рис. 13).

Для вычисления объема призмы нужно найти длину ее высоты B_1H, которая является также высотой ромба AA_1B_1B (грань ромба перпендикулярна плоскости основания призмы).

Так как $B_1H = \frac{S_{AA_1B_1B}}{AB} = \frac{\frac{1}{2}A_1B \cdot B_1A}{AB} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot OB \cdot B_1A}{AB} = \frac{OB \cdot B_1A}{AB}$, то находим длину OB.

В прямоугольном $\triangle AOB$: $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2}$. Поэтому $B_1H = \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a}$, тогда объем V призмы равен:

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot B_1H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{c\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a} = \frac{ac\sqrt{12a^2 - 3c^2}}{8}.$$

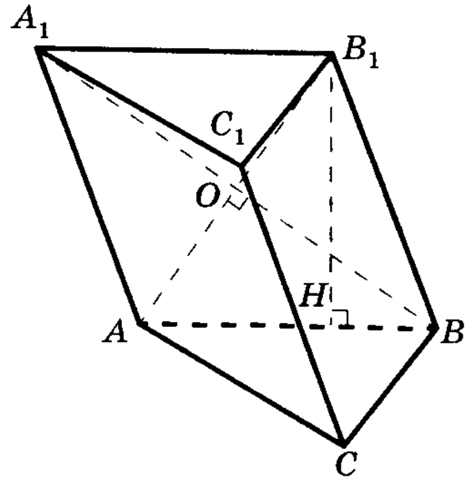


Рис. 13

2.078. ♉ Основание прямой призмы — ромб с острым углом α. Меньшая диагональ призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

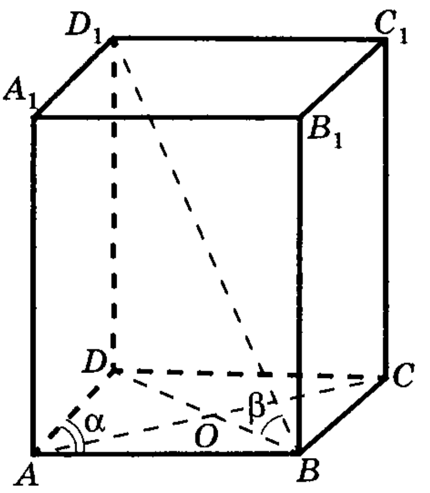


Рис. 14

Решение. Пусть BD — меньшая диагональ ромба $ABCD$ в прямой призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $\angle BAD = \alpha$ (рис. 14). Тогда $\angle D_1BD = \beta$ и $D_1D = D_1B \cdot \sin\beta = d \cdot \sin\beta$ — длина высоты призмы.

Площадь ромба $ABCD$ равна $\frac{1}{2}AC \cdot BD = OA \cdot BD$. Находим: в $\triangle D_1DB$: $BD = D_1B \cdot \cos\beta = d \cdot \cos\beta$. Тогда $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{d\cos\beta}{2}$, $OA = OB \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d\cos\beta}{2} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Значит, $S_{\text{ромба } ABCD} = \frac{d\cos\beta}{2} \times \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot d \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}d^2 \cos^2\beta \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, получаем: $V = S_{\text{ромба } ABCD} \cdot D_1D = \frac{1}{2}d^2 \cos^2\beta \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot d \cdot \sin\beta = \frac{1}{4}d^3 \sin 2\beta \cdot \cos\beta \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

§ 12. Параллелепипед

Следует обратить внимание учащихся на то, что:

1) объем параллелепипеда можно находить тремя способами, принимая за основание этого параллелепипеда любую его грань, а за его высоту — расстояние между этой гранью и гранью, ей параллельной;

2) любая плоскость, проходящая через середину диагонали параллелепипеда, делит этот параллелепипед на два равновеликих многогранника.

2.117. Диагонали смежных боковых граней прямого параллелепипеда равны 10 см и 17 см; вершина одного из тупых углов верхнего основания удалена от противолежащих сторон нижнего основания на $2\sqrt{21}$ см и $3\sqrt{21}$ см. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Решение. Пусть в прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка D_1 — вершина тупого угла (рис. 15), при этом: $D_1A = 10$; $D_1C = 17$; $D_1H = 2\sqrt{21}$, $D_1H \perp AB$; $D_1K = 3\sqrt{21}$, $D_1K \perp BC$; $BC = AD = a$; $AB = CD = b$.

В прямоугольном $\triangle CD_1K$: $CK = \sqrt{D_1C^2 - D_1K^2} = \sqrt{17^2 - (3\sqrt{21})^2} = 10$;

в прямоугольном $\triangle AD_1H$: $AH = \sqrt{D_1A^2 - D_1H^2} = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{21})^2} = 4$;

в прямоугольном $\triangle AD_1D$: $D_1D^2 = D_1A^2 - AD^2 = 100 - a^2$;

в прямоугольном $\triangle CD_1D$: $D_1D^2 = D_1C^2 - CD^2 = 289 - b^2$.

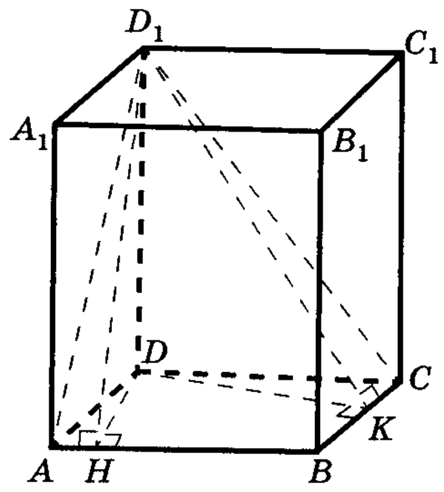


Рис. 15

Из двух последних соотношений получаем $100 - a^2 = 289 - b^2$ или

$$b^2 - a^2 = 189. \qquad (1)$$

В прямоугольных треугольниках ADH и CDK находим соответственно $DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - 16}$, $DK = \sqrt{DC^2 - CK^2} = \sqrt{b^2 - 100}$.

Далее, $S_{\text{пар. } ABCD} = AB \cdot DH = BC \cdot DK$, т. е. $b\sqrt{a^2 - 16} = a\sqrt{b^2 - 100}$ или

$$16b^2 = 100a^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем: $16(a^2 + 189) = 100a^2$, откуда $a = 6$ ($a = -6$ — посторонний корень), значит, $b = 15$. Тогда $D_1D = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 2(AB + BC) \cdot D_1D = 2(15 + 6) \cdot 8 = 336 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2.137. ♉ Диагонали A_1C_1 и BD граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 8 и 4. Угол между скрещивающимися прямыми, содержащими диагонали A_1C_1 и BD, равен 30°, а расстояние между этими прямыми равно 6. Найдите объем параллелепипеда.

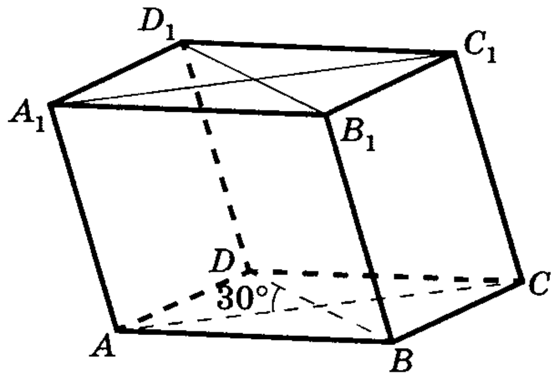


Рис. 16

Решение. Обозначим: V — объем параллелепипеда, h — его высота. Тогда $V = S_{осн} \cdot h$.

Грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ данного параллелепипеда (рис. 16), содержащие их скрещивающиеся диагонали BD и A_1C_1, параллельны. Поэтому высота h параллелепипеда равна расстоянию между прямыми BD и A_1C_1, т. е. $h = 6$.

Учитывая, что $AC = A_1C_1$ и $AC \parallel A_1C_1$, получаем: $S_{осн} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot BD \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$.
Тогда $V = 48$.

Заметим, что, используя идею данной задачи, мы в дальнейшем сможем доказать, что объем тетраэдра равен одной шестой произведения длин двух любых его ребер, лежащих на скрещивающихся прямых, расстояния между этими прямыми и синуса угла между ними (см. 14.7—14.8).

2.138. Стороны основания $ABCD$ правильного прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ относятся как $3 : 4$, а периметр диагонального сечения AA_1C_1C равен 10 см. Какой наибольший объем может иметь этот параллелепипед?

Решение. Пусть $AB : BC = 3 : 4$ и $BC = x$ (рис. 17). Тогда $AB = \frac{3}{4}x$ и $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{9}{16}x^2 + x^2} = \frac{5}{4}x$.

Так как $2(AC + A_1A) = 10$, то $A_1A = 5 - AC = 5 - \frac{5}{4}x = \frac{5(4 - x)}{4}$. Таким образом, получаем

$$V(x) = AB \cdot BC \cdot A_1A = \frac{3}{4}x \cdot x \cdot \frac{5(4-x)}{4} = \frac{15x^2(4-x)}{16}.$$

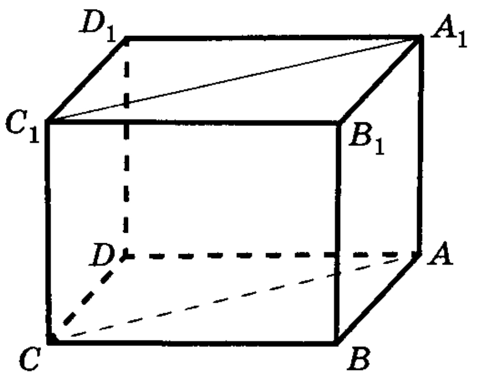


Рис. 17

Найдем наибольшее значение функции $V(x) = \frac{15x^2(4-x)}{16}$ при $x > 0$. $V'(x) = \left(\frac{15x^2(4-x)}{16}\right)' = \frac{15}{16}x(8 - 3x)$. При исследовании выясняется, что данная функция $V(x)$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{8}{3}$. Это означает, что при $AB = 2$, $BC = \frac{8}{3}$ и $A_1A = \frac{5}{3}$ параллелепипед имеет наибольший объем, равный $2 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{80}{9} = 8\frac{8}{9}$.

2.142. ☺ Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 14 см, периметр основания — 20 см и периметр меньшей боковой грани — 32 см.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед (рис. 18), в котором $D_1B = 14$, $AB = a$, $BC = b$, $B_1B = c$, причем $a > b$.

Так как $D_1B^2 = AB^2 + BC^2 + B_1B^2$, то из условия следует: $a^2 + b^2 + c^2 = 196$. Кроме того, известно, что $2(a + b) = 20$ и $2(b + c) = 32$, т. е. $a + b = 10$ и $b + c = 16$. (Из $a + b = 10$ при $a > b$ следует, что $b < 5$.)

Таким образом, значения a, b и c являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 196, \\ a + b = 10, \\ b + c = 16. \end{cases}$$

Выразив из второго и третьего уравнений a и c через b и подставив в первое уравнение системы эти выражения вместо a и c, получим уравнение $3b^2 - 52b + 160 = 0$, корнями которого являются числа 4 и $\frac{40}{3}$ (не удовлетворяет условию $b < 5$).

Итак, $b = 4$, $a = 6$, $c = 12$ и $V = 288$ см^3.

2.143. ☺ В прямоугольном параллелепипеде диагонали боковых граней, выходящие из одной вершины, равны 4 и 5 и образуют угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

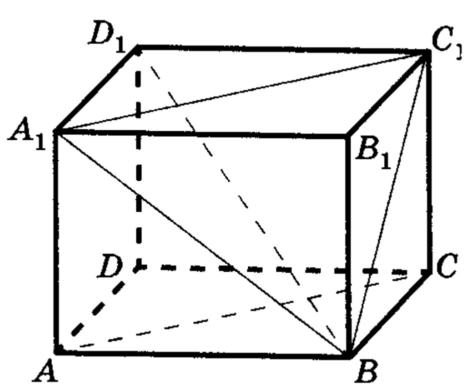


Рис. 18

Решение. В данном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18) обозначим: $AB = a$, $BC = b$, $B_1B = c$.

Если $A_1B = 4$, $C_1B = 5$ и $\angle A_1BC_1 = 60°$, то в треугольнике A_1BC_1 по теореме косинусов имеем: $A_1C_1^2 =$

$= A_1B^2 + C_1B^2 - 2A_1B \cdot C_1B \cdot \cos 60° = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0{,}5 =$ $= 21$. А так как $A_1C_1^2 = AC^2 = a^2 + b^2$, то получаем

$$a^2 + b^2 = 21. \qquad (1)$$

Далее, в прямоугольных треугольниках AA_1B и C_1BC получаем соответственно $a^2 + c^2 = 16$ и $b^2 + c^2 = 25$, откуда и

$$b^2 - a^2 = 9. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $2b^2 = 30 \Rightarrow b^2 = 15$. Тогда $c^2 = 25 - b^2 =$ $= 10$, $a^2 = 16 - c^2 = 6$. Значит, $V = a \cdot b \cdot c = \sqrt{6 \cdot 15 \cdot 10} = 30$.

2.144. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна m и составляет с боковой гранью угол β, а с плоскостью основания угол α.

Решение. Так как треугольники BC_1D_1 и BDD_1 прямоугольные (рис. 19), то $\angle C_1BD_1 = \beta$, $\angle DBD_1 = \alpha$. Тогда $C_1D_1 =$ $= BD_1 \cdot \sin\beta = m \cdot \sin\beta$, $BD = BD_1 \cdot \cos\alpha = m \cdot \cos\alpha$, $DD_1 =$ $= BD_1 \cdot \sin\alpha = m \cdot \sin\alpha$. Далее, в прямоугольном $\triangle BCD$ находим:

$$BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = m\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} =$$
$$= m\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}} = m\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} =$$
$$= m\sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}.$$

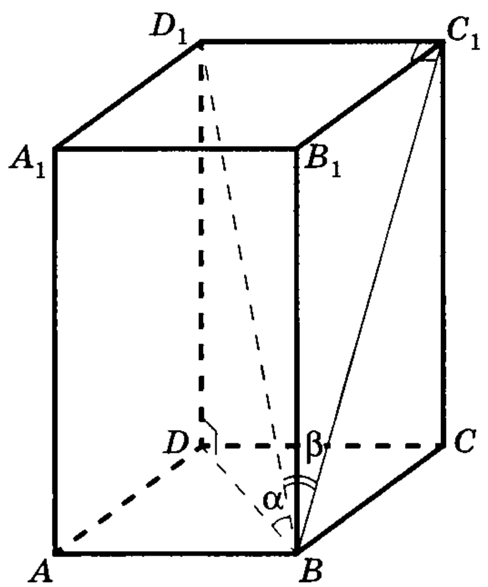


Рис. 19

Так как данный параллелепипед — прямоугольный, то его объем V равен

$$BC \cdot CD \cdot DD_1 =$$
$$= m\sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)} \times$$
$$\times m \cdot \sin\beta \cdot m \cdot \sin\alpha =$$
$$= m^3 \sin\alpha \cdot \sin\beta \times$$
$$\times \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}.$$

После решения этой задачи можно дать на дом или для самостоятельного решения в классе такую задачу: «В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник, диагональ параллелепипеда равна m и составляет с его боковыми гранями углы α и β. Найдите объем параллелепипеда, если одна из его боковых граней прямоугольник». (Это — такая же задача, но вместо прямоугольного взят такой наклонный параллелепипед, что две его боковые грани — прямоугольники, а две другие боковые грани — параллелограммы.)

2.162. ☺ В наклонном параллелепипеде основание — ромб со стороной a и острым углом в 60°, боковые грани — ромбы с острым углом в 45°. Найдите его объем.

Решение. Пусть в данном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20) $\angle BAD = 60°$, $\angle C_1CB = \angle C_1CD = 45°$, C_1M и C_1K — высоты боковых граней параллелепипеда, C_1H — его высота.

Так как боковые грани — ромбы, то $C_1C = BC = a$. Причем в равнобедренных прямоугольных треугольниках C_1CM и C_1CK имеем: $CM = CK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. По теореме о трех перпендикулярах $HM \perp BC$, $HK \perp CD$ и $HM = HK$ (как проекции равных наклонных). Это означает, что точка H — основание высоты C_1H — принадлежит биссектрисе угла BCD, т. е. диагонали AC ромба $ABCD$.

В прямоугольном $\triangle CMH$ находим: $CH = \frac{CM}{\cos 30°} = \frac{(a\sqrt{2})/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ тогда в прямоугольном $\triangle C_1CH$ получаем $C_1H = \sqrt{C_1C^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, $V = BC^2 \times \sin 60° \cdot C_1H = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{2}$.

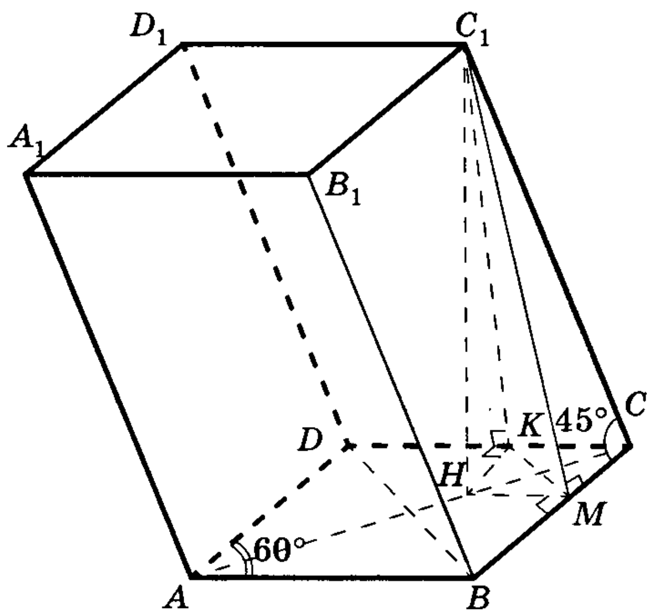


Рис. 20

2.163. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. Пусть в данном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковым ребром $A_1A = c$ прямоугольник $ABCD$ — основание со сторонами $AB = a$, $BC = b$; $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \alpha$.

Так как ребро A_1A образует с AB и AD равные углы, то основание H высоты A_1H параллелепипеда принадлежит биссектрисе прямого угла BAD (см. 2.162), т. е. $\angle BAH = 45°$.

Если A_1K — высота боковой грани AA_1B_1B параллелепипеда, то в прямоугольном $\triangle A_1AK$ находим: $AK = A_1A \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$; тогда в равнобедренном прямоугольном $\triangle AHK$: $AH = AK \cdot \sqrt{2} = c\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$. Далее, в прямоугольном $\triangle A_1AH$ находим высоту A_1H параллелепипеда: $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = \sqrt{c^2 - (c\sqrt{2}\cos\alpha)^2} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}$. Тогда $V = AB \cdot BC \cdot A_1H = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

2.165. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b; боковое ребро c образует со сторонами основания углы в $60°$. Найдите площадь боковой поверхности, объем параллелепипеда и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Решение. Пусть в данном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $BC = b$, боковое ребро B_1B образует с BA и BC углы в $60°$, т. е. $\angle B_1BA = \angle B_1BC = 60°$. Тогда высоты B_1M ($M \in BA$) и B_1K ($K \in BC$) боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда равны, а основание H его высоты B_1H принадлежит биссектрисе угла ABC. При этом, $B_1M = B_1K = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, $BM = \frac{c}{2}$ (в прямоугольном $\triangle B_1BM$), $BH = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ (в прямоугольном $\triangle BHM$). Поэтому $B_1H = \sqrt{B_1B^2 - BH^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

Тогда: $V = \frac{abc\sqrt{2}}{2}$; $S_{бок} = 2(a+b)\cdot\frac{c\sqrt{3}}{2} = (a+b)\sqrt{3}\,c$; $\sin\varphi =$
$= \frac{B_1H}{B_1B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°$, где $\varphi = \angle B_1BH$.

§ 13. Трехгранные и многогранные углы

В этом параграфе вводится определение многогранного угла $PA_1A_2A_3...A_n$ как множества всех точек пространства, принадлежащих лучам PM, где точка M пробегает выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3...A_n$, а P — данная точка, лежащая вне плоскости этого многоугольника. Затем даются определения вершины, ребер, граней, границы и внутренности многогранного угла.

Вследствие выпуклости многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ многогранный угол $PA_1A_2...A_n$ является выпуклой фигурой (внутренняя область этого угла расположена по одну сторону от плоскости каждой его грани).

Необходимо подчеркнуть, что мы будем рассматривать только выпуклые многогранные углы. При этом учащиеся должны знать, что сечением многогранного угла плоскостью, проходящей через его внутреннюю точку и пересекающей все его ребра, является выпуклый многоугольник. Это — важный вывод. Незнание учащимися этого положения может привести к следующему «конструктивному парадоксу»: при небрежном (неаккуратном) построении сечения «выпуклой» пирамиды плоскостью, пересекающей все ее боковые ребра, может получиться невыпуклый многоугольник. Учащийся, не знающий теоремы о пересечении выпуклого многогранника и плоскости, не в состоянии понять, что при алгоритмически правильном построении сечения он допустил ошибку «технического характера».

Трехгранный угол определяется как многогранный угол, имеющий три грани. (Заметим, что трехгранный угол всегда выпуклый.) Далее доказываются две теоремы о свойствах трехгранного угла: «В трехгранном угле величина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других его плоских углов» — неравенство трехгранного угла; «Сумма величин всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°». Затем доказываются теорема косинусов и теорема синусов для трехгранного угла. (В программе по стереометрии для общеобразовательных классов теория многогранных углов практически отсутствует, что, безусловно, сказывается не только на уровне теоретических знаний учащихся этих классов, но и на их умении решать содержательные стереометрические задачи.)

2.181. ☺ Все плоские углы трехгранного угла равны 60°. Найдите: а) расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трехгранного угла и удаленной от всех его граней на расстояние a; б) расстояние от вершины угла до точки, лежащей внутри трехгранного угла и удаленной от всех его ребер на расстояние a; в) угол, который образует с плоскостью грани трехгранного угла луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его гранями равные углы; г) угол, который образует с ребром многогранного угла луч, лежащий внутри данного угла и составляющий со всеми его ребрами равные углы.

Решение. Выберем на ребрах данного трехгранного угла с вершиной P точки A, B и C так, что $PA = PB = PC = 1$. Тогда $PABC$ — правильный тетраэдр, основанием которого является правильный треугольник ABC.

Пусть точка O — центр этого основания, A_1, B_1, C_1 — середины его сторон (рис. 21).

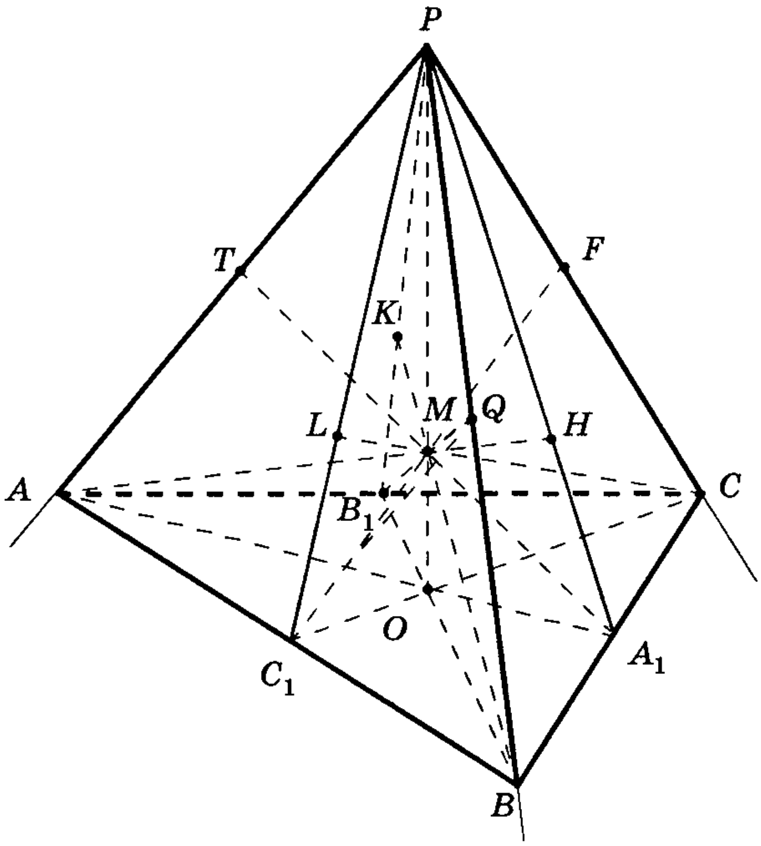


Рис. 21

а) Биссекторные плоскости A_1PA, B_1PB и C_1PC всех трех двугранных углов с ребрами PA, PB и PC пересекаются по прямой OP — геометрическому месту точек, равноудаленных от всех граней данного трехгранного угла.

Можно доказать, что если точки L, H и K — центры граней соответственно PAB, PBC и PAC тетраэдра $PABC$, то все четыре отрезка PO, AH, BK и CL перпендикулярны соответствующим граням, пересекаются в одной некоторой точке M, делящей каждый из этих отрезков в отношении $3 : 1$, считая от вершины тетраэдра. Это означает, что $MO = MH = MK = ML = a$. Учитывая, что $MO = \frac{1}{3}PM$, получаем $PM = 3a$ — искомое расстояние.

б) Если точки T, Q и F — середины отрезков соответственно PA, PB и PC (рис. 21), то можно доказать, что отрезки A_1T, B_1Q и C_1F пересекаются в точке M и делятся этой точкой пополам. При этом $A_1T \perp AP$, $B_1Q \perp BP$ и $C_1F \perp CP$. Получаем: $MT = MQ = MF = a$.

Так как $OP = \sqrt{AP^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $MP = \frac{3}{4}OP = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $C_1F = \sqrt{C_1C^2 - CF^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $MF = \frac{1}{2}C_1F = \frac{\sqrt{2}}{4} = a$, то $MP = \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

в) Так как $BC \perp (A_1AP)$, то $(BCP) \perp (A_1AP)$ (рис. 21). Поэтому $\angle(OP, (BCP)) = \angle A_1PO$. Аналогично, $\angle(OP, (ACP)) = \angle B_1PO$, $\angle(OP, (ABP)) = \angle C_1PO$. Из равенства прямоугольных треугольников A_1PO, B_1PO и C_1PO следует, что все перечисленные углы равны между собой.

В прямоугольном $\triangle A_1PO$ находим $\sin \angle A_1PO = \frac{A_1O}{A_1P} = \frac{\sqrt{3}/6}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3}$, откуда $\angle A_1PO = \arcsin\frac{1}{3}$.

г) Из равенства прямоугольных треугольников AOP, BOP, COP заключаем, что $\angle APO = \angle BPO = \angle CPO$, при этом находим: $\sin \angle APO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\angle APO = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.185. ☺ Три плоскости $2x + 2y - z + 9 = 0$, $3x + 4y + 9 = 0$ и $x - 2y + 2z - 17 = 0$ имеют единственную общую точку.

а) Найдите эту точку. б) Определите число трехгранных углов, образованных данными плоскостями. в) Найдите уравнения прямых, на которых лежат ребра этих трехгранных углов. г) Определите условие, которому должны удовлетворять координаты точек, лежащих с началом координат внутри одного и того же трехгранного угла. д) Определите фигуры, которые являются пересечением каждой из осей координат и трехгранного угла, содержащего начало координат.

Решение. а) Обозначим плоскости, заданные уравнениями $2x + 2y - z + 9 = 0$, $3x + 4y + 9 = 0$ и $x - 2y + 2z - 17 = 0$, соответственно через α, β и γ.

Пусть A — общая точка всех трех данных плоскостей. Ее координаты являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 = 0, \\ 3x + 4y + 9 = 0, \\ x - 2y + 2z - 17 = 0 \end{cases}$$

и равны: $x = 1$; $y = -3$; $z = 5$, т. е. $A(1; -3; 5)$.

б) Обозначим: $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \alpha = b$.

При пересечении плоскостей α и β получается четыре двугранных угла, ребром каждого из которых является прямая c. Так как три данные плоскости имеют единственную общую точку A, то плоскость γ, проходящая через A, пересекает прямую c, а следовательно, каждую из плоскостей α и β, в точке A; при этом образуются 8 трехгранных углов, ребра которых лежат на прямых c, a и b.

в) Составим параметрические уравнения прямой $c = \alpha \cap \beta$. В качестве начальной, фиксированной точки этой прямой выберем точку $A(1; -3; 5)$ и найдем координаты ее направляющего вектора $\vec{p}(m; q; r)$ из условия его перпендикулярности каждому из векторов $\vec{n}_1(2; 2; -1)$ и $\vec{n}_2(3; 4; 0)$ нормалей плоскостей α и β, т. е. из условия:

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{p} = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{p} = 0. \end{cases}$$

В координатном виде эта система уравнений имеет следующее выражение:

$$\begin{cases} 2m + 2q - r = 0, \\ 3m + 4q = 0, \end{cases}$$

а ее решением являются: $m = 4$; $q = -3$; $r = 2$. Тогда параметрические уравнения прямой $c = \alpha \cap \beta$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -3 - 3t, \quad t \in \boldsymbol{R}. \\ z = 5 + 2t, \end{cases}$$

Аналогично получаем уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3 - 5t, \quad t \in \boldsymbol{R} \text{ и } \\ z = 5 - 6t, \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -3 - 3t, \quad t \in \boldsymbol{R} \\ z = 5 - 5t, \end{cases}$$

соответственно прямых $b = \gamma \cap \alpha$ и $a = \beta \cap \gamma$.

г) Пусть $f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. Плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ делит пространство на два полупространства, в точках (x, y, z) одного из которых $f(x, y, z) \geqslant 0$, в точках (x, y, z) другого $f(x, y, z) \leqslant 0$.

Если $f_1(x, y, z) = 2x + 2y - z + 9$, $f_2(x, y, z) = 3x + 4y + 9$, $f_3(x, y, z) = x - 2y + 2z - 17$, то $f_1(0, 0, 0) = 9 > 0$, $f_2(0, 0, 0) = 9 > 0$, $f_3(0, 0, 0) = -17 < 0$, т. е. значения трехчленов $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ в начале координат положительны, а значение трехчлена $f_3(x, y, z)$ в начале координат отрицательно. Поэтому в любой точке того трехгранного угла, который образован данными плоскостями и содержит начало координат, трехчлены $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ должны быть положительны, а трехчлен $f_3(x, y, z)$ — отрицателен, т. е. должно выполняться условие:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 > 0, \\ 3x + 4y + 9 > 0, \\ x - 2y + 2z - 17 < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

д) Определим фигуру, которая является пересечением координатной оси абсцисс и трехгранного угла, содержащего начало координат. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 = 0, \\ 3x + 4y + 9 = 0, \\ x - 2y + 2z - 17 = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

в результате чего получим три тройки чисел: $(-4{,}5;\ 0;\ 0)$, $(-3;\ 0;\ 0)$, $(17;\ 0;\ 0)$. Однако $f_2(-4{,}5;\ 0;\ 0) = -4{,}5 < 0$, т. е. не выполняется условие $3x + 4y + 9 > 0$. Это означает, что внутри рассматриваемого трехгранного угла на оси абсцисс содержится отрезок MP, концами которого служат точки $M(-3; 0; 0)$ и $P(17; 0; 0)$.

Аналогично, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 = 0, \\ 3x + 4y + 9 = 0, \\ x - 2y + 2z - 17 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

получаем точки $L(0; -4{,}5; 0)$, $K(0; -2{,}25; 0)$ и $F(0; -8{,}5; 0)$, при этом координаты точек L и F не удовлетворяют условию (*). Поэтому внутри рассматриваемого угла на оси ординат расположен луч с началом $K(0; -2{,}25; 0)$, содержащий начало координат.

Решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 9 = 0, \\ 3x + 4y + 9 = 0, \\ x - 2y + 2z - 17 = 0, \\ x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

являются тройки чисел (0; 0; 9), (0; 0; 0), (0; 0; 8,5), и внутри рассматриваемого угла на оси аппликат расположен луч с началом $D(0; 0; 8{,}5)$, содержащий начало координат (точка (0; 0; 9), который не удовлетворяет условию (*)).

§ 14.1—14.2. Определение пирамиды и ее элементов. Некоторые виды пирамид

Изложение теоретического материала этого параграфа авторы советуют вести в форме лекции-беседы, применяя метод укрупненных дидактических единиц.

В начале вводится определение пирамиды и ее элементов: основания, боковых граней, вершины, ребер и высоты. Пирамиду с основанием $ABCDE$ и вершиной P условились обозначать $PABCDE$. Пирамида называется n-угольной, если ее основанием является n-угольник, при этом, у n-угольной пирамиды имеется $(n + 1)$ вершин, $2n$ ребер и $(n + 1)$ граней. Необходимо подчеркнуть, что у пирамиды нет диагоналей, но могут быть диагонали основания.

Следует напомнить учащимся, что мы будем изучать только выпуклые многогранники, поэтому основаниями изучаемых в дальнейшем пирамид будут лишь выпуклые многоугольники.

На моделях и рисунках-изображениях пирамид следует проиллюстрировать учащимся все элементы пирамиды. Необходимо особо объяснить, что двугранным углом при ребре пирамиды называют содержащий эту пирамиду двугранный угол, образованный плоскостями тех граней, в которых расположено данное ребро.

Изучая пирамиды, стоит особо остановиться на треугольных пирамидах — тетраэдрах. Это объясняется, например, тем, что: во-первых, тетраэдр — это многогранник с наименьшим числом граней; во-вторых, любая грань тетраэдра может быть принята за его основание (ни одна другая пирамида таким свойством не обладает); в-третьих, любой выпуклый многогранник, в том числе и любую пирамиду, можно разбить на некоторое число тетраэдров. (Для этого достаточно, например, взять любую точку P внутри данного многогранника и соединить ее отрезками со всеми его вершинами. Затем полученные пирамиды с вершиной P, не являющиеся треугольными, разбить на треугольные с той же общей вершиной P. Такое разбиение многогранника на треугольные пирамиды, а его поверхности — на треугольники называют триангуляцией этого многогранника и часто используют при нахождении объемов многогранников.)

Следует рассмотреть свойства тетраэдра, все высоты которого пересекаются в одной точке (ортоцентрический тетраэдр), и тетраэдра, все грани которого — равные треугольники (равногранный тетраэдр). Заметим, что все грани равногранного тетраэдра могут быть только остроугольными треугольниками, разверткой его является также остроугольный треугольник. Правильный тетраэдр является частным случаем равногранного тетраэдра.

Необходимо рассмотреть и изобразить некоторые частные виды пирамид: а) пирамида, все боковые ребра которой образуют равные углы с плоскостью ее основания (все боковые ребра пирамиды равны между собой); вокруг основания такой пирамиды можно описать окружность, центром которой является ортогональная проекция вершины пирамиды на это основание, в частности, если в основании такого вида пирамиды лежит прямоугольный треугольник, то ортогональной проекцией вершины этой пирамиды на ее основание служит середина гипотенузы треугольника-основания; б) пирамида, все двугранные углы которой при ребрах основания равны между собой; ортогональной проекцией вершины такой пирамиды на ее основание является центр окружности, вписанной в это основание; в) пирамида, ровно одна боковая грань которой перпендикулярна плоскости ее основания; ортогональной проекцией вершины такой пирамиды на ее основание является точка прямой, проходящей через сторону перпендикулярной боковой грани; г) пирамида, две соседние боковые грани которой перпендикулярны плоскости ее основания; высотой такой пирамиды является общее боковое ребро данных боковых граней; д) пирамида, две не соседние боковые грани которой перпендикулярны плоскости ее основания; основанием высоты такой пирамиды является точка пересечения прямых, содержащих стороны основания пирамиды, лежащие в этих перпендикулярных гранях.

Учитель сам может расширять перечень частных видов пирамид. Так, например, можно рассказать учащимся: а) о пирамиде, боковое ребро которой образует равные углы с пересекающимися с ним ребрами основания; ортогональная проекция вершины такой пирамиды на ее основание принадлежит биссектрисе угла, образованного этими ребрами основания; б) о пирамиде, два боковых ребра которой равны между собой; вершина такой пирамиды проектируется на серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего основания равных боковых ребер (этим отрезком может быть либо ребро основания, либо диагональ основания).

Следует целенаправленно вырабатывать у учащихся привычку начинать изображения частных видов пирамиды с изображения их оснований. Если при этом все боковые ребра (все боковые грани) пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то требуется построить изображение центра окружности, соответственно описанной около основания (вписанной или вневписанной в него), и только после этого из построенного центра провести перпендикуляр к плоскости многоугольника и выбрать на этом перпендикуляре в качестве вершины пирамиды любую точку, отличную от центра многоугольника.

2.189. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 5, 6 и $\sqrt{31}$. Все боковые ребра пирамиды равны между собой. Высота пирамиды составляет с каждым из ее боковых ребер угол в $60°$. Найдите боковое ребро пирамиды.

Решение. Пусть основанием пирамиды $PABC$ является треугольник ABC, у которого $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = \sqrt{31}$.

Так как все боковые ребра пирамиды равны между собой, то основание O высоты PO пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около $\triangle$ABC, т. е. OA = OB = OC = R, где R — радиус этой окружности. Учитывая, что $\angle$OPA = 60°, в $\triangle$AOP получаем: $AP = \dfrac{R}{\sin 60^\circ}$. Найдем R.

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов находим: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \dfrac{25 + 36 - 31}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle B = 60^\circ \Rightarrow \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда из $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$ находим: $R = \dfrac{AC}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{\dfrac{31}{3}}$; значит, $AP = \sqrt{\dfrac{31}{3}} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{31}}{3}$.

2.194. ☺ Основание пирамиды — правильный треугольник, а высота пирамиды проходит через один из центров вневписанной окружности и равна радиусу этой окружности. Найдите величины двугранных углов пирамиды при ребрах ее основания.

Решение. Пусть $PABC$ — данная пирамида, PO — ее высота, где O — центр одной из вневписанных окружностей $\triangle ABC$ (рис. 22).

Если точки K, H, M — середины сторон соответственно AB, BC, CA и $OK \parallel CK$, $OH_1 \parallel AH$, то углы OK_1P, OH_1P и OMP являются линейными углами двугранных углов пирамиды при ребрах ее основания.

Так как высота PO пирамиды равна радиусу вневписанной окружности $\triangle ABC$, то $OP = OK_1 = OH_1 = OM$. Это означает, что $\angle OK_1P = \angle OH_1P = \angle OMP = 45^\circ$. Учитывая, что $\angle OMP$ — внешний для $\triangle BMP$, заключаем: искомые углы равны 45°, 45° и 135°.

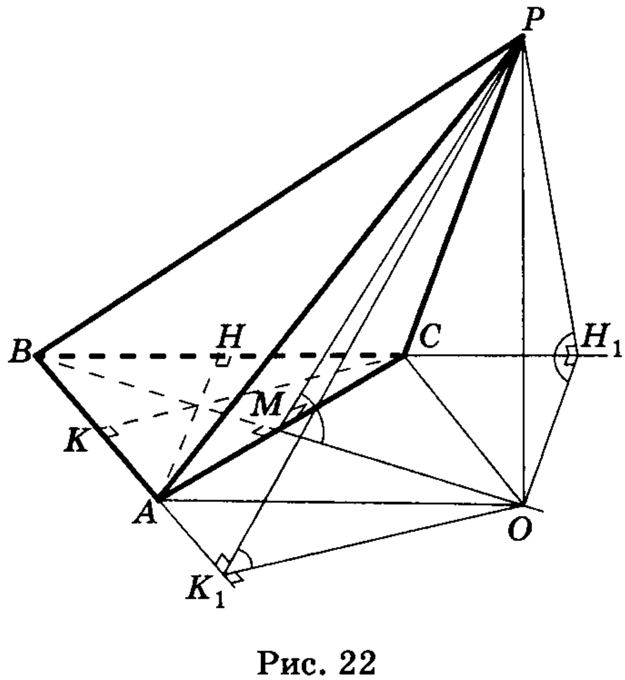


Рис. 22

2.197. ☺ Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10. Найдите высоту пирамиды, если все ее боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы в 45°.

Решение. Пусть основанием пирамиды $PABC$ является равнобедренный $\triangle ABC$, у которого $AB = 12$, $BC = AC = 10$; K — середина AB.

Так как все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания двугранные углы в 45°, то основание O высоты PO пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в $\triangle ABC$, т. е. $OK = R$, где R — радиус этой окружности. Учитывая, что $\angle OKP = 45°$, в $\triangle KOP$ имеем: $OP = R$. Найдем R.

В $\triangle ABC$ находим: $R = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{\sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4}}{16} = 3$. Значит, $OP = 3$.

2.198. Основанием пирамиды является ромб, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$ и проходит через центр основания. Найдите сторону основания пирамиды, если расстояния от центра основания пирамиды до боковых ребер равны 2 и $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть основанием пирамиды $PABCD$ является ромб $ABCD$ с центром O; при этом $OH = \sqrt{3}$, $OH \perp BP$; $OK = 2$, $OK \perp CP$ (рис. 23).

В прямоугольном $\triangle BOC$: $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2}$. Найдем OB и OC.

В прямоугольном $\triangle POH$ имеем: $OH = \sqrt{3}$, $OP = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OPH = 30°$. Тогда $OB = OP \cdot \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

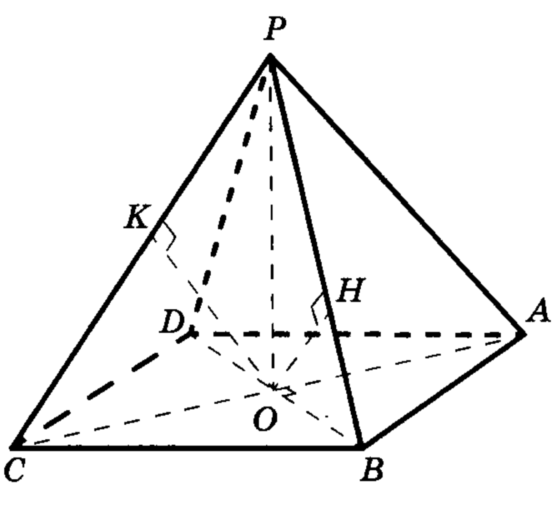


Рис. 23

Обозначим $\angle OPC = \beta$. Тогда в прямоугольном $\triangle POK$ получаем: $\sin\beta = \dfrac{OK}{OP} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Тогда $OC = OP \cdot \operatorname{tg} \beta = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$. Теперь получаем: $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$.

2.200. ♉ Два боковых ребра треугольной пирамиды и заключенная между ними сторона основания равны соответственно 6 дм, 9 дм и 9 дм. Высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности и равна $3\sqrt{3}$ дм. Найдите неизвестные стороны основания.

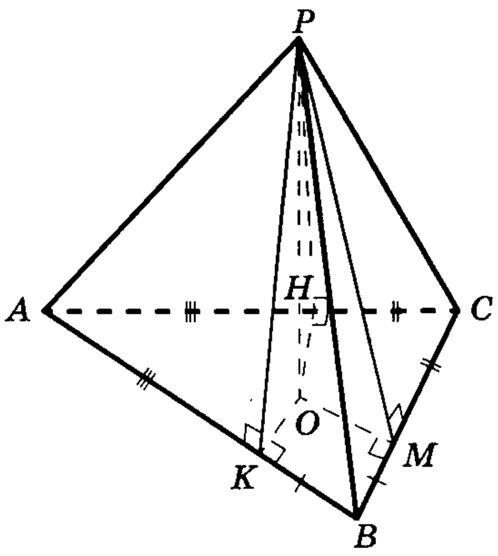


Рис. 24

Решение. Пусть $AP = 6$, $BP = AB = 9$, $PO = 3\sqrt{3}$ — высота пирамиды $PABC$ (рис. 24).

