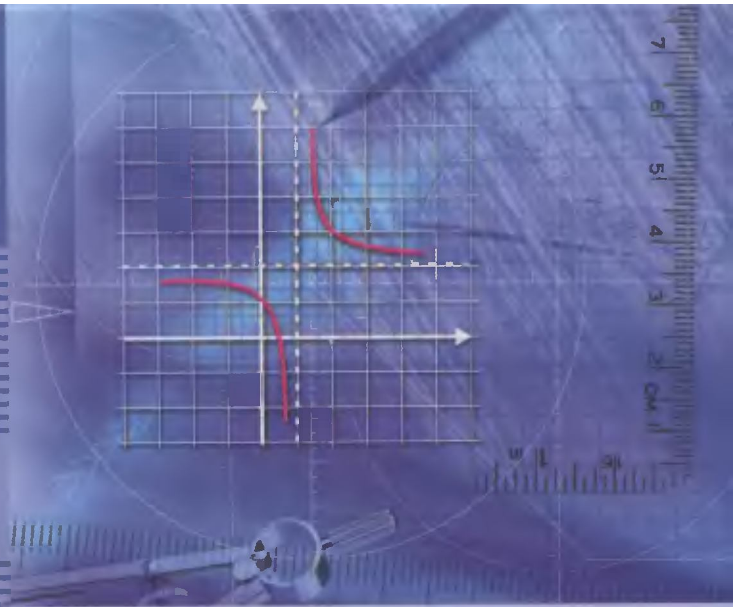


Л. И. Звавич

А. Р. Рязановский

Алгебра

Задачник

8 класс

Издательство Мнемозина

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \\ b^2 = a \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0; b \geqslant 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0; b > 0)$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n \quad (a \geqslant 0)$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Л. И. Звавич
А. Р. Рязановский

АЛГЕБРА

8 класс

Задачник
для учащихся общеобразовательных учреждений

5-е издание, переработанное

Издательство
Мнемозина

Москва 2008

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
З-42

Звавич Л. И.

З-42 Алгебра. 8 класс : задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. — 5-е изд., перераб. — М. : Мнемозина, 2008. — 271 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01083-8

Данное пособие предусматривает занятия с учащимися, проявляющими интерес и способности к математике. Целью работы в соответствующих классах является формирование у школьников устойчивого интереса к предмету, дальнейшее развитие их математических способностей, ориентация на профессии, связанные с математикой, на применение математических методов в различных отраслях науки и техники.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

ISBN 978-5-346-01083-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный задачник предназначен для работы **в 8-м классе с углубленным изучением математики**. Его структура соответствует построению учебника *А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева* «Алгебра. 8 класс». Обе книги созданы в рамках единой концепции, основные моменты которой изложены ниже.

Главная особенность развития системы школьного математического образования — ориентация на самую широкую дифференциацию обучения математике, в результате чего каждый, кто проявляет интерес и способности к математике, получает возможности для их развития.

Углубленное изучение математики в школе направлено на решение основных задач обучения данному предмету — развитие абстрактного и логического мышления учащихся, а также обеспечение прочного и сознательного овладения системой математических знаний и умений, необходимых для изучения смежных дисциплин и продолжения образования. Эти знания, как известно, являются общекультурным достоянием человечества.

Углубленное изучение математики предусматривает работу с учащимися, проявляющими интерес и способности к этому предмету. Целью работы в таких классах является, в частности, формирование у школьников устойчивого интереса к предмету, дальнейшее развитие их математических способностей, ориентация на профессии, связанные с математикой.

Особо выделим подготовку будущих выпускников к поступлению и обучению в высших учебных заведениях.

Естественно, что в классах с углубленным изучением математики, как и в других классах общеобразовательной школы, непременным требованием является освоение учащимися обязательного минимума знаний и умений в соответствии со всеми документами и государственной программой для общеобразовательных школ.

Углубленное изучение математики прежде всего предполагает наполнение курса разнообразными, интересными и сложными задачами, основанными на программном материале. Определенное место должна занимать и самостоятельная деятельность школьников: работа с дополнительной литературой, подготовка докладов и рефератов.

В углубленном изучении математики можно выделить два этапа, связанных с возрастными возможностями и особенностями детей.

Первый этап относится к углубленному изучению математики в 8—9-м классах. Подготовка учащихся к этому этапу может начаться уже в 7-м классе и проводиться на факультативных и кружковых занятиях. На этом этапе происходит осознание учащимся своего интереса к предмету, оценка своих возможностей. Задача учителя — помочь ученику понять себя, но ни в коем случае не навязывать ему занятия математикой как единственно возможные в будущем. Вполне вероятно, что на первом этапе обучения (как и на втором) ученик поймет, что свой выбор сделал необдуманно, что математика не является его любимым предметом. Тогда он может вернуться к обучению в общеобразовательных классах или перейти в класс с углубленным изучением какого-либо другого предмета.

8—9-й классы в определенном смысле являются судьбоносными для дальнейшего изучения математики. На этом этапе не только изучается и формируется большинство основных понятий, но и во многом закладываются чисто «технические» навыки учащегося (в частности, вычислительные и преобразовательные). Поэтому данный курс практически не содержит новых по отношению к программе общеобразовательных классов тем, а состоит из более глубокого изучения вопросов общей программы, за исключением более детального изучения многочленов и делимости.

В задачнике приведено более 4000 задач, большинство из которых — повышенной трудности. Но для того, чтобы ученик мог проверить, освоен ли материал на стандартном, общеобразовательном уровне, в каждом параграфе имеется определенное количество заданий, соответствующих этому уровню, часть которых взята из задачника «Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений» А. Г. Мордковича и др., а также из иных источников. Если учителю при работе покажется, что таких заданий в нашем задачнике недостаточно или требуются более простые задания, то он может использовать вышеупомянутый задачник в качестве дополнительного.

Авторы считают, что набор приведенных задач повышенной трудности соответствует и по содержанию, и по уровню сложности программе углубленного изучения алгебры в 8-м классе. Поэтому предлагаемый задачник может быть использован при работе и по другим учебникам, а также как дополнительное пособие для работы с сильными учащимися в общеобразовательных классах, в кружках и на факультативах. Задачник также может быть использован на начальном этапе самостоятельной подготовки в вуз. Продолжением этой книги является задачник для 9-го класса.

Хорошим подспорьем при работе с задачником является наше справочное пособие «Алгебра в таблицах. 7—11 классы».

Авторы желают учителям и учащимся успешной работы по данному задачнику и надеются на сотрудничество. Мы будем очень признательны за все критические замечания, которые просим направлять в адрес издательства «Мнемозина».

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7-го КЛАССА

Арифметика

0.01. Используя таблицу квадратов, сократите дроби:

а) $\frac{144}{256}$; $\frac{225}{81}$; $\frac{324}{216}$; $\frac{196}{512}$; $\frac{361}{95}$;

б) $\frac{441}{576}$; $\frac{625}{250}$; $\frac{289}{187}$; $\frac{484}{1331}$; $\frac{1089}{999}$.

0.02. Вычислите:

а) $253\frac{2}{17} - 123\frac{5}{6}$;   в) $21\frac{5}{7} : 7$; $21\frac{6}{7} : 3$.

б) $148{,}1 - 256\frac{1}{15}$;

0.03. Найдите значение выражения:

а) $0{,}11 - 0{,}58 + 4{,}89 - 0{,}42$;
б) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + 999 - 1000$;
в) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - \ldots - 99 - 100$;
г) $1 - (2 - (3 - (4 - \ldots - (99 - 100)\ldots)))$;
д) $1 - (2 - (3 - (4 - \ldots - (99 - (100 - 101))\ldots)))$;
е) $1 - (2 + (3 - (4 + \ldots + (99 - 100)\ldots)))$;
ж) $1 - (2 + (3 - (4 + \ldots + (99 - (100 + 101))\ldots)))$;
з) $(43^2 - 1)(43^2 - 2) \cdot \ldots \cdot (43^2 - 5000)$ (всего 5000 сомножителей).

0.04. Докажите, что разность трехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делится на 9.

0.05. Чтобы число, оканчивающееся на 5, возвести в квадрат, можно отбросить последнюю цифру, оставшееся число умножить на число, большее его на 1, и приписать справа 25. Объясните, почему это так.

0.06. Пусть десятичная запись числа A состоит из ста пятерок, а числа B — из ста троек. Найдите десятичную запись чисел:

а) $A + B$;   г) $B : 33$;
б) $A + 2 \cdot B$;   д) $A : 5555 - B : 3333$.
в) $A : 5$;

0.07. Пусть десятичная запись числа A состоит из ста семерок. Найдите остаток от деления числа A на:

а) 77;   в) 7 777 777;
б) 777;   г) 77...7 (всего 32 семерки).

0.08. Найдите неизвестный член пропорции

$$\frac{5 : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)}{x} = \frac{7 : \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)}{9 : \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{5}\right)}.$$

0.09. Найдите значение выражения

$$3 : \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) + 5 : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) + 7 : \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right) + \ldots + 21 : \left(\frac{11}{10} - \frac{10}{11}\right).$$

Попытайтесь установить закономерность и обобщить полученный результат.

0.10. Используя производные пропорции (см. Замечание к № 2.17), найдите число a из следующих пропорций:

а) $\frac{a+1}{a} = \frac{50}{43}$; б) $\frac{1-a}{a} = \frac{50}{43}$; в) $\frac{2a+1}{a} = \frac{11}{4}$.

0.11. Используя свойство равных отношений, найдите число a из следующих пропорций:

а) $\frac{a+1}{3} = \frac{1-a}{4}$; б) $\frac{1-a}{11} = \frac{3-2a}{12}$.

0.12. Записаны все целые числа, удовлетворяющие условию $25 \leqslant n \leqslant 425$.

а) Сколько целых чисел записали?

б) Сколько записанных чисел начинаются с цифры 3?

в) Сколько записанных чисел оканчиваются нулем?

г) Сколько чисел записано с помощью одной цифры (например, 222 или 33)?

д) Сколько раз написали цифру 2?

0.13. Каким числом месяца может быть третья пятница?

0.14. Каким днем может быть первый день месяца, если второй четверг этого месяца идет после второй субботы?

0.15. Сколько месяцев в году могут иметь пять вторников?

0.16. Найдите число, которое при делении на 85 дает в остатке 23, а в неполном частном 13.

0.17. Число при делении на 1267 дает и в частном, и в остатке 387. Найдите остаток от деления этого числа на 1268.

0.18. Число при делении на 265 дает в остатке 13. Найдите остатки от деления этого числа:

а) на 53; б) на 5.

0.19. Найдите число b, составляющее $p\%$ от числа a, и заполните таблицу:

a	14	38	24	0,65	24	34	46
p	20	15	0,32	88	101	200	350
b							

0.20. Найдите число b, большее числа a на $p\%$, и заполните таблицу:

a	1	2	3	4	5	6
p	20	15	0,32	88	121	234
b						

0.21. Найдите число b, меньшее числа a на $p\%$, и заполните таблицу:

a	1	2	3	4	5	6
p	20	15	0,32	88	12	23
b						

0.22. Найдите число b, от которого число a составляет $p\%$, и заполните таблицу:

a	1	2	3	4	5	6
p	20	15	0,32	88	12	234
b						

0.23. Определите число p и заполните таблицу, если число a составляет $p\%$ от числа b:

a	10	2	0,032	4	20	15	0,32	88
p	20	15	0,32	88	10	2	0,032	4
b								

0.24. Товар сначала подорожал на 20%, затем подешевел на 20%. Как и на сколько процентов изменилась первоначальная его цена?

0.25. Смешали 40 г 20%-го и 60 г 30%-го растворов соли. Определите процентное содержание соли в полученном растворе.

0.26. Из 60%-го раствора соли выпарили половину имевшейся в нем воды. Определите процентное содержание соли в полученном растворе.

0.27. Среди посетителей стадиона 80% составляют мужчины, из них 40% — неженатые. Какой процент посетителей стадиона составляют женатые мужчины?

0.28. В учреждении 68% работников знают английский язык и 35% — немецкий. Каким может быть процент работников этого учреждения, знающих оба языка?

0.29. В январе завод выполнил месячный план на 105%, а в феврале увеличил его по сравнению с январем еще на 4%. На сколько процентов перевыполнил завод двухмесячное задание?

0.30. В течение одного месяца во время диеты спортсмен за первую неделю похудел на 8%. В конце второй недели похудел еще на 4%. Однако за следующую неделю его вес увеличился на 10%, а в конце четвертой недели возрос еще на 5%. Каким образом изменился вес спортсмена за месяц? (Выразите это изменение в процентах.)

0.31. Известно, что курс доллара по отношению к рублю ежегодно возрастает на 25%. На сколько процентов падает курс рубля по отношению к доллару при этих условиях?

0.32. Свежие абрикосы содержат 80% влаги, а курага (высушенные абрикосы) содержит 20% влаги. Сколько потребуется свежих абрикосов для приготовления 5 кг кураги?

0.33. Известно, что в жилом доме 43,5% составляют пенсионеры. Каково наименьшее число жильцов в этом доме?

0.34. Процент учеников 8-го класса, получивших оценку «3» за контрольную работу по математике, составляет от 26,5 до 26,7%. Каково наименьшее число учащихся в этом классе и сколько из них получили оценку «3»?

0.35. Первая труба заполняет бассейн за 6 ч, вторая — за 4 ч. За какое время они заполнят бассейн, работая одновременно?

0.36. Каждый из пяти рабочих первой бригады, работая один, может выполнить данное задание за 10 ч, а каждый из трех рабочих второй бригады — за 14 ч. За какое время выполнят задание две бригады, работая одновременно?

0.37. Мастер, работая один, выполняет задание за 3 дня, а ученик — за 5 дней. Мастер и три ученика, работая вместе, выполнили задание и получили на всю бригаду 1400 руб. Как распределить деньги?

0.38. Две машины выехали из одного и того же пункта в одном и том же направлении со скоростями 80 км/ч и 60 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 3 ч 15 мин?

0.39 Две машины выехали навстречу друг другу из пунктов A и B со скоростями 80 км/ч и 60 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 3 ч 15 мин, если расстояние между A и B равно:

а) 600 км; б) 300 км?

0.40. Поезд, движущийся со скоростью 72 км/ч, проходит мимо семафора за 8 с. Найдите длину поезда.

0.41. Поезд, движущийся со скоростью 72 км/ч, проходит мимо платформы длиной 120 м за 12 с. Найдите длину поезда.

0.42. Поезд, движущийся со скоростью 72 км/ч, проходит мимо едущей в том же направлении со скоростью 60 км/ч автомашины за 30 с. Найдите длину поезда.

0.43. Поезд, движущийся со скоростью 80 км/ч, проходит мимо едущей в противоположном направлении со скоростью 64 км/ч автомашины за 1,5 с. Найдите длину поезда.

0.44. Не производя вычислений, докажите, что сумма всех разных трехзначных чисел меньше миллиона.

0.45. Рассмотрим время, начиная с 0 ч до 24 ч включительно. Сколько раз за это время часовая и минутная стрелки:

а) совпадают по направлению;
б) образуют развернутый угол;
в) образуют прямой угол;
г) образуют угол 23°;
д) образуют угол 30°?

Многочлены от нескольких переменных

0.46. Запишите все различные одночлены 7-й степени с коэффициентом 1, используя буквы a и b.

0.47. Запишите многочлены в стандартной форме, определите их степени и коэффициенты:

а) $4 + 12x - 3xy + 2y$; в) $\frac{2a}{3} + \frac{3b}{2} - \frac{b^2a}{4} + 3a - 2b$.

б) $a - b - c + 2abc - 1$;

0.48. Упростите выражение, выполнив умножение и сложение многочленов «столбиком» или используя формулы сокращенного умножения:

а) $(8x + 3y)(5y - x) - (6x + 4y)(3y + 5x)$;

б) $(-8x + 3y)(5y + x) - (-6x + 4y)(3y - 5x)$;

в) $(8y - x)(6y - x)(6x + 4y) + (8y + x)(6y + x)(-6x + 4y)$;

г) $(8y - x)(6y - x)(6x + 4y) - (8y + x)(6y + x)(-6x + 4y)$;

д) $(8y^2 - yz + 5z^2)(8y^2 + yz - 5z^2) +$
$+ (8y^2 - yz + 5z^2)(8y^2 - yz - 5z^2)$;

е) $(8y^2 - yz + 5z^2)(6y^2 + 5yz - z^2) -$
$- (8y^2 + yz + 5z^2)(6y^2 - 5yz - z^2)$;

ж) $(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 - y^2 + z^2) - (x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.

0.49. Пусть $p(x;\ y) = 3x - 2y$. Докажите, что
$$p(kx;\ ky) = k \cdot p(x;\ y).$$

0.50. Пусть $p(x;\ y) = 5x^2 - 2xy + 7y^2$. Докажите, что
$$p(kx;\ ky) = k^2 \cdot p(x;\ y).$$

0.51. Пусть $p(x;\ y) = 5x^2 - 2xy + 5y^2$. Докажите, что
$$p(a;\ b) = p(b;\ a).$$

0.52. Вычислите $x^2 + y^2$, если $xy = 1$, $x + y = 12$.

0.53. Пусть $xy = q$, $x + y = p$. Найдите:

а) $x^3 + y^3$; б) $x^4 + y^4$; в) $x^5 + y^5$.

Упростите выражение (0.54—0.56):

0.54. а) $(y - x)(y^{99} + y^{98}x + y^{97}x^2 + y^{96}x^3 + \ldots + yx^{98} + x^{99})$;
б) $(y + x)(y^{99} - y^{98}x + y^{97}x^2 - y^{96}x^3 + \ldots + yx^{98} - x^{99})$.

0.55. $(y - x)(y + x)(y^2 + x^2)(y^4 + x^4)(y^8 + x^8) + x^{16}$.

0.56. $(y^2 + yx + x^2)(y^2 - yx + x^2)(y^4 - y^2x^2 + x^4)(y^8 - y^4x^4 + x^8)$.

0.57. Запишите данные выражения как произведение двух многочленов первой степени с целыми коэффициентами:

а) $3(y - 4x)\left(x + \frac{1}{3}y\right)$; в) $100(0{,}1x + y)(2x - 0{,}1y)$;

б) $8\left(z - \frac{3}{4}y\right)\left(y + \frac{1}{2}z\right)$; г) $-15\left(v - \frac{4}{5}u\right)\left(u - \frac{2}{3}v\right)$.

0.58. Найдите частное двух многочленов, используя метод деления «углом»:

а) $\dfrac{5x^2 + xy - 4y^2}{x + y}$;   в) $\dfrac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 - xy + y^2}$;

б) $\dfrac{x^3 + 3x^2y + 4xy^2 + 4y^3}{x + 2y}$;   г) $\dfrac{y^3 - 5x^2y + 4xy^2 + 3xy + 15x^2}{5x + y}$.

0.59. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $34{,}5^2 - 33{,}5 \cdot 35{,}5$;   б) $444{,}4^2 - 555{,}5 \cdot 333{,}3$.

0.60. Представьте степень в виде многочлена:

а) $(a + b + 1)^2$;   в) $(a + b + c + d)^2$;

б) $(a - b + 2c)^2$;   г) $(7a - 3b + 5c - 2d)^2$.

0.61. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

0.62. Представьте число $888\,778 \cdot 888\,776 + 1$ в виде произведения двух натуральных чисел, больших единицы.

0.63. Представьте число $888 \cdot 889 \cdot 890 \cdot 891 + 1$ в виде произведения двух натуральных чисел, каждое из которых больше единицы.

0.64. Вычислите $\dfrac{(2^2 - 1)(4^2 - 1)(6^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (2000^2 - 1)(2002^2 - 1)}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot 1999^2 \cdot 2001^2}$.

0.65. Разложите многочлены на множители:

а) $x^4 - 4y^2 + 4y - 1$;

б) $x^4 + 2x^2y + 4y - 4$;

в) $a^4 + 4b^4$;

г) $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 2(a^3 + b^3 + c^3)$;

д) $(a + b - c)^3 - a^3 - b^3 + c^3$;

е) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

0.66. Докажите следующие полезные тождества:

а) $\dfrac{(p + q)^2}{2} + \dfrac{(p - q)^2}{2} = p^2 + q^2$;

б) $\dfrac{(p + q)^2}{2} - \dfrac{(p - q)^2}{2} = 2p \cdot q$;

в) $x^2 + y^2 = 1$, если $x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$;

г) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3 \cdot (x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x)$;

д) $x \cdot y^2 + y \cdot z^2 + z \cdot x^2 - x \cdot z^2 - y \cdot x^2 - z \cdot y^2 =$
$= (x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x)$.

0.67. При каких значениях переменных многочлен принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение:

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 1$;

б) $x^2 + 4xy + 5y^2 + 4y + 2$;

в) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x + 2y - 4z + 12$.

0.68. Пусть $x + y = 6$. Докажите, что $x^2 + y^2 = 2(18 - xy)$.

0.69. Пусть $x - y = 1$. Докажите, что $x^3 - y^3 = 1 + 3xy$.

0.70. Пусть $5x - 3y = 0$. Найдите значение выражения:

а) $25x^2 + 9y^2 + 70x - 42y - 30xy - 1$;

б) $10x^2 - xy - 3y^2 + 2$.

0.71. При каких значениях x и y многочлен

$$11x^2 + 4xy + y^2 - 4y + 1$$

принимает наименьшее значение, если $x - y = 2$?

0.72. При каких значениях x и y многочлен

$$x^2 + 2xy - 3y^2 - 5x - y + 1$$

принимает наибольшее значение, если $x + y = 1$?

0.73. При каких значениях x и y многочлен

$$x^2 - 11xy + y^2 + 2x + 4y + 10$$

принимает наименьшее значение, если $x + y = 2$?

0.74. Пусть $3x - 2y - z = 1$, $x + 2y + 2z = 5$. Найдите значение выражения $4z + 6y - 5x$.

0.75. Пусть $3x - 2y - z + t = 1$, $x + 2y + 2z + 2t = 2$, $x + y + 3z - 4t = 5$. Найдите значение выражения $\frac{2}{2x - y - 6z + 17t}$.

0.76. Пусть $\frac{1}{x + y + z + t} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{x + 2y + 4z + t} = \frac{1}{4}$.

Найдите $x - 2z + t$.

ГЛАВА 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.01. Найдите все значения переменных, при которых дробь не определена:

а) $\frac{x^2 + x - 9}{x - 4}$; д) $\frac{13u^2 - 11u}{u^2 + 4u + 5}$; и) $\frac{ab - 5a}{(2a + 1)(b - 2)}$;

б) $\frac{a - 5}{(a - 5)(a + 8)}$; е) $\frac{41r - 17}{r^2 + |r| + 3}$; к) $\frac{5st^2 - s^2t}{s^2 + 4st - 5t^2}$;

в) $\frac{t^2 + 5t}{t^2 - 4t}$; ж) $\frac{41t - 17}{t - |t|}$; л) $\frac{\frac{2}{b} - \frac{1}{b + 1}}{b - 2}$;

г) $\frac{13v - 19}{v^2 + 4v + 4}$; з) $\frac{41x - 17}{t - |t|^2}$; м) $\frac{z + 1}{\frac{4}{z + 2} - \frac{3}{z - 1}}$.

1.02. Найдите допустимые значения переменных для дроби:

а) $\frac{b^2 + 5b - 6}{b - 2}$; ж) $\frac{h}{|h| - 1}$;

б) $\frac{5a - 6}{3a + 2}$; з) $\frac{4x - 7}{7x^2 + 4|x| + 5}$;

в) $\frac{5l^2 - 6}{3l^2 + 2}$; и) $\frac{41k - 17}{k + |k|}$;

г) $\frac{c^2 - c + 8}{(c^2 + 2)(c - 3)(3c + 7)}$; к) $\frac{2}{\frac{1}{a + 2} - \frac{1}{a - 3}}$;

д) $\frac{a^2 - 6a - 13}{a^2 - 25}$; л) $\frac{1 + s}{|3 - s| + 2}$;

е) $\frac{a^2 - 6a - 13}{|a|^2 - 25}$; м) $\frac{\frac{1}{d}}{|3 - |d + 2||}$.

1.03. Какие значения может принимать число a, если дробь $\frac{x^2 + 2x - 8}{x - a}$ определена при всех значениях x, удовлетворяющих условию:

а) $x \neq 0$; г) $3 \leqslant x < 11$; ж) $0 < |x| < 100$;
б) $x < 5$; д) $|x| > 1$; з) $1 \leqslant |x| \leqslant 3$?
в) $x \geqslant -8$; е) $|x| \leqslant 2$;

1.04. При каких значениях числа a дробь $\frac{1 - x^2}{2x + 3}$ определена при всех значениях x, удовлетворяющих условию:

а) $x < a$; г) $-11 \leqslant x < a$; ж) $-1 < a \leqslant x + 1$;
б) $x \geqslant a$; д) $1{,}1 \leqslant x < a$; з) $a - 1 < x \leqslant a + 2$?
в) $a \leqslant x < 7$; е) $a \leqslant x < a + 1$;

1.05. При каких целых значениях числа a дробь $\frac{x^3 + x - a}{3x - 5}$ определена при всех значениях x, удовлетворяющих условию:

а) $x < a$; г) $-11 \leqslant x < a$; ж) $a - 3 \leqslant x < a + 1$;
б) $x \geqslant a$; д) $1{,}1 \leqslant x < a$; з) $|x| < a$?
в) $a \leqslant x < 7$; е) $a \leqslant x < 2$;

1.06. При каких значениях числа a дробь $\frac{x^3 + x - a}{(x - 1)(x + 8)}$ определена при всех значениях x, удовлетворяющих условию:

а) $x < a$; г) $-11 \leqslant x < a$; ж) $a - 3 \leqslant x < a + 1$;
б) $x \geqslant a$; д) $1{,}1 \leqslant x < a$; з) $|x| < a$?
в) $a \leqslant x < 7$; е) $a \leqslant x < 2$;

1.07. При каких значениях a определена для всех значений x дробь:

а) $\frac{3x - a}{x^2 - a}$; в) $\frac{3x - a}{x - 3}$;
б) $\frac{ax - 3}{x^2 + 1}$; г) $\frac{3x - a}{ax - 5}$?

1.08. Найдите все пары $(a;\ b)$, при которых данная дробь не определена, и изобразите их на координатной плоскости ab:

а) $\frac{3a - 5b}{8a + 3b}$; г) $\frac{10a}{25a^2 + 30ab + 10b^2}$;
б) $\frac{10a}{25a^2 + 30ab + 9b^2}$; д) $\frac{10a}{24a^2 + 30ab + 9b^2}$;
в) $\frac{10a}{25a^2 + 30ab + 8b^2}$; е) $\frac{10a}{(a - 1)(b - 1)}$.

1.09. Найдите, если это возможно, значение данной дроби при заданных значениях переменных:

а) $\dfrac{3x-1}{x^2-9}$ при всех $x \in \left\{-5\dfrac{1}{2}; -3; -0{,}5; \dfrac{1}{3}; 1\dfrac{1}{6}; 2\dfrac{1}{7}\right\}$;

б) $\dfrac{b-a}{b^2+a}$ при $\begin{cases} a = 3, \\ b = -7; \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{1}{3}, \\ b = \dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -36, \\ b = -6. \end{cases}$

1.10. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 5}$. Найдите $f(1)$; $f(-3)$; $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$; $f(x+1)$; $f(3x-1)$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.11. Пусть $\dfrac{x}{y} = 3$. Найдите значение дроби $\dfrac{3x^2 - 5xy + 2y^2}{x^2 + 5y^2}$.

1.12. Пусть $\dfrac{3b-a}{b-2a} = 4$. Найдите значение выражения

$$\frac{2a^2 - 3ab + 2b^2}{2a^2 - ab}.$$

1.13. Сократите дробь и выясните, изменилось ли в результате сокращения множество допустимых значений ее переменных:

а) $\dfrac{8x}{8a}$;

б) $\dfrac{x-1}{x^2-x}$;

в) $\dfrac{2x^2+8}{10x^3+40x}$;

г) $\dfrac{|x|}{x^2}$;

д) $\dfrac{x^4+x^2}{x^2+|x|}$;

е) $\dfrac{d^2-8dn+16n^2}{12n-3d}$;

ж) $\dfrac{2x^2-32}{64-x^3}$;

з) $\dfrac{x^2+4x+5}{x^3+4x^2+5x}$.

1.14. Сократите дроби:

а) $\dfrac{ac-bd+bc-ad}{af-bd+bf-ad}$;

б) $\dfrac{a^2+2bc-b^2-c^2}{b^2-a^2-c^2+2ac}$;

в) $\dfrac{t^4+4}{t^3-2t^2+2t}$;

г) $\dfrac{ac-2bc-ab+b^2+c^2}{bc+2ab-ac-b^2-a^2}$.

1.15. Докажите, что значение данной дроби при всех допустимых значениях x равно -8, укажите эти допустимые значения x:

а) $\dfrac{8x - 8}{1 - x}$;

б) $\dfrac{8x^3 - 64}{(2 - x)(x^2 + 2x + 4)}$;

в) $\dfrac{8x - \dfrac{8}{x^2}}{\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\left(x + \dfrac{1}{x} + 1\right)}$;

г) $\dfrac{8x - 8|x|}{|x| - x}$.

1.16. Укажите все такие значения параметра a, при которых значение данной дроби при всех допустимых значениях t постоянно. Укажите это постоянное значение дроби и допустимые значения t:

а) $\dfrac{t - 3}{t - a}$;

б) $\dfrac{t^3 + 8}{(2 + at)(t - t^2 - 1)}$.

1.17. При каких значениях параметра a дробь $\dfrac{t^2 - ta}{a - t}$ ни при каких допустимых значениях t не принимает значения, равного 5?

1.18. При каких значениях параметра a дробь $\dfrac{(x - a)(2x - 1)}{x - a}$ ни при каких допустимых значениях x не принимает значения, равного 11?

1.19. Решите уравнение $\dfrac{x^2 + 6x}{x + 6} = a$:

а) при $a = 3$;
б) при $a = -3$
в) при $a = -6$;
г) для всех значений параметра a.

1.20. Решите уравнение $\dfrac{x^2 - ax}{x - a} = 2$:

а) при $a = 3$;
б) при $a = -5$;
в) при $a = 2$;
г) для всех значений параметра a.

1.21. Решите уравнение $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = a$:
а) при $a = 3$;
б) при $a = -1$;
в) при $a = -2$;
г) для всех значений параметра a.

1.22. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{2x - 5}$;   г) $y = \dfrac{2x^3}{x + |x|}$;

б) $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{x}$;   д) $y = \dfrac{3x^2 - x}{2x - |x|}$.

в) $y = \dfrac{2x^3 + 5x}{2x^2 + 5}$;

1.23. Постройте множество точек $(x;\ y)$ на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $\dfrac{x - 1}{y - 1} = 0$;   в) $\dfrac{x^2 - 2xy + x}{x(x - y)} = 0$;

б) $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = 0$;   г) $\dfrac{x^2 - y^2 - 2y - 1}{x + y + 1} = 0$.

1.24. Для каждого значения c решите уравнение:

а) $\dfrac{x + 1}{x - c} = 0$;   г) $\dfrac{x + 3}{x - 4} = c$;

б) $\dfrac{x - c}{x - 5} = 0$;   д) $\dfrac{bx - 3}{x + 2} = 0$;

в) $\dfrac{2x - c}{x - 4} = 1$;   е) $\dfrac{bx + 4}{x + 2} = 2$.

1.25. Выразите указанную переменную из данного равенства:

а) $(x - 2)(y + 4) = 15$. Выразите переменную y;

б) $x^2 \cdot k - (k + 1)x - 4 = 0$. Выразите переменную k;

в) $(x + y)(2y - z) + x - 5 = 0$. Выразите переменную x;

г) $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}} = 1$. Выразите переменную z.

1.26. Найдите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{b^2x}{a + 1} + bx + 2 = a$ имеет решения при любом значении b.

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

2.01. Выполните действия:

а) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{7}$;   в) $\dfrac{x}{7 - x} + \dfrac{y}{x - 7}$;

б) $\dfrac{x + 2y}{x + 3y} - \dfrac{x - y}{3y + x}$;   г) $\dfrac{5x + 2y}{2x - 3y} - \dfrac{5x - 2y}{3y - 2x}$.

Выполните действия и укажите допустимые значения переменных (2.02—2.04):

2.02. а) $\frac{29 - x}{7} + \frac{34 + 2x}{7}$;   в) $\frac{2x + 5z}{17z - 5y} + \frac{2x + 17y}{5y - 17z}$;

б) $\frac{4x + 2y}{7x - 3y} - \frac{3x - 5y}{3y - 7x}$;   г) $\frac{5x + 2y}{2x - 3y} - \frac{y - 7x}{3y - 2x}$.

2.03. а) $\frac{2t + z}{7z - t} + \frac{z - t}{t - 7z} + \frac{6t + 21z}{t - 7z}$;

б) $\frac{3x^2 + xy}{x(x - y)} - \frac{x^2 - 7xy}{xy - x^2} + \frac{-xy - x^2}{(y - x)x}$.

2.04. а) $\frac{4a^2}{4a^2 + 1} + \frac{8a^2 + 1}{4a^2 + 1} - \frac{2(8a^2 + 1)}{4a^2 + 1}$;

б) $\frac{25m^2}{5m - 3} - \frac{3(10m - 3)}{5m - 3}$;

в) $\frac{0{,}04t^2}{0{,}2t - 10} + \frac{4t - 100}{5(2 - 0{,}25t)}$;

г) $\frac{15}{49b^2 - 225} + \frac{7b}{225 - 49b^2}$;

д) $\frac{144x^2}{(12x - 7)^2} - \frac{49}{(7 - 12x)^2}$;

е) $\frac{5}{(y - 1)(2 - y)} + \frac{y - 7}{(1 - y)(y - 2)}$.

2.05. Упростите и найдите значение выражения:

а) $\frac{3 + 2x}{(2 + x)(4 - x)} + \frac{1 + x}{(x + 2)(x - 4)}$ при $x = 3{,}95$;

б) $\frac{5y - 61}{(y - 2)(3 - y)(y - 1)} - \frac{55 - 3y}{(2 - y)(y - 3)(1 - y)}$ при $y = 1{,}8$.

2.06. Докажите, что выражение $\frac{2 - 25a^2}{(5a - 3)^4} - \frac{7 - 25a}{(3 - 5a)^4} - \frac{4 - 5a}{(5a - 3)^4}$ при всех допустимых значениях a принимает отрицательные значения.

2.07. Выполните указанные действия:

а) $\frac{2}{x} - x$;   в) $1 - t + \frac{5t - 2}{2 - 3t}$;

б) $5a + \frac{5ab}{a - b}$;   г) $3 - r + \frac{r^2}{r + 3}$.

2.08. Выполните указанные действия:

а) $\frac{3x}{5y} - \frac{2x}{15y}$; в) $\frac{10}{pq} + \frac{10}{qr} + \frac{10}{rp}$;

б) $\frac{s}{pq} - \frac{16p}{qr}$; г) $\frac{y-x}{xy} + \frac{z-y}{yz} + \frac{x-z}{zx}$.

2.09. Упростите выражение $x + y - \frac{x^2 + y^2}{x - y}$.

Выполните действия (2.10, 2.11):

2.10. а) $\frac{a^2}{(z-b)^2} - \frac{a+b}{2a-2b}$;

б) $\frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} + \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$.

2.11. а) $\frac{1}{(b-5)^2} - \frac{2}{b^2 - 25} + \frac{1}{(b+5)^2}$;

б) $\frac{1}{(2m-5n)^2} - \frac{2}{25n^2 - 4m^2} + \frac{1}{(5n+2m)^2}$.

2.12. Докажите равенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

2.13. Найдите алгебраическую сумму:

а) $\frac{8}{(x^2+3)(x^2-1)} + \frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1}$ при $x = 0{,}992$;

б) $\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ при $x = 0{,}1$;

в) $\frac{(x+1)^3}{x} - \frac{(x+1)^2}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$ при $x = -2{,}1$.

2.14. Пусть $f(x) = \frac{2x+3}{x^2 - x + 1} + \frac{3-2x}{x^2 + x + 1}$.

Вычислите $f(x) - f(-x)$.

2.15. Пусть $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{3x^2 - 7x + 5} - \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 7x + 5}$.

Вычислите $f(x) - f(-x)$.

2.16. Пусть $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$.

Докажите, что $\frac{a_1 + a_2 + .. + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = k$.

2.17. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Докажите, что:

1) $\frac{a + kb}{b} = \frac{c + kd}{d}$;

2) $\frac{a}{b - la} = \frac{c}{d - lc}$;

3) $\frac{a + kb}{b + la} = \frac{c + kd}{d + lc}$ при любых значениях k и l.

Замечание. Пропорции 1, 2 и 3, полученные из заданной пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ указанным способом, называются *производными пропорциями.*

2.18. Пользуясь производными пропорциями (см. *Замечание* к № 2.17), решите уравнения с переменной x:

а) $\frac{1 + x}{x} = \frac{29}{22}$; в) $\frac{a - x}{x} = \frac{b}{h}$;

б) $\frac{x}{x + 2} = \frac{3}{2}$; г) $\frac{a - x}{R + x} = \frac{R}{h - R}$.

2.19. Найдите такие числа a и b, что равенство $\frac{3x - 5}{x - 1} = a + \frac{b}{x - 1}$ выполняется при всех допустимых значениях x.

2.20. Найдите такие числа a и b, что равенство $\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$ выполняется при всех допустимых значениях x.

2.21. Найдите такие числа a и b, что равенство $\frac{2x + 5}{x^2 - 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2}$ выполняется при всех допустимых значениях x.

2.22. Пусть $x = \frac{a - b}{a + b}$; $y = \frac{b - c}{b + c}$; $z = \frac{c - a}{c + a}$. Докажите, что справедливо равенство $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$.

Упростите выражение (2.23, 2.24):

2.23. $\frac{a^3}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^3}{(c - a)(c - b)}$.

2.24. а) $\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$;

б) $\frac{b - c}{b + c} + \frac{c - a}{c + a} + \frac{a - b}{a + b} + \frac{(b - c)(c - a)(a - b)}{(b + c)(c + a)(a + b)}$.

2.25. Докажите, что при всех натуральных значениях n верно равенство $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Используя это равенство, найдите сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

2.26. Докажите, что при всех натуральных значениях n

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

2.27. Используя результат № 2.26, найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 101}.$$

§ 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ. ВОЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Выполните действия (3.01—3.03):

3.01. а) $16xy \cdot \frac{pq}{8x^2y}$; в) $\frac{25mn^3}{49p^2} : 125m^3n$;

б) $81a^2b^3 \cdot \frac{5c}{54a^3b^2}$; г) $144a^6b : \frac{36a^7b^2}{5c}$.

3.02. а) $\frac{2a+3b}{5xy} : \frac{3b+2a}{50x^2}$; в) $\frac{x^3y+xy^3}{2(y-x)} \cdot \frac{5(x-y)}{x^2+y^2}$;

б) $\frac{34zt^3}{12x-5y} : \frac{85z^3t}{5y-12x}$; г) $\frac{x+y}{6x^2-xy} \cdot \frac{6xz-yz}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2}{2z}$.

3.03. а) $\frac{ab-bc}{ca+ab} : \frac{a-c}{a^2} \cdot \frac{c+b}{b^2}$; б) $\frac{bc+ca}{b(b-c)} \cdot \frac{a^2b-ab^2}{c(a+b)} : \frac{a^2-ab}{b^2-bc}$.

Упростите выражение (3.04—3.06):

3.04. а) $\frac{x^2-y^2}{3xy} \cdot \frac{3y}{x-y}$; б) $\frac{5a^2}{a^2-16} : \frac{5a}{a+4}$.

3.05. а) $\frac{x^2-10x+25}{3x+12} : \frac{2x-10}{x^2-16}$; б) $\frac{1-a^2}{4a+8b} \cdot \frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$.

3.06. а) $\frac{1}{a^3-b^3} \cdot (a^2-b^2)$; б) $(8a^2+1) : \frac{4a^2-2a+1}{n}$.

Выполните указанные действия (3.07, 3.08):

3.07. а) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^6$; в) $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^6}\right)^4$; д) $\left(-\frac{3n^6k^3}{10p^4}\right)^{35}$;

б) $\left(-\frac{8z}{15t}\right)^2$; г) $\left(\frac{5a^4c^3}{2k^3}\right)^3$; е) $\left(-\frac{5x^6y^3}{z^8}\right)^4$.

3.08. а) $\left(\frac{x^2}{2a^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4a^4}{x^3}\right)^2$; б) $\left(-\frac{2a^8b^3}{c^7}\right)^5 : \left(-\frac{4a^{10}b^4}{c^9}\right)^4$.

Упростите выражение (3.09, 3.10):

3.09. а) $\frac{x^2-1}{x^3+1} : \frac{x^2-2x+1}{x^2-x+1}$; б) $\frac{y^3-8}{y^2-9} \cdot \frac{y+3}{y^2+2y+4}$.

3.10. а) $\frac{a^2-6a+9}{1-b^3} : \frac{2a-6}{b^2-1}$; б) $\frac{b^2-6b+9}{4b^2-6b+9} \cdot \frac{27+8b^3}{6-2b}$.

3.11. Докажите тождество:

а) $\frac{4x^2}{2x-y} : \frac{12x^3}{4x^2-y^2} \cdot \frac{2x^2}{6x^2+3xy} = \frac{1}{9}$;

б) $\frac{x^3z+125z}{x^2-16z^2} : \frac{x^3-25x}{x^2-8xz+16z^2} \cdot \frac{x+4z}{x^2-5x+25} = \frac{zx-4z^2}{x^2-5x}$;

в) $\frac{a^4-64ab^3}{a^2-2ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2b-16b^3} : \frac{a^3+4a^2b+16ab^2}{ab+4b^2} = \frac{a+b}{b(a-b)}$;

г) $\frac{a^2+a}{2a-8} \cdot \frac{a^2+a}{2a+8} : \frac{3a^2+6a^2+3a}{a^2-16} = \frac{1}{12}$.

3.12. Найдите область определения выражения $A(x)$, выполните действия и упростите выражение:

а) $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x^2-x}{x+1}}$; б) $\dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}$.

3.13. Найдите область определения функции, упростите выражение и постройте график функции:

а) $y=(x-1)\cdot\frac{2x-1}{x-1}$; в) $y=\frac{x^2-4x}{(x-4)^2}\cdot\frac{x^2-16}{2x}$;

б) $y=\frac{2x+3}{x} : \frac{4x+6}{5x^2}$; г) $y=\frac{x^3+1}{(x+2)^2}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2-x+1}$.

3.14. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x} : \dfrac{x - 2}{2x}$;

б) $y = \dfrac{2x^2 - 10x + 8}{x + 3} : \dfrac{x - 1}{3x + 9}$.

3.15. Докажите, что:

а) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$;

б) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

3.16. Общее сопротивление трех параллельно соединенных проводников можно найти по формуле $\dfrac{1}{R_{общ}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$.

Выразите $R_{общ}$ как дробь от R_1, R_2 и R_3.

3.17. Из пункта A в пункт B со скоростью v_1 выехал автомобиль. Приехав в пункт B, автомобиль мгновенно развернулся и со скоростью v_2 поехал обратно в пункт A. Выразите его среднюю скорость $\bar{v}$ на всем продолжении пути туда и обратно. Как изменится результат, если, доехав до пункта B, автомобиль пробыл там a часов, а затем поехал обратно в пункт A, если a составляет k-ю часть суммарного времени на путь из пункта A в пункт B и обратно, из пункта B в пункт A?

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Упростите выражение, выполнив указанные действия (**4.01, 4.02**):

4.01. а) $(a - 2b)(a + 2b)(a^2 + 4b^2)$;
б) $(3n - p)(3n + p)(9n^2 + p^2)$;
в) $(2m^2 + 3n)(4m^4 - 6m^2n + 9n^2) - 28n^3$;
г) $(5c - 2p^2)(25c^2 + 10cp^2 + 4p^4) - 126c^3$.

4.02. а) $\left(\dfrac{d^3 - 8}{d^2 - 4} - \dfrac{6d}{d + 2}\right) : \left(1 - \dfrac{4}{d + 2}\right)^2$;

б) $\left(c - \dfrac{c^3 + 8}{2c + c^2}\right) \cdot \dfrac{c}{(c - 2)^2} + \dfrac{2}{2 - c}$.

Найдите значение выражения, выполнив указанные действия (**4.03, 4.04**):

4.03. а) $\frac{2a}{a+1}+\left(\frac{3}{(a-1)^2}-\frac{3}{a^2-1}\right):\frac{3}{a^2-2a+1}$;

б) $\frac{b^2+8b+16}{b}\cdot\left(\frac{b}{(b+4)^2}+\frac{b}{16-b^2}\right)+\frac{8}{b-4}$.

4.04. а) $\left(1-\frac{2b}{a+2b}\right):\left(\frac{2b-a}{a+2b}\cdot\left(1+\frac{a}{a-2b}\right)\right)$;

б) $\left(\frac{5c^2-c}{25c^2-10c+1}+\frac{4}{1-25c^2}\right):\left(1-\frac{3}{5c-1}\right)-\frac{c}{5c+1}$.

4.05. Представьте многочлен в стандартном виде:

а) $\frac{y}{y+2}+\left(\frac{1}{4-y^2}-\frac{1}{4-4y+y^2}\right):\frac{2}{(y-2)^2}$;

б) $\frac{x^2-10x+25}{2x}\cdot\left(\frac{x}{x^2-25}-\frac{x}{(x-5)^2}\right)+\frac{5}{5+x}$;

в) $\frac{b^2-1}{3b^2-4b+1}\cdot\frac{3b-1}{b}+\frac{1}{b}$;

г) $\frac{4c^2-1}{2c^2+c-1}:\frac{2c+1}{c+2}-\frac{1}{c+1}$.

4.06. Найдите числовое значение выражения, предварительно выполнив указанные действия:

а) $6a+\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right):\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}$ при $a=-2{,}5$;

б) $\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}\right)$ при $a=-3\frac{3}{4}$;

в) $\left(\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^3:\frac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right)\cdot\frac{n}{3}$ при $a=-0{,}5$;

г) $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ при $a=-2{,}5$, $b=-0{,}5$.

4.07. Упростите выражение, выполнив указанные действия:

а) $\left(\left(1-\frac{2}{1-3a}\right)\cdot\left(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right):(2(1-9a^2))$;

б) $\frac{2}{a}-\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{2}{1-a}\right):\frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}$.

4.08. Упростите выражение:

а) $2n - \left(\frac{2n-3}{n+1} - \frac{n+1}{2-2n} - \frac{n^2+3}{2n^2-2}\right) \cdot \frac{n^3+1}{n^2-n}$;

б) $\left(\left(\frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right) \cdot \frac{3}{x+y}$.

4.09. Найдите:

а) $f\left(\frac{1}{x}\right)$, если $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$;

б) $f(f(x))$, если $f(x) = \frac{a-x}{x}$;

в) $f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, если $f(x) = \frac{2x-1}{3-5x}$;

г) $\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$, если $f(x) = \frac{a+kx}{b+mx}$.

4.10. Найдите $f(f(f(f(x))))$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; б) $f(x) = \frac{4}{2-x}$.

§ 5. ПЕРВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РЕШЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите уравнение (5.01—5.03):

5.01. а) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x+2}{x+1} = 4$; в) $\frac{3x+4}{2x+1} - \frac{x+3}{x+1} = 1$;

б) $\frac{2x+3}{x+4} + \frac{2}{x+1} = 2$; г) $\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{x+1} = 5$.

5.02. а) $\frac{c-2}{2c+6} + \frac{c+3}{3c-6} = 0$; б) $\frac{d+5}{5d-20} + \frac{d-4}{4d+20} = \frac{9}{20}$.

5.03. а) $\frac{c+2}{c^2-5c} - \frac{c-5}{2c^2-50} = \frac{c+25}{2c^2-50}$;

б) $\frac{4(d+9)}{5d^2-45} + \frac{d+3}{5d^2-15d} = \frac{d-3}{d^2+3d}$.

5.04. Существует ли такое значение d, при котором разность дробей $\frac{12d-7}{10d+1}$ и $\frac{d-3}{5d+1}$ равна 1?

5.05. Существует ли такое значение b, при котором разность дробей $\frac{18b+2}{b-4}$ и $\frac{15b+1}{b+5}$ равна 3?

5.06. Без построения графиков найдите абсциссы общих точек графиков:

а) $y = \dfrac{5}{x-4}$ и $y = \dfrac{1}{3x+2}$;

б) $y = \dfrac{3x+1}{3x-1}$ и $y = \dfrac{3-15x}{1-3x}$.

5.07. Без построения графиков найдите ординаты общих точек графиков:

а) $y = \dfrac{2}{x+4}$ и $y = \dfrac{4}{3x+11}$;

б) $y = \dfrac{5x^2+1}{x-1}$ и $y = 5x$.

Решите уравнение (5.08—5.11):

5.08. а) $\dfrac{5x+7}{x^2+11x-12} = \dfrac{13x-1}{x(x+11x)-12}$;

б) $\dfrac{x^2-7x+3}{x^2+10x-39} = \dfrac{7x-12}{39-10x-x^2}$;

в) $\dfrac{5x^2-8x+13}{x^3+10x^2+x-12} = \dfrac{7x^2-10x+13}{x^3+10x^2+x-12}$;

г) $\dfrac{3x^2-6x+6301}{x^2-27x+11} = \dfrac{2x^2+21x+6290}{x^2-27x+11}$.

5.09. а) $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2+1} + \dfrac{(x-1)(x-6)}{(1-x)(1+x)+2x^2} = 0$;

б) $\dfrac{x^2-5x+6}{x-1} + \dfrac{(x-2)(x-3)}{(1+x)^2-x^2-x-2} = 0$.

5.10. а) $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{4}{x(x+1)^2} = \dfrac{5}{2x(x+1)}$;

б) $\dfrac{2x+19}{5x^2-5} - \dfrac{17}{x^2-1} - \dfrac{3}{1-x} = 0$.

5.11. а) $\dfrac{3x-3}{2x^2-2} - \dfrac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \dfrac{5(x-1)}{12x^2-24x+12}$;

б) $\dfrac{6}{4-x} = \dfrac{25}{1-3x} - \dfrac{16}{x-4}$.

5.12. Для каждого значения a решите уравнение:

а) $\dfrac{2x+3}{x+4} + \dfrac{a}{x+1} = 2;$

б) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{3x+a}{x+1} = 4;$

в) $\dfrac{ax+4}{2x+1} - \dfrac{x+3}{x+1} = 1;$

г) $\dfrac{x+2}{2x+1} + \dfrac{ax+3}{x+1} = 5.$

5.13. Найдите все значения a, при которых один из корней уравнения равен x_0, и для каждого такого a решите данное уравнение:

а) $\dfrac{2x+19}{5x^2-5} + \dfrac{a}{x^2-1} = \dfrac{3}{1-x},\quad x_0 = 3;$

б) $\dfrac{a}{(x+1)^2} + \dfrac{4}{x(x+1)^2} = \dfrac{5}{2x(x+1)},\quad x_0 = 1;$

в) $\dfrac{ax-3}{2x^2-2} - \dfrac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \dfrac{5x-5}{12x^2-24x+12},\quad x_0 = 3;$

г) $\dfrac{6}{4-x} = \dfrac{a+7}{1-3x} + \dfrac{2-a}{x-4},\quad x_0 = 2.$

5.14. Известно, что $\dfrac{2x+3y}{3x-5y} = 1$. Найдите отношение $x : y$.

5.15. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \dfrac{x}{y} = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ \dfrac{5x+y}{7x-4y} = 2. \end{cases}$

§ 6. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вычислите (**6.01—6.08**):

6.01. а) 3^{-3}, 2^{-2}, 88^{-1}; б) $(-2)^0$, $(-3)^{-2}$, $(-5)^{-3}$.

6.02. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$; б) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\left(2\frac{1}{5}\right)^{-2}$, $\left(-111\frac{1}{9}\right)^{-3}$.

6.03. а) $(0,1)^{-1}$, $(0,1)^{-2}$, $(0,1)^{-3}$, $(0,1)^{-22}$;
б) $(0,01)^{-1}$, $(-0,01)^{-9}$;
в) $(-0,001)^{-2}$, $(-0,001)^{-3}$;
г) $(-0,0001)^{-3}$.

6.04. а) $(0,2)^{-1}$, $(0,3)^{-2}$, $(0,4)^{-3}$;
б) $(0,03)^{-1}$, $(-0,07)^{-2}$;
в) $(-0,006)^{-2}$, $(-0,003)^{-3}$;
г) $(-0,999999)^{-1}$.

6.05. а) $(3,1)^{-1}$, $(2,2)^{-2}$, $(-1,5)^{-3}$;
б) $(-1,02)^{-1}$, $(-1,25)^{-2}$.

6.06. а) $(0,(1))^{-1}$, $(-0,(2))^{-2}$, $(-0,(3))^{-3}$;
б) $(0,(12))^{-1}$, $(-0,(37))^{-2}$.

6.07. а) $(0,5(1))^{-1}$, $(-0,4(3))^{-2}$;
б) $(-2,(37))^{-2}$, $(1,1(2))^{-1}$.

6.08. а) $((0,3)^{-2})^{-1}$;
б) $\left(\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{2}$.

6.09. Запишите данное число в виде произведения степени числа 10 на число из промежутка $[-1;\ 1]$:
а) 239,7;
б) 0,0987;
в) –657 483;
г) –0,000087.
Например, $22,3 = 0,223 \cdot 10^2$; $0,003 = 0,3 \cdot 10^{-2}$.

6.10. Докажите тождество:
а) $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1}) = a^{-2} - b^{-2}$;
б) $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-1}) = a^{-3} + b^{-3}$.

6.11. Верно ли равенство:
а) $(a^{-1} + b^{-1})^2 = a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$;
б) $(a + b)^{-2} = a + 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$;
в) $(a^{-1} - b^{-1})^{-2} = a^2 + 2a^1b^1 + b^2$;
г) $(a^{-1} - b^{-1})^3 = a^{-3} - 3a^{-2}b^{-1} + 3a^{-1}b^{-2} - b^{-3}$?

Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем **(6.12, 6.13)**:

6.12. а) $2a^5 - 3a^3$;
б) $33a^{-2} + 23a^{-5}$;
в) $2a^{-2} + 7a^5$;
г) $8a + 15^{-5}$;
д) $3a^{-2} + 7$.

6.13. а) $5a + 3a^{-2} + 23a^{-5}$;
б) $3a^{-3} - 2a^{-2} + 7a^5$;
в) $7 + 3a^{-5} + 2a$.

Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем **(6.14, 6.15)**:

6.14. а) $5ab^{-3} + 3a^{-2}b^2 - 2a^{-4}$;
б) $3a^{-3}b^{-5} - 2a^{-2}b + 7a^5b^{-6}$.

6.15. а) $5a^{k-2} + 3a^{k+2} + 23a^{k-5}$; в) $7a^{-1-k} + 3a^{5-k} + 2a^{-k}$;
б) $3a^{3-d} - 5a^{2-d} - 6a^{5-d}$; г) $a^{-1+k} + a^{2-k} + 2a^{-2k}$.

6.16. Вычислите 2^{-k}, если $2^{3-k} + 2^{1-k} + 5 \cdot 2^{-k} = 40$.

Сократите дробь **(6.17—6.19)**:

6.17. а) $\dfrac{1 + a^{-1}}{1 + a}$; в) $\dfrac{3 + 5a^{-1}}{3a + 5}$;
б) $\dfrac{1 - a^{-1}}{1 - a}$; г) $\dfrac{2a^{-2} + a^{-1}}{a + 2}$.

6.18. а) $\dfrac{b^{-1} + a^{-1}}{a + b}$; в) $\dfrac{3b^{-1} + 2a^{-1}}{3a + 2b}$;
б) $\dfrac{b^{-1} - a^{-1}}{a - b}$; г) $\dfrac{ab^{-1} - ba^{-1}}{a^2 - b^2}$.

6.19. а) $\dfrac{b^{-1} + a^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}$; в) $\dfrac{b^{-3} + a^{-3}}{a + b}$;
б) $\dfrac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-3} - b^{-3}}$; г) $\dfrac{b^{-3} - a^{-3}}{a^2 + ab + b^2}$.

6.20. Пусть $x + x^{-1} = 5$. Найдите значение выражения:
а) $x^2 + x^{-2}$; в) $x^4 + x^{-4}$;
б) $x^3 + x^{-3}$; г) $x^5 + x^{-5}$.

6.21. Пусть a — некоторое число из промежутка $(0; 1)$. Расположите в порядке возрастания числа:

$$a + a^{-1};\ 1;\ a;\ a^2;\ 2a^{-2};\ a^2 + a^{-2}.$$

6.22. Найдите область существования выражения:
а) $(x^2 - 4)^{-4}$;
б) $(x - (x - 1)^{-1} - 1)^{-3}$;
в) $3(x^0 - (x - 1)^{-1})^0 - x)^{-1}$.

ГЛАВА 2

ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

§ 7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

7.01. Сколько целых чисел заключено между числами $\frac{1111}{37}$ и $\frac{11\,512}{361}$?

7.02. Между какими соседними целыми числами заключено число $\frac{1\,111\,111}{2431}$?

7.03. Найдите целое число, ближайшее к числу $\frac{76\,543\,210}{1\,234\,567}$.

7.04. Запишите все рациональные дроби со знаменателем 17, находящиеся между 1,5 и 1,7.

7.05. Может ли сумма двух несократимых рациональных дробей с разными знаменателями быть:

а) целым числом;

б) несократимой дробью, знаменатель которой меньше каждого из знаменателей слагаемых?

7.06. Одна седьмая жителей поселка — пенсионеры, а одна девятнадцатая — военные. Какое наименьшее число людей может жить в поселке, если среди военных девятая часть пенсионеры?

7.07. Покажите, что между числами $\frac{111}{112}$ и $\frac{112}{113}$ можно найти рациональное число. Верно ли, что между любыми двумя рациональными числами всегда можно найти хотя бы одно рациональное число?

7.08. Найдите два рациональных числа, модуль разности которых меньше, чем $\frac{1}{99\,999}$. Верно ли, что для любого положительного рационального числа можно найти два таких рациональных числа, модуль разности которых меньше данного?

7.09. Найдите 1971-ю цифру после запятой числа 0,(234).

7.10. Пусть $a = 0,(7)$. Найдите десятичную запись числа $10a - a$.

7.11. Пусть $x = 0,(23)$. Найдите десятичную запись числа $100x - x$.

7.12. Пусть $x = 0,(725)$. Найдите десятичную запись числа $1000x - x$.

7.13. Пусть $x = 3,4(725)$. Найдите десятичную запись числа $10\,000x - 10x$.

7.14. Запишите следующие рациональные числа в виде десятичных периодических дробей и найдите их 2002 цифру после запятой: $\frac{1}{3}$; $\frac{13}{99}$; $\frac{127}{999}$; $\frac{1412}{3333}$.

7.15. Найдите периоды в десятичной записи чисел $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$ и для каждой из этих дробей найдите 2002-ю цифру после запятой.

7.16. Найдите периоды в десятичной записи чисел $\frac{1}{37}$; $\frac{10}{37}$; $\frac{26}{37}$; $\frac{2}{37}$ и для каждой из этих дробей найдите 2002-ю цифру после запятой.

7.17. Покажите, что $0,(\overline{xyz}) = \frac{\overline{xyz}}{999}$. Попробуйте обобщить результат и научиться переводить любую чисто периодическую дробь в обыкновенную.

7.18. Покажите, что $0,(\overline{ab})(\overline{xyz}) = 0,\overline{ab} + \frac{0,(\overline{xyz})}{100} = \frac{\overline{ab}}{100} + \frac{\overline{xyz}}{99\,900}$. Попробуйте обобщить результат и научиться переводить любую смешанную периодическую десятичную дробь в обыкновенную.

7.19. Переведите в обыкновенную дробь числа:
а) 0,(7); 0,(32); 0,(72); 0,(125); 0,(111);
б) 0,0(01); 1,3(2); 7,2(33).

7.20. Вычислите:
а) 1,(3) + 0,(23);
б) 3,(29) + 1,(3);
в) $1,(1) \cdot 2,(2)$;
г) 2,(24) : 1,(12).
(Ответ дайте в виде бесконечной десятичной дроби.)

7.21. Найдите 548-й десятичный знак бесконечной периодической десятичной дроби:

а) 4,(1234567012); в) 75,34(72);

б) 0,349(12); г) 4,2(539).

7.22. Представьте число 1 в виде суммы семи разных рациональных дробей, все числители которых равны 1.

7.23. Между числами $\frac{13}{17}$ и $\frac{14}{17}$ вставьте 99 рациональных чисел.

7.24. Между числами $\frac{18}{19}$ и $\frac{19}{20}$ вставьте 99 рациональных чисел.

7.25. Между числами 0,245 и 0,246 вставьте 99 рациональных чисел.

7.26. Сколько существует правильных обыкновенных несократимых дробей со знаменателем 20?

7.27. Докажите, что между числами 1 и 1,03 располагается бесконечно много обыкновенных дробей, числитель которых на 1 больше знаменателя.

7.28. Есть ли между числами $\frac{23}{1240}$ и $\frac{24}{1249}$ рациональные дроби с числителем 1? Если есть, то сколько?

7.29. Найдите между числами $\frac{1980}{3011}$ и $\frac{1927}{2885}$ рациональную дробь с наименьшим знаменателем.

7.30. Не менее чем $\frac{139}{201}$ и не более чем $\frac{89}{123}$ членов бригады получили премии. Какое наименьшее число людей было в бригаде?

7.31. Найдите число, выражающее время между четырьмя и пятью часами утра, когда минутная и часовая стрелки образуют развернутый угол. Является ли это число рациональным?

7.32. Верно ли, что любое время, которое показывают часы, когда часовая и секундная стрелки образуют прямой угол, выражается рациональным числом?

§ 8. ПОНЯТИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

8.01. Известно, что $a^2 = b$. Найдите все такие числа a, если:

а) $b = 1$; в) $b = 9$; д) $b = 0{,}0225$;

б) $b = 4$; г) $b = 1{,}21$; е) $b = 2\frac{7}{9}$.

Ответ обоснуйте.

8.02. Объясните, почему не существует ни одного числа b такого, что $b^2 + 1 = 0$.

8.03. Объясните, почему не существует таких a и b, для которых $b^2 = 2a - 2 - a^2$.

8.04. Известно, что $a^3 = b$. Найдите a, если:

а) $b = 1$; в) $b = 27$; д) $b = 0{,}001$;

б) $b = -1$; г) $b = -0{,}125$; е) $b = 1\frac{61}{64}$.

Ответ обоснуйте.

8.05. Найдите все значения a, при которых верно равенство $a^2 = 0$. Ответ обоснуйте.

8.06. При каком значении a верно равенство $a^3 = 0$? Ответ обоснуйте.

8.07. При каком значении a существует ровно два различных значения b такие, что $a^2 = b^2$?

8.08. При каком значении a существует только одно такое значение b, что $a^2 = b^2$?

8.09. Докажите, используя определение квадратного корня, что:

а) $\sqrt{9} = 3$; в) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$;

б) $\sqrt{144} = 12$; г) $\sqrt{0{,}000225} = 0{,}015$.

8.10. Докажите, что:

а) $\sqrt{16} \neq 5$; в) $\sqrt{1\frac{25}{36}} \neq 1\frac{5}{6}$;

б) $\sqrt{324} \neq -18$; г) $\sqrt{0{,}4} \neq 0{,}2$.

8.11. Верно ли равенство $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ при положительных значениях a и b?

8.12. Укажите какие-либо два числа a и b такие, что

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

8.13. Укажите все значения букв, при которых определены следующие выражения:

а) $\sqrt{a \cdot b}$;

б) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{1-b}$;

в) $\sqrt{a+4} \cdot \sqrt{-b}$;

г) $\sqrt{\dfrac{(a^2+1)^2}{b+1}}$;

д) $\dfrac{\sqrt{-a^2}}{\sqrt{b}}$;

е) $\sqrt{-x^3y^2}$;

ж) $\sqrt{x^2(y-2)^2}$;

з) $\sqrt{-x^2(y-2)^5}$;

и) $\sqrt{-(x+1)^2(y-2)^2}$.

8.14. Используя таблицу квадратов, найдите:

а) $\sqrt{529}$;

б) $\sqrt{1936}$;

в) $\sqrt{2809}$;

г) $\sqrt{6724}$;

д) $\sqrt{6561}$;

е) $\sqrt{7225}$;

ж) $\sqrt{9801}$.

8.15. Убедитесь, что подкоренное выражение есть полный квадрат, и вычислите:

а) $\sqrt{22\,500}$;

б) $\sqrt{12\,960\,000}$;

в) $\sqrt{3\,249\,000\,000}$;

г) $\sqrt{67{,}24}$;

д) $\sqrt{65{,}61}$;

е) $\sqrt{0{,}7225}$;

ж) $\sqrt{0{,}009801}$.

8.16. Вычислите:

а) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{169}{625}}$;

в) $\sqrt{\dfrac{1369}{5625}}$;

г) $\sqrt{\dfrac{126\,025}{12\,769}}$;

д) $\sqrt{1\dfrac{15}{49}}$;

е) $\sqrt{2\dfrac{47}{121}}$;

ж) $\sqrt{3\dfrac{46}{441}}$;

з) $\sqrt{4\dfrac{61}{225}}$.

8.17. Докажите, что каждое из приведенных чисел является полным квадратом натурального числа, и извлеките из него квадратный корень:

а) $22^2 + 44 + 1$; г) $561 \cdot 567 + 9$;
б) $234 \cdot 236 + 1$; д) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$;
в) $456 \cdot 460 + 4$; е) $123 \cdot 124 \cdot 125 \cdot 126 + 1$.

8.18. Какой цифрой может заканчиваться десятичная запись натурального числа, являющегося полным квадратом?

8.19. Докажите, что следующие числа не являются полными квадратами:

а) 1 234 000 567; в) $123 \cdot 7\,654\,300\,021$;
б) 98 765 000 432; г) $32^{43} + 23^{46}$.

8.20. Докажите, что при любом натуральном значении n квадратный корень из данного числа также будет натуральным числом:

а) $4n^2 + 4n + 1$;
б) $49n^2 - 42n + 9$;
в) $(n - 3)(n + 3) + 9$;
г) $(n^2 + 3n - 2)(n^2 + 3n + 2) + 4$;
д) $(n^2 + 3n + 2)(n^2 - 3n + 2) + 9n^2$;
е) $n^2(n^2 + 6) + 9$;
ж) $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$.

8.21. Докажите, что для произвольных натуральных чисел n и m числа $x = 2m \cdot n$ и $y = n^2 - m^2$ таковы, что число $x^2 + y^2$ является полным квадратом, и найдите $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Говорят, что такие натуральные числа x, y и z составляют ***пифагорову тройку*** натуральных чисел.) Выбирая произвольные натуральные значения m и n, найдите десять разных пифагоровых троек чисел.

8.22. Закончите данные предложения таким образом, чтобы содержащееся в нем утверждение было верным, и докажите это утверждение.

а) Если натуральное число, десятичная запись которого оканчивается 0, является полным квадратом натурального числа, то предпоследняя цифра в его десятичной записи...
б) Если натуральное число, десятичная запись которого оканчивается 5, является полным квадратом натурального числа, то предпоследняя цифра в его десятичной записи...
в) Если натуральное число, десятичная запись которого оканчивается 1, является полным квадратом натурального числа, то предпоследняя цифра в его десятичной записи...

8.23. Докажите, что существует девятнадцать последовательных двузначных чисел, среди которых нет ни одного числа, являющегося полным квадратом.

8.24. Докажите, что среди любых двадцати последовательных двузначных чисел есть хотя бы одно, являющееся полным квадратом.

8.25. Каково наибольшее количество последовательных четырехзначных чисел, среди которых нет ни одного числа, являющегося полным квадратом?

8.26. Найдите наибольшее количество последовательных пятизначных чисел, среди которых нет ни одного числа, являющегося полным квадратом.

8.27. Существуют ли 10 000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного числа, являющегося полным квадратом? Если нет, то почему, если да, то приведите пример.

8.28. В магазине было куплено несколько (больше одной) одинаковых тетрадей, цена каждой из которых выражается целым числом рублей, большим одного. Сколько тетрадей купили и сколько стоила каждая тетрадь, если был заплачен 121 руб.?

Решите уравнение (**8.29, 8.30**):

8.29. а) $x^2 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 2$; $x^2 + 3 = 0$; $x^2 = 4$; $x^2 - 5 = 0$;

б) $(x - 4)^2 = 0$; $(x + 8)^2 + 1 = 0$; $(4x + 8)^2 - 12 = 0$; $(3 - 2x)^2 = 36$; $(2 + 11x)^2 = 6$.

8.30. а) $(3x - 1)^2 + (x + 3)^2 = 20$;

б) $(5x + 2)^2 + (x - 10)^2 = 208$;

в) $(3x + 2)^3 - (3x - 2)^3 = 124$;

г) $(2x + 1)^3 - (2x - 1)^3 = 218$;

д) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

е) $25x^2 - 30x + 9 = 16$.

8.31. Постройте на одном чертеже графики указанных функций:

а) $y = x$, $y = 2x$, $y = x \cdot \sqrt{3}$;

б) $y = -3x$, $y = -4x$, $y = -x \cdot \sqrt{11}$.

8.32. Пусть a и b — положительные числа. Докажите: если $a^2 < x < b^2$, то $a < \sqrt{x} < b$. Воспользуйтесь этим предложением, а при необходимости и таблицей полных квадратов, и определите, между какими соседними целыми числами находятся числа:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{53}$; в) $\sqrt{457}$; г) $\sqrt{5458}$.

8.33. Укажите, не пользуясь таблицами и калькуляторами, наименьшее целое число, большее числа:

а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{346}$; в) $-\sqrt{75}$; г) $-\sqrt{443}$.

8.34. Символом $[a]$ обозначают *целую часть* числа a, т. е. наибольшее целое число, не большее числа a. Найдите:

а) $[\sqrt{123}]$; в) $[\sqrt{5} + \sqrt{7}]$;

б) $[5 + \sqrt{1234}]$; г) $[7 + \sqrt{5} - \sqrt{7}]$.

8.35. Найдите модули следующих чисел:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{10}$;

б) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; г) $\sqrt{3} + \sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{8}$.

8.36. Выпишите значения $[\sqrt{n}]$ для первых n натуральных чисел $n = 1, 2, 3, \dots, 16$). Подумайте, сколько раз в списке всех значений $[\sqrt{n}]$ встретилось бы число 100, если его продолжить.

Решите уравнения (**8.37, 8.38**):

8.37. а) $\sqrt{x} = 5$; г) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2 - x} = 0$;

б) $\sqrt{1 - x} = -2$; д) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2 + x} = 0$;

в) $\sqrt{2 - x} = 4$; е) $\sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{x - 2} = 0$.

8.38. а) $\sqrt{(x - 1)(2x - 1)} + \sqrt{4x^2 - 1} = 0$;

б) $\sqrt{3x - 1} + \sqrt{6x^2 - 5x + 1} = 0$;

в) $(\sqrt{3x + 5} + 3)^2 = 9$;

г) $(\sqrt{3x + 5} - 3)^2 = 9$.

8.39. Найдите все пары чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие равенству:

а) $\sqrt{x+3} + \sqrt{y-4} = 0$;

б) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+4x-1} = 0$;

в) $\sqrt{5y+7x-12} + \sqrt{3y+4x-7} = 0$;

г) $\sqrt{x+3} + \sqrt{y^2-4} = 0$;

д) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-16} = 0$.

8.40. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 3y^2 = 7, \\ 2x + 5y^2 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 12, \\ 3x^2 - 7y^2 = 20. \end{cases}$

8.41. По таблице квадратов чисел найдите среди квадратов двузначных чисел:

а) наибольшее трехзначное число, являющееся полным квадратом;

б) наименьшее четырехзначное число, являющееся полным квадратом;

в) полные квадраты, в записи которых есть более двух одинаковых цифр;

г) полный квадрат с наибольшей суммой цифр;

д) полные квадраты, сумма цифр которых также является полным квадратом;

е) полные квадраты, сумма цифр которых является полным кубом;

ж) все пары полных квадратов, разность которых сама является полным квадратом.

Придумайте еще несколько аналогичных заданий и самостоятельно займитесь соответствующим исследованием.

8.42. Таблица квадратов двузначных чисел содержит 81 число.

а) Квадратов каких двузначных чисел нет в таблице и почему?

б) Сколько чисел содержала бы аналогичная таблица квадратов трехзначных чисел?

в) Как бы вы «устроили» таблицу трехзначных чисел и сколько бы приблизительно она заняла страниц (при таком же размере шрифта, что и таблица для двузначных чисел на форзаце задачника)?

8.43. Может ли число, имеющее 2002 различных натуральных делителя, быть полным квадратом?

8.44. На координатной плоскости отметьте все точки с координатами x и y, для которых определены выражения:

а) $\sqrt{x}$; е) $\sqrt{\sqrt{y} - x}$;

б) $\sqrt{1 + x\sqrt{y}}$; ж) $\sqrt{y - x}$;

в) $\sqrt{x + \sqrt{y}}$; з) $\sqrt{y^2 + 3} + \sqrt{-x^2}$;

г) $\sqrt{x \cdot y}$; и) $\sqrt{6y - y^2 - 9} + \sqrt{x - y}$.

д) $\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{y}}$;

§ 9. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

9.01. Укажите, какие из перечисленных чисел являются рациональными, а какие иррациональными:

$$2{,}1;\ \sqrt{2};\ \sqrt{1{,}44};\ \sqrt{0{,}144};\ 2\sqrt{5} - 5\sqrt{2};$$

$$6\sqrt{3} - 3\sqrt{12};\ \sqrt{1 + \sqrt{3}} + \sqrt{2};\ \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

9.02. Докажите, что если $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m, n — натуральные числа и $n > 1$, то и $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ — не целое число.

9.03. Докажите, что квадрат не целого рационального числа не может быть целым числом.

9.04. Докажите, что если квадрат числа a есть целое число, то само число a либо целое, либо иррациональное.

9.05. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? Если не может, то почему? Если может, то приведите пример.

9.06. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом? Если не может, то почему? Если может, то приведите пример.

9.07. Может ли частное разных иррациональных чисел быть рациональным числом? Если не может, то почему? Если может, то приведите пример.

9.08. Могут ли сумма и произведение двух иррациональных чисел быть одновременно рациональными числами? Если не могут, то почему? Если могут, то приведите примеры.

9.09. Может ли сумма рационального и иррационального чисел быть рациональным числом? Если не может, то почему? Если может, то приведите пример.

9.10. Может ли произведение рационального и иррационального числа быть рациональным числом? Если не может, то почему? Если может, то приведите пример.

9.11. Могут ли разность и частное двух различных иррациональных чисел быть одновременно рациональными числами? Если не могут, то почему? Если могут, то приведите примеры.

9.12. Докажите, что число $\sqrt{17}$ — иррациональное.

9.13. Докажите, что число $4 - \sqrt{7}$ — иррациональное.

9.14. Пусть $a^3 + 5a - \frac{7}{a}$ является иррациональным числом. Докажите, что a — также иррациональное число.

9.15. Известно, что a — иррациональное число. Докажите, что $\sqrt{a}$ — иррациональное число.

9.16. Докажите, что число $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$ — иррациональное.

9.17. Укажите какие-нибудь два рациональных и два иррациональных числа, располагающиеся между числами $\sqrt{1,2}$ и $\sqrt{1,3}$.

9.18. Используя микрокалькулятор, определите, с какой по счету после запятой начинают отличаться цифры в десятичной записи чисел $\sqrt{0,44444}$ и $\frac{2}{3}$, какое из этих чисел больше.

9.19. Не используя микрокалькулятор и таблицы, найдите цифры перед запятой в числе $\sqrt{7} - \sqrt{2}$.

9.20. Не используя микрокалькулятор и таблицы, найдите первую цифру после запятой в числе $\sqrt{334} - \sqrt{333}$.

9.21. Укажите какие-либо два иррациональных числа, разность между которыми не превосходит 0,2, а их среднее арифметическое равно 1.

9.22. Могут ли существовать два различных иррациональных числа, среднее геометрическое которых рациональное число? Если нет, то почему? Если могут, то приведите пример.

9.23. Могут ли существовать два разных иррациональных числа, среднее геометрическое и среднее арифметическое которых одновременно являются рациональными числами? Если нет, то почему? Если могут, то приведите пример.

9.24. Укажите на отрезке [0; 1] какие-нибудь сто иррациональных чисел, произведение которых рационально.

9.25. Пусть b — иррациональное число. Каким числом может быть число $b \cdot \left((2 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + 1\right)$ — рациональным или иррациональным?

9.26. Составьте какой-либо многочлен второй степени с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{7} - 1$.

9.27. Составьте какой-либо многочлен четвертой степени с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

9.28. На прямой $y = 3x + 7$ найдите какие-либо две различные точки с иррациональными абсциссами и ординатами. Каким числом, рациональным или иррациональным, будет отношение разности абсцисс этих точек к разности их ординат?

9.29. На прямой $y = x(\sqrt{2} - 1) + 5$ укажите все точки, обе координаты которых рациональные числа.

9.30. Докажите, что на прямой $y = 7x - 3$ координаты любой точки либо обе рациональны, либо обе иррациональны.

9.31. Докажите, что на прямой $y = x\sqrt{2} + \sqrt{3}$ нет ни одной точки, обе координаты которых рациональны. Есть ли на этой прямой сто точек с целыми ординатами?

9.32. Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли:
а) сумма длин его диагоналей быть рациональным числом;
б) его периметр быть иррациональным числом;
в) периметр треугольника ABC быть рациональным числом;
г) отношение периметра квадрата к сумме длин его диагоналей быть рациональным числом;
д) периметр квадрата быть числом иррациональным, а площадь — целым;
е) периметр квадрата быть числом рациональным, а площадь — иррациональным;
ж) периметр квадрата быть числом целым, а площадь — нецелым?

9.33. Могут ли периметр и площадь равностороннего треугольника быть одновременно рациональными числами?

9.34. На числовой прямой отмечены точки $O(0)$ и $E(1)$. Используя циркуль и линейку, постройте точки $M\left(\sqrt{17}\right)$ и $N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

9.35. а) На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ со стороной 17 м взяты точки K, T, P и M так, что $AK = BT = CP = DM = 5$ м. Одна материальная точка начинает свое движение из точки K в направлении луча KB и движется по контуру квадрата со скоростью 31 м/с. Вторая материальная точка также начинает свое движение одновременно с первой из точки K в направлении луча KT и движется по контуру четырехугольника $KTPM$ со скоростью 19 м/с. Встретятся ли снова эти две материальные точки? Если нет, то почему? Если да, то когда и в какой точке? И будут ли встречаться вновь?

б) На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ со стороной 20 м взяты точки K, T, P и M так, что $AK = BT = CP = DM = 10$ м. Одна материальная точка начинает свое движение из точки K в направлении луча KB и движется по контуру квадрата со скоростью 31 м/с. Вторая материальная точка также начинает свое движение одновременно с первой из точки K в направлении луча KT и движется по контуру четырехугольника $KTPM$ со скоростью 19 м/с. Встретятся ли вновь эти две материальные точки? Если нет, то почему? Если да, то когда и в какой точке? И будут ли встречаться снова?

§ 10. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

10.01. С помощью микрокалькулятора выясните, сколько первых цифр после запятой совпадают у чисел $\frac{73\,136}{87\,445}$ и $\frac{146\,263}{174\,891}$. Выпишите первые несовпадающие цифры и сравните данные два числа.

10.02. С помощью микрокалькулятора выясните, сколько первых цифр после запятой совпадают у чисел $\sqrt{2}$ и $1\frac{828\,427}{2\,000\,000}$. Выпишите первые несовпадающие цифры и сравните данные два числа.

10.03. С помощью микрокалькулятора выясните, сколько первых цифр после запятой совпадают у чисел $\sqrt[3]{85{,}7}$ и $\sqrt{19{,}44}$. Выпишите первые несовпадающие цифры и сравните данные два числа.

10.04. С помощью микрокалькулятора выясните, сколько первых цифр после запятой совпадают у чисел π и $\sqrt{9{,}869}$. Выпишите первые несовпадающие цифры и сравните данные два числа.

10.05. Расположите в порядке возрастания действительные числа: $-0{,}3$; $-\sqrt{0{,}3}$; $-\sqrt{0{,}999}$; $-\sqrt{0{,}1\cdot\pi}$; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

10.06. С помощью микрокалькулятора вычислите несколько таких значений числа a, что квадрат этого числа находится между числами $2\frac{3}{7}$ и 2,43.

10.07. С помощью микрокалькулятора вычислите несколько таких значений числа a, что куб этого числа находится между числами $\frac{36}{49}$ и 0,735.

10.08. Выпишите какие-либо 11 разных действительных чисел, заключенных между числами 0,1234567891 и 0,1234567892.

10.09. Опишите, как найти 100 различных действительных чисел, заключенных между числами $-0{,}987654321$ и $-0{,}98765432$.

10.10. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам 0 и 1. Постройте точки, соответствующие числам -3; 5; 11. Используйте циркуль и линейку. (Процесс построения можно заменить его описанием.)

10.11. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам 0 и 1. Постройте точки, соответствующие числам $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $-1{,}5$; $-2{,}125$. Используйте циркуль и линейку. (Процесс построения можно заменить его описанием.)

10.12. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам 0 и 1. Постройте точки, соответствующие числам $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{7}$; $-\frac{5}{21}$; $1\frac{2}{21}$. Используйте циркуль и линейку. (Процесс построения можно заменить его описанием.)

10.13. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам 0 и 1. Постройте точки, соответствующие числам $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$. Используйте циркуль и линейку. (Процесс построения можно заменить его описанием.)

10.14. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам -3 и 3. Постройте точки, соответствующие числам 0 и 1. Используйте циркуль и линейку.

10.15. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам -2 и 5. Постройте точки, соответствующие числам 0 и 1. Используйте циркуль и линейку.

10.16. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам 1 и $\sqrt{2}$. Постройте точку, соответствующую числу 0. Используйте циркуль и линейку.

10.17. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам -3 и $\sqrt{2}$. Постройте точку, соответствующую числу 0. Используйте циркуль и линейку.

10.18. Найдите расстояние между точками числовой прямой, соответствующими числам:

а) 88 и 107; в) $-28{,}11$ и $43{,}88$;
б) $-34{,}1$ и $-43{,}8$; г) 0 и $-889{,}321$.

10.19. Найдите все такие значения a, при которых расстояние между точками a и $6a$ равно 8.

10.20. Найдите все такие значения a, при которых расстояние между точками $-a$ и $6a$ равно 3.

10.21. Найдите все такие значения a, при которых расстояние между точками a и $-a$ равно $a + 3$.

10.22. Найдите все такие значения a, при которых расстояние между точками a и $-a$ равно $a - 3$.

10.23. Найдите число, если оно находится между числами -4 и 7, а соответствующая ему точка делит отрезок $[-4; 7]$ в отношении $2 : 3$, считая слева направо.

10.24. Найдите число, если оно находится между точками -10 и 25, а соответствующая ему точка делит отрезок $[-10; 25]$ в отношении $4 : 3$, считая слева направо.

10.25. Найдите число, если оно находится между числами x_1 и x_2, а соответствующая ему точка делит отрезок $[x_1; x_2]$ в отношении λ ($\lambda > 0$), считая слева направо.

10.26. Докажите, что если $a \cdot b < 0$, то точка 0 лежит между точками a и b.

10.27. Как расположены на числовой прямой точки a; 0; b, если $a \cdot b < 0$, а $a + b < 0$?

10.28. Как расположены на числовой прямой точки a; 0; b, если $a \cdot b < 0$, а $a + b > 0$?

10.29. Как расположены на числовой прямой точки a; 0; b, если $a \cdot b > 0$, а $a + b < 0$?

10.30. Как расположены на числовой прямой точки a; 0; b, если $a \cdot b > 0$, а $a + b > 0$?

28.31. Как расположены на числовой прямой точки a; 0; b, если $a \cdot b > 0$, а $a - b > 0$?

10.32. Отметьте на числовой прямой все точки, расстояние от которых до точки 2,2 равно 0,6.

10.33. Отметьте на числовой прямой все точки, расстояние от которых до точки −12,4 равно 6,2.

10.34. Отметьте на числовой прямой все точки, расстояние от которых до точки 1 меньше 0,6.

10.35. Множество точек на числовой прямой, расстояние от которых до точки x_0 меньше ε, называется эпсилон-окрестностью точки x_0. Изобразите:

а) 0,3-окрестность точки 5;

б) 0,5-окрестность точки −2.

10.36. При каких значениях ε в эпсилон-окрестности точки −3 есть только одно целое число?

10.37. При каких значениях ε в эпсилон-окрестности точки 2,7 есть только одно целое число?

10.38. При каких значениях ε в эпсилон-окрестности точки −13,35 есть только одно целое число?

10.39. При каких значениях ε в эпсилон-окрестности точки −3,5 есть только одно целое число?

10.40. Оцените числа, противоположные действительному числу x, если:

а) $35{,}7 < x < 36{,}1$; в) $-8{,}33 < x < 3{,}77$;

б) $-4{,}3 < x < -3{,}4$; г) $3{,}57 > x > -4$.

10.41. Оцените (можно использовать микрокалькулятор) квадрат действительного числа x, если:
а) $34,1 < x < 36,1$; в) $-8,33 < x < 3,77$;
б) $-4,3 < x < -3,4$; г) $5,57 > x > -4$.

10.42. Оцените (можно использовать микрокалькулятор) кубы действительного числа x, если:
а) $35,7 < x < 36,1$ в) $-8,33 < x < 3,77$;
б) $-4,3 < x < -3,4$; г) $3,57 > x > -4$.

10.43. Оцените (можно использовать микрокалькулятор) число, обратно действительному числу x, если:
а) $35,7 < x < 36,1$; в) $-8,33 < x < -3,77$;
б) $0,43 < x < 0,53$; г) $-0,111 > x > -0,11$.

10.44. $[x]$ — обозначение целой части действительного числа x. $x - 1 < [x] \leqslant 0$ и $[x]$ — целое число. Например, $[2,3] = 2$; $[-3,7] = -4$; $[0] = 0$. Найдите целую часть чисел $-4,3$; -101; $0,56$; $-0,56$; 2000.

10.45. Найдите все действительные числа, целые части которых равны:
а) 2; б) -3; в) 0; г) $-3456,23$.

10.46. $\{x\}$ — обозначение дробной части действительного числа x. $\{x\} = x - [x]$, таким образом $0 \leqslant \{x\} \leqslant 1$. Например, $\{2,3\} = 0,3$; $\{-3,7\} = 0,3$; $\{234\} = 0$; $\{-234\} = 0$. Найдите дробную часть чисел $-4,3$; -101; $0,56$; $-0,56$; 2000.

10.47. Докажите, что для любого целого значения n $\{n + 0,3\} = 0,3$, а $\{n - 0,17\} = 0,83$.

10.48. Запишите все действительные числа, дробные части которых равны:
а) 0,2; б) 0,4; в) $-0,23$.

10.49. Найдите наибольшее число, не превосходящее 1000, дробная часть которого равна 0,33.

10.50. Постройте график функции $y = [x]$:
а) на отрезке $[0; 1]$; в) на $\boldsymbol{R}$.
б) на отрезке $[-7; -6]$;

10.51. Постройте график функции $y = \{x\}$:
а) на отрезке $[0; 1]$; в) на $\boldsymbol{R}$.
б) на отрезке $[-7; -6]$;

§ 11. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Сравните числа a и b (**11.01—11.03**), если:

11.01. а) $a - b = 1{,}21$; в) $\frac{a-b}{2} > 1$;

б) $a = b - 0{,}3$; г) $\frac{1}{a-b} > 7$.

11.02. а) $4 + a < 4 + b$; в) $a - b > b - a$;
б) $4 - a \leqslant 4 - b$; г) $a - b \leqslant b - a$.

11.03. а) $3 + 0{,}4a < 3 + 0{,}4b$; в) $4a + b \leqslant 4b + a$;

б) $\frac{a-b}{2} < \frac{b-a}{-2}$; г) $a - 2b > b - 2a$.

11.04. О положительных числах a, b, c, d известно, что $a < b$, $c > d$ и $a > c$. Расположите в порядке убывания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$.

11.05. О положительных числах a, b, c, d известно, что $a < b$, $c > d$ и $a > c$. Сравните числа:
а) b и c; в) ab и ac;

б) b и d; г) $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$.

11.06. Докажите, что если $n < -3$, то:
а) $\frac{n}{7} + \frac{2}{7} < -\frac{1}{7}$; б) $-\frac{n}{8} - \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$.

11.07. Докажите, что:
а) если $a > 2$, $b > 3$, то $3a + 5b > 21$;
б) если $a < 2b$, $b < c$, то $2a < 4c$.

11.08. Верно ли, что:
а) если $a > 3$, $b > 5$, то $ab > 15$;
б) если $a < 2$, $b < 3$, то $ab < 6$;
в) если $a > 4$, то $a^2 > 16$;
г) если $a < 6$, то $a^2 < 36$?

11.09. Используя неравенства, запишите следующие высказывания и приведите примеры чисел, им удовлетворяющих:
а) разность чисел a и b больше, чем их удвоенная сумма;
б) квадрат числа a меньше самого числа a;
в) сумма квадратов чисел a и b не больше нуля;
г) квадрат суммы чисел a и b не больше нуля;

д) разность квадратов чисел a и b не меньше суммы их квадратов;

е) квадратный корень из числа a больше, чем само число a;

ж) сумма квадратов чисел a и b не больше, чем их удвоенное произведение, взятое с противоположным знаком;

з) среднее арифметическое чисел a и b больше, чем число b.

11.10. Докажите, что:

а) $\sqrt{15} + \sqrt{24} < 9$;

б) $\sqrt{37} + \sqrt{49,(01)} > 12,(995)$;

в) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2001}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2002} < 1$;

г) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2003}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2002} > 1$.

11.11. Пусть $a^2 + b^2 = 1$, где a и b — положительные числа. Докажите, что:

а) $a^2 < 1$; в) $a^3 < a^2$; д) $b^7 + a^9 < 1$;

б) $b > b^2$; г) $a + b > 1$; е) $\sqrt{a} + b > 1$.

11.12. Расположите в порядке возрастания:

а) $3,4$; $3\frac{37}{40}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{231} - 55$; 0; 1;

б) $a - 3$; $a + 8$; $a - \sqrt{11}$; $a - c^2 - 11$; $\dfrac{3a + 25,7}{3}$.

11.13. Расположите в порядке убывания:

а) $c^2 - 0,(3)$; $c^2 - \dfrac{101}{301}$; $c^2 + \sqrt{c^2 + 3}$; $c^2 - 8\sqrt{c^2 + 3}$; c^2;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $\sqrt{10}$; $\dfrac{2}{\sqrt{6} - 2}$; $-a^2 + 2a - 3$; $\dfrac{4}{1 - \sqrt{0,0001}}$.

11.14. Изобразите на координатной плоскости все точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > 0$; г) $x \cdot y^2 < 0$;

б) $y < 0$; д) $x^2 \cdot y > 0$;

в) $x \cdot y > 0$; е) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 0$.

11.15. Докажите, что если $a > b$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

11.16. Между какими двумя соседними натуральными числами находится число:

а) $\sqrt{3}$; в) $4\sqrt{3}$; д) $16\sqrt{3}$?

б) $2\sqrt{3}$; г) $8\sqrt{3}$;

11.17. Пусть $-4 < b < 3$. Найдите множество значений выражения b^2.

11.18. Пусть $0{,}5 < c < 4$. Найдите множество значений выражения $\frac{1}{c}$.

11.19. Пусть $-0{,}5 < c < 4$, но $c \neq 0$. Найдите множество значений выражения $\frac{1}{c}$.

11.20. Пусть $-3 < s < 5$. Найдите множество значений выражения $\frac{8}{6 - s}$.

11.21. Пусть $2 < t < 3$. Найдите множество значений выражения $\frac{8}{t - 5}$.

11.22. Сколько целочисленных значений может принимать выражение:

а) $12a - 10b$, если $-\frac{8}{3} < a < 8$; $-6 < b < 4{,}8$;

б) $3{,}5p - 12q$, если $-2 < p < -0{,}1$; $-0{,}5 < q < 7$?

11.23. Сколько целочисленных значений может принимать выражение:

а) $2a - \frac{1}{b}$, если $-\frac{5}{2} < a < 7{,}12$; $-2 < b < -0{,}8$;

б) $\frac{2}{p} + \frac{4}{q}$, если $-2 < p < -0{,}1$; $0{,}25 < q < 7$?

11.24. Известно, что $\frac{6a}{b - 1}$ — целое число, делящееся на 9, и $1{,}5 < a < 2{,}5$; $0{,}1 < b < 0{,}4$. Найдите это число.

11.25. Известно, что $\frac{1{,}4 + a}{b}$ — целое число и $-1{,}1 < a < 2{,}2$; $-4 < b < 2{,}25$. Найдите это число.

11.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3b - 0{,}4a^2$, если $-5 \leqslant a \leqslant -1{,}5$; $-0{,}25 \leqslant b \leqslant 1{,}3$.

11.27. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $4a^2 - \frac{2}{b}$, если $-6 \leqslant a \leqslant -\sqrt{2}$; $3{,}2 \leqslant b \leqslant 4$.

11.28. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2a + ab$, если $-16 \leqslant a \leqslant -5$; $-12 \leqslant b \leqslant -4$.

11.29. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $-4a - ab$, если $16 \leqslant a \leqslant 45$; $-2 \leqslant b \leqslant -1$.

11.30. Пусть $1 < a < 3$. Найдите множество значений выражения:

а) $\frac{1}{2a}$; в) $\frac{3}{2 - 7a}$; д) $\frac{5}{a^2}$;

б) $\frac{2}{-3a}$; г) $4 : \frac{1 - 4a}{11}$; е) $\frac{6}{a^2 + a}$.

11.31. Докажите, что если $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 \leqslant 0$, то $1 \leqslant x - y \leqslant 13$. Может ли $x - y = 1$?

11.32. Докажите, что если $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 36 \leqslant 0$, то $-1 < x - y < 11$.

11.33. Оцените значение выражения:

а) ab, если $-0,(4) < a < 0,6$; $-1,5 < b < 2,25$;

б) $m(n + 3)$, если $-1,6 < m < 1,(81)$; $-5,2 < n < -1,2$.

11.34. а) Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит прямоугольнику $ABCD$ и его внутренней области: $A(-3; 8)$; $B(-3; 1)$; $C(5; -1)$; $D(5; 8)$. Какие значения для таких точек M может принимать выражение $2x^2 - 3y$?

б) Пусть точка $N(x; y)$ принадлежит прямоугольнику $EFPK$ и его внутренней области: $E(2; -5)$; $F(2; 3)$; $K(-6; -5)$; $P(-6; 3)$. Какие значения для таких точек N может принимать выражение $4x + y^2$?

§ 12. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

12.01. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$ и найдите:

а) $\max\limits_{[1;\,4]} \sqrt{x}$; в) $\max\limits_{[1;\,16)} \sqrt{x}$; д) $\min\limits_{(64;\,100]} \sqrt{x}$;

б) $\max\limits_{(4;\,9]} \sqrt{x}$; г) $\min\limits_{[0;\,11]} \sqrt{x}$; е) $\min\limits_{[100;\,169)} \sqrt{x}$.

12.02. Постройте график функции $y = \sqrt{-x}$ и исследуйте эту функцию, т. е. найдите:

1) $D(y)$;
2) $E(y)$;
3) нули функции;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) наибольшее и наименьшее значения;
6) выпуклость.

12.03. Постройте график функции $y = -\sqrt{-x}$ и исследуйте эту функцию, т. е. найдите:
1) $D(y)$;
2) $E(y)$;
3) нули функции;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) наибольшее и наименьшее значения;
6) выпуклость.

12.04. Найдите:

а) $\max\limits_{[-4;\,-1]}\left(-\sqrt{-x}\right)$; г) $\min\limits_{[-11;\,0]}\left(-\sqrt{-x}\right)$;

б) $\max\limits_{(-9;\,-4]}\left(-\sqrt{-x}\right)$; д) $\min\limits_{(-100;\,-64]}\left(-\sqrt{-x}\right)$;

в) $\max\limits_{[-16;\,-1)}\left(-\sqrt{-x}\right)$; е) $\min\limits_{[-169;\,-100)}\left(-\sqrt{-x}\right)$.

12.05. Постройте на одном чертеже графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$; $y = 2\cdot\sqrt{x}$; $y = -3\cdot\sqrt{x}$; $y = -\dfrac{\sqrt{x}}{4}$;

б) $y = \sqrt{x}$; $y = 2 + \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x} - 3$; $y = 3 - \sqrt{x}$;

в) $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{x-2}$; $y = \sqrt{x+3}$; $y = -\sqrt{x+2}$;

г) $y = \sqrt{x}$; $y = 2 + \sqrt{x-1}$; $y = \sqrt{x+2} - 3$;
$y = 1 - \sqrt{x-2}$.

12.06. Постройте график функции и перечислите ее свойства:

а) $y = 1 + \sqrt{x}$; д) $y = 3 + \sqrt{x+2}$;

б) $y = 1 + \sqrt{-x}$; е) $y = 1 - \sqrt{3-x}$;

в) $y = 1 - \sqrt{-x}$; ж) $y = 3 - \sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1}$;

г) $y = -\sqrt{-x} - 2$; з) $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$.

12.07. Решите графически уравнение. Попытайтесь, используя графическое решение, найти точное значение его корня и доказать, что он единственный:

а) $\sqrt{x} = 6 - x$; г) $\sqrt{-x} = 1 + \sqrt{x+5}$;

б) $\sqrt{1-x} = 5 + x$; д) $x^2 = 2 - \sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x} = \sqrt{2-x}$; е) $x^2 + \sqrt{-x} = 2$.

12.08. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x} + 10$ и прямыми $x = 0$ и $x = 4$.

12.09. Древнегреческий философ Архимед, вычисляя площади разных фигур, получил следующий результат: если вершина параболы совпадает с вершиной прямоугольника, расположенного так, как это показано на рисунке 1, то площадь прямоугольника делится параболой в отношении 1 : 2. Используя этот результат, найдите площади фигур из задачи 12.10.

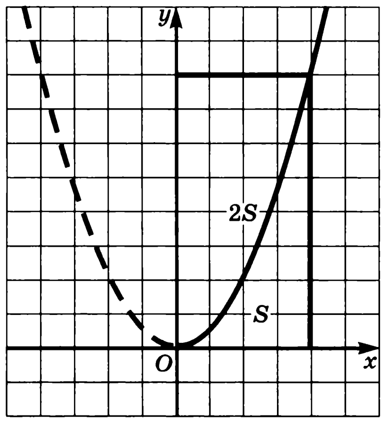


Рис. 1

12.10. Нарисуйте фигуру, ограниченную графиками функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = 0{,}5x$;

б) $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$;

в) $y = 4\sqrt{x+1} + 1$ и $y = x^2$;

г) $y = \sqrt{x+1} + 1$; $y = x$, $x \geqslant 0$ и $y = x^2$, $x < 0$.

12.11. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}$;

б) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}$;

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + \sqrt{x+1}$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+5)} + \sqrt{x(x+4)}} + \sqrt{x+4}$.

12.12. Найдите площадь треугольника, вершины которого лежат на графике функции $y = 2\sqrt{x + 3}$ в точках с абсциссами -2; 1 и 6.

12.13. Найдите множество $E(y)$ значений функции $y = 2 + \sqrt{x + 1}$, если:

а) $x \in [-1; 15]$; в) $x \in [15; 24)$; д) $x \in (323; +\infty)$.
б) $x \in (3; 24]$; г) $x \in [1; +\infty)$;

12.14. Найдите множество $E(y)$ значений функции $y = 2 - \sqrt{x}$, если:

а) $x \in [1; 16]$; в) $x \in [16; 25)$; д) $x \in (3721; +\infty)$.
б) $x \in (1; 16]$; г) $x \in [1; +\infty)$;

12.15. Для каждого значения h определите число корней уравнения $5 + \sqrt{1 - x} = h$, принадлежащих заданному промежутку:
а) $x \in [0; 1]$; б) $x \in (-35; -3]$.

12.16. Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$; б) $-\sqrt{x} = 3x^2$.

12.17. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 1. \end{cases}$

Решите графически уравнение (**12.18**, **12.19**):

12.18. а) $\sqrt{x + 3} = -1 - x$; б) $\sqrt{x - 2} = x - 4$.

12.19. а) $\sqrt{x - 1} + 2 = 5 - 3x$; б) $\sqrt{x + 4} = -x - 5$.

12.20. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt{x} + 2, \\ y = 3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \sqrt{x - 3}, \\ y = (x - 3)^2. \end{cases}$

12.21. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-3)$; $f(0)$; $f(5)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

12.22. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 1; \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 1 < x \leqslant 5. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-2{,}8)$; $f(3{,}84)$; $f(10)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

12.23. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2(x-1)^2, \text{ если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-3)$; $f(1)$; $f(1{,}5)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

12.24. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ если } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0 \end{cases}$

и исследуйте эту функцию, т. е. найдите:
1) $D(f)$;
2) $E(f)$;
3) промежутки возрастания и убывания;
4) наибольшее и наименьшее значения;
5) выпуклость;
6) нули функции.

Найдите $\max\limits_{[-4;\,-1]} y$; $\max\limits_{(-9;\,4]} y$; $\max\limits_{[-16;\,1)} y$; $\min\limits_{[-11;\,1)} y$; $\min\limits_{[-100;\,64)} y$; $\min\limits_{[-169;\,100)} y$.

12.25. Пусть $f(t) = \begin{cases} \sqrt{-t}, \text{ если } -9 \leqslant t < 0; \\ \sqrt{t}, \text{ если } t \geqslant 0. \end{cases}$

Постройте графики функций $y = \min\limits_{[-9;\,x)} f(t)$ и $y = \max\limits_{[-9;\,x]} f(t)$.

12.26. Постройте на координатной плоскости фигуру, ограниченную графиком функции $y = \sqrt{x}$, прямой $y = 6 - x$ и осью абсцисс, и укажите все точки с целыми координатами, принадлежащие этой фигуре.

12.27. Постройте на координатной плоскости фигуру, ограниченную графиком функции $y = \sqrt{x}$, прямой $y = 2 - x$ и осью ординат, и найдите длину наибольшего отрезка прямой, параллельной оси абсцисс, принадлежащего этой фигуре.

12.28. Постройте фигуру, ограниченную осью абсцисс и графиками функций $y = \sqrt{x}$, и $y = \sqrt{4 - x}$. Найдите точку этой фигуры, имеющую наибольшую ординату.

12.29. Постройте фигуру, ограниченную прямой $y = x - 2$ и графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$. Найдите точку этой фигуры, имеющую наибольшую абсциссу.

12.30. Постройте графики уравнений:

а) $x = \sqrt{y}$; б) $\left(x + \sqrt{y}\right)\left(y - \sqrt{x}\right) = 0$.

12.31. При каких значениях a график функции $y = a + \sqrt{x}$ проходит через точку $M(1;\ 3)$? Постройте этот график.

12.32. При каких значениях b график функции $y = \sqrt{-x} - b$ проходит через точку $M(-4;\ 3)$? Постройте этот график.

12.33. Выберите числа a и b так, чтобы график функции $y = a\sqrt{x} + b$ проходил через точки $(1;\ 7)$ и $(4;\ -2)$.

12.34. Может ли график функции $y = a\sqrt{x + 1} + b$ проходить через точки $(360;\ 1)$ и $(1023;\ 2)$?

12.35. Выберите числа a и b так, чтобы график функции $y = a\sqrt{x} + bx + c$ проходил через точки $(0;\ 1)$, $(1;\ -2)$ и $(4;\ -1)$.

12.36. Выберите числа a и b так, чтобы функция $y = \sqrt{x + a} - b$ возрастала на промежутке $[1;\ +\infty)$ и имела наименьшее значение, равное 5. Постройте ее график.

12.37. Выберите числа a и b так, чтобы функция $y = b - \sqrt{x - a}$ убывала на промежутке $(-1;\ +\infty)$ и имела наибольшее значение, равное 5. Постройте ее график.

12.38. Выберите числа a и b так, чтобы функция $y = \sqrt{-x - a} + b$ убывала на промежутке $(-\infty;\ 100]$ и имела наименьшее значение, равное 5. Постройте ее график.

12.39. Выберите числа a и b так, чтобы функция $y = \sqrt{ax + 8} + b$ возрастала на промежутке $[-4;\ +\infty)$ и имела наименьшее значение, равное -11. Постройте ее график.

12.40. Докажите, что на любой прямой, параллельной оси ординат и пересекающей графики функций $y = 2 + \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x} - 3$, высекается отрезок одной и той же длины, и найдите эту длину.

12.41. Пусть прямая, параллельная оси ординат, пересекает ось абсцисс в точке A (с положительной абсциссой), график функции $y = \sqrt{x}$ в точке B и график функции $y = 2 \cdot \sqrt{x}$ в точке C. Докажите, что B — середина отрезка AC.

12.42. На графике функции $y = x + \sqrt{x}$ найдите точку, равноудаленную от точек $A(1; 0)$ и $B(7; 0)$.

§ 13. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ С КВАДРАТНЫМИ КОРНЯМИ

Вычислите (13.01—13.03):

13.01. а) $(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{5})^2$; в) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^8$;

б) $(\sqrt{0{,}15})^2 \cdot (\sqrt{20})^4$; г) $(\sqrt{0{,}02})^6$.

13.02. а) $(2\sqrt{7})^4$; в) $\left(-2\sqrt{(-7)^2}\right)^2$;

б) $(-2\sqrt{1{,}5})^6$; г) $(0{,}1\sqrt{0{,}02})^6$.

13.03. а) $\left(\sqrt{1 + \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{3 - \sqrt{3}}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{3 + \sqrt{2}}\right)^2$;

в) $\left(\sqrt{81 - 14\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{7 + \sqrt{5}}\right)^4$;

г) $\left(\sqrt{3\sqrt{7} - 2}\right)^4 - \left(\sqrt{67 - 12\sqrt{7}}\right)^2$.

13.04. Найдите, если это возможно, такие целые числа a и b, что:

а) $(3 - 5\sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$;

б) $(2 - 3\sqrt{3})^2 = a - b\sqrt{3}$;

в) $(\sqrt{2} + 7\sqrt{3})^2 = a + b\sqrt{6}$;

г) $(3\sqrt{20} - 2\sqrt{15})^2 = a + b\sqrt{3}$;

д) $(1 - a\sqrt{3})^2 = b - 12\sqrt{3}$;

е) $(a - 3\sqrt{5})^2 = b + 12\sqrt{3}$;

ж) $(a + 3\sqrt{2})^2 = 13 + b\sqrt{2}$.