Если $OK = OH = OM = r$, где r — радиус окружности, вписанной в основание ABC пирамиды, то $PK \perp AB$, $PM \perp BC$, $PH \perp AC$, при этом $AK = AH$, $BK = BM$, $CH = CM$.

Находим:

$$PK = \frac{2S_{\triangle ABP}}{AB} = \frac{2\sqrt{12 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6}}{9} = 4\sqrt{2}.$$

Тогда $AK = \sqrt{AP^2 - PK^2} = \sqrt{81 - 32} = 7$, значит, $AH = 7$ и $BK = 2$. Кроме того, $OK = \sqrt{PK^2 - OP^2} = \sqrt{32 - 27} = \sqrt{5}$.

Если $CM = CH = x$, то периметр треугольника ABC равен $2 \cdot (9 + x)$, а его площадь равна $\sqrt{(x+9) \cdot x \cdot 2 \cdot 7} = \sqrt{14x(x+9)}$. Это означает, что $\sqrt{5} = \dfrac{2\sqrt{14x(x+9)}}{2(x+9)} = \dfrac{\sqrt{14x}}{\sqrt{x+9}}$, т. е. $5(x+9) = 14x$, откуда $x = 5$. Тогда $BC = 7$, $AC = 12$.

Пирамиды, одна или несколько граней которых перпендикулярны плоскости основания

2.208. ♉ В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, две стороны которого равны b, а угол между ними α. Одна из боковых граней пирамиды перпендикуляр- на плоскости основания, а две другие грани образуют с основанием двугранные углы, равные β и содержащие данную пирамиду. Какие значения может принимать высота пирамиды?

Решение. Пусть $PABC$ — данная пирамида, основанием которой является равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC = b$, $\angle BAC = \alpha$). Возможны два случая.

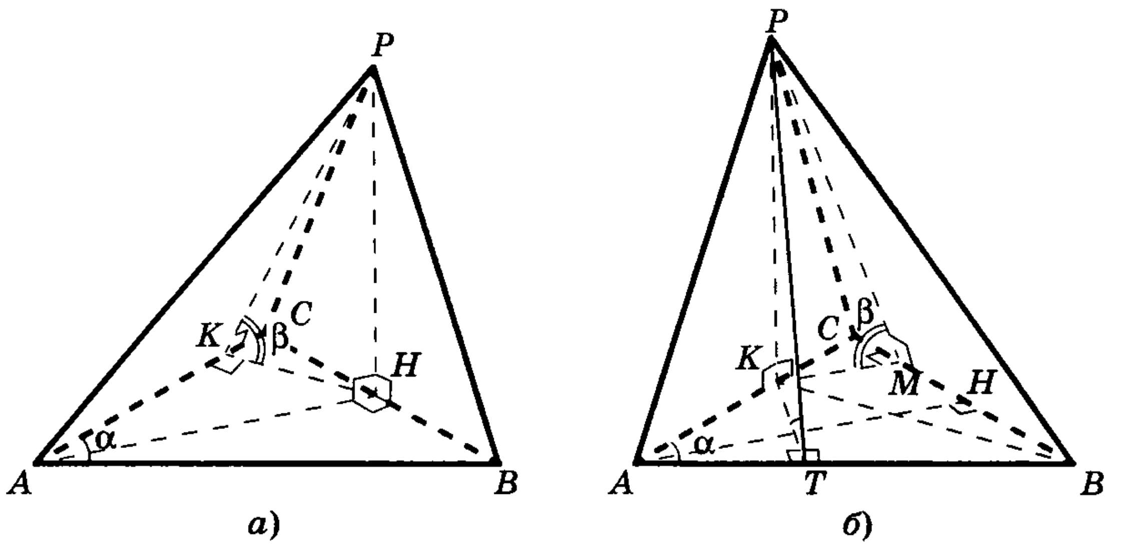


Рис. 25

1) Перпендикулярной плоскости основания пирамиды является ее грань, содержащая основание BC треугольника ABC.

Пусть точка H — середина BC, PH — высота пирамиды и $HK \perp AC$ (рис. 25, *а*), тогда $PK \perp AC$ и $\angle HKP = \beta$. В $\triangle HKP$: $PH = KH \cdot \operatorname{tg} \beta$. Найдем KH.

В прямоугольном $\triangle AHK$ имеем: $KH = AH \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, а в прямоугольном $\triangle AHB$ находим $AH = AB \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. Тогда $KH = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} b \cdot \sin\alpha$. Таким образом, $PH = 0{,}5 \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

2) Перпендикулярной плоскости основания пирамиды является ее грань, содержащая боковую сторону AC треугольника ABC (рис. 25, *б*).

Пусть точка H — середина BC, PK — высота пирамиды, $KM \perp BC$ ($KM \parallel AH$), $KT \perp AB$. Тогда $PM \perp BC$, $PT \perp AB$ и $\angle MKP = \angle TKP = \beta$.

Из равенства прямоугольных треугольников MKP и TKP следует равенство $KM = KT$, поэтому точка K — основание высоты пирамиды — принадлежит биссектрисе угла ABC. Это означает, что $AK : KC = AB : BC$.

Если $CK = x$, то $AK = b - x$. Так как $BC = 2b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, то из соотношения $\frac{x}{b - x} = \frac{2b\sin\frac{\alpha}{2}}{b}$ находим: $x = \frac{2b\sin\frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}} = CK$.

Далее, в прямоугольном треугольнике CKM $\left(\angle CKM = \dfrac{\alpha}{2}\right)$ получаем: $KM = CK \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2b\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{b\sin\alpha}{1 + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

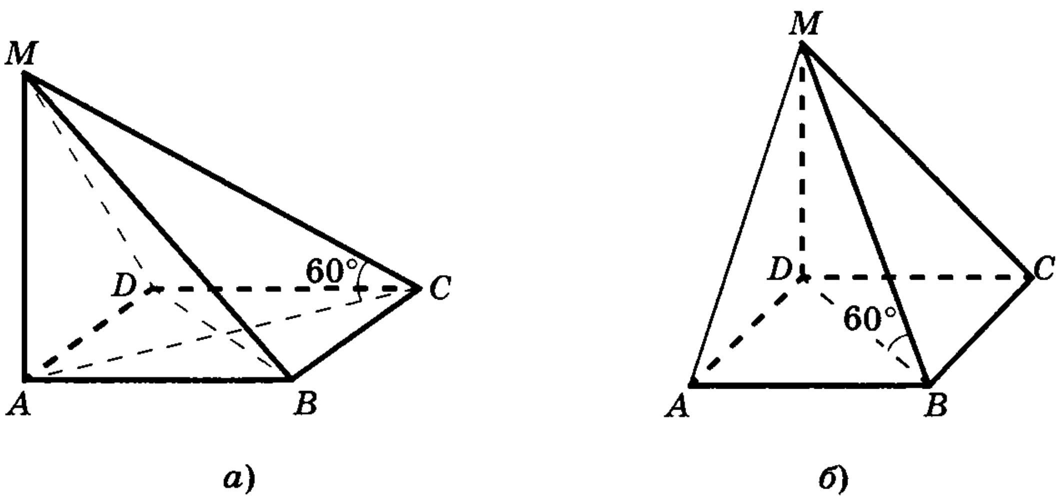
Теперь в прямоугольном $\triangle MKP$ получаем: $PK = KM \cdot \operatorname{tg}\beta = \dfrac{b\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1 + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

2.210. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 2 и углом 60°. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а ее большее боковое ребро образует с основанием угол 60°. Найдите высоту пирамиды.

Решение. Пусть $\angle BAD = 60°$ в ромбе $ABCD$. Тогда $BD = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$. Возможны случаи.

1. Две боковые грани, перпендикулярные плоскости основания, содержат вершину A, т. е. $MA \perp (ABC)$ (рис. 26, *а*). Тогда MC — большее боковое ребро пирамиды, и в прямоугольном $\triangle ACM$ находим: $MA = AC \cdot \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$.

2. Две боковые грани, перпендикулярные плоскости основания, содержат вершину D, т. е. $MD \perp (ABC)$ (рис. 26, *б*). Тогда $MC = MA = MB$ (как наклонные, имеющие равные проекции), и в прямоугольном $\triangle BDM$ находим: $MD = BD \cdot \operatorname{tg} 60° = 2\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.



а) *б*)

Рис. 26

2.212. ☺ В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = 1$ и $AD = 2$. Грани MAB и MCD перпендикулярны основанию, а двугранный угол при ребре AD равен $30°$. Найдите высоту пирамиды.

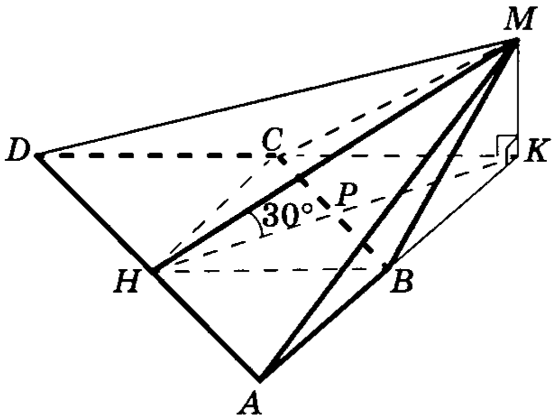


Рис. 27

Решение. Так как в трапеции $ABCD$ $AB = BC = CD = 1$ и $AD = 2$, то эта трапеция является равнобедренной с углом $60°$ при нижнем основании. Если при этом $K = AB \cap CD$, а точки H и P — середины соответственно AD и BC, то точки K, H, P лежат на одной прямой и $KH \perp AD$ (рис. 27).

Если MK — перпендикуляр к плоскости ABC, то $(AKM) \perp (ABC)$ и $(DKM) \perp (ABC)$; вследствие $B \in (AKM)$ и $C \in (DKM)$, боковые грани ABM и CDM пирамиды $MABCD$ перпендикулярны плоскости ее основания, т. е. пирамида $MABCD$ — искомая.

Так как $\triangle ADK$ — равносторонний и $KM \perp (ABC)$, то $\triangle ADM$ — равнобедренный. Поэтому $MH \perp AD$. Тогда $\angle MHK$ — линейный угол двугранного угла пирамиды при ее ребре AD, т. е. $\angle MHK = 30°$.

В равностороннем $\triangle ADK$ со стороной 2 находим: $HK = \sqrt{3}$, и в прямоугольном $\triangle MHK$ получаем $MK = HK \cdot \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 1$.

2.214. ☺ Основанием пирамиды является ромб с острым углом α. Одна из боковых граней пирамиды является равносторонним треугольником и перпендикулярна плоскости основания. Найдите величины двугранных углов при ребрах основания пирамиды.

Решение. Пусть $PABCD$ — данная пирамида; ромб $ABCD$ — ее основание, при этом $AB = a$ и $\angle BAD = \alpha$; плоскость равностороннего треугольника ADP перпендикулярна основанию пирамиды, при этом точка H — середина AD и $HP \perp AD$; DM и DF — высоты ромба $ABCD$ (рис. 28). Тогда в треугольнике MCD имеем: $DM = DC \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$, значит, $DF = a \cdot \sin\alpha$.

Проведем $HK \| DM$ и $HL \| DF$. Тогда $HK \perp BC$, $HL \perp AB$ и по теореме о трех перпендикулярах $PK \perp BC$, $PL \perp AB$. Это

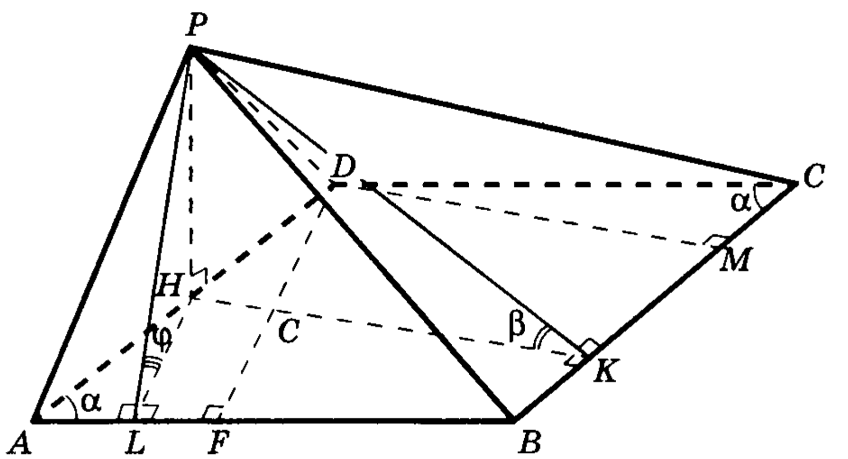


Рис. 28

означает, что $\angle PLH = \varphi$ и $\angle PKH = \beta$ — линейные углы двугранных углов пирамиды соответственно при ребрах AB и BC ее основания. Найдем эти углы.

В правильном $\triangle ADP$ $(AD = a)$ — $PH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$HK \| DM$, $HK = DM \Rightarrow HK = a \cdot \sin\alpha$;

в $\triangle ADF : HL = \dfrac{1}{2} DF = \dfrac{a\sin\alpha}{2}$.

Тогда получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{PH}{HL} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{PH}{HK} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a\cdot\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}.$$

Так как точка H — середина стороны AD ромба $ABCD$, то точка H равноудалена от его сторон AB и CD, поэтому двугранный угол при ребре CD равен $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$. Учитывая, что плоскость равностороннего треугольника ADP перпендикулярна основанию пирамиды, приходим к выводу: двугранный угол при ребре AD равен $90°$.

2.221. В тетраэдре ребра AB, AC и AD соответственно равны 3, 4 и 5, а все плоские углы при вершине A — прямые. Найдите величину двугранного угла при каждом ребре пирамиды.

Решение. Пусть AP, AH и AK — высоты прямоугольных треугольников (граней тетраэдра) соответственно ABC, ACD и ABD (рис. 29). Так как $\angle CAD = \angle CAB = 90°$, то

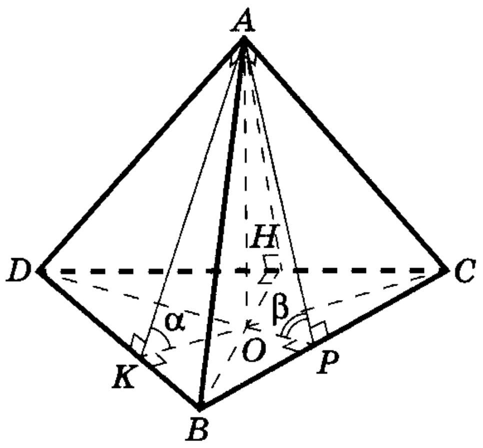


Рис. 29

$AC \perp (ABD)$, откуда $AC \perp AK$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $CK \perp BD$. Это означает, что $\angle AKC = \alpha$ — линейный угол двугранного угла пирамиды при ребре BD.

Аналогично рассуждая, получим: $\angle APD = \beta$ — линейный угол двугранного угла пирамиды при ребре BC; $\angle AHB = \gamma$ — линейный угол двугранного угла пирамиды при ребре CD.

Найдем эти углы.

В прямоугольном треугольнике AKC имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{AK}$.

Так как в прямоугольном треугольнике ABD имеем: $AK = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{15}{\sqrt{34}}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{15/\sqrt{34}} = \frac{4\sqrt{34}}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{34}}{15}$.

Аналогично находим:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AD}{AP} = \frac{AD}{\dfrac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}} = \frac{AD \cdot \sqrt{AB^2 + AC^2}}{AB \cdot AC} =$$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}}{3 \cdot 4} = \frac{25}{12} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg}\frac{25}{12};$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AB}{AH} = \frac{AB}{\dfrac{AD \cdot AC}{\sqrt{AD^2 + AC^2}}} = \frac{AB \cdot \sqrt{AD^2 + AC^2}}{AD \cdot AC} =$$

$$= \frac{3 \cdot \sqrt{5^2 + 4^2}}{5 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{41}}{20} \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{41}}{20}.$$

Двугранные углы при ребрах AB, AC и AD равны 90°.

2.223. В треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра попарно равны между собой. Найдите сумму плоских углов при вершине пирамиды.

Решение. Пусть $PABC$ — данная треугольная пирамида (тетраэдр), в которой $AB = CP$, $BC = AP$, $AC = BP$ (рис. 30). Если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, то $CP = c$, $AP = a$, $BP = b$. Поэтому все грани тетраэдра равны между собой (по трем сторонам).

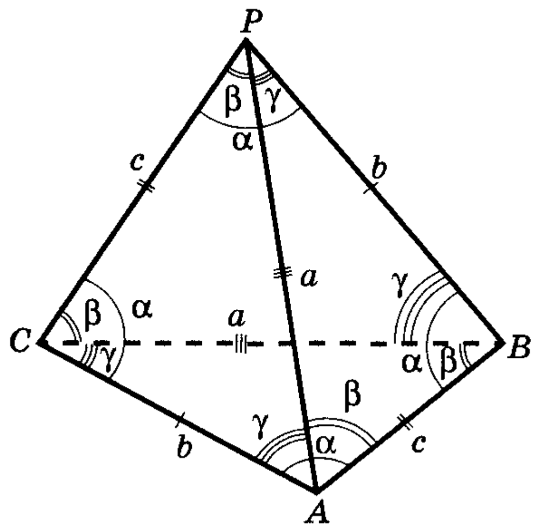


Рис. 30

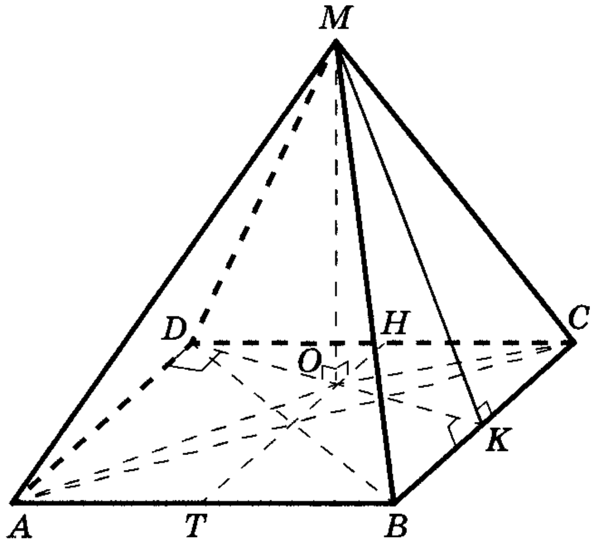


Рис. 31

Обозначим в треугольнике ABC: $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Тогда на основании равенства треугольников ACP, BPA и BPC, имеющих общую вершину P, получаем: $\angle BPC = \alpha$, $\angle APC = \beta$, $\angle APB = \gamma$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (в треугольнике ABC), то $\angle BPC + \angle APC + \angle APB = 180°$, т. е. сумма всех плоских углов при вершине P данного тетраэдра равна $180°$.

Аналогично можно доказать, что сумма всех плоских углов при любой вершине данного тетраэдра равна $180°$.

Замечание. Тетраэдр, все грани которого равны между собой, называют равногранным. В равногранном тетраэдре сумма плоских углов при любой его вершине равна $180°$.

2.225. ♉ Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$ с острым углом BCD, равным $60°$, и высотой 12. Вершина M равноудалена от прямых AD, BC и от вершин B и C. Найдите длины боковых ребер пирамиды, если ее высота равна 1.

Решение. Множество всех точек пространства, равноудаленных от данных параллельных прямых, есть плоскость, проходящая через середину отрезка общего перпендикуляра этих прямых и ему перпендикулярная, а множество всех точек пространства, равноудаленных от концов данного отрезка, есть плоскость серединных перпендикуляров этого отрезка. Это означает, что вершина M принадлежит прямой пересечения плоскости, перпендикулярной основанию пирамиды и проходящей через медиану DK правильного треугольника BCD, и плоскости, которая проходит через середину отрезка DK перпендикулярно ему, т. е. точка O — основание высоты пирамиды — есть середина медианы DK (рис. 31).

Медиана DK правильного треугольника BCD является высотой ромба $ABCD$, поэтому $DK = 12$, значит, сторона ромба равна $8\sqrt{3}$. При этом $OK = OD = \frac{1}{2}DK = 6$, $CK = \frac{1}{2}BC = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Тогда в прямоугольном $\triangle MOK$ находим $MK = \sqrt{OM^2 + OK^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$. А так как $\triangle MDK$ — равнобедренный, то $MD = MK = \sqrt{37}$.

Далее, в прямоугольном $\triangle MCK$ имеем: $MC = \sqrt{MK^2 + CK^2} = \sqrt{37 + 48} = \sqrt{85}$. А так как $\triangle MBC$ — равнобедренный, то $MB = MC = \sqrt{85}$.

Так как $DK \perp BC$, $BC \| AD$, то $\triangle AOD$ — прямоугольный, поэтому $OA^2 = OD^2 + AD^2 = 36 + 192 = 228$. Тогда в прямоугольном $\triangle AOM$ находим: $AM = \sqrt{OM^2 + OA^2} = \sqrt{1 + 228} = \sqrt{229}$.

Таким образом, $DM = \sqrt{37}$, $MC = MB = \sqrt{85}$, $MA = \sqrt{229}$.

§ 14.3. Правильная пирамида

С правильной пирамидой учащиеся уже многократно встречались в предшествующем курсе стереометрии 10 и 11 классов (ее наглядное описание было дано в нашем учебнике «Геометрия. 10 класс»).

В этом параграфе дается строгое определение правильной пирамиды и изучаются ее свойства.

Учащиеся доказывают, что в правильной пирамиде: все боковые ребра равны, а все боковые грани — равные равнобедренные треугольники; все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, а все боковые грани — равные двугранные углы. Кроме того, учащиеся могут использовать следующие признаки правильной пирамиды: пирамида, в основании которой правильный многоугольник, является правильной, если: а) все ее боковые ребра равны; б) все ее боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; в) все ее боковые грани — равные треугольники.

Необходимо вырабатывать у учащихся привычку начинать изображение правильной пирамиды, как и изображения некоторых частных видов пирамид, с изображения ее основания —

правильного многоугольника — и его центра. Затем из построенного центра провести перпендикуляр к плоскости многоугольника и выбрать на этом перпендикуляре в качестве вершины пирамиды любую точку, отличную от центра многоугольника. Соединив отрезками прямых эту точку со всеми вершинами многоугольника, получим изображение правильной пирамиды.

2.233. ☺ Основание правильного тетраэдра $DABC$ с ребром 1 является боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды $ABCPQ$. Вершина D лежит вне пирамиды $ABCPQ$. Найдите: а) расстояние между вершинами D и P; б) величину угла между прямыми BD и QC.

Решение. Пусть точка O — центр основания пирамиды $ABCPQ$, точка M — центр основания правильного тетраэдра $DABC$ (рис. 32), точки H и K — середины QP и BC соответственно. Тогда в правильном треугольнике ABC: $KM = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, а в правильном тетраэдре $DABC$ с ребром 1 имеем: $MD = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Так как $OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (как половина диагонали квадрата со стороной 1) и $OA = \sqrt{AK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то пирамида $OABC$ — правильная с основанием ABC, поэтому отрезок OM является высотой этой пирамиды, т. е. $OM \perp$

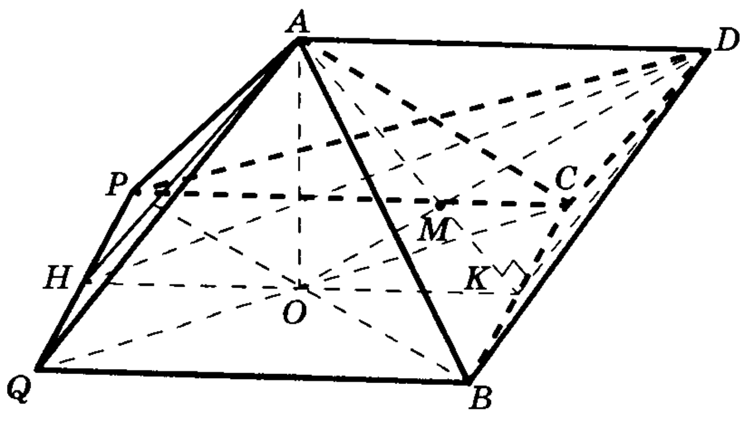


Рис. 32

$\perp (ABC)$. Учитывая, что M — центр основания ABC правильного тетраэдра $DABC$, приходим к выводу: точки O, M и D лежат на одной прямой, перпендикулярной (ABC). Кроме того, $OM = \sqrt{OK^2 - KM^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Получили: $AM : MK = DM : MO = 2 : 1 \Rightarrow AD = 2OK = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ и $AD \| OK$.

Так как четырехугольник $ADKH$ — параллелограмм, в котором $AH = KD = AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $HD^2 = 2(AH^2 + HK^2) - AK^2 = = AH^2 + 2HK^2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$.

Далее, плоскость AHK, в которой расположен этот параллелограмм, перпендикулярна (ABC) и прямой PQ, поэтому в прямоугольном $\triangle HPD$ находим: $DP^2 = HD^2 + HP^2 = \frac{11}{4} + + \frac{1}{4} = 3 \Rightarrow DP = \sqrt{3}$.

Так как четырехугольник $ADBQ$ — параллелограмм, в котором $AQ \| BD$, то $\angle(BD, CQ) = \angle(AQ, CQ) = 45°$ ($\triangle AOQ$ — равнобедренный прямоугольный).

2.240. Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{7}$, а высота боковой грани, опущенная на боковое ребро, — $\sqrt{5}$.

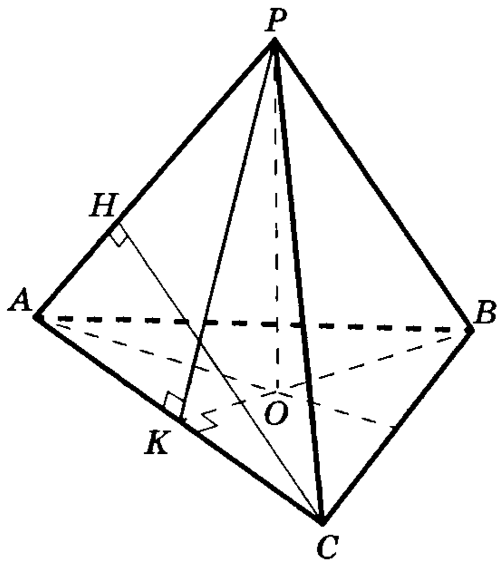


Рис. 33

Решение. Пусть $CH = \sqrt{5}$ и PK — высоты грани APC (рис. 33); $AC = c$; $OP = \sqrt{7}$ — высота пирамиды. Тогда в правильном $\triangle ABC$: $OK = = \frac{1}{3} BK = \frac{c\sqrt{3}}{6}$; $OB = \frac{2}{3} BK = \frac{c\sqrt{3}}{3} = = OA$;

в прямоугольном $\triangle OPK$: $PK = = \sqrt{OK^2 + OP^2} = \sqrt{\left(\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)^2 + (\sqrt{7})^2} = = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{c^2 + 84}}{3}$;

в прямоугольном $\triangle OAP$: $AP = \sqrt{OA^2 + OP^2} =$
$= \sqrt{\left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{c^2+21}}{3}$.

Так как $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}AC \cdot PK = \frac{1}{2}AP \cdot CH$, то из $c \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{c^2+84}}{3} = \frac{\sqrt{c^2+21}}{3} \cdot \sqrt{5}$ получаем: $c^4 + 64c^2 - 420 = 0$, откуда при $c^2 = t (t > 0)$ находим $t = 6$, т. е. $c^2 = 6$, значит, $AP = \sqrt{\frac{6+21}{3}} = 3$.

2.241. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен 120°, расстояние от центра основания пирамиды до бокового ребра равно a. Найдите высоту пирамиды.

Решение. Пусть $\angle CHB = 120°$ — линейный угол двугранного угла при ребре AM правильной пирамиды $MABC$ ($(BHC) \perp \perp AM$ (рис. 34); OM — высота пирамиды; $OP \perp AM$, $OP = a = = \rho(O; AM)$ — расстояние от центра O основания пирамиды до ребра AM.

Из $AK = \frac{3}{2}OA$ следует $HK = \frac{3}{2}OP = \frac{3}{2}a$. Поэтому в прямоугольном $\triangle BHK$: $BK = HK \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{3}{2}a \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$. Тогда $BC = 2BK = \frac{3\sqrt{3}}{2}a \cdot 2 = 3a\sqrt{3}$. Значит, $AK = \frac{BC\sqrt{3}}{2} =$
$= \frac{3\sqrt{3}a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}a$.

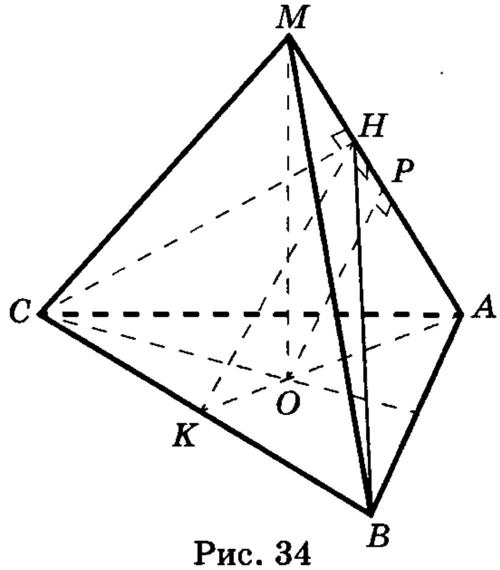


Рис. 34

В $\triangle ABC$ имеем: $AO = \frac{2}{3}AK =$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}a = 3a$. В прямоугольном $\triangle AHK$: $AH = \sqrt{AK^2 - KH^2} =$
$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}a\right)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = 3a\sqrt{2}$. Теперь находим высоту OM: из подобия

треугольников AOM и AHK следует $\frac{AO}{AH} = \frac{OM}{HK}$ или $\frac{3a}{3a\sqrt{2}} =$

$= OM : \frac{3a}{2}$, откуда $OM = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

2.246. ♉ Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковое ребро образует с высотой угол в 30°. Постройте сечение пирамиды, проходящее через вершину ее основания перпендикулярно противолежащему ребру, и найдите его площадь.

Решение. Пусть α — плоскость сечения пирамиды $PABCD$, проходящая через вершину A квадрата $ABCD$ перпендикулярно ребру PC. Так как $\triangle APC$ — равнобедренный с углом в 60° при основании AC, то этот треугольник является равносторонним. Поэтому точкой пересечения плоскости α с ребром PC является середина E этого ребра (рис. 35), а отрезки ME и KE, по которым плоскость α пересекает соответственно грани PBC и PCD, перпендикулярны PC. Тогда из равенства прямоугольных треугольников MPE и KPE получаем $PK = PM$, откуда следует $KM \| BD$. Тогда искомым сечением данной пирамиды является четырехугольник $AMEK$, диагонали KM и AE которого взаимно перпендикулярны, значит, $S_{AMEK} = \frac{1}{2} \cdot KM \cdot AE$. Найдем KM и AE.

Так как $AC = a\sqrt{2}$ и точка E является серединой стороны PC правильного треугольника APC, то $PE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AE = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

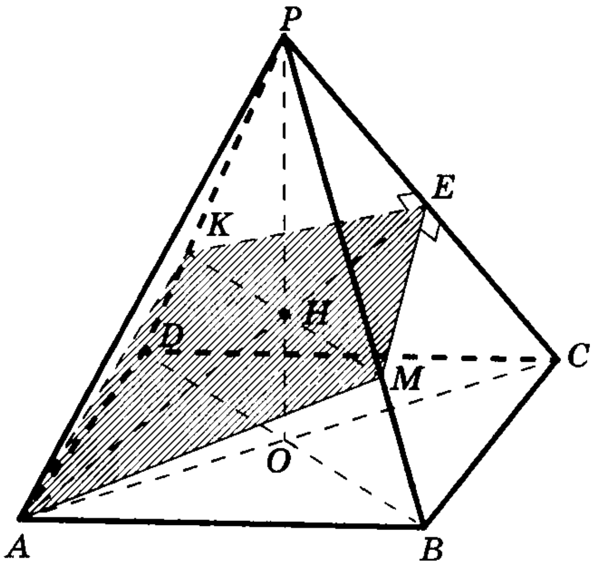


Рис. 35

Тогда в прямоугольном $\triangle HPE$ ($\angle HPE = 30°$) находим: $PH = \frac{PE}{\cos 30°} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Значит, сторона KM правильного $\triangle KPM$, в котором PH — медиана, равна $\frac{a\sqrt{6}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Таким образом, $S_{\text{сечен}} = S_{AMEK} = \frac{1}{2} \cdot KM \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \times$
$\times \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

2.248. ♉ Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна Q. Найдите площадь сечения, плоскость которого параллельна боковой грани пирамиды и проходит через середину ее высоты.

Решение. Обозначим: α — плоскость сечения; точка T — середина высоты OP правильной пирамиды $ABCDEF$; точки K, K_1 и L — середины отрезков соответственно BC, OK и EF (рис. 36).

Пусть плоскость α параллельна грани PBC. Тогда $P_1K_1 \| PK$ ($P_1K_1 = (OPK) \cap \alpha$), $QR \| BC$ ($QR = (ABC) \cap \alpha$), при этом $T \in P_1K_1$, $K_1 \in QR$, $P_1 \in PL$.

Далее, так как $QR \| AD \| EF$, то пересечениями плоскости α с треугольниками ADP и PEF служат соответственно отрезки $A_1D_1 \| AD$ и $MN \| EF$ ($T \in A_1D_1$, $M \in PF$, $N \in PE$, $P_1 \in MN$).

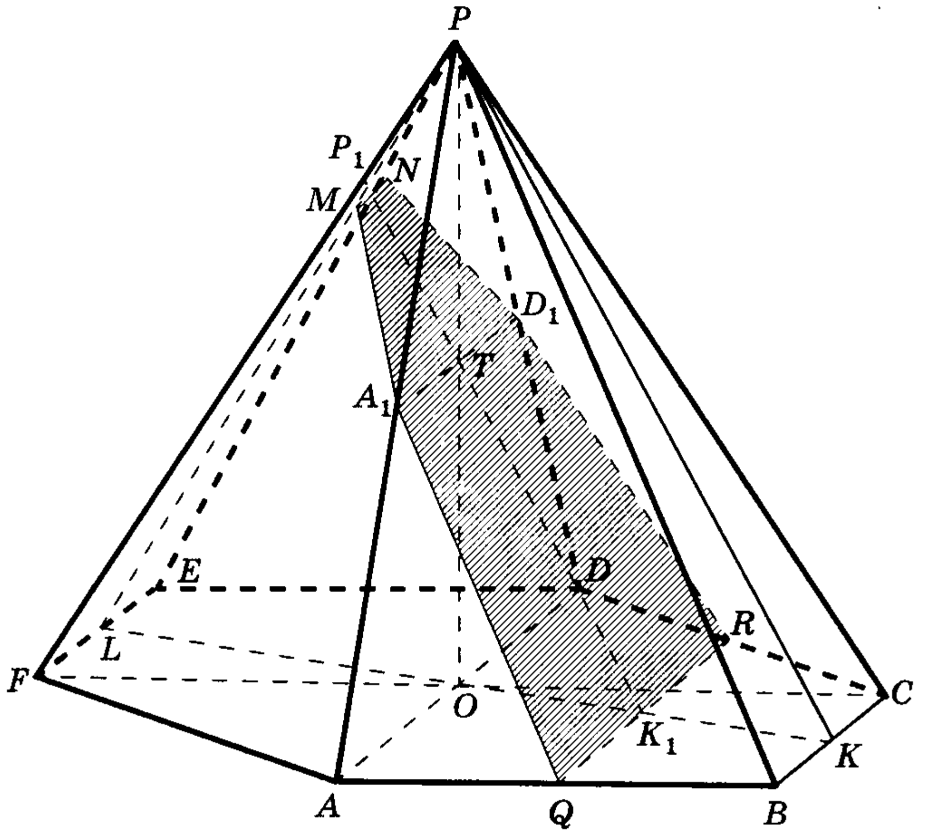


Рис. 36.

При этом $A_1D_1 = 0{,}5AD = BC$, $QR = 1{,}5BC$, значит, сечением данной пирамиды плоскостью α является шестиугольник QA_1MND_1R, составленный из двух трапеций A_1D_1RQ и MND_1A_1 с общим основанием A_1D_1.

Если $BC = a$, $PK = h$, то $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}ah = Q$.

Находим $S_{QA_1MND_1R}$ — площадь сечения QA_1MND_1R.

Так как $K_1K = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{4}KL$ и $P_1K_1 \| PK$, то $MN = \frac{1}{4}EF = \frac{a}{4}$; $P_1K_1 = \frac{3}{4}PK = \frac{3}{4}h$, $TK_1 = \frac{1}{2}PK = \frac{1}{2}h$, $P_1T = \frac{1}{4}h$; $QR = \frac{3}{2}a$; $A_1D_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot 2a = a$.

Теперь получаем: $S_{QA_1MND_1R} = \frac{A_1D_1 + MN}{2}\cdot P_1T + \frac{A_1D_1 + RQ}{2}\cdot KT = \frac{a + \frac{a}{4}}{2}\cdot\frac{h}{4} + \frac{a + \frac{3}{2}a}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{25}{32}ah = \frac{25}{16}\cdot\frac{1}{2}ah = \frac{25}{16}Q$.

Учащимся полезно знать, что в ряде случаев нахождение площади сечения правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, которая проведена через сторону основания пирамиды и образует с этим основанием угол α, может быть упрощено, если воспользоваться следующим фактом.

Допустим, в сечении пирамиды $PABCD$ получается равнобедренная трапеция $ADKM$ (точки A и D — вершины основания пирамиды), ортогональной проекцией которой на плоскость основания пирамиды является также равнобедренная трапеция ADK_1M_1 с высотой FL. Тогда $S_{ADKM} = \frac{S_{ADK_1M_1}}{\cos\alpha}$. Так как диагонали основания взаимно перпендикулярны, а вершины K_1 и M_1 лежат на этих диагоналях, то ADK_1M_1 — равнобедренная трапеция с взаимно перпендикулярными диагоналями, поэтому площадь этой трапеции равна квадрату ее высоты, т. е. $S_{ADK_1M_1} = FL^2$. Значит, $S_{ADKM} = \frac{FL^2}{\cos\alpha}$ (см. 2.244).

§ 14.4. Площади боковой и полной поверхностей пирамиды

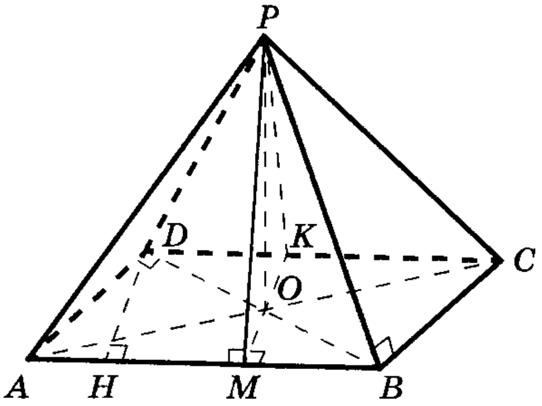


Рис. 37

В этом пункте учебника получены формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхностей пирамиды. При этом если все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны φ, то площадь боковой поверхности этой пирамиды и площадь ее основания взаимосвязаны соотношением $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$ (где $S_{\text{осн}}$ — площадь ее основания). Естественно, данная формула применима и для вычисления площади боковой поверхности правильной пирамиды.

2.253. ☺ Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 4 и 5, а одна из диагоналей 3; высота пирамиды, равная 2, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Пусть $PABCD$ — данная пирамида с основанием $ABCD$, в котором $AB = 5$, $BC = 4$, $BD = 3$ (рис. 37). Тогда $\triangle ABD$ — прямоугольный с катетами AD и BD, значит, его площадь равна 6, а площадь основания равна 12. Тогда высота DH параллелограмма $ABCD$ равна 2,4.

Проведем через центр O основания пирамиды его высоту KM, тогда $OM = 1{,}2$, поэтому высота PM грани APB равна $\sqrt{OM^2 + OP^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 2^2} = \dfrac{2\sqrt{34}}{5}$. Значит, $S_{\triangle ABP} = \dfrac{1}{2}AB \cdot PM = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot \dfrac{2\sqrt{34}}{5} = \sqrt{34}$.

Далее, так как $BD \perp BC$, то $PB \perp BC$. Поэтому $S_{\triangle BCP} = \dfrac{1}{2}BC \cdot BP = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{4 + \dfrac{9}{4}} = 2 \cdot \dfrac{5}{2} = 5$. Тогда $S_{\text{полн}} = 2(S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BCP}) + S_{\text{осн}} = 2(\sqrt{34} + 5) + 12 = 2(11 + \sqrt{34})$.

2.256. ♉ Площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды, проведенного через центр основания пирамиды параллельно боковой грани, равна Q. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Пусть $PABCD$ — данная пирамида, точка O — центр ее основания $ABCD$. Если сечение пирамиды параллельно грани PBC, а точки M и E — середины соответственно AB и CD, то это сечение представляет собой равнобедренную трапецию, одним основанием которой служит отрезок ME, а другим — отрезок $FL \| ME$, где точки F и L — середины ребер соответственно AP и DP, причем $MF \| BP$ и $EL \| CP$ (прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны).

При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MB}$ трапеция $MELF$ отобразится на равную ей трапецию $BCHK$, где K и H — середины ребер соответственно BP и CP. Если при этом $S_1 = S_{\triangle HKP}$, $S = S_{\triangle BCP}$, то $S = S_1 + Q$. С учетом $S_1 = \frac{1}{4}S$ получаем $S = \frac{1}{4}S + Q$, откуда $S = \frac{4}{3}Q$. Это означает, что $S_{\text{бок}} = 4S = 4 \cdot \frac{4}{3}Q = \frac{16}{3}Q$.

2.259. Два боковых ребра треугольной пирамиды равны 25 см и 30 см, а сторона основания, заключенная между ними, равна 25 см. Найдите другие стороны основания, если площадь боковой поверхности пирамиды равна 840 см^2 и высота проходит через центр вписанной в основание окружности.

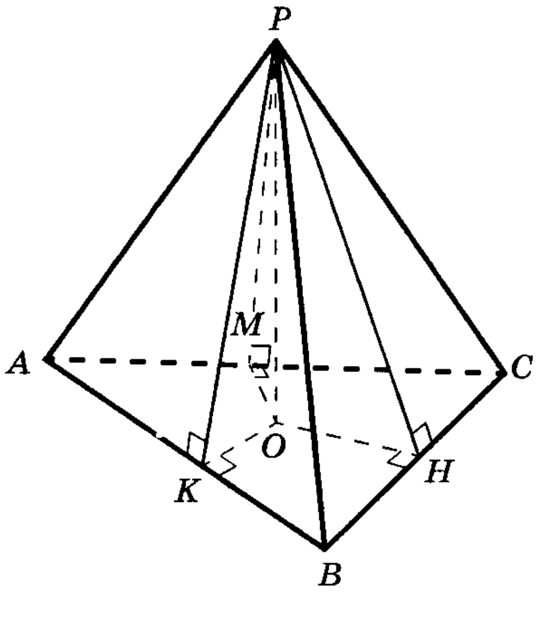


Рис. 38

Решение. Пусть в пирамиде $PABC$ (рис. 38) $AB = BP = 25$, $AP = 30$; точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности; отрезки OK, OH и OM — радиусы этой окружности, т. е. $OK \perp AB$, $OH \perp BC$, $OM \perp AC$. Это означает, что $PK \perp AB$, $PH \perp BC$, $PM \perp AC$.