13.05. Найдите целые числа a и b такие, что справедливо равенство:

а) $(a + b\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$;

б) $(a - b\sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$;

в) $(a + b\sqrt{6})^2 = 55 + 6\sqrt{6}$;

г) $(a - b\sqrt{5})^2 = 21 - 4\sqrt{5}$;

д) $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = 11 + 4\sqrt{6}$;

е) $(a\sqrt{2} - b\sqrt{5})^2 = 22 - 4\sqrt{10}$.

13.06. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$;

г) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$;

д) $\sqrt{2x - 1 + 2\sqrt{x(x - 1)}}$, $x \geqslant 1$;

е) $\sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{x(x - 1)}}$, $x \geqslant 1$.

13.07. Докажите, что:

а) $a \cdot \sqrt{b} = \left[\begin{array}{l} -\sqrt{a^2 \cdot b}, \text{ если } a < 0, \\ \sqrt{a^2 \cdot b}, \text{ если } a > 0; \end{array}\right.$

б) $\sqrt{a \cdot b} = \left[\begin{array}{l} -a\sqrt{b}, \text{ если } a < 0, \\ a\sqrt{b}, \text{ если } a > 0. \end{array}\right.$

13.08. Найдите все допустимые значения букв, входящие в данные тождества:

а) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

б) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$;

в) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$;

г) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

д) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$;

е) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}$;

ж) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$;

з) $\sqrt{a^6} = a^3$;

и) $\sqrt{a^6} = -a^3$;

к) $\sqrt{a^{16}} = a^8$;

л) $\sqrt{a^{16}} = a^8$;

м) $\sqrt{xy^4} = y \cdot \sqrt{xy^2}$;

н) $\sqrt{-xy^4} = -y \cdot \sqrt{-xy^2}$.

13.09. Найдите наименьшие натуральные числа m и n, при которых число a является натуральным числом; для таких m и n найдите число a:

а) $a = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2^m \cdot 3^n}$;
б) $a = \sqrt{56} \cdot \sqrt{2^m \cdot 7^n}$;
в) $a = \sqrt{250} \cdot \sqrt{2^m \cdot 5^n}$;
г) $a = \sqrt{108} \cdot \sqrt{n^m}$;
д) $a = \sqrt{1000} \cdot \sqrt{(8n)^m}$;
е) $a = \sqrt{997} \cdot \sqrt{n^m}$.

Вычислите (**13.10—13.14**):

13.10. а) $\sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{121}{25}}$;
б) $\sqrt{\frac{49}{64} \cdot \frac{1}{9}}$;
в) $\sqrt{\frac{625}{961} \cdot \frac{16}{81}}$;
г) $\sqrt{\frac{36}{225} \cdot \frac{441}{289}}$.

13.11. а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$;
б) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$;
в) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50}$;
г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{176}$.

13.12. а) $\sqrt{5^2 + 12^2}$;
б) $\sqrt{20^2 + 21^2}$;
в) $\sqrt{28^2 + 45^2}$;
г) $\sqrt{12^2 + 35^2}$.

13.13. а) $\sqrt{61^2 - 60^2}$;
б) $\sqrt{481^2 - 480^2}$;
в) $\sqrt{226^2 - 30^2}$;
г) $\sqrt{317^2 - 308^2}$.

13.14. а) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$;
б) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$;
в) $\sqrt{\frac{98}{176^2 - 112^2}}$;
г) $\sqrt{\frac{145{,}5^2 - 96{,}5^2}{193{,}5^2 - 31{,}5^2}}$.

13.15. Упростите выражение $\sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (**13.16, 13.17**):

13.16. а) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$;
б) $\frac{1}{2}\sqrt{120}$;
в) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$;
г) $\frac{1}{5}\sqrt{150}$.

13.17. а) $\sqrt{1\frac{1}{12}}$;
б) $\sqrt{10\frac{1}{8}}$;
в) $\sqrt{1\frac{13}{32}}$;
г) $\sqrt{1\frac{17}{81}}$.

13.18. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{2}$; в) $11\sqrt{5}$; г) $7\sqrt{6}$.

13.19. Внесите положительный множитель под знак корня:

а) $-3\sqrt{8}$; б) $-11\sqrt{3}$; в) $-13\sqrt{5}$; г) $-6\sqrt{2}$.

13.20. Внесите множитель под знак корня:

а) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; б) $-\frac{5}{2}\sqrt{8}$; в) $-\frac{2}{3}\sqrt{9}$; г) $\frac{4}{7}\sqrt{35}$.

Упростите выражение (**16.21—16.29**):

13.21. а) $4\sqrt{2} - \sqrt{18}$; д) $5\sqrt{3} - \sqrt{300} - \sqrt{27}$;

б) $\sqrt{216} - 2\sqrt{6}$; е) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$;

в) $\sqrt{243} + 3\sqrt{3}$; ж) $6\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$;

г) $\sqrt{125} + 7\sqrt{5}$; з) $5\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{200}$.

13.22. а) $2\sqrt{8} + 0{,}5\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{18} + \sqrt{50}$;

б) $2{,}5\sqrt{98} - 2{,}5\sqrt{8} - \frac{1}{12}\sqrt{72} - \sqrt{200}$;

в) $\frac{1}{5}\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - \sqrt{147} + \sqrt{300} + \sqrt{27}$;

г) $\sqrt{2} - \frac{1}{9}\sqrt{162} - \frac{2}{3}\sqrt{27} + \frac{1}{5}\sqrt{300}$.

13.23. а) $5\sqrt{3x} + \frac{1}{2}\sqrt{12x} - 10\sqrt{0{,}03x}$;

б) $3\sqrt{2y} - \sqrt{8y} + 0{,}1\sqrt{200y}$;

в) $4\sqrt{3t} - \sqrt{12t} + 2\sqrt{75t}$;

г) $5\sqrt{27t} - 4\sqrt{48t} - 2\sqrt{12t}$.

13.24. а) $(3\sqrt{12} - \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$; в) $(\sqrt{12} + 2\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$;

б) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5}$; г) $2\sqrt{3} \cdot (2 - 5\sqrt{12})$.

13.25. а) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$; в) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$;

б) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$; г) $(\sqrt{3p} - \sqrt{5q})(\sqrt{3p} + \sqrt{5q})$.

13.26. а) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$; в) $(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3})^2$;

б) $(\sqrt{6} + \sqrt{12})^2$; г) $(\sqrt{14} + \sqrt{22})^2$.

13.27. а) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$; в) $(\sqrt{t} + 2\sqrt{v})^2$;

б) $(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^2$; г) $(2\sqrt{m} - 5\sqrt{n})^2$.

13.28. а) $(\sqrt{m} - \sqrt{n})(m + \sqrt{mn} + n)$;

б) $(c + \sqrt{d})(c^2 + c\sqrt{d} + d)$;

в) $(\sqrt{r} - 2\sqrt{n})(r + 2\sqrt{rn} + 4n)$;

г) $(2\sqrt{s} + 3\sqrt{t})(4s - 6\sqrt{st} + 9t)$.

13.29. а) $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$; в) $(\sqrt{2} - \sqrt{z})^2$;

б) $(\sqrt{y} + \sqrt{3})^2$; г) $(\sqrt{m} - 2)(m + 2\sqrt{m} + 4)$.

Разложите на множители выражение (**13.30—13.35**):

13.30. а) $2a - \sqrt{a}$; б) $a + \sqrt{ab}$.

13.31. а) $2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$; б) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{18}$.

13.32. а) $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$;

б) $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

13.33. а) $a^2 - 5$; в) $c^2 - 8$;

б) $11 - b^2$; г) $5z^2 - 16$.

13.34. а) $36 - a$, где $a > 0$; б) $a - 50$, где $a < 0$.

13.35. а) $4 - 4\sqrt{a} + 1$; в) $a + 2\sqrt{ab} + b$, где $a > 0$;

б) $a + 2x\sqrt{a} + x^2$; г) $a + 6\sqrt{ab} + 9b$, где $b < 0$.

Сократите дробь (**13.36, 13.37**):

13.36. а) $\dfrac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}$; б) $\dfrac{m - n}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}$.

13.37. а) $\dfrac{x + 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; в) $\dfrac{\sqrt{s} - \sqrt{r}}{r - 2\sqrt{rs} + s}$;

б) $\dfrac{x^2 - 6x\sqrt{y} + 9y}{3\sqrt{y} - x}$; г) $\dfrac{\sqrt{3a} + \sqrt{5b}}{3a + 5b + \sqrt{60ab}}$.

13.38. Сократите дробь:

а) $\frac{5+\sqrt{15}}{3+\sqrt{15}}$; г) $\frac{4+2\sqrt{10}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

б) $\frac{11-\sqrt{22}}{2-\sqrt{22}}$; д) $\frac{\sqrt{10}-7}{5-2\sqrt{10}}$;

в) $\frac{8+2\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$; е) $\frac{4+2\sqrt{14}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби **(13.39—13.43)**:

13.39. а) $\frac{5}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

б) $\frac{8}{\sqrt{6}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{5}}$;

13.40. а) $\frac{5}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; в) $\frac{18\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

б) $\frac{8}{\sqrt{12}-\sqrt{27}}$; г) $\frac{15}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

13.41. а) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$;

б) $\frac{2}{\sqrt{15}-4}$; г) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}-6}$.

13.42. а) $\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{80}}$;

б) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{108}}$.

13.43. а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

13.44. Сравните числа:

а) $\frac{8}{17}$ и $\frac{1}{2+\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$; б) $\frac{2}{9}$ и $\frac{2}{\sqrt{63}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}}$.

13.45. Упростите выражение:

а) $\sqrt{5}+\sqrt{6}-\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$;

б) $\sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}$.

13.46. Постройте график функции:

а) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$; д) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{-x}\right)^2 + 3$;

б) $y = \left(\sqrt{x}\right)^4$; е) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 8 - x$;

в) $y = \left(\sqrt{x^2}\right)^2$; ж) $y = \left(\sqrt{1 - x}\right)^2 + 1$;

г) $y = \left(\sqrt{-x}\right)^2$; з) $y = \left(\sqrt{2 - x}\right)^2 + \left(\sqrt{x - 1}\right)^2 + x - 1$.

13.47. Решите уравнение:

а) $(x - 3)\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0$;

б) $(x + 2)\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0$;

в) $(x - 3)\left(\sqrt{x} + 1\right) = 0$;

г) $(x - 3)\left(\sqrt{-x} - 1\right) = 0$;

д) $(x - 5)(x + 1)\left(\sqrt{x^2 - 7x^3 + 1} + 1{,}3\right) = 0$;

е) $x^2 = -\sqrt{\sqrt{x + 4} - 2}$.

13.48. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x - a)\left(\sqrt{-x} + 1\right) = 0$$

не имеет корней?

13.49. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x - a}{\sqrt{x} - 1} = 0$ не имеет корней?

13.50. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x - a)\left(\sqrt{x} - 2\right) = 0$$

имеет два различных корня?

13.51. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}$; е) $y = -\sqrt{x^4}$;

б) $y = \sqrt{-2x} \cdot \sqrt{-0{,}125x}$; ж) $y = \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{3x}\right)^2 - 4}{\sqrt{3}}$;

в) $y = x\left(\sqrt{2x}\right)^2$; з) $y = \frac{3x}{\sqrt{x}}$;

г) $y = x\left(\sqrt{-0{,}4x}\right)^2$; и) $y = \frac{-2x}{\sqrt{-x}}$.

д) $y = -x\left(\sqrt{3x}\right)^2$;

13.52. Для вычисления площади треугольника через длины трех его сторон может быть применена формула Герона (*Герон Александрийский*, вероятно, I в. н. э.):

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

где a, b и c — длины сторон треугольника, а $p = \frac{a + b + c}{2}$ — его полупериметр.

Вычислите площади треугольников и заполните таблицу:

a	b	c	S
13	14	15	
13	20	21	
17	28	39	
12	58	50	
$9\sqrt{3}$	$10\sqrt{3}$	$17\sqrt{3}$	
2,5	3	4,5	
$3\sqrt{3}$	2	7	
$3\sqrt{2}$	8	$\sqrt{58}$	
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$*	

* Последняя строка для тех, кто любит вычислять, или для тех, кто хочет подумать.

13.53. Решите уравнение:

а) $x \cdot (\sqrt{2} - 3) = 2 - 3\sqrt{2}$;

б) $x \cdot (3\sqrt{3} - 5) = 5\sqrt{3} - 9$;

в) $x \cdot (3\sqrt{2} - 1) = 19 - 6\sqrt{2}$;

г) $\frac{x}{\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{\sqrt{2} - 1} = 1$.

13.54. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \cdot \sqrt{2}, \\ 5x - y = 3 \cdot \sqrt{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \cdot \sqrt{2} + y \cdot \sqrt{3} = 5, \\ x \cdot \sqrt{3} - y \cdot \sqrt{2} = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \\ \frac{x}{\sqrt{10}} + y = 5. \end{cases}$

13.55. Постройте график функции:

а) $f(x) = \left(1 + \sqrt{x}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$;

б) $f(x) = \left(1 + \sqrt{-x}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{-x}\right)^2$;

в) $f(x) = \left(1 + \sqrt{x}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{-x}\right)^2$;

г) $f(x) = 0{,}5\left(\left(1 + \sqrt{x}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{x}\right)^2\right)$;

д) $f(x) = 5 + \left(\sqrt{x - 3}\right)^2 + \left(\sqrt{x - 4}\right)^2$;

е) $f(x) = 1 + \left(\sqrt{x - 3}\right)^2 + \left(\sqrt{4 - x}\right)^2$;

ж) $f(x) = x + \left(\sqrt{x - 3}\right)^2 + \left(\sqrt{4 - x}\right)^2$;

з) $f(x) = 1 + \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$;

и) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} - 1$;

к) $f(x) = 1 - \dfrac{x + 1}{\sqrt{-x} + 1}$;

л) $f(x) = -\dfrac{x + 1}{\sqrt{-x} - 1} - 1$;

м) $f(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)(1 - x) - 1$.

13.56. Не используя калькулятор, найдите первую цифру в десятичной записи следующих чисел: $\sqrt{7}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{130}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{260}$; $\sqrt{2600}$.

13.57. Не используя калькулятор, найдите первую цифру после запятой в десятичной записи следующих чисел: $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}1}$; $\sqrt{0{,}49}$; $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}7}$; $\sqrt{0{,}07}$; $\sqrt{0{,}13}$; $\sqrt{0{,}013}$.

13.58. Не используя калькулятор, найдите пять первых цифр после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{0{,}99999}$.

13.59. Зная, что $4 < \sqrt{21} < 5$, оцените следующие числа: $\sqrt{0{,}21}$; $\sqrt{0{,}0021}$; $\sqrt{0{,}84}$; $\sqrt{0{,}0189}$; $\sqrt{2100}$.

13.60. Найдите какое-нибудь число a такое, что $a < \sqrt{2} < a + 0{,}1$. (*Указание*: найдите такие соседние целые числа, между которыми находится число $\sqrt{200}$.)

13.61. Найдите какое-нибудь число a такое, что $a < \sqrt{7} < a + 0{,}1$.

13.62. Пользуясь способом предыдущей задачи, найдите первую цифру после запятой в числе $\sqrt{8{,}33}$.

13.63. Вычислите:

а) $\sqrt{100\ldots02000\ldots01}$ (между 1 и 2, а затем между 2 и 1 по 100 нулей);

б) $\sqrt{9999\ldots98000\ldots01}$ (в записи 100 девяток и 100 нулей).

13.64. Докажите, что $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+c}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{c}}$ и $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+c}}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}=\sqrt{a-\sqrt{c}}$ *(формулы сложных радикалов)*, и примените их для упрощения чисел $\sqrt{7-\sqrt{48}}$; $\sqrt{28+\sqrt{300}}$.

§ 14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАЦИЮ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

14.01. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

г) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times$

$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$;

д) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$;

е) $(\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{10})(\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{10})(\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{10})\times$

$\times(-\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{10})$;

ж) $\dfrac{9\sqrt{8}-6\sqrt{12}+3\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$.

Докажите равенство (**14.02, 14.03**):

14.02. а) $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2$;

г) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3}-2)^2 = 21+8\sqrt{3}-4\sqrt{5}-4\sqrt{15}$.

14.03. а) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

б) $\left(\dfrac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2 = \sqrt{\dfrac{91}{4}+10\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}$;

г) $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$.

Упростите выражение (**14.04, 14.05**):

14.04. а) $\dfrac{4x}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} : \dfrac{12x\sqrt{x}}{4x-y} : \dfrac{2x}{6x-3\sqrt{xy}}$;

б) $\dfrac{a-16}{\sqrt{a}+3} \cdot \dfrac{1}{a+4\sqrt{a}} - \dfrac{\sqrt{a}+4}{a-3\sqrt{a}}$.

14.05. а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) : \left(\sqrt{x} - \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \sqrt{y}$;

б) $\left(\sqrt{c}+\sqrt{d} - \dfrac{2\sqrt{cd}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{d}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} + \dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}\right) - \sqrt{c}$.

14.06. Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) = \sqrt{a}+\sqrt{b}$;

б) $\dfrac{\sqrt{z}-2}{4z-16\sqrt{z}+16} : \left(\dfrac{\sqrt{z}}{2\sqrt{z}-4} - \dfrac{z-12}{2z-8} - \dfrac{2}{z+2\sqrt{z}}\right) = \dfrac{\sqrt{z}}{4(\sqrt{z}+2)}$.

14.07. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+\dfrac{2a^2}{\sqrt{a}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$;

б) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right)$.

14.08. Найдите сначала a^2, а затем a:

а) $a=\sqrt{15-4\sqrt{14}}-\sqrt{15+4\sqrt{14}}$;

б) $a=\sqrt{22-4\sqrt{30}}-\sqrt{22+4\sqrt{30}}$.

14.09. Удовлетворяет ли число a данному неравенству:

а) $a=\sqrt{34-24\sqrt{2}}-\sqrt{34+24\sqrt{2}}$, $7x^2+58x+13>0$;

б) $a=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, $11x^2+26x-73\leqslant 0$?

Упростите выражение **(14.10, 14.11):**

14.10. а) $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\right)$.

14.11. а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}-1\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}-\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}+1\right)$;

б) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):(a-b)+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

в) $\left(\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-1}{2}+1$, $0<x<1$.

14.12. Вычислите при заданном значении x:

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}},\quad x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right),\ a>0,\ b>0.$$

14.13. Докажите равенство

$$\frac{b^2 - 3b - (b - 1)\sqrt{b^2 - 4} + 2}{b^2 + 3b - (b + 1)\sqrt{b^2 - 4} + 2} \cdot \sqrt{\frac{b + 2}{b - 2}} = \frac{1 - b}{1 + b},$$

если $b > 2$.

§ 15. АЛГОРИТМ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

15.01. Используя алгоритм, извлеките квадратный корень из чисел 729; 1369; 1849; 2209; 28,09; 37,21; 0,5329; 0,7569; 940 900; 289 000 000. Результат проверьте по таблице квадратов.

15.02. Используя алгоритм, извлеките квадратный корень из чисел 11 449; 13 689; 45 369; 120 409; 1672,81; 3080,25; 31,2481; 38,3161, 0,516961; 0,660969; 78 854 400; 82 992 100; 8 408 890 000; 9 940 090 000. Результат проверьте на микрокалькуляторе.

15.03. Используя алгоритм, извлеките квадратный корень из чисел

121; 12 321; 1 234 321; 123 454 321; 12 345 654 321;

1 234 567 654 321; 123 456 787 654 321;

12 345 678 987 654 321.

Попробуйте найти закономерность.

15.04. Используя алгоритм, извлеките квадратный корень из чисел 81; 9801; 998 001; 99 980 001; 9 999 800 001; 999 998 000 001; 9 999 999 999 800 000 000 001. Попробуйте найти закономерность.

15.05. Используя алгоритм, извлеките квадратный корень до второй после запятой цифры и округлите ответ до десятых: $\sqrt{2}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{0{,}2}$; $\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{150}$; $\sqrt{0{,}15}$.

15.06. Используя алгоритм, извлеките квадратный корень до второй после запятой цифры и округлите ответ до десятых: $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{23}$; $\sqrt{2{,}3}$; $\sqrt{11{,}55}$.

15.07. Используя алгоритм, определите, между какими соседними натуральными числами заключены числа: $\sqrt{444\,333}$; $\sqrt{333\,444}$; $\sqrt{123\,456\,789}$; $\sqrt{987\,654\,321}$.

15.08. Используя алгоритм, найдите

$$\sqrt{9{,}8696},\ \sqrt{98{,}696},\ \sqrt{986{,}96}.$$

§ 16. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА. ФУНКЦИЯ $y = |x|$

16.01. Вычислите: $|3{,}05|$; $|-4{,}2|$; $|0{,}999 - 1{,}01|$; $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right|$,

$|\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15|$.

16.02. Отметьте на числовой прямой точки с координатой a, если выполняются следующие условия: $|a| = 7$; $|a - 2| = 4$; $|a| = a$.

16.03. Упростите выражение: $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2}$; $\sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}$.

В номерах **16.04—16.15** требуется, используя определение модуля числа, доказать важные свойства модуля.

16.04. Модуль любого действительного числа a есть неотрицательное число $|a| \geqslant 0$.

16.05. Каждое действительное число a не больше своего модуля: $a \leqslant |a|$ и не меньше числа, противоположного модулю: $a \geqslant -|a|$, т. е. каждое действительное число a удовлетворяет неравенству $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

16.06. Если число $a \geqslant 0$ и число x удовлетворяет неравенству $-a \leqslant x \leqslant a$, то модуль числа x удовлетворяет неравенству $|x| \leqslant a$, и, наоборот, если $|x| \leqslant a$, то справедливо неравенство $-a \leqslant x \leqslant a$. Обычно это свойство записывают в следующем виде: $-a \leqslant x \leqslant a \Leftrightarrow |x| \leqslant a$, причем важно то, что эти неравенства равносильны при *любом* a.

16.07. Если число $a \geqslant 0$ и для числа x справедливо хотя бы одно из неравенств $x \geqslant a$ или $x \leqslant -a$, то модуль числа x удовлетворяет неравенству $|x| \geqslant a$, и, наоборот, каждое число x, удовлетворяющее неравенству $|x| \geqslant a$, будет удовлетворять хотя бы одному из неравенств $x \geqslant a$ или $x \leqslant -a$. Обычно это свойство записывают в следующем виде:

$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant a, \\ x \leqslant -a \end{array}\right. \Leftrightarrow |x| \geqslant a,$$

причем переход от совокупности к одному неравенству и обратно можно совершать при *любом* a.

16.08. Модуль суммы двух чисел не больше суммы модулей этих чисел: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Это свойство естественным образом распространяется на любое конечное число слагаемых. Например, $|a + b + c| \leqslant |a| + |b| + |c|$.

16.09. Модуль разности двух чисел не меньше разности модулей этих чисел: $|a - b| \geqslant |a| - |b|$.

16.10. Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Для произвольного конечного числа сомножителей данное свойство сохраняется. Например, $|a \cdot b \cdot c| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$.

16.11. Модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

16.12. Модуль степени $|a^n| = |a|^n$, $n \in N$, причем, если $n = 2k$ — четное число, то $|a|^{2k} = a^{2k}$ в частности, докажите, что $|a|^2 = |a^2| = a^2$.

16.13. Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой прямой, изображающими эти числа.

16.14. Сумма модулей чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое число равно нулю:

$$|a| + |b| + |c| + \ldots + |d| = 0 \Leftrightarrow a = b = \ldots = d = 0.$$

16.15. Модуль разности модулей двух чисел не больше модуля разности этих чисел: $||a| + |b|| \leqslant |a - b|$.

16.16. Решите уравнения: $|x - 5| = 5$; $|17x + 7| = 17$; $|x^2 + x - 1| = 1$; $|x| = x$; $|x - 2| = 2 - x$.

16.17. Вычислите:

а) $\dfrac{|2{,}3 - \sqrt{5}|}{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - 0{,}3}$; б) $\dfrac{|\sqrt{123} + \sqrt{125} - 2\sqrt{124}|}{2\sqrt{1{,}24} - \sqrt{1{,}23} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$.

16.18. Найдите значение выражения:

а) $|\sqrt{53} - 7| + |\sqrt{53} - 5\sqrt{3}| + |\sqrt{75} - 9|$;

б) $|19 - \sqrt{2}| + |19 - 2\sqrt{2}| + |19 - 3\sqrt{2}| + |19 - 6\sqrt{2}|$;

в) $|1 - \sqrt{37}| + |2 - \sqrt{37}| + \ldots + |6 - \sqrt{37}| + 6 \cdot |7 - \sqrt{37}|$;

г) $|\sqrt{131} - 1| + |\sqrt{131} - 2| + \ldots + |\sqrt{131} - 10| + |\sqrt{131} - 11| +$
$+ 11 \cdot |\sqrt{131} - 12|$.

16.19. Докажите, что $|a - b| = |b - a|$.

16.20. Пусть $\begin{cases} x + y < 0, \\ x > 0, \\ y < 0. \end{cases}$ Сравните с нулем разность $|x| - |y|$.

Упростите выражение (**16.21—16.27**):

16.21. $(2|a| - 3|b|)(2|a| + 3|b|)$.

16.22. $\dfrac{3|a| + 5|b|}{2|a| - 7|b|}$, если $a = 2{,}2b$ и $b \neq 0$.

16.23. $\dfrac{7|a| - 2|b|}{8|a| + |b|}$, если $b = -0{,}3a$ и $a \neq 0$.

16.24. $\dfrac{3|a|}{2|a| - 7|b|}$, если $\dfrac{b}{2a + 7b} = 3$.

16.25. $\dfrac{a^2 - 3|a| \cdot |b| + b^2}{5a^2 - 2|a \cdot b| - |b|^2}$, если $3a^2 - 5ab - 8b^2 = 0$ и $a + b \neq 0$.

16.26. $\dfrac{|a| - |b|}{|a| + |b|} + \dfrac{|a| + |b|}{|a| - |b|}$.

16.27. $(|a| - 3|b|)^2 + (3|a| + |b|)^2$.

16.28. Пусть точка A на числовой прямой имеет координату a, а точка B — координату b, точка O — координату 0, а точка E — координату 1.

а) Найдите длины отрезков OE; OA; OB; AB; AE; BE.

б) Сравните $OA + OB$ и AB, если числа a и b имеют различные знаки.

в) Сравните $OE + OA$ и AE, если число a отрицательное.

г) Докажите, что если $AE + BE = AB$, то $(1 - a)(b - 1)$ — положительное число.

16.29. Пусть точка A на числовой прямой имеет координату a, а точка B — координату b. Докажите, что расстояние между точками A и B равно $|a - b|$.

16.30. Докажите, что $|x - a| = 2$ тогда и только тогда, когда расстояние от точки с координатой x до точки A с координатой a равно 2, причем таких точек две: $M_1(a - 2)$ и $M_2(a + 2)$, и точка A является серединой отрезка M_1M_2.

16.31. Найдите все точки x на числовой прямой такие, что выполняется указанное равенство. Дайте геометрическое толкование этому равенству:

а) $|x| = 8$;
б) $|x - 3| = 5$;
в) $|x - 7| = 3$;
г) $|x - (-4)| = 5$;
д) $|x + 5| = 4$.

16.32. Пусть $|x| = 2$. Чему может быть равен $|x + 5|$?

16.33. Пусть $|x - 10| = 3$. Чему может быть равен $|2x + 1|$?

16.34. Пусть $|x + 8| = 3$. Чему может быть равен $|x|$?

16.35. Пусть $|x + 7| = 0$. Чему может быть равен $|3x - 1|$?

16.36. Существует ли такое число x, что $|x - 8| = 2$, а $|x - 5| = 1$? Если да, то какое?

16.37. Существует ли такое число x, что $|x - 9| = 12$, а $|x - 5| = 1$? Если да, то какое?

16.38. Пусть $|a - 3| = 5$, а $|b - 3| = 111$. Какие значения может принимать $|a - b|$?

16.39. Пусть $|y + a| = 523$ и $|a| = 37$. Какие значения может принимать $|y|$?

16.40. Пусть $|y| = 400$ и $|y + a| = 37$. Какие значения может принимать $|a|$?

16.41. Пусть $|x - a| = 4$ и $|y - a| = 7$. Какие значения может принимать $|x - y|$?

16.42. Пусть $|x + b| = 5$ и $|y + b| = 17$. Какие значения может принимать $|x - y|$?

16.43. Пусть $|x + a| = 107$ и $|x + b| = 77$. Какие значения может принимать $|a - b|$?

16.44. Укажите на числовой прямой все точки с координатой x такие, что:

а) $|x| = x$;　　　　г) $|x + 4| = 4 + x$;
б) $|x| = -x$;　　　　д) $|x - 6| = 6 - x$;
в) $|x - 7| = x - 7$;　　е) $|x + 5| = -x - 5$.

16.45. Укажите на числовой прямой все точки с координатой x такие, что:

а) $|x| \leqslant x$;　　　　г) $|x - 3| \leqslant 3 - x$;
б) $|x| \leqslant -x$;　　　　д) $|x + 5| \leqslant 5 + x$;
в) $|x - 3| \leqslant x - 3$;　　е) $|x + 2| \leqslant -x - 2$.

16.46. Укажите на координатной прямой все точки с координатой x такие, что:

а) $|x| > x$;　　　　г) $|x - 5| > 5 - x$;
б) $|x| > -x$;　　　　д) $|x + 77| > 77 + x$;
в) $|x - 8| > x - 8$;　　е) $|x + 0{,}2| \leqslant -0{,}2 - x$.

16.47. Сравните выражения $x = |a + b|$ и $y = |a| + |b|$ при $a = 9$, $b = 11$; $a = 0$, $b = -7$; $a = -5$, $b = 11$; $a = -3$, $b = -24$; $a = 9$, $b = -111$.

16.48. При каких значениях a и b выполняются данные условия? На основании полученных результатов сравните числа $|a + b|$ и $|a| + |b|$:

а) $|a + b| = |a| + |b|$;
б) $|a + b| = |a| - |b|$;
в) $|a + b| = |b| - |a|$;
г) $|a + b| = a + b$;
д) $|a + b| = -a - b$;
е) $|a + b| = a - b$;
ж) $|a + b| = b - a$;
з) $|a + b| = a$;
и) $|a + b| = -b$.

16.49. Могут ли существовать такие числа a и b, что $|a + b| < |a - b|$? Если могут, приведите пример.

16.50. Могут ли существовать такие числа a и b, что $|a| - |b| < |a + b| < |a| + |b|$? Если могут, приведите пример.

16.51. Могут ли существовать такие числа a и b, что $||a| - |b|| < |a + b| < |a| + |b|$? Если могут, приведите пример.

16.52. Докажите, что все точки $M(x)$, координата которых удовлетворяет условию $|x - a| + |b - x| = |b - a|$, «заполняют» отрезок, концы которого имеют координаты a и b.

16.53. Укажите на числовой прямой все такие точки с координатой x, что:

а) $|x| + |2 - x| = 2$;
б) $|x - 3| + |8 - x| = 5$;
в) $|x - 7| + |x| = 7$;
г) $|x + 4| + |5 - x| = 9$;
д) $|x + 5| + |11 - x| = 16$.

Дайте геометрическое толкование этим равенствам.

16.54. Укажите наименьшее значение выражения:
а) $|x|$; б) $|x + 3|$; в) $|x| + 3$; г) $|x - 6| - 6$.

16.55. Докажите неравенство:

а) $|x| \geqslant 0$;
б) $|x| \geqslant x$;
в) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$;
г) $|a - d| \leqslant |a - b| + |b - d|$ (попробуйте использовать пункт в).

16.56. Используя свойства модуля, докажите неравенство:

а) $|x| + |3 - x| \geqslant 3$;

б) $|f + 3| + |f + 5| \geqslant 2$;

в) $|d - 1| + |d + 54| + |3 - 2d| \geqslant 56$;

г) $|d - 1| + |d + 54| + |3 - 2d| \geqslant 56 - d^2$.

16.57. Рассмотрите неравенства из задачи 16.56. Найдите, если это возможно, значения переменной, при которых неравенство обращается в равенство.

16.58. Используя свойства модуля, докажите неравенство:

а) $|a - 2| + |a - c| + |a - 11| \geqslant 9$;

б) $|3a - d^2| + |2a - 4| + |a + 5| \geqslant d^2$.

16.59. Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение (укажите какое-либо значение переменной, в котором принимается это наименьшее значение):

а) $|x| + |22 - x|$;

б) $|x - 1| + |x + 445|$;

в) $|3x + 5| + |21 + 3x|$.

16.60. Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение (укажите какое-либо значение переменной, в котором принимается это наименьшее значение):

а) $|x^2 - 8x - 3| + x^2 - 8x + 100$;

б) $|x^2 + 7x + 1| + |7x + 4| + x^2$;

в) $|3x + 1| + |12 - x| + |5 - 2x|$.

16.61. Найдите все такие натуральные n, при которых число k — натуральное:

а) $k = \left|5 - \sqrt{13}\right| + \left|\sqrt{13} - n\right|$;

б) $k = \left|10 - \sqrt{58{,}3}\right| + \left|n - \sqrt{58{,}3}\right|$;

в) $k = \left|5\sqrt{2} - 1\right| + \left|\sqrt{2} - 7\right| + \left|n \cdot \sqrt{2} - 325\right|$;

г) $k = \left|7\sqrt{3} - 11\right| + \left|\sqrt{3} - n\right| + \left|(n^2 - 5n + 12) \cdot \sqrt{2} - 97\right|$.

Рассмотрите таблицу и, пользуясь указаниями в третьем столбце, докажите следующие важные и используемые на практике свойства.

16.62.	$\lvert a\rvert = a \Leftrightarrow a \geqslant 0.$	Следует из определения модуля.
16.63.	$\lvert a\rvert = -a \Leftrightarrow a \leqslant 0.$	Следует из определения модуля.
16.64.	$\lvert a\rvert = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b. \end{array}\right. \end{cases}$	Следует из определения модуля.
16.65.	$\lvert a + b\rvert = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \cdot b \geqslant 0.$	При любых a и b справедливо неравенство $\lvert a + b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert,$ которое обращается в равенство, если числа a и b одного знака или когда хотя бы одно из них равно нулю. Если a и b имеют противоположные знаки, то, очевидно, выполняется строгий знак неравенства.
16.66.	$\lvert a - b\rvert = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \cdot b \leqslant 0.$	Следует из задачи 16.65, так как равенство можно записать в виде $\lvert a + (-b)\rvert = \lvert a\rvert + \lvert -b\rvert.$
16.67.	$\lvert a + b\rvert = \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a + b) \cdot b \leqslant 0.$	Следует из задачи 16.65, так как равенство можно записать в виде $\lvert (a + b) + (-b)\rvert = \lvert a + b\rvert + \lvert -b\rvert.$
16.68.	$\lvert a - b\rvert = \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a + b) \cdot b \geqslant 0.$	Следует из задачи 16.67, так как $\lvert a + (-b)\rvert = \lvert a\rvert - \lvert -b\rvert.$
16.69.	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = a + b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0. \end{cases}$	При любых неотрицательных a и b равенство справедливо. Если a и b имеют противоположные знаки или отрицательны, то $a + b < \lvert a\rvert + \lvert b\rvert.$

16.70.	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = a - b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \leqslant 0. \end{cases}$	**Равенство можно записать в виде** $\lvert a\rvert + \lvert -b\rvert = a + (-b).$
16.71.	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert = a - b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b, \\ \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$	**Если a и b неотрицательны или равны между собой, то равенство справедливо. Если $a < 0$, $b \geqslant 0$ или $a > 0$, $b \leqslant 0$, то равенство невозможно.**
16.72.	$\lvert a + b\rvert = \lvert a\rvert + b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, \\ \begin{cases} a + b \geqslant 0, \\ a \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$	**Равенство можно записать в виде** $\lvert a + b\rvert - \lvert a\rvert = (a + b) - a.$
16.73.	$\lvert a + b\rvert = \lvert a\rvert - b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, \\ \begin{cases} a + b \leqslant 0, \\ a \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$	**Равенство можно записать в виде** $\lvert -a - b\rvert - \lvert -a\rvert =$ $= (-a - b) - (-a).$
16.74.	$\lvert ab\rvert = a \cdot \lvert b\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, \\ a \geqslant 0. \end{array}\right.$	**Равенство можно записать в виде** $\lvert b\rvert \cdot (\lvert a\rvert - a) = 0.$
16.75.	$\lvert a + b\rvert \geqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \cdot b \geqslant 0.$	**Используйте неравенство** $\lvert a + b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert.$
16.76.	$\lvert a - b\rvert \geqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \cdot b \leqslant 0.$	**Неравенство можно записать в виде** $\lvert a + (-b)\rvert \geqslant \lvert a\rvert + \lvert -b\rvert.$
16.77.	$\lvert a + b\rvert \leqslant \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a + b) \cdot b \leqslant 0.$	**Неравенство можно записать в виде** $\lvert (a + b) + (-b)\rvert \geqslant \lvert a + b\rvert + \lvert -b\rvert.$
16.78.	$\lvert a - b\rvert \leqslant \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a - b) \cdot b \geqslant 0.$	**Неравенство можно записать в виде** $\lvert (a - b) + b\rvert \geqslant \lvert a - b\rvert + \lvert b\rvert.$

16.79. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 + 3x + 10}{|x^2 + 3x + 10|}$; в) $y = \frac{|x - 1|}{x - 1}$;

б) $y = \frac{x}{|x|}$; г) $y = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} - |x| + 2$.

16.80. Постройте график функции $f(x) = |x|$ и исследуйте эту функцию по следующему плану:

1) область определения функции;
2) множество значений функции;
3) промежутки монотонности (с доказательством);
4) нули функции.

16.81. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x|$ на отрезке $[-2; 5]$.

16.82. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = |x|$ на отрезке $[-7; 2]$.

16.83. Найдите все натуральные значения x, при каждом из которых значение функции $y = |5 - 3\sqrt{3}| + |3\sqrt{3} + x|$ является натуральным числом. Постройте график этой функции.

16.84. Найдите все натуральные значения выражения $\frac{x + 1}{1 - x}$, при каждом из которых значение функции $y = |5 - 4\sqrt{2}| + \left|4\sqrt{2} + \frac{x + 1}{1 - x}\right|$ является целым числом. Постройте график этой функции.

ГЛАВА 3

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

§ 17. ФУНКЦИЯ $y = kx^2$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

17.01. Постройте на одном чертеже графики функций:

$$y = x^2; \quad y = 2x^2; \quad y = \frac{1}{2}x^2; \quad y = \frac{3}{2}x^2; \quad y = \frac{2}{3}x^2.$$

17.02. Постройте графики тех же функций на отрезке [0; 2], взяв большой масштаб (например, 4 клетки).

17.03. Рассмотрите данные на чертежах графики $y = f(x)$, перенесите их в тетрадь и на тех же рисунках постройте другим цветом графики функций $y = -f(x)$ (см. форзац).

17.04. Постройте график функции $y = -x^2$ и опишите ее свойства: $D(y)$; $E(y)$; промежутки возрастания и убывания; наибольшее и наименьшее значения; нули функции.

17.05. При каких значениях k график функции $y = kx^2$ проходит через точку:

а) $M(1; 2)$; б) $K(-2; -7)$; в) $T(-5; 2)$?

17.06. Пересекает ли график функции $y = 1{,}3x^2$ отрезок AB, если $A(-1; 1)$, $B(2; 6)$?

17.07. Пересекает ли график функции $y = -x^2$ отрезок AB, если $A(-13{,}04; -169)$, $B(29{,}3; -900)$?

17.08. Изобразите все точки координатной плоскости, абсцисса которых равна 2, а ордината:

а) больше 4; б) меньше 4.

17.09. Изобразите все точки координатной плоскости, ордината которых больше удвоенного квадрата абсциссы.

17.10. Изобразите все точки координатной плоскости, ордината которых меньше половины квадрата абсциссы.

17.11. Пусть $f(x) = x^2 + 6x - 1$. Постройте график функции
$$y = 0{,}3f(x - 3) + 3.$$

17.12. Пусть $f(x) = x^2 - 4x + 17$. Постройте график функции
$$y = -2f(x - 2) + 58.$$

17.13. Пусть $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Постройте график функции $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x^2$ (**17.14—17.16**):

17.14. а) На отрезке $[-2; 2]$; б) на отрезке $[-1; 0]$.

17.15. а) На отрезке $[-2; 1]$; б) на отрезке $[-1{,}5; 2]$.

17.16. а) На луче $[0; +\infty)$; б) на луче $(-\infty; 2]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -0{,}5x^2$ (**17.17—17.19**):

17.17. а) На полуинтервале $[-2; 2)$;
б) на отрезке $[0; 2]$.

17.18. а) На полуинтервале $(-2; 1]$;
б) на отрезке $[-3; 2]$.

17.19. а) На луче $[-4; +\infty)$;
б) на луче $(-\infty; 4]$.

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2$. Найдите (**17.20—17.23**):

17.20. а) $f(a)$; б) $f(4a)$; в) $f(-3a)$; г) $f(2a)$.

17.21. а) $f(a + 1)$; б) $f(b - 2)$; в) $f(c + 11)$; г) $f(d - 13)$.

17.22. а) $f(x + 1)$; б) $f(x - 3)$; в) $f(x + 9)$; г) $f(x - 7)$.

17.23. а) $f(x) + 1$; б) $f(x) - a$; в) $f(x) - 5$; г) $f(x) + b$.

17.24. Дана функция $y = f(x)$, где
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2, \text{ если } 1 < x \leqslant 6. \end{cases}$$

а) Найдите $f(2)$; $f(6)$; $f(8)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

17.25. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{4}x, \text{ если } 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Найдите $f(0)$; $f(2)$; $f(4)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

17.26. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 0; \\ 2x + 3, \text{ если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-3)$; $f(0)$; $f(1)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

17.27. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant -1; \\ -1, \text{ если } -1 < x \leqslant 0; \\ -3x - 1, \text{ если } 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-2{,}5)$; $f(-0{,}5)$; $f(4)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

17.28. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant -2; \\ -0{,}5x^2, \text{ если } -2 < x \leqslant 2; \\ -2, \text{ если } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-2)$; $f(2)$; $f(2{,}4)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

Постройте график уравнения **(17.29—17.32)**:

17.29. $(y - x^2)(y - x) = 0$.

17.30. $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$.

17.31. $y^2 - x^4 = 0$.

17.32. $(y^2 - x^4)(y^4 - x^2) = 0$.

17.33. Постройте график уравнения и определите количество общих точек этого графика и прямой $x = a$ для каждого $a \in \mathbf{R}$:
а) $y^2 - x^4 = 0$; в) $(y - x^2)(y^2 + x) = 0$;
б) $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$; г) $(y^2 - x^4)(y^4 - x^2) = 0$.

17.34. Постройте график уравнения и определите количество общих точек этого графика и прямой $y = a$ для каждого $a \in \mathbf{R}$:
а) $y^2 - x^4 = 0$; в) $(y - x^2)(y^2 + x) = 0$;
б) $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$; г) $(y^2 - x^4)(y^4 - x^2) = 0$.

17.35. При каких значениях a существуют такие значения $k \in (0; 1)$, что уравнение $kx^2 = a$:
а) не имеет решений;
б) имеет решения;
в) имеет ровно одно решение?

17.36. При каких значениях a существуют такие значения k, что уравнение $kx^2 = a$ имеет ровно одно решение?

17.37. При каких значениях k существуют такие значения $a \in (0; 1)$, что уравнение $kx^2 = a$:
а) не имеет решений;
б) имеет решения;
в) имеет ровно одно решение?

17.38. При каких значениях k существуют такие значения a, что уравнение $kx^2 = a$ имеет ровно одно решение?

17.39. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2}{x + 1}$; б) $y = \dfrac{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2}{x + 2}$.

§ 18. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

18.01. Постройте на одном чертеже графики следующих функций:

$$y = \frac{1}{x},\ \ y = \frac{2}{x},\ \ y = \frac{1}{2x},\ \ y = \frac{3}{2x},\ \ y = \frac{4}{x}.$$

18.02. Постройте графики функций, указанных в № 18.01, на отрезке [0,25; 4], взяв большой масштаб (например, 1 = 2 клеткам).

18.03. Постройте на одном чертеже графики функций:

$$y = -\frac{1}{x}, \quad y = -\frac{3}{x}, \quad y = -\frac{1}{3x}, \quad y = -\frac{2}{3x}, \quad y = -\frac{9}{x}.$$

18.04. Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$ и опишите ее свойства: $D(y)$; $E(y)$; промежутки возрастания и убывания; точки экстремума; экстремумы; наибольшее и наименьшее значения; нули функции; асимптоты; центр симметрии.

18.05. Постройте график функции $y = -\frac{3}{x}$ и опишите ее свойства: $D(y)$; $E(y)$; промежутки возрастания и убывания; точки экстремума; экстремумы; наибольшее и наименьшее значения; нули функции; асимптоты; центр симметрии.

18.06. Постройте график функции $y = \frac{4}{x}$, $x \in [1; 8]$ и опишите ее свойства: $D(y)$; $E(y)$; промежутки возрастания и убывания; точки экстремума; экстремумы; наибольшее и наименьшее значения; нули функции.

18.07. При каких значениях k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

а) $M(1; 2)$; б) $K(-2; -7)$; в) $T(-5; 2)$?

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{2}{x}$ **(18.08, 18.09):**

18.08. а) На отрезке $[-2; -1]$; б) на отрезке $[-4; -2]$.

18.09. а) На луче $(-\infty; -1]$; б) на луче $[2; +\infty)$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -\frac{4}{x}$ **(18.10, 18.11):**

18.10. а) На отрезке $[-2; -4]$; б) на отрезке $[-2; -1]$.

18.11. а) На луче $(-\infty; -1]$; б) на луче $[1; +\infty)$.

18.12. Определите с помощью графиков число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y = -\frac{3}{x}, \\ x - 2y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ 3x - 4y + 12 = 0. \end{cases}$

18.13. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{4}{x}$. Докажите, что

$$f(x + 1) - f(x - 1) = -\frac{1}{2} f(x + 1) \cdot f(x - 1).$$

18.14. Постройте график уравнения:

а) $xy = 3$;
в) $xy = 6$;
б) $(xy - 1)(y - 3) = 0$;
г) $(xy - 2)(xy + 5) = 0$.

18.15. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ 2x, \text{ если } 0 < x \leqslant 1; \\ \frac{2}{x}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-3)$; $f(1)$; $f(10)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

18.16. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x - 3}{x^2 - 3x}$;
б) $y = \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 + 2x}$.

18.17. Найдите абсциссу точки графика $y = \frac{4}{x}$, если ее ордината равна 16.

18.18. Найдите точки графика $y = \frac{4}{x}$ с равными координатами.

18.19. С помощью графика функции $y = -\frac{3}{x}$ определите, имеет ли отрезок AB точки, принадлежащие этому графику, если:

а) $A(-1; 1)$, $B(2; 6)$;
в) $A(3; 1)$, $B(-1; -3)$;
б) $A(-3; 3)$, $B(0; 0)$;
г) $A(-2; 0)$, $B(0; 100)$.

18.20. Найдите на оси ординат какую-либо точку M такую, что отрезок AM, где $A(8; 0)$, имел бы с графиком функции $y = \frac{3}{x}$ две общие точки.

18.21. Найдите на оси ординат какую-либо точку M такую, что отрезок AM, где $A(-8; 0)$, не имел бы с графиком функции $y = -\frac{2}{x}$ общих точек.

18.22. Изобразите на координатной плоскости все точки $M(x;\ y)$, для которых произведение их координат:
а) равно 2; б) меньше 2; в) больше 2.

18.23. Докажите, что графики функций $y = \frac{k_1}{x}$ и $y = \frac{k_2}{x}$ при $k_1 \neq k_2$ не имеют общих точек.

18.24. Докажите, что графики функций $y = -\frac{3}{x}$ и $y = x$ не имеют общих точек.

18.25. Докажите, что графики функций $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -x$ имеют две общие точки.

18.26. Определите длину отрезка прямой $x = 3$, который высекают на ней графики функций $y = \frac{3}{2x}$ и $y = \frac{9}{4x}$.

18.27. Определите длину отрезка прямой $x = -22$, который высекают на ней графики функций $y = \frac{32}{11x}$ и $y = -\frac{12}{11x}$.

18.28. При каком значении a графики функций $y = \frac{21}{x}$ и $y = \frac{4}{x}$ высекают на прямой $x = a$ отрезок длиной 17?

18.29. Определите длину отрезка прямой $y = 6$, который высекают на ней графики функций $y = \frac{3}{4x}$ и $y = \frac{4}{3x}$.

18.30. Определите длину отрезка прямой $y = -4$, который высекают на ней графики функций $y = -\frac{64}{15x}$ и $y = \frac{4}{3x}$.

18.31. При каком значении b графики функций $y = -\frac{3}{x}$ и $y = \frac{4}{x}$ высекают на прямой $y = b$ отрезок длиной 7?

18.32. Найдите точки графика функции $y = \frac{1}{x}$, равноудаленные от осей координат.

18.33. Найдите точки графика функции $y = -\frac{9}{x}$, равноудаленные от осей координат.

18.34. На графике функции $y = -\frac{1}{x}$ укажите шесть пар точек, симметричных относительно начала координат.

18.35. Найдите координаты точек A и B, если они лежат на графике функции $y = -\frac{2}{3x}$ и при этом абсцисса точки B равна 2, а серединой отрезка AB является начало координат.

18.36. Найдите координаты середины отрезка, высекаемого на прямой $y = 23{,}4x$ графиком функции $y = \frac{19}{7x}$.

18.37. Изобразите все точки координатной плоскости, ордината которых больше числа, обратного абсциссе.

18.38. Изобразите все точки координатной плоскости, ордината которых меньше числа, обратного абсциссе.

18.39. Изобразите все точки координатной плоскости, произведение координат которых меньше 1.

18.40. Изобразите все точки координатной плоскости, квадрат суммы координат которых больше квадрата их разности на 4.

18.41. Изобразите все точки координатной плоскости, квадрат суммы координат которых меньше квадрата их разности на 8.

18.42. Пусть $f(x) = \frac{3}{x}$. Постройте график функции:

а) $y = f(-x)$; б) $y = -f(x)$; в) $y = -f(-x)$.

18.43. Пусть $f(x) = \frac{1}{x+4}$. Постройте график функции $y = 0{,}3f(x-4)$.

18.44. Пусть $f(x) = x$. Постройте график функции $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

18.45. Постройте график уравнения:

а) $(yx-1)(y-x) = 0$; в) $\frac{xy+1}{x+y} = 0$;

б) $\frac{xy-1}{x-y} = 0$; г) $(yx-1)(yx+2) = 0$.

18.46. Постройте график уравнения и определите число общих точек этого графика и прямой $y = a$ для всех $a > 0$:

а) $(yx-1)(y-x) = 0$; в) $(yx-1)(yx+2) = 0$;

б) $\frac{xy-1}{x-y} = 0$; г) $(xy+1)(x^2-y^2) = 0$.

18.47. Постройте график уравнения и определите число общих точек этого графика и прямой $y = a$ для всех $0 \leqslant a \leqslant 4$:

а) $(6yx - 1)(2y + 3x) = 0$;   в) $9y^2x^2 - 4 = 0$;

б) $\dfrac{2xy - 1}{2x - y} = 0$;   г) $(xy + 1)(x^2 - y^2) = 0$.

18.48. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 5, \\ \dfrac{7}{x} + \dfrac{8}{y} = 22; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{y} = 23, \\ \dfrac{7}{x} + \dfrac{5}{y} = 31; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{y} = 15, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} = 13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{y} = 8, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 8. \end{cases}$

18.49. Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$2f(x) + 3f(-x) = \frac{2}{x},$$

и постройте ее график.

18.50. Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$3f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 + 3}{x},$$

и постройте ее график.

18.51. При каких значениях k существуют такие значения $a \in (0; 1)$, что уравнение $\dfrac{k}{x} = a$:

а) не имеет решений;
б) имеет решения;
в) имеет ровно одно решение?

18.52. При каких значениях a существуют такие значения $k \in (0; 1)$, что уравнение $\dfrac{k}{x} = a$:

а) не имеет решений;
б) имеет такие решения, что $x \in (0; 1)$;
в) имеет такие решения, что $x \in [-1; 1]$?

18.53. При каких значениях k уравнение $\dfrac{k}{x} = a$ имеет решение для любых значений a?

§ 19. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ $y = f(x)$, $y = f(x) + a$, $y = f(x + b)$, $y = f(x + b) + a$

График $y = f(x) + a$

19.01. Изобразите на координатной плоскости заданные точки и определите, используя обороты «выше на...» и «ниже на...», их взаимное расположение:

а) $A(-1;\ 7)$ и $A_1(-1;\ 10)$;
б) $B(2;\ 7)$ и $B_1(2;\ 5)$;
в) $C(0;\ -6)$ и $C_1(0;\ -5)$;
г) $D(3;\ -4)$ и $D_1(3;\ -7)$.

19.02. Как найти расстояние между точками, имеющими одинаковые ординаты? Закончите предложение: «Если точки имеют одинаковые ординаты, то расстояние между ними равно...»