В грани ABP находим: $PK = \frac{2S_{\triangle ABP}}{AB} = \frac{2\sqrt{40 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 15}}{25} = 24$. Тогда $AK = \sqrt{AP^2 - PK^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18 = AM$, значит, $KB = BH = 25 - 18 = 7$.

Пусть $CH = x$. Тогда $S_{бок} = \frac{1}{2}(18 + x + 7 + x) \cdot 24 + 300 = 840$, откуда $x = 10$. Тогда $BC = 7 + 10 = 17$, $AC = 18 + 10 = 28$.

2.260. ☺ Основанием пирамиды является ромб с острым углом в 30°. Каждый двугранный угол при основании пирамиды равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если высота ее равна h.

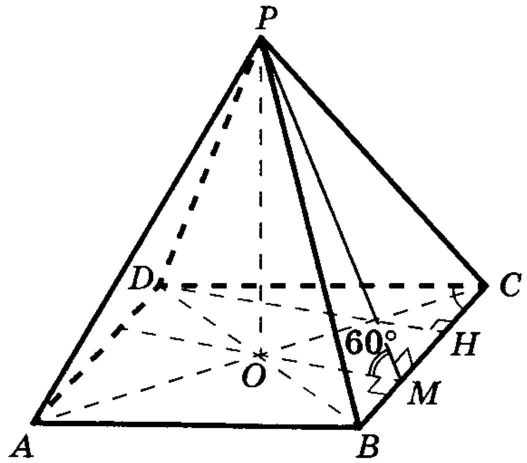


Рис. 39

Решение. Так как все двугранные углы при ребрах основания данной пирамиды $PABCD$ равны между собой, то основание высоты пирамиды совпадает с точкой O пересечения диагоналей ромба $ABCD$ (рис. 39).

Пусть DH — высота ромба $ABCD$, $\angle BCD = 30°$ и $OM \parallel DH$, тогда $PM \perp BC$ и $\angle OMP = 60°$.

В прямоугольном $\triangle OMP$ находим: $OM = OP \cdot \text{ctg } 60° = \frac{h}{\sqrt{3}}$; $PM = \frac{OP}{\sin 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}/2} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$. Тогда $DH = 2OM = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

В прямоугольном $\triangle CDH$: $CD = \frac{DH}{\sin 30°} = \frac{2h}{\sqrt{3}} : \frac{1}{2} = \frac{4h}{\sqrt{3}}$.

Тогда $S_{осн} = CD^2 \cdot \sin 30° = \left(\frac{4h}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{8h^2}{3}$.

Далее, $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} BC \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{4h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{4h^2}{3}$. Тогда $S_{бок} = 4S_{\triangle PBC} = 4 \cdot \frac{4h^2}{3} = \frac{16h^2}{3}$, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \frac{16h^2}{3} + \frac{8h^2}{3} = 8h^2$.

2.267. Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого 29 см, 35 см и 48 см. Высота пирамиды проходит через центр вписанной в ее основание окружности и меньше высоты боковой грани на 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Пусть в пирамиде $PABC$ точка O — центр окружности, вписанной в основание ABC; PK — высота грани PBC.

Тогда $OK \perp BC$, $OK = R$ — радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Имеем: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$. Найдем $S_{\text{бок}}$ и $S_{\text{осн}}$.

Полупериметр p основания равен 56, значит, $S_{\text{осн}} =$
$= \sqrt{56 \cdot 27 \cdot 21 \cdot 8} = 504$, поэтому $R = \dfrac{S_{\text{осн}}}{p} = \dfrac{504}{56} = 9$.

Обозначим $PK = x$, тогда $OP = x - 3$. В прямоугольном $\triangle OPK$: $OK^2 = KP^2 - OP^2$ или $x^2 - (x-3)^2 = 9^2$, откуда $x = 15 = PK$. Тогда $S_{\text{бок}} = p \cdot PK = 56 \cdot 15 = 840$ и $S_{\text{полн}} = 504 +$
$+ 840 = 1344$ (см^2).

2.269. Двугранный угол при стороне основания правильной треугольной пирамиды равен 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна h.

Решение. Пусть в правильной пирамиде $MABC$ точка O — центр основания ABC, точка K — середина стороны BC. Тогда $\angle AKM = 45°$ — линейный угол двугранного угла пирамиды при ребре BC. Поэтому $OK = OM = h$, $MK = h\sqrt{2}$ ($\triangle OMK$ — равнобедренный прямоугольный) и $AK = 3OK = 3h$. Тогда $BC = \dfrac{2AK}{\sqrt{3}} = 2h\sqrt{3}$. Это означает, что $S_{\text{осн}} = \dfrac{BC^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$
$= \dfrac{(2h\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3h^2\sqrt{3}$; $S_{\text{бок}} = 3S_{\triangle BCM} = 3 \cdot \dfrac{BC \cdot MK}{2} =$
$= \dfrac{3 \cdot 2h\sqrt{3} \cdot h\sqrt{2}}{2} = 3h^2\sqrt{6}$. Тогда $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 3h^2\sqrt{6} +$
$+ 3h^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)h^2$.

2.270. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Пусть $PABCD$ — данная пирамида, в которой $\angle BPC = \alpha$, OP — высота, точка K — середина ребра BC (рис. 40).

Так как пирамида правильная, то $S_{\text{бок}} = 4S_{\triangle BPC} = 4 \cdot 0{,}5 \times$
$\times BC \cdot PK = 2BC \cdot PK$. Найдем BC и PK.

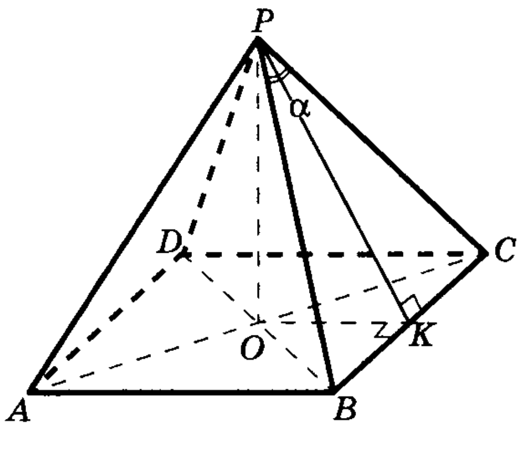


Рис. 40

Обозначим $BC = m$. Тогда $BK = OK = \frac{m}{2}$ и в прямоугольном $\triangle BPK$ имеем: $PK = BK \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Далее в прямоугольном $\triangle OPK$: $PK^2 - OK^2 = OP^2$, т. е. $\left(\frac{m}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 = h^2$ или $\frac{m^2\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = h^2$, откуда $m = \frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$. Получили: $BC = \frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$. Тогда $PK = \frac{m}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}} \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$, значит, $S_{\text{бок}} = 2BC \cdot PK = 2 \cdot \frac{2h\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}} \cdot \frac{h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}} = 2h^2\text{tg}\ \alpha$.

§ 14.7—14.8. Объем пирамиды

Перед доказательством леммы о равновеликости двух треугольных пирамид с равновеликими основаниями следует повторить теорему 19 о параллельных сечениях пирамиды. Полезной при решении задач, посвященных тетраэдру, является формула $V_{ACBD} = \frac{1}{6}h \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$ для вычисления объема V_{ACBD} тетраэдра $ABCD$, если известны длины двух его скрещивающихся ребер AC, BD, расстояние и величина угла φ между ними. Для решения задач с объемами тетраэдров учащимся также полезно знать следующие их свойства.

1. Объемы тетраэдров с равными основаниями относятся как длины их высот, опущенных на эти основания.

2. Объемы тетраэдров с равными высотами относятся как площади их оснований.

3. Объемы тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы, относятся как произведения длин ребер, образующих эти углы. Это свойство тетраэдров часто используется при составлении задач вступительных экзаменов в вузы.

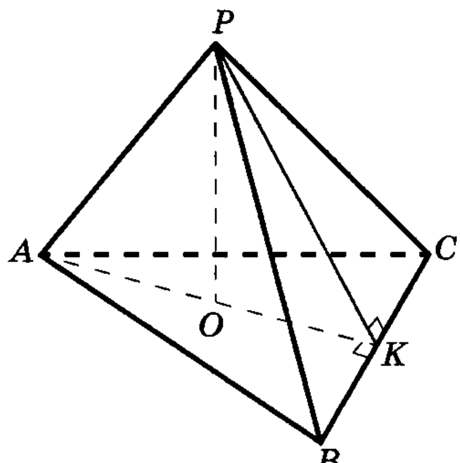


Рис. 41

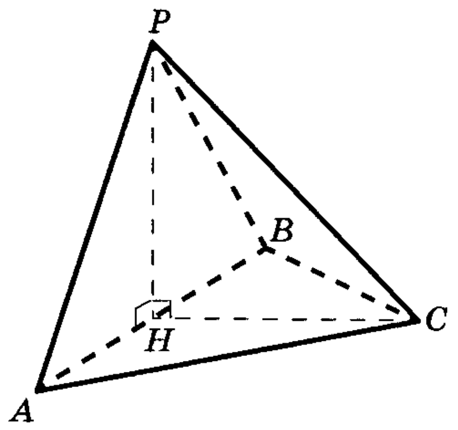


Рис. 42

2.291. ♉ Найдите объем тетраэдра, если одно из его ребер равно $2\sqrt{3}$, а каждое из остальных пяти ребер равно 4.

Решение. Пусть $PABC$ — тетраэдр, у которого $AB = BC = AC = BP = CP = 4$, $AP = 2\sqrt{3}$, точка K — середина BC (рис. 41). Тогда в правильных треугольниках ABC и BCP имеем $AK = PK = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, значит, $\triangle APK$ — правильный и $BC \perp (APK)$, высота OP тетраэдра расположена в (APK) и ее основание O есть середина отрезка AK, т. е. $OP = \frac{AK\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3$.

Таким образом, имеем: $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OP = \frac{1}{3}\cdot\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 3 = 4\sqrt{3}$.

Замечание. Сначала строится треугольник ABC, после чего на перпендикуляре к плоскости ABC, проведенном через середину медианы AK треугольника ABC, выбирается вершина P тетраэдра.

2.293. ☺ Две грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники, плоскости которых перпендикулярны. Найдите объем пирамиды, если длина ее наибольшего ребра равна 1.

Решение. Пусть треугольники ABP и ABC — правильные со стороной a и $PH \perp (ABC)$, где точка H — середина AB (рис. 42).

Так как $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BH = \frac{a}{2}$ и $\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a}{2}$, то наибольшим ребром тетраэдра $PABC$ является ребро PC, т. е. именно $PC = 1$.

Тогда в равнобедренном прямоугольном треугольнике CPH катет PH равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому сторона AB правильного треугольника APB равна $\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Значит, $S_{\triangle ABC} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{36}$.

2.303. ☺ В основании пирамиды лежит ромб со стороной 15 см, каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности 3 дм^2.

Указание. Основание высоты пирамиды совпадает с центром ромба, поэтому боковые грани пирамиды проектируются в четыре прямоугольных треугольника, на которые ромб разбивается своими диагоналями. Это означает, что $S_{\text{ромба}} = S_{\text{бок. пов. пир.}} \cdot \cos 45° = 300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 150\sqrt{2}$. Тогда высота ромба равна $\frac{150\sqrt{2}}{15} = 10\sqrt{2}$, высота пирамиды равна $5\sqrt{2}$, а ее объем равен $\frac{1}{3} \cdot 150\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 500(\text{см}^3)$.

2.312. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 15 дм, а большее основание 24 дм. Высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание. Найдите объем пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 300 дм^2.

Решение. Так как высота PO пирамиды $PABCD$ проходит через центр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию $ABCD$, то все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью ее основания равные двугранные углы (обозначим $\varphi = \angle OKP = \angle OMP = \angle OHP$); точка O — основание высоты PO пирамиды — является серединой отрезка HM, соединяющего середи-

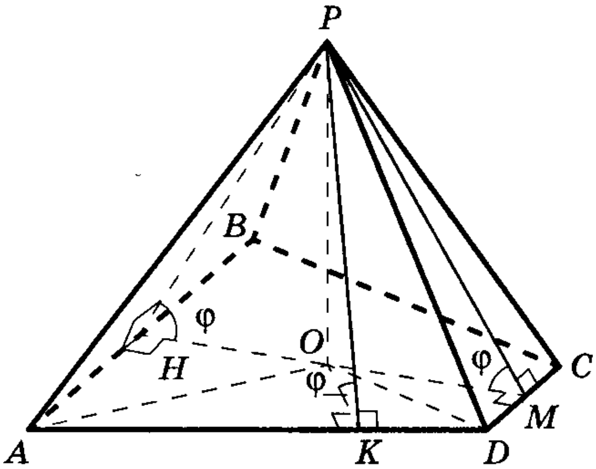


Рис. 43

ны оснований трапеции, при этом точка O является вершиной прямого угла треугольника AOD (рис. 43).

Если H, M и K — точки касания вписанной в трапецию $ABCD$ окружности, то $AK = AH = \frac{1}{2}AB = 12$, значит, $KD = DM = 15 - 12 = 3$, т. е. $CD = 6$.

В прямоугольном треугольнике AOD находим: $OK = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{12 \cdot 3} = 6$. Значит, высота MH трапеции равна $2OK = 12$, а ее площадь равна $\frac{CD + AB}{2} \cdot MH = \frac{6 + 24}{2} \cdot 12 = 180$.

Так как боковые грани пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью ее основания и проектируются в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, составляющие это основание, то $S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cdot \cos \varphi$, т. е. $\cos \varphi = \frac{180}{300} = \frac{3}{5}$, значит, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$.

Так как $OM = OK = 6$, то $OP = OM \cdot \operatorname{tg} \varphi = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$. Тогда объем пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 8 = 480$ (дм^3).

2.328. ♉ В тетраэдре $MABC$ через точки K на ребре MA ($MK : KA = 3 : 4$), T на ребре MB ($MT = TB$) и E на ребре MC ($ME = 0{,}2MC$) проведено сечение KTE. Объем тетраэдра $MKTE$ равен 3 м^3. Найдите объем пятигранника $KTEABC$.

Решение. Обозначим объемы тетраэдров $MABC$, $MKTE$ и пятигранника $KTEABC$ соответственно V, V_1 и V_2. Тогда имеем: $\frac{V}{V_1} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{MK \cdot MT \cdot ME} = \frac{MA \cdot MB \cdot MC}{\frac{3}{7}MA \cdot \frac{1}{2}MB \cdot \frac{1}{5}MC} = \frac{70}{3}$ или $\frac{V}{3} = \frac{70}{3}$, откуда $V = 70$, значит, $V_2 = V - V_1 = 70 - 3 = 67$ (м^3).

2.339. ☺ В треугольной усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ $AB = BC = AC = 6$, $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2$. Вершина A_1 удалена от каждой из вершин основания ABC на расстояние 4. Найдите длины боковых ребер усеченной пирамиды.

Решение. Так как $\triangle ABC$ — правильный и точка A_1 равноудалена от его вершин, то A_1ABC — правильная пирамида, значит, вершина A_1 проектируется в центр O правильного треугольника ABC (рис. 44). Если при этом точка M — середина BC, то $AO = \frac{2}{3}AM = = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $OM = \sqrt{3}$. Тогда в прямоугольном $\triangle A_1AO$ имеем: $A_1O = \sqrt{A_1A^2 - OA^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$.

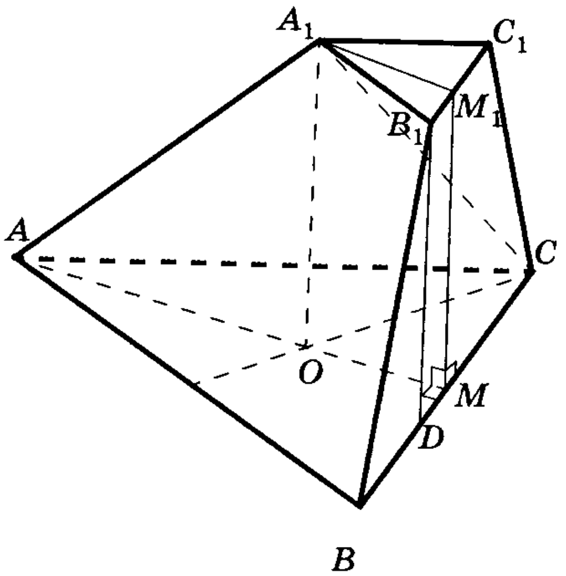


Рис. 44

Если точка M_1 — середина стороны B_1C_1 правильного треугольника $A_1B_1C_1$, то $A_1M_1 = \sqrt{3}$. Это означает, что A_1M_1MO — параллелограмм, а так как $A_1O \perp (ABC)$, то A_1M_1MO — прямоугольник, $M_1M \perp (ABC)$ и $M_1M = 2$.

Так как $B_1C_1 = \frac{1}{3}BC$, то $B_1M_1 = \frac{1}{3}BM$, и если $MD = B_1M_1$, то $BD = 2$. Тогда в прямоугольном $\triangle BB_1D$ находим: $B_1B = = \sqrt{B_1D^2 + BD^2} = 2\sqrt{2}$. А так как BB_1C_1C — равнобедренная трапеция, то $CC_1 = 2\sqrt{2}$.

Таким образом, боковые ребра данной усеченной пирамиды равны 4, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

§ 15. Правильные многогранники

Изложение материала этого параграфа авторы советуют провести в форме лекции-беседы, при этом желательно учащимся иметь модели всех правильных многогранников, особенно модели правильных октаэдра, икосаэдра и додекаэдра (правильный тетраэдр и куб учащиеся 11 класса уже достаточно хорошо изучили).

Дается определение правильного многогранника и обосновывается существование пяти типов правильных многогранников. Приводятся таблицы, в которых указаны некоторые свойства и численные характеристики правильных многогранников: площади их граней и полных поверхностей, объемы каждого из них в зависимости от длины ребра; величины двугранных углов при ребрах каждого из них. Разумеется, все эти таблицы и формулы приведены не для запоминания. Авторам представляется, что может оказаться интересным сам процесс нахождения учащимися различных величин, характеризующих правильные многогранники.

2.350. ♉ Докажите, что сечением куба плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной диагонали куба, является правильный шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если ребро куба равно 6.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, точка M — середина его диагонали A_1C, α — плоскость, проходящая через M перпендикулярно A_1C (рис. 45).

Можно доказать, что $A_1C \perp (BC_1D)$, при этом $ML : LC = 1 : 2$, где $L = A_1C \cap (BC_1D)$.

Так как $\alpha \perp A_1C$ и $(BC_1D) \perp A_1C$, то $\alpha \parallel (BC_1D)$, значит, прямая (обозначим ее m), по которой плоскость α пересекает (ABC), параллельна BD, причем α пересекает AC в такой точке T, что $TO : OC = ML : LC = 1 : 2$. А так как, кроме того, $T \in m$, T — середина OA и $m \| BD$, то точками пересечения плоскости α с ребрами AB и AD куба являются их середины — соответственно точки P и Q.

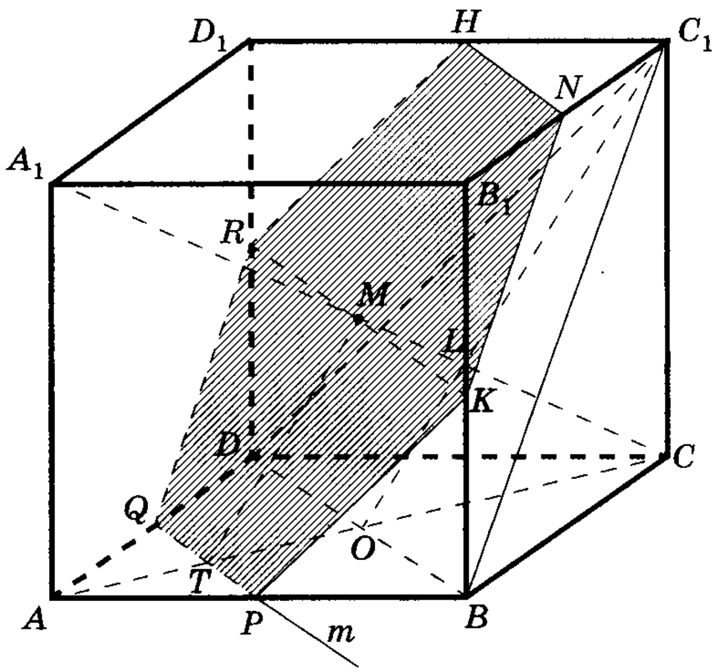


Рис. 45

Дальнейшее построение сечения можно осуществлять, используя, например, параллельность $\alpha \| (BC_1D)$, параллельность противоположных граней куба и теорему о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Действительно, так как $\alpha \| (BC_1D)$, а также грань ABB_1A_1 параллельна грани CDD_1C_1 и точка P — середина AB, то пересечением плоскости α и грани ABB_1A_1 является отрезок $PK \| DC_1$, где K — середина ребра BB_1.

Аналогично пересечением плоскости α и грани ADD_1A_1 является отрезок $QR \| BC_1$, где R — середина ребра DD_1. Остальные две вершины сечения являются серединами ребер C_1D_1 и C_1B_1.

Таким образом, искомым сечением куба является правильный шестиугольник $PQRHNK$, сторона которого равна половине диагонали грани куба, т. е. $PK = 3\sqrt{2}$. Тогда площадь сечения равна $6 \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$.

Задачи после главы 2. Многогранники

2.389. ♉ Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной 25 см и меньшей диагональю 30 см. Диагональное сечение, проходящее через большие диагонали оснований, перпендикулярно основаниям, а меньшая диагональ этого сечения равна 37 см. Найдите объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно 13 см.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед, в котором $AB = 25$, $BD = 30$, $BB_1 = 13$; плоскость сечения ACC_1A_1 перпендикулярна плоскости ABC и $AC_1 = 37$ (рис. 46).

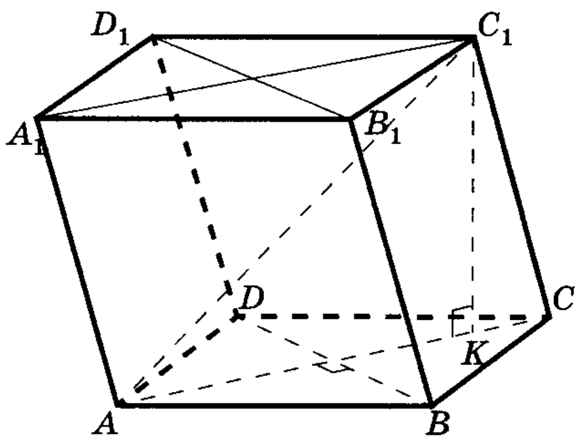


Рис. 46

Находим $S_{осн} = 2S_{\triangle ABD} = 2\sqrt{40 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 10} = 600$.

Так как $(ACC_1) \perp (ABC)$, то высота C_1K параллелепипеда расположена в (ACC_1) и $K \in AC$. В ромбе $ABCD$ находим $AC^2 = 4AB^2 - BD^2 = 4 \cdot 625 - 900 = 1600$, откуда

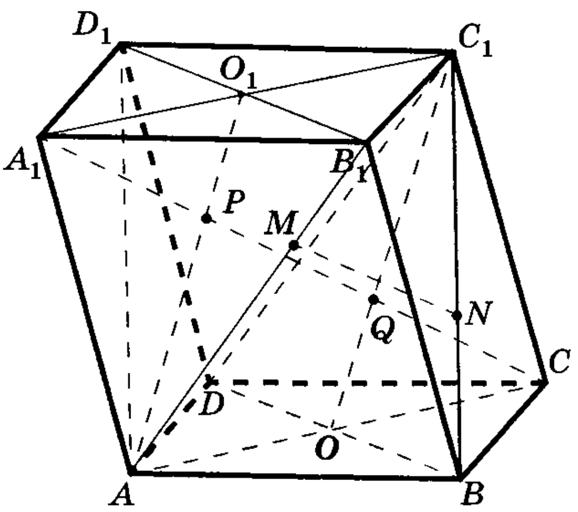


Рис. 47

$AC = 40$. Тогда $S_{\triangle ACC_1} =$ $= \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 32} = 240$, поэтому

$$C_1K = \frac{2S_{\triangle ACC_1}}{AC} = \frac{2 \cdot 240}{40} = 12.$$

Тогда объем параллелепипеда равен $S_{\text{осн}} \cdot C_1K = 600 \cdot 12 =$ $= 7200$ (см^3).

2.393. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

Решение. Так как $BC_1 \parallel AD_1$ и $AB_1 \parallel DC_1$, то $(AB_1D_1) \parallel (BC_1D)$ (рис. 47).

Если $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$, $P = AO_1 \cap$ $\cap A_1C$, $Q = OC_1 \cap A_1C$, то $P = (AB_1D_1) \cap A_1C$, $Q = (BC_1D) \cap$ $\cap A_1C$.

Так как концы M и N отрезка MN лежат в параллельных плоскостях AB_1D_1 и BC_1D, а прямые MN и A_1C параллельны, то отрезки MN и PQ равны и параллельны. Это означает, что $MN : A_1C = PQ : A_1C$.

В диагональном сечении ACC_1A_1 замечаем: $A_1O_1 : O_1C_1 =$ $= A_1P : PQ$, $AO : OC = PQ : QC$, значит, $A_1P : PQ = PQ : QC$, откуда $A_1P = PQ = QC$. Тогда $PQ : A_1C = 1 : 3$, поэтому $MN : A_1C = 1 : 3$.

2.398. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны a и b ($a > b$). Угол между плоскостью основания и плоскостью ABC_1 равен α. Найдите: а) площадь сечения ABC_1D_1; б) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно ее основаниям.

Решение. а) Ортогональной проекцией сечения ABC_1D_1 на плоскость нижнего основания пирамиды является равнобедренная трапеция $ABHK$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AH и BK (рис. 48), высота PE которой проходит через

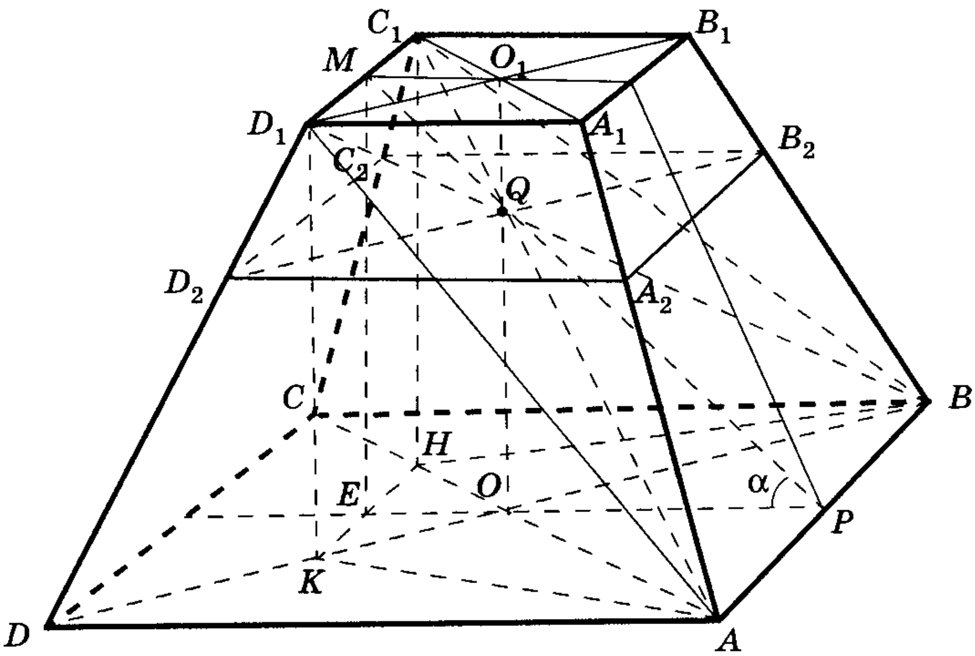


Рис. 48

точку пересечения этих диагоналей и равна $\frac{HK + AB}{2} =$ $= \frac{a+b}{2}$, а площадь трапеции $ABHK$ равна $\frac{(a+b)^2}{4}$. Тогда площадь сечения ABC_1D_1 равна $\frac{(a+b)^2}{4\cos\alpha}$.

б) Пусть $O = AC \cap BD$, $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$, Q — точка пересечения диагоналей AC_1 и BD_1, при этом $O_1Q = h$, $OQ = h_1$; квадрат $A_2B_2C_2D_2$ — сечение пирамиды, проходящее через точку Q параллельно ее основаниям; $A_2B_2 = x$.

Из подобия треугольников O_1QM и OQP следует $O_1M : OP =$ $= O_1Q : OQ$ или $\frac{b}{2} : \frac{a}{2} = h : h_1$, откуда $h = \frac{b}{a}h_1$. Из подобия треугольников D_1D_2Q и D_1DB имеем $D_2Q : DB = O_1Q : O_1O$ или

$$\frac{x\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{2} = h : (h + h_1), \text{ откуда } x = \frac{2ah}{h + h_1} = \frac{2a \cdot \frac{b}{a}h_1}{\frac{b}{a}h_1 + h_1} =$$

$= \frac{2ab}{a+b}$, т. е. $A_2D_2 = \frac{2ab}{a+b}$, значит, площадь сечения $A_2B_2C_2D_2$ равна $\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$.

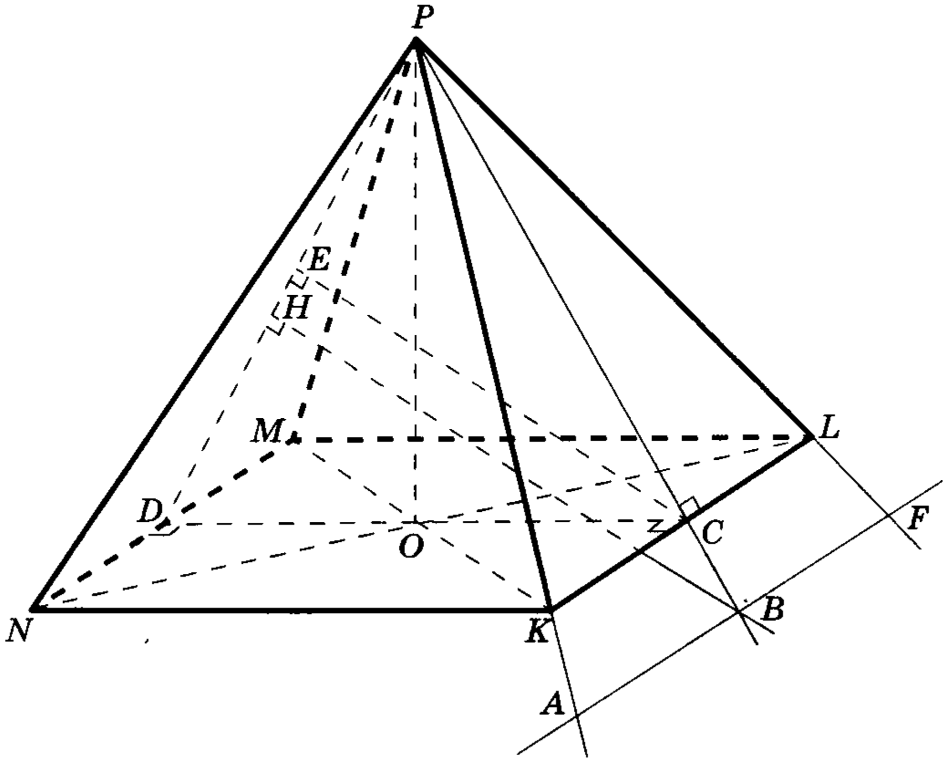


Рис. 49

2.402. ♉ На продолжении ребра PK за точку K правильной четырехугольной пирамиды $PKLMN$ с вершиной P взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости MNP равно 24. Найдите длину отрезка KA, если $PL = 2\sqrt{41}$, $MN = 16$.

Решение. Проведем через точку A в плоскости PKL прямую AF, параллельную KL. Тогда $AF \parallel (MNP)$, и расстояние от точки A до (MNP) равно расстоянию от любой точки прямой AF до (MNP).

Если точки C и D — середины сторон соответственно KL и MN основания пирамиды (рис. 49), то (DCP) перпендикулярна (MNP), а расстояние от A до (MNP) равно расстоянию от точки $B = (DCP) \cap AF$ до прямой DP, т. е. длине перпендикуляра BH, проведенного из точки B к плоскости (MNP). Таким образом, $\rho(A; (MNP)) = \rho(B; (MNP)) = BH = 24$.

В прямоугольном $\triangle PCL$ находим $PC = \sqrt{PL^2 - CL^2} = \sqrt{4 \cdot 41 - 64} = 10$. Тогда $S_{\triangle DPC} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} = 48$, значит,

$$CE = \frac{2S_{\triangle DPC}}{PD} = \frac{2 \cdot 48}{10} = 9{,}6.$$

Из $EC : BH = PC : BP$ находим: $BP = \dfrac{BH \cdot PC}{EC} = \dfrac{24 \cdot 10}{9{,}6} =$
$= 25$.

Учитывая, что треугольники APB и KPC подобны, получаем $AP : KP = BP : CP$, откуда $AP = \dfrac{KP \cdot BP}{CP} = \dfrac{2\sqrt{41} \cdot 25}{10} =$
$= 5\sqrt{41}$. Значит, $AK = AP - KP = 5\sqrt{41} - 2\sqrt{41} = 3\sqrt{41}$.

Глава 3. Фигуры вращения

В данной главе изучаются поверхности вращения и тела вращения. В нашем учебнике поверхность вращения образуется вращением плоской линии вокруг прямой l, лежащей в плоскости данной линии; прямая l называется осью поверхности вращения. Тело вращения образуется при вращении плоской ограниченной замкнутой фигуры вокруг прямой l, также лежащей в плоскости этой фигуры; прямая l называется осью этого тела вращения. Поверхность вращения является границей тела вращения.

Сечение тела (*поверхности*) вращения плоскостью, перпендикулярной оси этого тела (*этой поверхности*), называется перпендикулярным сечением данного тела (*данной поверхности*) вращения.

На конкретных примерах, моделях учащиеся должны убедиться, что перпендикулярным сечением тела (*поверхности*) вращения может быть круг (*окружность*) с центром в точке пересечения секущей плоскости и оси этого тела (*этой поверхности*) или точка, а может быть кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями с центром на оси вращения.

Учащиеся должны знать, что осевым сечением как поверхности вращения, так и тела вращения является фигура, симметричная относительно оси данной поверхности (данного тела).

§ 17.1—17.2. Определение цилиндра вращения и его элементов. Свойства цилиндра

Прямой круговой цилиндр определяется как тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону. Вводятся определения оснований, образующей, высоты, оси прямого кругового цилиндра, его боковой и полной поверхностей.

Следует объяснить учащимся, что наряду с прямым круговым цилиндром существуют эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры. Об этом они могут прочитать в конце учебника в Дополнении «О поверхностях второго порядка».

Учащиеся должны знать, что любое перпендикулярное сечение цилиндра есть круг, а перпендикулярное сечение боковой поверхности цилиндра — окружность; центры этих окружностей и кругов — точки пересечения секущих плоскостей и оси цилиндра.

Если секущая плоскость пересекает ось цилиндра и не перпендикулярна ей, то в сечении может получиться эллипс или его некоторая часть.

Осевым сечением цилиндра вращения является прямоугольник, стороны которого равны диаметру основания и образующей цилиндра. При этом все осевые сечения цилиндра — равные между собой прямоугольники. Любое сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть прямоугольник, высота которого равна образующей цилиндра. Цилиндр, осевое сечение которого — квадрат, называют равносторонним цилиндром.

Чтобы построить изображение цилиндра, достаточно построить: 1) прямоугольник ABB_1A_1 и его ось OO_1; 2) два равных эллипса, центрами которых являются точки O и O_1 и осями — отрезки AB и A_1B_1. Выделив штрихами невидимые линии, получаем искомое изображение цилиндра с образующими AA_1 и BB_1.

Касательная плоскость к цилиндру касается его поверхности (цилиндрической поверхности) по образующей, причем каждая точка образующей цилиндра является точкой касания этой плоскости и данного цилиндра. В частности, точка образующей, принадлежащая окружности основания цилиндра, является точкой касания основания цилиндра и прямой, по которой касательная плоскость пересекает плоскость этого основания.

При изображении правильных призм, вписанных в цилиндр, учащимся следует руководствоваться алгоритмами построений изображений правильных многоугольников, вписанных в окружность. Именно для построения изображения правильной призмы, вписанной в цилиндр, следует: 1) построить изображение цилиндра; 2) построить изображение правильного многоугольника, вписанного в верхнее основание цилиндра; 3) через вершины построенного многоугольника провести образующие цилиндра; 4) в нижнем основании цилиндра последовательно соединить штриховыми линиями концы этих образующих; 5) выделить видимые и невидимые линии (отрезки) изображаемых фигур.

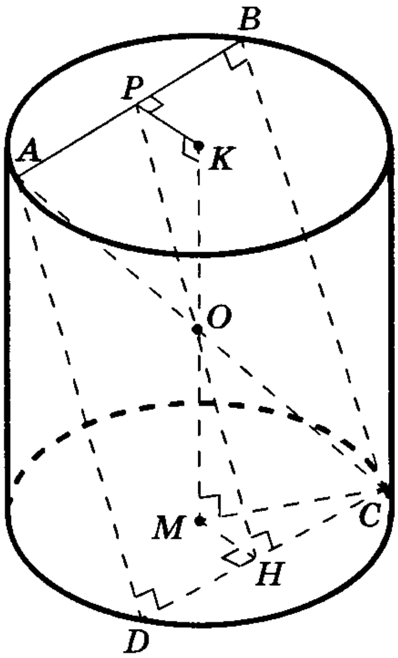


Рис. 50

3.018. Высота цилиндра 2 м, радиус основания 7 м. В этот цилиндр наклонно к оси вписан квадрат так, что все вершины его находятся на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.

Решение. Пусть точки K и M — центры оснований цилиндра (рис. 50). Так как $ABCD$ — квадрат, то отрезки AB и CD, будучи равными и параллельными, равноудалены соответственно от точек K и M, т. е. $KP = MH$ (где P и H — середины соответственно AB и CD) и $KP \| MH$. Это означает, что $\triangle OPK = \triangle OHM$ (где $O = KM \cap PH$), откуда $OK = OM$, $OP = OH$, т. е. точка O — центр данного квадрата.

В прямоугольном $\triangle OMC$ имеем: $OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$. Тогда $AC = 2OC = 10\sqrt{2}$, значит, $AB = 10$.

§ 17.3. Развертка и площадь поверхности цилиндра

Учащимся полезно знать, что цилиндрическая поверхность — развертывающаяся поверхность. Об этом они могут прочитать в конце учебника в Дополнении «О дифференциальной геометрии».

В этом разделе определяются площади боковой и полной поверхностей цилиндра и выводятся формулы их вычисления: $S_{бок} = 2\pi Rh$, $S_{полн} = 2\pi R(R + h)$.

3.028. Отрезки AB и A_1B_1 являются параллельными диаметрами оснований цилиндра с высотой 6. Точка K лежит на дуге AB основания и делит ее в отношении 1 : 2, считая от точки A. Прямая B_1K образует угол в 45° с плоскостью основания цилиндра. Найдите: 1) площадь боковой поверхности цилинд-

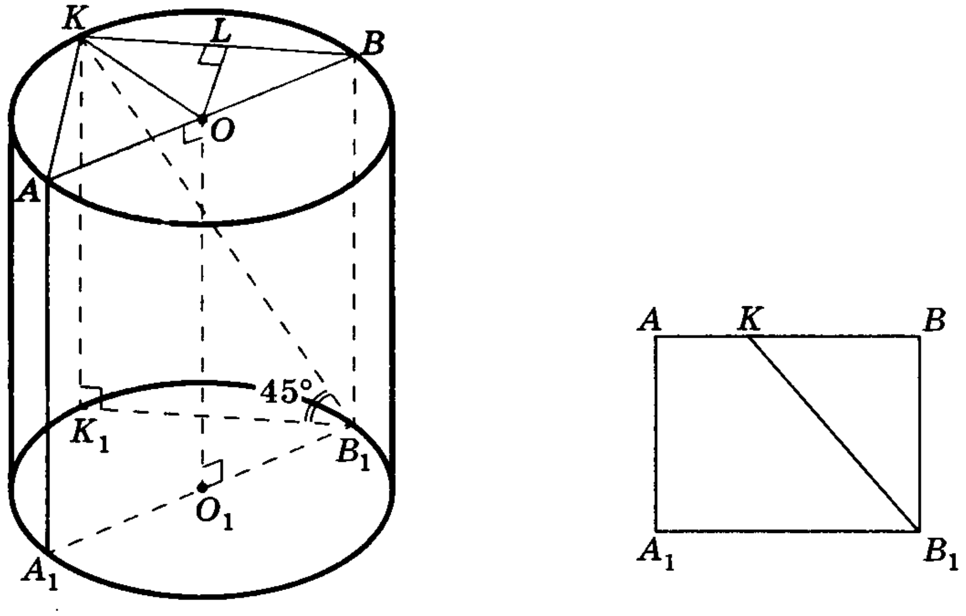


Рис. 51

ра; 2) длину кратчайшего пути из точки K в точку B_1 по поверхности цилиндра; 3) расстояние между прямой B_1K и осью цилиндра.

Решение. а) Пусть KK_1 — образующая цилиндра (рис. 51, *а*), точки O и O_1 — центры его оснований, тогда $KK_1 = OO_1 = 6$, $\angle KB_1K_1 = 45°$. Значит, в равнобедренном прямоугольном $\triangle KB_1B$ имеем: $BB_1 = BK = 6$.

Точка K делит дугу AB в отношении $1 : 2$, считая от точки A, поэтому $\angle KAB = 60°$, значит, в прямоугольном $\triangle AKB$ имеем: $AB = \dfrac{BK}{\sin 60°} = 4\sqrt{3}$. Тогда радиус основания цилиндра равен $2\sqrt{3}$, а площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 24\pi\sqrt{3}$.

б) Развертка половины боковой поверхности цилиндра, ограниченной образующими AA_1 и BB_1, представляет собой прямоугольник (рис. 51, *б*) (развертка уменьшена). Стороны этого прямоугольника равны 6 и $2\pi \cdot \sqrt{3}$, при этом длина отрезка KB равна $(2\pi \cdot 2\sqrt{3}) : 3 = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$, а длина кратчайшего пути от точки K до точки B_1 по поверхности цилиндра равна длине отрезка KB_1 на полученной развертке, т. е. равна

$$\sqrt{KB^2 + B_1B^2} = \sqrt{\frac{16\pi^2}{3} + 36} = \frac{2}{3}\sqrt{12\pi^2 + 81}.$$

в) Если точка L — середина BK (см. рис. 51, a), то длина отрезка OL равна расстоянию от точки O до плоскости KBB_1, которая содержит прямую KB_1 и параллельна прямой OO_1, значит, расстояние между прямыми KB_1 и OO_1 равно $0{,}5OB = 0{,}5 \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

§ 17.5. Объем цилиндра

Формула вычисления объема цилиндра в учебнике выводится на основании принципа Кавальери.

Если цилиндр, имеющий высоту h и радиус основания R, и прямоугольный параллелепипед с высотой h, ребрами основания R и R расположить так, чтобы их основания находились на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно h, то эти цилиндр и параллелепипед «оказываются в условиях принципа Кавальери»: любая плоскость, параллельная данным плоскостям и пересекающая цилиндр, пересекает также прямоугольный параллелепипед, причем площади сечений, образованных при пересечении каждого из этих тел с любой из проведенных плоскостей, относятся как $\pi \cdot R^2 : R^2 = \pi : 1$. Тогда и для объемов этих тел справедливо: $V_{цил} : V_{парал} = \pi : 1$ или $V_{цил} : (R^2 \cdot h) = \pi : 1$, откуда $V_{цил} = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Учащимся полезно знать, что: а) если цилиндр высоты h пересечь плоскостью, параллельной его оси, то он разобьется на два тела. Объем каждого из этих тел может быть вычислен по формуле $V = S_{сегм} \cdot h$, где $S_{сегм}$ — площадь соответствующего сегмента, образовавшегося в основании цилиндра;

б) любая плоскость, проведенная через середину оси цилиндра, разбивает этот цилиндр на два равновеликих тела, объем каждого из которых может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{2}\pi \cdot R^2 \cdot (a + b),$$

где a и b — длины отрезков, на которые образующая цилиндра делится секущей плоскостью.

3.040. Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно a, описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

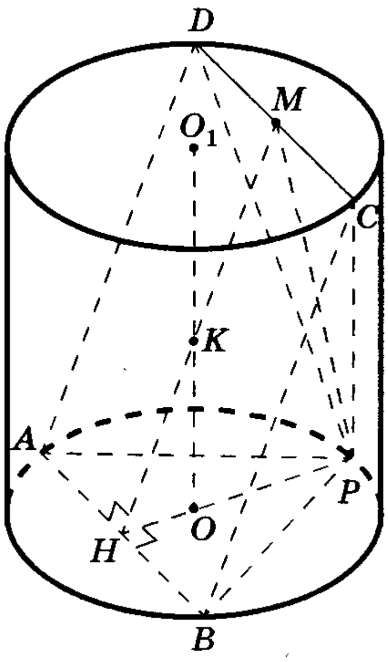


Рис. 52

Решение. Пусть вершина P данной пирамиды $PABCD$ лежит на окружности нижнего основания описанного около этой пирамиды цилиндра, центрами оснований которого служат точки O и O_1 (рис. 52).

Так как каждое ребро пирамиды равно a, то в правильном $\triangle ABP$ находим: $PH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, значит, $OH = \frac{1}{3}PH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $OP = \frac{2}{3}PH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда радиус R основания цилиндра равен OP, т. е. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Если точки H и M — середины противоположных сторон соответственно AB и CD квадрата $ABCD$ (основания данной пирамиды), то $MH = a$, причем середина K отрезка HM является серединой высоты OO_1 цилиндра. А так как плоскость MPH перпендикулярна плоскости основания цилиндра и проходит через центр O его основания, то высота OO_1 цилиндра лежит в этой плоскости, и $OO_1 = 2OK$. Находим OK.

В прямоугольном $\triangle HOK$ имеем $OK = \sqrt{HK^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Поэтому $OO_1 = 2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Тогда площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi \cdot R \cdot OO_1 = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$, а его объем равен $\pi \cdot R^2 \cdot OO_1 = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$.

§ 18.1—18.5. Определение конуса и его элементов. Сечения конуса. Касательная плоскость к конусу. Изображение конуса. Развертка и площадь поверхности конуса

В данном параграфе конус определяется как тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет. Отрезок оси вращения, заключенный внутри конуса, называется осью конуса. Вводятся определения вершины, основания, высоты и образующей конуса, радиуса основания конуса (короче, радиуса конуса).

Как и в случае с цилиндром, можно рассматривать конус в более широком понимании, когда в основании конуса может быть, например, эллипс (эллиптический конус), парабола (параболический конус). Нам предстоит изучать только прямой круговой конус (конус вращения), поэтому слова «прямой круговой» мы будем опускать.

Поверхность, полученная при вращении гипотенузы, называется боковой поверхностью конуса, а ее площадь — площадью боковой поверхности конуса. Объединение боковой поверхности конуса и его основания называется полной поверхностью конуса, а ее площадь называется площадью полной поверхности конуса или, короче, площадью поверхности конуса.

Если вокруг данной прямой вращать пересекающую ее прямую, то при этом вращении образуется поверхность, которую называют круговой конической поверхностью или конической поверхностью вращения. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ задает коническую поверхность вращения с осью вращения Oz. Из этого уравнения следует, что коническая поверхность является поверхностью второго порядка. (Подробнее о конической поверхности можно прочитать в конце нашего учебника, в Дополнениях «О поверхностях второго порядка».)

Учащиеся должны знать, что все осевые сечения конуса — равные равнобедренные треугольники; угол при вершине любого из этих треугольников называют углом при вершине осевого сечения конуса; конус, в осевом сечении которого правильный треугольник, называется равносторонним; если секущая плоскость проходит через вершину конуса и пересекает конус, но не проходит через его ось, то в сечении конуса также получается равнобедренный треугольник; если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, не параллельна плоскости его основания и не пересекает основание, то сечением боковой поверхности конуса такой плоскостью является эллипс.

Учащимся классов с углубленным и профильным изучением математики необходимо также разъяснить, что сечением *конической поверхности* плоскостью может быть либо окружность (секущая плоскость перпендикулярна оси конической поверхности вращения и не проходит через ее вершину), либо эллипс (секущая плоскость не перпендикулярна оси конической поверхности и пересекает все ее образующие), либо парабола (секущая плоскость параллельна только одной образующей конической поверхности), либо гипербола (секущая плоскость параллельна оси конической поверхности), либо пара пересекающихся прямых (секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности). Поэтому невырожденные кривые второго порядка — окружность, эллипс, параболу и гиперболу называют коническими сечениями или коротко — кониками. (Подробнее о конических сечениях можно прочитать в конце нашего учебника, в Дополнениях «О поверхностях второго порядка».)

Как и в случае с цилиндром, через каждую точку боковой поверхности конуса можно провести лишь одну плоскость, касательную к данному конусу в этой точке; касательная плоскость к конусу касается этого конуса по образующей.

Для изображения конуса достаточно построить: 1) эллипс, изображающий окружность основания конуса; 2) центр O этого эллипса; 3) отрезок OP, перпендикулярный плоскости основания и изображающий высоту конуса; 4) касательные прямые PA и PB из точки P к эллипсу (A и B — точки касания; касательные PA и PB проводят с помощью линейки на глаз). При этом необходимо обратить особое внимание учащихся на следующий важный факт: отрезок AB, соединяющий точки касания образующих PA и PB к эллипсу, ни в коем случае не является диаметром эллипса, т. е. отрезок AB не содержит центра O эллипса. Следовательно, $\triangle ABP$ — не осевое сечение конуса. Осевым же сечением конуса является $\triangle ACP$, где отрезок AC проходит через центр O эллипса (при этом образующая PC не является касательной к эллипсу).

Для достижения наглядности изображения невидимую часть эллипса изображают штрихами.

Поверхность конуса состоит из его боковой поверхности и основания. Боковую поверхность конуса, разрезав по одной из образующих, можно развернуть на плоскости. Тогда развертка поверхности конуса состоит из: а) кругового сектора, радиус которого равен образующей l конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса; б) круга, радиус которого равен радиусу R основания конуса. Поэтому за площадь боковой поверхности конуса принимают площадь ее развертки и вычисляют по формуле $S_{бок} = \pi R l$.

Угол сектора развертки боковой поверхности конуса называют углом развертки конуса; численная величина этого угла равна отношению длины окружности основания конуса к его образующей (радиусу сектора развертки): $\alpha = \frac{2\pi R}{l}$.

Следует обязательно доказать следствие о другом способе вычисления боковой поверхности конуса (после теоремы 26). Это следствие будет использоваться при выводе формул вычисления площадей частей поверхности шара.

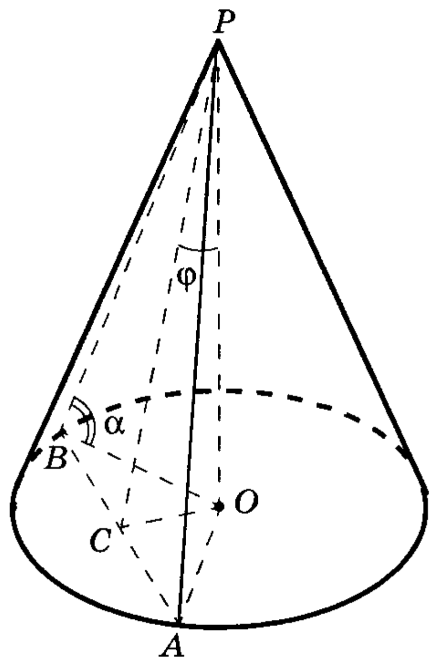


Рис. 53

3.053. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.

Решение. В сечении конуса получается равнобедренный $\triangle PAB$ (рис. 53). Если точка C — середина хорды AB основания конуса, то $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PC$. Найдем длины AB и PC.

В прямоугольном $\triangle POB$ имеем: $BP = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$, $OP = OB \cdot \operatorname{tg}\alpha = R \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Тогда в прямоугольном $\triangle POC$ получаем: $CP = \frac{OP}{\cos\varphi} = \frac{R\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi} = \frac{R\sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\varphi}$. Далее, в прямоугольном $\triangle PBC$ находим: $BC^2 = BP^2 - PC^2 = \frac{R^2}{\cos^2\alpha} -$

$$- \frac{R^2 \cdot \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\varphi} = \frac{R^2(\cos\alpha - \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\varphi} = \frac{R^2\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{R^2 \cos(\varphi+\alpha) \cdot \cos(\varphi-\alpha)}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\varphi},$$ значит, $AB = 2BC =$

$$= \frac{2R\sqrt{\cos(\varphi+\alpha) \cdot \cos(\varphi-\alpha)}}{\cos\alpha \cdot \cos\varphi}.$$ Таким образом, получаем:

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{\cos(\varphi+\alpha)\cdot\cos(\varphi-\alpha)}}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi} \times$$

$$\times \frac{R\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi} = \frac{R^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\varphi+\alpha)\cdot\cos(\varphi-\alpha)}}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\varphi}.$$

§ 18.6—18.10. Свойства параллельных сечений конуса. Вписанные в конус и описанные около конуса пирамиды. Усеченный конус. Поверхность усеченного конуса. Объем конуса и усеченного конуса

При рассмотрении вопроса об изображении пирамид, вписанных в конус и описанных около него, целесообразно повторить вопрос о построении (в параллельной проекции) изображений правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около нее.

Необходимо выработать у учащихся навыки начинать изображение правильной пирамиды, вписанной в данный конус, с изображения основания пирамиды — правильного многоугольника, вписанного в основание этого конуса. Далее соединяют отрезками прямых вершину конуса с вершинами построенного многоугольника и выделяют видимые и невидимые (штрихами) линии изображаемых фигур.

При изучении вопроса о выводе формулы для площади поверхности усеченного конуса нужно доказать следствие (после теоремы 28): боковая поверхность усеченного конуса равна произведению его высоты на длину окружности, радиус которой равен серединному перпендикуляру, проведенному из точки оси конуса к его образующей. Это следствие будет использоваться при выводе формулы вычисления площади сферы.

Формула вычисления объема конуса с высотой h и радиусом основания R выводится в учебнике на основании принципа Кавальери, для чего этот конус и правильную четырехугольную пирамиду, высота которой h и сторона основания R, располагают так, чтобы их основания находились на одной и той же плоскости α, вершины — также в одной и той же плоскости β, параллельной плоскости α и удаленной от нее на расстояние h. Тогда каждая плоскость, параллельная данным плоскостям и пересекающая конус, пересекает также пирамиду, причем отношение площадей сечений обоих тел любой из этих плоскостей постоянно и равно $\pi : 1$.

Действительно, площади сечений, образованных при пересечении обоих тел с любой из проведенных плоскостей, относятся к площадям оснований этих тел как квадраты расстояний секущих плоскостей от вершин. А так как секущие плоскости пирамиды и конуса равноудалены от их вершин, то $\frac{S_{\text{сеч. кон}}}{S_{\text{осн. кон}}} = \frac{S_{\text{сеч. пир}}}{S_{\text{осн. пир}}}$. Тогда $\frac{S_{\text{сеч. кон}}}{S_{\text{сеч. пир}}} = \frac{S_{\text{осн. кон}}}{S_{\text{осн. пир}}} = \frac{\pi R^2}{R^2} = \pi : 1$. Это означает, что для объемов этих тел выполняется: $V_{\text{кон}} : V_{\text{пир}} = \pi : 1$ или $V_{\text{кон}} : \left(\frac{1}{3} R^2 \cdot h\right) = \pi : 1$, откуда $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$.

Формула $V_{\text{ус.кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r \cdot R + r^2)$ вычисления объема усеченного конуса может быть выведена, если усеченные конус и пирамиду расположить в соответствии с условиями принципа Кавальери.

Учащимся полезно доказать, используя принцип Кавальери, что объем каждого из тел, на которые конус разбивается его сечением плоскостью, проходящей через вершину, может быть вычислен по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{сегм}}$, где h — высота конуса, $S_{\text{сегм}}$ — площадь соответствующего сегмента основания конуса.

Следует объяснить учащимся и на конкретных примерах показать, что при решении многих задач, в которых дан правильный многогранник, вписанный в конус, не всегда нужно изображать конус и многогранник, а достаточно изобразить сечение этих фигур плоскостью, проходящей через ось конуса. Причем плоскость осевого сечения конуса бывает удобно провести через диагональ основания многогранника. В таком случае решение данной стереометрической задачи сводится к решению задачи планиметрической.

Подобного рода сечения полезно использовать также при решении различных задач на усеченный конус (см. 3.079), на комбинацию цилиндра и многогранника, конуса и цилиндра (см. 3.098).

3.079. В усеченном конусе проведены диагонали всех осевых сечений. Диагонали каждого осевого сечения взаимно перпендикулярны, равны d и делят друг друга в отношении 1 : 3. Найдите: а) объем усеченного конуса; б) площадь поверхности, образованной всеми диагоналями; в) площадь сечения усеченного конуса плоскостью, параллельной его основаниям и делящей боковую поверхность на две части равной площади.

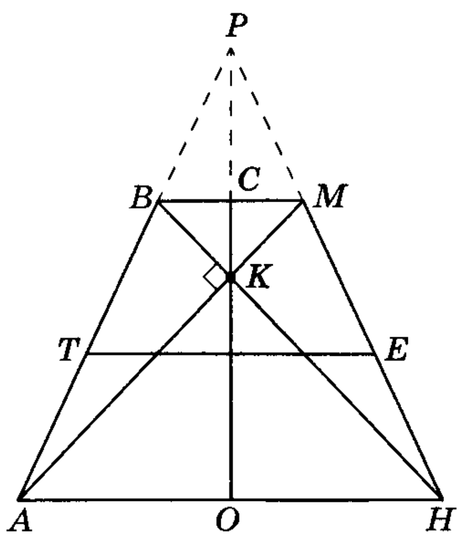


Рис. 54

Решение. Пусть равнобедренная трапеция $ABMH$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AM и BH является осевым сечением данного усеченного конуса, причем $BK : KH = MK : AK = 1 : 3$, где $K = AM \cap BH$ (рис. 54).

а) Если точки O и C — центры соответственно нижнего и верхнего оснований усеченного конуса, причем $KM = \frac{1}{4}d$, $KH = \frac{3}{4}d$, то в равнобедренных прямоугольных треугольниках CKM и OKH имеем соответственно $CK = CM = \frac{KM}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{8}$ и $OK = OH = \frac{KH}{\sqrt{2}} = \frac{3d\sqrt{2}}{8}$.

Таким образом, радиусы R и r нижнего и верхнего оснований данного конуса равны соответственно: $R = \frac{3d\sqrt{2}}{8}$, $r = \frac{d\sqrt{2}}{8}$.

Тогда находим объем $V_{\text{ус.кон.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot OC \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) =$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot (CK + OK)(R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\left(\frac{3d\sqrt{2}}{8}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3d\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{8} + \left(\frac{d\sqrt{2}}{8}\right)^2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{26d^2}{64} = \frac{13\pi d^3\sqrt{2}}{192}.$$

б) Поверхность, образованная всеми диагоналями осевых сечений усеченного конуса, состоит из боковых поверхностей двух конусов, радиусы оснований которых равны $R = \frac{3d\sqrt{2}}{8}$ и $r = \frac{d\sqrt{2}}{8}$, а их образующие имеют длины соответственно $\frac{3}{4}d$ и $\frac{1}{4}d$. Поэтому эта поверхность имеет площадь, равную

$$\pi \cdot \frac{3d\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{3}{4}d + \pi \cdot \frac{d\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{1}{4}d = \frac{5\pi d^2\sqrt{2}}{16}.$$

в) Достроим данный усеченный конус до полного конуса с вершиной P. Пусть x — площадь данного в условии задачи сечения усеченного конуса (на рис. 54 отрезок TE равен диаметру этого сечения).

Если через S_1 и S_2 обозначить площади соответственно верхнего и нижнего оснований данного усеченного конуса, S — площади боковых поверхностей каждого из вновь полученных усеченных конусов, Q — площадь боковой поверхности конуса, дополняющего данный усеченный конус до полного конуса с вершиной P, то из подобия пар конусов с вершиной P имеем: $\frac{S_1}{x} = \frac{Q}{S+Q}$, $\frac{S_2}{x} = \frac{Q+2S}{S+Q}$, откуда $\frac{S_1+S_2}{x} = \frac{Q}{S+Q} + \frac{Q+2S}{S+Q} = 2$, значит, $x = \frac{S_1+S_2}{2} = \frac{\pi(R^2+r^2)}{2} = \frac{\pi\left(\frac{9d^2}{32}+\frac{d^2}{32}\right)}{2} = \frac{5\pi d^2}{32}$. Таким образом, искомая площадь сечения равна $\frac{5\pi d^2}{32}$.

3.091. Треугольник со сторонами 13 см, 37 см и 40 см вращается вокруг прямой, проходящей через вершину большего угла параллельно большей стороне. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения.

Решение. Пусть тупоугольный треугольник ABC, в котором $AB = 13$, $AC = 37$, $BC = 40$, вращается вокруг прямой a, проходящей через вершину A параллельно стороне BC (рис. 55); точки O и O_1 — центры окружностей, которые описывают вершины C и B при этом вращении.

При вращении прямоугольника $OCBO_1$ вокруг прямой a образуется цилиндр, радиус R основания которого равен: $R = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2\sqrt{45\cdot5\cdot8\cdot32}}{40} = 12$, а при вращении прямоугольных треугольников AOC и AO_1B вокруг той же прямой образуются два конуса с образующими $AB = 13$ и $AC = 37$. Радиусы оснований этих конусов равны 12.

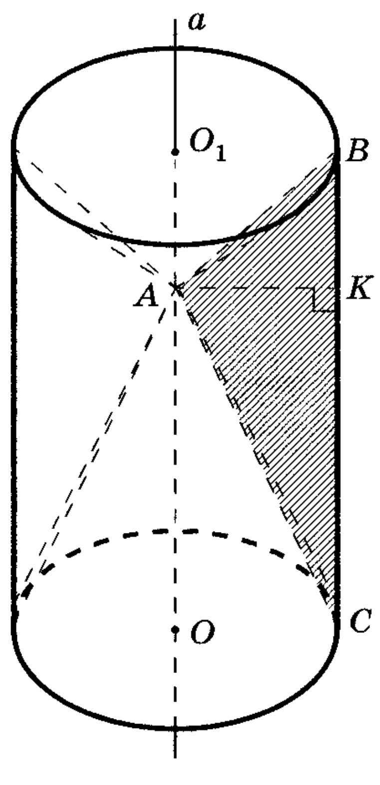


Рис. 55

Таким образом, если из рассмотренного цилиндра удалить оба конуса, то получим тело, образованное вращением треугольника ABC вокруг прямой a. Значит, для нахождения объема этого тела достаточно из объема цилиндра вычесть сумму объемов упомянутых конусов.

Находим:

$$V_{\text{тела вращ}} = V_{\text{цил}} - (V_{1\text{ кон}} + V_{2\text{ кон}}) = \pi \cdot R^2 \cdot BC - \frac{1}{3}(\pi \cdot R^2 \times$$

$$\times AO_1 + \pi \cdot R^2 \cdot AO) = \frac{2}{3}\pi \cdot R^2 \cdot BC = \frac{2}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 40 = 3840\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Поверхность же полученного тела состоит из боковых поверхностей упомянутых цилиндра и конусов. Значит, площадь поверхности этого тела равна: $S_{\text{бок. цил}} + S_{\text{бок. 1 кон}} + S_{\text{бок. 2 кон}} = 2\pi \cdot R \cdot BC + \pi \cdot R \cdot AB + \pi \cdot R \cdot AC = \pi \cdot R(2BC + AB + AC) = 12\pi(80 + 13 + 37) = 1560\,\pi$ (см^2).

3.098. Цилиндр радиуса 20 см и конус радиуса 24 см имеют равновеликие боковые поверхности, равные высоты и расположены так, что высота цилиндра, проходящая по его оси, совпадает с высотой конуса. Найдите объем и площадь боковой поверхности усеченного конуса, который отсекается от конуса плоскостью, проходящей через линию пересечения боковых поверхностей цилиндра и конуса.

Решение. На рисунке 56 изображено осевое сечение комбинации цилиндра и конуса, имеющих общую высоту, при этом отрезок CM изображает диаметр верхнего основания усеченного конуса, отсекаемого от данного конуса плоскостью, проходящей через окружность пересечения боковых поверхностей данных цилиндра и конуса.

Обозначим: $h = OP$ — высота цилиндра, $l = BP$ — образующая данного конуса, $x = KM$ — высота полученного усеченного конуса.

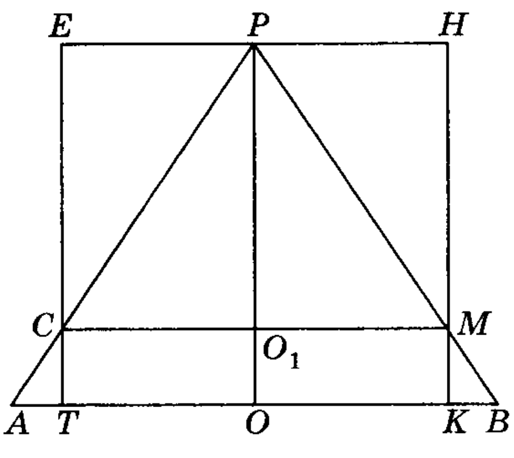


Рис. 56

В прямоугольном $\triangle BOP$ имеем: $l^2 - h^2 = 24^2$.

Так как $S_{\text{бок. цил}} = S_{\text{бок. кон}}$, то $40\pi h = 24\pi l$, поэтому $h = \frac{3}{5}l$. Тогда $l^2 - \frac{9}{25}l^2 = 24^2$, откуда $l = 30$, значит, $h^2 = l^2 - 24^2 = 30^2 - 24^2 = 324 \Rightarrow h = 18$.

Далее, $BK = OB - OK = 24 - 20 = 4$. Теперь из подобия треугольников BOP и BKM имеем: $\frac{OP}{KM} = \frac{OB}{BK}$ или $\frac{18}{x} = \frac{24}{4}$, откуда $x = 3$. Значит, $MB = 5$.

Тогда:

$$V_{\text{усеч. кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot KM \cdot (O_1M^2 + O_1M \cdot OB + OB^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot (20^2 + 20 \cdot 24 + 24^2) = 1456\pi \text{ (см}^3\text{)};$$

$$S_{\text{бок. усеч}} = \pi \cdot (O_1M + OB) \cdot BM = \pi \cdot (20 + 24) \cdot 5 = 220\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

§ 19.1—19.2. Определение шара, сферы и их элементов. Изображение сферы

Материалом о сфере и шаре, о вписанных в них и описанных около них многогранниках, цилиндрах и конусах практически завершается изучение школьного курса элементарной геометрии в 11 классе.

Учащиеся должны знать, что если сечение сферы диаметральной плоскостью изображено в виде эллипса, то концы диаметра сферы, перпендикулярного этой плоскости, находятся не на окружности (абрисе), изображающей сферу, а внутри круга этой окружности, причем положение концов этого диаметра зависит от формы эллипса.

Следует объяснить учащимся, что при решении задач на сферу во многих случаях нет необходимости изображать сферу; удобно пользоваться диаметральным сечением сферы плоскостью, совпадающей с листом бумаги (с плоскостью классной доски). В таком случае решение задачи со сферой и плоскостью, сферой и вписанным в нее (описанным около нее) многогранником, сферой и другой фигурой вращения сводится к решению планиметрической задачи с окружностью и прямой, окружностью и вписанным в нее (описанным около нее) многоугольником, окружностью и равнобедренным треугольником (сечением конуса), окружностью и прямоугольником (сечением цилиндра) или двумя окружностями (сечением двух сфер). Иногда достаточно изобразить лишь центр сферы, вписанной в данный многогранник или описанной около данного многогранника. Учащиеся должны научиться видеть во взаимном расположении сферы и плоскости (двух плоскостей, двугранного угла) аналогию взаимного расположения окружности и прямой (двух параллельных прямых, плоского угла).

3.105. Найдите множество центров всех кругов радиуса r, являющихся сечениями данного шара радиуса R.

Указание. Центр любого круга, являющегося сечением данного шара, принадлежит прямой, проходящей через центр этого шара перпендикулярно плоскости сечения. Значит, центр круга-сечения, имеющего радиус r, удален от центра данного шара на расстояние, равное $\sqrt{R^2 - r^2}$. Тогда множество центров всех таких кругов представляет собой сферу радиуса $\sqrt{R^2 - r^2}$ с центром в центре данного шара.

§ 19.3. Уравнение сферы

Прежде чем приступать к решению задачи координатным методом (методом аналитической геометрии), учащийся должен решить эту задачу конструктивно, геометрически, т. е. должен научиться составлять геометрический алгоритм ее решения.

При решении координатным методом задач на взаимное расположение сферы и прямой, сферы и плоскости можно объяснить учащимся на интуитивной основе наличие аналогии расположения касательной прямой к окружности и касательной плоскости к сфере, именно: плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна радиусу, проведенному в точку их касания (об этом речь пойдет чуть позднее, в т. 30). (Это объяснение опять же можно сделать с помощью диаметрального сечения сферы.) Тогда для составления уравнения касательной плоскости в качестве вектора ее нормали можно принять вектор, определяемый центром сферы и точкой касания (см. 3.126).

Любая прямая, лежащая в касательной плоскости к сфере и проходящая через точку их касания, называется касательной прямой к сфере; радиус сферы, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной прямой. Причем если прямая a касается сферы в точке M, то эта прямая касается в точке M той окружности большого круга, которая является сечением сферы и диаметральной плоскости, проходящей через прямую a.

Справедливо и обратное: если прямая a касается окружности большого круга сферы в точке M, то эта прямая касается в точке M самой сферы.

3.118. Найдите координаты центра и радиус сферы, описанной около тетраэдра, вершины которого имеют координаты (0; 0; 0), (8; 0; 0), (0; –2; 0), (0; 0; –6).

Решение. Центром сферы, описанной около тетраэдра, является точка пересечения плоскостей серединных перпендикуляров трех любых ребер тетраэдра, не лежащих в одной плоскости.

Пусть α, β, γ — плоскости серединных перпендикуляров ребер соответственно AB, BC, AP тетраэдра $PABC$; K, H, M являются серединами соответственно этих ребер, причем $A(0; 0; 0)$, $B(8; 0; 0)$, $C(0; -2; 0)$, $P(0; 0; -6)$.

Находим: $\overrightarrow{AB}(8; 0; 0)$, $\overrightarrow{CB}(8; 2; 0)$ и $\overrightarrow{PA}(0; 0; 6)$ — векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям α, β и γ; $K(4; 0; 0)$, $H(4; -1; 0)$, $M(0; 0; -3)$.

Тогда уравнения плоскостей α, β и γ таковы: $x - 4 = 0$, $4x + y - 15 = 0$, $z + 3 = 0$.

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 4 = 0, \\ 4x + y - 15 = 0, \\ z + 3 = 0, \end{cases}$$

получаем координаты (4; –1; –3) искомого центра S сферы. Тогда радиус $R = SA$ этой сферы равен $\sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}$.

3.123. Напишите уравнение плоскости, в которой лежат все общие точки сфер $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 5)^2 = 9$ и $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 + (z + 5)^2 = 16$.

Решение. Так как расстояние между центрами $A(1; -2; -5)$ и $B(4; -6; -5)$ сфер равно $\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5$, т. е. меньше суммы $3 + 4 = 7$ радиусов данных сфер, то эти сферы пересекаются.

Пусть точка C принадлежит пересечению данных сфер. Тогда $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, значит, треугольник ABC — прямоугольный с прямым углом ACB. Высота CK этого треугольника делит его гипотенузу AB на отрезки $AK = \frac{9}{5}$ и $BK = \frac{16}{5}$, значит, $AK : KB = 9 : 16$, и точка K имеет координаты:

$$x = \frac{1 + \frac{9}{16} \cdot 4}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{52}{25}; \ y = \frac{-2 + \frac{9}{16} \cdot (-6)}{1 + \frac{9}{16}} = -\frac{86}{25}, \ z = -5, \text{ т. е.}$$

$K\left(\frac{52}{25}; -\frac{86}{25}; -5\right)$.

Плоскость, в которой лежат все общие точки данных сфер, проходит через точку $K\left(\frac{52}{25}; -\frac{86}{25}; -5\right)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}(3; -4; 0)$, и имеет уравнение $3\left(x - \frac{52}{25}\right) - 4\left(y + \frac{86}{25}\right) = 0$, или $3x - 4y - 20 = 0$.

3.126. Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 0$ в начале координат.

Решение. Исходное уравнение сферы приводится к виду $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$, из которого следует, что точка $A(-1; -1; 2)$ — центр этой сферы.

Так как плоскость касается сферы в начале координат, то она проходит через точку $O(0; 0; 0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OA}(-1; -1; 2)$. Значит, ее уравнение имеет вид $x + y - 2z = 0$.

3.129. Напишите уравнение сферы с центром (1; 1; 2), касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ задает сферу радиуса $R = 2\sqrt{6}$ с центром $O(0; 0; 0)$. Расстояние между центрами этой сферы и касающейся ее сферы равно $\sqrt{6}$. Значит, радиус касающейся сферы может быть равен $2\sqrt{6} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$, или $2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$. Поэтому уравнения этих сфер таковы:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$

или

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 54$.

3.137. Определите взаимное расположение прямой

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \quad t \in \boldsymbol{R} \\ z = 4 + t, \end{cases}$$

и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Решение. Прямая может пересекать сферу в двух различных точках, касаться сферы или не иметь с ней общих точек. В координатном виде сказанное означает: система уравнений, составленная из уравнений прямой и сферы, имеет соответственно два различных решения, одно решение или является несовместимой.

Таким образом решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 1 - 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение вместо x, y и z их выражения через t, получаем уравнение $(1 - 3t)^2 + (2 + 2t)^2 + (4 + t)^2 = 25$, корнями которого являются $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{2}{7}$. Это означает, что прямая пересекает сферу в двух точках $\left(\frac{1}{7}\ ; 2\frac{4}{7}\ ; 4\ \frac{2}{7}\right)$ и $(4;\ 0; 3)$.

Замечание. Так как в задаче требуется определить лишь взаимное расположение прямой и сферы, то эту задачу можно решить иначе. Нужно найти точку пересечения данной прямой и плоскости, проходящей через центр данной сферы перпендикулярно этой прямой. Для составления уравнения этой плоскости можно принять направляющий вектор данной прямой в качестве вектора нормали к плоскости. Далее, решив систему из уравнений плоскости и данной прямой, находят точку их пересечения и расстояние между этой точкой и центром сферы. Сравнение этого расстояния с радиусом данной сферы приводит к нужному ответу.

3.142. Из начала координат проведены всевозможные прямые, касающиеся сферы $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 12)^2 = 144$. Найдите уравнение плоскости, которой принадлежат все точки касания.

Решение. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — точка касания прямой, проходящей через начало координат, и сферы радиуса 12 с центром $A(4;\ 3;\ 12)$. Найдем уравнение, которому удовлетворяют координаты точки M.

Так как касательная к сфере прямая перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то треугольник OAM — прямоугольный с гипотенузой OA. Тогда $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = OA^2 - AM^2 = 169 - 144 = 25$.

Из условия $OM \perp AM$ следует $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, т. е. $x(x-4) + y(y-3) + z(z-12) = 0$. После преобразований, с учетом равенства $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, получаем искомое уравнение плоскости $4x + 3y + 12z - 25 = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки касания прямой OM и сферы.

3.143. Найдите уравнения всех сфер с центром в начале координат, касающихся прямой

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \quad t \in \boldsymbol{R} \\ z = 5, \end{cases}$$

Решение. Радиус сферы, касающейся данной прямой с направляющим вектором $\vec{p}(-2; 1; 0)$, равен расстоянию от центра $O(0; 0; 0)$ сферы до этой прямой. Поэтому находим точку пересечения данной прямой и плоскости $2x - y = 0$, проходящей через центр шара перпендикулярно этой прямой. Координаты $(1; 2; 5)$ этой точки являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 5, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Тогда радиус сферы равен $\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30}$, а сфера, являющаяся единственной, удовлетворяющей условию задачи, имеет уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

§ 19.4—19.5. Пересечение шара и сферы с плоскостью. Плоскость, касательная к сфере и шару

Прежде чем приступать к решению задач, в которых рассматриваются сфера и вписанные в нее многогранники (описанные около нее многогранники), предварительно следует решать задачи на сферу и плоскость, сферу и две (три) плоскости, сферу и двугранный (трехгранный) угол, пересекающиеся сферу и многогранник (куб, призму, пирамиду).

Сфера и плоскость

Перед изучением вопроса о взаимном расположении сферы (шара) и плоскости целесообразно повторить с учащимися вопрос о взаимном расположении окружности и прямой, лежащими в одной плоскости. Следует обратить внимание учащихся на аналогию изучения этих двух тем планиметрии и стереометрии.

Учащиеся должны знать, что:

1) если расстояние d от центра шара (сферы) до данной плоскости меньше радиуса R шара (сферы), то пересечением шара (сферы) с плоскостью является круг (окружность). Центром этого круга (этой окружности) является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара (сферы) на данную плоскость, или сам центр шара (сферы), если плоскость проходит через этот центр. Радиус r сечения равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$;

2) если расстояние от центра шара (сферы) до данной плоскости равно радиусу шара (сферы), то плоскость имеет с шаром (сферой) только одну общую точку;

3) если расстояние от центра шара (сферы) до данной плоскости больше радиуса шара (сферы), то плоскость не имеет с шаром (сферой) общих точек.

Учащимся полезно знать, что для шара (сферы) выполняются следующие метрические соотношения:

— диаметр шара (сферы), делящий его хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;

— отрезки всех касательных прямых, проведенных к шару из одной расположенной вне шара точки, равны между собой (они образуют поверхность конуса с вершиной в данной точке, а точки касания этих прямых — окружность основания этого конуса);

— произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же внутреннюю точку шара, есть величина постоянная (равная $R^2 - a^2$, где R — радиус шара, a — расстояние от центра шара до данной точки);

— если из одной и той же точки вне шара проведены к нему секущая и касательная, то произведение длины отрезка всей секущей на длину отрезка ее внешней части равно квадрату длины отрезка касательной (и равно $a^2 - R^2$, где R — радиус шара, a — расстояние от центра шара до данной точки).

При решении задач на взаимное расположение сферы (шара) и плоскости удобно рассмотреть сечение данных плоскости и сферы (шара) той диаметральной плоскостью сферы (шара), которая перпендикулярна данной плоскости. Тогда в сечении получается окружность (круг) и прямая, поэтому решение данной задачи сводится к решению планиметрической задачи на взаимное расположение окружности (круга) и прямой.

3.154. Шар радиуса 3 касается сторон равностороннего треугольника в точках A, B и C. Определите длину кратчайшего пути по поверхности шара от точки A до точки B, если длина стороны данного треугольника равна 6.

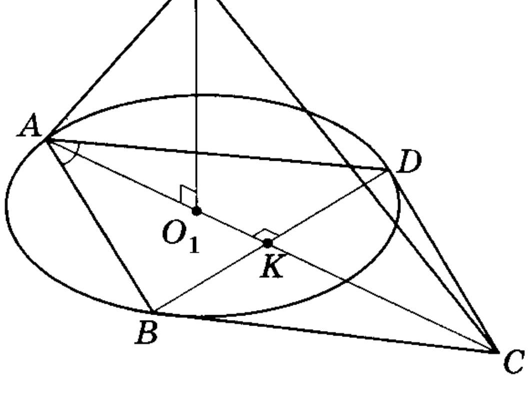
Решение. Кратчайшим путем по поверхности сферы между ее точками A и B является наименьшая из двух дуг с концами A и B той окружности, по которой диаметральная плоскость, проходящая через A и B, пересекает сферу — поверхность данного шара.

Так как данный треугольник является правильным, то окружность, по которой плоскость данного треугольника пересекает сферу, вписана в этот треугольник, при этом отрезок AB равен половине стороны данного треугольника, т. е. $AB = 3$. Тогда треугольник OAB (O — центр шара) является правильным со стороной, равной радиусу сферы, и наименьшая из двух дуг AB большой окружности, по которой плоскость OAB пересекает сферу, содержит 60°. Это означает, что длина наименьшей дуги AB равна $\frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 3 = \pi$.

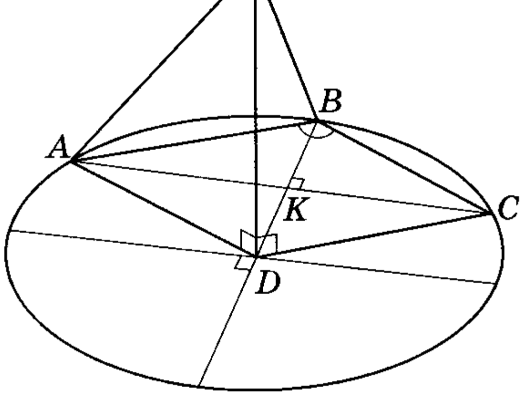
3.163. Сфера проходит через три вершины ромба со стороной 6 и углом 60°. Найдите расстояние от центра сферы до четвертой вершины ромба, если радиус сферы равен 10.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб, в котором $\angle BAD = 60°$, точка O — центр данной сферы. Возможны два случая.

1) Сфера проходит через вершины A, B и D. Тогда сечением этой сферы плоскостью ромба является окружность, описан-



а)



б)

Рис. 57

ная около правильного треугольника ABD, значит, центр O_1 этой окружности совпадает с центроидом треугольника ABD (рис. 57, *а*), поэтому $O_1A = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, $O_1C = 2O_1A = 4\sqrt{3}$.

Учитывая, что $OO_1 \perp (ABD)$, находим:

в прямоугольном $\triangle OAO_1$ $O_1O^2 = OA^2 - O_1A^2 = 100 - 12 = 88$;

в прямоугольном $\triangle OCO_1$ $OC^2 = O_1O^2 + O_1C^2 = 88 + 48 = 136$, откуда $OC = 2\sqrt{34}$ — расстояние от центра сферы до точки C — четвертой вершины ромба $ABCD$.

2) Сфера проходит через вершины A, B и C ромба. Тогда сечением этой сферы плоскостью ромба является окружность, описанная около равнобедренного треугольника ABC ($\angle ABC = 120°$), значит, центр O_1 этой окружности совпадает с вершиной D ромба (рис. 57, *б*); при этом $OD \perp (ABC)$, следовательно, в прямоугольном $\triangle OBD$ находим: $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ — расстояние от центра сферы до точки D — четвертой вершины ромба $ABCD$.

3.165. На поверхности шара диаметром 25 см даны точка A и окружность, все точки которой удалены от точки A (по прямой линии) на 15 см. Найдите радиус этой окружности.

Решение. Пусть ω — данная окружность на сферической поверхности данного шара с центром O. Все отрезки длины 15, соединяющие точку A с точками окружности ω, образуют боковую поверхность конуса с вершиной A и окружностью основания ω. Ось этого конуса проходит через центр O сферы и пересекает ее поверхность в некоторой точке B.

Проходящее через ось конуса диаметральное сечение сферы в комбинации с сечением конуса представляет собой окружность с диаметром AB и вписанный в нее равнобедренный треугольник ACK; хорда CK сферы перпендикулярна ее диаметру AB, делится этим диаметром пополам в точке H и равна диаметру основания конуса, т. е. HC — радиус основания конуса.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90°$) имеем: $AB \cdot AH = AC^2$ или $25 \cdot AH = 225$, откуда $AH = 9$. Теперь в прямоугольном треугольнике AHC ($\angle AHC = 90°$) получаем: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см).

Сфера и две параллельные плоскости

При решении задач на взаимное расположение сферы и двух параллельных плоскостей достаточно рассмотреть сечение данных плоскостей и сферы той диаметральной плоскостью сферы, которая перпендикулярна этим плоскостям. Тогда в сечении получается окружность и две параллельные прямые, поэтому решение данной задачи сводится к решению планиметрической задачи на взаимное расположение окружности и двух параллельных прямых.

3.174. Концы диаметра сферы лежат на двух параллельных плоскостях. Прямая, содержащая этот диаметр, образует с каждой из плоскостей угол $60°$. Найдите радиус сферы и расстояние между плоскостями, если радиус окружности пересечения сферы с одной из них равен 3.

Решение. Пусть концы A и B диаметра AB данной сферы лежат в параллельных плоскостях соответственно α и β.

Если сферу, а также плоскости α и β пересечь плоскостью, проходящей через диаметр AB перпендикулярно этим плоскостям, то в сечении получим окружность, имеющую диаметр AB, а также прямые AK и BC, которые параллельны между собой и образуют углы в $60°$ с диаметром AB (рис. 58). При этом длины отрезков AK и BC равны между собой и равны диаметрам окружностей пересечения плоскостей α и β с данной сферой.

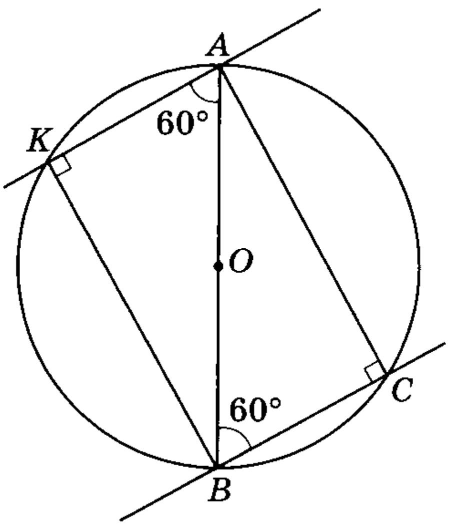


Рис. 58

В прямоугольном треугольнике ABC, в котором $\angle ABC = 60°$ и $BC = 6$, находим: $AB = 12$, откуда радиус сферы равен 6; $AC = AB \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ — расстояние между плоскостями α и β.