19.03. Заданы функции $y = f(x)$ и $y_1 = f(x) + 2$. Заполните таблицу значений этих функций:

x / y	-1	2	4	6	7
$y = f(x)$	5	7	-5		
$y_1 = f(x) + 2$				3	-11

19.04. Докажите, что любая точка графика $y_1 = f(x) + 2$ с абсциссой x_0 находится на 2 единицы выше, чем точка графика $y = f(x)$ с той же самой абсциссой; а график функции $y_1 = f(x) + 2$ можно получить из графика $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси ординат на 2 единицы вверх.

x / y	0	1	3	5	9
$-y = f(x)$	4	-6	5		
$y_1 = f(x) + 3$				-3	0

19.05. Заданы функции $y = f(x)$ и $y_1 = f(x) - 3$. Заполните таблицу значений этих функций:

19.06. Докажите, что любая точка графика $y_1 = f(x) - 3$ с абсциссой x_0 находится на 3 единицы ниже, чем точка графика $y = f(x)$ с той же самой абсциссой, а график функции $y_1 = f(x) - 3$ можно получить из графика $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси ординат на 3 единицы вниз.

19.07. Докажите, что график функции $y_1 = f(x) + a$, $a \neq 0$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси ординат на $|a|$ единиц вниз, если $a < 0$, и на $|a|$ единиц вверх, если $a > 0$.

19.08. Пусть даны графики функций $y = f(x)$ и $y_1 = f(x) + 7$. Известно, что один из них проходит через начало координат. Определите точку пересечения другого графика с осью ординат.

19.09. Пусть даны графики функций $y = f(x)$ и $y_1 = f(x) + C$. Известно, что один из них проходит через точку $A(-11;\ 231)$, а другой — через точку $A_1(-11;\ 132)$. Найдите все возможные значения C.

Постройте на одном чертеже графики функций (19.10—19.12):

19.10. $y = 2x$; $y = 2x + 3$ и $y = 2x - 1$.

19.11. $y = x^2$; $y = x^2 + 3$ и $y = x^2 - 1$.

19.12. $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x} + 3$ и $y = \frac{1}{x} - 1$.

19.13. Используя известный график функции $y = \frac{k}{x}$, постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{x} + 2$; д) $y = \frac{2x + 3}{x}$;

б) $y = \frac{1}{x} - 3$; е) $y = 1 - \frac{1}{x}$;

в) $y = \frac{3}{x} - 1$; ж) $y = -\left(\frac{1}{x} + 3\right)$;

г) $y = \frac{1 - x}{x}$; з) $y = \frac{2x - 3}{x}$.

9.14. Используя известный график функции $y = kx^2$, постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4$; г) $y = -x^2 + 3$;

б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; д) $y = -0{,}5x^2 + 2$;

в) $y = 2x^2 - 1$; е) $y = -2x^2 - 3$.

19.15. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 1; \\ x, \text{ если } 1 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-1{,}5)$; $f(1)$; $f(4)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

19.16. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant -2; \\ -0{,}5x^2 + 3, \text{ если } -2 < x \leqslant 2; \\ \dfrac{x}{3}, \text{ если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-2)$; $f(0)$; $f(4)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

График $y = f(x + b)$

19.17. Изобразите на координатной плоскости заданные точки и определите, используя обороты «левее на...» и «правее на...», их взаимное расположение:
а) $A(-1;\ 7)$ и $A_1(6;\ 7)$;
б) $C(8;\ -6)$ и $C_1(14;\ -6)$;
в) $B(2;\ 3)$ и $B_1(-2;\ 3)$;
г) $D(-13;\ -4)$ и $D_1(-3;\ -4)$.

19.18. Как найти расстояние между точками, имеющими одинаковые абсциссы? Закончите предложение: «Если точки имеют одинаковые абсциссы, то расстояние между ними равно...»

19.19. Заданы функции $y = f(x)$, $y = y_1(x) = f(x - 2)$ и $y = y_2(x) = f(x + 3)$. Заполните таблицу значений этих функций:

$y = f(x)$	$y = y_1(x) = f(x - 2)$	$y = y_2(x) = f(x + 3)$
$y(2) = 5$	$y_1(4) =$	$y_2(-1) =$
$y(5) = 57$	$y_1(7) =$	$y_2(2) =$
$y(9) =$	$y_1(11) = 11$	$y_2(6) =$
$y(0) =$	$y_1(2) =$	$y_2(-3) = 15$
$y(-2) =$	$y_1(0) = -1$	$y_2(-5) =$

19.20. Докажите, что любая точка графика $y_1 = f(x + 2)$ с абсциссой $x_0 - 2$ находится на 2 единицы левее, чем точка графика $y = f(x)$ с абсциссой x_0, а график функции $y_1 = f(x + 2)$ можно получить из графика $y = f(x)$, сдвинув его на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс.

19.21. Докажите, что любая точка графика $y_1 = f(x - 3)$ с абсциссой $x_0 + 3$ находится на 3 единицы правее, чем точка графика $y = f(x)$ с абсциссой x_0, а график функции $y_1 = f(x - 3)$ можно получить из графика $y = f(x)$, сдвинув его на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс.

19.22. Докажите, что график функции $y_1 = f(x + a)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, сдвинув его на $|a|$ единиц вправо вдоль оси абсцисс, если $a < 0$, и на $|a|$ единиц влево вдоль оси абсцисс, если $a > 0$.

19.23. Пусть даны графики функций $y = f(x)$ и $y_1 = f(x + 7)$. Известно, что один из них проходит через начало координат. Какую точку пересечения другого графика с осью абсцисс можно указать наверняка?

19.24. Опишите, как расположены относительно друг друга графики функций:

а) $y = f(x - 2)$ и $y = f(x + 7)$;

б) $y = f(2x)$ и $y = f(2x - 4)$;

в) $y = f(2x)$ и $y = f(2x + 1)$;

г) $y = f(0,5x)$ и $y = f(0,5x - 4)$;

д) $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ и $y = f\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

Постройте на одном чертеже графики функций (19.25—19.27):

19.25. $y = 2x$; $y = 2(x + 3)$ и $y = 2(x - 1)$.

19.26. $y = x^2$; $y = (x + 3)^2$ и $y = (x - 1)^2$.

19.27. $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x + 3}$ и $y = \frac{1}{x - 1}$.

19.28. Используя известный график функции $y = \frac{k}{x}$, постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{x + 2}$; г) $y = \frac{2}{x + 1}$; ж) $y = \frac{2}{1 - x}$;

б) $y = \frac{1}{x - 3}$; д) $y = -\frac{3}{x - 1}$; з) $y = \frac{1}{2(x - 1)}$;

в) $y = \frac{3}{x - 1}$; е) $y = -\frac{1}{5 - x}$; и) $y = \frac{2}{3(2 - x)}$.

19.29. Используя известный график функции $y = kx^2$, постройте график функции:

а) $y = (x - 4)^2$; е) $y = (2x - 3)^2$;

б) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$; ж) $y = 4x^2 + 4x + 1$;

в) $y = 2(x - 1)^2$; з) $y = -\frac{x^2}{4} - x - 1$;

г) $y = -(x + 3)^2$; и) $y = -(x - a)^2$, $a \neq 0$.

д) $y = -0{,}5(x - 4)^2$;

Постройте график функции (**19.30**, **19.31**):

19.30. а) $y = x^2 - 2x + 1$; б) $y = x^2 + 4x + 4$.

19.31. а) $y = -x^2 + 8x - 16$; б) $y = 4x - x^2 - 4$.

19.32. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ 3(x - 3)^2, \text{ если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-1)$; $f(3)$; $f(7)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

19.33. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x + 1}, \text{ если } -3 \leqslant x < -1; \\ -x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-1{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

График функции $y = f(x + b) + a$

19.34. Пусть дан график функции $y = f(x)$. Как получить график функции:

а) $y = f(x + 3) - 4$; в) $y = f(x + 1) + 3$;
б) $y = f(x - 5) + 2$; г) $y = f(x - 2) - 1$?

Постройте график функции (**19.35, 19.36**):

19.35. а) $y = \dfrac{1}{x + 3} - 4$; в) $y = \dfrac{1}{x + 1} + 3$;

б) $y = \dfrac{1}{x - 5} + 2$; г) $y = \dfrac{1}{x - 2} - 1$.

19.36. а) $y = (x + 3)^2 - 4$; в) $y = (x + 1)^2 + 3$;
б) $y = (x - 5)^2 + 2$; г) $y = (x - 2)^2 - 1$.

19.37. Пусть дан график функции $y = f(2x)$. Объясните, каким образом можно получить график функции:

а) $y = f(2x + 2) - 4$; в) $y = f(2x + 1) + 3$;
б) $y = f(2x - 3) + 2$; г) $y = f(2x - 8) - 1$.

19.38. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{1}{2x}$; $y = \dfrac{1}{2x + 2} - 1$; $y = \dfrac{1}{2x - 4} + 3$;

б) $y = 4x^2$; $y = (2x + 2)^2 - 1$; $y = -(2x + 6)^2 + 4$.

19.39. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -3(x + 2)^2 - 1, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant -1; \\ 4x, \text{ если } -1 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0{,}5)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

19.40. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x + 1} + 2, \text{ если } x < -1; \\ -2x - 2, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0{,}25)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

19.41. Пусть $f(x) = x^2$. Постройте график функции:

а) $y = f(x - 2) + 1$; в) $y = 2 - f(1 - x)$.
б) $y = f(2x + 1) - 4$;

Используя график функции $y = |x|$, постройте график и опишите свойства функции (**19.42, 19.43**):

19.42. а) $y = |x| + 2$; в) $y = -|x|$;
б) $y = |x| - 5$; г) $y = 6 - |x|$.

19.43. а) $y = |x - 3| + 1$; в) $y = -|x - 5|$;
б) $y = |x + 4| - 6$; г) $y = 3 - |2 - x|$.

19.44. Постройте график функции:
а) $y = 3|x|$; в) $y = -2|x|$;
б) $y = 0{,}5|x|$; г) $y = -\frac{|x|}{3}$.

19.45. Исследуйте функцию $y = k|x|$ при $k > 0$.
Постройте на одном чертеже графики для k, равных: $0{,}5$; 1; 2; 3; $\sqrt{5}$.

19.46. Исследуйте функцию $y = k|x|$ при $k < 0$.
Постройте на одном чертеже графики для k, равных: $-0{,}4$; -1; -3; $-\sqrt{10}$; -4.

19.47. Исследуйте функцию $y = k|x|$ при $k \neq 0$.
Постройте на одном чертеже графики для k, равных: $0{,}5$; 1; -2; $-\sqrt{6}$.

Используя графики функций вида $y = k|x|$, постройте график и опишите свойства функции (**19.48, 19.49**):

19.48. а) $y = 2|x - 3| - 3$; в) $y = 7 - 2|5 - x|$;
б) $y = -3|x + 4| + 6$; г) $y = -2|1 - x| + 5$.

19.49. а) $y = \frac{|x - 1|}{2} - 1$; в) $y = -\frac{4|x + 3|}{3} + 8$;
б) $y = \frac{3|x + 2|}{2} - 6$; г) $y = \frac{|x - 1|}{1 - \sqrt{2}} + \sqrt{2}$.

§ 20. ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

20.01. Назовите коэффициенты a, b и c квадратичной функции:
а) $y = 7x^2 - 3x - 2$; в) $y = 8x^2 - 2x$;
б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; г) $y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{7} - \frac{3}{10}x^2$.

20.02. Составьте квадратный трехчлен, у которого:
а) $a = 2$, $b = -1$, $c = 4$; в) $a = 9$, $b = -3$, $c = -1$;
б) $a = -1$, $b = 7$, $c = 0$; г) $a = 1$, $b = 0$, $c = 5$.

20.03. Найдите координаты вершины параболы:

а) $y = 4x^2 + 8x - 1$; в) $y = -x^2 + x - 1$;

б) $y = -3x^2 - 6x + 2$; г) $y = 5x^2 - 10x + 4$.

20.04. Запишите уравнение прямой, которая является осью симметрии параболы:

а) $y = 2x^2 - x + 1$; в) $y = 7x^2 + 12x + 4$;

б) $y = -5x^2 + 2x - 2$; г) $y = -x^2 + 2x + 1$.

20.05. Постройте график функции $y = (x - 2)^2$.

а) Докажите, что график функции пересекает ось ординат в точке с ординатой 4.

б) Определите абсциссы точек графика с положительной ординатой.

в) Определите абсциссы точек графика с неположительной ординатой.

г) Определите абсциссы точек графика с отрицательной ординатой.

д) Определите абсциссы точек графика с неотрицательной ординатой.

20.06. Постройте график функции $y = 9 - x^2$.

а) Докажите, что график функции пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами -3 и $+3$.

б) Определите абсциссы точек графика с положительной ординатой.

в) Определите абсциссы точек графика с неположительной ординатой.

г) Определите абсциссы точек графика с отрицательной ординатой.

д) Определите абсциссы точек графика с неотрицательной ординатой.

20.07. Постройте график функции $y = 2x^2 - 3$ и найдите:

а) область определения $D(y)$;

б) множество значений $E(y)$;

в) промежутки монотонности;

г) точки экстремума и экстремумы функции.

20.08. Постройте график функции $y = -(x + 3)^2$ и определите абсциссы точек графика:

а) с положительной ординатой;

б) с неположительной ординатой;

в) с отрицательной ординатой;

г) с неотрицательной ординатой.

20.09. Постройте график функции $y = (2x + 3)^2$ и найдите:
а) область определения $D(y)$;
б) множество значений $E(y)$;
в) промежутки монотонности;
г) нули функции;
д) точки экстремума и экстремумы функции.

20.10. Постройте график функции $y = (x - 2)^2$ и определите абсциссы точек графика:
а) с положительной ординатой;
б) с неположительной ординатой;
в) с отрицательной ординатой;
г) с неотрицательной ординатой.

20.11. Постройте график функции $y = (x - 1)^2 + 1$ и найдите:
а) область определения $D(y)$ и точки разрыва;
б) множество значений $E(y)$;
в) промежутки монотонности;
г) точки экстремума и экстремумы функции;
д) нули функции;
е) промежутки знакопостоянства;
ж) ось симметрии.

20.12. Постройте график функции $y = -(x + 2)^2 + 4$ и найдите:
а) область определения $D(y)$ и точки разрыва;
б) множество значений $E(y)$;
в) промежутки монотонности;
г) точки экстремума и экстремумы функции;
д) нули функции;
е) промежутки знакопостоянства;
ж) ось симметрии.

Найдите ось симметрии параболы (**20.13—20.15**):

20.13. $f(x) = (x + 2)^2 - 3$.

20.14. $f(x) = -(x - 1)^2 + 3$.

20.15. $f(x) = (3x + 2)^2$.

20.16. Пусть $f(x) = (x - 1)^2 + 2$. Докажите, что для любых чисел a и b из равенства $a + b = 2$ следует, что $f(a) = f(b)$. Объясните этот факт исходя из свойств параболы. Попытайтесь обобщить эту задачу: «Пусть $f(x) = (x + n)^2 + m$. Докажите, что для любых чисел a и b из равенства $a + b = -2n$ следует, что $f(a) = f(b)$».

20.17. Постройте график и укажите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

а) $y = x^2 + 6x$; в) $y = x^2 - 6x$;

б) $y = -x^2 + 2x$; г) $y = -x^2 - 4x$.

20.18. Постройте график и проверьте, что абсцисса вершины параболы равна полусумме нулей функции:

а) $y = (x - 2)(x + 4)$; в) $y = (2 - x)(x - 6)$;

б) $y = -5x(x + 2)$; г) $y = 3x(2 + 2x)$.

20.19. Постройте график и определите $D(y)$, $E(y)$, промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

а) $y = -x^2 + 4x + 11$; в) $y = x^2 + 4x - 3$;

б) $y = -x^2 + 6x$; г) $y = -0{,}5x^2 + x - 0{,}5$.

20.20. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -5(x + 4)^2$:

а) на отрезке $[-5; -3]$; в) на отрезке $[-4; -3]$;

б) на луче $[-4; +\infty)$; г) на луче $(-\infty; -4]$.

20.21. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\dfrac{2}{x + 2}$:

а) на отрезке $[-4; -3]$; в) на луче $(-\infty; 0]$;

б) на луче $[4; +\infty)$; г) на отрезке $[-1; 0]$.

20.22. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x+1}, & \text{если } -3 \leqslant x < -1; \\ -x^2, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-1{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Перечислите свойства функции.

20.23. Найдите:

а) $\max\limits_{[-3;\,1]}(1 - x^2)$; $\max\limits_{[-3;\,-1]}(1 - x^2)$; $\max\limits_{[3;\,4]}(1 - x^2)$;

б) $\min\limits_{[-3;\,1]}(x^2 - 2)$; $\min\limits_{[-3;\,-2]}(x^2 - 2)$; $\min\limits_{[3;\,4]}(x^2 - 2)$.

20.24. Не проводя построения графика, найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

а) $y = -7x^2 - x + 11$; б) $y = 0{,}7x^2 - 35x + 1{,}1$.

20.25. Не проводя построения графика, найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

а) $y = -0{,}2x^2 - 1{,}4x$; в) $y = x^2 + 2x + 11$;

б) $y = 3x^2 - \frac{1}{5}x$; г) $y = -4x^2 - 4x - 1111$.

20.26. Не проводя построения графика, найдите множество значений и уравнение оси симметрии графика функции:

а) $y = -0{,}3x^2 - 1{,}4x + 5$; б) $y = \frac{1}{3}x^2 - 1{,}5x - 7$.

Укажите какую-либо квадратичную функцию, обладающую указанными свойствами (**20.27—20.32**):

20.27. Точка максимума 3, а максимум 4.

20.28. Точка минимума −4, а минимум 8.

20.29. Нулями являются числа −6 и 4.

20.30. Множество значений есть луч $(-\infty; 5]$.

20.31. Множество значений есть луч $[-2; +\infty)$.

20.32. Ордината точки пересечения графика с осью симметрии равна 8 и график пересекает ось абсцисс.

20.33. Постройте график квадратичной функции, если известно, что она убывает на промежутке $(-\infty; -2]$ и возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$, ее экстремум равен −8 и график функции проходит через начало координат. Задайте эту функцию аналитически.

20.34. Постройте график квадратичной функции, если известно, что она возрастает на промежутке $(-\infty; 4]$ и убывает на промежутке $[4; +\infty)$, ее экстремум равен 0 и график функции проходит через точку $M(0; -8)$. Задайте эту функцию аналитически.

20.35. Постройте график квадратичной функции, если ее нули равны −2 и 4, а экстремум равен −9. Задайте эту функцию аналитически.

20.36. Постройте график квадратичной функции, если она принимает положительные значения только на промежутке $(-3; 1)$, а ее экстремум равен 4. Задайте эту функцию аналитически.

20.37. О квадратичной функции $f(x)$ известно, что $f(-1) = f(5)$. Решите уравнение $f(x) = f(4)$.

20.38. О квадратичной функции известно, что существуют ровно три точки, в которых ее значения по модулю равны 3. Сколько существует точек, в которых ее значения по модулю равны:

а) 1; б) 5,3; в) 0?

20.39. О квадратичной функции известно, что

$$f(-1) + f(1) < 2f(0).$$

Определите направление ветвей параболы, являющейся ее графиком.

20.40. При каких значениях параметра a функция $y = x^2 - 2ax + 5$ убывает на промежутке $(3; 5]$?

20.41. При каких значениях параметра a функция $y = 0{,}5x^2 - ax - 8$ возрастает на промежутке $(-4; 9]$?

20.42. При каких значениях параметра a функция $y = -x^2 + 4ax$ возрастает на промежутке $(0; 7]$?

20.43. При каких значениях параметра a функция

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}ax - 5$$

убывает на промежутке $[-4; 0]$?

20.44. Найдите все значения параметра b, при которых функция $y = -x^2 + (3 + b) \cdot x - 7$ принимает равные значения в точках -5 и 3.

20.45. Найдите все значения параметра a, при которых вершина параболы $y = -x^2 + 4x + a$ находится на оси абсцисс.

20.46. Найдите все значения параметра a, при которых вершина параболы $y = -x^2 + 4x + a$ находится на равных расстояниях от осей координат.

20.47. Найдите точку графика $y = -x^2 + 6x - 11$, ближайшую к оси абсцисс.

20.48. Определите расстояние от параболы $y = x^2 + 8x + 31$ до оси абсцисс.

20.49. Определите расстояние от параболы $y = -2x^2 + 12x - 13$ до оси абсцисс.

20.50. Определите расстояние от параболы $y = -23x^2 + 12x$ до оси абсцисс.

20.51. Определите расстояние от параболы $y = x^2 + 8x$ до прямой $y = -17$.

20.52. Постройте графики функций $y = x^2 + 2x + 3$ и $y = -2x^2 + 8x - 11$. Определите графически и аналитически наименьшую длину отрезка прямой, параллельной оси ординат, концы которого лежат на данных графиках.

20.53. Постройте графики функций $y = x^2 + 4x + 5$ и $y = 2x - x^2$. Определите графически и аналитически наименьшую длину отрезка прямой, параллельной оси ординат, концы которого лежат на данных графиках.

20.54. Постройте графики функций $y = x^2 - 3x + 11$ и $y = -x^2 + x - 3$. Определите графически и аналитически наименьшую длину отрезка прямой, параллельной оси ординат, концы которого лежат на данных графиках.

20.55. Сколько различных целых значений принимает функция

$$y = \frac{18}{x^2 + 2x + 5}?$$

20.56. Найдите наибольшее значение выражения

$$3 + \frac{8}{x^2 - 4x + 5}.$$

20.57. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{8}{x^2 - 4x + 6} + \frac{4}{x^2 - 4x + 8}.$$

20.58. Из всех точек на координатной плоскости, для которых разность ординаты и квадрата абсциссы на 5 больше удвоенной абсциссы, найдите ту, у которой ордината наименьшая.

20.59. Из всех точек на координатной плоскости, для которых отношение ординаты к абсциссе на 6 больше числа, противоположного абсциссе, найдите ту, у которой ордината наибольшая.

20.60. На параболе $y = x^2$ найдите точку K, сумма координат которой наименьшая.

20.61. На прямой $2x + 3y + 2 = 0$ найдите точку K, произведение координат которой наибольшее.

20.62. На параболе $y = 2x^2 - x + 1$ найдите точку K, разность абсциссы и ординаты которой наибольшая.

20.63. На прямой $2x - 5y + 12 = 0$ найдите точку K, произведение координат которой наименьшее.

20.64. На параболе $y = x^2 - 3x$ найдите точку с наибольшей разностью абсциссы и ординаты.

20.65. На прямой $y = 4x - 5$ найдите точку:
а) с наименьшей суммой ординаты и квадрата абсциссы;
б) с наибольшей разностью абсциссы и квадрата ординаты.

20.66. Не проводя построения, докажите, что прямая $4x + 5y + 60 = 0$ и парабола $y = 4x^2 + 12x + 31$ не имеют общих точек. Определите, при каком значении x отрезок, параллельный оси ординат, концы которого лежат на заданных линиях, имеет наименьшую длину.

20.67. Не проводя построения, докажите, что две параболы $y = 0{,}25(x^2 - 8x + 11)$ и $y = x^2 - 2x + 2$ пересекаются и:
а) найдите координаты точек пересечения парабол;
б) определите, какая из парабол лежит выше другой;
в) рассмотрите отрезки, высекаемые на прямых $x = m$ $(-1 < < m < 1)$ данными параболами, и найдите длину наибольшего из этих отрезков;
г) найдите координаты концов этого отрезка.

20.68. Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, если известно, что $f(1) < 0$. Каким образом расположены нули функции относительно точки $x = 1$?

20.69. Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, если известно, что $f(1) < 0$. Какой знак имеет сумма нулей этой функции, если эти нули существуют? Почему?

20.70. Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, если известно, что $a \cdot f(1) < 0$, $x_0 < -1$. Какой знак имеет сумма нулей этой функции, если эти нули существуют? Почему?

20.71. Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, если известно, что $a \cdot f(1) > 0$, $D > 0$, $x_0 < 1$. Каким образом расположены нули функции относительно точки $x = 1$?

20.72. Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, если известно, что $f(1) < 0$, $f(-1) < 0$, $a > 0$. Каким образом расположены нули функции относительно точек $x = \pm 1$?

20.73. Число 12 представьте в виде суммы двух слагаемых, произведение которых наибольшее.

20.74. Число 10 представьте в виде суммы двух слагаемых, сумма квадратов которых наименьшая.

20.75. Число 10 представьте в виде суммы двух слагаемых, сумма квадрата первого из которых со вторым наименьшая.

20.76. Пусть $a + b = 7$. Какое наибольшее значение принимает выражение $a \cdot b$?

20.77. Пусть $a + b = 8$. Какое наименьшее значение принимает выражение $a^2 + b^2$?

20.78. Пусть $2a + 5b = 7$. Какое наибольшее значение принимает выражение $a \cdot b$? Пусть $7a + 3b = 10$. Какое наименьшее значение принимает выражение $a^2 + b^2$?

20.79. Найдите наименьшее целое значение, которое принимает функция $y = 3x^2 - 17x + 1$.

20.80. Найдите наибольшее целое значение, которое принимает функция $y = -2x^2 + 7x - 11$.

20.81. Пусть m — целое число. Найдите наименьшее значение выражения $3m^2 - 11m$.

20.82. Пусть k — целое число. Найдите наибольшее значение выражения $31k - 7k^2$.

20.83. Напишите уравнение параболы вида $y = ax^2 + bx + c$, если ее график проходит через точку $M(3;\ 5)$, а вершина параболы $T(1;\ 2)$.

20.84. Напишите уравнение параболы вида $y = ax^2 + bx + c$, если ее график проходит через начало координат, а вершина параболы $T(-1; 4)$.

20.85. Напишите уравнение параболы вида $y = ax^2 + bx + c$, если вершина параболы $B(-1; -4)$, а одна из точек ее пересечения с осью абсцисс удалена от начала координат на 3.

20.86. Докажите, что парабола вида $y = ax^2 + bx + c$ может быть единственным образом задана координатами своей вершины $B(x_0; y_0)$ и любой точкой $K(x_1; y_1)$, лишь бы

$$\begin{cases} x_1 \neq 0, \\ y_1 \neq y_0. \end{cases}$$

Задайте соответствующую функцию аналитически.

20.87. Докажите, что парабола вида $y = ax^2 + bx + c$ может быть единственным образом задана абсциссами двух точек ее пересечения с осью абсцисс x_1, x_2 и любой точкой $K(x_3; y_3)$, лишь бы

$$\begin{cases} x_1 \neq x_3, \\ x_2 \neq x_3, \\ y_3 \neq 0. \end{cases}$$

Задайте соответствующую функцию аналитически.

20.88. Задайте параболу вида $y = ax^2 + bx + c$, проходящую через три точки $A(0; 0)$, $B(1; -1)$, $C(2; 2)$.

20.89. Задайте параболу вида $y = ax^2 + bx + c$, проходящую через три точки $A(1; 3)$, $B(-1; -3)$, $C(3; 1)$.

20.90. Убедитесь, что через точки $A(1; 7)$, $B(-1; 3)$, $C(0; 5)$ не проходит ни одна парабола вида $y = ax^2 + bx + c$. Объясните, почему это так.

20.91. Убедитесь, что уравнение параболы вида $y = ax^2 + bx + c$, график которой проходит через три точки с разными абсциссами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, может быть задано в виде

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \frac{(x - x_2)(x - x_1)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} \cdot y_3,$$

лишь бы $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \neq \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$ (точки A, B и C не лежат на одной прямой).

20.92. Рассмотрите график функции $y = 1 - x^2$.

1) Найдите все такие a, при которых:

а) $\max\limits_{[-3;\ a]}(1 - x^2) = 1$;

б) $\max\limits_{[-3;\ a]}(1 - x^2) = 1 - a^2$.

2) Постройте график $f(x) = \max\limits_{[-3;\ x]}(1 - t^2)$ при $x > -3$.

3) Найдите все такие a, при которых:

а) $\min\limits_{[-3;\ a]}(1 - x^2) = -8$;

б) $\min\limits_{[-3;\ a]}(1 - x^2) = 1 - a^2$.

4) Постройте график $f(x) = \min\limits_{[-3;\ x]}(1 - t^2)$ при $x > -3$.

20.93. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} \min\limits_{[x;\ -2]}(t^2 - 3) \text{ при } x < -2, \\ 1 \text{ при } x = 2, \\ \min\limits_{[-2;\ x]}(t^2 - 3) \text{ при } x > -2. \end{cases}$$

20.94. Определите наибольшую длину отрезка, параллельного оси ординат и принадлежащего фигуре, ограниченной графиками данных функций. Постройте указанную фигуру:

а) $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 - 4$;

б) $y = x^2 + 1$ и $y = x^2 - 4$;

в) $y = 2x^2$ и $y = x^2 + 1$;

г) $y = 2x^2 + 1$ и $y = 3x^2 - 8$.

20.95. Определите наибольшую длину отрезка, параллельного оси абсцисс и принадлежащего фигуре, ограниченной графиками функций $y = -x^2$ и $y = x^2 - 2$.

§ 21. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

21.01. На рисунках 2—7 даны графики функций $y = f(x)$. Решите графически уравнения:

а) $f(x) = 0$; в) $f(x) = x$; д) $f(x) = x^2$;

б) $f(x) = 3$; г) $f(x) = 4 - x$; е) $f(x) = \frac{1}{x}$.

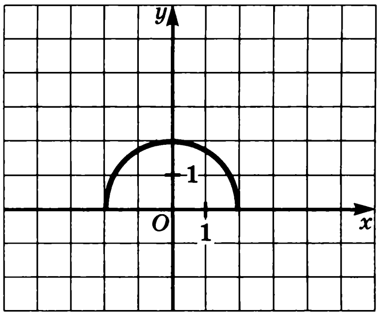


Рис. 2

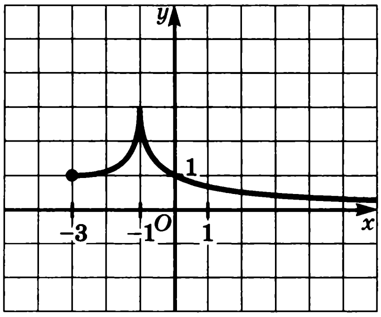


Рис. 3

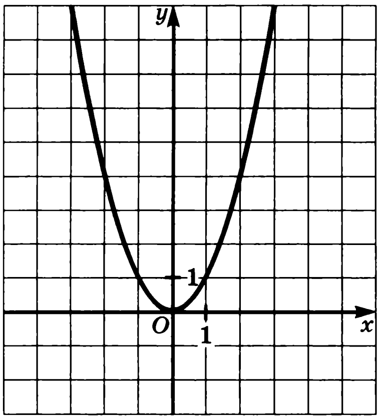


Рис. 4

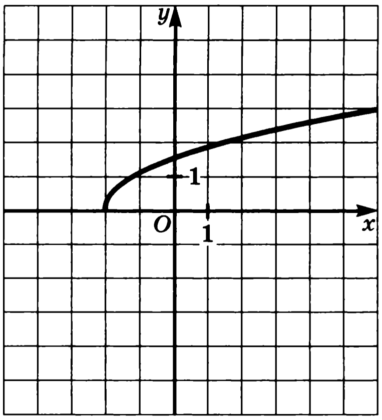


Рис. 5

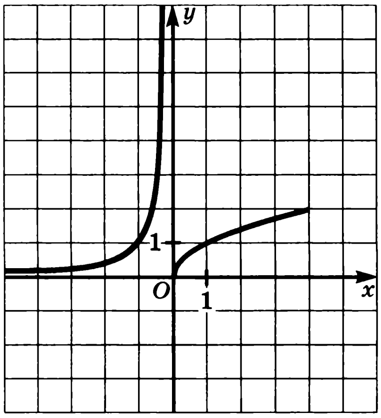


Рис. 6

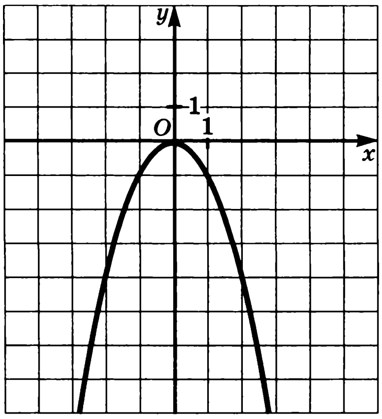


Рис. 7

21.02. Решите графически уравнения вида $f(x) = 0$, подобрав подходящие функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Проверьте, что найденные абсциссы точек пересечения графиков $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ являются точными значениями корней данных уравнений:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; в) $x^2 - x - 6 = 0$;

б) $x^2 + 2x - 8 = 0$; г) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

21.03. С помощью замены приведите уравнения к виду приведенного квадратного уравнения и графически найдите точные значения его корней:

а) $6x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $4x^2 + 4x - 3 = 0$.

Решите графически уравнение (**21.04—21.06**):

21.04. а) $\frac{4}{x} = 1 - x^2$; в) $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} = 1$;

б) $-\frac{2}{x} = x^2 - 3$; г) $x^2 + \frac{3}{x} + 2 = 0$.

21.05. а) $x^3 + x - 10 = 0$; в) $2x^3 + x + 3 = 0$;

б) $x^3 + 3x + 4 = 0$; г) $3x^3 + 2x - 5 = 0$.

21.06. а) $x^3 + x^2 - 2 = 0$; б) $x^3 - 4x^2 + x + 5 = 0$.

12.07. Объясните, каким образом с помощью графика параболы и гиперболы можно решить кубическое уравнение вида $x^3 + ax + b = 0$, где $a \cdot b \neq 0$.

21.08. Объясните, каким образом с помощью графика параболы и гиперболы можно решить кубическое уравнение вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $b \cdot c \cdot d \neq 0$.

Решите графически уравнение (**21.09, 21.10**):

21.09. $x^2 = \frac{4}{x} + 2$.

21.10. а) $x^2 + 2x + 3 = 0$; б) $3x = x^2 + 5$.

21.11. При каких значениях параметра a корни двух квадратных уравнений $x^2 = a$ и $x^2 - 4x = 0$ перемежаются?

21.12. Решите графически данные уравнения на указанных промежутках:

а) $x^2 - x - 1 = 0$; $x \in [-1; 0]$;

б) $x^3 - x + 1 = 0$; $x \in [-2; -1]$.

21.13. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x - y} = -\dfrac{1}{2}, \\ xy = 2x + 1. \end{cases}$$

21.14. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = a$:

а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки?

21.15. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = x + a$:

а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.16. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = 2x + a$:

а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки?

21.17. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = -0{,}5x + a$:

а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.18. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = |x - a| + 3$:

а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.19. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = |x - a| - 5$:

а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

2120. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = |x - a| + a$:
а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.21. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = 2 - |x - a|$:
а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.22. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = a - |x + a|$:
а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.23. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = 2|x - a| + 3$:
а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.24. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = 4 - 0{,}5|x - a|$:
а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.25. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = a - x^2$:
а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют бесконечно много общих точек?

21.26. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x|$ и $y = a + x^2$:
а) не имеют общих точек;
б) имеют одну общую точку;
в) имеют две общие точки;
г) имеют три общие точки?

21.27. На сколько частей разобьют фигуру, ограниченную графиками функций $f(x)$ и $g(x)$, прямые $x = n$, где n — целые числа:

а) $f(x) = x^2 - 11x$; $g(x) = 3x - 1$;
б) $f(x) = -2x^2 + 7x$; $g(x) = x - 1$;
в) $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $g(x) = -x^2 + 7x + 14$;
г) $f(x) = 5x^2 - 9x$; $g(x) = x^2 - 13x + 8$?

§ 22. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

22.01. Постройте график функции $y = \frac{1}{x} - 1$ и найдите:

а) область определения функции, точки разрыва;
б) множество ее значений;
в) промежутки монотонности;
г) точки экстремума и экстремумы функции;
д) асимптоты.

22.02. Постройте график функции $y = \frac{1}{x} + 2$.

а) Докажите, что график функции пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $-0,5$.
б) Определите абсциссы точек графика с положительной ординатой.
в) Определите абсциссы точек графика с неположительной ординатой.
г) Определите абсциссы точек графика с отрицательной ординатой.
д) Определите абсциссы точек графика с неотрицательной ординатой.

22.03. Постройте график функции $y = 1 - \frac{3}{x}$.

а) Докажите, что график функции пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $+3$.
б) Определите абсциссы точек графика с положительной ординатой.
в) Определите абсциссы точек графика с неположительной ординатой.
г) Определите абсциссы точек графика с отрицательной ординатой.
д) Определите абсциссы точек графика с неотрицательной ординатой.

22.04. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{2}{x} - 2$:

а) на отрезке $[1; 2]$;
б) на луче $(-\infty; -1]$;
в) на отрезке $[-2; -1]$;
г) на луче $[2; +\infty)$.

22.05. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\frac{1}{x} + 1$:

а) на отрезке $[1; 3]$;
б) на луче $[1; +\infty)$;
в) на луче $(-\infty; -1]$;
г) на отрезке $[-4; -2]$.

22.06. Пусть A — наибольшее значение функции $y = \frac{3}{x} - 2$ на отрезке $[1; 3]$, а B — наименьшее значение функции $y = 1 - x$ на отрезке $[-4; 3]$. Что больше: A или B? Сделайте графическую иллюстрацию.

22.07. Пусть K — наибольшее значение функции $y = -\frac{2}{x} - 1$ на луче $(-\infty; -1]$, а L — наименьшее значение функции $y = (x - 4)^2$ на отрезке $[3; 5]$. Что больше: L или K? Сделайте графическую иллюстрацию.

22.08. Не производя построений, найдите расстояние между горизонтальными асимптотами графиков функций:

а) $y = \frac{3}{x} - 0{,}34$ и $y = \frac{3}{x} + 0{,}66$;

б) $y = \frac{2}{x} - 4$ и $y = 6 - \frac{3}{x}$;

в) $y = \frac{k}{x} + a$ и $y = \frac{m}{x} + b$.

22.09. Постройте график функции $y = \frac{2}{x + 1}$ и найдите:

а) область определения $D(y)$ и точки разрыва;
б) множество значений $E(y)$;
в) промежутки монотонности;
г) нули функции;
д) точки экстремума и экстремумы функции;
е) центр и асимптоты.

22.10. Постройте график функции $y = \frac{1}{x - 3}$ и определите абсциссы точек графика:

а) с положительной ординатой;
б) с неположительной ординатой;
в) с отрицательной ординатой;
г) с неотрицательной ординатой.

22.11. Постройте график функции $y = -\frac{3}{x + 2}$ и определите абсциссы точек графика:

а) с положительной ординатой;

б) с неположительной ординатой;

в) с отрицательной ординатой;

г) с неотрицательной ординатой.

22.12. Постройте график функции $y = \frac{1}{x + 3} - 1$ и найдите:

а) область определения $D(y)$ и точки разрыва;

б) множество значений $E(y)$;

в) промежутки монотонности;

г) точки экстремума и экстремумы функции;

д) центр симметрии и асимптоты;

е) нули функции;

ж) промежутки знакопостоянства.

22.13. Постройте график функции $y = \frac{2x + 7}{x + 4}$ и найдите:

а) область определения $D(y)$ и точки разрыва;

б) множество значений $E(y)$;

в) промежутки монотонности;

г) точки экстремума и экстремумы функции;

д) центр симметрии и асимптоты;

е) нули функции;

ж) промежутки знакопостоянства.

22.14. Постройте график функции $y = \frac{8 - 3x}{x - 2}$ и найдите:

а) область определения $D(y)$ и точки разрыва;

б) множество значений $E(y)$;

в) промежутки монотонности;

г) точки экстремума и экстремумы функции;

д) центр симметрии и асимптоты;

е) нули функции;

ж) промежутки знакопостоянства.

22.15. При каких значениях a график функции $y = 1 - \frac{a}{x}$ пересекает график функции $y = x^2 - 4$ в точке с абсциссой 2? Постройте эти графики на одном чертеже. Есть ли у них другие общие точки?

22.16. Найдите сумму абсцисс всех общих точек графиков функций $y = \frac{2}{x}$ и $y = 13{,}2x$.

22.17. Найдите сумму абсцисс всех общих точек графиков функций $y = \frac{3 + x}{x}$ и $y = 1{,}2x + 1$.

22.18. При каких значениях a прямая $y = ax$ пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках, сумма абсцисс которых равна 7?

Решите графически уравнение (22.19, 22.20):

22.19. а) $x^2 + 1 = \frac{2}{x}$; б) $x^2 - 1 = \frac{6}{|x|}$.

22.20. а) $(x + 1)^2 + \frac{2}{x} = 0$; б) $(x + 1)^2(2x + 1) = 12$.

22.21. Найдите центр симметрии и асимптоты гиперболы

$$f(x) = \frac{3x + 7}{5 - 4x}.$$

22.22. Найдите центр симметрии и асимптоты гиперболы

$$f(x) = \frac{3x}{4x - 7}.$$

22.23. Определите центр и асимптоты гиперболы, заданной уравнением:

а) $xy + x + 2y = 0$; в) $x - xy = 2y - 3$;
б) $2xy + x - 2y = 1$; г) $3x - 2xy = 0{,}5y$.

22.24. На гиперболе найдите точку, наименее удаленную от ее центра:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{-25}{x}$.

22.25. Пусть задан график уравнения $F(x; y) = 0$. Объясните, каким образом можно получить график уравнения

$$F(x - m; y - n) = 0.$$

22.26. Постройте график уравнения:

а) $xy = 1$; г) $xy - x + y + 1 = 0$;
б) $(x - 1)(y + 2) = 1$; д) $xy + 3y + x + 1 = 0$;
в) $(x + 1)(y - 2) = 2$; е) $3xy - 6y + x + 1 = 0$.

22.27. Найдите все точки с целыми координатами, если они существуют, на графике уравнения:

а) $xy = 1$; г) $xy - x + y + 1 = 0$;
б) $(x - 1)(y + 2) = 1$; д) $xy + 3y + x + 1 = 0$;
в) $(x + 1)(y - 2) = 2$; е) $3xy - 6y + x + 1 = 0$.

22.28. Асимптотами гиперболы являются прямые $x = 1$ и $y = -2$. Задайте эту гиперболу в виде $y = \frac{k}{x + a} + b$ и постройте ее график, если гипербола проходит через точку $M(4; -1)$.

22.29. Асимптотами гиперболы являются прямые $x = -3$ и $y = 1$. Задайте эту гиперболу в виде $y = \frac{k}{x + a} + b$ и постройте ее график, если гипербола проходит через точку $M(-1; 0)$.

22.30. Пусть $f(x) = \frac{1}{x - 1} + 2$. Докажите, что для любых чисел a и b из равенства $a + b = 2$ следует, что $f(a) + f(b) = 4$. Объясните этот факт свойствами параболы.

22.31. Решите графически уравнение:

а) $\frac{4}{x} = 1 - x^2$;　　в) $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} = 1$;

б) $-\frac{2}{x} = x^2 - 3$;　　г) $x^3 + x - 10 = 0$.

22.32. Объясните, каким образом с помощью графиков параболы $y = x^2 + m$ и гиперболы $y = \frac{k}{x}$ решить графически уравнение $x^3 + ax + b = 0$, где a и b не равны нулю. Придуманным вами способом решите графически уравнение:

а) $x^3 + 3x - 4 = 0$;　　в) $x^3 - 2x - 1 = 0$;

б) $x^3 + x - 10 = 0$;　　г) $x^3 - 3x - 10 = 0$.

22.33. Постройте на одном чертеже несколько графиков из «семейства» парабол вида $y = \frac{1}{x} + a$, для $a = 0$; $a = 1$; $a = 2$; $a = -3$. Определите длины всех отрезков, которые образуются при пересечении этих графиков с прямой:

а) $x = 5$;　　б) $x = -555$.

22.34. Постройте на одном чертеже несколько графиков из «семейства» парабол вида $y = \frac{1}{x - a}$, для $a = 0$; $a = -1$; $a = -2$; $a = 3$. Определите длины всех отрезков, которые образуются при пересечении этих графиков с прямой:

а) $x = -3$;　　б) $x = 3333$.

22.35. Постройте график функции $y = \frac{1}{x-1} + 2$. Постройте и задайте аналитически функцию, график которой симметричен графику данной функции относительно:

а) начала координат;
б) оси абсцисс;
в) оси ординат;
г) точки $M(1;\ 2)$;
д) прямой $y = 3$;
е) прямой $x = -1$.

22.36. Укажите абсциссы всех точек графика $y = \frac{1}{x}$:

а) ординаты которых равны 0,01;
б) ординаты которых положительны, но не превышают 0,01;
в) ординаты которых равны 100;
г) ординаты которых больше, чем 100;
д) произведение утроенной абсциссы которых на ее уменьшенную вдвое ординату меньше пяти.

22.37. Найдите все такие a, при которых графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{3}{x}$ «высекают» на прямой $x = a$:

а) отрезок длиной 0,001;
б) отрезок длиной меньше, чем 0,001.

22.38. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{x} + 4$ и $y = \frac{1}{x} - 1$ и прямыми $x = 1$ и $x = 5$.

§ 23. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛИ

23.01. Пусть $M(x_0;\ y_0)$ точка графика функции $y = f(x)$. Найдите ординату точки M_1 графика функции $y = |f(x)|$ с абсциссой x_0 и расположение этой точки относительно точки M. Рассмотрите два случая.

Постройте график функции $y = |f(x)|$ для каждого из рисунков 8—17.

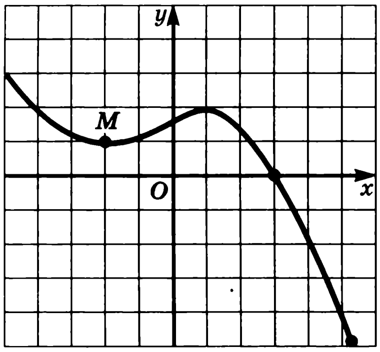


Рис. 8

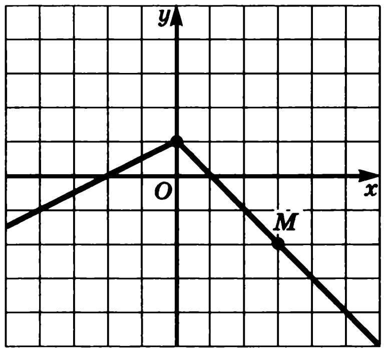


Рис. 9

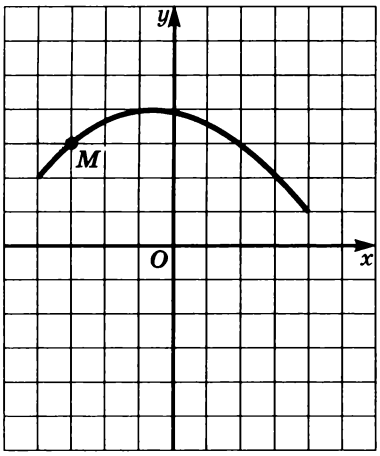


Рис. 10

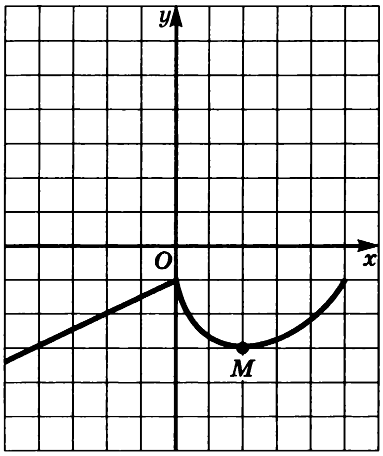


Рис. 11

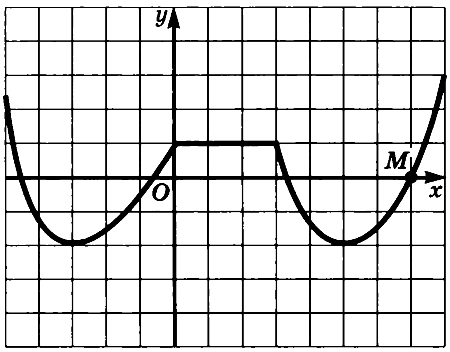


Рис. 12

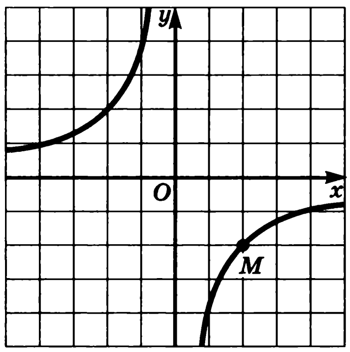


Рис. 13

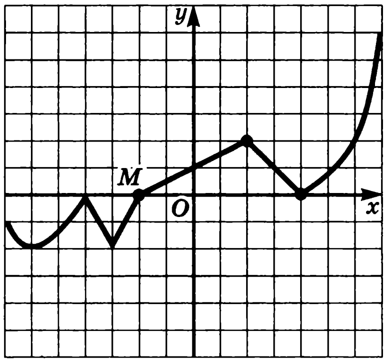


Рис. 14

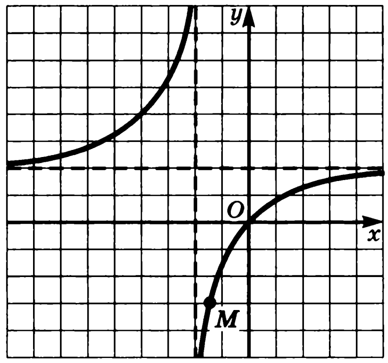


Рис. 15

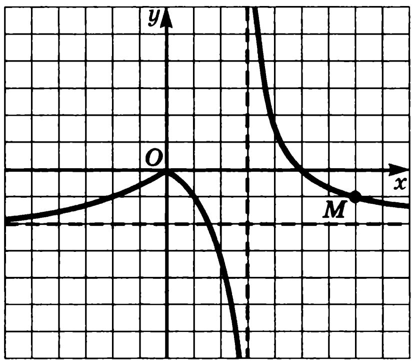


Рис. 16

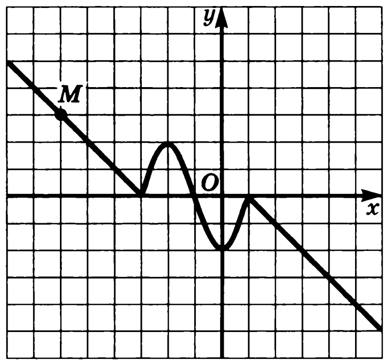


Рис. 17

Постройте на разных чертежах графики данных функций (**23.02—23.04**).

Для функций, содержащих модуль, укажите:

1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции.

23.02. а) $y = x^2 - 9$ и $y = |x^2 - 9|$;

б) $y = x^2 - 4x$ и $y = |x^2 - 4x|$;

в) $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = |x^2 + 2x - 3|$;

г) $y = -2x^2 + 6x$ и $y = 2|-x^2 + 3x|$.

23.03. а) $y = \frac{1}{x-1}$ и $y = \left|\frac{1}{x-1}\right|$;

б) $y = \frac{x+2}{x+1}$ и $y = \left|\frac{x+2}{x+1}\right|$;

в) $y = \frac{2x}{x-2}$ и $y = \left|\frac{2x}{2-x}\right|$;

г) $y = \frac{1-3x}{1-x}$ и $y = \left|\frac{3x-1}{x-1}\right|$.

23.04. а) $y = \sqrt{x} - 1$ и $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$;

б) $y = 2 - \sqrt{1-x}$ и $y = \left|2 - \sqrt{1-x}\right|$;

в) $y = 1 - 2\sqrt{4+x}$ и $y = \left|1 - 2\sqrt{4+x}\right|$.

23.05. Покажите, что если $M(x_0;\ y_0)$ — точка графика функции $y = f(x)$ при $x_0 \geqslant 0$, то точки $M(x_0;\ y_0)$ и $M_1(-x_0;\ y_0)$ лежат на графике функции $y = f(|x|)$, и определите взаимное расположение точек M и M_1.

23.06. а) Докажите, что график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ для всех $x \geqslant 0$.

б) Докажите, что график функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат.

23.07. Постройте график функции $y = f(|x|)$ для каждого из рисунков 18—27.