3.180. Две параллельные плоскости пересекают диаметр сферы AB в точках C и K, делящих его в отношении $AC : CK : KB = 1 : 2 : 3$. Найдите отношение радиусов сечений (меньшего к большему), если прямая, содержащая данный диаметр, образует с плоскостями угол α.

Решение. Из соотношения $AC : CK : KB = 1 : 2 : 3$ следует, что точка K является центром данной сферы. Пусть диаметр TL сферы перпендикулярен секущим плоскостям.

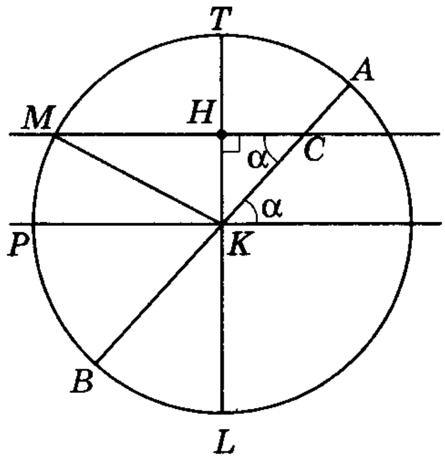


Рис. 59

На рисунке 59 изображено сечение сферы плоскостью, проходящей через диаметры AB и TL, при этом радиусы меньшего и большего сечений сферы равны соответственно HM и $PK = R$, где R — радиус сферы.

Из $CK : KB = 2 : 3$ и $BK = R$ следует, что $CK = \frac{2}{3}R$. Тогда $HK = \frac{2}{3}R \sin\alpha$, $MH = \sqrt{MK^2 - HK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{4}{9}R^2\sin^2\alpha} = \frac{R\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}}{3}$, поэтому $\frac{MH}{PK} = \frac{R\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}}{3R} = \frac{\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}}{3}$.

Сфера и двугранный угол.
Сфера и две плоскости

Сфера называется вписанной в двугранный угол, если она касается его граней. Центр вписанной в двугранный угол сферы лежит на биссекторной плоскости этого двугранного угла. При этом для радиуса r сферы, вписанной в двугранный угол величины α, и расстояния m от центра сферы до ребра двугранного угла справедлива формула $r = m \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Этой формулой часто пользуются при решении задач.

При решении задачи на комбинацию сферы и двугранного угла (сферы и двух пересекающихся плоскостей) достаточно рассмотреть сечение двугранного угла и сферы (двух плоскостей и сферы) той диаметральной плоскостью сферы, которая перпендикулярна ребру двугранного угла (прямой пересечения данных плоскостей). Тогда в сечении получается окружность и плоский угол (окружность и две пересекающиеся прямые), поэтому решение данной задачи сводится к решению планиметрической задачи на комбинацию окружности и плоского угла (окружности и двух пересекающихся прямых).

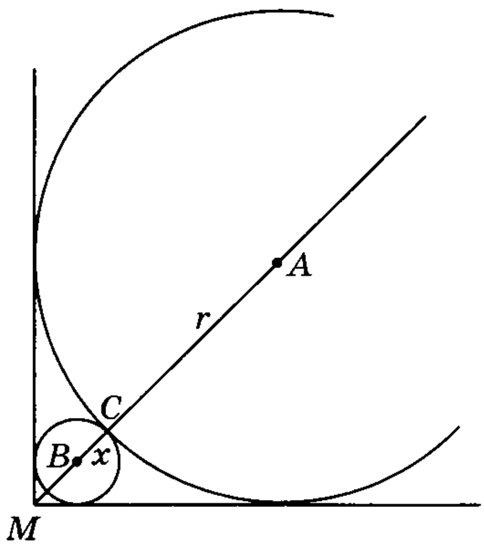


Рис. 60

3.186. Сфера радиуса r касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы.

Решение. Пусть точка A — центр данной сферы радиуса r, касающейся двух взаимно перпендикулярных плоскостей, точка B — центр наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы, C — точка касания этих сфер. Центры A и B принадлежат биссектору данного двугранного угла.

На рисунке 60 изображено сечение рассматриваемых сфер и двугранного угла плоскостью, проходящей через центры A и B перпендикулярно ребру двугранного угла (M — точка пересечения этого ребра и плоскости сечения).

Если x — длина искомого радиуса ($BC = x$), то имеем: $AM = r\sqrt{2}$, $BM = x\sqrt{2}$. Тогда $AM - BM = AC + CB$ или $r\sqrt{2} - x\sqrt{2} = r + x$, откуда $x(\sqrt{2} + 1) = r(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow x =$ $= \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} r = r(3 - 2\sqrt{2})$.

3.195. В шаре радиуса 13 см проведены два взаимно перпендикулярных сечения на расстоянии 4 см и 12 см от центра шара. Найдите длину их общей хорды.

Решение. Пусть точки O, A и B — центры соответственно сферы и данных ее сечений, прямая c — линия пересечения плоскостей сечений, M — точка пересечения прямой c и диаметральной плоскости, перпендикулярной этой прямой. Тогда в прямоугольнике $OAMB$ находим: $OM^2 = OA^2 + OB^2 =$ $= 160$.

Если PK — общая хорда сечений, то M — середина этой хорды, причем $OP = 13$. Значит, в прямоугольном $\triangle OMP$ получаем: $MP = \sqrt{OP^2 - OM^2} = 3$, следовательно, $PK = 2MP = 6$.

3.203. Два правильных треугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины этих треугольников лежат на одной сфере.

Решение. Пусть ABC и PBC — два правильных треугольника, не лежащих в одной плоскости. Центры всех сфер, проходящих через вершины $\triangle ABC$, принадлежат прямой m, которая проходит через центроид этого треугольника перпендикулярно его плоскости, а центры всех сфер, проходящих через вершины $\triangle PBC$, принадлежат прямой n, которая проходит через центроид этого треугольника перпендикулярно его плоскости. При этом прямые m и n пересекаются в некоторой точке M (эти прямые лежат в плоскости серединных перпендикуляров отрезка BC и не параллельны), которая оказывается равноудаленной от всех вершин данных треугольников. Значит, M — центр сферы, проходящей через все вершины этих треугольников.

Сфера и три попарно перпендикулярные плоскости

Сфера называется вписанной в многогранный угол, если она касается всех граней многогранного угла. Если сфера радиуса r вписана в трехгранный угол, все плоские углы которого прямые, то для расстояния m от центра сферы до ребра трехгранного угла справедливо: $m = r\sqrt{2}$, а для расстояния d от центра этой сферы до вершины трехгранного угла выполняется: $d = r\sqrt{3}$.

Эти соотношения часто используют при решении задач, в которых рассматриваются те или иные комбинации сферы с кубом и прямоугольным параллелепипедом.

3.207. Сфера радиуса r касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус сферы, касающейся этих трех плоскостей и данной сферы.

Решение. Пусть A — общая точка трех данных плоскостей, точка B —центр сферы ω радиуса r, O и R — соответственно центр и радиус сферы ω_1, касающейся этих трех плоскостей и сферы ω.

Возможны два случая. 1) Сфера ω_1 расположена между сферой ω и точкой A; 2) сфера ω расположена между сферой ω_1 и точкой A.

Случай 1. Пусть C — точка касания сфер. Тогда: $AO = R\sqrt{3}$, $AB = r\sqrt{3}$, $OC = R$, $BC = r$. Так как $OB = OC + BC = AB - OA$, то $r\sqrt{3} - R\sqrt{3} = r + R$ или $R(\sqrt{3} + 1) = r(\sqrt{3} - 1)$, откуда $R = \dfrac{r(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1} = r(2 - \sqrt{3})$.

Случай 2. Пусть K — точка касания сфер. Тогда: $AO = R\sqrt{3}$, $AB = r\sqrt{3}$, $OK = R$, $BK = r$. Так как $OB = OK + BK = OA - AB$, то $R\sqrt{3} - r\sqrt{3} = r + R$ или $R(\sqrt{3} - 1) = r(\sqrt{3} + 1)$, откуда $R = \dfrac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = r(2 + \sqrt{3})$.

Пересекающиеся сфера и куб

3.216. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер куба с ребром a. Определите расстояние от центра этой сферы до грани, ребра и вершины куба.

Решение. Так как все грани куба — равные квадраты, то вписанные в них окружности, по которым грани куба пересекают сферу, равны; радиусы этих окружностей равны $0{,}5a$. Значит, центр O сферы удален от каждой грани куба на расстояние, равное $0{,}5a$, от каждого из ребер куба — на расстояние, равное $\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, а от каждой из вершин куба — на расстояние, равное $\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

3.217. Шар радиуса R касается всех ребер куба. Найдите радиус шара, касающегося данного шара и плоскостей трех граней куба, имеющих общую вершину.

Решение. Пусть точка O — центр куба, совпадающий с центром данного шара радиуса R, точка B — центр шара радиуса r, касающегося данного шара в точке C и плоскостей трех граней куба, имеющих общую вершину A ($B \in OA$).

Так как радиус R шара равен расстоянию от O до ребра a куба, то из $\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = R$ (см. 3.216) получаем $a = R\sqrt{2}$. Тогда расстояние от O до грани куба равно $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, а диагональ грани равна $2R$, значит, $OA = \sqrt{\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 + R^2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$.

Учитывая, что $BA = r\sqrt{3}$, $BC = r$ и $OA = OC + CB + BA$, имеем: $\frac{R\sqrt{6}}{2} = R + r + r\sqrt{3}$, откуда $r = \frac{R(\sqrt{6}-2)}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{R(3\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2)}{4}$.

3.218. Шар радиуса R проходит через все вершины грани куба и касается его противоположной грани. Найдите ребро куба.

Решение. Пусть ребро куба равно a, шар касается нижнего основания куба в точке P и проходит через все вершины верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$; O — точка пересечения диаметра PM с этой гранью. Тогда в прямоугольном треугольнике PC_1M имеем: $PM = 2R$, $OP = a$, $OC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, и из соотношения $OC_1^2 = OP \cdot OM$ получаем $\frac{a^2}{2} = a(2R - a)$, откуда $a = \frac{4}{3}R$.

Пересекающиеся сфера и призма

3.222. Сфера касается всех ребер правильной 100-угольной призмы. Найдите длины ребер призмы, если сумма длин всех ребер призмы равна 300.

Решение. Так как боковые грани призмы — квадраты (в прямоугольник нельзя вписать окружность), то все 300 ребер призмы равны между собой, поэтому длина каждого из них равна 1.

Пересекающиеся сфера и правильный тетраэдр

3.224. Высота DH правильного тетраэдра $ABCD$ является диаметром сферы. Найдите длину линии пересечения сферы поверхностью тетраэдра, если высота тетраэдра 6.

Решение. Так как высота DH правильного тетраэдра $ABCD$ является диаметром сферы (H — центроид правильного $\triangle ABC$), то сфера касается грани ABC в точке H.

Высота DH правильного тетраэдра $ABCD$ принадлежит биссекторным плоскостям двугранных углов при боковых ребрах этого тетраэдра, следовательно, центр O данной сферы равноудален от всех трех его боковых граней. Это означает, что в пересечении сферы с плоскостями этих граней получаются равные окружности, при этом точка D является общей для всех трех окружностей, а окружности каждых двух соседних боковых граней пересекаются на общем ребре этих граней.

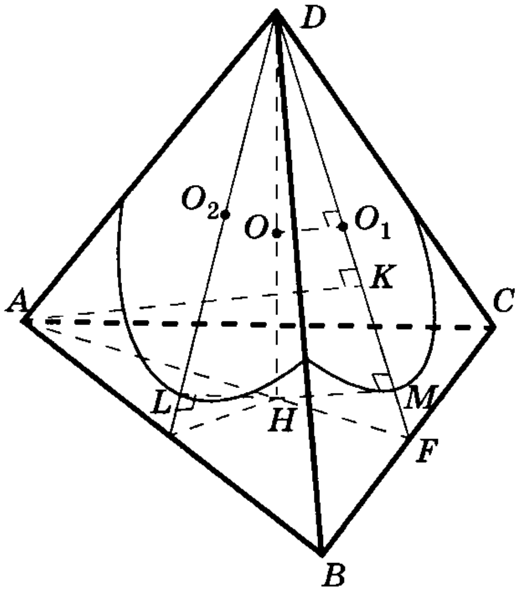


Рис. 61

Найдем длину линии пересечения грани DBC (треугольника DBC) со сферой.

Если F — середина BC (рис. 61) и $\angle HDF = \alpha$, то $\sin\alpha = \frac{HF}{FD} = \frac{\frac{1}{3}AF}{FD} = \frac{\frac{1}{3}FD}{FD} = \frac{1}{3}$. Так как $(AFD) \perp (BCD)$, то центр O_1 окружности пересечения сферы и грани DBC принадлежит медиане DF, при этом $OO_1 \perp (BCD)$, значит, $OO_1 \perp DF$. (Если точка K — центроид грани DBC, то $AK \perp (BCD)$, $K \in DF$ и $OO_1 \| AK$.) Тогда в прямоугольном треугольнике OO_1D находим: $O_1D = OD \cdot \cos\alpha = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ — длина радиуса окружности пересечения плоскости грани DBC и сферы.

Так как $\angle BDC = 60°$, то пересечением грани DBC и сферы является третья часть окружности радиуса $2\sqrt{2}$, т. е. дуга этой окружности, имеющая длину $\frac{2\pi \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$. Тогда линия пересечения сферы и боковой поверхности тетраэдра представляет собой объединение трех таких дуг и имеет длину, равную $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \cdot 3 = 4\sqrt{2} \cdot \pi$.

Пересекающиеся сфера и пирамида

3.232. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равна 6, а боковое ребро — 5. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины M, A и B, если центр сферы лежит на плоскости MCD.

Решение. Пересечением сферы и плоскости грани MAB является окружность, описанная около равнобедренного $\triangle MAB$; центр K окружности лежит на медиане MP этого треугольника (рис. 62). Если $\angle AMB = \varphi$ и r — радиус этой окружности, то $r = \frac{AB}{2\sin\varphi}$. Найдем $\sin\varphi$.

В прямоугольном $\triangle BMP$ имеем: $MP = \sqrt{MB^2 - PB^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Используя формулы площади треугольника, получаем $\sin\varphi = \dfrac{AB \cdot MP}{AM \cdot BM} = \dfrac{6 \cdot 4}{25} = \dfrac{24}{25}$. Тогда $r = 6 : \dfrac{2 \cdot 24}{25} = \dfrac{25}{8}$.

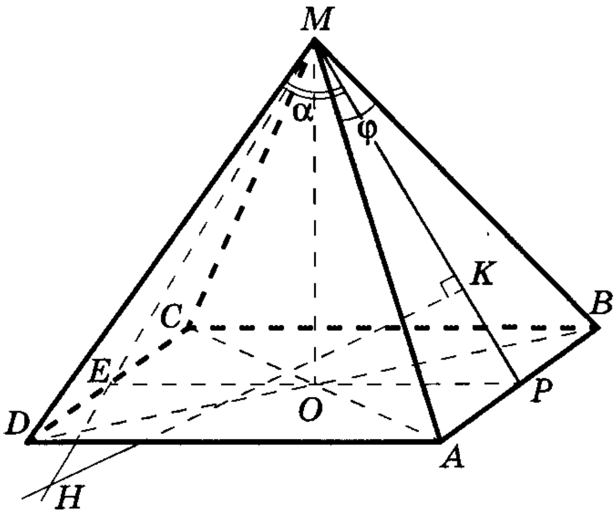


Рис. 62

Так как $(MPE) \perp (ABM)$, то прямая, проходящая через центр H сферы и центр K окружности пересечения этой сферы плоскостью ABM, лежит в (MPE), причем $H \in ME$, $HK \perp MP$ и $HM = R$, где R — радиус сферы. Найдем R.

В прямоугольном $\triangle MPO$ имеем: $OM = \sqrt{MP^2 - OP^2} = \sqrt{7}$. Если $\angle PME = \alpha$, то в $\triangle MPE$ находим: $\sin\alpha = \dfrac{PE \cdot OM}{PM^2} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{7}}{16} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$, тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{8}$. Теперь в прямоугольном $\triangle MKH$ получаем: $HM = \dfrac{MK}{\cos\alpha} = \dfrac{25}{8} : \dfrac{1}{8} = 25$.

Таким образом, $R = 25$.

§ 19.6. Вписанные и описанные шары и сферы

Перед изучением вопроса о сфере (шаре), вписанной (вписанном) в многогранник и описанной (описанном) около многогранника, следует повторить вопрос об окружности (круге), вписанной (вписанном) в многоугольник и описанной (описанном) около многоугольника.

Учащиеся должны знать, что для того, чтобы около многогранника можно было описать сферу (шар), необходимо, чтобы около любой его грани можно было описать окружность (круг). При этом центр описанной сферы (описанного шара) может лежать как внутри многогранника, так и вне его или на его поверхности (возможно, на ребре многогранника), и проектируется в центр описанной около любой грани окружности (описанного круга). Кроме того, перпендикуляр, опущенный из центра описанной около многогранника сферы (описанного шара) на ребро многогранника, делит это ребро как хорду сферы (шара), пополам.

Иначе говоря, не около любого многогранника можно описать сферу. Например, около любой правильной пирамиды или любого тетраэдра сферу описать можно, но около 4-угольной пирамиды, в основании которой лежит ромб, не являющийся квадратом, сферу описать нельзя (около ромба нельзя описать окружность). Более того, нельзя описать сферу около любой наклонной призмы. Но около любой пирамиды, все ребра которой одинаково наклонены к основанию, всегда можно описать сферу; ее центр лежит на луче, содержащем высоту пирамиды. Аналогичная картина наблюдается относительно шара, описанного около многогранника.

Учащимся полезно знать, что высота h пирамиды, радиус R сферы, описанной около этой пирамиды, и радиус $R_{окр}$ окружности, описанной около основания пирамиды, связаны соотношением: $(R - h)^2 + R_{окр}^2 = R^2$.

Шар и сфера, описанные около куба и вписанные в него

При решении задач на шар и сферу, описанные около куба и вписанные в него, удобно использовать уже известные факты: если сфера радиуса r вписана в трехгранный угол, все плоские углы которого прямые, то для расстояния m от центра сферы до ребра трехгранного угла справедливо: $m = r\sqrt{2}$, а для расстояния d от центра этой сферы до вершины трехгранного угла выполняется: $d = r\sqrt{3}$.

3.242. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a помещены два касающихся друг друга шара. Один из них касается трех граней куба, имеющих общую вершину A, а другой — трех граней куба, имеющих общую вершину C_1. Найдите радиусы шаров, если они относятся как 2 : 3.

Решение. Пусть K — центр первого (меньшего) шара, M — центр второго шара, H — точка их взаимного касания. Если радиус меньшего шара равен R, то радиус большего шара равен $1,5R$. Тогда $AK = R\sqrt{3}$, $KH = R$, $HM = 1,5R$, $MC_1 = 1,5R\sqrt{3}$. Так как $AK + KH + HM + MC_1 = AC_1$, то $R\sqrt{3} + R + 1,5R + 1,5R\sqrt{3} = a\sqrt{3}$ или $2,5R(\sqrt{3} + 1) = a\sqrt{3}$, откуда

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2{,}5(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{5} = \dfrac{a(3-\sqrt{3})}{5}$, значит, радиус большего шара равен $\dfrac{3a(3-\sqrt{3})}{10}$.

3.249. В полушар вписан куб так, что четыре вершины его нижнего основания лежат на основании полушара, а другие четыре вершины — на сферической поверхности. Найдите объем куба, если радиус основания полушара равен $\sqrt{6}$.

Решение. Пусть в полушар с центром O вписан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Сечением комбинации шара и куба диагональной плоскостью ACC_1 является полукруг радиуса $OC_1 = \sqrt{6}$ и вписанный в него прямоугольник с основанием $AC = a\sqrt{2}$ и высотой $CC_1 = a$. Тогда в прямоугольном треугольнике OCC_1 получаем: $OC_1^2 = OC^2 + CC_1^2$ или $(\sqrt{6})^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2$, откуда $a = 2$, значит, объем куба равен 8.

Сфера, описанная около призмы и вписанная в нее

Решая задачи на сферу, описанную около призмы и вписанную в призму, учащиеся должны знать, что: нельзя описать сферу около любой наклонной призмы; центр сферы, описанной около прямой призмы, принадлежит отрезку с концами в центрах окружностей, описанных около ее оснований; центром сферы, вписанной в призму, служит середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в ее основания, а диаметр этой сферы равен боковому ребру призмы. Кроме того, для нахождения радиуса сферы, вписанной в призму, удобно использовать тот факт, что радиус этой сферы равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы.

3.255. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, у которой $AB = CD$ и острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанного в призму шара, если сумма всех ребер призмы равна 40.

Решение. Высота призмы равна диаметру шара, который равен диаметру MK окружности, вписанной в трапецию $ABCD$ (рис. 63). Найдем длину отрезка MK.

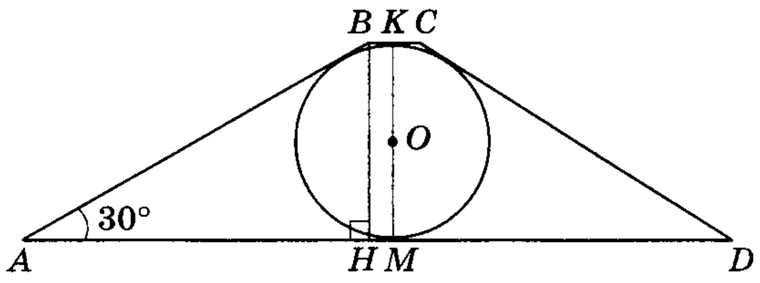


Рис. 63

Пусть $AB = a$, тогда $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MK = BH = \frac{a}{2}$, где $BH \perp AD$. Если при этом $BC = x$, то из условия $2AB = 2(BC + AH)$ (окружность вписана в трапецию) или $a = x + \frac{a\sqrt{3}}{2}$ находим $x = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$. Тогда $BC = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$, $AD = 2AH + BC = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a(2-\sqrt{3})}{2} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$.

Боковое ребро призмы равно диаметру сферы, который равен MK, поэтому сумма длин всех ребер призмы равна $4AB + 2BC + 2AD + 4MK = 4a + 2 \cdot \frac{a(2-\sqrt{3})}{2} + 2 \cdot \frac{a(2+\sqrt{3})}{2} + 4 \cdot \frac{a}{2} = 10a$. По условию $10a = 40$, откуда $a = 4$, значит, $MK = \frac{a}{2} = 2$, а радиус сферы равен $\frac{MK}{2} = 1$.

3.258. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$ со стороной a; точка M — середина ребра A_1D_1; O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$; $MO = h$ — высота призмы. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, C, D, A_1, D_1.

Решение. Пусть точка K — середина AD (рис. 64), тогда по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AD$, значит, грань ADD_1A_1 — прямоугольник.

Так как $ABCD$ — квадрат, то центр P сферы, проходящей через все вершины этого квадрата, лежит на прямой OM, а так как эта сфера проходит еще и через все вершины прямоугольника ADD_1A_1, то центр P принадлежит прямой, проходящей через точку $H = AD_1 \cap DA_1$ перпендикулярно плоскости этого прямоугольника. Из $(OMK) \perp (ADD_1)$ следует: центр P сферы является точкой пересечения серединного перпендикуляра отрезка KM, лежащего в (OMK), и прямой OM. Это означает, что PD — искомый радиус сферы, проходящей через точки A, B, C, D, A_1, D_1. Найдем длину PD.

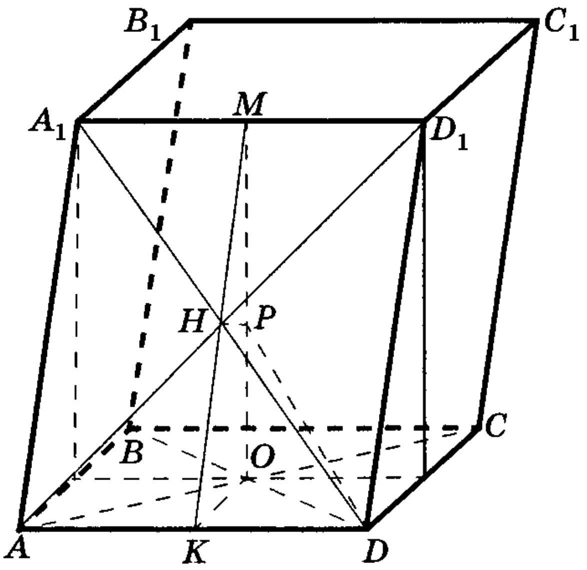


Рис. 64

В прямоугольном $\triangle MOK$: $MK = \sqrt{OK^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{2}$, поэтому $HM = \frac{1}{2}KM = \frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{4}$.

Из подобия прямоугольных треугольников OKM и HPM следует:

$\frac{OM}{HM} = \frac{KM}{PM}$, откуда $PM = \frac{KM \cdot HM}{OM} = \dfrac{\frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{4}}{h} = \frac{a^2+4h^2}{8h}$. Тогда $OP = OM - PM = h - \frac{a^2+4h^2}{8h} = \frac{4h^2-a^2}{8h}$, и в прямоугольном $\triangle POD$ получаем: $PD = \sqrt{OP^2+OD^2} = \sqrt{\left(\frac{4h^2-a^2}{8h}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16h^4+24a^2h^2+a^4}}{8h}$ — искомый радиус сферы.

3.259. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$ со стороной a; точка M — середина ребра A_1D_1; O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$; $MO = h$ — высота призмы. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A, B, C, D и касающейся прямой A_1D_1.

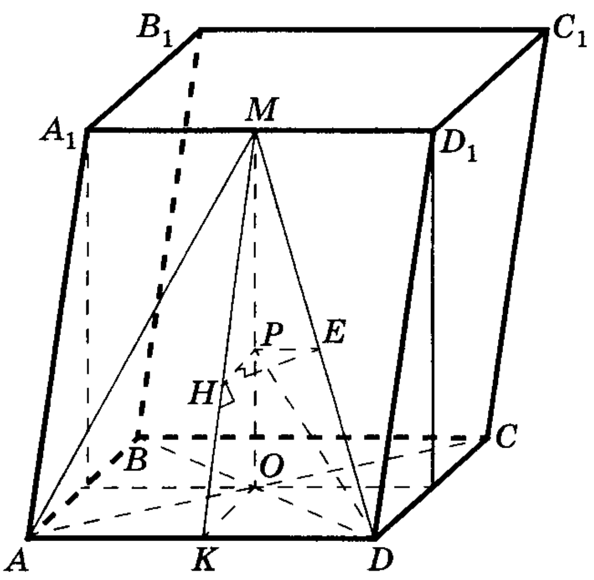


Рис. 65

Решение. Пусть точка K — середина AD (рис. 65), тогда по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AD$, значит, грань ADD_1A_1 — прямоугольник.

Так как $ABCD$ — квадрат, то центр P сферы, проходящей через все вершины этого квадрата, лежит на прямой OM. Кроме того, сфера пересекает грань ADD_1A_1 по окружности, которая проходит через вершины A, D и касается стороны A_1D_1, значит, эта окружность описана около равнобедренного треугольника AMD; центром ее является точка H пересечения MK и серединного перпендикуляра EH отрезка MD. Тогда центр сферы, проходящей через точки A, B, C, D и касающейся прямой A_1D_1, есть точка P пересечения прямой OM и прямой, проходящей через точку H перпендикулярно грани ADD_1A_1 (обе прямые лежат в одной плоскости OMK, перпендикулярной плоскости грани ADD_1A_1, и не параллельны). Это означает, что отрезок PD равен радиусу «нашей» сферы. Найдем длину PD.

В прямоугольном $\triangle MOK$ находим: $MK = \sqrt{OK^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{2}$. Так как ADD_1A_1 — прямоугольник, то $\triangle MDK$ — прямоугольный, в котором $MD = \sqrt{MK^2 + KD^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 + 4h^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2(a^2 + 2h^2)}}{2}$. Тогда $ME = \dfrac{1}{2}MD = \dfrac{\sqrt{2(a^2 + 2h^2)}}{4}$.

Из подобия прямоугольных треугольников KMD и EMH следует: $\dfrac{KM}{EM} = \dfrac{MD}{MH}$, откуда $MH = \dfrac{EM \cdot MD}{KM} =$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2(a^2 + 2h^2)}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{2(a^2 + 2h^2)}}{2}}{\dfrac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{2}} = \frac{a^2 + 2h^2}{2\sqrt{a^2 + 4h^2}}.$$ Далее из подобия

прямоугольных треугольников OKM и HPM получаем: $\frac{OM}{HM} =$

$$= \frac{KM}{PM}, \text{ откуда } PM = \frac{HM \cdot KM}{OM} = \frac{\frac{a^2+2h^2}{2\sqrt{a^2+4h^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{2}}{h} =$$

$$= \frac{a^2+2h^2}{4h}. \text{ Тогда } OP = OM - PM = h - \frac{a^2+2h^2}{4h} = \frac{2h^2-a^2}{4h}.$$

Теперь в прямоугольном треугольнике OPD находим: $PD =$

$$= \sqrt{OP^2+OD^2} = \sqrt{\left(\frac{2h^2-a^2}{4h}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2+2h^2}{4h}\right)^2} =$$

$= \frac{a^2+2h^2}{4h}$ — искомый радиус сферы.

3.281. Прямая призма описана около шара радиуса 4 см. Периметр основания призмы равен 42 см. Найдите объем и площадь поверхности призмы.

Решение. Сечением комбинации данных шара и призмы плоскостью, проходящей через центр шара перпендикулярно боковому ребру, является равный основанию многоугольник и вписанная в него окружность радиуса $R = 4$. Площадь S этого многоугольника равна $\frac{1}{2}P \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 4 = 84$, где P — периметр многоугольника. Так как шар вписан в призму, то ее высота h равна диаметру шара: $h = 8$.Тогда объем призмы равен $S \cdot h = 84 \cdot 8 = 672$ (см^3).

Площадь боковой поверхности призмы равна $42 \cdot 8 = 336$, значит, площадь ее полной поверхности равна $336 + 168 = 504$ (см^2).

3.282. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная призма. Радиус, проведенный к одной из вершин основания призмы, образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите объем призмы.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — вписанная в данный шар с центром K правильная призма. Это означает, что $K \in BD_1$, $BD_1 = 2R$ и в прямоугольном $\triangle BC_1D_1$ ($\angle C_1BD_1 = 30°$) имеем: $C_1D_1 = \frac{1}{2}BD_1 = R$, $BC_1 = BD_1 \cdot \cos 30° = R\sqrt{3}$. Тогда в прямоугольном $\triangle BC_1C$ находим $C_1C = \sqrt{C_1B^2 - BC^2} = R\sqrt{2}$, значит, объем призмы равен $BC^2 \cdot C_1C = R^2 \cdot R\sqrt{2} = R^3\sqrt{2}$.

Шар и правильный тетраэдр (вписанный и описанный)

При решении задач на шар (сферу), описанный около правильного тетраэдра или вписанный в него, учащимся полезно знать, что: если все плоские углы трехгранного угла равны по $60°$, то расстояние от вершины угла до центра вписанного в этот угол шара радиуса r равно $3r$, а расстояние от центра этого шара до ребра тетраэдра равно $r\sqrt{3}$. Эти соотношения часто используют при решении задач, в которых рассматриваются те или иные комбинации шаров (сфер) с правильными тетраэдрами.

Так как, с одной стороны, любая вершина правильного тетраэдра проектируется в центр окружности, описанной около ее противоположной грани, с другой стороны, прямая, проведенная через центр любого сечения сферы перпендикулярно плоскости этого сечения, проходит через центр данной сферы, то центр сферы, описанной около правильного тетраэдра, принадлежит любой его высоте, т. е. все высоты правильного тетраэдра проходят через центр описанной около него сферы.

Аналогично все высоты правильного тетраэдра проходят через центр вписанной в него сферы и делятся этим центром в отношении 3 : 1, считая от вершины тетраэдра.

3.286. В правильный тетраэдр с ребром a вписана сфера. Найдите: а) радиус сферы; б) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра.

Решение. Пусть в правильный тетраэдр $PABC$ вписана сфера с центром K и радиусом R. Если точка O — центр грани ABC, M — середина BC, то $OA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$OP = \sqrt{AP^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Так как все четыре отрезка, соединяющие вершины правильного тетраэдра с центроидами его противоположных граней, равны, перпендикулярны соответствующим граням, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины, то эта точка является центром K сферы, вписанной в данный тетраэдр. Значит, $R = \frac{1}{4}OP = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} =$

$= \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Тогда $KO = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ — расстояние от центра K до грани тетраэдра (плоскость ABC перпендикулярна радиусу OK сферы, проведенному в точку O касания сферы и грани ABC).

Далее, $AK = PK = \frac{3}{4}OP = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ — расстояние от центра K сферы до вершины A тетраэдра.

Расстояние от центра K сферы до ребра AP равно длине медианы KH ($H \in AP$) равнобедренного $\triangle APK$ ($AK = KP$), значит, это расстояние равно $\sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Сфера, описанная около пирамиды и вписанная в нее

Так как, с одной стороны, высота правильной пирамиды проходит через центр окружности, описанной около ее основания, с другой стороны, прямая, проведенная через центр любого сечения сферы перпендикулярно плоскости этого сечения, проходит через центр данной сферы, то центр сферы, описанной около любой правильной пирамиды, принадлежит высоте этой пирамиды.

Центр сферы принадлежит также высоте пирамиды, если все ее боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания (все боковые ребра пирамиды равны между собой); в частности, если в основании такой пирамиды лежит прямоугольный треугольник, то основанием высоты пирамиды служит середина гипотенузы треугольника-основания, и центр сферы принадлежит этой высоте.

При решении задач на комбинацию пирамиды и вписанной в нее сферы радиуса r удобно пользоваться соотношением: $r = m \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, где m — расстояние от центра сферы до ребра многогранного угла, α — величина двугранного угла при этом ребре.

Кроме того, учащимся полезно помнить, что если все плоские углы треугольной пирамиды равны по $60°$, то расстояние от вершины угла до центра вписанной в этот угол сферы радиуса r равно $3r$; если все плоские углы треугольной пирамиды прямые, то расстояние от вершины угла до центра вписанной в этот угол сферы радиуса r равно $r\sqrt{3}$.

Эти соотношения часто используют при решении задач, в которых рассматриваются те или иные комбинации сфер с правильными пирамидами.

Решая задачу на сферу, вписанную в правильную четырехугольную пирамиду, не обязательно изображать эти пирамиду и сферу, а достаточно рассмотреть сечение данной комбинации тел плоскостью осевого сечения пирамиды, в результате решение данной стереометрической задачи сводится к решению задачи планиметрической.

3.302. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит ее высоту в отношении 5 : 3, считая от вершины. Найдите величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

Решение. Пусть точка O — центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$, точка K — середина BC (рис. 66); $(BLD) \perp CP$, т. е. $\angle BLD$ — линейный угол двугранного угла при ребре CP.

Так как $(PHK) \perp (BCP)$ и шар касается грани BCP в некоторой точке M, то радиус OM шара лежит в плоскости PHK, причем $M \in PK$ и $OM \perp PK$. Найдем $\angle BLD = \alpha$.

Пусть $OH = OM = R$ — радиус данного шара, значит, $OP = \frac{5}{3}R$, $PH = \frac{8}{3}R$; тогда в прямоугольном треугольнике OPM находим: $PM = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}R\right)^2 - R^2} = \frac{4}{3}R$.

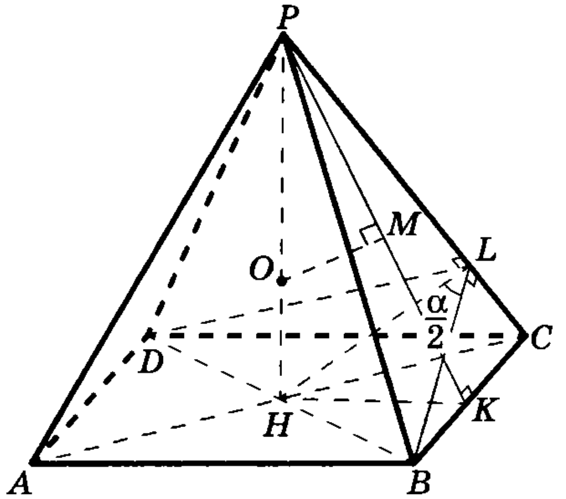


Рис. 66

Из подобия треугольников OPM и KPH следует: $\frac{OP}{KP} = \frac{OM}{KH} = \frac{PM}{PH}$, откуда $KP = \frac{OP \cdot PH}{PM} = \frac{\frac{5}{3}R \cdot \frac{8}{3}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{10}{3}R$.

Тогда в прямоугольном треугольнике PKH получаем: $HK = \sqrt{PK^2 - PH^2} = \sqrt{\frac{100}{9}R^2 - \frac{64}{9}R^2} = 2R$, значит, $AB = 4R$ и $HC = 2R\sqrt{2}$. Поэтому в прямоугольном треугольнике CPK находим: $PC = \sqrt{KP^2 + KC^2} = \frac{100}{9}R^2 + 4R^2 = \frac{2R\sqrt{34}}{3}$.

Далее в прямоугольном треугольнике CPH находим:
$$HL = \frac{PH \cdot CH}{PC} = \frac{\frac{8}{3}R \cdot 2R\sqrt{2}}{\frac{2R\sqrt{34}}{3}} = \frac{8R\sqrt{17}}{17}.$$
В равнобедренном треугольнике BCP имеем $BL \perp PC$, поэтому:
$$BL = \frac{BC \cdot PK}{PC} = \frac{4R \cdot \frac{10}{3}R}{\frac{2R\sqrt{34}}{3}} = \frac{10R\sqrt{34}}{17}.$$
Тогда в прямоугольном треугольнике HBL, где $\angle HLB = \frac{\alpha}{2}$, получаем:
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{BL} = \frac{2R\sqrt{2}}{\frac{10R\sqrt{34}}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{5}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{HL}{BL} = \frac{\frac{8R\sqrt{17}}{17}}{\frac{10R\sqrt{34}}{17}} = \frac{2\sqrt{2}}{5},$$
значит, $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{4\sqrt{34}}{25}$, откуда $\alpha = \arcsin\frac{4\sqrt{34}}{25}$.

3.303. Центр шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, делит ее высоту в отношении $5:3$, считая от вершины. Найдите величину угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

Решение. Пусть точка O — центр шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$, H — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$ (рис. 67).

Так как плоскость APC перпендикулярна плоскости основания пирамиды, то $\angle HCP = \alpha$ — угол наклона бокового ребра PC пирамиды к плоскости ее основания.

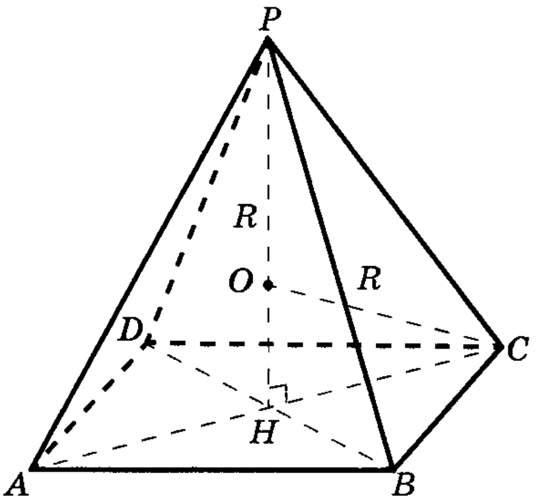


Рис. 67

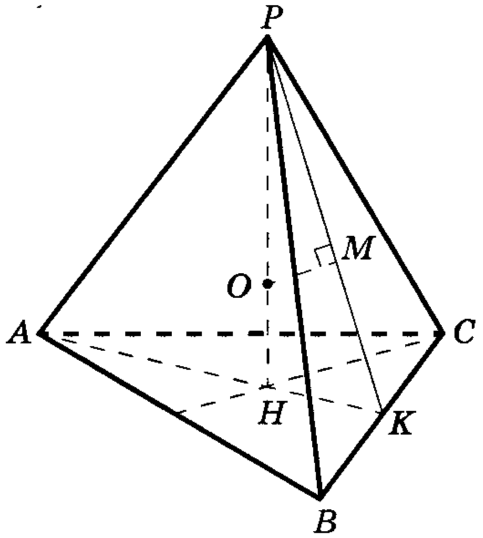


Рис. 68

Если $OP = R$ — радиус данного шара, то $OH = \frac{3}{5}R$ и $PH = \frac{8}{5}R$, причем $OP = OC = R$. Тогда в прямоугольном треугольнике HOC находим: $HC = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{3}{5}R\right)^2} = \frac{4}{5}R$, и в прямоугольном треугольнике HCP получаем $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{PH}{CH} = \frac{\frac{8}{5}R}{\frac{4}{5}R} = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

3.323. Высота правильной пирамиды равна h, а радиус вписанной в ее основание окружности равен r. Найдите радиус вписанной в эту пирамиду сферы.

Решение. Пусть точка O — центр сферы, вписанной в правильную пирамиду $PABC$, H — центроид основания ABC, точка K — середина BC (рис. 68). Тогда $HK = r$.

Так как $(APK) \perp (BCP)$ и сфера касается грани BCP в некоторой точке M, то радиус $R = OM$ сферы лежит в плоскости APK, причем $M \in PK$ и $OM \perp PK$. Кроме того, $OM = OH = R$, $HK = MK = r$, $PH = h$, $OP = h - r$. Найдем OM.

В прямоугольном треугольнике HPK находим: $PK = \sqrt{PH^2 + KH^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Из подобия треугольников OPM и KPH следует: $\frac{OM}{KH} = \frac{PM}{PH}$, откуда $OM = \frac{MP \cdot KH}{PH} = \frac{r(\sqrt{h^2 + r^2} - r)}{h}$.

3.328. Две соседние грани треугольной пирамиды — прямоугольные треугольники с общей гипотенузой c. Найдите радиус описанной около этой пирамиды сферы.

Решение. Пусть $PABC$ — пирамида, грани APC и BPC которой — прямоугольные треугольники с общей гипотенузой PC и прямыми углами CAP и CBP соответственно.

Сфера, описанная около пирамиды $PABC$, пересекает плоскость APC по окружности, описанной около треугольника APC; центром этой окружности является точка K — середина гипотенузы PC. Аналогично пересечением сферы с плоскостью BPC является окружность, для которой отрезок PC также является диаметром. Это означает, что точка K является центром сферы, описанной около пирамиды $PABC$ и имеющей радиус, равный половине гипотенузы CP, т. е. равный $0{,}5c$.

Сфера и цилиндр

Перед решением задач на комбинацию сферы и цилиндра следует повторить планиметрический материал о комбинациях окружности и прямоугольника (квадрата), о комбинациях двух касающихся, пересекающихся и не имеющих общих точек окружностей.