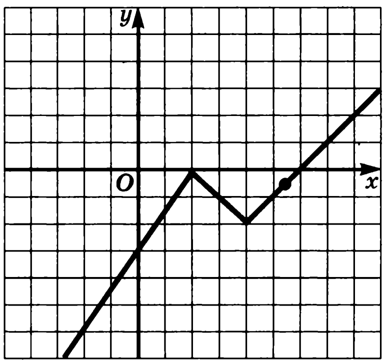


Рис. 18

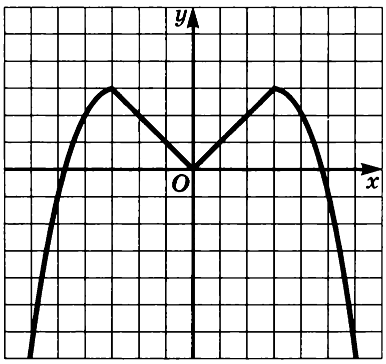


Рис. 19

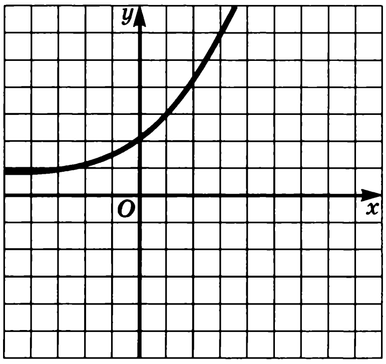


Рис. 20

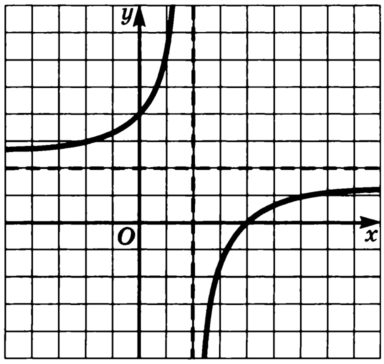


Рис. 21

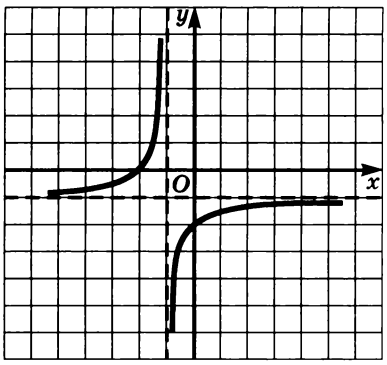


Рис. 22

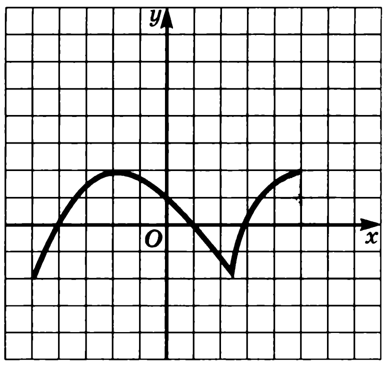


Рис. 23

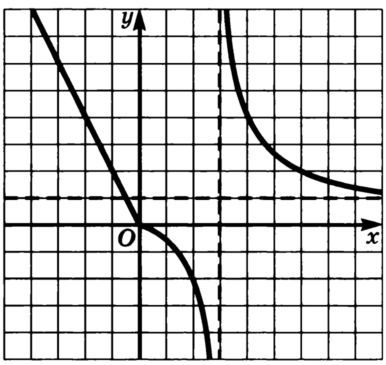


Рис. 24

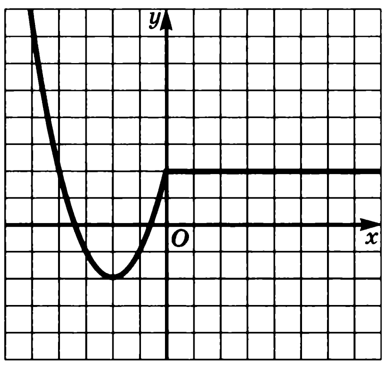


Рис. 25

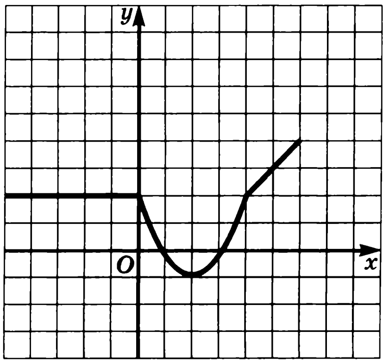


Рис. 26

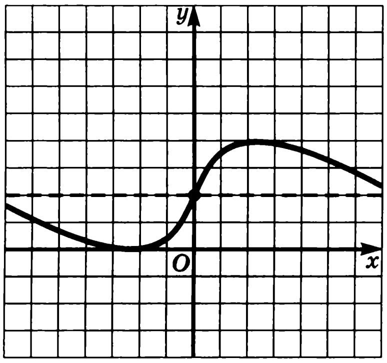


Рис. 27

Постройте на разных чертежах графики данных функций **(23.08—23.10)**.

Для функции, содержащей модуль, укажите:

1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции.

23.08. а) $y = x^2 - 2x$ и $y = x^2 - 2|x|$;

б) $y = x^2 + 4x - 5$ и $y = x^2 + 4|x| - 5$;

в) $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = x^2 - 2|x| - 3$;

г) $y = -2x^2 + 8x$ и $y = -2x^2 + 8|x|$.

23.09. а) $y = \dfrac{1}{x - 1}$ и $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$;

б) $y = \dfrac{x + 2}{x + 1}$ и $y = \dfrac{|x| + 2}{|x| + 1}$;

в) $y = \dfrac{2x}{x - 2}$ и $y = \dfrac{2|x|}{|x| - 2}$;

г) $y = \dfrac{1 - 3x}{1 - x}$ и $y = \dfrac{3|x| - 1}{|x| - 1}$.

23.10. а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{|x|}$;

б) $y = \sqrt{x - 1} - 1$ и $y = \sqrt{|x| - 1} - 1$;

в) $y = \sqrt{4 - x}$ и $y = \sqrt{4 - |x|}$.

23.11. Опишите процесс построения графика функции $y = |f(|x|)|$, если известен график функции $y = f(x)$.

Постройте на разных чертежах графики данных функций **(23.12, 23.13)**.

Для функции, содержащей модуль, укажите:
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции.

23.12. а) $y = x^2 - 4x$ и $y = |x^2 - |x||$;
б) $y = x^2 - 6x - 7$ и $y = |x^2 - 6|x| - 7|$;
в) $y = x^2 + 2x - 8$ и $y = |x^2 + 2|x| - 8|$;
г) $y = -0{,}5x^2 + x$ и $y = |0{,}5x^2 - |x||$.

23.13. а) $y = \sqrt{x - 2} - 2$ и $y = \left|\sqrt{|x| - 2} - 2\right|$;
б) $y = 2 - \sqrt{4 - x}$ и $y = \left|2 - \sqrt{4 - |x|}\right|$.

23.14. Постройте на разных чертежах графики функций:

а) $y = \dfrac{1}{x - 2}$ и $y = \left|\dfrac{1}{|x| - 2}\right|$;

б) $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ и $y = \left|\dfrac{|x| + 2}{|x| - 1}\right|$;

в) $y = \dfrac{4x}{x - 2}$ и $y = \left|\dfrac{4|x|}{2 - |x|}\right|$;

г) $y = \dfrac{1 - 3x}{1 - x}$ и $y = \left|\dfrac{3|x| - 1}{|x| - 1}\right|$.

Для функции, содержащей модуль, укажите:
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции;
6) количество общих точек с прямой $y = 1$;
7) количество общих точек с прямой $y = a$ (для каждого a).

23.15. Применяя различные методы преобразования графиков функций, постройте по порядку графики функций:

а) $y = |x| - 1$; в) $y = ||x| - 1| - 1$;

б) $y = ||x| - 1|$; г) $y = |||x| - 1| - 1|$.

Для функции из пункта г) укажите:
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции;
6) количество общих точек с прямой $y = 1$;
7) количество общих точек с прямой $y = a$ (для каждого a).

23.16. Применяя разные методы преобразования графиков функций, постройте по порядку следующие графики:

а) $y = |x^2 - 4|$; в) $y = ||x^2 - 4| - 4|$.

б) $y = |x^2 - 4| - 4$;

Для функции из пункта в) укажите:
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции.

Применяя различные методы преобразования графиков функций, постройте по порядку графики данных функций **(23.17, 23.18)**.
Для функции из пункта г) укажите:
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции;
6) количество общих точек с прямой $y = 1$;
7) количество общих точек с прямой $y = a$ (для каждого a).

23.17. а) $y = \frac{1}{|x| - 2}$; в) $y = \left|\frac{1}{|x| - 2}\right| - 3$;

б) $y = \left|\frac{1}{|x| - 2}\right|$; г) $y = \left|\left|\frac{1}{|x| - 2}\right| - 3\right|$.

23.18. Применяя различные методы преобразования графиков функций, постройте по порядку графики данных функций:

а) $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$;

б) $y = \left|\left|\sqrt{x} - 1\right| - 1\right|$;

в) $y = \left|\left|\sqrt{|x|}\right| - 1\right|$.

Постройте график функции и укажите (**23.19—23.25**):

1) область определения функции;
2) множество значений функции;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции;
6) количество общих точек с прямой $y = 1$;
7) количество общих точек с прямой $y = a$ (для каждого a).

23.19. а) $y = |x| \cdot x$;

б) $y = |x - 3|(2 - x)$;

в) $y = |x - 2| + x^2 - x$;

г) $y = x - 2 + |x^2 - x|$.

23.20. а) $y = \dfrac{x^2 - x}{|x|}$;

б) $y = \dfrac{|x| - x^2}{x}$;

в) $y = \dfrac{x - x^3}{|x - 1|}$;

г) $y = \dfrac{x - x^3}{|x| - 1}$.

23.21. а) $y = |x^2 - 4x| + 6x$;

б) $y = |x^2 - 4x| - 6x$;

в) $y = |x^2 - 4x| - 6|x|$;

г) $y = |x^2 - 4|x|| - 6x$.

23.22. а) $y = x^2 - 4|x - 1|$;

б) $y = |x^2 - 1| - 4x$;

в) $y = x^2 - 4x - 4|x + 1|$;

г) $y = |x^2| - 4|x - 2| + 6|2 - x|$.

23.23. а) $y = x^2 - |x^2 - 1|$;

б) $y = |x^2 - 2x| - 2x^2$;

в) $y = |x^2 - 4x| + |x^2 + 1|$;

г) $y = |x^2 - 4| + |x^2 - 2x| + 2x^2$.

23.24. а) $y = \dfrac{|x|}{x - 1}$;

б) $y = \dfrac{x}{|x| - 1}$;

в) $y = \dfrac{x}{|x - 1|}$;

г) $y = \dfrac{x}{|x| + 1}$.

23.25. а) $y = \dfrac{|x - 1|}{|x| - 1}$;

б) $y = \dfrac{|x - 1|}{|x| + 1}$;

в) $y = \dfrac{|x - 1| + |x|}{x}$;

г) $y = \dfrac{|x - 1| + |x + 1|}{x}$.

23.26. Убедитесь, что разными способами задана одна и та же функция, и постройте ее график:

а) $y = |x| + 3x - 2$ и $y = \begin{cases} 2x - 2, & x \leqslant 0, \\ 4x - 2, & x > 0; \end{cases}$

б) $y = 3|x - 2| + 2x$ и $y = \begin{cases} 6 - x, & x \leqslant 2, \\ 5x - 6, & x > 2; \end{cases}$

в) $y = 2|x + 1| - x + 2$ и $y = \begin{cases} -3x, & x < -1, \\ x + 4, & x \geqslant -1; \end{cases}$

г) $y = |x + 3| + x$ и $y = \begin{cases} -3, & x < -2, \\ 2x + 3, & x \geqslant -2. \end{cases}$

23.27. Постройте график функции:

а) $y = 4 + 2x - |x|$;
б) $y = 3 - x - |x + 2|$;
в) $y = 0{,}5|x + 4| + 2{,}5x - 1$;
г) $y = 2|x - 3| + 2x + 6$.

Для данной функции укажите:
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции.

23.28. Покажите, что график функции $y = k|x - a| + b$, $k \neq 0$ состоит из двух лучей с общим началом $M(a; b)$ и может быть построен методом опорных точек. Для этого понадобятся три опорные точки: начало лучей $M(a; b)$ и две точки с абсциссами $x_1 < a$ и $x_2 > a$.
Методом опорных точек постройте графики:

а) $y = 4 - 3x - |x|$;
б) $y = 2 + x - |x - 3|$;
в) $y = 0{,}2|x + 5| + 0{,}8x - 4$;
г) $y = 3|x - 3| - 5x + 6$.

23.29. Убедитесь, что различными способами задана одна и та же функция и постройте ее график:

а) $y = |x| + |x - 1|$ и $y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 2x - 1, & x \geqslant 1; \end{cases}$

б) $y = |x - 2| + |x + 5|$ и $y = \begin{cases} -3 - 2x, & x \leqslant -5, \\ 7, & -5 < x \leqslant 2, \\ 2x + 3, & x > 2; \end{cases}$

в) $y = |x - 3| - |x + 2|$ и $y = \begin{cases} 5, & x \leqslant -2, \\ 1 - 2x, & -2 < x \leqslant 3, \\ -5, & x > 2; \end{cases}$

г) $y = 2|x + 1| - |x - 2| + x$ и $y = \begin{cases} -4, & x \leqslant -1, \\ 4x, & -1 < x \leqslant 2, \\ 2x + 4, & x > 2. \end{cases}$

23.30. Постройте график функции:

а) $y = 4x + 3|x + 1| - |x|$;
б) $y = 3 - |x - 1| - |x + 2|$;
в) $y = 0{,}5|x| + 2{,}5|x - 1| + 2x$;
г) $y = 2|x - 3| + 2|x + 6| - 1$.

Для данной функции укажите:
1) область определения;
2) множество значений;
3) промежутки монотонности;
4) точки экстремума и экстремумы функции;
5) нули функции.

23.31. Покажите, что график функции

$$y = k|x - a| + m|x - b| + hx + p,\ k \neq 0,\ m \neq 0,\ a < b$$

состоит из двух лучей и отрезка, концы которого точки P и M с абсциссами a и b являются началом лучей. График может быть построен методом опорных точек. Для этого понадобятся четыре опорные точки: уже названные нами концы отрезка P и M и две точки с абсциссами $x_1 < a$ и $x_2 > b$.

23.32. Методом опорных точек постройте график функции:

а) $y = |x + 2| - |x - 4| + 2$;
б) $y = |1 + x| - 2|x - 3| + x + 2$;
в) $y = |x + 5| + 2|x - 5| + x$;
г) $y = 3|x - 3| - 5|x + 1| - 1$.

23.33. Постройте двумя способами график функции:

а) $y = |x + 2| + |x - 4| + 2|x|$;

б) $y = 3|x - 2| - 2|x - 4| + x$.

23.34. Постройте график функции на указанном отрезке:

а) $y = x^2 - |x^2 + x - 1|$, $\left[\frac{2}{3}; 5\right]$;

б) $y = 2x^2 + |x - 5|(2x + 1)$, $[0; 5]$;

в) $y = \frac{1}{x} + \left|\frac{1}{x} - x\right|$, $[1; 4]$;

г) $y = \left|\frac{2 - 3x^2}{x}\right| + \frac{2}{x}$, $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}; 7\right]$.

23.35. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x| + |x - 4|$ и $y = a$:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки;

г) имеют бесконечно много общих точек?

23.36. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x + 1| + |x - 3|$ и $y = 2x + a$:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки;

г) имеют бесконечно много общих точек?

23.37. При каких значениях параметра a графики функций $y = |x + 1| - |x + 3|$ и $y = kx - 4$:

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки;

г) имеют бесконечно много общих точек?

23.38. Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного графиками функций $y = |x|$ и $y = 4$ (сделайте чертеж).

23.39. Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного графиком функции $y = |x|$ и прямой $7y - x - 24 = 0$ (сделайте чертеж).

23.40. При каких значениях a прямая $y = a$ и график функции $y = |x|$ ограничивают треугольник площадью 50.

ГЛАВА 4

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 24. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С КВАДРАТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

24.01. Заполните таблицу. Какие из данных уравнений являются:
а) приведенными;
б) неполными;
в) уравнениями с целыми коэффициентами;
г) уравнениями с рациональными коэффициентами;
д) уравнениями, приведенными к стандартному виду?

№ п/п	Уравнение	Старший коэффициент	Коэффициент при x	Свободный член
1	$3x^2 - 7x + 2 = 0$			
2	$8x^2 - x = 0$			
3	$\frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{3}{5} = 0$			
4	$5x^2 = 0$			
5	$x^2 \cdot \sqrt{5} - x - \sqrt{3} = 0$			
6	$x^2 - 12 = 0$			
7	$-x^2 - 7x - 2 = 0$			
8	$(2x - 3)(x + 2) = 0$			
9	$3x^2 - 7x + 2 = 5x$			
10	$\frac{6x^2 - 4x}{3} = 0$			

24.02. Заполните таблицу:

№ п/п	Уравнение	Старший коэффициент	Коэффициент при x	Свободный член
1		3	-4	5
2		1	-2	7
3		-3	0	2
4		2	-3	0
5		a	b	c
6		b	a	a
7		3	$9-a$	$2+a$
8		c	$4+c$	-11
9		100	100	$-1+c$
10		$1-a$	$2a$	$-1-c$

24.03. Определите, относительно какой переменной (x, y или a) уравнение является квадратным, и выпишите его коэффициенты:

а) $x^2 + 2xy - 8y^2 = 0$;
б) $ax^4 + a^2x^2 + 1 + 2a^2 = 0$;
в) $(a + x)(a - 1) + x^2(x - a) = 1$;
г) $x^2y^2 + 5x^2y - 4xy^2 - 6x^2 + 12xy - 7y - 1 = 0$.

24.04. Можно ли данное уравнение привести к квадратному уравнению:

а) $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+5}{17}$; б) $\dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{6-x}{1-x}$?

24.05. Определите, какое из заданных чисел является корнем соответствующего квадратного уравнения:

а) $0, \pm1, \pm2, \pm\sqrt{2}$; $2x^2 + 15x + 22 = 0$;

б) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm\sqrt{3}$; $\dfrac{1}{9}x^2 - 5x + 14 = 0$;

в) $\pm1, \pm3, \pm\sqrt{5}$; $x^2 - (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$;

г) $0, \pm1, \pm2, \pm\sqrt{2}$; $4x^2 - 15\sqrt{2}x + 21 = 0$.

24.06. Найдите хотя бы один корень квадратного уравнения:

а) $2x^2 + 15x + 22 = 2 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 22$;

б) $\frac{7}{2}x^2 - 5x\sqrt{2} + 1 = \frac{7 \cdot (\sqrt{7})^2}{3} - 5\sqrt{14} + 1$;

в) $5x^2 + x\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$;

г) $\frac{x^2}{\sqrt{7}} - 2x\sqrt{7} + 14 - \sqrt{7} = 0$.

24.07. Объясните, почему ни одно положительное число не может быть корнем уравнения $3x^2 + 17x + 9 = 0$.

24.08. Объясните, почему ни одно отрицательное число не может быть корнем уравнения $3x^2 - 17x + 9 = 0$.

24.09. Может ли корнем квадратного уравнения $3x^2 - 17x + 9 = 0$ быть четное число?

24.10. Может ли корнем квадратного уравнения $15x^2 - 37x + 8 = 0$ быть нечетное число?

24.11. Может ли корнем квадратного уравнения $x^2 - 17x + 9 = 0$ быть дробное число вида $\frac{1}{m}$, где m — натуральное число, большее 1?

§ 25. ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение (25.01—25.06):

25.01. а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
б) $x^2 - 2x - 15 = 0$;
в) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
г) $x^2 - 3x - 18 = 0$;
д) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;
е) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
ж) $25x^2 - 25x + 6 = 0$;
з) $102x^2 + 11x - 1 = 0$;
и) $x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 = 0$;

25.02. а) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$;
б) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 1 = 0$;
в) $9x^2 - 6\sqrt{5}x + 2 = 0$;
г) $4x^2 - 2\sqrt{7}x + 1 = 0$.

25.03. а) $x^2 - 7x - 3 = 0$;
б) $2x^2 + 5x + 1 = 0$;
в) $3x^2 + 11x + 2 = 0$;
г) $4x^2 + 13x + 0{,}25 = 0$.

25.04. а) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; в) $0{,}25x^2 - 12x + 144 = 0$;
б) $16x^2 - 24x + 9 = 0$; г) $16{,}6x^2 + 332x + 1660 = 0$.

25.05. а) $x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = 0$; в) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 0$;
б) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$; г) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0$.

25.06. а) $9x^2 + 6x + 11 = 0$; в) $2001x^2 + x + 1 = 0$;
б) $6x^2 + 11x + 184 = 0$; г) $0{,}9x^2 + 11x + 75\pi = 0$.

Решите уравнение с буквенными коэффициентами (25.07, 25.08):

25.07. а) $x^2 - (2p - 2)x + p^2 - 2p = 0$;
б) $x^2 - \frac{2p + 3}{6}x + \frac{p}{6} = 0$;
в) $x^2 - (1 - p)x - 2p = 0$;
г) $x^2 + \frac{3p + 2}{6}x + \frac{p}{6} = 0$.

25.08. а) $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$;
б) $x^2 - 4px + 4p^2 - 1 = 0$;
в) $(p - 4)x^2 + (2p - 4)x + p = 0$;
г) $px^2 + 2(p + 1)x + p + 2 = 0$.

Решите уравнение (25.09—25.13):

25.09. а) $(3x - 5)(2x - 1) = 0$; в) $(3x - 5)(2x - 1) = 2x - 1$.
б) $(3x - 5)(2x - 1) = 5$;

25.10. а) $(7 - 2x)(x + 3) = 0$; в) $(7 - 2x)(x + 3) = 5(x + 3)$.
б) $(7 - 2x)(x + 3) = x$;

25.11. а) $(3 - 2x)(5x - 3) = 0$; в) $(3 - 2x)(5x - 3) = (5x - 3)^2$.
б) $(3 - 2x)(5x - 3) = 2x^2$;

25.12. а) $(4x - 5)^2 - (2x + 3)^2 = 0$;
б) $(4x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$;
в) $(4x - 5)^2 - (2x + 3)^2 = 3x - 1$.

25.13. а) $(x^2 + 4x + 11)^2 = (7x^2 + 2x + 3)^2$;
б) $(x^2 + 4x + 11)^2 = (3x + 1)^4$.

25.14. Пусть $x = t^2 + 3t$. Найдите все значения t, при которых $x^2 - 2x - 8 = 0$.

25.15. Пусть $x = \frac{3}{u + 2}$. Найдите все значения u, при которых $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

25.16. Решите сначала относительно x, а затем относительно y уравнение:

а) $3x - 5y = 7$;

б) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$;

в) $x^2 + 3xy + 2y^2 + y - 1 = 0$;

г) $2x^2 - 5xy - 3y^2 - x + 10y - 3 = 0$.

25.17. Найдите абсциссы общих точек графиков функций, не производя их построения:

а) $y = x^2$ и $y = 5x - 4$;

б) $y = 4x^2$ и $y = -4x - 1$;

в) $y = -7x^2$ и $y = 13x - 111$;

г) $y = x^2 + x - 3$ и $y = -x^2 - 5x - 4$;

д) $y = x^2 + 3x - 1$ и $y = -x^2 - 5x - 9$.

25.18. Найдите ординаты общих точек графиков функций, не производя их построения:

а) $y = 3x^2 + 3x - 1$ и $y = x^2 - 5x - 1$;

б) $y = 3x^2 + 3x - 1$ и $y = -x^2 - x - 14$;

в) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ и $y = -x^2 - x - 1$;

г) $y = x^2 + x + \frac{1}{x - 3}$ и $y = 12 - \frac{1}{3 - x}$.

25.19. Найдите два последовательных целых числа, произведение которых равно 1980.

25.20. Разность двух натуральных чисел равна 4, а произведение 4457. Найдите эти числа.

25.21. Ученики обменялись друг с другом фотографиями. Всего для этого понадобилось 870 фотографий. Сколько учеников в классе?

25.22. Ученики обменялись друг с другом рукопожатиями. Всего было совершено 300 рукопожатий. Сколько учащихся в классе?

25.23. В выпуклом многоугольнике 170 диагоналей. Найдите сумму внутренних углов многоугольника.

Для каждого значения параметра a решите уравнение (**25.24, 25.25**):

25.24. а) $x^2 - (3a - 1)x - 3a = 0$;
б) $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a = 0$.

25.25. а) $ax^2 - (3a - 1)x - 3 = 0$;
б) $(a - 1)x^2 - ax + 1 = 0$.

25.26. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4x^2 + ax + a = 0$ имеет ровно один корень, и для каждого такого значения a найдите этот корень.

25.27. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 - 6x + 3 = 0$ имеет ровно один корень, и для каждого такого значения a найдите этот корень.

25.28. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - a} = 0$ имеет ровно один корень, и для каждого такого значения a найдите этот корень.

25.29. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{x^2 + 2ax - 3a^2}{x - 6} = 0$ имеет ровно один корень, и для каждого такого значения a найдите этот корень.

25.30. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{ax^2 - 2x - 1}{x - 1} = 0$ имеет ровно один корень, и для каждого такого значения a найдите этот корень.

25.31. При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно один корень:

а) $\frac{x^2 + 6x - a + 1}{x - 1} = 0$; б) $\frac{x^2 + 2x - a + 5}{x + 3} = 0$?

25.32. Для каждого значения a решите уравнение:

а) $\frac{(x + 6)(x - 1)}{x - a} = 0$; б) $\frac{x^2 + 2ax + a^2 - 9}{x - 2} = 0$.

25.33. Найдите все пары чисел a и b, для которых уравнение $(ax^2 - 6x + 3)(2x - b) = 0$ имеет ровно один корень, и для каждой такой пары укажите этот корень.

25.34. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = 2x + a$ имеет с параболой $y = x^2 - 3$ единственную общую точку.

25.35. Найдите все значения параметра b, при которых параболы $y = x^2 - 3b$ и $y = 2x^2 - bx$ имеют единственную общую точку.

25.36. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a - x$ имеет с гиперболой $y = \frac{1}{x}$ единственную общую точку. Сделайте чертеж.

25.37. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = ax + 6$ имеет с гиперболой $y = \frac{x-2}{x+3}$ единственную общую точку. Сделайте чертеж для каждого найденного значения a.

25.38. Через какую точку оси ординат проходит прямая, параллельная прямой $y = 4x$ и имеющая с параболой $y = x^2$ единственную общую точку?

25.39. Через какую точку оси ординат проходит прямая, параллельная прямой $y = -2x$ и имеющая с параболой $y = x^2 - 4x + 7$ единственную общую точку?

25.40. Через какую точку оси ординат проходит прямая, параллельная прямой $y = 3x$ и имеющая с параболой $y = -x^2 - 7x$ единственную общую точку?

25.41. Найдите уравнения всех прямых, не параллельных оси y, проходящих через начало координат и имеющих с параболой $y = 5x - x^2$ единственную общую точку.

25.42. Найдите уравнения всех прямых, не параллельных оси y, проходящих через начало координат и имеющих с параболой $y = x^2 + 1$ единственную общую точку.

25.43. Найдите уравнения всех прямых, не параллельных оси y, проходящих через начало координат и имеющих с параболой $y = x^2 - 4x + 4$ единственную общую точку.

25.44. Найдите уравнения всех прямых, не параллельных оси x, проходящих через точку (0; 1) и имеющих с гиперболой $y = \frac{1}{x}$ единственную общую точку.

25.45. Через точку (2; 0) проведена прямая, пересекающая ось ординат и имеющая с гиперболой $y = -\frac{1}{x}$ только одну общую точку. Найдите координаты этой точки.

25.46. Найдите уравнения всех прямых, имеющих с каждой из парабол $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x - 5$ только одну общую точку.

25.47. Найдите уравнения всех прямых, имеющих с каждой из парабол $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2 - 4x + 9$ только одну общую точку.

25.48. Найдите общую точку всех прямых, имеющих с каждой из парабол $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x - 4$ только одну общую точку.

25.49. В системе координат xOy постройте все точки с координатами x и y, для которых уравнение (относительно t) $t^2 - 2(x - 3)t + y = 0$ имеет ровно один корень.

25.50. Решите уравнение $(3x^2 - x - 2)^2 + (6x^2 + x - 1)^4 = 0$.

25.51. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет хотя бы один корень, и для каждого такого a решите уравнение $(3x^2 + x - 80)^2 + (x - a)^4 = 0$.

25.52. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет хотя бы один корень, и для каждого такого a решите уравнение $(5x^2 + x - a)^2 + (2x - 1)^4 = 0$.

Решите уравнение (25.53—25.55):

25.53. $(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1)^8 + (x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 1)^2 = 0$.

25.54. $(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)^8 + (x^4 - x^3 - 5x^2 - x + 14)^{20} = 0$.

25.55. а) $\dfrac{x}{x-4} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x - x^2 - 5}{x^2 - 3x - 4}$;

б) $\dfrac{8x - 9}{2x^2 - 7x + 3} = \dfrac{x+1}{x-3} + \dfrac{x}{2x-1}$;

в) $\dfrac{4x^2 - 6}{x^2 + 2} - \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = \dfrac{9}{x^4 + 3x^2 + 2}$;

г) $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 3} = \dfrac{1}{x^4 + 2x^2 - 3}$.

§ 26. ТЕОРЕМА ВИЕТА

26.01. Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:

а) $x^2 - 4x - 15 = 0$;

б) $2x^2 - x + 3 = 0$;

в) $4x^2 + 11x + 5 = 0$;

г) $-x^2 + 3x + 7 = 0$.

26.02. Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:

а) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$;

б) $-x^2\sqrt{2} - x\sqrt{2} + 3 = 0$;

в) $2\pi \cdot x^2 = 12\pi \cdot x + 5(x - 1)$;

г) $123x^2 + 3x - 123 = 0$.

26.03. Выпишите формулы Виета для заданного уравнения и попытайтесь устно указать его корни:

а) $x^2 - x - 2 = 0$;

б) $x^2 + x - 20 = 0$;

в) $-x^2 + 7x + 28 = 0$;

г) $x^2 + 44x + 123 = 0$;

д) $x^2 - 7x - 30 = 0$;

е) $x^2 - 4x - 12 = 0$;

ж) $x^2 - 22x + 121 = 0$;

з) $2x^2 + 5x + 2 = 0$;

и) $2x^2 - 3x + 2 = 0$;

к) $2x^2 + 3x + 2 = 0$;

л) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$;

м) $x^2 + (1 - \sqrt{5})x - \sqrt{5} = 0$;

н) $x^2 + (\sqrt{7} + \sqrt{2})x + \sqrt{14} = 0$;

о) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$;

п) $x^2 - 88x + 780 = 0$;

р) $x^2 + 39x + 224 = 0$.

26.04. Подберите один корень уравнения, а второй найдите по теореме Виета:

а) $x^2 + 6x = 23{,}5^2 + 6 \cdot 23{,}5$;

б) $3x^2 - 7x = 9 - 7\sqrt{3}$;

в) $x^2\sqrt{13} - 27x = 54 + 4\sqrt{13}$;

г) $2x^2 + 7x = 0{,}72$;

д) $(3x - 8)(5x + 1) = (3\sqrt{7} - 8)(5\sqrt{7} + 1)$.

26.05. Решите уравнение, используя теорему Виета:

а) $5x^2 - x - 18 = 0$;

б) $3x^2 - 5x - 22 = 0$;

в) $7x^2 + 8x - 0{,}87 = 0$;

г) $6x^2 + 5x - 0{,}0506 = 0$;

д) $9x^2 + 7x - 970 = 0$;

е) $5x^2 + 8x - 5\,008\,000 = 0$.

26.06. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа:

а) 3 и 7; б) −4 и 14; в) $\frac{2}{3}$ и 1; г) $\frac{3}{11}$ и −25;

д) −3,7 и −1; е) −0,25 и 4; ж) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$; з) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$.

26.07. Составьте приведенный квадратный трехчлен, корнями которого являются числа:

а) a и -8;
б) $b + 1$ и -1;
в) a и $5a$;
г) a и $2 - a$;
д) $a + 5$ и $a - 5$;
е) $3 - 7a$ и $7a - 3$;
ж) $3c - 2$ и $3c + 2$.

26.08. Составьте квадратный трехчлен, корнями которого являются числа:

а) a и $\frac{1}{a}$;
б) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$,

где a, b — целые числа, не равные нулю.

26.09. Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) $\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$;
б) $\sqrt{2} + 1$; $-\sqrt{2} + 1$;
в) $3\sqrt{2}$; -5;
г) $4 - \sqrt{7}$; $4 + \sqrt{7}$;
д) $\sqrt{50}$; $7\sqrt{2}$;
е) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

26.10. Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое корней уравнения:

а) $x^2 - 14x + 4 = 0$;
б) $x^2 - 4x + 49 = 0$;
в) $3x^2 - 78x + 49 = 0$;
г) $x^2 - 72x + 0{,}04 = 0$.

26.11. Составьте квадратный трехчлен, если известны среднее арифметическое А и среднее геометрическое Г его корней (корни считаются положительными):

а) А = 4; Г = 2;
б) А = 2; Г = 4;
в) А = 16; Г = 12;
г) А = 100; Г = 100.

26.12. График функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами x_1 и x_2. Докажите, что вершина параболы имеет координаты

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y_2 = -a\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2\right).$$

26.13. Могут ли разные квадратные трехчлены иметь одинаковые корни? Если не могут, то докажите это. Если могут, то что общего есть у графиков таких квадратных трехчленов и в чем их различие?

26.14. Как расположены друг относительно друга графики квадратных трехчленов, у которых:

а) одинаковая сумма корней;
б) одинаковое произведение корней?

26.15. Не решая уравнения $3x^2 - 135x - 141 = 0$, докажите, что оно имеет два корня различных знаков. Сравните абсолютные величины положительного и отрицательного корней (какая больше?).

26.16. Не решая уравнения $7x^2 + 123x - 127 = 0$, докажите, что оно имеет два корня разных знаков. Сравните абсолютные величины положительного и отрицательного корней (какая больше?).

26.17. Не решая уравнения $3x^2 - 135x + 1 = 0$, докажите, что оно имеет два положительных корня.

26.18. Не решая уравнения $3x^2 + 147{,}3x + 11 = 0$, докажите, что оно имеет два отрицательных корня.

26.19. Составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого на 1 больше корней уравнения $x^2 - 7x - 3 = 0$.

26.20. Составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого на 3 меньше корней уравнения $x^2 + 8x - 1 = 0$.

26.21. Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $8x^2 - 7x - 11 = 0$.

26.22. Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $5x^2 - 7x - 13 = 0$.

26.23. Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, корни которого равны корням уравнения $15x^2 - 7x - 3 = 0$, умноженным на 3.

26.24. Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, корни которого равны корням уравнения $7x^2 - 3x - 1 = 0$, деленным на 5.

26.25. При каких значениях a отношение корней уравнения $x^2 - 8x + 3a + 1 = 0$ равно:

а) 3; б) −5; в) $\frac{7}{9}$?

26.26. Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 15.

26.27. Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 1.

26.28. Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 16.

26.29. Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 17.

26.30. Докажите, что если система $\begin{cases} x + y = p, \\ x \cdot y = q \end{cases}$ имеет решения $(m;\ n)$, то числа m и n являются корнями уравнения $x^2 - px + q = 0$ и, наоборот, если данное уравнение имеет корни m и n (не обязательно различные), то любая пара чисел $(m;\ n)$ или $(n;\ m)$ является решением системы. Сделайте вывод о возможности решения системы, сводящейся к виду $\begin{cases} x + y = p \\ x \cdot y = q \end{cases}$, при помощи теоремы Виета.

26.31. Составляя вспомогательное квадратное уравнение, решите систему:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 20; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = a + 2, \\ xy = 2a; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x + y = 5\sqrt{2}, \\ xy = 12. \end{cases}$

26.32. Решите систему:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 22, \\ xy = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 12, \\ x + y + xy = 39; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - xy = -13, \\ x + y + xy = 35; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ 3x + 3y - xy = 7. \end{cases}$

26.33. Произведя надлежащую замену и составив вспомогательное квадратное уравнение, решите систему:

а) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y = -7, \\ xy = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - y = 5, \\ xy = -4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 3y = -6, \\ xy = 1{,}5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - 5y = b - 5, \\ xy = -b; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ xy = -1. \end{cases}$

26.34. Составьте, если это возможно, приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, если один из его корней $5 - \sqrt{11}$.

Пусть $x_1 + x_2 = s$ и $x_1 \cdot x_2 = m$. Выразите через s и m выражение **(26.35, 26.36)**:

26.35. а) $x_1 + x_1x_2 + x_2$; д) $x_1^2 + x_2^2$;

б) $2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2$; е) $x_1^3 + x_2^3$;

в) $2x_2^2x_1^3 + 2x_1^2x_2^3$; ж) $x_1^4 + x_2^4$;

г) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$; з) $x_1^5 + x_2^5$.

26.36. а) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$; е) $\left|\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1}\right|$;

б) $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$; ж) $\frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$;

в) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$; з) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

г) $(x_1 - x_2)^2$; и) $\frac{x_1}{x_1 + 2x_2} + \frac{x_2}{2x_1 + x_2}$;

д) $|x_1 - x_2|$; к) $\frac{5x_1}{2x_1 + 3x_2} + \frac{5x_2}{3x_1 + 2x_2}$.

26.37. Выполните задание 26.36, если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения:

а) $x^2 - x - 1 = 0$; в) $3x^2 - x + 6 = 0$;

б) $2x^2 - x - 4 = 0$; г) $ax^2 - x + 1 = 0$.

26.38. Не используя теорему Виета, докажите: если x_1 — корень квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, то справедливо тождество $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, где $x_2 = -p - x_2$. При этом если $x_1 = -\frac{p}{2}$, то $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

26.39. Убедитесь, что число 1 или число −1 является одним из корней данного квадратного трехчлена, и найдите его второй корень:

а) $x^2 - (2a + 1)x + 2a$; в) $x^2 + (3a - 2)x + 3(a - 1)$;

б) $ax^2 - (1 - 2a)x + 1 - 3a$; г) $(2 - a)x^2 - x - 3 + a$.

§ 27. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

27.01. Разложите на линейные множители квадратный трехчлен:
а) $x^2 + 3x + 2$; в) $-5x^2 - 3x + 8$;
б) $2x^2 + 5x + 2$; г) $12x^2 - x + 1$.

27.02. Не используя теорему Виета и формулу для корней квадратного трехчлена, докажите, что если x_1 — корень квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, то справедливо тождество $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, где $x_2 = -p - x_1$. При этом если $x_1 = -\frac{p}{2}$, то $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

Разложите на линейные множители квадратный трехчлен **(27.03—27.08)**:

27.03. а) $x^2 - 3x + 2$; д) $2x^2 + 3x + 1$;
б) $x^2 - 5x + 6$; е) $12x^2 + 7x + 1$;
в) $x^2 - 7x + 12$; ж) $20x^2 + 9x + 1$;
г) $x^2 - 9x + 20$; з) $30x^2 + 11x + 1$.

27.04. а) $x^2 + (2m + 1)x + m(m + 1)$;
б) $x^2 - (2m + 1)x + m(m + 1)$;
в) $m(m + 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$;
г) $m(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1$.

27.05. а) $2x^2 - 5x + 2$; в) $4x^2 - 17x + 4$;
б) $3x^2 - 10x + 3$; г) $5x^2 - 26x + 5$.

27.06. а) $2x^2 - 3x - 2$; в) $2x^2 + 3x - 2$;
б) $3x^2 + 8x - 3$; г) $3x^2 - 8x - 3$.

27.07. а) $mx^2 + (m^2 + 1)x + m$; в) $mx^2 - (m^2 - 1)x - m$;
б) $mx^2 + (m^2 - 1)x - m$; г) $mx^2 - (m^2 + 1)x + m$.

27.08. а) $x^2 + 3ax + 2a^2$; в) $-5x^2 - (4y + 5)x + y(y + 1)$;
б) $2x^2 + (a - 2)x - a$; г) $b^2 + 3(p - 1)b + 2p^2 - 3p$.

27.09. а) $x^2 - 3xy + 2y^2$; д) $2p^2 + 3pq + q^2$;
б) $x^2 - 5xy + 6y^2$; е) $12s^2 + 7st + t^2$;
в) $a^2 - 7ab + 12b^2$; ж) $20R^2 - 9Rr + r^2$;
г) $a^2 - 9ab + 20b^2$; з) $30r^2 + 11rR + R^2$.

27.10. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - xy - 2y^2 + 5x - y + 6$;

б) $y^4 - xy^3 - xy + x^2$.

27.11. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2 + 5x - 84}{x^2 + 7x - 60}$; в) $\dfrac{2x^4 + x^2 - 3}{x^4 + x^2 - 2}$;

б) $\dfrac{3x^2 + x - 14}{3x^2 + 4x - 7}$; г) $\dfrac{4x^4 - 23x^2 + 15}{3x^4 - 19x^2 + 20}$.

27.12. Раскройте скобки в правой части равенства и, сравнивая коэффициенты, найдите $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$:

а) $x^2 - x - 5 = (x - x_1)(x - x_2)$;

б) $3x^2 - 5x - 7 = 3(x - x_1)(x - x_2)$;

в) $5x^2 - 3x - 111 = 5(x - x_1)(x - x_2)$;

г) $-7x^2 + 2x + 14 = -7(x - x_1)(x - x_2)$;

д) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, если $p^2 - 4q \geqslant 0$;

е) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, если $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

27.13. Если многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет корень $x = a$, справедливо тождество $x^3 + px^2 + qx + r = (x - a)(x^2 + Px + Q)$, где P, Q — некоторые действительные числа.
З а м е ч а н и е для знатоков. При доказательстве не используйте теорему Безу или следствия из нее.

27.14. Разложите на линейные множители многочлен третьей степени, если задан один корень этого многочлена:

а) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, $x = 1$;

б) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, $x = 1$;

в) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, $x = 2$;

г) $6x^3 + 5x^2 - 12x + 4$, $x = -2$.

27.15. Раскройте скобки в правой части равенства и, сравнивая коэффициенты, найдите $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ и $x_1x_2x_3$:

а) $x^3 - 3x^2 - 9x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$;

б) $2x^3 - 6x + 1 = 2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$;

в) $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

27.16. Сформулируйте теорему Виета для кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, имеющего три корня, и найдите x_1, x_2 и x_3.

27.17. Сформулируйте необходимое и достаточное условие разложения биквадратного трехчлена $x^4 + px^2 + q$ на линейные множители.

27.18. Докажите, что трехчлен $x^6 + px^3 + q$ раскладывается на линейные множители тогда и только тогда, когда $p = q = 0$.

§ 28. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ (ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ)

28.01. Периметр прямоугольника 28 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух смежных сторонах прямоугольника, равна 116 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

28.02. В прямоугольном треугольнике один катет меньше гипотенузы на 8 см, а другой — на 4 см. Найдите гипотенузу.

28.03. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше их произведения на 307. Найдите эти числа.

28.04. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 840. Найдите эти числа.

28.05. В зрительном зале клуба 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили один ряд, в зале стало 420 мест. Сколько рядов стало в зрительном зале клуба?

28.06. Велосипедист проехал 18 км с определенной скоростью, а оставшиеся 6 км со скоростью на 6 км/ч меньше первоначальной. Найдите скорость велосипедиста на втором участке пути, если на весь путь он затратил 1,5 ч.

28.07. Расстояние в 30 км один из двух лыжников прошел на 20 мин быстрее другого. Скорость первого лыжника была на 3 км/ч больше скорости второго. Какова была скорость каждого лыжника?

28.08. Числитель дроби на 1 меньше знаменателя. Если эту дробь сложить с обратной ей дробью, то получится $\frac{25}{12}$. Найдите исходную дробь.

28.09. Мастерская к определенному сроку должна была выпустить 5400 пар обуви. Фактически она выпускала в день на 30 пар больше плана и выполнила заказ на 9 дней раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?

28.10. Моторная лодка прошла 5 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки по течению.

28.11. Члены школьного кружка натуралистов отправились на катере для сбора лекарственных трав. Проплыв вниз по течению реки 35 км, они сделали трехчасовую стоянку, после чего вернулись назад. Определите скорость катера в стоячей воде, если все путешествие заняло 7 ч, а скорость течения равна 3 км/ч.

28.12. Велосипедист рассчитывал проехать маршрут BC за 2 ч. Однако когда до пункта C оставалось 6 км, он снизил скорость на 3 км/ч и прибыл в пункт C на 6 мин позже, чем рассчитывал. Чему равна длина маршрута BC?

28.13. Пешеход прошел расстояние CM за 3 ч. Возвращаясь, он первые 16 км шел с той же скоростью, а затем снизил скорость на 1 км/ч, вследствие чего затратил на обратный путь на 4 мин больше, чем на путь из C в M. Чему равно расстояние между C и M?

28.14. Поезд должен был пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан у семафора на 10 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определите первоначальную скорость поезда.

28.15. Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше ее знаменателя. Если из числителя и знаменателя вычесть 1, то дробь уменьшится на $\frac{1}{12}$. Найдите эту дробь.

Задачи на движение

28.16. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 324 км, вышли навстречу друг другу два поезда. Первый поезд прибыл в пункт B на 1 ч 30 мин раньше, чем второй в пункт A. Найдите скорость первого поезда, если она на 5 м/с больше скорости второго. (Ответ дайте в км/ч.)

28.17. По течению реки катер прошел за 7 ч такое же расстояние, что и за 8 ч против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде 30 км/ч.

28.18. Через 7 ч после отправления плота из того же пункта вслед за ним направилась моторная лодка. На каком расстоянии от пункта отправления моторная лодка догонит плот, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 14 км/ч?

28.19. Пароход прошел 60 км по течению реки и затем обратно, совершив все путешествие за 8 ч. Найдите скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения реки 4 км/ч.

28.20. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Они двигались без остановок с постоянной скоростью и встретились через 30 ч после выхода. Сколько времени был в пути до пункта назначения каждый поезд, если первый поезд прибыл в пункт B на 25 ч позже, чем второй прибыл в пункт A?

28.21. Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, находящихся на расстоянии 153 м. Первое тело проходит по 10 м в секунду, второе же в первую секунду прошло 3 м, а в каждую следующую секунду на 5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд тела встретятся?

28.22. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через час после этого из пункта A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в пункт A в тот момент, когда первый курьер достиг пункта B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго 50 км/ч?

28.23. Расстояние между двумя станциями один поезд проходит за 1 ч 30 мин, а второй на 10 мин быстрее. Найдите это расстояние, если скорость второго поезда на 10 км/ч больше скорости первого.

28.24. Два поезда одновременно выехали в одном направлении из двух городов A и B, расстояние между которыми 60 км, и прибыли одновременно на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они тоже прибыли бы в C одновременно, но на 2 ч раньше, чем в первом случае. Найдите скорость поездов.

28.25. Поезд, двигаясь сначала один час в гору, потом 10 ч по ровному месту, проходит 840 км. Если бы подъем был длиной 10 км, то за 2 ч поезд прошел бы 153 км. Найдите его скорость при движении в гору и по ровному месту, если известно, что скорость по ровному месту больше, чем 110% скорости поезда в гору.

28.26. Два велосипедиста одновременно выехали из пункта A в одном и том же направлении. Скорость первого на 2 км/ч больше скорости второго. Через 12 мин первый велосипедист остановился на 6 мин, чтобы устранить неисправность, и, возобновив движение, догнал второго велосипедиста на расстоянии 14 км от места своей остановки. Определите скорость велосипедистов.

28.27. Из пункта A по реке отправляется плот, а из пункта B, расположенного ниже по течению, чем пункт A, навстречу плоту отправляется катер. Встретив плот, катер сразу же поворачивает и идет вниз по течению. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде в 4 раза больше скорости течения реки? (Ответ дайте в процентах.)

28.28. Расстояние между двумя станциями железной дороги d км. Скорый поезд проходит это расстояние на t ч скорее, чем пассажирский. Определите скорость обоих поездов, если известно, что скорый поезд проходит в час на a км больше, чем пассажирский.

28.29. Из пункта A в пункт B вышел первый курьер. Одновременно с ним из пункта B в пункт A вышел второй курьер. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, сразу же поворачивал обратно. Первый раз курьеры встретились в 12 км от пункта B, а второй раз — в 6 км от пункта A через 6 ч после первой встречи. Найдите расстояние между пунктами A и B и скорость обоих курьеров.

28.30. Пароход расстояние по реке Волге от Нижнего Новгорода до Волгограда проходит за двое суток, обратно — за трое суток. Определите, сколько времени будет плыть плот от Нижнего Новгорода до Волгограда.

28.31. Два поезда отправляются навстречу друг другу из пунктов A и B. Они встретятся на половине пути, если поезд из пункта A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из пункта B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через 2 ч расстояние между ними составит $\frac{1}{4}$ расстояния между пунктами A и B. За сколько часов каждый поезд проходит весь путь?

28.32. Автомобиль выехал из пункта A в пункт B и некоторое время двигался с постоянной скоростью. Проехав $\frac{3}{4}$ пути, он увеличил скорость на 20 км/ч. Когда автомобиль прибыл в пункт B, оказалось, что его средняя скорость движения составила 64 км/ч. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

28.33. Из пункта M в пункт N выходит первый пешеход, а через 2 ч навстречу ему из пункта N в пункт M выходит второй пешеход. К моменту встречи второй пешеход прошел $\frac{7}{9}$ от расстояния, пройденного к этому моменту первым пешеходом. Сколько часов требуется первому пешеходу на весь путь от M до N, если второй пешеход проходит путь от N до M за 7 ч?

28.34. Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/ч большей, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

28.35. Два парохода одновременно вышли из порта: один на север, другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

28.36. Расстояние между двумя пунктами первый поезд проходит на 4 ч быстрее второго и на 1 ч быстрее третьего поезда. Скорость второго поезда составляет $\frac{5}{8}$ скорости третьего поезда и на 50 км/ч меньше скорости первого. Найдите скорость первого и второго поездов.

28.37. Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C — 14 км. В 12 ч из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14 ч прибыла в пункт C. Скорость течения реки 5 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

Задачи на совместную работу

28.38. За 4 дня совместной работы двух тракторов было вспахано $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно вспахать все поле только вторым трактором, если первым трактором можно вспахать все поле на 5 дней быстрее, чем вторым?

28.39. Двое рабочих выполнили задание за 5 дней, работая одновременно. Если бы первый рабочий работал в 2 раза быстрее, а второй — в 2 раза медленнее, то они выполнили бы задание за 4 дня. За сколько дней выполнил бы задание один первый рабочий?

28.40. Две бригады разгружают вагон за 6 ч. Первая бригада, работая одна, могла бы выполнить эту работу на 5 ч быстрее, чем одна вторая бригада. За сколько часов каждая бригада, действуя отдельно, может разгрузить этот вагон?

28.41. Два мастера, работая совместно, могут покрасить помещения на 18 ч быстрее, чем первый мастер в одиночку, и на 32 ч быстрее, чем второй мастер в одиночку. За сколько часов может покрасить помещения каждый мастер, работая один?

28.42. Трем бригадам поручена определенная работа. Известно, что первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить ее за 55 дней. Известно также, что третья бригада затратила бы на эту же работу на 11 дней больше, чем вторая. Найдите наибольший и наименьший возможные сроки, за которые выполнят эту работу три бригады, работая вместе.

28.43. Двое рабочих, работая вместе, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней может выполнить всю работу первый рабочий, работая самостоятельно?

28.44. Большой насос перекачивает за час на 2 м^3 воды больше, чем средний, а средний — на 2 м^3 больше, чем малый насос. Два средних и два малых насоса, работая вместе, наполнили резервуар емкостью 48 м^3. Сразу после этого были включены два средних и два больших насоса, которые наполнили другой резервуар той же емкости. На всю работу затрачено 9 ч. Сколько кубометров воды перекачивает в час средний насос?

28.45. Бригада рыбаков должна была по плану выловить 600 ц рыбы к определенному сроку. В течение первых четырех дней они перевыполняли дневную норму на 5 ц, а в последние дни — на 6 ц, и уже за 2 дня до срока для выполнения плана им осталось выловить всего 6 ц рыбы. Сколько центнеров рыбы выловила бригада за первые 10 дней лова?

28.46. В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты сразу обе трубы, и он оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая — опорожняет бассейн?

28.47. Две бригады сельскохозяйственного предприятия должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, и поэтому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?

28.48. Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 мин совместного труда первый рабочий был переведен на другую работу, а второй закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый рабочий в отдельности, если известно, что второму на это понадобится на 1 ч больше, чем первому?

28.49. При совместной работе двух тракторов различной мощности поле было вспахано за 4 дня. Если бы две трети поля вспахать сначала одним трактором, а затем оставшуюся часть — вторым трактором, то вся работа была бы закончена за 8 дней. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором отдельно?

28.50. Два трактора могут вспахать поле за 15 ч. Если бы производительность первого трактора была вдвое больше, чем в действительности, а производительность второго на 20% больше, чем в действительности, то на вспашку этого же поля обоим тракторам понадобилось бы 10 ч. За сколько часов может вспахать это поле каждый трактор, работая один?

28.51. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену каждым станком, если первый работал в эту смену 6 ч, а второй — 7 ч, причем вместе они обработали 616 деталей?

28.52. Две трубы, работая одновременно, заполняют бассейн за 6 ч. За какое время наполнила бы бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что первая труба подает в час воды на 50% больше второй?

28.53. Несколько одинаковых автоматов могут выполнить данную работу за 20 ч. Если изъять 6 автоматов, а производительность каждого оставшегося увеличить на 100%, то они выполнят всю работу за 25 ч. Сколько автоматов было первоначально?

Задачи на смеси и сплавы

28.54. Слиток сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди надо добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60% меди?

28.55. После смешивания двух растворов, один из которых содержал 48 г, а другой — 20 г безводного йодистого калия, получилось 200 г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого на 15% больше концентрации второго.

28.56. Имелось два сплава меди, причем процент содержания меди в первом сплаве на 40% меньше, чем во втором. После того как их сплавили, получили сплав, содержащий 36% меди. Найдите процентное содержание меди в каждом сплаве, если в первом было 6 кг меди, а во втором — 12 кг.

28.57. Сколько чистого спирта нужно добавить к 735 г 16%-го раствора йода и спирта, чтобы получить 10%-й раствор?

28.58. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с ее 10%-м раствором и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов 30%-го раствора было взято?

28.59. В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

28.60. Имеются два слитка, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый слиток массой 150 кг содержит 40% олова, а второй массой 250 кг — 26% меди. Процентное содержание цинка в обоих слитках одинаково. Сплавив первый и второй слитки, получили сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова содержится в полученном сплаве?