При решении задач на сферу и цилиндр учащимся необходимо знать, что в цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда цилиндр равносторонний, т. е. диаметр сферы, вписанной в цилиндр, всегда равен высоте (образующей) этого цилиндра.

Во многих случаях решение задачи на сферу и цилиндр упрощается, если использовать сечения комбинации сферы и цилиндра диаметральной плоскостью сферы, содержащей ось цилиндра (параллельной этой оси), или диаметральной плоскостью сферы, перпендикулярной оси цилиндра (см. 3.351).

3.351. Одна из образующих цилиндра лежит на диаметре шара, а две других являются хордами этого шара. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, если расстояние между каждой из пар этих образующих равно 6, а радиус шара 10. Определите, находится весь цилиндр внутри шара или нет.

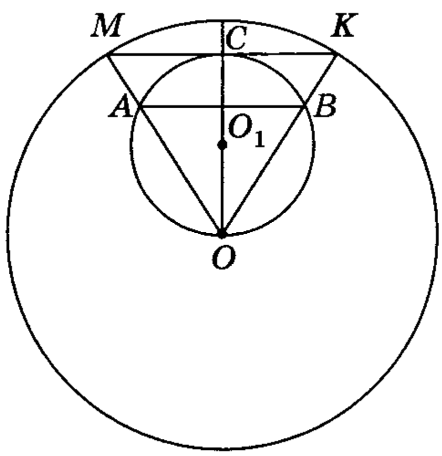


Рис. 69

Решение. На рисунке 69 изображено сечение шара и цилиндра плоскостью, проходящей через центр O сферы перпендикулярно образующим цилиндра (эта плоскость делит все образующие цилиндра пополам), при этом точка O — середина образующей цилиндра, лежащей на диаметре шара, а точки A и B — середины образующих цилиндра, являющихся хордами шара.

Так как расстояние между каждой из пар этих образующих равно 6, а радиус шара равен 10, то равносторонний $\triangle OAB$ со стороной 6 лежит внутри круга — диаметрального сечения шара и является вписанным в круг, равный основанию цилиндра. Это означает, что радиус основания цилиндра равен $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

Пусть точка A — середина образующей PH цилиндра, являющейся хордой шара. Тогда в прямоугольном $\triangle OAP$ ($\triangle OPH$ — равнобедренный) находим: $AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, значит, $PH = 2AP = 16$ — длина образующей цилиндра.

Найдем длину хорды MK шара, которая лежит на одной прямой с той образующей цилиндра, которая удалена от центра шара на расстояние, равное диаметру цилиндра.

Если точка C — середина хорды MK, то длина отрезка OC равна диаметру основания цилиндра, т. е. $OC = 2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, значит, точка C является диаметрально противоположной точке O на окружности пересечения поверхности цилиндра и плоскости AOB.

В прямоугольном треугольнике OCM находим: $CM = \sqrt{OM^2 - OC^2} = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$, поэтому $MK = 4\sqrt{13}$ длина хорды шара, лежащей на одной прямой с образующей цилиндра. Так как $16^2 > 16 \cdot 13$, то $PH > MK$. Это означает, что образующая цилиндра больше той хорды шара, которая лежит на одной прямой с этой образующей, это, в свою очередь, говорит о том, что некоторые две части цилиндра находятся вне шара — они расположены симметрично относительно плоскости AOB.

3.354. В цилиндр помещены четыре попарно касающиеся друг друга сферы радиуса 1 так, что каждая сфера касается цилиндрической поверхности. Две сферы касаются нижнего, а две другие — верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

Указание. Пусть P, A, B, C — центры данных сфер. Тогда треугольная пирамида $PABC$ является правильным тетраэдром с ребром, равным 2.

Если скрещивающиеся ребра AP и BC этого тетраэдра параллельны основаниям цилиндра и шары с центрами A и P касаются верхнего основания, а шары с центрами B и C — нижнего основания, то прямые AP и BC удалены соответственно от верхнего и нижнего оснований на расстояния, равные 1.

Известно, что в правильном тетраэдре с ребром a расстояние между скрещивающимися ребрами равно длине их общего перпендикуляра, т. е. равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. В нашем случае это расстояние равно $\sqrt{2}$. Учитывая, что прямые AP и BC, содержащие центры шаров, удалены соответственно от параллельных им верхнего и нижнего оснований цилиндра на расстояния, равные 1, приходим к выводу: высота цилиндра равна $2 + \sqrt{2}$.

Так как расстояния между центрами шаров радиуса 1, касающихся друг друга и цилиндрической поверхности, равны 2, то диаметр основания цилиндра равен 4, следовательно, его радиус равен 2.

Сфера и конус

Перед решением задач на комбинацию сферы и конуса следует повторить планиметрический материал о комбинациях окружности и равнобедренного треугольника.

Во многих случаях решение задачи упрощается, если использовать сечения комбинации сферы и конуса диаметральной плоскостью сферы, содержащей ось конуса, в результате решение данной стереометрической задачи сводится к решению задачи планиметрической.

3.360. Угол в осевом сечении конуса 120°, а радиус вписанного в конус шара равен 8. Найдите длину линии касания конической и сферической поверхностей.

Решение. Пусть равнобедренный треугольник ABP ($AP = BP$) с высотой PC является осевым сечением данного конуса; точка O — центр шара, вписанного в этот конус; $OM = R$ — радиус конуса ($OM \perp BP$, $M \in BP$).

Если $MK \parallel AB$ ($MK \perp PC$), $H = MK \cap PC$, то линией касания конической и сферической поверхностей является окружность с центром H и радиусом HM. Найдем HM.

В прямоугольном $\triangle OHM$ находим: $HM = \frac{1}{2}OM = 4$ (как катет, лежащий против угла в 30°). Значит, длина окружности касания поверхностей равна $2\pi \cdot 4 = 8\pi$.

3.370. В шар радиуса 5 вписан конус, радиус основания которого равен 3. Найдите образующую конуса.

Решение. Возможны два случая.

1. Центр шара принадлежит конусу. Тогда расстояние от центра шара до основания конуса равно $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. А так как расстояние от центра шара до вершины конуса равно 5, то высота конуса равна $5 + 4 = 9$, значит, образующая конуса равна $\sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$.

2. Центр шара не принадлежит конусу. Тогда расстояние от центра шара до основания конуса вновь равно $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, но высота конуса равна $5 - 4 = 1$, значит, образующая конуса равна $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Две сферы. Три сферы и более

Прежде чем приступить к решению задач на две, три сферы и более, целесообразно решить несколько задач на две, три окружности и более. При этом учащимся полезно знать, что если прямая в точках A и B касается двух внешним образом касающихся окружностей радиусов R_1 и R_2, то длина отрезка AB равна $2\sqrt{R_1 \cdot R_2}$.

При решении задачи, в которой даны две, три и более попарно касающиеся сферы, бывает удобно воспользоваться сечением этих сфер плоскостью, проходящей через их центры (см. 3.398). Тогда данная задача сводится к планиметрической задаче на взаимное расположение двух, трех и более попарно касающихся окружностей.

Иногда бывает удобно привлечь на помощь треугольник или тетраэдр с вершинами в центрах соответственно трех или четырех попарно касающихся данных сфер (см. 3.400, 3.457); стороны треугольника и ребра тетраэдра равны суммам радиусов данных сфер.

3.384. Найдите множество точек сферы радиуса 5, удаленных на расстояние 6 от точки A этой сферы.

Решение. Пусть $BA = 10$ — диаметр данной сферы. Множество всех точек пространства, удаленных от точки A на расстояние, равное 6, есть сфера радиуса 6 с центром A. Искомым множеством точек является окружность ω пересечения данной сферы и сферы радиуса 6 с центром A. Пусть M — одна из точек окружности ω. Тогда радиус R этой окружности равен высоте MK ($K \in AB$) прямоугольного треугольника ABM ($\angle AMB = 90°$) с гипотенузой $AB = 10$ и катетами $AM = 6$, $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = 8$. Находим $R = \dfrac{AM \cdot BM}{AB} = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$. Таким образом, искомым множеством точек является окружность ω радиуса 4,8.

3.386. Вершины A и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 см являются центрами двух сфер, радиусы которых равны длине ребра куба. Найдите длину линии пересечения этих сфер.

Решение. Пусть M — точка пересечения данных сфер, лежащая в плоскости диагонального сечения ACC_1A_1. Тогда высота MK равнобедренного треугольника AMC_1 ($AM = C_1M$) является радиусом окружности пересечения этих сфер. Находим: $MK = \sqrt{AM^2 - AK^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$. Значит, длина окружности пересечения сфер равна 8π.

3.394. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены две касающиеся друг друга внешним образом сферы, радиусы которых относятся как $3 : 5$. Первая сфера касается всех граней куба, содержащих вершину A, вторая — всех граней куба, содержащих вершину C_1. Найдите их радиусы, если ребро куба равно 16.

Решение. Обозначим: K и H — центры сфер, касающихся всех граней куба, содержащих соответственно вершину A и вершину C_1. Если радиус первой сферы равен R, то радиус второй равен $\dfrac{5}{3}R$. Это означает, что $KA = R\sqrt{3}$, $HC_1 = \dfrac{5}{3}R\sqrt{3}$,

$KH = R + \frac{5}{3}R$. Так как ребро куба равно 16, то его диагональ AC_1 равна $16\sqrt{3}$. Но $AK + KH + HC_1 = AC_1$, поэтому получаем: $R\sqrt{3} + R + \frac{5}{3}R + \frac{5}{3}R\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$, откуда $R = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 3(3 - \sqrt{3})$. Тогда радиус второй сферы равен $5(3 - \sqrt{3})$.

3.398. Три равные сферы радиуса 6 касаются друг друга. Найдите радиус сферы, касающейся всех трех этих сфер, если ее центр лежит в плоскости центров трех данных сфер.

Решение. В сечении всех четырех сфер плоскостью, проходящей через их центры, получаем три попарно касающиеся окружности ω_1, ω_2, ω_3 радиуса 6 с центрами соответственно A, B, C и окружность β с центром O, касающаяся каждой из них. Причем точка O совпадает с центроидом правильного треугольника ABC со стороной 12, поэтому $OA = OB = OC = 4\sqrt{3}$.

Возможны два случая.

1. Окружность β касается окружностей ω_1, ω_2, ω_3 внешним образом. Если при этом K — точка внешнего касания окружностей ω_1 и β, то OK — радиус окружности β и $OK = OA - AK = 4\sqrt{3} - 6$.

2. Окружность β касается окружностей ω_1, ω_2, ω_3 внутренним образом. Если при этом M — точка внутреннего касания окружностей ω_1 и β, то OM — радиус окружности β и $OM = OA + AM = 4\sqrt{3} + 6$.

3.400. В вершинах правильного тетраэдра с ребром 6 расположены центры четырех равных сфер, попарно касающихся друг друга. Найдите: а) радиусы этих сфер; б) расстояние от центра одной из них до плоскости центров трех других.

Решение. б) Пусть дан тетраэдр $PABC$, вершины которого являются центрами данных сфер. Найдем расстояние от центра P до плоскости ABC.

Если точка O — центр основания ABC тетраэдра, то $OA = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ и расстояние PO от P до (ABC) равно $\sqrt{AP^2 - OA^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$.

§ 19.7—19.8. Площади поверхностей шара и его частей. Объем шара и его частей

В этом разделе вводятся определения различных частей шара и частей его поверхности: шарового сегмента, сегментной поверхности, их оснований и высоты; шарового слоя, шарового пояса, их оснований и высоты; шарового сектора и его поверхности. Необходимо обратить внимание учащихся на следующий факт: поверхность шарового сектора может состоять (в простейшем случае) из сегментной поверхности и боковой поверхности конуса (в учебнике — рис. 207, б) или из поверхности шарового пояса и боковых поверхностей двух конусов (в учебнике — рис. 207, *г*).

Далее выводятся формулы вычисления площадей различных частей поверхности шара радиуса R: $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$ — для вычисления площади сферы; $S_{\text{сегм. пов}} = 2\pi Rh$ (где h — высота шарового сегмента) — для вычисления площади сегментной поверхности; $S_{\text{шар. п}} = 2\pi Rh$ (где h — высота шарового пояса) — для вычисления площади шарового пояса; $S_{\text{шар.сект}} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2})$ (где h — высота шарового сегмента) — для вычисления площади поверхности шарового сектора. При вычислении площади сферы используются следствия из теорем 25, 26, 28.

В учебнике для вывода формулы вычисления объема шара радиуса R предварительно вычисляется объем фигуры, образованной вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $2R$ вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Эта фигура представляет собой цилиндр с высотой $2R$ и радиусом основания R, из которого «вырезаны» два равных конуса высоты R и радиусом основания R (вершины конусов совпадают с серединой высоты цилиндра, а их основаниями являются нижнее и верхнее основания цилиндра). Объем этой фигуры равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Далее шар радиуса R и образованную выше фигуру вращения расположим между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно $2R$. Шар при этом касается каждой из данных плоскостей, а фигуру вращения расположим так, чтобы ее ось вращения была перпендикулярна этим плоскостям. Если пересекать наши фигуры плоскостями, параллельными данным плоскостям и удаленными от центра шара на расстояние x ($0 \leqslant x \leqslant R$), то площади равноудаленных от центра шара сечений рассматриваемых фигур равны (относятся, как 1 : 1). Поэтому, на основании принципа Кавальери, равны и объемы этих тел, т. е. $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Для получения объема шарового сегмента высоты h используется предыдущая ситуация для таких значений x, что $R - h \leqslant x \leqslant R$ (при $h < R$). Применяя принцип Кавальери, получим: объем шарового сегмента равен разности объема цилиндра высоты h и радиусом основания R и объема усеченного конуса высоты h и радиусами оснований R и $R - h$, т. е. $V_{\text{шар.сегм}} = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)$ или в другом виде: $V_{\text{шар.сегм}} = \pi \cdot h^2 \cdot \left(R - \frac{h}{3}\right)$.

Далее доказывается, что объем шарового сектора, состоящего из шарового сегмента высоты h и конуса высоты $(R - h)$ с вершиной в центре шара радиуса R, вычисляется по формуле $V_{\text{шар.сект}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$. Следует предложить учащимся самостоятельно доказать, что объем каждого из других видов шаровых секторов вычисляется по этой же формуле.

Объем шарового слоя с радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой H вычисляется по формуле

$$V_{\text{шар. сл}} = \frac{\pi H}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2).$$

3.414. В шар вписан прямоугольный параллелепипед. Диагонали двух боковых граней параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 16 см и 21 см, а угол между ними равен 60°. Найдите площадь поверхности шара.

Решение. Пусть параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан в шар с центром O и радиусом R (рис. 70), при этом $B_1A = 16$, $B_1C = 21$, $\angle AB_1C = 60°$.

Так как точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии, а вершины параллелепипеда лежат на сфере (поверхности шара), центром симметрии которой служит ее центр O, то радиус шара равен половине диагонали A_1C параллелепипеда: $2R = A_1C$. Отрезок A_1C — гипотенуза прямоугольного $\triangle AA_1C$, значит, $A_1C^2 = AC^2 + A_1A^2$. Найдем AC^2 и A_1A^2.

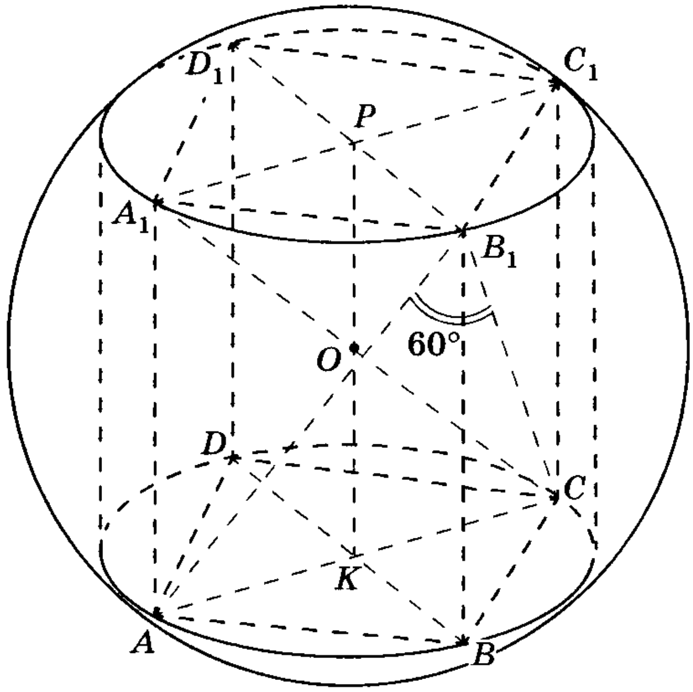


Рис. 70

В $\triangle AB_1C$ (по теореме косинусов): $AC^2 = B_1A^2 + B_1C^2 - 2B_1A \cdot B_1C \cdot \cos 60° = 16^2 + 21^2 - 2 \cdot 16 \cdot 21 \cdot \frac{1}{2} = 361.$

В прямоугольном $\triangle ABC$ имеем: $AC^2 = BA^2 + BC^2$. В прямоугольных треугольниках ABB_1 и CBB_1 имеем соответственно $BA^2 = B_1A^2 - B_1B^2$ и $BC^2 = B_1C^2 - B_1B^2$. После сложения этих равенств получаем: $BA^2 + BC^2 = AC^2 = B_1A^2 - 2B_1B^2 + B_1C^2$, откуда $B_1B^2 = \dfrac{B_1A^2 + B_1C^2 - AC^2}{2} = \dfrac{256 + 441 - 361}{2} = 168.$

Учитывая, что $B_1B = A_1A$, находим: $A_1C^2 = AC^2 + A_1A^2 = 361 + 168 = 529 \Rightarrow A_1C = 2R = 23$, значит, площадь поверхности шара равна 529π.

3.419. В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 см. Найдите объем шара, если каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α.

Решение. Пусть пирамида $PABC$ с основанием ABC (AB — гипотенуза $\triangle ABC$) вписана в шар с центром O радиуса R.

Из условия задачи следует, что основание H высоты PH пирамиды является серединой гипотенузы AB и служит центром окружности, описанной около $\triangle ABC$. А так как эта окружность является пересечением поверхности шара и плоскости ABC, то ее центр — точка H — принадлежит прямой, проходя-

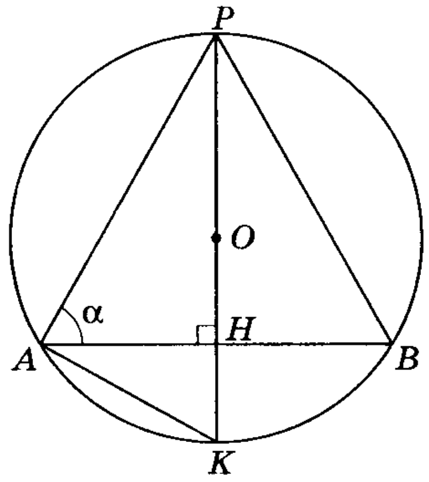


Рис. 71

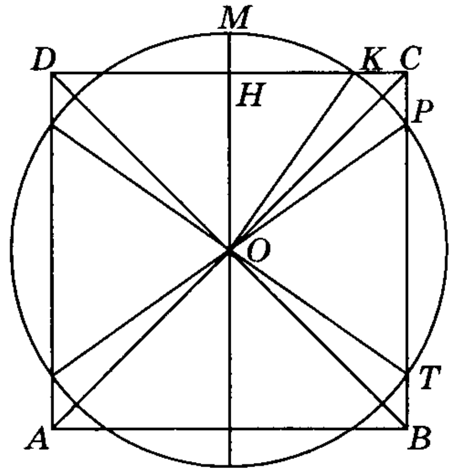


Рис. 72

щей через центр O сферы перпендикулярно плоскости ABC. Это означает, что плоскость грани PAB пирамиды проходит через центр O сферы и пересекает сферу по окружности радиуса R. Треугольник PAB вписан в эту окружность и $O \in PH$.

Пусть PK — диаметр окружности (рис. 71), тогда в прямоугольном $\triangle APK$ имеем: $AP^2 = PK \cdot PH$, откуда $PK = \dfrac{AP^2}{PH}$.

Длины AP и PH найдем в прямоугольном $\triangle APH$ ($\angle PAH = \alpha$): $AP = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $PH = AH \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha$. Тогда

$PK = 2R = \dfrac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$, значит, объем шара равен $\dfrac{1}{6}\pi \cdot \dfrac{8}{\sin^3 2\alpha} = \dfrac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$.

3.429. Радиус основания равностороннего цилиндра равен 12 см; точка пересечения диагоналей его осевого сечения является центром сферы радиуса 15 см. Найдите площадь части сферической поверхности, находящейся вне цилиндра.

Решение. На рисунке 72 изображено сечение цилиндра (AB — диаметр основания, BC — высота цилиндра) и сферы (OK — радиус сферы) диаметральной плоскостью, проходящей через образующие цилиндра.

Диагональ AC осевого сечения равностороннего цилиндра равна $24\sqrt{2}$, значит, $OC = \dfrac{1}{2}AC = 12\sqrt{2}$. Так как $24 < 30 < 24\sqrt{2}$, то диаметр сферы больше и диаметра основания, и высоты цилиндра, но меньше диагонали его осевого сечения. Это означает, что вне цилиндра осталась часть сферической поверхности, состоящая из поверхности шарового слоя, высота которого равна PT, и двух равных сегментных поверхностей с высотой MH.

Так как $OM = 15$, $OH = 12$, то высота MH шарового сегмента равна $OM - OH = 15 - 12 = 3$. Значит, площадь сегментной поверхности с высотой MH равна $2\pi \cdot 15 \cdot 3 = 90\pi$ (см^2), а площадь двух таких поверхностей равна 180π см^2.

Высота PT шарового слоя равна $2HK$ ($ABCD$ — квадрат), где $HK = \sqrt{OK^2 - OH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, поэтому площадь его поверхности равна $2\pi \cdot 15 \cdot 18 = 540\pi$ (см^2). Таким образом, площадь той части сферической поверхности, которая осталась вне цилиндра, равна $180\pi + 540\pi = 720\pi$ (см^2).

Задачи после главы 3. Фигуры вращения

3.450. Шар вписан в прямую призму, основанием которой служит прямоугольный треугольник. В этом прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен h и составляет с одним из катетов угол α. Найдите площадь поверхности шара.

Решение. Пусть основанием призмы является прямоугольный $\triangle ABC$ с гипотенузой AB. Тогда радиус шара, вписанного в данную призму, равен радиусу r окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Используя соотношение $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{p}$, где p — периметр $\triangle ABC$, найдем искомый радиус сферы, для чего предварительно найдем $S_{\triangle ABC}$ и p.

Пусть $CH = h$ — высота в $\triangle ABC$, опущенная из вершины C на гипотенузу AB, и $\angle BCH = \alpha$ (рис. 73).

Так как $\angle BAC = \angle BCH = \alpha$, то в прямоугольных треугольниках

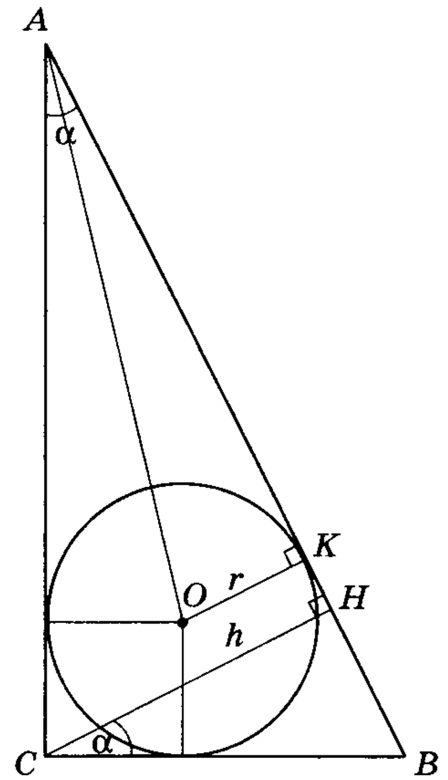


Рис. 73

CBH, ACH и ABC соответственно имеем: $BC = \dfrac{CH}{\cos\alpha} = \dfrac{h}{\cos\alpha}$, $AC = \dfrac{CH}{\sin\alpha} = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ и $AB = \dfrac{AC}{\cos\alpha} = \dfrac{h}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$. Тогда $p = \dfrac{h}{\cos\alpha}$

$$+ \frac{h}{\sin\alpha} + \frac{h}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{h(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{h\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha} = \frac{h\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{h\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}.$$

Далее, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BC = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{h}{\cos\alpha} = \dfrac{h^2}{\sin 2\alpha}$.

Теперь находим радиус r шара:

$$r = \frac{\dfrac{2h^2}{\sin 2\alpha}}{\dfrac{h\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}} = \frac{2h^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}{h\sqrt{2}\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{h\sqrt{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

и площадь его поверхности:

$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2 = 4\pi\cdot\left(\frac{h\sqrt{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 = \frac{\pi h^2}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.453. В усеченный конус, вписанный в сферу, вписана сфера. Найдите угол наклона образующих конуса к плоскости основания, если отношение радиусов данных сфер равно $2\sqrt{5}$.

Решение. На рисунке 74 изображено сечение комбинации усеченного конуса и двух данных сфер, при этом R и O — соответственно радиус и центр описанной около усеченного конуса сферы, r и O_1 — радиус и центр вписанной в этот конус сферы. Из условия следует, что $R = 2r\sqrt{5}$.

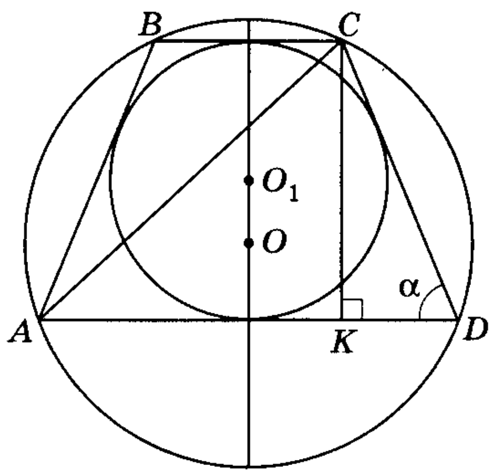


Рис. 74

Если CK — высота усеченного конуса и $\angle ADC = \alpha$ (угол наклона образующей к плоскости основания), то $CK = 2r$.

В $\triangle ACD$ из $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$ находим: $AC = 2R\sin\alpha = 4r\sqrt{5}\sin\alpha$.

В прямоугольном $\triangle ACK$ имеем: $AC^2 = AK^2 + CK^2$.

Трапеция описана около окружности с центром O_1, поэтому $BC + AD = 2AB$, откуда $AB = \frac{BC + AD}{2}$. Кроме того, в этой трапеции $AK = \frac{BC + AD}{2}$, тогда $AK = AB = CD = \frac{CK}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}$.

В равенстве $AC^2 = AK^2 + CK^2$, заменив AC, AK и CK их найденными выражениями через r и α, получаем уравнение $80r^2\sin^2\alpha = \frac{4r^2}{\sin^2\alpha} + 4r^2$ или $20\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0$. Решая это уравнение, получаем $\sin\alpha = 0{,}5$, значит, $\alpha = 30°$ — величина угла наклона образующей конуса к плоскости его основания.

3.462. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом φ и площадь основания равна Q, вписан шар. Найдите объем конуса, отсекаемого от данного плоскостью круга, по окружности которого поверхность шара касается боковой поверхности конуса.

Решение. На рисунке 75 изображено сечение комбинации конуса и сферы с центром O плоскостью, проходящей через ось PC конуса, при этом радиусы OH и OT сферы перпендикулярны образующим соответственно PA и PB конуса, касающимся сферы в точках соответственно T и H. Это означает, что отрезок TH является диаметром конуса, отсекаемого от

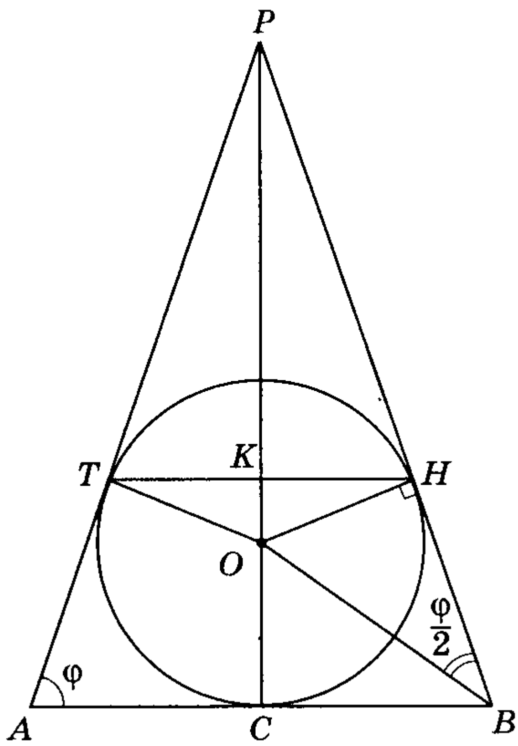


Рис. 75

данного конуса плоскостью окружности касания этого конуса и сферы, т. е. $\frac{1}{2}TH = KH$ — радиус отсекаемого конуса.

Пусть R — радиус основания данного конуса, тогда из соотношения $\pi R^2 = Q$ находим: $R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.

В прямоугольном $\triangle BCP$ имеем: $BP = \frac{BC}{\cos\varphi} = \frac{R}{\cos\varphi}$. Так как $BC = BH = R$, то $PH = BP - BH = \frac{R}{\cos\varphi} - R = \frac{R(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{2R\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$.

В прямоугольном $\triangle HPK$ находим радиус $KH = PH \times \cos\varphi = \frac{2R\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \cdot \cos\varphi = 2R\sin^2\frac{\varphi}{2}$ отсекаемого конуса и его высоту $PK = PH \cdot \sin\varphi = \frac{2R\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \cdot \sin\varphi = 2R \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Тогда объем V этого конуса равен:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot KH^2 \cdot PK = \frac{1}{3}\pi \cdot 4R^2 \cdot \sin^4\frac{\varphi}{2} \cdot 2R \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\pi \cdot R^3 \sin^6\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{8}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right)^3 \cdot \sin^6\frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{8Q}{3}\sqrt{\frac{Q}{\pi}} \times$$

$$\times \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin^6\frac{\varphi}{2}.$$

Контрольные работы

К—11—1
Движения в пространстве

Задачи для подготовки

1. Дана точка $A(4; -6; 9)$. Найдите образ этой точки:
   а) при симметрии относительно начала координат;
   б) при симметрии относительно точки $B(3; 1; 2)$;
   в) при симметрии относительно плоскости Oyz;
   г) при параллельном переносе на вектор $\vec{p}(3; -2; -4)$;
   д) при повороте на угол $90°$ вокруг оси Oz.
2. Плоскость α задана уравнением $2x + y - 5z - 3 = 0$. Найдите уравнение плоскости β, которая является прообразом плоскости α:
   а) при симметрии относительно начала координат;
   б) при параллельном переносе на вектор $\vec{r}(3; 1; 5)$.
3. Рассматривается симметрия относительно плоскости α, заданной уравнением $2x + 3y - z + 2 = 0$. Запишите, если это возможно:
   а) координаты неподвижной точки этой симметрии;
   б) параметрические уравнения такой прямой, которая неподвижна при симметрии относительно плоскости α, но не все точки этой прямой являются неподвижными при данной симметрии;
   в) уравнение такой плоскости, которая неподвижна при симметрии относительно плоскости α, но не все точки этой плоскости являются неподвижными при данной симметрии;
   г) уравнение такой сферы, которая неподвижна при симметрии относительно плоскости α, но не все точки этой сферы являются неподвижными при данной симметрии.
4. Даны два тетраэдра $MABK$ и $PCEK$, все ребра которых равны между собой. Прямые AC и BE пересекаются в точке K. Точки M и P лежат в разных полупространствах относительно плоскости ABC. Существует ли поворот пространства вокруг некоторой прямой, при котором один из данных тетраэдров совмещается с другим? Если существует, то укажите ось и угол этого поворота.

5. Докажите, что композиция $S_\beta \circ S_\alpha$ двух симметрий относительно плоскостей α и β, заданных соответственно уравнениями $x + y = 0$ и $x - y = 0$, есть поворот пространства. Найдите ось и угол этого поворота.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Движение f пространства таково, что $f(A) = D$, $f(C) = A_1$, $f(B_1) = B$, $f(D) = D_1$. Найдите образы остальных вершин данного куба при этом движении.
7. Прямая задана параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = -5 + 3t, \\ y = 2, \\ z = 7 - t. \end{cases}$$
Напишите параметрические уравнения прямой, которая является образом заданной прямой:
а) при параллельном переносе на вектор $\vec{p}\,(3; 0; -1)$;
б) при параллельном переносе на вектор $\vec{r}\,(2; 1; -3)$;
в) при центральной симметрии относительно точки $A(3;\ 0;\ -1)$;
г) при центральной симметрии относительно точки $B(1; 2; 5)$;
д) при симметрии относительно плоскости Oxy;
е) при повороте на угол $180°$ вокруг оси аппликат.
8. На плоскости $2x + 3y - 5z = 10$ найдите множество всех точек, неподвижных при повороте на угол $45°$ вокруг прямой
$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = t. \end{cases}$$
9. На плоскости $x - 3y + 5z = 3$ найдите множество всех точек, неподвижных при симметрии относительно плоскости $2x - 7y + 6z = 1$; запишите это множество в координатной форме.

Вариант 1

1. Дана точка $A(-3; 2; 5)$. Найдите образ этой точки:
а) при симметрии относительно начала координат;
б) при симметрии относительно плоскости Oyz ;
в) при повороте на $90°$ относительно оси Ox;
г) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(-1; 2; -3)$;
д) при симметрии относительно точки $H(1; 2; 0)$.
2. Плоскость α задана уравнением $3x - 5y - z + 2 = 0$. Найдите уравнение плоскости β, которая является прообразом плоскости α:
а) при параллельном переносе на вектор $\vec{r}(-2; 1; 3)$;
б) при симметрии относительно начала координат.

3. Рассматривается симметрия относительно плоскости $2x + 3y - z + 2 = 0$. Запишите, если это возможно:

а) координаты какой-нибудь неподвижной точки этой симметрии;

б) параметрические уравнения какой-нибудь прямой, неподвижной при этой симметрии;

в) уравнение какой-нибудь плоскости, неподвижной при этой симметрии;

г) уравнение какой-нибудь сферы, которая неподвижна при этой симметрии.

4. Даны два тетраэдра $MABK$ и $PABC$, все ребра которых равны между собой. Прямые AB и CK пересекаются, а точки M и P лежат в разных полупространствах относительно плоскости BCK. Укажите любую композицию нескольких симметрий пространства, при которой один из данных тетраэдров совмещается с другим.

5. Докажите, что композиция $S_\beta \circ S_\alpha$ двух симметрий относительно плоскостей α и β, заданных соответственно уравнениями $z = 0$ и $x = 0$, есть поворот пространства. Найдите ось и угол этого поворота.

6 (*дополнительная*). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Движение f пространства таково, что $f(A) = D_1$, $f(A_1) = C_1$, $f(D) = D$, $f(B) = A_1$. Найдите образы остальных вершин данного куба при этом движении.

Вариант 2

1. Дана точка $A(3; -7; 1)$. Найдите образ этой точки:

а) при симметрии относительно начала координат;

б) при симметрии относительно точки $C(1; 2; 0)$;

в) при симметрии относительно плоскости Oxy;

г) при параллельном переносе на вектор $\vec{r}(-2; 1; -3)$;

д) при повороте на угол 90° относительно оси Oy.

2. Плоскость α задана уравнением $3x - 2y + 7z - 12 = 0$. Найдите уравнение плоскости β, которая является прообразом плоскости α:

а) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(2; -1; -3)$;

б) при симметрии относительно начала координат.

3. Рассматривается параллельный перенос на вектор $\vec{p}(-1; 2; 3)$. Запишите, если это возможно:

а) координаты какой-нибудь неподвижной точки при этом переносе;

б) параметрические уравнения какой-нибудь прямой, неподвижной при этом переносе;

в) уравнение какой-нибудь плоскости, неподвижной при этом переносе.

4. Даны два тетраэдра $MABC$ и $PMKE$, все ребра которых равны между собой. Точки M и P лежат в разных полупространствах относительно плоскости правильного шестиугольника $AKBMCE$. Укажите любую композицию нескольких симметрий пространства, при которой один из данных тетраэдров совмещается с другим.

5. Докажите, что композиция $S_\beta \circ S_\alpha$ двух симметрий относительно плоскостей α и β, заданных соответственно уравнениями $z = 0$ и $z = -3$, есть параллельный перенос пространства. Найдите координаты вектора этого переноса и напишите уравнение какой-нибудь плоскости, неподвижной при этом переносе.

6 (*дополнительная*). $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Движение f пространства таково, что $f(D_1) = A$, $f(C_1) = A_1$; $f(D) = D$, $f(A_1) = B$. Найдите образы остальных вершин данного куба при этом движении.

К—11—2
Многогранники

Задачи для подготовки

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDMNA_1B_1C_1D_1M_1N_1$ проведено сечение через вершину C_1 и точки K и F — середины ребер соответственно AN и MN. Определите количество граней, ребер, вершин и диагоналей образовавшегося многогранника, одной из вершин которого является точка C.

2. Дан шестигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $AA_1 = 4$, $AA_1 \perp (ABC)$. Грань $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат со стороной 4, а грань $ABCD$ — прямоугольник со сторонами $AD = 7$ и $DC = 16$. Стороны квадрата соответственно параллельны сторонам прямоугольника. Найдите: а) длины трех неизвестных ребер; б) площадь полной поверхности шестигранника; в) длину наибольшей диагонали шестигранника.

3. Две грани пятигранника $ABCA_1B_1C_1$ — треугольники. Треугольник ABC — равносторонний со стороной 8. Боковые

ребра AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны между собой, при этом ребро AA_1 перпендикулярно плоскости ABC и $AA_1 = 3$, $BB_1 = 7$, $CC_1 = 5$. Найдите: а) расстояние между точками пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$; б) угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

4. Дан шестигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ — ромб со стороной 6, $\angle BAD = 60°$; ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости ABC, причем $AA_1 = 7$, $BB_1 = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите: а) длины остальных ребер; б) угол между плоскостью ABC и прямой A_1C_1; в) величину угла между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$; г) длину самой большой диагонали шестигранника.
5. Дан многогранник с восемью вершинами A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1. Грань $ABCD$ — квадрат со стороной 6; ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости квадрата и лежат по одну сторону от нее, причем $AA_1 = 9$, $BB_1 = 7$, $CC_1 = 5$, $DD_1 = 7$. Найдите: а) число граней данного многогранника; б) длины остальных ребер; в) угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$; г) длину самой большой диагонали данного многогранника.
6. Дан многогранник, имеющий 117 вершин. Существует ли плоскость, проходящая ровно через две его вершины, при симметрии относительно которой этот многогранник отображается на себя? Если не существует, то почему? Если существует, то приведите пример.
7. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник с тупым углом α при вершине C. Угол B_1AC равен β. Высота призмы равна h. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.
8. Основанием призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, в котором $AC = 8$, $BD = 6$, $A_1A = A_1C$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$. Найдите: а) диагонали призмы; б) расстояния между плоскостями противоположных боковых граней.
9. Правильную четырехугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернули вокруг ее высоты OO_1 на угол α ($0 < \alpha < 45°$) (O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$). Какой процент объема призмы составляет объем фигуры, полученной при пересечении данной призмы и ее образа при этом вращении?

Вариант 1

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 через вершину D и середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 проведено сечение, разделившее куб на два многогранника. Найдите: а) количество вершин, ребер, граней и диагоналей для каждого из полученных многогранников; б) длину наибольшего отрезка в многограннике, одной из вершин которого является точка B.
2. Грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в параллельных плоскостях. Грань $ABCD$ — квадрат со стороной 80, диагонали которого пересекаются в точке K. Грань $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник со сторонами $A_1B_1 = 40$ и $A_1D_1 = 8$, диагонали которого пересекаются в точке M. Отрезок $KM = 15$ лежит на прямой, перпендикулярной плоскости грани $ABCD$. Определите: а) площадь полной поверхности многогранника; б) длины ребер, не лежащих в плоскостях данных квадрата и прямоугольника; в) имеют ли прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 одну общую точку.
3. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$ с острым углом α. Прямая BC_1 составляет с плоскостью DC_1D_1 угол β. Найдите площадь боковой поверхности и объем параллелепипеда, если длина бокового ребра a.
4. Дан многогранник, имеющий 141 вершину. Существует ли центральная симметрия пространства, при которой этот многогранник отображается на себя? Если не существует, то почему? Если существует, то приведите пример.

Вариант 2

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 проведено сечение через середины ребер CC_1, AB и AD, разделившее куб на два многогранника. Для каждого из них найдите количество вершин, ребер, граней и диагоналей. В многограннике, вершиной которого служит точка A, найдите длину наибольшего отрезка.
2. Грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в параллельных плоскостях. Грань $ABCD$ — квадрат со стороной 10, диагонали которого пересекаются в точке K. Грань $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник со сторонами $A_1B_1 = 28$, $A_1D_1 = 20$, диагонали которого пересекаются в точке M. Отрезок KM равен 12 и лежит на прямой,

перпендикулярной плоскости грани $ABCD$. Определите: а) площадь полной поверхности многогранника; б) длины ребер, не лежащих в плоскостях данных квадрата и прямоугольника; в) имеют ли прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 одну общую точку.

3. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. Угол AB_1C равен α. Найдите площадь полной поверхности призмы и ее объем, если высота призмы рана h.
4. Дан многогранник, имеющий 117 вершин. Существует ли поворот пространства на некоторый острый угол, при котором этот многогранник отображается на себя? Если не существует, то почему? Если существует, то приведите пример.

К—11—3
Многогранные углы. Пирамиды

Задачи для подготовки

1. В основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник, а все плоские углы при вершине пирамиды равны 85°. Сколько ребер может быть у данной пирамиды?
2. Какое наибольшее целое число градусов может иметь величина плоского угла при вершине 13-угольной правильной пирамиды?
3. Точка M лежит внутри трехгранного угла с вершиной K и удалена от его граней на расстояния 12, 16 и 21. Найдите углы, которые образует прямая KM со всеми гранями и ребрами трехгранного угла, если все его плоские углы прямые.
4. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а высота равна h. Найдите сторону основания пирамиды.
5. Дан трехгранный угол $ODEF$, в котором $\angle DOE = \angle DOF = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$; ребро OF наклонено к плоскости ODE под углом 45°. Найдите: а) двугранный угол при ребре OD при условии, что он тупой; б) угол EOF; в) угол наклона ребра OD к плоскости OFE; г) угол FGH, где G — ортогональная проекция точки F на плоскость DOE, H — ортогональная проекция точки E на плоскость DOF.

6. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды составляет 66,(6)% площади ее полной поверхности. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды.
7. Площадь боковой грани правильной 20-угольной пирамиды составляет 20% площади ее основания. Найдите угол между апофемой этой пирамиды и плоскостью ее основания.
8. Найдите апофему и высоту правильной усеченной четырехугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину 4, а восемь ребер — длину 2.
9. В правильной четырехугольной пирамиде все восемь ребер равны между собой. Найдите: а) плоский угол при вершине пирамиды; б) угол между двумя боковыми ребрами, не лежащими в одной грани; в) угол между боковым ребром и плоскостью основания; г) величину двугранного угла при ребре основания; д) величину двугранного угла при боковом ребре; е) величину угла между плоскостями соседних боковых граней; ж) величину угла между плоскостями боковых граней, не имеющих общего ребра; з) угол между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро.

Замечание. Задачу 9 можно использовать для проведения самостоятельной работы на 15—20 минут.

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник, а все плоские углы при вершине пирамиды равны 63°. Сколько граней может быть у данной пирамиды?
2. Точка M лежит внутри трехгранного угла с вершиной K и удалена от его граней на расстояния 3, 4 и 12. Найдите углы, которые образует прямая KM со всеми гранями трехгранного угла, если все его плоские углы прямые.
3. В правильной шестиугольной пирамиде с высотой h плоский угол при вершине равен β. Найдите сторону основания пирамиды.
4. Дан такой трехгранный угол $OABC$, что $\angle AOB = \angle AOC = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $\angle BOC = 90°$. Найдите: а) двугранный угол при ребре OA; б) угол наклона ребра OA к плоскости OBC; в) угол наклона ребра OC к плоскости OAB; г) угол BPM, где точка P — ортогональная проекция точки B на плоскость AOC, точка M — ортогональная проекция точки P на плоскость AOB.

Вариант 2

1. В основании пирамиды лежит выпуклый многоугольник, а все плоские углы при вершине пирамиды равны $41°$. Сколько вершин может быть у данной пирамиды?
2. Точка M лежит внутри трехгранного угла с вершиной K и удалена от его граней на расстояния 9, 12 и 8. Найдите углы, которые образует прямая KM со всеми ребрами трехгранного угла, все плоские углы которого прямые.
3. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а высота равна h. Найдите сторону основания пирамиды.
4. Дан такой трехгранный угол $OMPK$, что $\angle MOP = \angle MOK = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, а двугранный угол при ребре OM равен $120°$.

   Найдите: а) угол POK; б) двугранный угол при ребре OP; в) угол наклона ребра OP к плоскости MOK; г) угол KCE, где точка C — ортогональная проекция точки K на плоскость MOP, точка E — ортогональная проекция точки C на плоскость MOK.

К—11—4
Частные виды пирамид и их свойства. Правильные многогранники

Задачи для подготовки

1. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите:

   а) расстояние между двумя его гранями, не имеющими общей вершины;

   б) расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, содержащими ребра октаэдра;

   в) объем октаэдра.
2. Основанием пирамиды $MABCD$ является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$). Найдите объем пирамиды, если:

   а) все боковые ребра пирамиды равны $2{,}4a$;

   б) каждый из двугранных углов при ребрах BC и AD равен $60°$;

   в) грани MBC и MCD перпендикулярны основанию, а ребро AM равно $2a$;

   г) грани MAB и MCD перпендикулярны основанию, а плоскость MBC образует с плоскостью ABC угол величиной $45°$;

д) плоскость MAD перпендикулярна основанию, и грань MAD является равнобедренным прямоугольным треугольником.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 проведено сечение плоскостью MNP, где точка M лежит на ребре CD ($MC = 10$), точка N — на ребре CC_1 ($NC = 4$), точка P — на ребре CB ($CP = 3$). Определите:

   а) отношение объемов многогранников, на которые данный куб разбивается плоскостью MNP;

   б) угол между прямыми PN и CD.

4. В тетраэдре $MABC$ проведено сечение через точки A_1, B_1 и C_1, которые лежат соответственно на ребрах MA, MB и MC так, что $MA_1 : A_1A = 2 : 3$, $MB_1 : B_1B = 3 : 2$, $MC_1 = C_1C$, при этом объем пятигранника $A_1B_1C_1ABC$ равен 1. Найдите объем данного тетраэдра.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ точка K лежит на ребре MC так, что $MK : KC = 1 : 3$. Найдите отношение объемов многогранников, на которые данная пирамида разбивается плоскостью, проходящей через ребро AB ее основания и точку K.

6. Найдите отношение объема куба к объему октаэдра, вершинами которого являются центры граней данного куба.

7. Найдите отношение объема октаэдра к объему куба, вершинами которого являются центры граней октаэдра.

8. Найдите отношение объема куба к объему тетраэдра, ребрами которого являются диагонали граней данного куба, взятые по одной в каждой его грани.

9. Найдите объем многогранника $MABCP$, ребрами которого служат отрезки $MA = MB = MC = AB = AC = BC = PA = PB = PC = 12$. Докажите, что этот многогранник не является правильным.

10. Дана правильная четырехугольная пирамида объема V. Найдите объем тела, являющегося пересечением данной пирамиды и ее образа при симметрии относительно середины высоты данной пирамиды.

Вариант 1

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = AC = a$ и $\angle BAC = \beta$. Найдите объем пирамиды, если:

   а) все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом $60°$;

б) все двугранные углы пирамиды при ребрах ее основания равны 45°;

в) грани MAC и MAB перпендикулярны плоскости ее основания, а двугранный угол при ребре BC равен α;

г) грань MAC — равнобедренный треугольник с углом 120°, а плоскость этой грани перпендикулярна основанию пирамиды.

2. Найдите площадь поверхности и объем правильного октаэдра, если наибольшая его диагональ равна 8.
3. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ прямые, причем $DA = 3$, $DB = 4$, $DC = 4$. Найдите:

   а) объем тетраэдра;

   б) расстояние от вершины D до плоскости ABC.
4. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ точка K лежит на ребре MC так, что $MK : KC = 2 : 3$. Найдите отношение объемов многогранников, на которые данная пирамида разбивается плоскостью, проходящей через диагональ BD ее основания и точку K.

Вариант 2

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = AC$; $BC = a$, $\angle ACB = \beta$. Найдите объем пирамиды, если:

   а) все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°;

   б) все двугранные углы пирамиды при ребрах ее оснований равны 60°;

   в) грани MAC и MAB перпендикулярны плоскости основания, а двугранный угол при ребре BC равен 30°;

   г) грань MAC — равнобедренный треугольник с углом β между равными сторонами, и плоскость этой грани перпендикулярна основанию пирамиды.
2. Найдите площадь поверхности и объем правильного октаэдра, если расстояние между плоскостями его граней, не имеющих общую вершину, равно 12.
3. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ прямые, причем $DA = 6$, $DB = 2$, $DC = 2$. Найдите:

   а) объем тетраэдра;

   б) расстояние от точки D до плоскости ABC.
4. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDHT$ точка K лежит на ребре MC так, что $MK : KC = 1 : 3$. Найдите

отношение объемов многогранников, на которые данная пирамида разбивается плоскостью, проходящей через диагональ BD ее основания и точку K.

К—11—5
Цилиндр и конус

Задачи для подготовки

1. В цилиндре с высотой h и радиусом основания R проведены два пересекающихся сечения. Найдите длину общего отрезка сечений, если:

   а) плоскости этих сечений проходят через середину оси цилиндра, причем одна из них проходит также и через хорду основания цилиндра, а другая параллельна его основанию;

   б) одна плоскость проходит через диаметр AB нижнего основания цилиндра и имеет с его верхним основанием единственную точку C, а другая плоскость проходит через диаметр CD верхнего основания цилиндра и имеет с его нижним основанием единственную точку A.
2. Конус с высотой 3 и радиусом основания 4 имеет с каждой из параллельных плоскостей одну общую точку. В каких пределах может изменяться расстояние между этими плоскостями?
3. Через вершину конуса проведено сечение с углом при вершине, равным 2α. Найдите угол, образованный этим сечением с основанием конуса, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 2β.
4. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине и высотой h, опущенной из этой вершины. В конус помещен цилиндр с образующей $0{,}5h$. Найдите радиус основания цилиндра, если:

   а) нижнее основание цилиндра лежит на основании конуса, а окружность верхнего основания — на конической поверхности;

   б) образующая цилиндра лежит на диаметре основания конуса, а каждое из оснований цилиндра имеет с конической поверхностью единственную общую точку.
5. Куб расположен внутри равностороннего конуса так, что 4 его вершины расположены на основании конуса, а остальные вершины куба — на конической поверхности. Найдите отношение объема куба к объему конуса.

6. Найдите объем и площадь поверхности усеченного конуса, радиусы основания которого равны 3 и 7, а образующая равна 5.
7. Объемы равностороннего конуса и равностороннего цилиндра равны. У которого из этих тел площадь боковой поверхности больше и во сколько раз?
8. Рассматриваются все правильные 18-угольные призмы с ребром основания a и боковым ребром $4a$. Центры оснований этих призм расположены в точках A и B. Найдите объем общей части всех таких призм.
9. Рассматриваются все правильные 6-угольные призмы с ребром основания $2a$ и боковым ребром a. Центры оснований всех этих призм расположены в точках A и B. Найдите поверхность тела, являющегося объединением всех этих призм.
10. Рассматриваются все правильные 9-угольные пирамиды с ребром основания $5a$ и высотой $12a$. Вершины этих пирамид находятся в точке A, а центры их оснований — в точке B. Найдите объем общей части всех таких пирамид.
11. Рассматриваются все правильные 4-угольные пирамиды с ребром основания $a\sqrt{2}$ и боковым ребром $3a$. Вершины этих пирамид находятся в точке A, а центры их оснований — в точке B. Найдите площадь поверхности тела, являющегося объединением всех таких пирамид.
12. В цилиндре высоты h проведены все сечения плоскостями, образующими с плоскостью основания угол 45°. Любое из этих сечений является лишь некоторой частью эллипса (не является полным эллипсом). Какие численные значения может принимать диаметр основания цилиндра?

Вариант 1

1. В цилиндре с высотой h и радиусом основания R проведены два пересекающихся сечения. Найдите длину их общего отрезка, если:

   а) плоскости сечений параллельны оси цилиндра;

   б) плоскости сечений проходят через середину оси цилиндра и параллельные между собой хорды оснований.
2. Цилиндр с высотой 8 и радиусом основания 3 имеет с каждой из параллельных плоскостей одну общую точку. В каких пределах может изменяться расстояние между этими плоскостями?

3. Угол в осевом сечении конуса равен 120°. Через две образующие конуса проведено сечение под углом 60° к основанию. Найдите углы этого сечения.
4. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с гипотенузой c. В конус помещен цилиндр с радиусом основания r. Найдите высоту цилиндра, если:
   а) нижнее основание цилиндра расположено на основании конуса, а окружность верхнего основания цилиндра — на конической поверхности;
   б) образующая цилиндра лежит на диаметре основания конуса, а каждое из оснований цилиндра имеет с конической поверхностью единственную общую точку.
5. Найдите объем и площадь поверхности усеченного конуса, радиусы основания которого 3 и 8, а образующая 13.

Вариант 2

1. В цилиндре с высотой h и радиусом основания R проведены два сечения, образованные плоскостями, проходящими через центр нижнего и две хорды верхнего основания. Найдите длину общего отрезка этих сечений, если:
   а) хорды параллельны;
   б) хорды имеют общую точку на окружности основания.
2. Цилиндр с высотой 6 и радиусом основания 4 имеет с каждой из параллельных плоскостей одну общую точку. В каких пределах может изменяться расстояние между этими плоскостями?
3. Через вершину конуса проведено сечение под углом 2α к основанию. Найдите углы этого сечения, если образующая конуса наклонена к основанию под углом α.
4. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник с высотой h. В конус помещен цилиндр с образующей m. Найдите радиус основания цилиндра, если:
   а) нижнее основание цилиндра лежит на основании конуса, а окружность верхнего основания — на конической поверхности;
   б) образующая цилиндра лежит на диаметре основания конуса, а каждое из оснований цилиндра имеет с конической поверхностью единственную общую точку.
5. Найдите объем и площадь поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого 1 и 13, а образующая 13.

Сфера и шар

Задачи для подготовки

1. Две сферы, радиусы которых равны 13 и 15, имеют общее сечение, диаметр которого равен 24. Найдите расстояние между центрами данных сфер.
2. Два шара, радиусы которых равны 1 м и 2 м, касаются каждой из трех попарно взаимно перпендикулярных плоскостей. Чему может быть равно расстояние между центрами этих шаров?
3. Шар касается всех ребер данного куба. Найдите радиус этого шара, если ребро куба равно 10.
4. Шар касается всех ребер данного правильного тетраэдра. Найдите радиус этого шара, если ребро тетраэдра равно 4.
5. В правильной пирамиде $MABCDEF$ высота MO равна h. Боковой гранью пирамиды является равнобедренный треугольник с углом 30° при вершине. Найдите длину линии пересечения поверхности пирамиды со сферой, если:
   а) MO — радиус сферы с центром M;
   б) MO — диаметр сферы.
6. Найдите площадь поверхности и объем тела, состоящего из множества всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до отрезка длины $3a$ не превосходит a.
7. На ребре двугранного угла величиной в 36° расположен отрезок длины a. Найдите площадь поверхности и объем тела, образованного всеми точками, лежащими внутри этого двугранного угла, расстояние от каждой из которых до данного отрезка не превосходит $3a$.
8. Стоимость кубического метра материала, необходимого на изготовление шарообразной детали, равна стоимости краски, необходимой на покрытие одного квадратного метра поверхности этой детали. При каком диаметре детали стоимость ее изготовления равна стоимости ее окраски?
9. В цилиндр, диаметр основания которого и его образующая равны 6, помещены два касающихся друг друга равных шара радиуса $6 - 3\sqrt{2}$. Известно, что центры обоих шаров лежат в одном и том же осевом сечении цилиндра, при этом первый шар касается основания цилиндра и имеет с цилиндрической поверхностью одну общую точку, а второй шар также имеет с цилиндрической поверхностью одну об-

щую точку. Как расположен второй шар относительно плоскости верхнего основания цилиндра? (Касается этой плоскости, не имеет с ней общих точек или имеет с ней общий круг.)

10. Четыре равные сферы расположены так, что каждая из них касается трех других. Найдите отношение площадей поверхностей двух сфер, каждая из которых касается всех четырех данных сфер. (В ответе записать отношение площади большей сферы к площади меньшей.)
11. В сферу радиуса 6 вписаны правильный тетраэдр и куб. В каких пределах находится расстояние между центром грани тетраэдра и центром грани куба?

Вариант 1

1. Две сферы, радиусы которых равны 7 и 5, имеют общее сечение, диаметр которого равен 8. Найдите расстояние между центрами этих сфер.
2. Два шара, радиусы которых равны 2 м и 8 м, касаются каждой из трех попарно взаимно перпендикулярных плоскостей. Чему может быть равно расстояние между центрами этих шаров?
3. Ребро основания правильной треугольной призмы равно 6. Шар касается всех ребер этой призмы. Найдите: а) радиус этого шара; б) высоту данной призмы.
4. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ высота MO равна h, а боковые грани — правильные треугольники. Найдите длину линии пересечения поверхности пирамиды со сферой, если:
   а) MO — радиус сферы с центром M;
   б) MO — диаметр сферы.
5. В цилиндр, диаметр основания которого и его образующая равны 10, помещены два касающихся друг друга шара, радиус каждого из которых равен 3. Известно, что центры обоих шаров лежат в одном и том же осевом сечении цилиндра, при этом первый шар касается основания цилиндра и имеет с цилиндрической поверхностью одну общую точку, а второй шар также имеет с цилиндрической поверхностью одну общую точку. Как расположен второй шар относительно плоскости верхнего основания цилиндра? (Касается этой плоскости, не имеет с ней общих точек или имеет с ней общий круг.)

Вариант 2

1. Две сферы, радиусы которых равны 9 и 5, имеют общее сечение, диаметр которого равен 6. Найдите расстояние между центрами этих сфер.
2. Два шара, радиусы которых равны 3 м и 4 м, касаются каждой из трех попарно взаимно перпендикулярных плоскостей. Чему может быть равно расстояние между центрами этих шаров?
3. Ребро основания правильной шестиугольной призмы равно 8. Шар касается всех ребер этой призмы. Найдите:
   а) радиус шара;
   б) высоту данной призмы.
4. В правильном тетраэдре $MABC$ высота MO равна h. Найдите длину линии пересечения поверхности тетраэдра со сферой, если:
   а) MO — радиус сферы с центром M;
   б) MO — диаметр сферы.
5. В цилиндр, диаметр основания которого и его образующая равны 14, помещены два касающихся друг друга шара, радиус каждого из которых равен 4. Известно, что центры обоих шаров лежат в одном и том же осевом сечении цилиндра, при этом первый шар касается основания цилиндра и имеет с цилиндрической поверхностью одну общую точку, а второй шар также имеет с цилиндрической поверхностью одну общую точку. Как расположен второй шар относительно плоскости верхнего основания цилиндра? (Касается этой плоскости, не имеет с ней общих точек или имеет с ней общий круг.)

К—11—7
Обобщающая

Задачи для повторения

1. В треугольнике ABC через некоторую точку M стороны AC проведены две прямые, параллельные прямым AB и BC. Известно, что площади образовавшихся при этом двух треугольников равны S_1 и S_2. Найдите площадь треугольника ABC.
2. Через некоторую точку O, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Известно, что площади образовавшихся при этом трех тре-

угольников равны S_1, S_2 и S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

3. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде точка пересечения диагоналей является вершиной двух четырехугольных пирамид, основаниями которых служат верхнее и нижнее основания данной усеченной пирамиды. Объемы этих пирамид равны V_1 и V_2. Найдите объем данной усеченной пирамиды.
4. Около шара, радиус которого равен R, описана правильная четырехугольная пирамида. При какой высоте пирамиды ее объем будет наименьшим?
5. Найдите объем меньшего из тел, ограниченных поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ и $4x + 7y + 4z = 0$.
6. Два конуса имеют общее основание и расположены в одном полупространстве относительно плоскости оснований, при этом расстояние между их вершинами равно h. Найдите объем конуса с меньшей высотой, если углы при вершинах осевых сечений этих конусов равны соответственно α и β, причем $\alpha > \beta$.
7. Точка O — центр полукруга с диаметром $AB = 4$, OC — радиус этого полукруга, перпендикулярный AB; OD — такой радиус полукруга, что $\angle BOD = 60°$. Из полукруга вырезаны сектор BOD и треугольник OCD. Оставшаяся часть полукруга вращается вокруг прямой AB. Найдите объем и площадь поверхности тела, образованного при этом вращении.
8. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8 и 9, а высота пирамиды равна 5. Найдите радиус сферы, которая касается боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах ее основания.

Вариант 1

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников OBC и OAD равны соответственно S_1 и S_2. Найдите площадь данной трапеции.
2. Через точки, делящие высоту конуса в отношении 3 : 4 : 3, проведены сечения, параллельные его основанию. Найдите объем конуса, если объем части конуса, заключенной между плоскостями сечений, равен V.
3. Около шара, радиус которого равен R, описан конус. Найдите такую длину образующей конуса, при которой его объем будет наименьшим.

Вариант 2

1. Через точки, делящие высоту треугольника в отношении 3 : 4 : 3, проведены прямые, параллельные основанию этого треугольника. Найдите площадь данного треугольника, если площадь его части, заключенной между проведенными прямыми, равна S.
2. В усеченном конусе точка пересечения диагоналей осевого сечения является вершиной двух конусов, основаниями которых служат верхнее и нижнее основания данного усеченного конуса. Объемы этих конусов равны V_1 и V_2. Найдите объем данного усеченного конуса.
3. В конус вписан шар. Для какого значения угла при вершине осевого сечения конуса отношение объема шара к объему конуса будет наибольшим? Найдите это отношение.

К—11—8
Обобщающая

Задачи для подготовки

1. Центр сферы радиуса r лежит на сфере радиуса R ($R > r$). Найдите длину линии пересечения этих сфер.
2. Сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через середины F и G его ребер B_1C_1 и D_1C_1 параллельно диагонали AC_1 куба. Постройте это сечение и найдите его площадь, если ребро куба равно a.
3. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D — прямые. Ребра DA и DB образуют с плоскостью ABC углы соответственно α и β. Двугранный угол $C(AB)D$ равен γ. Докажите, что $(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 1)(1 + \operatorname{tg}^2\gamma) + 1 = 0$.
4. В тетраэдре $SABC$ плоские углы при вершине S — прямые. Известно, что $SA = 2$, $SB = 6$, $SC = 4$. Точка K лежит на ребре SB, причем $SK : KB = 2 : 1$. Точки M и N — середины ребер соответственно AB и AC. Найдите:
   а) расстояние от вершины A до плоскости KMN;
   б) расстояние от вершины S до плоскости KMN;
   в) угол наклона плоскости KMN к плоскости ABS;
   г) угол между KC и плоскостью KMN.
5. Шар радиуса $r = 10\sqrt{10{,}2}$ касается трех ребер трехгранного угла $SABC$. Найдите расстояние от вершины S угла

до центра этого шара, если $\angle ASB = 90°$, $\angle ASC = \angle BSC = = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

6. Двугранные углы треугольной пирамиды при всех ребрах ее основания равны 60°. Длины ребер одной из боковых граней равны 10, 26 и $4\sqrt{29}$, причем большее из них является гипотенузой прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найдите объем пирамиды и площадь ее боковой поверхности.
7. Два равных шара радиуса $r = 3 - \sqrt{7}$ касаются друг друга и граней двугранного угла величиной 90°. Третий шар большего радиуса R ($R > r$) касается каждого из этих шаров и граней данного двугранного угла. Найдите R.
8. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с основанием ABC вписан шар радиуса $R = \sqrt[6]{51}$. Через середины ребер AB, BC и BS проходит плоскость, разбивающая пирамиду на два многогранника, в каждый из которых можно вписать шар. Найдите отношение радиусов этих шаров и объем данной пирамиды.
9. Два конуса имеют общую высоту h. Углы при вершинах их осевых сечений равны соответственно α и β. Найдите объем общей части данных конусов.
10. В прямой двугранный угол помещены три шара, каждый из которых касается граней двугранного угла и двух других шаров. Найдите радиус меньшего из шаров, если радиусы двух других равны 2 и 1.

Вариант 1

1. Основание конуса лежит в плоскости α. Этой плоскости касается шар радиуса R (шар и конус расположены по одну сторону от плоскости). Высота конуса равна диаметру шара, а их объемы равны. На каком расстоянии от плоскости α надо провести параллельную ей плоскость β, чтобы она пересекала шар и конус по кругам одинаковой площади?
2. Вершина прямоугольного параллелепипеда является единственной общей точкой этого параллелепипеда и плоскости φ. Ребра параллелепипеда, выходящие из этой вершины, образуют с плоскостью φ углы соответственно α, β и γ. Докажите, что $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.
3. Двугранные углы треугольной пирамиды при всех ребрах ее основания равны 60°. Длины ребер одной из боковых

граней равны соответственно $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и 3, причем большее из них является катетом прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найдите объем пирамиды и площадь ее боковой поверхности.

4. Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$ с основанием $ABCD$. Через середины ребер AB, BC и BM проведена плоскость, разбивающая пирамиду на два многогранника, в каждый из которых можно вписать шар. Найдите отношение радиусов этих шаров.

Вариант 2

1. Шар радиуса $\sqrt{3}$ и цилиндр имеют равные объемы, и ось цилиндра совпадает с диаметром шара. Найдите кратчайшее расстояние между двумя линиями пересечения поверхности шара и боковой поверхности цилиндра.
2. Вершина A куба — единственная его точка, общая с плоскостью φ. Три грани куба, содержащие вершину A, составляют с плоскостью φ углы соответственно α, β и γ. Докажите, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.
3. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 2. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем и площадь боковой поверхности этой пирамиды, если ее высота равна $2\sqrt{3}$.
4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Через середины ребер AB, AD и AA_1 проходит плоскость, разбивающая призму на два многогранника, в каждый из которых можно вписать шар. Чему равно отношение радиусов этих шаров?

Вариант 3

1. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Определите двугранный угол при боковом ребре пирамиды.
2. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а ее снованием служит прямоугольный треугольник с катетами $AC = 2$ и $BC = 4$. Плоскость α проходит через середины ребер AC, A_1B_1 и BB_1 призмы. Найдите:

а) расстояние от вершины C до плоскости α;

б) расстояние от вершины A до плоскости α;

в) угол наклона плоскости α к плоскости основания призмы;

г) угол между диагональю CB_1 боковой грани и плоскостью α.

3. Два равных шара радиуса 3 касаются друг друга и граней двугранного угла величиной 60°. Третий шар меньшего радиуса касается каждого из этих шаров и граней данного двугранного угла. Найдите радиус третьего шара.
4. Два равных цилиндра с радиусом основания r и высотой $4r$ расположены так, что их поверхности касаются, причем центр основания одного из них совпадает с серединой образующей другого. Найдите площадь поверхности шара наименьшего радиуса, содержащего оба данных цилиндра.

Вариант 4

1. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен β. Определите двугранный угол при ребре основания этой пирамиды.
2. Квадрат со стороной 2 является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковое ребро параллелепипеда равно 1. Плоскость β проходит через вершину C_1 и середины ребер AB и AD параллелепипеда. Найдите:

а) расстояние от точки A до плоскости β;

б) расстояние от точки пересечения диагоналей параллелепипеда до плоскости β;

в) угол между плоскостью β и гранью AA_1D_1D;

г) угол между диагональю A_1C параллелепипеда и плоскостью β.

3. Шар радиуса 4 касается двух граней двугранного угла величиной 120°. Два одинаковых шара меньшего радиуса также касаются граней двугранного угла и, кроме того, они касаются друг друга и большего шара. Найдите радиус каждого из меньших шаров.
4. Два одинаковых конуса с радиусом основания r и образующей $4r$ имеют общую вершину и общую образующую. Найдите радиус шара наименьшего объема, содержащего оба данных конуса.

Вариант 5

1. Через середины ребер MB и CD параллельно диагонали BD основания правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ проведена плоскость. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро равно b.

2. Шар радиуса 1 касается трех ребер трехгранного угла $MABC$. Найдите расстояние от вершины M этого угла до центра шара, если $\angle AMB = 90°$, $\angle AMC = \angle BMC = 60°$.
3. В тело, образованное при вращении прямоугольного треугольника с катетами 2 и $2\sqrt{3}$ вокруг гипотенузы, вписана правильная треугольная призма, боковая грань которой — квадрат, а ее основание перпендикулярно оси вращения. Найдите отношение объема тела вращения к объему призмы.
4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями $AB = 3a$ и $CD = 2a$, боковой стороной $BC = 2a$ и прямым углом BAC. Двугранные углы пирамиды при ребрах BC и CD равны, грань ASB перпендикулярна основанию пирамиды. Найдите объем пирамиды, если $\angle BSC = \arccos\frac{5}{7}$.

Вариант 6

1. Сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проходит через середины ее ребер AC и A_1B_1 параллельно диагонали A_1C боковой грани. Постройте это сечение и найдите его площадь, если сторона основания призмы равна a, а ее боковое ребро равно b.
2. Шар радиуса R касается трех граней трехгранного угла $MKPC$. Найдите расстояние от центра шара до ребра MC, если $\angle KMP = 90°$, $\angle KMC = \angle PMC = 60°$.
3. В тело, полученное вращением треугольника со сторонами 2, 7 и $5\sqrt{3}$ вокруг его большей стороны, вписана правильная четырехугольная призма с основанием, перпендикулярным оси вращения. Диагональ призмы образует с осью вращения угол 30°. Какую часть объема тела вращения составляет объем призмы?
4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 5. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, при этом $SC = 7$, $\angle CSB = 45°$. Найдите объем пирамиды.

Ответы к контрольным работам

К—11—1

Задачи для повторения

1. а) (−4; 6; −9); б) (2; 8; −5); в) (−4; −6; 9); г) (7; −8; 5); д) (6; 4; 9).
2. а) $2x + y - 5z + 3 = 0$; б) $2x + y - 5z - 21 = 0$.
3. а) (1; 2; 10); б) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 7 - t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$; в) $x + y + 5z - 53 = 0$;

   г) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 7)^2 = 25$.
4. Поворот на угол 180° вокруг биссектрисы угла AKE.
5. Осью поворота является координатная ось Oz; угол поворота равен 180°.
6. Образами вершин A_1, B, C_1, D_1 являются соответственно вершины C, A, B_1, C_1.
7. а) $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 2, \\ z = 6 - t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$; б) $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 3, \\ z = 4 - t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$;

   в) $\begin{cases} x = 11 + 3t, \\ y = -2, \\ z = -9 - t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$; г) $\begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 2, \\ z = 3 - t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$;

   д) $\begin{cases} x = -5 + 3t, \\ y = 2, \\ z = -7 + t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$; е) $\begin{cases} x = 5 - 3t, \\ y = -2, \\ z = 7 - t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$.
8. Одна точка (4; 1,5; 0,5).
9. Прямая $\begin{cases} x = 18 + 17t, \\ y = 5 + 4t, \\ z = -t, \end{cases}$ $t \in \boldsymbol{R}$.

Вариант 1

1. а) (3; −2; −5); б) (3; 2; 5); в) (−3; −5; 2); г) (−4; 4; 2); д) (5; 2; −5).
2. а) $3x - 5y - z + 16 = 0$; б) $3x - 5y - z - 2 = 0$.

3. а) (1; 1; 7); б) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - t, \quad t \in \boldsymbol{R}; \\ z = 7 + t, \end{cases}$ в) $2x - y + z - 8 = 0$;

г) $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 8)^2 = 9$.

4. Композиция симметрии относительно двух плоскостей, одной из которых является (ABC), а другой — плоскость, проходящая через AB перпендикулярно (ABC).

5. $S_\beta \circ S_\alpha = R_{Oy}^{180°}$.

6. Образами вершин B_1, C, C_1, D_1 являются соответственно вершины B_1, A, B, C.

Вариант 2

1. а) (−3; 7; −1); б) (5; −3; 1); в) (3; −7; −1); г) (1; −6; −2); д) (−1; −7; 3).

2. а) $3x - 2y + 7z - 25 = 0$; б) $3x - 2y + 7z + 12 = 0$.

3. а) Неподвижных точек нет; б) $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 2t, \quad t \in \boldsymbol{R}; \\ z = 3 + 3t, \end{cases}$

в) $x + + 2y - z + 7 = 0$.

4. Композиция симметрии относительно двух плоскостей, одной из которых является (ABC), а другой — плоскость, проходящая через PM параллельно прямой BC.

5. $\vec{p}(0; 0; -6)$ — вектор переноса; $x + 2y - 7 = 0$ — одна из неподвижных плоскостей при этом переносе.

6. Образами вершин A, B, C, B_1 являются соответственно вершины C, C_1, D_1, B_1.

К—11—2

Задачи для подготовки

1. 8 граней, 18 ребер, 12 вершин, 12 диагоналей.

2. а) 5; $4\sqrt{10}$; 13. б) $240 + 22\sqrt{10}$; в) $\sqrt{321}$.

3. а) 5; б) arctg(0,5).

4. а) $DD_1 = 6$, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = \sqrt{37}$; б) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{9}$;

в) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{9}$; г) $A_1C = \sqrt{157}$.

5. а) 6 граней; б) $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = 2\sqrt{10}$; в) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$; г) $3\sqrt{17}$.

6. Не существует. Если допустить существование такой плоскости симметрии для данного многогранника, то найдется по крайней мере одна из оставшихся 113 вершин многогранника, которая не будет иметь образа при симметрии относительно этой плоскости.

7. $$\frac{h^2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\beta-\cos^2\frac{\alpha}{2}}};\ \frac{h^3\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\beta-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

8. а) 6,4; $1{,}6\sqrt{66}$; $04\sqrt{481}$; б) $1{,}2\sqrt{13}$.

9. $200(\sqrt{2}-1)\%$.

Вариант 1

1. Многогранник с вершиной B имеет 6 граней, 12 ребер, 8 вершин, 2 диагонали. Многогранник с вершиной D_1 имеет 7 граней, 14 ребер, 9 вершин, 5 диагоналей. Длина наибольшего отрезка равна $8\sqrt{3}$.

2. а) 13 600; б) все равны по $\sqrt{1921}$; в) нет.

3. $$\frac{4a^2\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}};\ \frac{a^3\sin\alpha\,\sin^2\beta}{2\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}.$$

4. Не существует, так как вершин у данного многогранника нечетное число, и центром симметрии многогранника не может служить его вершина.

Вариант 2

1. Многогранник с вершиной C имеет 6 граней, 12 ребер, 8 вершин, 2 диагонали. Многогранник с вершиной A имеет 7 граней, 15 ребер, 10 вершин, 9 диагоналей. Длина наибольшего отрезка равна $6\sqrt{3}$.

2. а) 1604; б) все равны по $5\sqrt{10}$; в) нет.

3. $$\frac{h^2\left(\sqrt{3}+6\sqrt{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}\right)}{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3};\ \frac{h^3\sqrt{3}}{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}.$$

4. Существует. Например, поворот на угол $\frac{\pi}{58}$ вокруг прямой, содержащей высоту правильной 116-угольной пирамиды, отображает эту пирамиду на себя.

К—11—3

Задачи для подготовки

1. Шесть или восемь ребер. **2.** 27°. **3.** С гранями $\arcsin\frac{12}{29}$; $\arcsin\frac{16}{29}$; $\arcsin\frac{21}{29}$; с ребрами $\arcsin\frac{\sqrt{697}}{29}$; $\arcsin\frac{3\sqrt{65}}{29}$; $\arcsin\frac{20}{29}$. **4.** $\dfrac{2\sqrt{3}h}{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. (*Замечание.* На наш взгляд, в настоящий момент нет необходимости приводить ответ к виду, удобному для логарифмирования.) **5.** а) 120°; б) 90°; в) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; г) 60°. **6.** 60°. **7.** Arccos 0,25. **8.** $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. **9.** а) 60°; б) 90°; в) 45°; г) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; д) $2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$; е) $\pi - 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$; ж) $\pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; з) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Вариант 1

1. Четыре, пять или шесть граней. **2.** $\arcsin\frac{3}{13}$; $\arcsin\frac{4}{13}$; $\arcsin\frac{12}{13}$. **3.** $\dfrac{2h}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}-3}}$. **4.** а) 120°; б) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) 45°; г) 60°.

Вариант 2

1. Четыре, пять, шесть, семь, восемь или девять вершин. **2.** $\arcsin\frac{4\sqrt{13}}{17}$; $\arcsin\frac{\sqrt{145}}{17}$; $\arcsin\frac{15}{17}$. **3.** $\dfrac{2h}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. **4.** а) 90°; б) 45°; в) 45°; г) 60°.

К—11—4

Задачи для подготовки

1. а) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **2.** а) $\frac{a^3\sqrt{357}}{20}$; б) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; г) $\frac{3a^3}{8}$; д) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **3.** а) 5 : 427; б) 90°. **4.** $1\frac{3}{22}$. **5.** 5 : 27. **6.** 6 : 1. **7.** 9 : 2. **8.** 3 : 1. **9.** $288\sqrt{2}$. Многогранник не является правильным, так как существуют его вершины, в которых сходится различное число граней этого многогранника. **10.** $0{,}5V$.

Вариант 1

1. а) $\frac{a^3\sqrt{3}\sin\frac{\beta}{2}}{6}$; б) $\frac{a^3\sin^2\beta}{12\left(1+\sin\frac{\beta}{2}\right)}$; в) $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}}{6}$; г) $\frac{a^3\sqrt{3}\sin\beta}{36}$ или $\frac{a^3\sqrt{3}\sin\beta}{12}$. **2.** $64\sqrt{3}$ и $\frac{128}{3}$. **3.** а) 8; б) $\frac{6\sqrt{34}}{17}$. **4.** 3 : 7.

Вариант 2

1. а) $\frac{a^3}{48\cos^2\beta}$; б) $\frac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{24}$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\beta}{72}$; г) $\frac{a^3\operatorname{tg}^2\beta}{24}$ или $\frac{a^3\cos^2\frac{\beta}{2}}{24\cos^2\beta}$. **2.** $864\sqrt{3}$ и $432\sqrt{3}$. **3.** а) 8; б) $\frac{6\sqrt{19}}{19}$. **4.** 1 : 7.

К—11—5

Задачи для подготовки

1. а) $2R$; б) $\sqrt{h^2+2R^2}$. **2.** (3; 8]. **3.** $\arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. **4.** а) $0{,}5h\sqrt{3}$; б) $\frac{h(12-\sqrt{3})}{24}$. **5.** $\frac{18(9\sqrt{6}-22)}{\pi}$. **6.** 108π; 79π. **7.** Больше у конуса в $\sqrt[3]{1,5}$ раз. **8.** $\pi a^3 \mathrm{ctg}^2\ 10°$. **9.** $12\pi a^2$. **10.** $25\pi a^3 \mathrm{ctg}^2\ 20°$. **11.** $4\pi a^2$. **12.** Любое число, большее h.

Вариант 1

1. а) h; б) $2R$. **2.** $(6;\ 10]$. **3.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$; $2\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** а) $0,5c - r$; б) $c - 4r$. **5.** $388\ \pi$; $216\ \pi$.

Вариант 2

1. а) $2R$; б) $\sqrt{h^2 + R^2}$. **2.** $(6;\ 10]$. **3.** $\arcsin\frac{1}{2\cos\alpha}$; $\arcsin\frac{1}{2\cos\alpha}$; $2\arccos\frac{1}{2\cos\alpha}$. **4.** а) $\frac{h - m}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2h - m\sqrt{3}}{4}$. **5.** $305\ \pi$; $352\ \pi$.

К—11—6

Задачи для подготовки

1. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. **2.** $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. **3.** $(\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2})(\sqrt[3]{V_1^2} + \sqrt[3]{V_1V_2} + \sqrt[3]{V_2^2})$. **4.** $4R$. **5.** $\frac{550\pi}{81}$.

6. $\dfrac{\pi \cdot h^3 \sin^3\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3\sin^3\frac{\alpha - \beta}{2}}$. **7.** $\frac{2(10 - \sqrt{3})}{3}$; $2\pi(8 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})$.

8. $\sqrt{6}$.

Вариант 1

1. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. **2.** $\frac{250}{79}V$. **3.** $3R\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. $2,5S$. **2.** $(\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2})(\sqrt[3]{V_1^2} + \sqrt[3]{V_1V_2} + \sqrt[3]{V_2^2})$.
3. $2\arcsin\frac{1}{3}$; отношение объемов равно 0,5.

К—11—7

Задачи для подготовки

1. 4 или 14. **2.** $\sqrt{3}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{19}$; $3\sqrt{3}$. **3.** $5\sqrt{2}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** а) πh; б) $2\pi h\sqrt{3\sqrt{3}-5}$. **6.** $10\pi a^2$ и $\frac{13}{3}\pi a^3$. **7.** $4{,}2\pi a^2$; $4{,}5\pi a^3$. **8.** 6. **9.** Касается плоскости верхнего основания. **10.** $49 + 20\sqrt{6}$. **11.** $[2\sqrt{3} - 2; 2\sqrt{3} + 2]$.

Вариант 1

1. $\sqrt{33} + 3$ или $\sqrt{33} - 3$. **2.** $6\sqrt{3}$; $2\sqrt{43}$; $2\sqrt{59}$; $10\sqrt{3}$. **3.** а) $2\sqrt{3}$; б) 6. **4.** а) $\frac{4\pi h}{3}$; б) $\frac{4\pi h\sqrt{6}}{9}$. **5.** Имеет с плоскостью верхнего основания цилиндра общий круг.

Вариант 2

1. $6\sqrt{2} - 4$ или $6\sqrt{2} + 4$. **2.** $\sqrt{3}$; $\sqrt{51}$; $3\sqrt{11}$; $7\sqrt{3}$. **3.** а) 8; б) 8. **4.** а) πh; б) $\frac{2\pi h\sqrt{2}}{3}$. **5.** Не имеет с плоскостью верхнего основания общих точек.

К—11—8

Задачи для подготовки

1. $\frac{\pi r\sqrt{4R^2 - r^2}}{R}$. **2.** $\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$. **4.** а) $\frac{4}{\sqrt{17}}$; б) $\frac{8}{\sqrt{17}}$; в) $\arccos\frac{3}{\sqrt{17}}$; г) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{34}}$. **5.** 51. **6.** $160\sqrt{3}$; 240. **7.** $R = 2$. **8.** 1 : 2; 102.

9. Возможны два случая: $\frac{1}{3}\pi\cdot h^3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, где $\varphi = \min(\alpha, \beta)$, либо

$$\frac{1}{3}\pi\cdot h^3\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2.$$ **10.** 0,5.

Вариант 1

1. $\frac{2R}{3}$. **3.** $\frac{5\sqrt{3}}{4}$; 15. **4.** $\sqrt{2} : 3$.

Вариант 2

1. 2. **3.** 2; $2\sqrt{15} + \sqrt{39}$. **4.** 1 : 5.

Вариант 3

1. $2\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. **2.** а) $\dfrac{9}{\sqrt{94}}$; б) $\dfrac{9}{\sqrt{94}}$; в) $\arccos\dfrac{9}{\sqrt{94}}$;

г) $\arcsin\dfrac{6}{5\sqrt{94}}$. **3.** $5 - \sqrt{13}$. **4.** $\dfrac{r\sqrt{185}}{4}$.

Вариант 4

1. $\arccos\sqrt{\dfrac{1 - 2\cos\beta}{3}}$. **2.** а) $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$; б) $\dfrac{\sqrt{11}}{22}$; в) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{11}}$;

г) $\arccos\left(\dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)$. **3.** $7 - 3\sqrt{5}$. **4.** $\dfrac{16}{7}r$.

Вариант 5

1. $\dfrac{5\sqrt{2}ab}{16}$. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** $\dfrac{343\pi}{108\sqrt{3}}$. **4.** $2{,}5a^3$.

Вариант 6

1. $\dfrac{3a\sqrt{3a^2 + 12b^2}}{16}$. **2.** $\sqrt{\dfrac{3}{2}}R$. **3.** $\dfrac{300}{7^3 \cdot \pi}$. **4.** $7\sqrt{\dfrac{29}{3}}$.

Зачеты

Зачет № 1. Преобразование пространства. Прямые и плоскости в пространстве

Билет № 1

1. Центральная симметрия в пространстве: определение, свойства.
2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Билет № 2

1. Симметрия относительно плоскости: определение, свойства.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Билет № 3

1. Параллельный перенос: определение, свойства.
2. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Билет № 4

1. Поворот вокруг оси в пространстве: определение, свойства.
2. Угол между двумя прямыми в пространстве.

Билет № 5

1. Осевая симметрия в пространстве: определение, свойства.
2. Перпендикулярность прямой и плоскости в пространстве.

Билет № 6

1. Композиция двух симметрий относительно плоскости.
2. Угол между прямой и плоскостью.

Билет № 7

1. Скользящая симметрия в пространстве: определение, свойства.
2. Угол между двумя плоскостями.

Билет № 8

1. Зеркальный поворот в пространстве: определение, свойства.
2. Свойства параллельных плоскостей.

Билет № 9

1. Винтовое движение в пространстве: определение, свойства.
2. Перпендикулярные плоскости в пространстве.

Билет № 10

1. Гомотетия и подобие в пространстве: определение, свойства.
2. Теоремы о трех перпендикулярах.

Если учитель сочтет нужным включить в зачет решение задач, то мы советуем составить список всех задач, отмеченных значком ☺ в главе 1 нашего ЗАДАЧНИКА—11. Задачи из этого списка можно предложить учащимся для решения на зачете.

Зачет № 2. Многогранники. Векторы и координаты в пространстве

Билет № 1

1. Призма. Виды и свойства призм.
2. Сложение и вычитание векторов в пространстве.