28.61. Имеются два сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Известно, что первый сплав содержит 25% цинка, а второй — 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в 2 раза меньше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого сплава и 300 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28% цинка. Определите, сколько килограммов меди содержится в новом сплаве.

28.62. Из сосуда, содержащего чистый спирт, отлили 20% содержимого и добавили такое же количество воды. Затем снова отлили 20% содержимого и добавили такое же количество воды. Какое минимальное количество раз надо повторить этот процесс, чтобы содержание спирта в сосуде стало меньше 30%?

28.63. Сплав из меди и цинка весом 24 кг при погружении в воду потерял в своем весе $2\frac{8}{9}$ кг. Определите количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде $11\frac{1}{9}$ % своего веса, а цинк $14\frac{2}{7}$ % своего веса.

28.64. Сплав весит 2 кг и состоит из серебра и меди, причем вес серебра составляет $14\frac{2}{7}$ % веса меди. Сколько серебра в данном сплаве?

28.65. Имелись два разных сплава меди, причем процент содержания меди в первом сплаве был на 40% меньше, чем во втором. После того как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Определите процентное содержание меди в обоих сплавах, если известно, что в первом ее 6 кг, а во втором — вдвое больше.

28.66. Два раствора, первый из которых содержал 800 г, а второй 600 г безводной серной кислоты, смешали и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Определите массу первого и второго растворов, вошедших в смесь, если известно, что процент содержания безводной серной кислоты в первом растворе на 10% больше, чем во втором.

28.67. Морская вода содержит 5% (по весу) соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2%?

28.68. Сплав из меди и цинка весом a кг при погружении в воду потерял в своем весе b кг. Определите количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде $p\%$ своего веса, а цинк — $q\%$.

28.69. Имеется два слитка сплавов меди и олова. Первый весит 3 кг и содержит 40% меди, второй весит 7 кг и содержит 30% меди. Какой массы надо взять куски этих сплавов, чтобы после совместной переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $r\%$ меди? Найдите все значения r, при которых задача имеет решение.

28.70. Из сосуда емкостью 50 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой; затем опять вылили столько же литров раствора и опять долили водой. После этого в сосуде осталось 32 л чистой кислоты. Сколько кислоты было вылито в первый и во второй раз?

28.71. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, массой m кг и n кг, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

28.72. Имеется стальной лом двух сортов с содержанием никеля 5 и 40%. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием 30% никеля?

28.73. Свежие грибы по весу содержат 90%, а сухие 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

Задачи экономического и статистического содержания и задачи на проценты

28.74. Даны три числа. Сумма двух чисел и утроенного третьего равна 95. Третье число на 25% меньше первого, а второе на 50% больше первого. Найдите третье число.

28.75. Сумма двух чисел равна 96, а 25% их разности равны меньшему числу. Найдите число, которое на 35% больше большего из этих чисел.

28.76. Цена товара после двух последовательных снижений уменьшилась со 125 до 80 р. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз?

28.77. Первоначальная цена на некоторый товар была повышена на 44%, затем 2 раза понижалась на одинаковое число процентов. В результате окончательная цена товара оказалась на 19% меньше первоначальной. На сколько процентов производилось двукратное снижение цены?

28.78. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена одной упаковки лекарства снизилась с 300 р. до 192 р. На сколько процентов снижалась цена одной упаковки лекарства каждый раз?

28.79. Население города за два года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения города.

28.80. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найдите это число процентов, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции вырос в 2 раза.

28.81. Вкладчик положил в банк 100 000 р. из расчета 21% годовых. Через полгода он снял деньги. Сколько денег было выдано вкладчику?

28.82. Цех в целом увеличил за год выпуск продукции на 34%, причем 20% рабочих цеха увеличили выпуск продукции на 50%. На сколько процентов увеличили выпуск продукции остальные рабочие цеха?

28.83. Пенсионерка поместила в сбербанк некоторую сумму денег под фиксированный процент месячного дохода. Она планировала получить за год 165 р. дохода, но через полгода сняла с книжки 100 р. В конце года на книжке было 420 р. Найдите исходную сумму вклада.

28.84. На уроке алгебры присутствовали все ученики класса. Однако на следующий день на контрольной работе их оказалось не менее 95,7%, но и не более 96,6%. Какое наименьшее количество учащихся может быть в этом классе?

28.85. Первый банк дает 60% годовых, а второй — 40%. Вкладчик часть своих денег положил в первый банк, а остальные — во второй. Через 2 года суммарное число вложенных денег удвоилось. Какую долю своих денег положил вкладчик в первый банк?

28.86. За 2 кг одного продукта и 4 кг другого заплатили 40 руб. Стоимость того же количества продуктов не изменилась после того, как первый продукт подорожал на 5%, а второй подешевел на 15%. Сколько стоил первоначально 1 кг второго продукта?

Задачи на десятичную запись натурального числа

28.87. Найдите все двузначные числа, равные удвоенной сумме своих цифр.

28.88. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение этого числа на сумму его цифр равно 144.

28.89. Если сумму цифр двузначного числа умножить на 11, то получим число, в 2 раза его превышающее. Найдите первоначальное число, если известно, что оно делится на 7.

28.90. Шестизначное число начинается с цифры 2. Если эту цифру перевести на последнее место, то полученное шестизначное число будет втрое больше первоначального. Найдите полученное число.

28.91. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если переставить его цифры, то получится число, составляющее $\frac{4}{7}$ первоначального. Найдите первоначальное число.

28.92. Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

28.93. Сумма квадратов цифр некоторого двузначного положительного числа равна 73, среднее геометрическое его цифр равно $2\sqrt{6}$. Найдите это число.

28.94. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найдите это число.

28.95. Найдите двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $2\frac{2}{3}$, а разность между этим числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.

28.96. Сумма квадратов цифр некоторого двузначного числа на единицу больше утроенного произведения этих цифр. При делении этого числа на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке 6. Найдите это двузначное число.

28.97. Для нумерации страниц книги, начиная с первой, потребовалось 2325 цифр. Сколько страниц в книге?

28.98. В десятичной записи трехзначного числа все цифры различны и среди них нет 0. Сложили все трехзначные числа, записанные этими цифрами, включая и данное число, и получили 1998. Найдите данное число, если известно, что оно делится на 5, но не делится на 7.

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ

§ 29. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

29.01. Пусть $a \vdots c$ и $b \vdots c$. Сформулируйте свойства, из которых следует, что:
а) $(a + b) \vdots c$; в) $ma \vdots c$; д) $ab \vdots c^2$.
б) $(a - b) \vdots c$; г) $(ma + nb) \vdots c$;

29.02. Докажите, что если одно из двух слагаемых делится на натуральное число m, а второе — не делится на это число, то и их сумма не делится на это число m.

29.03. Докажите, что если одно из двух слагаемых делится на натуральное число m, а сумма не делится на m, то и второе слагаемое не делится на число m.

29.04. Докажите, что если разность двух натуральных чисел a и b меньше натурального числа n и положительна, то хотя бы одно из них не делится на n.

29.05. Докажите, что:
а) разность любых различных натуральных чисел кратна их сумме;
б) если натуральное число m кратно произведению ab натуральных чисел a и b, то m кратно a и m кратно b. Верно ли обратное?

29.06. Докажите, что разность любых различных натуральных чисел является делителем разности их кубов.

29.07. Докажите, что:
а) $(53^3 + 63^3)$ делится на 116;
б) $(18^3 + 26^3)$ делится на 176;
в) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 181^3 + 182^3)$ делится на 183;
г) $(2^3 + 3^3 + \ldots + 196^3 + 197^3)$ делится на 199.

29.08. Докажите, что если $a + b$ делится на число c, а $a - b$ не делится на c, то ни a, ни b не делятся на c.

29.09. Докажите, что:
а) $ad + bc + ac + bd$ делится на $a + b$;
б) если $ad + bc$ делится на $a + b$, то и $ac + bd$ делится на $a + b$;

в) если $ad + bc$ не делится на $a + b$, то и $ac + bd$ не делится на $a + b$.

29.10. Число $2a + 7b$ не делится на 13, докажите, что и $11a + 6b$ не делится на 13.

29.11. Найдите все такие натуральные числа n, при которых является натуральным числом выражение:

а) $\frac{3n + 7}{n}$;

б) $\frac{7n + 27}{n}$;

в) $\frac{5n^2 + 7n - 12}{n}$;

г) $\frac{n^7 + 3n^2 + 36}{n^2}$;

д) $\frac{3n + 14}{n + 2}$;

е) $\frac{8n + 77}{2n + 1}$;

ж) $\frac{3n + 7}{2n + 5}$.

29.12. На графике функции $f(x) = \frac{5x + 17}{x + 7}$ найдите все точки, обе координаты которых целые числа.

29.13. При каком наименьшем натуральном значении параметра a на графике функции $f(x) = \frac{a}{x + 113}$ есть ровно одна точка, координатами которой являются натуральные числа? Найдите координаты этой точки.

29.14. Найдите все значения числа a (не обязательно целые), при которых оба числа: $\frac{3}{a} - 1$ и $\frac{3}{a} + a$ — целые.

29.15. Найдите все значения числа a (не обязательно целые), при которых оба числа: $\frac{4}{a} + 3$ и $\frac{8}{a} + a$ — натуральные.

29.16. Найдите все значения числа a (не обязательно целые), при которых оба числа: $\frac{3}{a} + 3$ и $\frac{9}{a} + 2a$ — натуральные.

29.17. Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $n^3 + 5n$ делится на 6, то и число $(n + 1)^3 + 5(n + 1)$ также делится на 6. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.

29.18. Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$ делится на 12, то и число $(n + 1)^6 - 3(n + 1)^5 + 6(n + 1)^4 - 7(n + 1)^3 + 5(n + 1)^2 - 2(n + 1)$ также делится на 12. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.

29.19. Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $7^n + 3n - 1$ делится на 9, то и число $7^{n+1} + 3(n + 1) - 1$ также делится на 9. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.

29.20. Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133, то и число $11^{n+3} + 12^{2n+3}$ также делится на 133. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.

29.21. Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ делится на 37, то и число $2^{n+6} \cdot 3^{4(n+1)} + 5^{3n+4}$ также делится на 37. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.

29.22. Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}$ делится на 1053, то и число $3^{2n+4} \cdot 5^{2n+2} - 3^{3n+5} \cdot 2^{2n+2}$ также делится на 1053. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.

29.23. Докажите, что если $a + \dfrac{18}{a}$ — натуральное число, делящееся на 6, то $a^2 + \dfrac{324}{a^2}$ — также натуральное число, делящееся на 36.

29.24. Доказать, что если ни одно из двух соседних натуральных чисел не делится на 3, то их сумма делится на 3.

29.25. Рассмотрите многочлены $f(x) = x^k - 1$ и $g(x) = x - 1$. Докажите, что:

а) $235^7 - 1$ делится на 234;

б) $2001^{2007} - 1$ делится на 2000.

29.26. Докажите, что:

а) $343^{246} - 1$ делится на 344;

б) $111^{346} - 1$ делится на 123 320.

29.27. Используя обобщенную формулу сокращенного умножения $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, докажите, что:

а) $(a^n - b^n)$ делится на $a - b$, если a и b — целые числа;

б) $7^n - 2^n$ делится на 5;

в) $17^{2n} - 9^n$ делится на 140;

г) $13^n + 7 \cdot 5^n$ делится на 8;

д) $85^n - 44 \cdot 40^n$ делится на 45.

29.28. Используя обобщенную формулу сокращенного умножения $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$, докажите, что:

а) $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$ делится на $a + b$, если a и b — целые числа;

б) $7^{33} + 2^{33}$ делится на 9;

в) $17 \cdot 17^{2n} + 3 \cdot 9^n$ делится на 20;

г) $2001^{4n+1} + 1$ делится на 1001;

д) $85^n + 45 \cdot 3^n$ делится на 22.

§ 30. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

30.01. Какие из натуральных чисел от 2 до 20 являются делителями суммы $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$, а какие нет?

30.02. Каким из натуральных чисел от 2 до 30 кратна сумма $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 20 + 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 29 \cdot 30$, а каким нет?

30.03. Докажите, что произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$ делится на сумму $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 12 + 13$, а произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$ не делится на сумму $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 14 + 15 + 16$.

30.04. а) Докажите, что число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 + 1$ не делится ни на одно число, меньшее 101, кроме 1.

б) Докажите, что число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 200 - 1$ не делится ни на одно число, меньшее 210, кроме 1.

в) Напишите какое-либо число, большее миллиарда, не имеющее ни одного делителя, меньшего миллиона, кроме 1.

30.05. Сколько чисел из 101 идущих подряд натуральных чисел могут делиться на 2?

30.06. Сколько чисел из 1001 идущих подряд натуральных чисел могут делиться на 3?

30.07. Сколько чисел из 10 001 идущих подряд натуральных чисел могут делиться на 7?

30.08. Может ли из 101 идущих подряд натуральных чисел быть ровно одно, делящееся:

а) на 50; б) на 51; в) на 10 001?

30.09. Найдите какие-нибудь 36 идущих подряд трехзначных чисел, среди которых нет ни одного кратного 37. Какие наименьшее и наибольшее значения может принимать наименьшее из этих 36 трехзначных чисел?

30.10. Может ли произведение 101 идущих подряд натуральных чисел не делиться:

а) на 51; г) на 4386;

б) на 101; д) на 103?

в) на 606;

30.11. Найдите все двузначные числа, на которые делится наименьшее количество трехзначных чисел, и укажите это количество.

30.12. Докажите:

а) если натуральное число m кратно a и m кратно b, то m кратно произведению ab натуральных чисел a и b;

б) если натуральное число p ($p > 1$) не делится на все натуральные числа n такие, что $n^2 \leqslant p$, то p — простое число;

в) признак делимости на 6; на 12; на 36.

30.13. Выясните, являются ли простыми числа: 457; 467; 477; 761; 977; 1001; 1003.

30.14. Докажите, что любое простое число, большее трех, дает при делении на $6(n + 1)$ в остатке либо 1, либо 5, т. е. может быть представлено в виде $6n \pm 1$, где n — некоторое натуральное число. Представьте в данном виде простые числа 5; 13; 149; 259; 983. Подберите такие значения n, чтобы числа вида $6n + 1$ и $6n - 1$ не были простыми.

30.15. Докажите, что при любом натуральном n числа вида $6n + 2$; $6n + 3$ и $6n + 4$ являются составными.

30.16. Найдите (можно использовать микрокалькулятор) наименьший простой делитель чисел:

а) $2! + 1$; в) $5! + 1$; д) $11! + 1$;

б) $3! + 1$; г) $7! + 1$; е) $13! + 1$.

30.17. Докажите, что число $p! + 1$ не делится ни на одно простое число, не превосходящее простое число p, а значит, либо делится на какое-либо простое число, большее p, но меньшее $p! + 1$, либо само является простым.

30.18. Докажите, что среди ста чисел $101! + 2$; $101! + 3$; $101! + 4$; ...; $101! + 101$ нет ни одного простого.

30.19. Выпишите 1 000 000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого.

30.20. Найдите все такие p, что числа p, $p + 10$ и $p + 14$ — простые.

30.21. Найдите все такие p, что числа p и $8p^2 + 1$ — простые.

30.22. Могут ли разность и сумма двух простых чисел быть простыми числами? Если могут, то приведите все такие пары простых чисел.

30.23. Докажите, что натуральное число, следующее за произведением четырех последовательных натуральных чисел, не может быть простым.

30.24. Докажите, что четвертая степень любого натурального числа, большего единицы, увеличенная на 4, не может быть простым числом.

30.25. Докажите, что число $237^{231} + 732^{132}$ — составное.

30.26. Определите, является ли простым число $2^{110} + 7^{52}$.

§ 31. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Найдите последнюю цифру числа **(31.01, 31.02)**:

31.01. а) $2001^{2002^{2003}}$; в) $1345^{6789^{12345}}$;

б) $1999^{2002^{1333}}$; г) $23456^{78901^{2345}}$.

31.02. а) $2004^{2002^{2003}}$; б) $1993^{2002^{1333}}$.

31.03. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что последняя цифра разности указанных двух степеней равна нулю:

а) $627^n - 833^k$; б) $834^n - 626^k$?

31.04. Используя данные таблицы, найдите число n, при делении которого на число m в остатке получается r, а в частном — q. (При составлении таблицы допущена ошибка, найдите ее и в соответствующем месте вместо значения n напишите слово *ошибка*.)

m	24	85	13	7	120	23	$77^3 - 34^2$	$77^3 + 34^2$
r	7	0	12	6	111	1	$77^3 + 34^2$	$77^3 - 34^2$
q	13	11	0	11	120	213	1	1
n								

31.05. Для каждой пары чисел n и m найдите частное q и остаток r. Заполните таблицу и запишите равенство вида $n = mq + r$.

n	123	12	1234	128	7321	67 000	$341^2 + 1$	$345^{13} + 2$	$234^{234} - 1$
m	26	146	431	16	1237	351	341	690	234
q									
r									

31.06. Выпишите все остатки, которые могут получиться при делении натурального числа на 11.

31.07. Докажите, что сумма всех остатков, которые могут получиться при делении на 2001, делится на 2001.

31.08. Докажите, что сумма всех остатков, которые могут получиться при делении на 2002, не делится на 2002.

31.09. Докажите, что среди любых 35 натуральных чисел найдется хотя бы два, разность которых делится на 34.

31.10. Можно ли выписать 100 натуральных чисел таких, что разность никаких двух из них не делится:

а) на 9; б) на 99; в) на 999?

31.11. Докажите, что существуют такие различные натуральные числа n и k, что разность $573^n - 573^k$ делится на 2001.

31.12. Докажите, что существуют такие числа n, что число $\underbrace{111...111}_{n \text{ единиц}}$ делится на 2001.

31.13. Докажите, что произведение любых двух последовательных натуральных чисел делится на 2.

31.14. Докажите, что произведение любых 97 последовательных натуральных чисел делится на 97.

31.15. Докажите, что произведение любых 100 последовательных натуральных чисел делится на 10 000.

31.16. Можно ли утверждать, что произведение любых 97 последовательных натуральных чисел делится на 97^2?

31.17. Докажите, что произведение любых n $(n > 1)$ последовательных натуральных чисел делится на n.

31.18. Докажите, что при любых значениях n число $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится:

а) на 2; б) на 3; в) на 6.

31.19. Докажите, что при любых значениях n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ делится:

а) на 2; в) на 4; д) на 12;
б) на 3; г) на 8; е) на 24.

31.20. Укажите какое-либо трехзначное число n, при котором число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 5.

25.21. Укажите какое-либо трехзначное число n, при котором число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 48.

31.22. Укажите какое-либо трехзначное число n, при котором число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 24.

31.23. Запишите формулу:
а) четного числа;
б) нечетного числа;
в) числа, делящегося на 183;
г) числа, дающего при делении на 13 в остатке 11;
д) числа, дающего при делении на 7 в остатке 3.

31.24. Пусть числа n_1 и n_2 дают при делении на число m остатки соответственно r_1 и r_2. Докажите, что остаток от деления суммы чисел n_1 и n_2 на число m равен остатку от деления суммы r_1 и r_2 на число m.

31.25. Пусть числа n_1 и n_2 дают при делении на число m остатки соответственно r_1 и r_2. Докажите, что остаток от деления произведения чисел n_1 и n_2 на число m равен остатку от деления произведения r_1 и r_2 на число m.

31.26. Пусть числа $n_1 > n_2$ дают при делении на число m остатки соответственно r_1 и r_2. Докажите, что остаток от деления разности $n_1 - n_2$ на число m равен $r_1 - r_2$, если $r_1 \geqslant r_2$, и $m + r_1 - r_2$, если $r_1 < r_2$.

31.27. Пусть число n дает при делении на число m остаток r. Докажите, что остаток от деления произведения числа n^k (k — натуральное число) на число m равен остатку от деления произведения r^k на число m.

31.28. Остаток от деления числа n на 24 равен 7. Каким может быть остаток от деления этого числа:

а) на 12; в) на 6; д) на 72?
б) на 8; г) на 48;

31.29. Остаток от деления числа n на 50 равен 17. Каким может быть остаток от деления этого числа:

а) на 25; в) на 10; д) на 125?
б) на 5; г) на 100;

31.30. Заполните таблицу:

Число	Остаток от деления на 3		
n	0	1	2
$9n$			
$7n$			
$2n$			
n^2			
n^3			
$n^3 + n^2 + 201n$			

31.31. Докажите, что если a и b не делятся на 3, то и $a^2 + b^2$ не делится на 3.

31.32. Заполните таблицу:

Число	Остаток от деления на 5				
n	0	1	2	3	4
$5n$					
$3n$					
$7n$					
n^2					
n^3					
$n^3 + n^2 + 2000n$					

31.33. Рассмотрите три утверждения:

а) сумма квадратов двух чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 3;

б) сумма квадратов двух чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 5;

в) сумма квадратов двух чисел делится на 7 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 7.

Два из них являются верными, а одно нет. Докажите верные утверждения и опровергните примером неверное утверждение.

31.34. Докажите, что дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами либо делится на 4, либо при делении на 4 дает в остатке 1.

31.35. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2003?

31.36. Найдите последнюю цифру числа:

а) $221^{132} + 255^{243} + 236^{637} - 359^{346}$;

б) $435^{435} + 616^{616} - 2337^4$.

31.37. Докажите, что остаток от деления числа на 2 равен остатку от деления его последней цифры на 2.

31.38. Докажите, что остаток от деления числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5.

31.39. Найдите остатки от деления на 5 чисел: 123; 167; 205; 20 009.

31.40. Докажите, что остаток от деления числа (не меньшего 100) на 4 равен остатку от деления на 4 числа, соответствующего двум последним цифрам данного числа.

31.41. Найдите остатки от деления на 4 чисел: 2345; 678; 3457; 2 323 232.

31.42. Докажите, что остаток от деления числа (не меньшего 100) на 25 равен остатку от деления на 25 числа, соответствующего двум последним цифрам данного числа.

31.43. Найдите остатки от деления на 25 чисел: 4554; 8775; 232 332; 345 609.

31.44. Докажите, что остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления суммы всех его цифр на 9.

31.45. Найдите остатки от деления на 9 чисел: 1372; 232 332; 5632; $\underbrace{111...111}_{\text{всего 256 единиц}}$.

31.46. Докажите, что остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы всех его цифр на 3.

31.47. Найдите остатки от деления на 3 чисел: 232 332; 768 900 001; $\underbrace{777...777}_{\text{всего 856 семерок}}$.

31.48. Докажите, что остаток от деления числа (большего 1000) на 8 равен остатку от деления на 8 числа, соответствующего трем последним цифрам данного числа.

31.49. Найдите остатки от деления на 8 чисел: 454 548; 1 234 567; $\underbrace{777...777}_{\text{всего 8226 семерок}}$.

31.50. Докажите, что найти остаток от деления числа на 11 можно следующим образом:

1) вычислить сумму всех его цифр в разрядах единиц, сотен, десятков тысяч и т. д.;
2) вычесть из нее сумму цифр в разрядах десятков, тысяч и т. д.;
3) если полученная разность положительна, то остаток от ее деления на 11 равен искомому остатку;
4) если полученная разность отрицательна, то остаток от деления ее модуля на 11 равен разности числа 11 и искомого остатка.

31.51. Найдите остатки от деления на 11 чисел: 3718; 7381; 1937; 9281; $\underbrace{777...777}_{\text{всего 856 семерок}}$; $\underbrace{333...333}_{\text{всего 3333 троек}}$.

31.52. Найдите остаток при делении на 9 суммы всех разных четырехзначных чисел, в записи каждого из которых есть только цифры 1; 5; 6; 7.

31.53. Найдите остаток при делении на 3 суммы всех различных четырехзначных чисел, в записи каждого из которых есть только цифры 0; 1; 6; 7.

31.54. Найдите остаток при делении на 9 суммы всех разных десятизначных чисел, в записи каждого из которых любая из 10 цифр есть ровно по одному разу.

31.55. Найдите остаток при делении на 4 суммы всех различных чисел, в записи каждого из которых есть 127 раз цифра 4 и один раз цифра 1.

31.56. В числе 23□47 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

а) делилось на 3;
б) делилось на 9;
в) делилось на 11.

31.57. В числе 233□4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

а) делилось на 4;
б) делилось на 9;
в) делилось на 11.

31.58. В числе 3423□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

а) делилось на 3 и на 2;
б) делилось на 3 и на 4;
в) делилось на 9.

31.59. В числе 735□4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

а) при делении на 3 давало в остатке 2;
б) при делении на 4 давало в остатке 2;
в) при делении на 11 давало в остатке 1.

31.60. В числе 7345□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

а) при делении на 9 давало в остатке 2;
б) при делении на 4 давало в остатке 3;
в) при делении на 25 давало в остатке 7;
г) при делении на 11 давало в остатке 10.

31.61. Докажите, что остаток от деления квадрата простого числа (большего пяти) на 30 равен либо 1, либо 19.

§ 32. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

32.01. Существуют ли такие числа a и b, что:
а) НОК $(a;\ b) = a$;
б) НОД $(a;\ b) = b$;
в) НОД $(a;\ b) =$ НОК $(a;\ b)$;
г) НОК $(a;\ b)$ не делится на НОД $(a;\ b)$;
д) НОК $(a;\ b) \cdot$ НОД $(a;\ b) > a \cdot b$;
е) НОК $(a;\ b) \cdot$ НОД $(a;\ b) < a \cdot b$?

32.02. Найдите НОД и НОК чисел **(32.02—32.08)**:
а) 154 и 210; г) 105 и 165;
б) 120 и 144; д) 240; 360 и 900;
в) 255 и 510; е) 156; 195 и 3900.

32.03. а) 154! и 210!; в) 225!; 88! и 510!;
б) 120! и 44!; г) 105!; 123! и 165!.

32.04. а) $\underbrace{111...111}_{\text{сто единиц}}$ и $\underbrace{111...111}_{\text{пятьдесят единиц}}$;

б) $\underbrace{333...333}_{\text{пятьдесят троек}}$ и $\underbrace{111...111}_{\text{сто пятьдесят единиц}}$.

32.05. а) $2^{14} \cdot 3^{7}$ и $2^{11} \cdot 3^{15}$;
б) $2^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^{7}$ и $2^{11} \cdot 5^{14} \cdot 7^{6}$;
в) $2^{124} \cdot 3^{7}$ и $2^{111} \cdot 5^{5}$;
г) $2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{16}$; $2^{9} \cdot 3^{14} \cdot 5^{26}$ и $2^{11} \cdot 3^{7} \cdot 5^{20}$.

32.06. а) 2^{14} и 25!; в) 3^{71} и 1891!;
б) 2^{100} и 100!; г) 5^{207} и 676!.

32.07. а) 6^{14} и 75!; б) 21^{100} и 1000!.

32.08. а) $134! - 1$ и 133; б) $255! - 9$ и 9009.

Для каждого натурального n найдите НОК и НОД следующих чисел **(32.09—32.11)**:

32.09. а) 5^{n} и 5^{n+2}; в) 7^{n^2} и 7^{n};
б) 6^{3n+2} и 5^{n+3}; г) 13^{5n} и 13^{7}.

32.10. а) n и $n + 1$; в) n и $n + 5$;
б) $n + 170$ и $n + 171$; г) n и $n + 6$.

32.11. а) $n^2 + n$ и $n + 1$; в) $n^3 + 1$ и n;
б) $n^3 + 1$ и $n + 1$; г) $n^2 + 1$ и $2n$.

32.12. Найдите все общие делители чисел a и b, если:
а) НОД $(a; b) = 7$; в) НОД $(a; b) = 625$;
б) НОД $(a; b) = 12$; г) НОД $(a; b) = 1$.

32.13. Найдите все трехзначные числа, кратные числам a и b, если:
а) НОК $(a; b) = 97$; в) НОК $(a; b) = 567$;
б) НОК $(a; b) = 213$; г) НОК $(a; b) = 1321$.

32.14. Найдите все пары двузначных чисел a и b ($a \geqslant b$) таких, что:
а) НОД $(a; b) = 23$; в) НОД $(a; b) = 24$;
б) НОД $(a; b) = 25$; г) НОД $(a; b) = 73$.

32.15. Найдите все пары двузначных чисел a и b ($a \geqslant b$) таких, что:
а) НОК $(a; b) = 13$; в) НОК $(a; b) = 37$;
б) НОК $(a; b) = 24$; г) НОК $(a; b) = 200$.

§ 33. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. РЕШЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ДЕЛИМОСТЬ

Найдите количество различных натуральных делителей числа **(33.01—33.04)**:

33.01. а) 1; в) 45; д) 80;
б) 12; г) 47; е) 120.

33.02. а) 2^5; б) $2^{13} \cdot 5$; в) $2^{99} \cdot 3^{99}$.

33.03. а) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$; б) $2^5 \cdot 6^7 \cdot 12^{11}$.

33.04. а) 4^{17}; б) 1001^{99}; в) 80^{23}; г) 120^{11}.

33.05. Найдите какое-либо пятизначное число, имеющее три делителя.

33.06. Найдите какое-либо четырехзначное число, имеющее пять делителей.

33.07. Докажите, что если натуральное число имеет 2001 делитель, то оно является полным квадратом. Попробуйте обобщить результат.

Представьте данное число в виде произведения степеней различных простых чисел **(33.08—33.10)**:

33.08. а) 20; г) 2002; ж) 13 860.
б) 680; д) 3125;
в) 946; е) 4500;

33.09. а) $6^3 \cdot 10^{11} \cdot 15^{27}$; б) $20^3 \cdot 250^{13} \cdot 75^{28}$.

33.10. а) 5!; б) 10!; в) 37!; г) (41)!.

33.11. Дано число 2001!.
а) Докажите, что это число делится на 3^{77}.
б) Найдите степень числа 3 в каноническом разложении данного числа.

33.12. Сколькими нулями заканчивается десятичная запись числа:
а) $2^{2003} \cdot 3^{724} \cdot 5^{831}$; б) $4^{20\,003} \cdot 15^{88\,888\,831}$?

33.13. Сколькими нулями заканчивается десятичная запись числа 2001!?

33.14. При каком наименьшем натуральном значении n десятичная запись числа $5^n \cdot 2001!$ заканчивается наибольшим количеством нулей?

Дополнительные задачи на делимость

33.15. При каких значениях a уравнение $ax^2 - (2a^2 + 5)x + 10a = 0$ имеет два разных натуральных корня?

33.16. При каких значениях a уравнение $ax^2 - (5 + a^2)x + 6a - 5 = 0$ имеет два различных натуральных корня?

33.17. Найдите все значения a, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2 + ax + \dfrac{4}{a-4} = 0$ — целые числа.

33.18. Найдите все значения a, при которых оба корня уравнения $(a + 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 5a - 4 = 0$ — целые числа.

33.19. Почему числа 21 125; 177 799 994 441 и $\underbrace{111...1114}_{\text{всего 256 единиц}}$ не являются полными квадратами?

33.20. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $19^n - 1$ делится на 18;

б) $3^{3n} - 1$ делится на 13;

в) $15^n + 6$ делится на 7;

г) $35^{2n} + 611^n - 2$ делится на 610.

33.21. Представьте данные дроби как сумму или разность двух дробей, знаменателями которых служат простые числа. Например: $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{3}{14} = \frac{5}{7} - \frac{1}{2}$ или $\frac{71}{105} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$.

а) $\frac{8}{15}$; в) $\frac{3}{35}$; д) $\frac{7}{30}$;

б) $\frac{7}{22}$; г) $\frac{20}{143}$; е) $\frac{13}{70}$.

33.22. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению:

а) $xy = 5$; в) $x^2 + 3xy = 12$;

б) $x^2 - y^2 = 8$; г) $x^2 + 3xy + 2y^2 = 20$.

33.23. Решите в целых числах уравнение:

а) $(x + 3)(y + 4) = 17$; в) $2x + 3y = 4 - xy$;

б) $4x + 3y = 5 - xy$; г) $x + y = xy$.

33.24. Докажите, что если пара целых чисел x_0 и y_0 является решением уравнения $ax + by = c$ с целыми коэффициентами, то и все пары чисел вида $(x_0 + b \cdot k;\ y_0 - a \cdot k)$, $k \in \mathbf{Z}$, являются его решением и наоборот — любая пара целых чисел, удовлетворяющих данному уравнению, может быть представлена в виде $x_0 + b \cdot k$; $y_0 - a \cdot k$, где k — некоторое целое число.

33.25. Подберите частные решения и затем решите в общем виде диофантово уравнение:

а) $x + y = 7$; в) $11x - 5y = 2$;

б) $3x + 7y = 13$; г) $3x + 7y = 19$.

33.26. Докажите, что уравнение $138x + 777\,111y = 569$ не имеет целых решений.

33.27. Докажите, что натуральное число, десятичная запись которого состоит из пяти 1 и двух тысяч трех 0, не может при делении на 11 давать в остатке 4 и 9.

33.28. Последняя цифра 2002-значного числа не равна 0. В этом числе последнюю цифру переставили на первое место и полученное число сложили с первоначальным. Докажите, что сумма делится на 11.

33.29. Решите уравнение в целых числах:

а) $2x + y + 3z = 1$;   в) $3x - 15y + 25z = 7$;

б) $2x + 3y + 6z = 11$;   г) $4x + 6y + 27z = 25$.

33.30. По григорианскому календарю (новый стиль) високосными являются годы, номера которых делятся на 4, но не заканчиваются двумя нулями, и годы, номера которых заканчиваются двумя нулями и делятся на 400 (например, 2100 год не будет високосным, а 2800 — будет). По юлианскому календарю (старый стиль) все годы, номера которых делятся на 4 — високосные.

Определите:

а) сколько високосных лет будет в третьем тысячелетии (2001—3000 гг.) по юлианскому календарю;

б) сколько високосных лет будет в третьем тысячелетии (2001—3000 гг.) по григорианскому календарю;

в) сколько дней будет составлять разница в 3001 году между юлианским и григорианским календарями, если в 2001 году эта разница составила 13 дней.

ГЛАВА

6 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 34. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

34.01. По данному стандартному виду многочлена найдите его степень. Выпишите набор всех его коэффициентов и найдите значение многочлена в данных точках:

а) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 10$; в точках -3; 1; 0;

б) $f(x) = -x^5 + 3x^4 - x^3 + x$; в точках -1; 3; 1.

34.02. Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $(x^3 - 3x - 7)(x^2 + 7x - 1)$;

б) $(x^4 - 3x^2 + 5x - 2)(x^3 + x^2 - x)$.

34.03. Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$; $\varphi(x) = 2x + 1$. Найдите и запишите в стандартном виде:

а) $f(x) \cdot \varphi(x)$; в) $f^3(x)$; д) $(2f(x) - x \cdot \varphi(x))^2$.

б) $f^2(x)$; г) $f(x) - \varphi^3(x)$;

34.04. При каких значениях a:

а) коэффициент при x^2 в стандартном виде многочлена $(x^3 - 3x + a)(x^2 - ax + 2)$ равен 0;

б) коэффициент при x^3 в стандартном виде многочлена $(x^2 - (a - 1)x + a)(x^2 + ax + 2)$ равен 7?

34.05. Докажите, что свободный член любого многочлена $f(x)$ равен $f(0)$.

34.06. Определите степень, старший коэффициент и свободный член многочлена:

а) $(3x^2 - x + 1)^{17} + (x^3 + 5x + 1)^{11}$;

б) $(x^6 - 2x + 64)^3 - (x^9 + x^8 - 512)^2$;

в) $(81x^4 - 36x^2 + 4)^5 - (9x^2 - 2)^{10} + (x - 1)^{13}$;

г) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1) - (x - 1)^{16}$.

34.07. Заполните таблицу:

Степень $f(x)$	Степень $g(x)$	Степень $f(x)+g(x)$	Степень $f(x)\cdot g(x)$	Степень $f^3(x)$
4	6			
	8			15
	3		8	
		2		9
		3	18	

34.08. Докажите, что сумма $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ всех коэффициентов многочлена $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ равна $f(1)$.

34.09. Докажите, что:

а) сумма всех коэффициентов при четных степенях многочлена $f(x)$ стандартного вида равна $0{,}5(f(1) + f(-1))$;

б) сумма всех коэффициентов при нечетных степенях многочлена $f(x)$ стандартного вида равна $0{,}5(f(1) - f(-1))$.

34.10. Для многочлена $f(x)$ найдите степень; свободный член; старший коэффициент; сумму всех коэффициентов; сумму всех коэффициентов при четных степенях; сумму всех коэффициентов при нечетных степенях:

а) $f(x) = (x + 1)^{17} - (x - 1)^{17}$;

б) $f(x) = (x^2 + x - 2)^{35}(x^2 - 3x - 4)^{15} - (x - 1)^2(x^3 + x + 2)^{65}$.

34.11. При каких значениях параметра a многочлен $(3a - 4)x^4 - 2x^3 + (2a - 1)x - 4$ будет:

а) приведенным;

б) многочленом четвертой степени;

в) многочленом третьей степени;

г) тождественно равным многочлену $2x^4 - 2x^3 - (a - 5)x - 6 + a$;

д) тождественно равным многочлену $-3x^4 - 2x^3 - (1 - 3a)x - a$;

е) принимать одинаковые значения при $x = 1$ и $x = -1$;

ж) иметь корень $x = -2$?

34.12. Выпишите все приведенные многочлены, являющиеся делителями многочлена $3(x - 1)^2(x + 5)$.

34.13. Произведите деление уголком:

а) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ на $x^2 - 3x - 1$;

б) $2x^5 - 3x^3 - x + 2$ на $x - 2$;

в) $x^3 + 2x^2 + x + 3$ на $2x^2 - 3x - 4$;

г) x^4 на $x^3 + x^2 + x + 1$.

34.14. Выпишите все приведенные многочлены третьей степени, являющиеся делителями многочлена $x^2(2x + 3)(x + 5)^3$.

34.15. Докажите, что многочлен $x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ делится без остатка на многочлен $2x^2 + 8x - 2$.

34.16. Докажите, что многочлен $x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 20x^2 + 21x - 18$ кратен многочлену $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$.

34.17. При каких значениях a и b:

а) многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на $x^2 - 3x + 2$;

б) многочлен $x^4 + 6x^3 + 5x^2 + ax + b$ делится на $x^2 - 3x + 4$;

в) многочлен $x^4 - 2x^3 + ax + 2$ делится на $x^2 + x + b$;

г) многочлен $x^4 + ax + b$ делится на $x^2 + ax + 1$?

34.18. Докажите, что многочлен $-5x^2 + 4x - 4$ является делителем многочлена $5x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8$.

34.19. Для многочленов $f(x)$ и $p(x)$ найдите такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$ и степень $r(x)$ меньше степени $p(x)$ либо $r(x)$ — нуль-многочлен.

	$f(x)$	$p(x)$
А	$3x^4 - 2x^3 + 7x - 3$	$x^2 - 3x - 2$
Б	$x^2 - 3x - 2$	$3x^4 - 2x^3 + 7x - 3$
В	$12x^7 - 3x^5 + 6x^4 - 9x^2 + 33$	$4x^7 - x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 11$
Г	$4x^7 - x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 11$	$12x^7 - 3x^5 + 6x^4 - 9x^2 + 33$
Д	$x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5x - 19$	$x - 1$
Е	$x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5x - 19$	$x + 1$
Ж	$x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5x - 19$	$7x - 7$
З	$x^3 - 5x + 3$	$3x - 1$
И	$3x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 2x - 1$	$3x - 1$
К	17	19

34.20. Покажите, что если $f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$ $(p(x) \neq 0)$, то алгебраическая дробь $\frac{f(x)}{p(x)}$ может быть представлена в виде $\frac{f(x)}{p(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p(x)}$.

34.21. Представьте алгебраическую дробь $\frac{f(x)}{p(x)}$ в виде суммы многочлена $q(x)$ и алгебраической дроби $\frac{f(x)}{p(x)}$ так, что степень $r(x)$ меньше степени $p(x)$:

а) $\frac{7x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 3}{x^2 + x - 2}$;

б) $\frac{3x^5 - 3x^2 - 12x + 4}{x + 3}$;

в) $\frac{6x^3 - 3x^2 + 2x + 3}{2x^3 + x - 1}$;

г) $\frac{x^{44} - 2}{x - 1}$;

д) $\frac{x^8 + 2}{x^4 + x^2 + 1}$.

34.22. Пусть $f(x) = x^3 + 6ax^2 - 6x + b$. Найдите все такие пары чисел a и b, что:

а) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 3$;

б) $f(1) = 36$ и $f(3) = 2$;

в) $f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$;

г) $f(x) = (x^2 - 7x + 1)(x - a)$;

д) остаток от деления $f(x)$ на $x - 1$ равен 5, а на $x + 2$ равен 0;

е) остаток от деления $f(x)$ на $x^2 - 2x$ равен $2x + 1$.

34.23. Найдите все такие числа a и b, что при любых допустимых значениях x выполняется равенство:

а) $a(3x - 1) + b(2x + 5) = 7$;

б) $3x - 7 = ax + b(x + 10)$;

в) $\frac{3x - 1}{x^2 - 9} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 3}$;

г) $\frac{1}{x^2 + 4x - 12} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 6}$;

д) $\frac{3x - 2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{a}{x + 4} + \frac{b}{x - 2}$;

е) $\frac{x}{2x^2 + x - 3} = \frac{a}{2x + 3} + \frac{b}{x - 1}$.

34.24. Пусть $f(x) = (x - 3) \cdot g(x) + 8$. Найдите $f(3)$.

34.25. Пусть $f(x) = (x + 2) \cdot g(x) + a$. Найдите a, если $f(-2) = 5$.

34.26. Пусть $f(x) = (3x - 1) \cdot g(x) + 5$. Найдите $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

34.27. Пусть $f(x) = (x^2 - 3x) \cdot g(x) + 2x + 1$. Найдите:

а) $f(0)$; б) $f(3)$.

34.28. Пусть $f(x) = (x^4 - 10x^2 + 9) \cdot g(x) + 5x^2 + 1$. Докажите, что $f(3) = f(-3)$.

34.29. Пусть многочлен $x^2 + px + q$ равен многочлену

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Выразите коэффициенты p и q через числа x_1 и x_2.

34.30. Пусть многочлен $ax^2 + bx + c$ равен многочлену

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Выразите коэффициенты a, b и c через числа x_1 и x_2.

34.31. Найдите остаток от деления $f(x)$ на двучлен $x - a$ и значение многочлена $f(x)$ при $x = a$:

а) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 11$; $a = -3$;

б) $f(x) = x^7 + 3x^6 - x^3 - 12x^2 + 1$; $a = -2$;

в) $f(x) = 3x^4 - x^2 + x - 31$; $a = 2$;

г) $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 100$; $a = -1$.

34.32. Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $kx - p$ ($k \neq 0$) равен значению этого многочлена в точке $x = \frac{p}{k}$.

34.33. Пусть для многочлена $f(x)$ выполнено $f(a) = r_1$, $f(b) = r_2$. Найдите остаток от деления этого многочлена на $(x - a)(x - b)$:

а) $f(2) = -3$, $f(-5) = 4$;

б) $f(-2) = 1$, $f(4) = 0$.

34.34. Пусть для многочлена $f(x)$ выполнено $f(a) = r_1$, $f(b) = r_2$. Найдите остаток от деления этого многочлена на $k(x - a)(x - b)$ ($k \neq 0$):

а) $f(-7) = 13$, $f(1) = -3$;

б) $f(-1) = 1$, $f(4) = 15$.

34.35. Пусть остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - 2$ равен 3, на $x + 1$ равен 2, на $x + 3$ равен 0. Найдите остаток от деления этого многочлена на:

а) $(x - 2)(x + 3)$; в) $x^2 + 4x + 3$;

б) $7(x - 2)(x + 1)$; г) $(x - 2)(x + 3)(x + 1)$.

34.36. Пусть остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 + 2x - 8$ равен $3x + 2$. Найдите остаток от деления этого многочлена на:

а) $x - 2$; б) $x + 4$; в) $4x^2 + 8x - 32$.

34.37. Пусть остаток от деления многочлена $f(x)$ на $3x^2 - x - 2$ равен $2x + 1$. Найдите остаток от деления этого многочлена на:

а) $x - 1$; б) $3x + 2$; в) $9x^2 - 3x - 6$.

34.38. Пусть остаток от деления многочлена $f(x)$ на $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ равен $3x^2 - x + 4$. Найдите $f(-1) + f(2) \cdot f(-1{,}5)$.

34.39. Пусть остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - x - 2$ равен $x - 3$ и $f(-5) = -8$. Найдите остаток от деления этого многочлена на $x^2 + 6x + 5$.

34.40. Найдите корни многочлена:

а) $13x + 2$; в) $9x^2 - 6x + 1$;

б) $3x^2 + x$; г) $64x^5 - 16x^4 + x^3$.

34.41. Докажите, что 1 является корнем данных многочленов, разложите их на множители и найдите все их корни:

а) $x^2 + 5x - 6$; в) $8x^2 - x - 7$;

б) $3x^2 + 5x - 8$; г) $-7x^2 + x + 6$.

34.42. Найдите целые корни и разложите на множители многочлен:

а) $x^2 + 6x - 7$; г) $x^2 - 7x + 12$;

б) $x^2 - 3x - 4$; д) $x^2 + x - 12$;

в) $-x^2 + 5x - 6$; е) $x^3 + 5x^2 - 6x$.

34.43. Докажите, что корнями многочлена $f(x) = 3x^2 + x - 4$ являются 1 и $-\frac{4}{3}$. Найдите корни многочлена:

а) $f(2x)$; в) $f(x - 5)$; д) $f\left(\frac{1}{x}\right)$;

б) $f(x + 3)$; г) $f(3x + 1)$; е) $f\left(\frac{2x}{x - 1}\right)$.

34.44. При каких значениях a многочлен $f(x)$ имеет ровно три различных корня:

а) $f(x) = 3(x + 5)(x - 7)(x + 1)(x - a)$;

б) $f(x) = (2x - a)(x + a)(x - 4)$;

в) $f(x) = (x - a)(x + 2)(x^2 - x)$;

г) $f(x) = (x - a)^2(x + 2)(x^2 + 6x + 5)$?

34.45. При каких значениях a многочлены имеют корни кратности больше 1? Для всех найденных a укажите кратные корни заданных многочленов:

а) $(2x + 5)(3x - 1)(x - a)(x - 2a)$;

б) $(x^2 + 2x - 3)(x + a)$;

в) $(2x^2 - 5x + 2)(x - a)(x + 2a)$;

г) $(x^2 - 5x + 6)(x - a)(x - 3a + 4)$;

д) $(3x^2 + 2x + 11)(x - 2a + 3)(x + 15 + a)$;

е) $(2x^2 - 19x + 30)(x^2 - 2x + ax - 2a)$.

34.46. Найдите целые корни многочлена; в ответе укажите множество целых корней многочлена и кратность всех его целых корней кратности больше 1:

а) $x^3 - 4x^2 + x + 6$;

б) $x^4 - 5x - 6$;

в) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x + 2$;

г) $x^3 + 3x - 234$.

34.47. Запишите в таблице разложение на множители приведенного многочлена указанной степени с корнями данной кратности.

Степень многочлена	Корни кратности 1	Корни кратности 2	Корни кратности 3	Корни кратности 4	Разложение многочлена
7	1; −3; 5			2	
12	0	−2; 3	$\sqrt{3}$	0,7	
8		9	π; −0,3		
5		2	−3		

34.48. Представьте алгебраическую дробь в виде суммы многочлена и дробей вида $\frac{A_n}{x^n}$:

а) $\frac{3x^3 - 5x^2 + x - 3}{x}$; в) $\frac{3x^3 - 5x^2 + x - 3}{x^3}$;

б) $\frac{3x^3 - 5x^2 + x - 3}{x^2}$; г) $\frac{3x^3 - 5x^2 + x - 3}{x^4}$.

34.49. Представьте данную функцию в виде суммы многочлена и дробей вида $\frac{A_n}{x^n}$ и найдите ее приближенное значение до целых при указанных значениях x:

а) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x}$; $x = 10$; $x = 0{,}01$;

б) $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x + 3}{x^2}$; $x = 100$; $x = 0{,}01$.

34.50. Представьте в виде суммы многочлена и дроби вида $\frac{A}{x - a}$ алгебраическую дробь:

а) $\frac{x^2 + 7x + 3}{x - 1}$; в) $\frac{3x^3 + 5x^2 + 3x - 12}{x - 2}$;

б) $\frac{5x^2 - x}{x + 3}$; г) $\frac{7x^{13} + 7x^2 + 3}{x + 1}$.

34.51. Представьте данную функцию в виде суммы многочлена и дроби вида $\frac{A}{x - a}$ и с точностью до целых вычислите приближенные значения функции в указанных точках:

а) $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 1}{x - 1}$; $x = 100$; $x = 1{,}001$;

б) $f(x) = \frac{5x^2 + 3x - 7}{x + 3}$; $x = -100$; $x = -2{,}99$.

34.52. Представьте в виде суммы многочлена и дробей вида $\frac{A}{x - a}$ и $\frac{B}{(x - a)^2}$ алгебраическую дробь:

а) $\frac{x^2 + 7x + 3}{(x - 1)^2}$; в) $\frac{11x^3 + 3x^2 + 7x - 1}{(x - 2)^2}$;

б) $\frac{5x^3 - x^2 + 1}{(x + 3)^2}$; г) $\frac{x^7 + 5x + 3}{(x + 1)^2}$.

34.53. Представьте в виде суммы многочлена и дробей вида $\frac{A_n}{(x-a)^n}$ алгебраическую дробь:

а) $\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3}$;   в) $\frac{2x^3+3x^2-5x+1}{(x-2)^4}$;

б) $\frac{5x^3-2x^2+5}{(x+3)^3}$;   г) $\frac{x^7+5x^3-x+3}{(x+1)^5}$.

Найдите такие a и b, при которых при всех значениях x выполняется равенство **(34.54—34.57)**:

34.54. а) $a(x-5)+b(x+3)=2x+11$;

б) $(x+4)+bx=3x-17$;

в) $a(x+11)+b(x-3)=2x$;

г) $a(x+22)+b(x-5)=3x$.

34.55. а) $(x-a)\cdot(x-3)=bx^2-8x+15$;

б) $(x-a)\cdot(x-b)=bx^2-9x+8$;

в) $(x-a)\cdot(x-b)=x^2+7x+10$;

г) $(x-a)\cdot(x-b)=x^2-49$;

34.56. а) $\frac{x}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$;   в) $\frac{1}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$;

б) $\frac{2x+3}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$;   г) $\frac{13-17x}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$.

34.57. а) $\frac{3}{x^2-4x}=\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x}$;   в) $\frac{1}{(x-4)(x+2)}=\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+2}$;

б) $\frac{2x+3}{x^2+4x}=\frac{a}{x+4}+\frac{b}{x}$;   г) $\frac{13-17x}{(x-3)(x+2)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}$.

34.58. Найдите такие a, b и c, при которых при всех значениях x выполняется равенство:

а) $\frac{3}{x^3-4x^2}=\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$;

б) $\frac{2x+3}{x^3+4x^2}=\frac{a}{x+4}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$;

в) $\frac{x^2}{(x-4)(x+2)^2}=\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$;

г) $\frac{3-x}{x^3-6x^2+x}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{(x-3)^2}+\frac{c}{x}$.

34.59. Представьте дробь $\frac{1}{x(x+1)}$ в виде суммы дробей вида $\frac{a}{x+1}$ и $\frac{b}{x}$ и вычислите сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$.

34.60. Вычислите $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{999 \cdot 1001}$.

34.61. Вычислите $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{3002 \cdot 3005}$.

§ 35. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решите уравнение **(35.01—35.03)**:

35.01. а) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$;
б) $3x^3 - 8x^2 + 14x = 0$;
в) $x^4 + 11x^3 - x^2 = 0$;
г) $(2x - 3)^3 = 1 - 7(5x + 2)^2$.

35.02. а) $(2x - 1)^4 - x^2 = 0$;
б) $(8x + 3)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$;
в) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = (7x + 1)^2$;
г) $x^4 - x^2 + 2x = 1$.

35.03. а) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;
б) $5x^3 - 15x^2 - x + 3 = 0$;
в) $x^8 + 11x^5 - 32x^3 - 352 = 0$;
г) $x^3 - 2x^2 + x = (x^2 - 2x + 1)^2$.

35.04. При каких значениях a имеет ровно три различных корня уравнение:
а) $(x + 5)(x - 7)(x + 1)(x - a) = 0$;
б) $(ax^2 + 5x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$;
в) $(x^2 - (a + 1)x + a)(x^2 - x - a) = 0$;
г) $(3x^2 + x - a)(2x + a) = 0$?

35.05. Найдите все значения параметра a, при которых данное число p является корнем данного уравнения и для каждого такого a решите это уравнение:
а) $x^3 + 3x^2 - 7x + a = 0$, $p = 2$;
б) $2x^3 - 5x^2 + ax - 4 = 0$, $p = -1$;
в) $x^3 - ax^2 - 5x + 4 = 0$, $p = 1$;
г) $ax^3 - 3x^2 - 5x - a^2 = 0$, $p = -1$.

35.06. Найдите целые корни уравнения:

а) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$;

б) $x^4 - 5x - 6 = 0$;

в) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x + 2 = 0$.

35.07. Докажите, что нет целых решений у уравнения:

а) $x^{13} - 131 = 0$;

б) $3x^5 - 2x + 2 = 0$;

в) $x^5 + 7x^4 - 5x + 79 = 0$;

г) $3x^{14} + 12x^{10} + 2x^6 + 7x^4 + 11x^2 + 120 = 0$.