Билет № 2

1. Параллелепипед. Виды и свойства параллелепипедов.
2. Умножение вектора на скаляр, коллинеарные и компланарные векторы в пространстве.

Билет № 3

1. Вычисление площади полной поверхности и объема призм. Объемы параллелепипедов.
2. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Билет № 4

1. Трехгранные углы и их свойства.
2. Скалярное произведение двух векторов в пространстве.

13 - - 5245

Билет № 5

1. Пирамида. Виды пирамид.
2. Координаты вектора в пространстве. Действия над векторами в координатах.

Билет № 6

1. Правильная пирамида и ее свойства.
2. Координаты точки в пространстве. Вычисление расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.

Билет № 7

1. Вычисление площади полной поверхности и объема пирамиды. Отношение объемов двух тетраэдров, имеющих по равному трехгранному углу.
2. Уравнение плоскости в пространстве.

Билет № 8

1. Усеченная пирамида. Вычисление ее площади полной поверхности и объема.
2. Различные виды уравнений прямой в пространстве.

Билет № 9

1. Правильные многогранники. Их виды.
2. Вычисление угла между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями, заданными своими уравнениями.

Билет № 10

1. Примеры разверток и сечений многогранников.
2. Вычисление расстояния от точки до плоскости в координатной форме.

Если учитель сочтет нужным включить в зачет решение задач, то мы советуем составить список всех задач, отмеченных значком ☺ в главе 2 нашего ЗАДАЧНИКА—11. Задачи из этого списка можно предложить учащимся для решения на зачете.

Зачет № 3. Поверхности и тела вращения. Повторение планиметрии

Билет № 1

1. Поверхности и тела вращения.
2. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора и обратная ей теорема.

Билет № 2

1. Цилиндр. Сечения цилиндра и цилиндрической поверхности плоскостями. Развертка цилиндра. Симметрия цилиндра.
2. Теоремы об окружности, вписанной в треугольник. Формулы для вычисления радиуса вписанной в треугольник окружности; частные случаи. Вневписанные окружности. Описанные четырехугольник и многоугольник, их свойства и признаки.

Билет № 3

1. Вычисление площади полной поверхности и объема цилиндра.
2. Теоремы об окружности, описанной около треугольника. Формулы для вычисления радиуса такой окружности; частные случаи. Теорема синусов. Вписанные четырехугольник и многоугольник, их свойства и признаки.

Билет № 4

1. Конус. Сечения конуса и конической поверхности плоскостями. Развертка конуса. Симметрия конуса.
2. Теорема косинусов. Теорема о сумме квадратов сторон и диагоналей параллелограмма.

Билет № 5

1. Вычисление площади полной поверхности и объема конуса.
2. Признаки подобия треугольников. Подобие многоугольников. Метрические соотношения соответственных элементов подобных фигур.

Билет № 6

1. Усеченный конус. Вычисление площади полной поверхности и объема усеченного конуса.
2. Формулы для вычисления площади треугольника. Вывод формулы Герона. Отношение площадей двух треугольников, имеющих по равному углу.

Билет № 7

1. Шар и сфера. Сечения шара и сферы плоскостями. Симметрия сферы. Плоскость, касательная к сфере. Взаимное расположение двух сфер.
2. Параллелограмм. (Обзор изученных фактов.)

Билет № 8

1. Вычисление площади поверхности сферы и ее частей, объема шара и его частей.
2. Трапеция. (Обзор изученных фактов.)

Билет № 9

1. Сферы, вписанные в многогранники, цилиндры и конусы.
2. Свойства биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника. Окружность Аполлония.

Билет № 10

1. Сферы, описанные около многогранников, цилиндров и конусов.
2. Пропорциональные отрезки в круге.

Если учитель сочтет нужным включить в зачет решение задач, то мы советуем составить список всех задач, отмеченных значком ☺ в главе 3 нашего ЗАДАЧНИКА—11. Задачи из этого списка можно предложить учащимся для решения на зачете.

Билеты для проведения итоговой устной аттестации по геометрии за курс одиннадцатилетней школы

(для классов с углубленным изучением математики)

Билет 1

1. Параллельность прямых в пространстве. Теорема о двух прямых, параллельных третьей.
2. Расстояния в пространстве. Геометрическое место точек, равноудаленных: а) от двух данных точек; б) от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой; в) от двух данных плоскостей.
3. Задача по теме «Векторы в пространстве: скалярное произведение векторов».

Задача. В прямоугольной декартовой системе координат заданы векторы $\vec{a}(2;\ 1;\ -1)$ и $\vec{b}(1;\ 2;\ -1)$. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $|\vec{c}| = 2\sqrt{11}$, а угол между $\vec{c}$ и осью Ox тупой.

Ответ: $\vec{c}(-2;\ -2;\ -6)$.

Билет 2

1. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости.
2. Трехгранные и многогранные углы.
3. Задача по теме «Комбинации многогранников и фигур вращения».

Задача. Около шара описана правильная треугольная призма, около которой описан шар. Найдите отношение площадей поверхностей этих шаров.

Ответ: 0,2.

Билет 3

1. Прямая, перпендикулярная плоскости. Признаки перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Задание сферы и шара с помощью координат.
3. Задача по теме «Сечения многогранников».

Задача. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — $3a$, проведено сечение параллельно боковому ребру. Найдите площадь этого сечения, если оно является ромбом.

Ответ: $\frac{9}{16}a^2$.

Билет 4

1. Связь между параллельностью прямых в пространстве и перпендикулярностью прямой и плоскости. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости.
2. Площади боковой и полной поверхностей призмы и цилиндра.
3. Задача по теме «Координаты в пространстве: уравнения плоскости и сферы».

Задача. На плоскости $x + 2y + 3z = 25$ найдите точку, удаленную на наименьшее расстояние от точки $A(2; -3; 5)$.

Ответ: $K(3; -1; 8)$.

Билет 5

1. Взаимное расположение двух плоскостей. Признаки параллельности двух плоскостей.
2. Прямая в пространстве в координатах.
3. Задача по теме «Вписанный шар, описанная сфера».

Задача. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AC = 4$, $BC = 3$, $\angle ACB = 90°$. Ребро AD длиной 12 перпендикулярно плоскости ABC. Найдите радиус описанной около пирамиды сферы.

Ответ: 6,5.

Билет 6

1. Свойства параллельных плоскостей. Теорема о существовании и единственности плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.
2. Площади боковой и полной поверхностей пирамиды, конуса, усеченных пирамиды и конуса.
3. Задача по теме «Комбинации многогранников».

Задача. Центры тяжести граней треугольной пирамиды являются вершинами многогранника. Найдите отношение объемов пирамиды и многогранника.

Ответ: 27.

Билет 7

1. Перпендикулярные плоскости. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

2. Площадь ортогональной проекции многоугольника.
3. Задача по теме «Площадь поверхности сферы, объем шара».

Задача. В правильной призме $ABCDA'B'C'D'$ ребро AB равно a, угол между AB' и DB равен α. Найдите площадь поверхности сферы, проходящей через точки B, B', C' и A'.

Ответ: $\pi a^2\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\alpha}\right)$.

Билет 8

1. Свойства перпендикулярных плоскостей. Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости.
2. Параллельный перенос в пространстве и его свойства.
3. Задача по теме «Шар».

Задача. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан шар радиуса R. Найдите площадь сечения шара плоскостью AD_1C.

Ответ: $\frac{2}{3}\pi R^2$.

Билет 9

1. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теоремы о трех перпендикулярах (две теоремы).
2. Правильные многогранники. Формула Эйлера (без вывода).
3. Задача по теме «Объем конуса, усеченного конуса».

Задача. Образующая усеченного конуса наклонена к плоскости основания под углом 60°, а центр большего основания равноудален от меньшего основания и боковой поверхности конуса. Найдите объем усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равна 2π.

Ответ: $\frac{7}{9}\pi$.

Билет 10

1. Углы между двумя прямыми в пространстве. Теорема об углах с сонаправленными сторонами.
2. Площадь поверхности шара и его частей: шарового пояса, шарового сектора, сегментной поверхности.
3. Задача по теме «Объем призмы».

Задача. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V, длина ее бокового ребра равна a. На прямой AA_1 выбирают отрезок MN длины b. Найдите объем пятигранника MNB_1BCC_1 (MN, C_1C, B_1B, B_1C_1, BC, MB_1, MC_1, NB, NC — ребра этого многогранника).

Ответ: $\frac{2a+b}{3a}V$.

Билет 11

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Признаки скрещивающихся прямых.
2. Векторы в пространстве. Линейные операции над векторами и их выражение в координатах.
3. Задача по теме «Цилиндр, конус».

Задача. Дан цилиндр, радиус основания и высота которого равны 3. Через точку M, лежащую в плоскости основания цилиндра и удаленную от его оси на расстояние 7, проводят всевозможные прямые, каждая из которых имеет с цилиндром единственную общую точку. Какие значения может принимать длина отрезка такой прямой, если его концами являются точка M и точка, общая для прямой и цилиндра?

Ответ: $[\sqrt{40}; 7]$.

Билет 12

1. Вывод формулы расстояния между двумя точками, заданными своими координатами. Вывод формул для вычисления координат точки, делящей заданный отрезок в данном отношении.
2. Сфера, описанная около данного многогранника. Расположение ее центра относительно многогранника (на примере сферы, описанной около призмы).
2. Задача по теме «Призма, параллелепипед, куб».

Задача. Диагонали AB_1 и DC_1 граней четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны. Докажите, что прямые AD_1 и BC_1 также параллельны.

Билет 13

1. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, запись в координатах.
2. Построение в пространстве: а) плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой; б) прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости.

3. Задача по теме «Объем пирамиды».

Задача. Высоту пирамиды разделили в отношении 3 : 7, считая от вершины, и провели сечение, параллельное основанию. В каком отношении разделился объем пирамиды?

Ответ: $\frac{27}{973}$.

Билет 14

1. Взаимное расположение шара (сферы) и плоскости в пространстве. Теорема о пересечении шара и сферы с плоскостью.
2. Параллельное проектирование и его свойства. Изображение (в параллельной проекции) фигур на плоскости: треугольника, параллелограмма, трапеции, тетраэдра, параллелепипеда; окружности и вписанного в нее правильного многоугольника.
3. Задача по теме «Боковая, полная поверхность пирамиды».

Задача. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной четырехугольной пирамиды, если плоскость, проведенная через сторону основания, делит этот угол и боковую поверхность пирамиды пополам.

Ответ: 45°.

Билет 15

1. Сечение пирамиды плоскостями, параллельными основанию. Теорема об отношении периметров и площадей сечений пирамиды плоскостями, параллельными основанию.
2. Поворот в пространстве вокруг прямой и его свойства. Фигуры вращения.
3. Задача по теме «Угол между двумя плоскостями, двугранный угол».

Задача. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α ($\alpha < 45°$). Найдите угол, под которым к плоскости основания наклонена плоскость, проходящая через сторону основания и центр шара, описанного около этой пирамиды.

Ответ: $\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg} 2\alpha)$.

Билет 16

1. Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам. Векторный базис в пространстве. Координаты вектора.

2. Пирамида. Виды пирамид. Усеченная пирамида.
3. Задача по теме «Прямые и плоскости в пространстве: угол между прямой и плоскостью».

Задача. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K является серединой ребра AC. Найдите расстояние от точки K до плоскости BCD и угол между прямой BK и этой плоскостью, если ребро тетраэдра равно a.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Билет 17

1. Задание пространственных фигур уравнениями и неравенствами. Уравнение плоскости.
2. Центральная симметрия в пространстве и ее свойства. Примеры центрально-симметричных пространственных фигур.
3. Задача по теме «Пирамида».

Задача. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки K и L — середины ребер AD и BC соответственно. Найдите угол между прямой KL и высотой CC_1 треугольника ABC.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Билет 18

1. Вывод формулы расстояния от точки до плоскости в координатах.
2. Призма. Виды призм.
3. Задача по теме «Прямые и плоскости в пространстве: угол и расстояние между прямыми».

Задача. Два прямоугольных не равных друг другу треугольника ABD и CBD имеют по равному острому углу α, общий катет $BD = a$ и общую вершину D прямого угла. Найдите угол и расстояние между прямыми AB и CD, если плоскости ABD и CBD взаимно перпендикулярны.

Ответ: $90°$; $a\cos\alpha$ или $a\sin\alpha$.

Билет 19

1. Вычисление объемов фигур вращения (с помощью интеграла). Вывод формул для вычисления объемов цилиндра, конуса, шара.
2. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Теорема о равенстве всех линейных углов данного двугранного угла.

3. Задача по теме «Прямые и плоскости в пространстве: расстояние между точками и от точки до прямой».

Задача. Внутри двугранного угла величины α ($\alpha < 90°$) взята точка M, удаленная от его граней на расстояния a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до ребра этого двугранного угла.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Билет 20

1. Вывод формулы для вычисления объема пирамиды.
2. Симметрия относительно плоскости. Ее свойства.
3. Задача по теме «Прямые и плоскости в пространстве: расстояние от точки до плоскости».

Задача. Дана правильная шестиугольная пирамида $PABCDME$ (P — вершина пирамиды). Найдите расстояния до плоскости PAB от каждой из вершин пирамиды, не лежащих на этой плоскости, если точка пересечения медиан грани PDM удалена от плоскости PAB на 8 см.

Ответ: по 12 см от M и D; по 6 см от E и C.

Задачи сборника «Единый государственный экзамен. Тестовые задания»

Экзамен 2001 г.

Задачи экзамена 2001 г. взяты из двух статей «Единый государственный экзамен. Тестовые задания», помещенных в газете «Математика», № 36 и № 40, 2002 г. (экзамен был в 2001 г.). После текста каждой задачи мы указали номера задач из нашего задачника для 11 класса, аналогичных данной задаче.

Вариант 1

B8. Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, двугранные углы при основании равны 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. (Г-11: 2.258, 2.259, 2.260,2.264, 2.269, 2.270, 2.271).

Решение. Пусть в правильной пирамиде $PABC$ с основанием ABC высотой является отрезок $PO = 2$, точка K — середина BC (рис. 76). Тогда $AK \perp BC$ и по теореме о трех перпендикулярах $PK \perp BC$, поэтому $\angle AKP = 30°$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC основания.

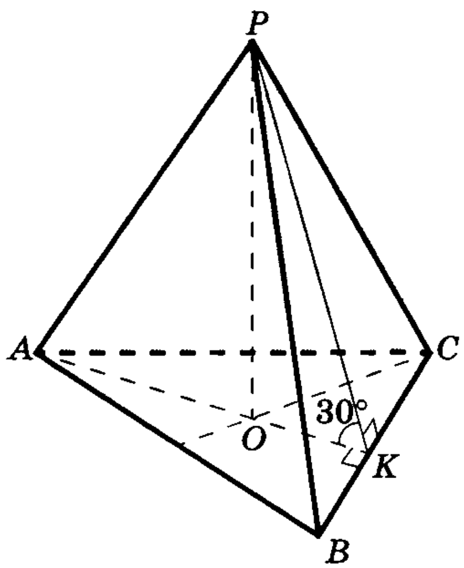


Рис. 76

В прямоугольном $\triangle OPK$: $PK = 2OP = 4$; $OK = OP \cdot \operatorname{ctg} 30° = 2\sqrt{3}$. Тогда в правильном $\triangle ABC$ получаем: $AK = 3OK = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC = \frac{2AK}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12.$$

Таким образом, находим: $S_{\text{бок}} = 3 \cdot S_{\triangle BCP} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PK = 3 \cdot \frac{1}{2} \times 12 \cdot 4 = 72.$

Ответ: 72.

Вариант 2

B9. В конус с радиусом основания 4 и высотой $4\sqrt{3}$ вписана треугольная призма, у которой все ребра равны. Найдите объем призмы. (Г-11: 3.080, 3.081, 3.082, 3.083.)

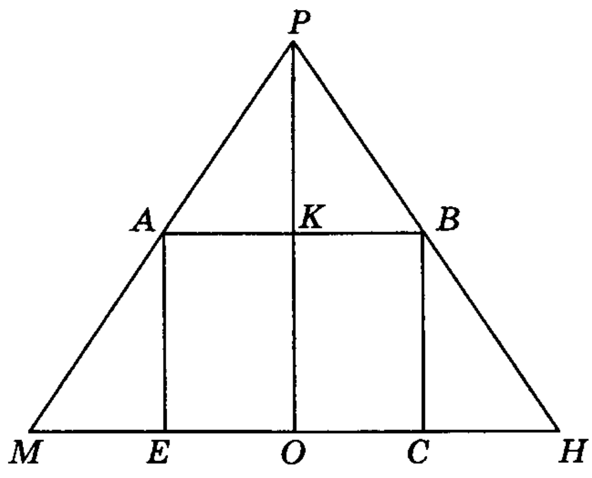


Рис. 77

Решение. Если все ребра призмы равны a, то радиус r окружности, описанной около основания этой призмы, равен $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, т. е. $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ или $a = r\sqrt{3}$. Это означает: чтобы в данный конус вписать треугольную призму, у которой все ребра равны a, нужно в этот конус вписать цилиндр с высотой $BC = a$ и радиусом основания $OC = r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, затем в полученный цилиндр вписать заданную призму (на рис. 77 изображено осевое сечение конуса — треугольник MPH — и вписанного в него цилиндра — прямоугольник $ABCE$). Найдем объем этой призмы.

Из $OP = 4\sqrt{3}$, $OK = a$, следует $PK = OP - OK = 4\sqrt{3} - a = 4\sqrt{3} - r\sqrt{3} = \sqrt{3}(4 - r)$. Из подобия треугольников BPK и HPO следует: $\frac{PK}{PO} = \frac{BK}{OH}$ или $\frac{(4-r)\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{r}{4}$, откуда $4 - r = r$, значит, $r = 2 = OC$. Тогда $a = 2\sqrt{3} = OK$ — высота призмы; $S_{\text{осн. приз}} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$, следовательно, $V_{\text{приз}} = 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$.

Ответ: 18.

Вариант 3

B9. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, объем которого $\frac{32}{3}\pi$. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 6. (Г-11: 3.298, 3.302, 3.305.)

Решение. Так как данная пирамида правильная, то центр O шара, вписанного в эту пирамиду, расположен на ее высоте PH.

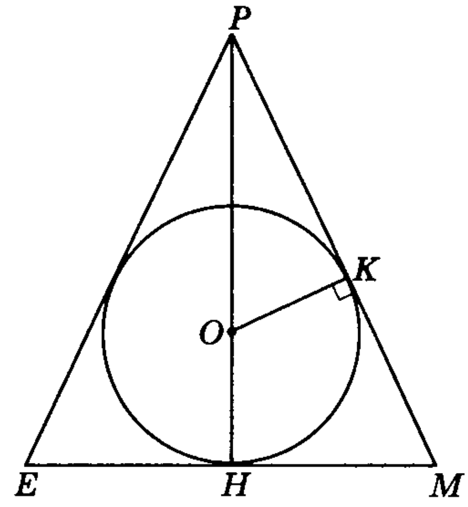


Рис. 78

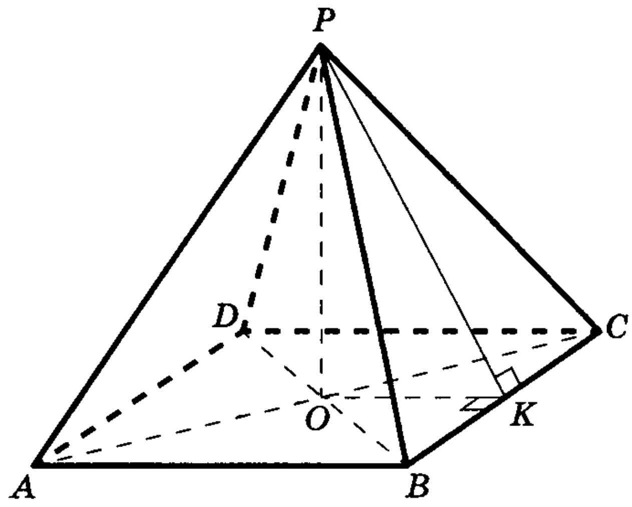


Рис. 79

Рассмотрим сечение комбинации шара и пирамиды плоскостью, проходящей через высоту PH пирамиды перпендикулярно сторонам ее основания. Это сечение представляет собой окружность с центром O, вписанную в равнобедренный треугольник MPE (рис. 78), где отрезок ME равен стороне основания пирамиды.

Обозначим $OK = OH = R$ — радиус шара. Тогда из условия $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi$ следует $R = 2$. Тогда $OP = PH - OH = 6 - 2 = 4$; $PK = \sqrt{OP^2 - OK^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

Из подобия треугольников OPK и MPH следует: $\frac{OK}{MH} = \frac{PK}{PH}$ или $\frac{2}{MH} = \frac{2\sqrt{3}}{6}$, откуда $MH = 2\sqrt{3}$. Тогда $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 96$.

Ответ: 96.

Вариант 4

B8. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 3, ее объем равен 64. Найдите площадь боковой поверхности. (Г-11: 2.302, 2.303, 2.310, 2.312, 2.314.)

Решение. Пусть PO — высота пирамиды $PABCD$, K — середина BC (рис. 79).

Из $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot OP$ получаем: $S_{\text{осн}} = \frac{3V_{\text{пир}}}{OP} = \frac{3 \cdot 64}{3} = 64 = BC^2 \Rightarrow BC = 8$. Тогда $OK = 4$ и $PK = \sqrt{OK^2 + OP^2} =$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Значит, $S_{бок} = 4\, S_{\triangle PBC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PK = 4 \cdot \frac{1}{2} \times 8 \cdot 5 = 80$.

Ответ: 80.

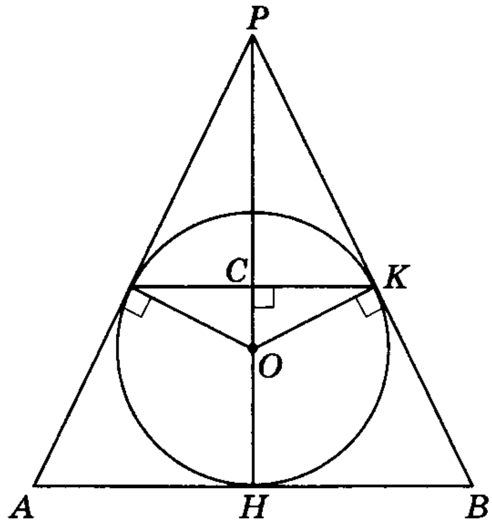


Рис. 80

Вариант 5

В9. Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π. Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π. Найдите радиус основания конуса. (Г-11: 3.357, 3.358, 3.360, 3.367, 3.462.)

Решение. На рисунке 80 изображено сечение данных сферы и конуса плоскостью, проходящей через ось PH конуса: BH — радиус основания конуса, $CK = r$ — радиус окружности касания конуса и вписанной в него сферы с центром O и радиусом $R = OK$ ($OK \perp BP$).

Из условия $4\pi R^2 = 100\pi$ и $2\pi r = 6\pi$ следует $R = 5$, $r = 3$. Тогда в прямоугольных треугольниках COK и POK имеем соответственно $OC = \sqrt{OK^2 - CK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ и $CP = \frac{CK^2}{OC} = \frac{9}{4}$, значит, $PH = PC + CO + OH = \frac{9}{4} + 4 + 5 = \frac{45}{4}$.

Далее, из $CK \| BH$ следует $\frac{BH}{CK} = \frac{PH}{PC} = \frac{45/4}{9/4} = 5$, откуда $BH = 5CK = 5 \cdot 3 = 15$.

Ответ: 15.

Экзамен 2002 г.

В9 (5.6.2). Осевое сечение конуса — треугольник ABC, где AC — диаметр основания. Образующая конуса равна 6. Из точки A к стороне BC проведена медиана, равная $\sqrt{17}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса. (Число π считать равным 3.) (Г-11: 3.042, 3.043, 3.044, 3.046, 3.060.)

Решение. На основании формулы, в которой выражается связь между медианой треугольника и его сторонами, получаем (рис. 81):

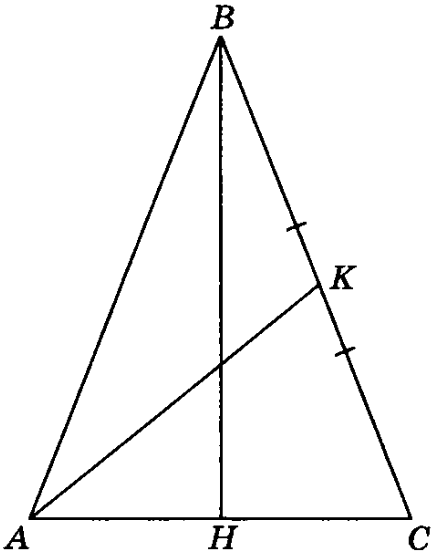


Рис. 81

$AK^2 = \dfrac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$, откуда $AC^2 = \dfrac{4AK^2 - 2AB^2 + BC^2}{2} = \dfrac{4 \cdot (\sqrt{17})^2 - 2 \cdot 6^2 + 6^2}{2} = 16$, значит, $AC = 4 = 2R$, где R — радиус основания конуса.

Тогда находим площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса:

$$S_{бок} = \pi Rl = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36.$$

Ответ: 36.

B9 (5.5.2). Боковые грани правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ наклонены к плоскости основания под углом 30°; апофема равна 4. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объем получившейся усеченной пирамиды. (Г-11: 2.275, 2.320, 2.321, 2.322, 2.338, 2.340, 2.341.)

Решение. Пусть квадрат $A_1B_1C_1D_1$ — сечение данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину K высоты SO пирамиды параллельно ее основанию (рис. 82).

Обозначим объемы данной пирамиды $SABCD$, пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ и усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно через V, V_1 и V_2, при этом $V = V_1 + V_2$.

Так как пирамида $SA_1B_1C_1D_1$ гомотетична пирамиде $SABCD$ с коэффициентом гомотетии, равным $\dfrac{1}{2}$, то $V_1 = \dfrac{1}{8}V$. Значит, $V_2 = \dfrac{7}{8}V$. Найдем V.

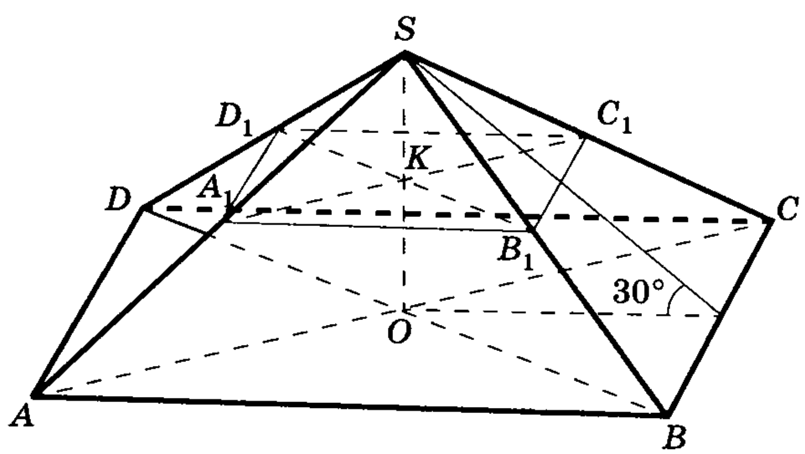


Рис. 82

Если точка P — середина BC, то $\angle OPS = 30°$ — линейный угол двугранного угла при ребре основания, поэтому в прямоугольном треугольнике OSP имеем: $OS = \frac{1}{2}PS = 2$, $OP = SP \cdot \cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, откуда $AB = 4\sqrt{3}$.

Таким образом, $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot 2 = 32$. Тогда $V_2 = \frac{7}{8}V = \frac{7}{8} \cdot 32 = 28$.

Ответ: 28.

Экзамен 2003 г.

Вариант 112

С3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки: S — середина A_1D_1 и T — центр грани BCC_1B_1. Найдите объем пирамиды $CDST$, если ребро куба равно 6. (Г-11: 2.323, 2.326, 2.328, 2.329, 2.330.)

Решение. Обозначим объем пирамиды $CDST$ через V. За основание пирамиды $CDST$ примем треугольник CDS, который является прямоугольным ($CD \perp (A_1AD)$, $DS \subset (A_1AD) \Rightarrow CD \perp DS$) с катетами CD и DS (рис. 83), тогда высотой этой пирамиды является перпендикуляр из точки T — вершины пирамиды $TCDS$ — на плоскость треугольника CDS (плоскость треугольника CDS проходит через середину K ребра B_1C_1). А так как плоскость CDS перпендикулярна грани BCC_1B_1 и $T \in (BCC_1)$, то перпендикуляр из точки T на плоскость CDS лежит в грани BCC_1B_1. Этим перпендикуляром является отрезок TH — высота треугольника CTK ($TH \perp KC$, $H \in KC$). Таким образом, $V = \frac{1}{3}S_{\triangle CDS} \cdot TH$. Найдем $S_{\triangle CDS}$ и TH.

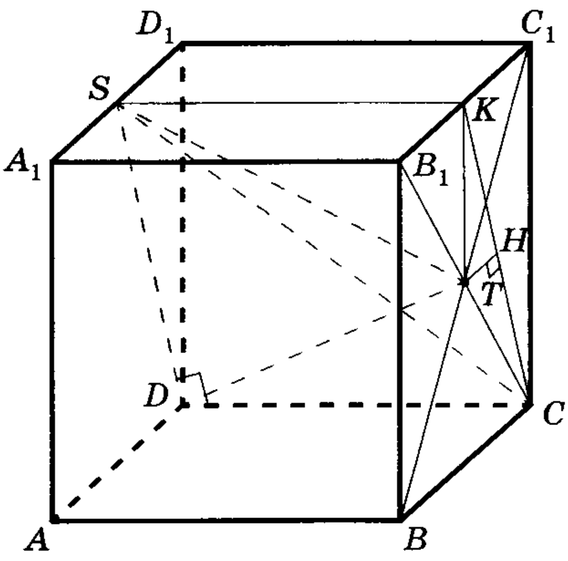


Рис. 83

$S_{\triangle CDS} = \frac{1}{2} CD \cdot DS = \frac{1}{2} CD \cdot \sqrt{D_1D^2 + D_1S^2} = \frac{1}{2} 6 \cdot \sqrt{6^2 + 3^2} = 9\sqrt{5}$.

Далее находим: $CK = DS = 3\sqrt{5}$; $KT = \frac{1}{2} B_1B = 3$; $CT = \frac{1}{2} B_1C = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Если $CH = x$, то $KH = 3\sqrt{5} - x$. Тогда из прямоугольных треугольников TKH и THC имеем: $TH^2 = TK^2 - KH^2 = CT^2 - CH^2$ или $9 - (3\sqrt{5} - x)^2 = 18 - x^2$, откуда $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$. Значит, $TH^2 = 18 - \left(\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{5}$, т. е. $TH = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Теперь находим $V = \frac{1}{3} S_{\triangle CDS} \cdot TH = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = 9$.

Ответ: 9.

Приложение

Тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2\alpha; \quad \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2\alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент			
	$90° + \alpha$	$90° - \alpha$	$270° + \alpha$	$270° - \alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Функция	Аргумент			
	$180° + \alpha$	$180° - \alpha$	$360° + \alpha$	$360° - \alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Величина угла							
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Формулы стереометрии

Векторы и координаты

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Правило треугольника	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	A, B, C — произвольные точки
Правило параллелограмма	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$	$OACB$ — параллелограмм
Правило многоугольника	$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots +$ $+ \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$	$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки
Правило параллелепипеда	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1}$	OA, OB, OC — ребра параллелепипеда; OC_1 — диагональ параллелепипеда
Формула вычитания	$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$	A, B, O — произвольные точки
Признак коллинеарности двух ненулевых векторов	$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$; $\lvert \vec{a} \cdot \vec{b} \rvert = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert$	k — число, отличное от нуля, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$
Признак компланарности трех векторов	$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$	x, y — числа
Середина отрезка	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	M — середина отрезка AB; O — произвольная точка

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Точка пересечения медиан (*центроид*)	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$	M — центроид треугольника ABC; O — произвольная точка
Скалярное произведение векторов	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$	$\vec{a}, \vec{b}$ — ненулевые векторы
Сложение и вычитание векторов в координатах	$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$	$\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$
Умножение вектора на число	$k\vec{a}(kx; ky; kz)$	k — число; $\vec{a}(x; y; z)$
Скалярное произведение	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$; φ — величина угла между векторами; $\vec{a}(x; y; z)$
Косинус угла между векторами	$\cos \varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$	
Длина вектора	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	
Расстояние между точками A и B	$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$
Уравнение плоскости	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	$\vec{n}\,(A; B; C)$ — вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0\,(x_0; y_0; z_0)$ — точка, принадлежащая плоскости

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$	$M\ (x;\ y;\ z)$ — произвольная точка плоскости
Косинус угла между двумя плоскостями Условие перпендикулярности двух плоскостей Условие параллельности двух плоскостей	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}};$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$ — плоскости; φ — величина угла между этими плоскостями
Расстояние от точки до плоскости (d)	$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	$M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка; $Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость
Параметрические уравнения прямой	$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{p};$ $\begin{cases} x = x_0 + ka_1, \\ y = y_0 + ka_2, \\ z = z_0 + ka_3 \end{cases}$	$\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой; $\vec{r}_0$ — радиус-вектор данной точки прямой; $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой; k — параметр; $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ — данная точка прямой; $M\ (x;\ y;\ z)$ — произвольная точка прямой; $\vec{p}\ (a_1;\ a_2;\ a_3)$ — направляющий вектор прямой

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Уравнения прямой по двум ее точкам Косинус угла между двумя прямыми Условие перпендикулярности двух прямых Условие параллельности двух прямых	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$; $\cos\varphi = \frac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$; $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$; $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$	$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ — данные точки; $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{p}_1(b_1; b_2; b_3)$ — направляющие векторы прямых; φ — величина угла между ними
Синус угла между прямой и плоскостью Условие перпендикулярности прямой и плоскости Условие параллельности прямой и плоскости	$\sin\varphi = \frac{\lvert Aa_1 + Ba_2 + Ca_3\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$; $\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$; $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость; $\vec{p}(a_1; a_2; a_3)$ — направляющий вектор прямой; φ — величина угла между прямой и плоскостью

Многогранники

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь поверхности куба (S)	$S = 6a^2$	a — длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot h$	P — периметр основания; h — высота (длина бокового ребра)

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P — периметр перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра
Площади боковой поверхности прямого параллелепипеда ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P — периметр основания; l — длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot a$; $S_{бок} = \frac{Q}{\cos \varphi}$	P — периметр основания; a — апофема; Q — площадь основания; φ — величина двугранного угла при стороне основания
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	P, P_1 — периметры оснований; h — апофема
Объем куба (V)	$V = a^3$	a — длина ребра куба
Объем прямоугольного параллелепипеда (V)	$V = abc$	a, b, c — измерения параллелепипеда
Объем призмы (параллелепипеда) (V)	$V = S_{осн} \cdot h$; $V = Q \cdot l$	$S_{осн}$ — площадь основания; h —высота; Q — площадь перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра
Объем пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S_{осн}$ — площадь основания; h — высота

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем усеченной пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2)$	Q_1, Q_2 — площади оснований; h — высота
Отношение объемов двух тетраэдров $MABC$ и $M_1A_1B_1C_1$, имеющих равные трехгранные углы с вершинами M и M_1	$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$	MA, MB, MC, M_1A_1, M_1B_1, M_1C_1 — длины ребер тетраэдров

Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ($S_{бок}$)	$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$	R — радиус основания; h — высота
Площадь полной поверхности цилиндра ($S_{полн}$)	$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$	R — радиус основания; h — высота
Площадь боковой поверхности конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi Rl$	R — радиус основания; l — длина образующей
Площадь полной поверхности конуса ($S_{полн}$)	$S_{полн} = \pi R(l + R)$	R — радиус основания; l — длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi l(R + r)$	R, r — радиусы оснований; l — длина образующей
Площадь сферы (S)	$S = 4\pi R^2$	R — радиус сферы
Площадь сегментной поверхности (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус сферы; H — высота сегментной поверхности

Окончание таблицы

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь шарового пояса (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус шара; H — высота шарового пояса
Площадь поверхности шарового сектора (S)	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	R — радиус шара; h — высота шарового сегмента
Объем цилиндра (V)	$V = \pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем конуса (V)	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем усеченного конуса (V)	$V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + Rr + R^2)$	R, r — радиусы оснований; H — высота
Объем шара (V)	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V = \frac{1}{6}\pi d^3$	R — радиус шара; d — диаметр шара
Объем шарового слоя (V)	$V = \frac{\pi H}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$	r_1, r_2 — радиусы оснований шарового слоя; H — высота
Объем шарового сегмента (V)	$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$; $V = \frac{\pi H}{6}(3r^2 + H^2)$	R — радиус шара; H — высота; r — радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора (V)	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H$	R — радиус шара; H — высота

Содержание

Учебное издание

Потоскуев Евгений Викторович
Звавич Леонид Исаакович

ГЕОМЕТРИЯ

11 класс

Методическое пособие
к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича
«Геометрия. 11 класс»

Зав. редакцией *Г. Н. Хромова*
Редактор *Г. Н. Хромова*
Художественный редактор *А. А. Шувалова*
Технические редакторы *В. Ф. Козлова, Н. И. Герасимова*
Компьютерная верстка *В. В. Ивлиева*
Корректоры *Г. И. Мосякина, Г. Н. Кузьминова*

Санитарно-эпидемиологическое заключеиие
№ 77.99.15.953.Д.005481.08.04 от 25.08.2004.

Подписано к печати 24.05.05. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,0. Тираж 2000 экз. Заказ № 5245.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложення и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в учебную редакцию издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (095) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

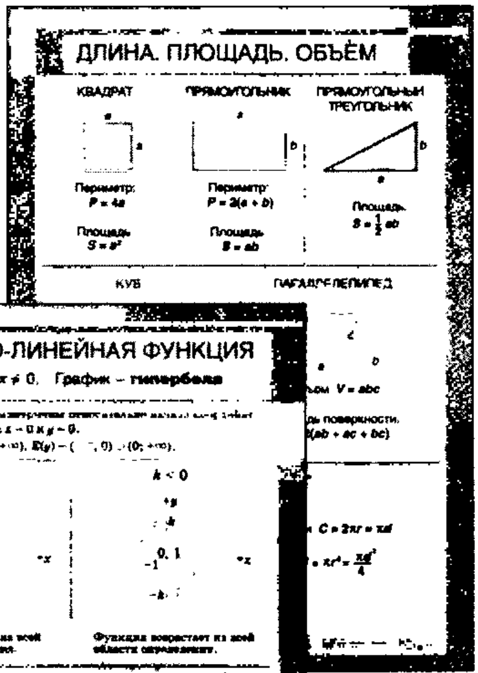
Торговый дом «Школьиик».
109172, Москва, Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

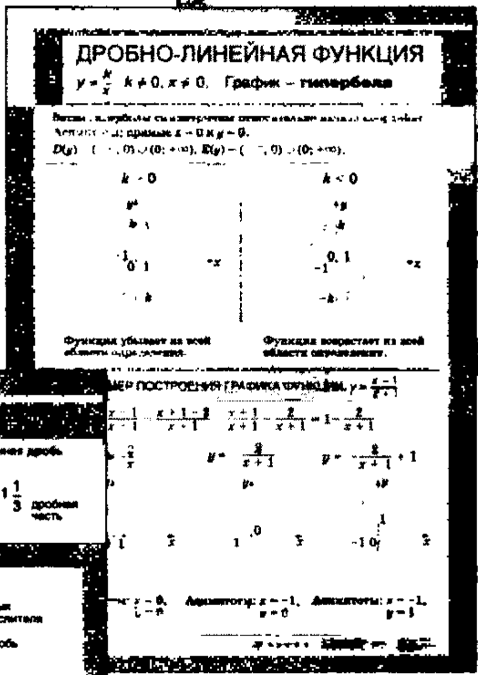
Сеть магазинов «Переплетные птицы».
Тел.: (095) 912-45-76.

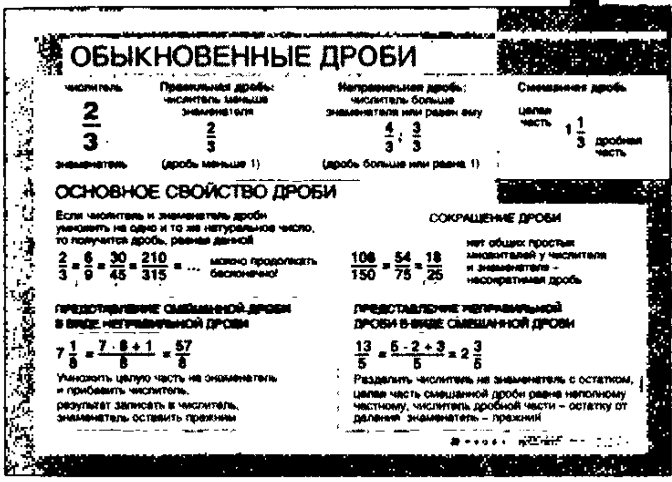
Отпечатано с готовых диапозитивов на ФГУП ордена «Знак Почета»
Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова.
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

НАГЛЯДНЫЕ ПОСОБИЯ

Таблицы по математике содержат справочную информацию, необходимую на уроках в 5–11 классах. Они помогут не только сделать процесс обучения более эффективным, но и украсят кабинет математики. Использование таблиц для оформления кабинета тем более актуально, что по рекомендациям Министерства образования РФ учащимся разрешается пользоваться справочными материалами на письменных и устных экзаменах по математике.







Предлагаем вашему вниманию серию наглядных пособий — **«ПОРТРЕТЫ»**.

Эти нагпядные пособия предназначены дпя оформления кабинетов, а также дпя использования во время занятий в классе и при проведении тематических вечеров в школе.

В комплект для кабинета математики входят портреты выдающихся зарубежных и отечественных математиков с древних времен до XX века.

Л. И. Звавич, М. В. Чинкина.

«МНОГОГРАННИКИ: РАЗВЕРТКИ И ЗАДАЧИ». Ч. 1, 2, 3.

В пособии представпено окопо 70 разверток многогранников разного уровня спожности, встречающихся в школьном курсе геометрии 10–11 классов. К каждому виду разверток даются задачи, связанные с многогранниками, которые можно склеить из этих разверток.

Все задачи снабжены ответами или указаниями к решению.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов.

«КОМПЬЮТЕР ПОМОГАЕТ ГЕОМЕТРИИ».

В данной книге рассматриваются **компьютерные графические редакторы общего назначения,** используемые для изображения геометрических фигур. Помимо этого, она содержит теоретический и практический материап по геометрии, задачи разпичного уровня трудности. Книга будет полезна учителям математики, а также учащимся 7–11 классов, интересующимся геометрией и желающим познакомиться с современными графическими средствами.

М. В. Ткачева.

«ВРАЩАЮЩИЕСЯ КУБИКИ».

Альбом заданий состоит из двух основных частей: тестов, позволяющих провести диагностику уровня развития пространственного мышпения, и тренинга. Основу тренинга составляют задания, связанные с поворотом куба вокруг своей оси. Книга рассчитана на широкую аудиторию: от дошкольников до старшеклассников и взрослых.