35.08. Найдите рациональные корни уравнения:

а) $2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = 0$;

б) $2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0$.

35.09. Докажите, что нет рациональных решений у уравнения:

а) $7x^{15} - 13 = 0$; б) $3x^7 - x + 1 = 0$.

35.10. Докажите, что число $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ является решением уравнения $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ и на основании этого факта докажите, что число $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ — иррациональное.

35.11. Найдите все такие значения параметра a, при которых многочлен $x^3 - 3x^2 + ax - 1$ имеет хотя бы один целый корень. Для каждого такого a найдите количество разных целых корней.

35.12. Найдите все такие значения параметра a, при которых многочлен имеет хотя бы один рациональный корень. Для каждого такого a найдите количество разных рациональных корней:

а) $x^3 + ax^2 - 3x + 2$; б) $3x^3 - ax - 1$.

35.13. Найдите все такие значения параметров a и b, при которых все действительные корни многочлена $x^3 + ax^2 + bx + 2$ — целые числа. Для каждой такой пары a и b найдите эти корни.

Решите уравнение (**35.14, 35.15**):

35.14. а) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; в) $x^4 - 9x^2 - 10 = 0$;

б) $x^4 - 7x^2 + 3 = 0$; г) $x^4 - 12{,}3x^2 + 245 = 0$.

35.15. а) $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$; б) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

35.16. Вычислите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если:

а) $x + \frac{1}{x} = 3$; б) $x + \frac{1}{x} = t$.

35.17. Вычислите значение выражения $9x^2 + \frac{4}{x^2}$, если:

а) $3x + \frac{2}{x} = -5$; в) $3x - \frac{2}{x} = -3$.

б) $3x + \frac{2}{x} = t$;

35.18. Вычислите значение выражения $x^3 + \frac{1}{x^3}$, если:

а) $x + \frac{1}{x} = -3$; б) $x + \frac{1}{x} = t$.

Решите уравнение (**35.19—35.22**):

35.19. а) $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 10 = 0$;

б) $2x^2 + \frac{2}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 6 = 0$;

в) $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$;

г) $2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 2 = 0$.

35.20. а) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 12 = 0$;

б) $4x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{1}{x} - 8 = 0$;

в) $4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x + 1 = 0$;

г) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 4 = 0$;

д) $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x - \frac{1}{x} - 10 = 0$.

35.21. а) $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 + 3x - \frac{2}{x} - 2 = 0$;

б) $9x^2 + \frac{4}{x^2} + 3x - \frac{2}{x} - 14 = 0$;

в) $9x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 2x + 4 = 0$.

35.22. а) $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$;

б) $2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 7x + 2 = 0$;

в) $9x^4 - 9x^3 - 16x^2 - 6x + 4 = 0$;

г) $25x^4 - 50x^3 + 14x^2 + 10x + 1 = 0$.

35.23. Пусть $x^2 + 5x + 4 = 17$. Вычислите

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$$

и решите уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 360$.

Решите уравнение (**35.24, 35.25**):

35.24. а) $4(x^2 - x)^2 + 9x^2 = 9x - 2$;

б) $(2x^2 - x + 1)^2 - 4x^2 = 1 - 2x$.

35.25. а) $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$;

б) $(x^2 - 2x - 1)^2 + 3(x - 1)^2 = 16$;

в) $(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 63$;

г) $(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 8x + 7) = 63$.

35.26. Выразите a через b, если $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ и решите каждое из уравнений:

а) $(2x + 3)^2 - 3(2x + 3)(7x - 5) + 2(7x - 5)^2 = 0$;

б) $(3x - 2)^2 - 3(3x - 2)(7 - 5x) + 2(5x - 7)^2 = 0$;

в) $(x^2 - x + 3)^2 - 3(x^2 - x + 3)(10x - 1) + 2(10x -1)^2 = 0$;

г) $(2x^2 - x - 6)^2 - 3(2x^2 - x - 6)(x^2 + 10x - 6) +$
$+ 2(x^2 + 10x - 6)^2 = 0$.

Решите уравнение (**35.27—35.29**):

35.27. а) $2y^4 - y^2(y - 2) - 3(y - 2)^2 = 0$;

б) $(t^2 + 2t)^2 - (t + 2)(2t^2 - t) = 6(2t - 1)^2$;

в) $(x^2 + 6x - 9)^2 + x(x^2 + 4x - 9) = 0$;

г) $(z^2 - z)(z^2 - 5z + 6) = 15z^2 - 45z + 90$.

35.28. а) $(x + 1)^4 + (x - 1)^4 = 82$;

б) $(3x + 2)^4 + (3x - 2)^4 = 626$.

35.29. а) $(x + 2)^4 + x^4 = 82$;

б) $(x + 3)^4 + (x - 1)^4 = 32$;

в) $(5x - 3)^4 + (5x - 1)^4 = 82$.

35.30. Выберите подходящий способ и решите уравнение:

а) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$;

б) $7x^6 - 3x^3 - 10 = 0$;

в) $x^5 + 3x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$;

г) $(2x^2 - 3x + 1)^2 - 5(2x^2 - 3x + 1)(x^2 + x + 3) +$
$+ 4(x^2 + x + 3)^2 = 0$;

д) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$;

е) $(x - 3)^4 + (x + 1)^4 = 32$.

35.31. Для каждого значения a решите уравнение

$$x^3 - (4 + a)x^2 + 5ax - a^2 = 0.$$

35.32. При каких значениях параметров a и b имеют единственный действительный корень уравнения:

а) $x^6 + ax^2 + b = 0$;

б) $x^6 - ax^4 + 16x^2 + b = 0$;

в) $x^6 - (a - 3)x^4 - 3ax^2 + b = 0$?

§ 36. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение (36.01—36.09):

36.01. а) $\dfrac{x + 1}{x - 5} + \dfrac{2x + 2{,}5}{x + 2} = \dfrac{3x - 8}{x + 1}$;

б) $\dfrac{3x - 9}{x - 1} + \dfrac{x + 6}{x + 1} = 3$.

36.02. а) $\dfrac{2}{x + 2} + \dfrac{3}{x - 3} = \dfrac{2}{x + 4} + \dfrac{3}{x - 6}$;

б) $\dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{4}{x + 2} = \dfrac{9}{x + 4} - \dfrac{2}{x + 2}$.

36.03. а) $\dfrac{x\sqrt{5} - 4}{3x - \sqrt{5}} = \dfrac{2x - \sqrt{5}}{3x\sqrt{5} - 5}$; б) $\dfrac{2x - \sqrt{3}}{x\sqrt{3} + 2} = \dfrac{2x\sqrt{3} - 3}{4x + \sqrt{3}}$.

36.04. а) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2x - 3}{x - 1} + \dfrac{3x - 1}{2(x - 1)} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{x^2 + 2}{3x - 2}$;

б) $\dfrac{\dfrac{1}{1 + x}}{1 - \dfrac{1}{1 + x}} + \dfrac{\dfrac{1}{1 + x}}{\dfrac{x}{1 - x}} + \dfrac{\dfrac{1}{1 - x}}{\dfrac{x}{1 + x}} + \dfrac{3}{2x} = 0$.

36.05. а) $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2-x}{x+1}+\dfrac{3}{x-4}$;

б) $\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{x}{2x-1}$.

36.06. а) $\dfrac{4x-6}{x+2}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{9}{(x+1)(x+2)}$;

б) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$.

36.07. а) $(x-1)\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)=0$;

б) $x\left(1+\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}\right)=0$.

36.08. а) $\dfrac{1}{x^2+2x+4}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+4}{x^3-8}$;

б) $\dfrac{x^2+3x+9}{x^3+27}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2}{x^2-3x+9}$.

36.09. а) $\dfrac{x^2-4}{x^3-27}=\dfrac{1-2x}{27-x^3}$; б) $\dfrac{4x+3}{x^3+8}=\dfrac{x-2x^2+5}{8+x^3}$.

36.10. Найдите все неотрицательные решения уравнения:

а) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-3}=x$; б) $\dfrac{x^2}{2x-1}-x=\dfrac{6x}{x-5}$.

36.11. Найдите все положительные решения уравнения:

а) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x^2-x-4}-\dfrac{x}{x^2-x-4}$;

б) $\dfrac{x+2}{2x-1}-\dfrac{4}{2x-1}=-\dfrac{x}{x^2-2x-6}+\dfrac{2}{x^2-2x-6}$.

36.12. Найдите все решения уравнения, принадлежащие отрезку $[-0{,}5;\ 2]$:

а) $\dfrac{7}{x+2}+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{7}{x-2}$;

б) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x}{(x+1)^2}+\dfrac{x+1}{x^2}$.

36.13. Решите уравнение:

а) $\dfrac{6}{(x+1)(x-3)}-\dfrac{24}{(x+2)(x-4)}=1$;

б) $2\left(\dfrac{x^4+1}{x^2}\right)-3\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=1$.

Решите уравнение (36.14—36.23):

36.14. а) $\frac{40}{4-x^2}+\frac{7-2x}{x+2}=\frac{x+3}{2-x}$;

б) $\frac{x}{x+1}-\frac{9x+13}{x^2-2x-3}=\frac{5}{3-x}$.

36.15. а) $\frac{3x}{x+2}+\frac{x+1}{2x-1}=3$;

б) $\frac{3x^2-6x}{x^2-2x+2}+\frac{x^2-2x+1}{2x^2-4x-1}=3$;

в) $\frac{\frac{3x}{x^2+5}}{\frac{x}{x^2+5}+2}+\frac{\frac{x}{x^2+5}+1}{\frac{2x}{x^2+5}-1}=3$;

г) $\frac{3|x+1|}{|x+1|+2}+\frac{|x+1|+1}{2|x+1|-1}=3$.

36.16. а) $\frac{126x^2}{16-9x^2}+\frac{11}{3x-4}=\frac{49}{3x+4}$;

б) $\frac{6-5x}{1-25x^2}-\frac{5x+3}{5x-25x^2}=\frac{5(x+1)}{5x+25x^2}$;

в) $\frac{11x-3}{121x^2+44x+9}+\frac{121x^2+44x+9}{11x-3}=-2$;

г) $\frac{51x}{17x-1}-\frac{34x}{17x+2}=\frac{51x-6}{289x^2+17x-2}$.

36.17. а) $\frac{2x+7}{x^2+9x+14}+\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}$;

б) $\frac{3x^2}{18x^2+9x+1}-\frac{7x^2+2x}{6x^2-5x-1}=\frac{x}{3x+1}$;

в) $\frac{25}{x^2+1}+\frac{4x-29}{x^4-1}=\frac{5-9x}{1-x+x^2-x^3}$;

г) $\frac{2x^2-x^3}{3x^3+2x^2+12x+8}+\frac{2x^2+x^3}{3x^3+2x^2-12x-8}=\frac{x^4}{x^4-16}$.

36.18. а) $\frac{8}{x^3+8x^2+x}-\frac{6}{x^3+7x^2-7x-1}=\frac{1}{x^2-x}$;

б) $\frac{x^2-x^3-x}{x^3-x^2+x-1}+\frac{x^2+x^3+x}{x^3+x^2+x+1}=\frac{x^2+2x}{1-x^2}$;

в) $\frac{38}{x^4-x^2+20x-100}+\frac{x+10}{x^2-x+10}=\frac{x+10}{x^2+x-10}$;

г) $\frac{6x}{27x^3+1}+\frac{1}{81x^4-9x^2+6x-1}=\frac{2}{9x^2+3x-1}$.

36.19. а) $x^2 - 5x + 6 = 15 \cdot \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - x}$;

б) $x^2 - 10x + 24 = \dfrac{x^2 - 6x - 12}{x^2 - 2x}$;

в) $(x^2 - 2x)^2 - (2 - x)(2x^2 + x) = 6(2x + 1)^2$;

г) $\left(\dfrac{1 - 3x}{1 + 3x}\right)^2 + \dfrac{4 - 12x}{3x} + 3 \cdot \left(\dfrac{1 + 3x}{3x}\right)^2 = 0$.

36.20. а) $\dfrac{9x^2 + 4}{3x} + \dfrac{3x}{9x^2 + 9x + 4} + 5{,}5 = 0$;

б) $\dfrac{4(x^2 + 1)}{x^2 + 10x + 1} + \dfrac{5x}{x^2 + 1} + \dfrac{7}{2} = 0$.

36.21. а) $\dfrac{(x^2 + 6x - 9)^2}{x^2 + 4x - 9} + x = 0$;

б) $\dfrac{x^2 + 12x + 15}{x^2 + 6x + 15} + \dfrac{4x}{x^2 + 10x + 15} = 0$.

36.22. а) $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$;

б) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(2 + x)^2} = \dfrac{10}{9}$.

36.23. а) $2\left(\dfrac{x - 1}{x + 2}\right)^2 - \left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right)^2 = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$;

б) $\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{x + 5}\right)^2 = \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 + 4x - 5}$.

36.24. Являются ли данные уравнения равносильными:

а) $\dfrac{2}{4x^2 - 2x + 1} = \dfrac{1}{1 + 2x} + \dfrac{4x - 1}{8x^3 + 1}$ и $|4x - 1| = 3$;

б) $\dfrac{2x^2}{x^2 - x + 1} = \dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^3 + 1}$ и $\left|\dfrac{x - 2}{x}\right| = 3$?

Для каждого значения параметра a решите уравнение **(36.25, 36.26)**:

36.25. а) $\dfrac{x^2 + (3a + 1)x + 2a + 2a^2}{(x - 1)(x + 2)} = 0$;

б) $\dfrac{x^2 - (2a + 1)x + a + a^2}{x(x - 2)} = 0$.

36.26. а) $\dfrac{x^2 + ax + 4 - a}{x(x + 1)} = 0$; б) $\dfrac{x^2 + 3ax - a + a^2}{(x - 1)(x - 2)} = 0$.

§ 37. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЯМИ

Решите уравнение (37.01—37.13):

37.01. а) $|x - 3| = 4$;

б) $|3x + 1| = 5 - 3{,}(8)$;

в) $|2x + 5| = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 3{,}2$.

37.02. а) $(x - 2)\left(|x| + \sqrt{3} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$;

б) $(|x - 2| - 14)\left(1 - \sqrt{7 - x}\right) = 0$;

в) $(|x - 2| - 14)\left(1 - \sqrt{7 - |x|}\right) = 0$;

г) $(|x - 2| - 7)\left(1 - \sqrt{7 - |x|}\right) = 0$.

37.03. $\dfrac{|2x - 3| - 1}{3x^2 + 5x - 8} = 0$.

37.04. а) $(4x - 7)^2 = |4x - 7|$;

б) $|x^3 - 3x - 5| = 5$;

в) $|3x^2 - 3x - 5| = 10$;

г) $|x^2 - 6x - 3| = 12$.

37.05. а) $x^2 - 6|x| + 5 = 0$;

б) $x^2 + 5x + |x + 5| = 0$;

в) $13x^2 + 8|x| - 5 = 0$;

г) $5(3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 1 = 0$.

37.06. $0{,}5x^2 + x + \dfrac{|x|}{x} + 1 = 0$.

37.07. $\Big|x - \big|x - |2x + 3|\big|\Big| = 3$.

37.08. $\Big|\big||x| - 2\big| - 2\big| - 2\Big| = 1$.

37.09. а) $|2 - 3x| = |2x + 3|$;

б) $|8x - 3| = |9 - x|$.

37.10. а) $3|2x - 3| = 5|7 - x|$;

б) $(3x - 1)|6x - 1| = (6x - 2)|x|$.

37.11. а) $\frac{|2x - 3|}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{|5 - 3x|}{3x^2 - 5x - 2}$;

б) $\frac{|2x - 3|}{3x^2 - 5x + 2} = \frac{|3 - 2x|}{x^2 - 4x - 2}$;

в) $\frac{|2x - 7|}{3x^2 - 5x + 2} = \frac{|3{,}5 - x|}{4x^2 - 4x - 2}$;

г) $\frac{|4x - 4|}{3x^2 - 5x + 6} = \frac{|1 - x|}{x^2 - 4x + 4}$.

37.12. а) $(3x - 1)^2 - 5|12x^2 + 17x - 7| + 4(4x + 7)^2 = 0$;
б) $2(3x + 2)^2 - 5|3x^2 - 13x - 10| + 2(x - 5)^2 = 0$.

37.13. а) $|x^2 + x + 1| = |x^2 + 3x + 7|$;
б) $|x^2 + 3x - 7| = |3x^2 - 5x + 1|$.

37.14. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = |7x^2 - x + 3|$ и $g(x) = (2 - 5x)^2$.

37.15. Покажите, что уравнение $|3x^2 - x - 4| = -x^2 + 4x - 4{,}05$ не имеет решений.

37.16. Решите уравнение:
а) $|3x - 1| = 2x + 11$;
б) $|4x + 3| = 5x + 1$;
в) $|5x - 3| = 2x - 7$;
г) $|x^2 - 3x - 5| = x^2 - 7x - 1$.

37.17. Постройте график функции $y = |x - 2|$. Напишите уравнения каких-либо двух прямых, проходящих через точку $M(0; 4)$, одна из которых имеет с построенным графиком одну общую точку, а другая — две общие точки. Найдите координаты этих точек.

37.18. Постройте график функции $y = |x + 3|$. Напишите уравнения каких-либо двух прямых, проходящих через точку $M(0; 1)$, одна из которых имеет с построенным графиком одну общую точку, а другая — две общие точки. Найдите координаты этих точек.

37.19. Постройте график функции $y = |3x - 1|$. Напишите уравнения каких-либо двух прямых, проходящих через точку $M(1; -2)$, одна из которых имеет с построенным графиком одну общую точку, а другая — не менее трех общих точек.

37.20. Решите уравнение $|x^2 + 3x + 4| + |x^2 - 4x + 5| = 10|x|$.

Решите уравнение (37.21—37.31):

37.21. а) $|2x + 5| = |x| + 2$; б) $|3x - 1| + |3x - 2| = 2$.

37.22. а) $|x - 6| + |x - 3| = 3$;

б) $|x + 3| + |x - 1| = 2x + 1$;

в) $|x + 3| + |x - 1| = 2x + 4$;

г) $|x + 3| + |x - 1| = 2x + 10$.

37.23. а) $|x + 3| - |x - 1| = 2x + 7 + \frac{5x}{|x|}$;

б) $|x + 3| - |x - 1| = 3|x| - x + 2$;

в) $|x + 3| - |x - 1| = x + 2$;

г) $0,5(|x + 3| - |x - 1|) = |x + 4| - 3$.

37.24. а) $|t^2 - 4| + |t^2 - 9| = 2$;

б) $|t^2 - 4| + |t^2 - 9| = 13$;

в) $|t^2 - 4| + |t^2 - 9| = 5$;

г) $|t^2 - 4| - |t^2 - 9| = 5$.

37.25. а) $|5x - 2| - |7x - 3| + 2x = 1$;

б) $|x + 1| + |2x + 1| = 2|x|$;

в) $|x| - 2|x - 1| + 3|2x + 4| = 1$;

г) $||x - 4| + 2x| + 3x + 1 = 0$.

37.26. $|x^2 + 3x - 7| + |x^2 - 6x + 7| = 5x$.

37.27. $||4 - x^2| - x^2| = 1$.

37.28. $(3x - 1)|2 - x| = |3x - 1|(2 - x)$.

37.29. а) $\frac{|x - 2|}{|x - 1| - 1} = 1$; б) $\frac{|x - 3| + |x - 1|}{|x - 2| + |x - 4|} = 1$.

37.30. $\frac{|x - 3| + |x - 1|}{|x - 2,5| + |x - 3,5|} = 2$.

37.31. а) $\frac{|x| + |x + 1| - 1}{|x| - |x - 2| + 2} = 1$; б) $\frac{|x^2 + x| + 1}{|x - 1| - x^2} = 1$.

37.32. Найдите (устно) произведение всех корней уравнения

$$|x^2 - 5x - 3| + |x^2 - x - 4| = 5 + |x - 2|.$$

37.33. Докажите, что число -1 является корнем уравнения

$$|x^4 + 5x^2 - 3| + |3x^4 - 8x^2 - 5| = 13\left(\frac{2}{|x|} - x^6\right),$$

и найдите сумму всех корней этого уравнения.

Решите уравнение (**37.34—37.38**):

37.34. а) $|x^2 - 4x - 1| + |x^2 - 101x| = |2x^2 - 105x - 1|$;

б) $|x^2 - 4x - 1| + |x^2 - 101x| = 2x^2 - 105x - 1$.

37.35. а) $|x^2 - 4x - 1| + |x^2 - 101x| = -2x^2 + 105x + 1$;

б) $|x^2 - 4x - 1| - |x^2 - 101x| = |97x - 1|$.

37.36. а) $|x^2 - 4x - 1| - |x^2 - 101x| = 97x - 1$;

б) $|x^2 - 4x - 1| - |x^2 - 101x| = 1 - 97$.

37.37. а) $|x^2 + 3x - 10| + 2|3x^2 - x - 10| + \sqrt{x^3 - 4x} = 0$;

б) $|x^2 + 3x - 10| + 2|3x^2 - x - 10| + \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.

37.38. $||x - 3| + 7| + \sqrt{x^2 - 6x + 18} = 10$.

§ 38. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение (**38.01—38.03**):

38.01. а) $\sqrt{x + 7} = 1$;

б) $\sqrt{x^2 + x + 30} = 6$;

в) $\sqrt{2x - 9} = -1$;

г) $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

38.02. а) $(x^2 - 1) \cdot \sqrt{2x - 1} = 0$;

б) $\sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$;

в) $(16 - x^2) \cdot \sqrt{3 - x} = 0$;

г) $(x + 8) \cdot \sqrt{5 - |x - 2|} = 0$.

38.03. а) $(x - 2) \cdot \sqrt{x + 2} = x - 2$;

б) $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{2x + 11} = 9 - x^2$;

в) $(x - 3) \cdot \sqrt{1 - x} = x - 3$;

г) $(x^2 + x - 2) \cdot \sqrt{x - 4} = 2 - x - x^2$.

38.04. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+5}$;

б) $\sqrt{2x^2+15x-2}=\sqrt{x^2+14x+10}$;

в) $\sqrt{-1-2x}=\sqrt{x^2-36}$;

г) $\sqrt{|x-1|+5}=\sqrt{x^2-16}$.

38.05. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $\sqrt{x+4+2a}=\sqrt{-x+2}$;

б) $\sqrt{2x+a-2}=\sqrt{x^2-1}$;

в) $\sqrt{x-1-a}=\sqrt{2a^2-x}$;

г) $\sqrt{x^2+3a^2+ax-1}=\sqrt{-1-3ax}$.

Решите уравнение (38.06—38.09):

38.06. а) $\sqrt{x^2-4x}=x-4$;

в) $\sqrt{2x^2+x}=2x+1$;

б) $\sqrt{-x^2-8x-12}=x+4$;

г) $\dfrac{\sqrt{x^2+x-4}+3x+11}{x+5}=1$.

40.07. а) $\sqrt{-x^2-4x+6}=x+4$;

б) $\sqrt{-x^2+6x-5}=2x-6$;

в) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;

г) $\dfrac{\sqrt{x^2+3x-9}+5-2x}{x-1}=2$.

38.08. а) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$;

б) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-5}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-5}$;

в) $\sqrt{x+1}+\dfrac{2-x}{\sqrt{x+4}}=\sqrt{x+4}$;

г) $\sqrt{x^2-1}+\dfrac{14-4x^2}{\sqrt{2x^2+5}}=\sqrt{2x^2+5}$.

38.09. а) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x-2}$;

б) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}$;

в) $\dfrac{\sqrt{7x-2}}{3x+2}=\dfrac{\sqrt{3x+2}}{7x-2}$;

г) $\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}}{3x^2+x-4}=\dfrac{\sqrt{3x^2+2x-4}}{x^2+x-1}$.

Решите методом замены переменной уравнение (**38.10—38.12**):

38.10. а) $x-12=\sqrt{x}$;

б) $x+6=5\sqrt{x+6}-6$;

в) $x+1=5\cdot\sqrt{x+1}+24$;

г) $x^2=\sqrt{x^2+2}$;

д) $21+\sqrt{2x-7}=x$;

е) $4\cdot\sqrt{x+6}=x+1$;

ж) $\dfrac{1+\sqrt{2x+1}}{x}=1$;

з) $\dfrac{5-\sqrt{6x-5}}{5-x}=1$.

38.11. а) $x\cdot\sqrt{x+1}=x+3$;

б) $(x+1)\cdot\sqrt{x-1}=2x-1$;

в) $(x-2)\cdot\sqrt{x-3}=3x-10$;

г) $(x-3)\cdot\sqrt{x+2}=3x-8$.

38.12. а) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{3+\sqrt{2-x}}=2$;

б) $\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}+2\sqrt{x+1}=5$;

в) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=x-2\sqrt{x}+4$;

г) $\dfrac{14}{\sqrt{x^2+1}}-3\sqrt{x^2+1}=1$.

38.13. Решите методом возведения в степень уравнение:

а) $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$;

б) $\sqrt{x+5}-\sqrt{3x-8}=1$;

в) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-4}=5$;

г) $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$.

38.14. Решите методом возведения в степень уравнение:

а) $\sqrt{2x - 11} - \sqrt{x - 2} = -1$;

б) $\sqrt{1 - 3x} + \sqrt{x + 5} = 4$;

в) $\sqrt{2 + x} = 4 - \sqrt{6 - x}$;

г) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$;

д) $\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{9 - x^2} = 3$;

е) $\sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{x^2 - x + 2} = 2$.

38.15. Для каждого значения b решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + b} = \sqrt{3x + b - 2}.$$

38.16. При каких значениях a существует хотя бы одно значение b, при котором имеет хотя бы одно решение уравнение:

а) $\sqrt{x - a} = b$; в) $\sqrt{ax - 2} = b$;

б) $\sqrt{x - b} = a$; г) $\sqrt{x - b} = -a^2$.

38.20. Найдите все пары чисел a и b, при которых уравнение $\sqrt{x - b} = 2a - 1 - a^2 - 5b^4$ имеет хотя бы одно решение.

38.21. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x - 7)\left(\sqrt{x - a} + \sqrt{3a - x}\right) = 0$$

имеет хотя бы один корень?

§ 39. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

39.01. Для каждого из уравнений определите, при каких значениях a число 5 является корнем уравнения:

а) $ax = 7$;

б) $2x = 3a$;

в) $(5a - 1)x = 2a + 3$;

г) $(3 - a)x = 2 - 5a$;

д) $(3a + 7)x = 15a + 35$.

39.02. При каких значениях параметра a данное число x_0 является корнем уравнения:

а) $ax = 2a + 4, \ \ x_0 = -3$;

б) $\dfrac{x + 3}{a - 2} = x, \ \ x_0 = 5$;

в) $(a^2 - 1)x = a + 5, \ \ x_0 = 1$;

г) $(5a + 3)x = 2a - 1, \ \ x_0 = 0{,}4$?

39.03. При каких значениях m графики функций $y = x^2 - mx + 3$ и $y = x^2 - 19x + 8$ не имеют общих точек?

39.04. Для каждого значения b решите уравнение:

а) $x = 3b$; в) $(b^2 + 5b - 6)x = b - 1$;

б) $(b - 1)x = 7$; г) $(b - |b|)x = b + |b|$.

39.05. Найдите все такие значения параметра a, при которых для каждого значения параметра b уравнение $(a^2 - 4)x = b^2 + a$ не имеет решений.

39.06. Найдите все такие пары чисел a и b, при которых числа 2 и 9 являются корнями уравнения $(a^2 + 3a - 4)x = b^2 + a$.

39.07. Найдите все такие значения параметра a, при которых все корни уравнения $x = a + 2$ принадлежат отрезку $[-4; 8]$.

39.08. Найдите все такие значения параметра a, при которых все корни уравнения $(2a - 3)x = 2$ неотрицательны.

39.09. При каких значениях b имеют общий корень уравнения:

а) $3x + 7 = 0$ и $2x - b = 0$;

б) $2x = 3b - 1$ и $3x = 5b + 7$;

в) $7x = 7b - 5$ и $8x = 8b + 6$?

39.10. Для каждого значения b решите уравнение:

а) $(b^2 + 9)x = b - 3$; в) $(b + 3)x = b + 3$;

б) $(b - 9)x = b + 3$; г) $(b^2 - 9)x = b + 3$.

39.11. а) При каком значении a уравнение

$$(3x - a)^2 + (4x + 1)^2 = (5x - 1)^2$$

не имеет решений?

б) При каком значении p уравнение

$$(2x - 3p)^2 + (x - 1)^2 = 5(x - 2)(x + 2)$$

не имеет решений?

39.12. а) При каких значениях a и b уравнение

$$(2x - a)(18x + 1) = (6x - 1)^2 + b$$

имеет не менее трех разных корней?

б) При каких значениях a и b уравнение

$$(2x + b)(8x - 2) = (4x + 1)^2 + a$$

имеет не менее трех разных корней?

39.13. При каких значениях a и b пара чисел $(3; -1)$ является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 5y = a, \\ 2x + y = b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + by = 2, \\ 5x + by = 3 + a? \end{cases}$

39.14. При каких значениях a и b пара чисел (2; 5) является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 7x + y = a, \\ 8x - 3y = b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + by = 7, \\ 2x - ay = 2 - 3b? \end{cases}$

39.15. При каких значениях a и b прямая $y = ax + b$ проходит через точки:

а) $M(1; 5)$ и $N(-5; -3)$; б) $M(-1; 5)$ и $N(5; -3)$?

39.16. При каких значениях параметра k прямая $y = kx$ проходит хотя бы через одну точку прямой:

а) $y = 7x - 5$; б) $y = -3x + 7$?

39.17. При каких значениях параметра k прямая $y = kx$ проходит хотя бы через одну точку отрезка с концами в точках:

а) (2; 2) и (8; 2); б) (2; 2) и (2; 4)?

39.18. а) При каких значениях параметра k прямая $y = kx$ проходит хотя бы через одну точку квадрата с вершинами в точках (1; 1); (4; 1); (1; 4); (4; 4)?

б) При каких значениях параметра k прямая $y = kx$ проходит хотя бы через одну точку прямоугольника с вершинами в точках (1; 2); (5; 2); (1; 8); (5; 8)?

39.19. а) При каких значениях параметра b прямая $y = 2x + b$ проходит хотя бы через одну точку, абсцисса которой положительна, а ордината отрицательна?

б) При каких значениях параметра b прямая $y = 3x + b$ проходит хотя бы через одну точку, абсцисса которой отрицательна, а ордината положительна?

39.20. При каких значениях параметра b прямая $y = 2x + b$ проходит хотя бы через одну точку отрезка с концами в точках:

а) (2; 2) и (8; 2); б) (4; 4) и (4; 8)?

39.21. а) При каких значениях параметра b прямая $y = 2x + b$ проходит хотя бы через одну точку квадрата с вершинами в точках (1; 1); (4; 1); (1; 4); (4; 4)?

б) При каких значениях параметра b прямая $y = 2x + b$ проходит хотя бы через одну точку прямоугольника с вершинами в точках (1; 2); (5; 2); (1; 8); (5; 8)?

39.22. а) При каких значениях параметра k на прямой $y = kx - 3$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

б) При каких значениях параметра k на прямой $y = kx + 4$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

39.23. а) При каких значениях параметра b среди точек квадрата с вершинами (1; 1); (4; 1); (1; 4); (4; 4) есть хотя бы одна точка, сумма координат которой равна b?

б) При каких значениях параметра b среди точек прямоугольника с вершинами в точках (1; 2); (5; 2); (1; 8); (5; 8) есть хотя бы одна точка, сумма координат которой равна b?

39.24. а) При каких значениях a системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15a, \\ \frac{1}{a}x + y = 9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.

б) При каких значениях m системе уравнений

$$\begin{cases} 8x + y = 14m, \\ \frac{1}{m}x + 2y = 6 \end{cases}$$

удовлетворяет пара противоположных друг другу чисел? Для каждого такого m найдите решение системы.

39.25. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2a^2 + 12a + 3, \\ -2x + 3y = 8a^2 + 4a + 1. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a сумма $x_0 + y_0$ наименьшая?

39.26. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 7y = 15 - 5b, \\ 3x - y = 4b - 12. \end{cases}$$

При каких значениях параметра b произведение $x_0 \cdot y_0$ наибольшее?

39.27. Найдите все такие целые значения параметра a, при которых все корни уравнения — целые числа:

а) $ax = a + 2$;

б) $(2a - 1)x = 4a + 2$;

в) $(a^2 - 3a + 5)x = a^2 - 3a + 6$.

39.28. Найдите все такие целые значения параметра a, при которых все корни уравнения — рациональные числа:

а) $(1 - \sqrt{3})x = a + 5\sqrt{3}$;

б) $(3 - \sqrt{3})x = 6a + a^2\sqrt{3}$;

в) $(1 - a^2\sqrt{2})x = 1 + a\sqrt{2}$;

г) $(a + 2)x = 4 - \sqrt{4 - a^2}$.

39.29. Найдите все такие значения параметра a, при которых все корни уравнения $9x = 2a + 2$ являются корнями уравнения $(5a - 1)x = 3a + 1$.

39.30. Найдите все такие значения параметра a, при которых ни один корень уравнения $4x = 3a - 5$ не является корнем уравнения $x^2 - 3ax + 4a^2 = 0$.

39.31. На координатной плоскости aOb укажите все такие точки $(a; b)$, что имеют один и тот же корень уравнения:

а) $ax = 3$ и $3x = b$;

б) $bx = 2$ и $(a^2 - 2a)x = 1$.

39.32. Для каждого значения b решите уравнение:

а) $\frac{x - 3}{x - b} = 0$; в) $\frac{3x - b}{x - 4} = 1$; д) $\frac{bx - 3}{x + 2} = 2$;

б) $\frac{x - b}{x + 2} = 0$; г) $\frac{x - 3}{x + 4} = b$; е) $\frac{bx + 4}{x + 2} = 2$.

39.33. а) При каких значениях a один из корней уравнения $3x^2 - 5x + a = 0$ равен 1? Для данного значения a найдите остальные корни уравнения.

б) При каких значениях a один из корней уравнения $2x^2 - 7x - a = 0$ равен 3? Для данного значения a найдите остальные корни уравнения.

39.34. При каких значениях параметра a один из корней уравнения равен x_0? Для всех таких значений параметра a найдите все корни данного уравнения:

а) $3x^2 - 5ax + 7 = 0$, $x_0 = 1$;

б) $8x^2 + 13x - a = 0$, $x_0 = -5$;

в) $3x^2 - 7ax + 4 = 0$, $x_0 = a$;

г) $3x^2 - 5ax + 8a^2 = 0$, $x_0 = -a$;

д) $ax^2 - 3x + 9 = 0$, $x_0 = 3$;

е) $ax^2 + ax - 7 = 0$, $x_0 = 0$.

39.35. а) Для каких значений b уравнение $x^2 - bx + 2b - 3 = 0$ имеет единственный корень?

б) Для каких значений b уравнение $x^2 - bx + b - 8 = 0$ имеет единственный корень?

39.36. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$;

б) $ax^2 - (a + 5)x + 2 = 0$.

39.37. Для каждого значения m решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x - m} = 0$; б) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - m} = 0$.

39.38. Для каждого значения m решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2 - (3m + 1)x + 2m^2 + 2m}{x - 2} = 0$;

б) $\dfrac{x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m}{x + 4} = 0$.

39.39. Для каждого значения a найдите число различных корней уравнения:

а) $(3x - 1)(ax^2 + 3x - 2) = 0$;

б) $(2x + 1)(ax^2 + 2x - 3) = 0$.

39.40. При каких значениях a имеет три разных корня уравнение:

а) $(x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a)(x^2 + (2a - 1)x - 3a^2 + a) = 0$;

б) $(x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a)(x^2 + (4a + 1)x + 3a^2 + a) = 0$?

39.41. При каких значениях p имеют общий корень уравнения:

а) $x^2 + 2x - 3 = 0$; $px^2 - x - 1 = 0$;

б) $x^2 - x - 2 = 0$; $px^2 + 2x - 1 = 0$?

39.42. При каких значениях p имеют общий корень уравнения:

а) $x^2 + 3x - p = 0$; $2x^2 + x + p - 7 = 0$;

б) $x^2 + 2x + p = 0$; $3x^2 + x + p - 1 = 0$?

39.43. При каком значении параметра m данное уравнение имеет корни различных знаков? Определите, корень какого знака имеет большую абсолютную величину:

а) $x^2 - 5x + m = 0$; б) $x^2 + 3x + m = 0$.

39.44. При каких значениях параметра n сумма корней уравнения $x^2 - nx + 5 = 0$ равна: а) 11; б) 2?

39.45. При каких значениях параметра q сумма корней уравнения $x^2 - qx + 7 = 0$ равна: а) -13; б) 5?

39.46. При каких значениях параметра d произведение корней уравнения $x^2 - 8x + d = 0$ равно: а) 21; б) 2?

39.47. При каких значениях параметра k произведение корней уравнения $x^2 + 3x + k = 0$ равно: а) 12; б) 1?

39.48. а) При каких значениях параметра h один из корней уравнения $x^2 - (5 + h)x + 81 - h^2 = 0$ равен нулю, а второй корень положительный?

б) При каких значениях параметра f один из корней уравнения $x^2 - (3 - f)x + 16 - f^2 = 0$ равен нулю, а второй корень положительный?

39.49. Найдите все значения параметра b, при которых длина отрезка, концами которого являются корни уравнения $x^2 - bx + 4b + 16 = 0$, равна 4.

39.50. Докажите, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два корня различных знаков тогда и только тогда, когда $ac < 0$.

39.51. Докажите, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных корня одного знака тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a \cdot c > 0, \\ D > 0. \end{cases}$

39.52. Докажите, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два разных положительных корня тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a \cdot c > 0, \\ a \cdot b < 0, \\ D > 0. \end{cases}$

39.53. Докажите, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных отрицательных корня тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a \cdot c > 0, \\ a \cdot b > 0, \\ D > 0. \end{cases}$

39.54. Докажите, что модуль разности корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ больше положительного числа m тогда и только тогда, когда $b^2 - 4ac > (am)^2$.

39.55. При каких значениях параметра a квадратное уравнение $3x^2 - (a^2 - 5a + 6)x + 2a - 5 = 0$ имеет два разных корня, которые равны по абсолютной величине?

39.56. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + (a + 1)x - 7 = 0$ и уравнение $3x^2 + ax - 8 = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

39.57. При каких значениях параметра a среднее арифметическое корней уравнения $x^2 - (a^2 - 1)x + 7a = 0$ равно 4?

39.58. При каких значениях параметра m среднее арифметическое числа 9 и одного из корней уравнения $x^2 - 27x + 3m + 144 = 0$ равно другому корню?

39.59. При каких значениях параметра m для корней уравнения $x^2 + 2mx + m^2 - m - 12 = 0$ выполняется условие $|x_1 - x_2| = |x_1| + |x_2|$?

39.60. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax - a^2 - 5 = 0$ наименьшая?

39.61. Для каждого значения параметра b решите уравнение:

а) $|x - 3| + |x - b| = 0$;

б) $b \cdot |x - 3| + |x - b| = 0$;

в) $b^2 \cdot |x - b| + |x - 3| = 0$.

39.62. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - ax + 32| + |x^2 - 3x - 4| = 0$$

имеет корни? Для каждого такого значения a найдите эти корни.

39.63. а) Найдите все такие значения параметра b, при каждом из которых один из корней уравнения $|x + 2| = b$ на 5 больше другого.

б) Найдите все такие пары чисел a и b, для которых уравнение $|x - b| = a$ равносильно уравнению $3x^2 + 5x - 8 = 0$.

в) Найдите все такие пары чисел a и b, для которых уравнение $|x - b| = a$ равносильно уравнению $3x^2 - 5x - 8 = 0$.

39.64. Для каждого значения c решите уравнение

$$|3x - c| = |x + 2|.$$

39.65. Изобразите на координатной плоскости все такие пары чисел x и y, для которых уравнение $|z - x| = |2z - y|$ имеет относительно z единственный корень.

39.66. Найдите наибольшее значение a, при котором на графике функции $f(x) = |x - 4| + |x - 3| + a$ есть хотя бы одна точка с равными координатами.

39.67. При каких целых значениях b сумма корней уравнения $|x^2 + 3x - b^2| = |x^2 - x + b^2|$ отрицательна?

39.68. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $|x^2 + 3x - 1| = |x^2 - 2x + a|$ равен 1, и для каждого такого значения a решите уравнение.

39.69. При каких значениях параметра k число -1 является единственным корнем уравнения

$$|x^2 - 3x - 1| = |x^2 + 2x - k|?$$

39.70. Для каждого значения параметра a решите уравнение $|a - 1|(5x - 3) = (a - x)|5x - 3|$.

39.71. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x - 3| + |x - 10| + |2x - 43| = a$$

имеет наибольшее число целых корней?

39.72. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $|x^2 - 5x + 7| + |x^2 + 2x + 2| = x + a$.

39.73. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - 6x + 10| + |x^2 + 3x + 4| = 5|x| + a$$

имеет наибольшее количество разных корней? Укажите это количество.

39.74. а) При каких значениях a уравнение $\left|\frac{x+1}{x}\right| = a$ имеет ровно один корень?

б) При каких значениях a график функции $f(x) = \left|\frac{x+1}{x}\right|$ имеет с прямой $y = x + a$ ровно две общие точки? Для каждого значения a найдите эти точки.

39.75. а) Найдите все прямые, параллельные прямой $y = x$ и имеющие с графиком функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ровно одну общую точку. Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

б) Найдите все прямые, параллельные прямой $y = 1 - x$ и имеющие с графиком функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ровно одну общую точку. Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

в) При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ровно одну общую точку? Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

г) При каких значениях k прямая $y = kx + 2$ имеет с графиком функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ровно одну общую точку? Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

д) При каких значениях k прямая $y = kx + 5$ имеет с графиком функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ровно две общие точки?

е) При каких значениях a прямая $y = 2x + a$ имеет с графиком функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ более двух общих точек?

ж) Укажите все пары чисел a и b, при которых графики функций $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ и $g(x) = 2|x - a| + b$ имеют более 10 общих точек.

39.76. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $|x + 2| - |x - 4| = a$;

б) $|x + 2| + |x - 4| = 2x + a$.

39.77. Для каждого значения параметра p решите уравнение $|x - p| + |x - 2p| = p$.

39.78. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ имеет единственный корень.

39.79. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^4 - 3x^2 + 7| = |x| - a$$

имеет нечетное число различных корней? Для каждого такого значения a укажите сумму и произведение этих корней.

39.80. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^4 - 7x^2 + 6| = |x - a| + |x + a| + a$$

имеет нечетное число разных корней? Для каждого такого значения a укажите сумму и произведение этих корней.

39.81. При каких значениях a существует хотя бы одно значение b, при котором уравнение $\sqrt{x - b} = -a^2$ имеет хотя бы одно решение?

39.82. Найдите все пары чисел a и b, при которых уравнение $\sqrt{x - b} = 2a - 1 - a^2 - 5b^4$ имеет хотя бы одно решение.

39.83. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x - 7)\left(\sqrt{x - a} + \sqrt{3a - x}\right) = 0$$

имеет хотя бы один корень?

ГЛАВА

7 НЕРАВЕНСТВА

§ 40. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

40.01. Покажите на числовой прямой все числа, удовлетворяющие неравенству, и запишите множества их решений:

а) $x > 5$;
б) $x \geqslant -2$;
в) $x < 9$;
г) $x \leqslant 0$;
д) $-5 < x < 6$;
е) $4{,}2 \leqslant x < 4{,}21$;
ж) $-100{,}7 < x \leqslant 67\,002{,}1$;
з) $-6\frac{12}{13} \leqslant x \leqslant 8\frac{1}{7}$;
и) $8 \leqslant x \leqslant 8$;
к) $5 \geqslant x > -3$.

40.02. Покажите на числовой прямой все числа, заданные указанными множествами, запишите их в виде числовых неравенств:

а) $(-\infty; 9{,}3)$;
б) $(-\infty; -5]$;
в) $(0{,}3; 3{,}5)$;
г) $(-2; -0{,}3]$;
д) $[23; 225]$;
е) $[8; 1000)$;
ж) $(-3; +\infty)$;
з) $[22; +\infty)$.

40.03. Объясните, почему каждая из приведенных ниже записей неверна:

а) $4 \leqslant x < -2$;
б) $5 > x \leqslant 77$;
в) $4 < x > 7$;
г) $8\frac{101}{102} \geqslant x > 8\frac{100}{101}$;
д) $(-3; -\infty)$;
е) $(+\infty; 9]$;
ж) $[-\infty; 5]$;
з) $[-2; +\infty]$;
и) $[8; 8]$ (сравните с вполне возможной записью $8 \leqslant x \leqslant 8$).

Решите неравенство, запишите множество решений в виде неравенства и в виде числового промежутка и покажите его на числовой оси **(40.04, 40.05)**:

40.04. а) $x + 5 > 3$;
б) $x - 6 < 5$;
в) $9 - x > 4$;
г) $4 - x < 4$;
д) $5 \geqslant 4 + x$;
е) $-3{,}1 \leqslant -3{,}2 - x$.

40.05. а) $5x + 4 > 6$;
б) $7x - 9 < 12$;
в) $9x - 11 > 43$;
г) $444 - 11x < 444$;
д) $15 \geqslant -4 + 13x$;
е) $100\frac{100}{101} \leqslant 99\frac{99}{100} - 0{,}01x$.

40.06. Решите двойное неравенство, отметьте множество его решений на числовой оси, запишите это множество в виде неравенства и в виде числового промежутка:

а) $6 > x + 5 > 3$;
б) $23 > x - 16 > -0{,}5$;
в) $5 > 9 - x > 4$;
г) $-2 < 4 - x < 4$;
д) $5 \geqslant 4 + x > 0$;
е) $-3{,}1 \leqslant 3{,}2 - x < 4{,}2$.

40.07. Даны два неравенства: $x < 4$ (1) и $x < 7$ (2). Какие из следующих утверждений верны?

а) Каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2).
б) Существует решение неравенства (1), являющееся решением неравенства (2).
в) Ни одно решение неравенства (1) не является решением неравенства (2).
г) Ни одно решение неравенства (2) не является решением неравенства (1).
д) Существует решение неравенства (2), являющееся решением неравенства (1).

40.08. Даны два неравенства: $x > 1$ (1) и $x < 7$ (2). Какие из следующих утверждений верны?

а) Каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2).
б) Существует решение неравенства (1), являющееся решением неравенства (2).
в) Ни одно решение неравенства (1) не является решением неравенства (2).
г) Ни одно решение неравенства (2) не является решением неравенства (1).
д) Существует решение неравенства (2), являющееся решением неравенства (1).

40.09. Даны два неравенства: $-2 < x \leqslant 14$ (1) и $x > 14$ (2). Какие из следующих утверждений неверны?

а) Каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2).
б) Существует решение неравенства (1), являющееся решением неравенства (2).
в) Ни одно решение неравенства (1) не является решением неравенства (2).
г) Ни одно решение неравенства (2) не является решением неравенства (1).
д) Существует решение неравенства (2), являющееся решением неравенства (1).

40.10. Даны два неравенства: $x > p$ (1) и $x \leqslant 5$ (2), где p — некоторое заданное число. Укажите все значения p, при которых следующее утверждение верно.

а) Каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2).

б) Существует решение неравенства (1), являющееся решением неравенства (2).

в) Ни одно решение неравенства (1) не является решением неравенства (2).

г) Ни одно решение неравенства (2) не является решением неравенства (1).

д) Существует решение неравенства (2), являющееся решением неравенства (1).

40.11. Решите неравенство:

а) $(5 - \sqrt{26})x > 5 - \sqrt{26}$;

б) $(7 - \sqrt{43})x < 14 - \sqrt{172}$;

в) $(3 - \sqrt{2} - \sqrt{3})x > 3 + \sqrt{6} - 3\sqrt{3}$;

г) $\dfrac{x}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} > \sqrt{3} + \sqrt{5}$;

д) $\left(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)x < \sqrt{7} - 2$;

е) $\left(1 - \sqrt{3} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)x > \sqrt{5} - 1$.

40.12. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = 3x - \sqrt{2 - 7x}$;

б) $g(t) = \dfrac{2 - \sqrt{1 - t}}{t^2 - 5t}$;

в) $\alpha(v) = \dfrac{2}{\sqrt{2v - 3}}$;

г) $g(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{4t - 5} + 100}$;

д) $U(y) = \dfrac{1 - y}{y\left(1 + \sqrt{3 - y}\right)}$.

40.13. Решите неравенство:

а) $x - \dfrac{1 - x}{2} < 7$;

б) $2\left(x - \dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{4x - 3}{6} > \dfrac{2x + 3}{12}$;

в) $\dfrac{3 - 5x}{2} - \dfrac{7x - 2}{4} \leqslant \dfrac{10 - 4x}{3} + \dfrac{19}{12}$;

г) $\dfrac{2 - 5x}{2} - \dfrac{x - 2}{4} \leqslant \dfrac{5x + 2}{8} + \dfrac{10 - 4x}{3}$.

40.14. Решите неравенство и укажите его наибольшее целое решение:

а) $x - \frac{2 - x}{2} < 6 + \frac{4x}{5}$;

б) $\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{4 - x}{6} > \frac{2x + 7}{5}$;

в) $\frac{3 - 2x}{5} - \frac{3x + 2}{4} \leqslant \frac{1 - 4x}{2} - \frac{x - 9}{10}$;

г) $3x + 5 - \frac{1 - x}{3} - \frac{3x + 1}{4} \leqslant 1 - \frac{10x + 1}{3}$.

Решите неравенство (**40.15**, **40.16**):

40.15. а) $(x + 3)(2x - 7) < (4 - x)(3 - 2x)$;

б) $(0{,}2x + 3{,}6)(2 - 5x) > (1 - x)(x + 30)$.

40.16. а) $\frac{3x + 2}{5} - x > 3 - \frac{1 + 4x}{10}$;

б) $\frac{x - 1}{3} + \frac{2 - x}{2} \leqslant 1 - \frac{2 + 3x}{18}$;

в) $\frac{3x + 1}{5} + \frac{2 - 3x}{10} < \frac{x - 3}{2} - \frac{2x - 19}{10}$;

г) $\frac{2x - 3}{3} - \frac{x + 1}{6} - x \geqslant \frac{1}{12} - \frac{2x + 5}{4}$.

40.17. Найдите все те решения неравенства $x > 2$, которые являются решениями неравенства $\frac{4 - 5x}{3} > \frac{7x + 1}{12} - 2x$.

40.18. Найдите все те решения неравенства

$$x - \frac{x - 1}{2} > \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 2}{3},$$

которые не являются решениями неравенства

$$\frac{5x - 1}{4} - \frac{3x - 13}{10} > \frac{5x + 1}{3}.$$

40.19. Найдите все те решения неравенства

$$\frac{x}{2} - 3 > \frac{x + 1}{4} + 5,$$

которые не являются решениями неравенства

$$\frac{3x - 1}{5} - \frac{x + 1}{2} < 1 - \frac{x}{7}.$$

40.20. Докажите, что каждое решение неравенства

$$\frac{x - 1}{3} - 2(1 - 4x) > \frac{1}{4}x - \frac{7 - 52x}{6}$$

является решением неравенства $\frac{3 - 2x}{5} + 8 > \frac{5x + 2}{2} - x$.

40.21. Решите неравенство $4 - x - \frac{3 - x}{2} > \frac{1 - x}{4} - \frac{2 - x}{3}$ и найдите все его решения, являющиеся натуральными числами.

40.22. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\frac{2x - 7}{15} - \frac{2 - x}{6} \geqslant \frac{x + 3}{2} - \frac{5x + 26}{4},$$

которые являются решениями неравенства

$$\frac{11x - 32}{21} \leqslant \frac{x + 11}{17}.$$

40.23. Прежде чем разбить лагерь на берегу реки, туристы проплыли по реке и ее притоку 10 км, причем часть пути они проплыли по течению, часть — против течения. Определите, какое расстояние проплыли туристы по течению, если известно, что в пути они были менее 2 ч, собственная скорость лодки 5 км/ч, а скорость течения реки и ее притока 1 км/ч.

40.24. Дачники прошли от поселка до станции расстояние в 10 км. Сначала они шли со скоростью 4 км/ч, а затем увеличили скорость на 2 км/ч. Какое расстояние они могли идти со скоростью 4 км/ч, чтобы успеть на поезд, который отправлялся со станции через 2 ч после их выхода из поселка?

40.25. Чтобы попасть из поселка A в поселок B, нужно доехать по шоссе до пункта C, а затем свернуть на проселочную дорогу. Путь от A до C на 15 км длиннее, чем путь от C до B. Скорость мотоциклиста по шоссе 50 км/ч, а по проселочной дороге 40 км/ч, причем на весь путь от A до B он тратит менее 3 ч. Чему равно расстояние от A до C, если известно, что оно выражается целым числом десятков километров?

40.26. Из города A в город B, расстояние между которыми 240 км, выехал автобус со скоростью 54 км/ч. Через некоторое время вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. Прибыв в B, автомобиль тотчас повернул обратно. На каком расстоянии от A автобус встретился с автомобилем?

40.27. Скорость лодки в стоячей воде 20 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч. На какое расстояние может отплыть лодка от стоянки, если она вышла в полдень и ей необходимо вернуться не ранее двух и не позднее трех часов того же дня?

40.28. Школьнику надо купить 5 ручек, 6 карандашей и один фломастер. Цена ручки на 2 р. больше цены карандаша и на 3 р. меньше цены фломастера. При какой цене ручки школьнику хватит на покупку 100 р. и сдачи останется не более 15 р.?

40.29. Велосипедист едет со скоростью 20 км/ч от пункта A в направлении пункта B и дальше. Расстояние между A и B равно 80 км. Через час после старта первого велосипедиста вслед за ним выезжает другой велосипедист. Какова должна быть его скорость, чтобы он догнал первого не далее, чем в 20 км от B, и сколько на это уйдет времени?

Для каждого значения параметра a решите неравенство **(40.30, 40.31)**:

40.30. а) $4x > a$; в) $ax > a$;
б) $ax > 6$; г) $ax \leqslant a(a - 17)$.

40.31. а) $(a - 1)x > 1 - a^2$;
б) $(2a + 1)x < 4a^2 + 4a + 1$;
в) $(6a - 1)x \leqslant 24a^2 - 10a + 1$;
г) $(9 - a^2)x \geqslant a^2 + 2a - 15$.

40.32. Для всех значений a и b решите неравенство:
а) $ax + b < 0$; в) $5 - 2x \leqslant (a + 2)x - b$;
б) $2x + 3 > ax + b$; г) $ax \geqslant ab - a$.

40.33. Найдите все значения a, при которых каждое решение неравенства $3x + a > 1$ являлось бы решением неравенства $x - 2 > a$.

40.34. Найдите все значения a, при которых каждое решение неравенства $5x - 0{,}2a < 1 - x$ являлось бы решением неравенства $4x - 23 \leqslant a + x$.

40.35. Найдите все значения a, при которых существует решение неравенства $x + a > 1$, которое являлось бы решением неравенства $5x + a \leqslant 2$.

Задания на повторение

40.36. Сформулируйте определение линейного неравенства относительно одной переменной.

40.37. Решите неравенство относительно x:
а) $2x - 6 > 3x + 51$;
б) $5x(x - 6) < x(2x + 1) - 3x(4 - x)$;
в) $2 - x - \frac{2 - x}{3} \geqslant \frac{7x - 2}{4} - \frac{5x}{6}$;
г) $3\left(x - \frac{1}{9}\right) + 2x \geqslant 5\left(x - \frac{4}{15}\right)$;
д) $7(1 - 0{,}5x) + 3x < 10(2 - 0{,}05x) - 15$;
е) $4x - a \leqslant 3ax + 1$, где a — некоторое фиксированное число, равное $\frac{4}{3}$; большее 100; меньшее 0; произвольное число.

40.38. Перечислите все возможные виды множеств решений линейного неравенства относительно одной переменной. Как называются эти множества? Изобразите каждое из перечисленных множеств на рисунке.

40.39. Что означает требование: «Решите систему неравенств»?

40.40. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 8x - 7 > 3x + 48, \\ 4 - 5x \leqslant 10 - 6x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 \leqslant 5x + 6 \leqslant 21, \\ 2 - 3(4 - x) \leqslant -4(1 - x). \end{cases}$

40.41. Подберите число a так, чтобы система неравенств:

а) $\begin{cases} x > 15, \\ x > a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \geqslant 15, \\ x > a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leqslant 15, \\ x > a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \leqslant 15, \\ x \leqslant a \end{cases}$

имела хотя бы одно решение. Укажите все такие значения a.

40.42. Что означает требование: «Решите совокупность неравенств»?

40.43. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 8x - 7 > 3x + 48, \\ 4 - 5x \leqslant 10 - 6x; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x - 2(1 - x) \leqslant 3x + 1, \\ 2 - 3(4 - x) \leqslant -4(1 - x). \end{array}\right.$

40.44. Для каждого значения параметра a решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x < 5, \\ x < a; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 5, \\ x < a; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 15, \\ x < a; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 15, \\ x \geqslant a. \end{array}\right.$

40.45. Составьте линейное неравенство, множество решений которого есть промежуток:

а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 7]$; в) $[-1; 2]$.

40.46. Решите систему неравенств

$$2x < x + 1 \leqslant 2x - 3 < x + a$$

для каждого значения параметра a.

§ 41. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

41.01. Какие из приведенных чисел удовлетворяют данному неравенству? Найдите сумму этих чисел:

а) $x^2 - 10x + 22 < 0$, -1; 3; π; $6{,}5$;

б) $2x^2 + 2x - 1 < 0$, -2; $-0{,}8$; 0; $0{,}3$;

в) $x^2 + 6x - 2 \geqslant 0$, π; $-3 - 2\sqrt{3}$; $-3 - \sqrt{11}$; $\sqrt{10}$;

г) $x^2 - 237x > 0$, $-1\,234\,567$; $\sqrt{113} - 11$; $237{,}001$; $236, 992$.

Решите неравенство с помощью рисунка параболы (**41.02—41.06**):

41.02. а) $x^2 + 2 > 0$;
б) $x^2 \geqslant 1$;
в) $-16x^2 + 49 > 0$;
г) $-4x^2 - 2 \leqslant 0$;
д) $-4x^2 + 2 > 0$;
е) $-2x^2 - 1 \leqslant 0$;
ж) $-8x^2 + 6 > 0$;
з) $7x^2 \geqslant 1$.

41.03. а) $x^2 + 2x \leqslant 0$;
б) $x^2 \geqslant x$;
в) $-81x^2 + 9x > 0$;
г) $-49x^2 < 34x$;
д) $-3x^2 + 2x \geqslant 0$;
е) $-2x^2 - x \leqslant 0$;
ж) $-8x^2 + 6x > 0$;
з) $17x^2 \geqslant 2x$.

41.04. а) $x^2 + 2x + 3 \leqslant 0$;
б) $x^2 \geqslant x + 30$;
в) $-8x^2 + 9x > 1$;
г) $-49x^2 > 4x + 1$;
д) $-3x^2 + 2x \leqslant 7$;
е) $-2x^2 - x \geqslant 3$;
ж) $-8x^2 + 17x \geqslant 9$;
з) $17x^2 \leqslant 37x - 6$.

41.05. а) $x^2 + 2x + 1 \leqslant 0$;
б) $9x^2 > 6x - 1$;
в) $-8x^2 + 16x \geqslant 8$;
г) $-49x^2 < 14x + 1$;
д) $-x^2 + 24x > 144$;
е) $25x^2 - 10x \leqslant -1$;
ж) $81x^2 < 18x - 1$;
з) $2x^2 \leqslant 6\sqrt{2}x - 9$.

41.06. а) $(x + 2)(x - 10) \leqslant 0$;
б) $\left(x - \sqrt{5}\right)(x + 300) > 0$;
в) $(x - 8)(50{,}1 - x) > 0$;
г) $(-3x + 1)(2x - 7) > 0$;
д) $(1 - 2x)(-x - 6) \leqslant 0$;
е) $(1 - 49x)(4x + 1) \geqslant 0$.

41.07. Решите неравенство и укажите сумму всех его целочисленных решений:
а) $3x + 2 \geqslant (4x - 3)(3x + 2)$;
б) $5x - 1 \geqslant \dfrac{(x - 1)(5x - 1)}{3}$;
в) $(4 - 8x)(x + 9) > \dfrac{2x - 1}{7}$;
г) $5(4x + 3) > (4x + 3)^2$;
д) $18x - 27 < 7(2x - 3)^2$;
е) $5x + 25 > \left(\dfrac{x + 5}{2}\right)^2$.

41.08. Решите неравенство:
а) $34 - 4x < (6x - 51)^2$;
б) $(35 - 49x)(4x + 1) < (20x + 5)^2$;
в) $25 - 15x < (9x - 15)^2$;
г) $111x - 37 > (6x - 2)^2$.

Решите неравенство (41.09, 41.10):

41.09. а) $x^2 - 2x - 1 < 0$; г) $x^2 + 4\sqrt{7}x - 8 \geqslant 0$;

б) $x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$; д) $5x^2 - \sqrt{11}x - 2 \geqslant 0$;

в) $5x^2 + 4x - 4 \geqslant 0$; е) $-x^2 + \sqrt{24}x + 3 \geqslant 0$.

41.10. а) $(3x + 2)(2 - 3x) > (x - 2)(2 + x)$;

б) $(8 - 3x)(3x + 8) < (2x - 1)(3x + 52)$;

в) $(4x - 7)^2 - (2 - 3x)^2 \leqslant 0$;

г) $\left(\frac{2x + 1}{3} - 2x\right)^2 \geqslant \left(x - \frac{1 - 2x}{2}\right)^2$;

д) $\left(2 - x + \frac{3x + 2}{4}\right)^2 < \left(\frac{1 - x}{3} - x + 1\right)^2$;

е) $\left(\frac{x + 1}{2} - \frac{x + 2}{3}\right)^2 > \left(\frac{x + 3}{4} - \frac{x + 5}{6}\right)^2$.

41.11. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$;

б) $(x^3 - 7x^2 - 18x)\left(\sqrt{x^2 + 16x - 4} + \sqrt{10x - x^2} + 8\right) = 0$;

в) $\frac{x^2 - 3x - 12}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{-x^2 - x + 20}} = 0$.

41.12. Решите неравенство:

а) $(5x - 1)\left(\sqrt{-x^2} + 2x + 1\right) > 0$;

б) $(5x - 1)\left(\sqrt{-x^2} + 2x + 1\right) < 0$;

в) $(5x - 1)\left(\sqrt{-x^2 + 4x - 4} + 2x + 4\right) \geqslant 0$;

г) $(5x - 1)\left(\sqrt{-x^2 + 4x - 4} + 2x - 4\right) > 0$;

д) $(5x - 1)\left(\sqrt{-x^2 + 4x - 4} + 2x - 4\right) \leqslant 0$.

41.13. Постройте график функции и укажите все значения x, при которых $f(x) = 0$; $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geqslant 0$; $f(x) \leqslant 0$:

а) $f(x) = 5x - 1$; в) $f(x) = x^2 - 4x$;

б) $f(x) = 4 - 3x$; г) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

41.14. Укажите все значения x, при которых $f(x + 1) = 0$; $f(x - 1) > 0$; $f(-x) < 0$; $f(-x - 1) \geqslant 0$; $f(4x - 1) \leqslant 0$, если:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 9$;
б) $f(x) = x^2 - x + 1$;
в) $f(x) = -x^2 + 10x$;
г) $f(x) = -x^2 - 2x + 8$;
д) $f(x) = -x^2 + x - 0{,}25$;
е) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$.

41.15. Найдите промежутки знакопостоянства следующих функций:

а) $y = 4x^2 - x + 14$;
б) $y = 7x - 3x^2 + 40$;
в) $y = 15x^2 - 4x - 52$;
г) $y = 5x - 2x^2 - 12$;
д) $y = 4x^2 - 4x + 1$;
е) $y = x^2 - x\sqrt{2} - 0{,}5$.

41.16. Два неравенства $f(x) > 0$ и $h(x) > 0$ называются *равносильными*, если они оба не имеют решений или их множества решений совпадают. При этом можно написать

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0.$$

Выясните, являются ли равносильными пары неравенств:

а) $x^2 > 16x - 64$ и $x - 4 < \left(\frac{x}{4}\right)^2$;

б) $x^2 > x - 4$ и $x^2 + 1 > 0$;

в) $5x^2 > 47x - 74$ и $x^2 + 4 \leqslant 4x$;

г) $x^2 < 5x - 9$ и $x^2 + 4 < 2x$.

41.17. Среди всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - x > 17$, найдите те, которые удовлетворяют неравенству $x^2 - x \geqslant 2$.

41.18. Среди всех чисел, удовлетворяющих неравенству

$$3x^2 - 111x > 0{,}11,$$

найдите те, которые удовлетворяют неравенству

$$111x - 3x^2 < 0.$$

41.19. Среди всех чисел, удовлетворяющих неравенству

$$5x^2 - 3x < 100{,}1,$$

найдите те, которые удовлетворяют неравенству

$$3x - 5x^2 < -8.$$

41.20. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:
а) $x^2 - 6x - 14 \leqslant 0$; б) $2x^2 - 3x - 144 \leqslant 0$?

41.21. Найдите абсциссы точек графика функции $y = x^2 - 3x + 1$, ординаты которых меньше 5.

41.22. Найдите промежутки числовой прямой, на которых график функции $y = -x^2$ расположен выше графика функции $y = 3x - 40$.

41.23. Восстановите запись квадратных неравенств, имеющих заданные множества решений или не имеющих решений:

а) $3x^2 \dots 0,\ \left(-2; \frac{1}{3}\right)$;

б) $-x^2 \dots 0,\ (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$;

в) $5x^2 \dots 0,\ (-\infty; -6) \cup (0{,}1; +\infty)$;

г) $4x^2 \dots 0,\ [-2{,}5; 0{,}5]$;

д) $-x^2 \dots 0,\ \{-6\}$;

е) $4x^2 \dots 0,\ \boldsymbol{R}$;

ж) $x^2 \dots 0$, нет решений.

Решите неравенство (**41.24, 41.25**):

41.24. а) $\dfrac{23}{x^2 - 7x - 11} \leqslant 0$; в) $\dfrac{\pi - 3}{x^2 - 110x - 111} < 0$;

б) $\dfrac{3 - \sqrt{15}}{x^2 + x - 1} \geqslant 0$; г) $\dfrac{10 + x^2}{3x^2 - x - 7} > 0$.

41.25. а) $\dfrac{x^2}{x^2 - 7x - 11} \leqslant 0$; в) $\dfrac{(x^2 - 3x + 4)^2}{x^2 - 3x} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{x^2}{2x^2 + x - 1} \geqslant 0$; г) $\dfrac{(10 - x^2)^2}{x^2 - x + 1111} \leqslant 0$;

41.26. Постройте график функции:

а) $y = 3x - 1 - \sqrt{-x^2}$;

б) $y = 3x^2 - 26 - \sqrt{-x^2 + 6x - 9}$;

в) $y = 3x^2 + 5x - 1 + x \cdot \sqrt{-(x^2 - 1)^2}$;

г) $y = 3x - 1 - \sqrt{x - x^2} + \sqrt{x - 1}$;

д) $y = 2x + 3 - \sqrt{-x^2 + 6x - 5} + 3\sqrt{-x^2 + 12x - 35}$;

е) $y = x + 1 + \sqrt{-(x - 1)^2(x - 2)^2(x + 3)^2(x + 4)^2}$.

41.27. Найдите все значения параметра a, при которых существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее каждому из условий: $x^2 - 7x + 6 < 0$ и $x^2 - (a + 10)x + 10a = 0$.

41.28. Найдите все значения параметра b, при которых существует ровно одно число, удовлетворяющее одновременно неравенству $x^2 - 7x - 18 < 0$ и уравнению $x^2 - (1 + 2b)x + 2b = 0$.

41.29. Найдите все значения параметра b, при которых существует ровно одно число, удовлетворяющее одновременно неравенству $x^2 - 4x - 21 \geqslant 0$ и уравнению

$$x^2 - (1 + 2b)x + 1 + b = 0.$$

41.30. Найдите все такие значения параметра a, при которых неравенство выполняется на указанном промежутке:

а) $x^2 - 3x - 10 < 0$ $(-1; a]$;

б) $x^2 + 6x - 16 \geqslant 0$ $\left(5; \frac{a}{2}\right]$;

в) $x^2 + 4x - 32 \leqslant 0$ $(-8; a + 5]$;

г) $x^2 - (2a + 1)x + a(a + 1) < 0$ $(0; 1)$.

41.31. Определите все значения параметра a, при которых дискриминант квадратного трехчлена положителен:

а) $x^2 - ax + 3$;

б) $x^2 - ax - 2a$;

в) $ax^2 - x + 7$;

г) $(a - 3)x^2 - (a - 1)x + a$.

41.32. Найдите все значения a, при которых неравенство выполняется при всех значениях x:

а) $x^2 + 2x - 2 + a > 0$;

б) $x^2 + 2ax + a \geqslant 0$;

в) $ax^2 + 2x + 4a \leqslant 0$;

г) $ax^2 + 2ax - 1 \leqslant 0$.

41.33. Найдите все значения a, при которых не существует ни одного значения x, при котором выполняется неравенство:

а) $x^2 + 2x - 2 + a < 0$;

б) $x^2 + 2ax + a \leqslant 0$;

в) $ax^2 + 2x + 4a > 0$;

г) $ax^2 + 2ax - 1 \geqslant 0$.

41.34. Найдите все значения a, при которых существует, по крайней мере, одно решение неравенства:

а) $x^2 - ax + 4 < 0$;

б) $x^2 - ax + 3 > 0$;

в) $ax^2 + 2\sqrt{3}x - 2 + a < 0$;

г) $(a - 2)x^2 - 4x\sqrt{2} + a > 0$.

41.35. Найдите все значения a, при которых существует только одно целочисленное решение неравенства:

а) $x^2 - 2x + a < 0$;

б) $2x^2 + 7x + a \leqslant 0$;

в) $x^2 - 2\sqrt{17}x + a < 0$.

41.36. При каких значениях a существует ровно девять целочисленных решений неравенства $x^2 - 8x + a < 0$?

41.37. Докажите, что при $b = 7$ неравенство $3x^2 - 2x + b < 0$ не имеет решений, и найдите все такие положительные числа a, для которых данное неравенство не имеет решений для всех b из промежутка $(7 - a; 7 + a)$.

41.38. Докажите, что при $b = 7$ неравенство $3x^2 - 2x + b \leqslant 0$ не имеет решений, и найдите все такие положительные числа a, для которых данное неравенство не имеет решений для всех b из промежутка $[7 - a; 7 + a]$.

41.39. Найдите все такие значения параметра a, при которых на промежутке $(a; a + 1)$ есть хотя бы одно число, удовлетворяющее неравенству:

а) $x^2 - 7x + 6 < 0$; в) $3x^2 - x - 2 > 0$;

б) $6x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$; г) $10x^2 + 7x + 1 \geqslant 0$.

Задания для повторения

41.40. Сформулируйте определение квадратного неравенства относительно одной переменной.

41.41. Решите неравенство относительно x:

а) $2x^2 - 6 > 3x^2 - 22$;

б) $x^2 < 8x$;

в) $-\frac{x^2}{2} < 8x$;

г) $x^2 + 25 \leqslant 10x$;

д) $\frac{x^2}{3} + 3 \leqslant 2x - 1$;

е) $x^2 + 25 \geqslant 10x$;

ж) $3x^2 - a - 1 \leqslant 3ax^2 + 2(x - 2a)$,
где a — некоторое фиксированное, равное 1; большее 100; меньшее 0; произвольное число.

41.42. Перечислите все возможные виды множеств решений квадратного неравенства относительно одной переменной. Как называются эти множества? Изобразите каждое из перечисленных множеств на рисунке.

41.43. Что означает требование: «Решите систему неравенств»?

41.44. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 8x - 7 > 3x + 48, \\ 4 - 5x^2 \leqslant 5 - 6x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 \leqslant 5x^2 + 6 \leqslant 56, \\ 2 - 3(4 - x) \leqslant -4(1 - x). \end{cases}$

41.45. Подберите число a так, чтобы данная система неравенств имела хотя бы одно решение. Укажите все такие значения a:

а) $\begin{cases} x^2 > 9, \\ x > a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 \geqslant 5, \\ x > a; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 \leqslant 16, \\ x > a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 \leqslant 5, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

41.46. Что означает требование: «Решите совокупность неравенств»?

41.47. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 8x - 7 > 3x + 48, \\ 4 - 5x^2 \leqslant 5 - 6x; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2(1 - x^2) \leqslant 3x - 2, \\ 2 - 3(4 - x) \leqslant -4(1 - x). \end{array}\right.$

41.48. Для каждого значения параметра a решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 < 25, \\ x < a; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 \leqslant 5, \\ x < a; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x^2 \geqslant 5, \\ x < a; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x^2 < -5, \\ x > a. \end{array}\right.$

41.49. Составьте квадратное неравенство, множеством решений которого является:

а) промежуток $(2;\ 5)$;

б) объединение лучей $(-\infty;\ -7] \cup [1;\ +\infty)$;

в) точка 1;

г) промежуток $(-\infty;\ +\infty)$.

41.50. Решите систему неравенств

$$2x < x^2 + 1 \leqslant 2x + 16 < x + a$$

для каждого значения параметра a.

§ 42. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

42.01. Пусть $a - b = 7$. Докажите, что $a > b$; $a > b + 3$; $a - 5 > b + 1{,}7$.

42.02. Пусть $a + c = 8$. Используя неравенство $a^2 - 2ac + c^2 \geqslant 0$, докажите, что $a^2 + c^2 \geqslant 32$, $a^4 + c^4 \geqslant 512$. При каких значениях a и c неравенство обращается в равенство?

42.03. Известно, что $m^2 + n^2 = 1$, причем $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$. Докажите неравенство и определите, при каких значениях m и n неравенство обращается в равенство:

а) $m \leqslant 1$; в) $m + n \geqslant 1$; д) $m^3 + n^{17} \leqslant 1$;

б) $n \geqslant n^2$; г) $m + n \leqslant \sqrt{2}$; е) $\sqrt{m} + \sqrt{n} \geqslant 1$.

42.04. Докажите неравенство и определите, при каких значениях переменных неравенство обращается в равенство:

а) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$; г) $\sqrt{3 + b^2} + \dfrac{9}{\sqrt{3 + b^2}} \geqslant 6$;

б) $a^2d^2 + \dfrac{b^2}{d^2} \geqslant 2ab$; д) $\dfrac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} \geqslant 2$;

в) $m^2 + \dfrac{9}{4m^2} \geqslant 3$; е) $\dfrac{6\sqrt{3 + c^2}}{12 + c^2} \leqslant 1$.

42.05. Докажите неравенство и определите значения переменных, при которых неравенство обращается в равенство:

а) $4x^2 + \dfrac{4}{1 + 4x^2} \geqslant 3$; в) $\dfrac{2a}{7} + \dfrac{81}{14a} \geqslant 1\dfrac{4}{7}$;

б) $3a + \dfrac{3}{16a} \leqslant -1{,}5,\ a < 0$; г) $0{,}1x + \dfrac{5}{18x} \leqslant 0{,}2$.

42.06. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2 + \frac{4}{x^2}$;

в) $\frac{(t^2 + 9)(t^2 + 16)}{t^2}$;

б) $\frac{s^2 - 2s + 36}{s}$, $s > 0$;

г) $\frac{p^2 - 2p + 622}{p + 1}$, $p > -1$.

42.07. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $\frac{x^2}{x^4 + 4}$;

в) $\frac{19s}{64s^2 + 4}$, $s > 0$;

б) $\frac{17t^2}{t^4 + 7t^2 + 49}$;

г) $\frac{11t}{t^2 - 6t + 225}$, $t > 0$.

42.08. Докажите неравенство и определите значения переменных, при которых неравенство обращается в равенство:

а) $\frac{a^2}{1 + a^4} + \frac{b^2}{1 + b^4} + \frac{c^2}{1 + c^4} \leqslant 1{,}5$;

б) если a и c — положительные числа, то $\frac{a}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a + b + c)$.

42.09. Пусть a, b, c, d — положительные числа. Докажите неравенство $\frac{a + b + c + d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}$ и с его помощью докажите неравенство $\frac{a + b + c + d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

42.10. Докажите неравенство и определите значения переменных, при которых неравенство обращается в равенство:

а) $a^4 + b^4 + c^4 + 16 \geqslant 8abc$;

б) $\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 \geqslant \frac{ab + ac + bc}{3}$;

в) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}}$, где a, b и c — положительные числа.

42.11. Докажите, что если a и b — положительные числа, то

$$\frac{a + b}{1 + a + b} < \frac{a}{a + 1} + \frac{b}{b + 1}.$$

42.12. Докажите, что если произведение четырех положительных чисел равно единице, то их сумма не меньше четырех.

42.13. Докажите, что $\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \ldots + \frac{1}{599} > 0{,}5$.

42.14. Докажите, что если k — натуральное число, то

$$\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{(k+1)^2},$$

и, пользуясь этим соотношением, покажите, что:

а) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{101}$;

б) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{100}$.

42.15. Докажите, что $\frac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1} < \frac{10^{1998}+1}{10^{1999}+1}$.

42.16. Докажите, что:

а) $\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 99^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot 100^2} < \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 99^2}{(2^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot(6^2-1)\cdot \ldots \cdot (100^2-1)}$;

б) $\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 999^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot 1000^2} < \frac{1}{1001}$;

в) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 167}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 168} < \frac{1}{13}$.

42.17. Докажите, что:

а) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot 101^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot 100^2} > \frac{(3^2-1)\cdot(5^2-1)\cdot \ldots \cdot (101^2-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot 100^2}$;

б) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot 1001^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot 1000^2} > 1002$;

в) $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1023}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1022} > 32$.

42.18. Докажите, что при любых значениях x выражение $x^4 - x^3 + x^2 + 1$ принимает положительные значения.

42.19. Докажите, что при любых значениях букв справедливы неравенства:

а) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 \geqslant 0$;

б) $9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 \geqslant 0$;

в) $a^2 + b^2 + 2ab(b - a) + 2a^2b^2 \geqslant 0$;

г) $12p^2 + q^2 + 16p + 4q - 4pq + 22 \geqslant 0$.

42.20. Докажите, что при любых значениях a, b, c справедливо неравенство $a^2b(b - c) + b^2c(c - a) + c^2a(a - b)$.

42.21. Докажите, что если произведение двух положительных чисел есть постоянное число, то их сумма достигает наименьшего значения, если эти числа равны.

42.22. Найдите наименьшее значение суммы $a + b$, если $ab = 25$, $a > 0$.

42.23. Найдите наименьшее значение суммы $s + 8t$, если $st = 50$, $t > 0$.

42.24. Найдите наименьшее значение суммы $5x + 3y$, если $xy = 60$, $y > 0$.

42.25. Докажите, что если сумма двух положительных чисел постоянна, то их произведение достигает наибольшего значения, если эти числа равны.

42.26. Найдите наибольшее значение произведения положительных чисел a и b, если $a + b = 100$.

42.27. Найдите наибольшее значение произведения xy, если

$$5x + y = 500,\ x > 0,\ y > 0.$$

42.28. Найдите наибольшее значение произведения xy, если

$$5x + 7y = 700,\ x > 0,\ y > 0.$$

42.29. Обозначим $\max\{A;\ B\}$ наибольшее из A и B число, а $\min\{A;\ B\}$ наименьшее из A и B число. Докажите, что:

а) $\max\{A;\ B\} > C$ тогда и только тогда, когда $A > C$ или $B > C$;

б) $\max\{A;\ B\} < C$ тогда и только тогда, когда $A < C$ и $B < C$;

в) $\min\{A;\ B\} < C$ тогда и только тогда, когда $A < C$ или $B < C$;

г) $\min\{A;\ B\} > C$ тогда и только тогда, когда $A > C$ и $B > C$.

42.30. Отметьте на координатной плоскости все точки $(x;\ y)$ такие, что:

а) $\max\{x;\ 1\} > 5$; в) $\min\{100;\ y\} < -1$;

б) $\max\{1;\ y\} < 5$; г) $\min\{x;\ 100\} > -1$.

42.31. Пусть $f(x) = 3x + 5$. Докажите, что при любом значении x $f(x + 1) > f(x)$.

42.32. Пусть $f(x) = x^2 - \frac{7}{x}$. Докажите, что из неравенства $x_1 > x_2 > 0$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

42.33. Докажите, что график функции $y = \frac{x^2 + 4x + 8}{x^2 + 4x + 5}$ располагается не выше прямой $y = 4$.

42.34. Докажите, что при $x > 0$ все точки гиперболы $xy = 4$ лежат выше точек прямой $2x + 3y = 6$, а при $x < 0$ — ниже.

42.35. Докажите, что все точки графика $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x}{x^2 + 1}$ лежат выше точек графика функции $y = x - 1$.

42.36. Докажите, что все точки графика функции

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

лежат выше точек графика функции $g(x) = \frac{5}{3 + \sqrt{x^2 + 4}}$.

42.37. Найдите все пары чисел a и m, для которых

$$\frac{a + 5}{2a - 5} + \frac{2a - 5}{a + 5} = 2 - \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}.$$

42.38. Катер прошел путь от пристани A до пристани B и вернулся обратно, одновременно с ним этот же путь по шоссе, идущим рядом с рекой, проделал мотоциклист. Скорость мотоциклиста равна скорости катера в стоячей воде. Сравните затраченное катером и мотоциклистом время (больше, меньше, равно).

42.39. Собака и кошка стартуют в одной и той же точке A по окружности. Собака на протяжении всего пути по окружности бежит с постоянной скоростью, а кошка половину пути по окружности бежит со скоростью в 20 раз большей, чем собака, а вторую половину со скоростью в 2 раза меньшей, чем собака. Кто первым из них вернется в точку A?

42.40. Коля и Вася делают некоторую работу за 7 дней. Петя и Коля делают эту же работу за 5 дней, а Петя и Вася эту же работу делают за 9 дней. Сделав втроем работу, они получили зарплату. Кто получил больше всех, а кто меньше всех?

Задачи геометрического содержания

42.41. Докажите, что в любом треугольнике полупериметр больше любой его стороны.

42.42. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника меньше его периметра, но больше его полупериметра.

42.43. Пусть M — внутренняя точка треугольника ABC. Через точку M провели отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, где точки A_1, B_1 и C_1 лежат, соответственно, на сторонах BC, AC и AB (такие отрезки часто называют *чевианами* треугольника). Докажите, что сумма длин пересекающихся в одной точке трех чевиан треугольника заключена между его полупериметром и периметром, т. е. $p < AA_1 + BB_1 + CC_1 < 2p$.

42.44. Докажите, что площадь треугольника меньше произведения любых двух его сторон.

42.45. Докажите, что площадь треугольника не больше полупроизведения любых двух его сторон.

42.46. Докажите, что площадь треугольника меньше суммы квадратов любых двух его сторон.

42.47. Докажите, что удвоенная площадь треугольника не больше суммы квадратов любых двух его сторон.

42.48. Докажите, что площадь треугольника меньше шестой части суммы квадратов всех его сторон.

42.49. Докажите, что в любом треугольнике $\sqrt{(p-a)(p-b)} \leqslant \frac{c}{2}$ и определите, может ли данное неравенство обратиться в равенство и если это возможно, то определите, в каком случае.

42.50. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник с площадью S и диагоналями AC и BD. Докажите, что:
а) $AC \cdot BD \geqslant 2S$;
б) $AB \cdot BC + CD \cdot AD \geqslant 2S$;
в) $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant 2S$.

42.51. Докажите, что для любых положительных чисел x и y

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}.$$

С помощью этого неравенства докажите, что для треугольника со сторонами a, b, c и полупериметром p выполняется неравенство

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geqslant 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

§ 43. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

43.01. Запишите примерный вес и рост вашего соседа по парте. Уточните эти данные у него и вычислите абсолютную погрешность.

43.02. Подумайте о том, сколько в вашей школе учащихся. Запишите предполагаемый результат. Уточните результат в школьной канцелярии и вычислите абсолютную погрешность.

43.03. Вспомните, чему равна площадь вашей комнаты. Запишите результат. Уточните площадь комнаты, проведя измерения или заглянув в документы на квартиру. Вычислите абсолютную погрешность.

43.04. Посмотрите на карту и запишите, чему, на ваш взгляд, равно отношение площадей Украины и Белоруссии. Уточните площади этих стран по справочнику и вычислите абсолютную погрешность.

43.05. Подумайте, сколько могут стоить килограмм самого дорогого и самого дешевого сыра. Запишите результаты. Зайдите в магазин и уточните стоимости. Вычислите абсолютную и относительную погрешности.

43.06. Взвесьте на весах буханку черного хлеба, сравните результаты взвешивания с информацией, полученной у продавца. Вычислите абсолютную погрешность.

43.07. Подумайте, сколько платит в месяц за квартиру ваша семья. Запишите результаты. Уточните результаты по документам. Вычислите абсолютную и относительную погрешности.

43.08. Прокомментируйте следующие предложения.

а) В городе N приблизительно 2 млн жителей.

б) В 1 м приблизительно 100 см.

в) В 1 фунте приблизительно 400 г.

г) Периметр треугольника приблизительно равен сумме длин его трех сторон.

д) В прямоугольном треугольнике с углом 30° отношение большего катета к меньшему приблизительно равно 1,7.

е) В прямоугольном треугольнике с углом 30° отношение гипотенузы к меньшему катету приблизительно равно 2.

ж) В школе с номером приблизительно 200 учатся ровно 200 учеников.

з) В школе с номером 317 учатся приблизительно 317 учащихся.
и) В нашем задачнике приблизительно ... листов.
к) Женя говорит, что знает тему «Приближенные вычисления» приблизительно на 3.

43.09. Постройте параллелограмм со сторонами 13 см и 17 см, и острым углом 35°. Определите на глаз приближенное значение длин его диагоналей и запишите результаты. Измерьте диагонали линейкой и, считая результаты измерений за точные, определите абсолютную погрешность.

43.10. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 7 см и 15 см. Определите на глаз величину его большего острого угла. Измерьте этот угол транспортиром и, считая результаты измерения за точные, определите абсолютную погрешность.

43.11. Постройте прямоугольный треугольник ABC с острым углом $A = 37°$. Измерьте гипотенузу AB и катеты AC и BC. Вычислите $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AC}$ и сравните результаты с полученными на микрокалькуляторе значениями синуса, косинуса и тангенса 37°. Вычислите абсолютную погрешность.

43.12. Округлите числа и укажите, в каких случаях приближение получается с избытком, а в каких — с недостатком:
а) до целых: 55,73; 666,02; 34,49; 99,5; 0,03; 599;
б) до десятых: 9,35; 87,97; 999,98;
в) до сотых: 0,997; 0,4449; 0,0009.

43.13. Округлите числа и укажите, в каких случаях приближение получается с избытком, а в каких — с недостатком:
а) до тысячных: 57,(34); 6,(0234); 34,(4); 9,(95); 0,(0007); 0,(0003).
б) до десятитысячных: 9,(35); 87,(99997); 999,(9999).

43.14. Используя микрокалькулятор или деление углом, запишите данные числа в виде десятичных дробей, округлив их:
а) до сотых: $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{23}{111}$; $\frac{111}{23}$;
б) до тысячных: $\frac{51}{61}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{25}{26}$; $\frac{26}{625}$.
Укажите, в каких случаях приближение получается с избытком, а в каких — с недостатком.

43.15. Десятичную запись числа $\frac{1}{7}$ округлили, оставив в записи 2001 цифру после запятой. Найдите эти цифры.

43.16. Используя таблицы или микрокалькулятор, запишите данные числа в виде десятичных дробей, округлив их:

а) до сотых: $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{34}$; $\sqrt{49{,}033}$;

б) до тысячных: π; $\sqrt{\pi}$; π^3.

Укажите, в каких случаях приближение получается с избытком, а в каких — с недостатком.

43.17. Докажите, что если a — округленное до целых приближенное значение числа x, то $a - 0{,}5 \leqslant x < a + 0{,}5$.

43.18. Докажите, что при округлении числа до сотых абсолютная погрешность не превосходит 0,005, до десятых — 0,05, до целых — 0,5. Обобщите результат.

43.19. Докажите, что если $x \approx 3{,}30$, то $|x - 3{,}30| \leqslant 0{,}005$.

43.20. В каких пределах находится число x, если известно его приближенное значение:

а) $x \approx 3{,}3$; в) $x \approx 9{,}800$; д) $x \approx 3300$;
б) $x \approx 0{,}30$; г) $x \approx 0{,}01$; е) $x \approx 3300{,}00$?

43.21. Пусть нам неизвестно точное значение числа x, но известно, что оно находится между числами a и b. Докажите, что если в качестве приближенного значения числа x взять $\frac{a + b}{2}$, то абсолютная погрешность не превысит $\frac{|a - b|}{2}$.

43.22. Пусть $x \approx 3{,}0$; $y \approx 0{,}4$. В каких пределах изменяется:

а) $5x$; г) $x + 2y$; ж) $\frac{1}{x}$;

б) $0{,}3x + 2$; д) $x - y$; з) $\frac{y}{x}$?

в) x^2; е) $x \cdot y$;

43.23. Пусть $x \approx 5{,}12$; $y \approx 0{,}65$. В каких пределах изменяется:

а) $3x$; г) $3x + y$; ж) $\frac{1}{y}$;

б) $1 - 0{,}2x$; д) $x - 5y$; з) $\frac{x}{y}$?

в) x^2; е) $x \cdot y$;

43.24. В каких пределах находится площадь прямоугольника, если его стороны:
а) $x \approx 5{,}1$; $y \approx 6{,}5$; б) $x \approx 5{,}10$; $y \approx 6{,}50$?

43.25. В каких пределах находятся коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 - px + q = 0$, если $x_1 \approx 3{,}2$; $x_2 \approx 0{,}65$?

43.26. Найдите приближенные значения корней уравнения:
а) $x^2 - 7x + 3 = 0$ с точностью до десятых;
б) $2x^2 - 17x - 3 = 0$ с точностью до сотых;
в) $5x^2 - 9x - 13 = 0$ с точностью до целых.

43.27. $x_1 \approx 3$; $x_2 \approx -1$ — приближенные значения нулей квадратичной функции $f(x) = x^2 - px + q$. Можно ли утверждать, что:
а) $f(1) < 0$; в) $f(-0{,}97) < 0$;
б) $f\left(\sqrt{10}\right) > 0$; г) $f\left(-\frac{10}{9}\right) < 0$?

43.28. $x_1 \approx 3{,}0$; $x_2 \approx -1{,}0$ — приближенные значения нулей квадратичной функции $f(x) = x^2 - px + q$. Можно ли утверждать, что:
а) $f(1) < 0$; в) $f(-0{,}97) > 0$;
б) $f\left(\sqrt{10}\right) > 0$; г) $f\left(-\frac{10}{9}\right) < 0$?

43.29. Витя Малеев вычислял приближенное значение выражения $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ исходя из того, что $\sqrt{2} \approx 1{,}4$. Сначала он вычислил его так: $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \approx \frac{1}{1{,}4 - 1} \approx 2{,}5$. Затем, вспомнив, что от иррациональности в знаменателе можно избавиться, вычислил так: $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}4$.
а) Какой результат точнее?
б) Вычислите приближенно $\frac{7}{2\sqrt{2} - 1}$.

43.30. Найдите приближенные значения корней уравнения $9x^2 - 3x\sqrt{5} - 1 = 0$ двумя способами. Возьмите $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ и вычислите сначала дискриминант, а потом уже приближенное значение корня.

43.31. Найдите длину отрезка числовой прямой, на котором лежат все числа x, приближенно равные 2, причем абсолютная погрешность не превышает 0,2.

43.32. Изобразите на координатной плоскости все такие точки $M(a;\ b)$, что округленные значения a и b соответственно равны 5 и -8. Вычислите площадь фигуры, образованной этими точками.

43.33. Докажите, что при положительных значениях чисел a и b справедливо неравенство $a < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}$ и, пользуясь данным неравенством и квадратами натуральных чисел, оцените: $\sqrt{25 + 1}$; $\sqrt{25{,}3}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{82}$; $\sqrt{228}$; $\sqrt{641}$; $\sqrt{1{,}02}$; $\sqrt{4{,}05}$; $\sqrt{40\,044}$.

43.34. Докажите, что при положительных значениях чисел a и b

$$\left(a + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{a^2 + b} = \frac{\frac{b^2}{4a^2}}{a + \frac{b}{2a} + \sqrt{a^2 + b}} < \frac{b^2}{8a^2}.$$

43.35. Пользуясь микрокалькулятором, вычислите приближенные значения квадратного корня по формуле $\sqrt{a^2 + p} = a + \frac{p}{2a}$ и оцените погрешность вычислений, используя результат задачи 43.34:

а) $\sqrt{1 + 0{,}3}$; в) $\sqrt{15{,}7} = \sqrt{16 - 0{,}3}$;

б) $\sqrt{9{,}2}$; г) $\sqrt{127}$.

§ 44. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

44.01. Запишите в стандартном виде число a, если:

а) $a = 1$; б) $a = 12\,345$; в) $a = 0{,}123454$; г) $a = 12{,}345$.

44.02. Переведите (если это вам необходимо) некоторые астрономические постоянные в удобные для вас единицы и сравните эти постоянные между собой.

а) 1 световой год $9{,}46 \cdot 10^{17}$ см;

б) 1 австрономическая единица (расстояние от Земли до Солнца) $1{,}50 \cdot 10^{13}$ см;

в) расстояние от Земли до Луны $3{,}84 \cdot 10^{10}$ см;

г) радиус Солнца $6{,}96 \cdot 10^{10}$ см;

д) радиус Земли $6{,}38 \cdot 10^{8}$ см;

е) радиус Луны $1{,}74 \cdot 10^{8}$ см;

ж) средняя орбитальная скорость Земли $2{,}98 \cdot 10^6$ см/с;
з) скорость света в пустоте $2{,}998 \cdot 10^{10}$ см/с;
и) масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{27}$ г;
к) масса Луны $7{,}35 \cdot 10^{25}$ г.

44.03. Запишите величины, равные вашему росту и массе, в стандартном виде, выражая рост в миллиметрах, а массу в миллиграммах. Сравните полученные числа с радиусом и массой Земли, выраженными в тех же самых единицах.

44.04. Узнайте, чему равно число молекул, содержащихся в одном моле: а) водорода; б) кислорода.

44.05. Определите число молекул в образце серы весом 10 г.

44.06. Определите, какой объем, выраженный в кубических сантиметрах, занимает 1 моль воды. Выразите этот объем в кубических миллиметрах.

44.07. Какой объем занимает одна молекула воды?

44.08. Какой диаметр имеет молекула воды, если считать, что она имеет форму куба?

ГЛАВА 8

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ 8-го КЛАССА

§ 45. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

45.01. Сколько существует разных двузначных натуральных чисел?

45.02. Сколько существует разных трехзначных натуральных чисел?

45.03. Сколько существует разных n-значных натуральных чисел?

45.04. Сколько различных натуральных чисел, меньших миллиарда (10^9), содержат в своей записи только цифру 9? Найдите сумму этих чисел.

45.05. Сколько разных девятизначных натуральных чисел содержат в своей записи восемь цифр 9 и одну цифру 8? Найдите сумму этих чисел.

45.06. Сколько различных девятизначных натуральных чисел содержат в своей записи восемь цифр 9 и одну цифру 0? Найдите сумму этих чисел.

45.07. Выпишите в порядке возрастания все пятизначные числа, в десятичную запись которых входят пять разных цифр: 3; 4; 6; 8 и 9.

45.08. Выпишите в порядке убывания все шестизначные числа, в десятичную запись которых входят шесть различных цифр: 0; 3; 5; 6; 8 и 9.

45.09. Построили в ряд 1001 человека и перенумеровали справа налево от первого до человека с номером 1001.
а) Какой номер имеет 183-й человек справа?
б) Какой номер имеет 183-й человек слева?
в) Сколько человек между людьми с номерами 187 и 873?
г) Какой номер могут иметь люди, стоящие рядом с человеком, имеющим номер 237?
д) Какой номер могут иметь люди, стоящие через 85 человек от человека с номером 237?

е) Какой номер могут иметь люди, стоящие через 300 человек от человека с номером 237?

ж) Каков номер человека, равноудаленного от первого и последнего в строю (если такой человек есть)?

з) Каков номер человека, перед которым стоит в 2 раза больше людей, чем после него (если такой человек есть)?

и) Каков номер человека, перед которым стоит в 3 раза меньше людей, чем после него (если такой человек есть)?

к) Каков номер человека, после которого стоит столько же людей, сколько стоит до человека с номером 749?

л) Чему равна сумма номеров двух людей, если до одного из них стоит столько же людей, сколько после второго.

м) Из строя вышли все люди с номерами, делящимися на 3. Сколько людей осталось в строю?

н) Первые 100 человек перешли в конец строя и встали в прежнем порядке за последним, затем людей заново перенумеровали. Какой номер стал у человека, имевшего номер 467? 53?

45.10. Существует ли наименьшее натуральное число?

45.11. Существует ли наибольшее натуральное число?

45.12. Найдите модуль разности двух натуральных чисел, если между ними нет ни одного натурального числа.

45.13. Сколько натуральных чисел находится на данном промежутке? Для каждого промежутка укажите наименьшее и наибольшее натуральные числа, находящиеся на нем (если такие есть):

а) (1,3; 9,7]; г) (1000; 1001);
б) [12; 122); д) (9999; 10 001).
в) (134; 1345];

45.14. Верно ли, что, если на промежутке вида $(a; b)$ содержатся натуральные числа, то среди них есть наименьшее и наибольшее?

45.15. Сколько натуральных чисел может содержаться на промежутке $(a; b)$, если $a > 0$ и $b - a = 73{,}5$?

45.16. Сколько натуральных чисел может содержаться на промежутке $(a; b)$, если $a > 0$ и $b - a = 735$?

45.17. Сколько натуральных чисел может содержаться на промежутке $[a; b)$, если $a > 0$ и $b - a = 73{,}5$?

45.18. Сколько натуральных чисел может содержаться на промежутке $[a; b)$, если $a > 0$ и $b - a = 735$?

45.19. Сколько натуральных чисел может содержаться на промежутке $[a; b]$, если $a > 0$ и $b - a = 735$?

45.20. Какие значения может принимать разность чисел c и a, если на промежутке $(a; c)$ находится ровно 442 натуральных числа?

45.21. Сколько натуральных чисел может содержаться на промежутке $(a; b)$, если $b - a = 73{,}5$?

45.22. Придумайте какой-либо квадратный трехчлен, между корнями которого заключено ровно 77 натуральных чисел.

45.23. Сколько существует разных целых чисел, квадрат которых не превосходит 10 003? Сколько среди них натуральных?

45.24. Докажите, что если $\sqrt{a}$ не является натуральным числом, то и a не является натуральным числом. Сформулируйте обратное и противоположное утверждения. Какие из них верны?

45.25. Какой процент среди трехзначных чисел составляют полные квадраты?

45.26. Какой процент среди четырехзначных чисел составляют полные кубы?

45.27. Покажите, что среди 98 двузначных натуральных чисел есть хотя бы два равных.

45.28. Какое наименьшее количество различных трехзначных чисел нужно взять, чтобы среди них наверняка было бы одно число:

а) оканчивающееся не на нуль;
б) со средней цифрой нуль;
в) без нулей в их десятичной записи?

45.29. Какое наименьшее количество натуральных чисел надо выписать, чтобы среди них наверняка были бы два числа с одинаковой последней цифрой?

45.30. Какое наименьшее количество натуральных чисел нужно выписать, чтобы среди них наверняка были бы два числа с одинаковой первой цифрой?

45.31. Не находя корней и дискриминанта квадратного уравнения $147x^2 - 3x - 922 = 0$, докажите, что оба его корня не могут быть одновременно натуральными числами.

45.32. Докажите, что если корни приведенного квадратного трехчлена — натуральные числа, то все его коэффициенты — целые числа.

45.33. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$ и существуют два разных натуральных числа n_1 и n_2 такие, что $f(n_1) = f(n_2) = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $f(n)$ — целое.

45.34. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ и существуют два разных натуральных числа n_1 и n_2 и такие, что $f(n_1) = f(n_2) = 0$. Верно ли, что при любом натуральном n число $f(n)$ — целое?

45.35. Каких трехзначных чисел больше — в записи которых есть цифра 9 или в записи которых нет цифры 9?

45.36. Каких девятизначных чисел больше — в записи которых есть цифра 9 или в записи которых нет цифры 9 (для вычислений можно использовать микрокалькулятор)?

45.37. Из числа 23 876 вычли 37, затем снова вычли 37 и так далее до первой разности, не являющейся натуральным числом. Определите:

а) количество операций вычитания;

б) последний натуральный результат.

45.38. Вычислите сумму

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \ldots - 887\,653 + 887\,654.$$

45.39. Найдите сумму всех трехзначных чисел, у которых вторая цифра 8, а третья 1.

45.40. Найдите сумму всех трехзначных чисел, у которых первая цифра 8, а третья 1.

45.41. Найдите сумму всех трехзначных чисел, у которых первая цифра 8, а вторая 1.

45.42. Найдите сумму и произведения всех целых чисел, заключенных между корнями уравнения $(x + 345{,}6)(x - 346{,}5) = 0$.

45.43. Сравните с нулем произведение всех целых чисел, заключенных между корнями уравнения $(x + 345{,}6)(x - 3465{,}7) = 0$.

§ 46. ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

На каждом из рисунков 29—42 на отрезке $[-5; 7]$ изображен график $y = f(x)$. При этом в некоторых случаях функция $y = f(x)$ не определена в одной или нескольких точках этого отрезка. Рассмотрите данный график и определите:

а) возрастает ли функция на отрезке $[-5; 7]$;

б) убывает ли функция на отрезке $[-5; 7]$;

в) сколько корней имеет уравнение $f(x) = p$ (значения p указаны на рисунке);

г) промежутки монотонности функции $y = f(x)$;

д) точки экстремума и виды этих точек: точки максимума и точки минимума;

е) экстремумы и виды этих экстремумов: максимумы и минимумы.

46.01. Рисунки 29, 30.

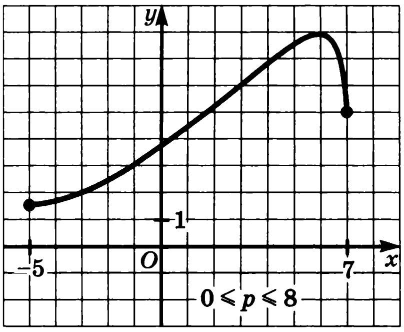


Рис. 29

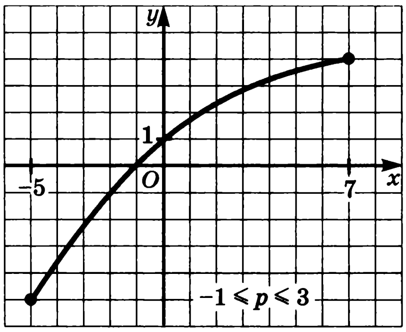


Рис. 30

46.02. Рисунки 31, 32.

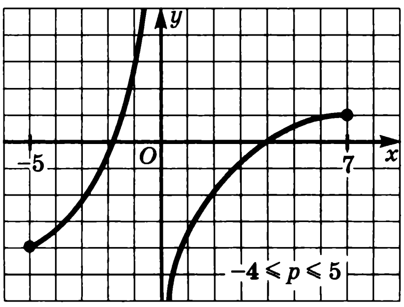


Рис. 31

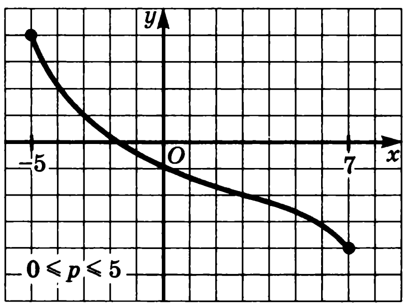


Рис. 32

46.03. Рисунки 33, 34.

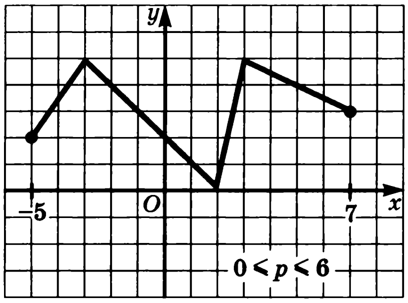


Рис. 33

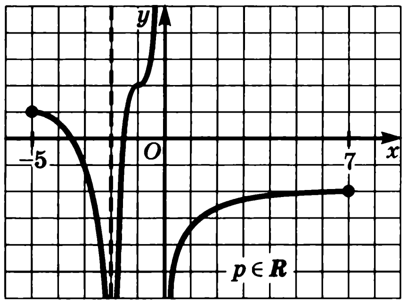


Рис. 34

46.04. Рисунки 35, 36.

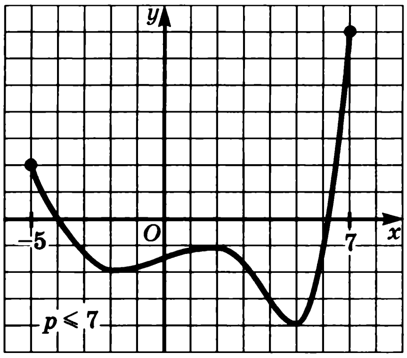


Рис. 35

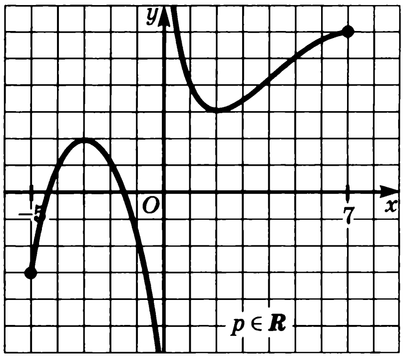


Рис. 36

46.05. Рисунки 37, 38.

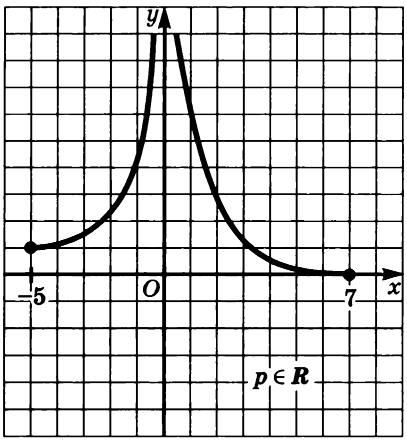


Рис. 37

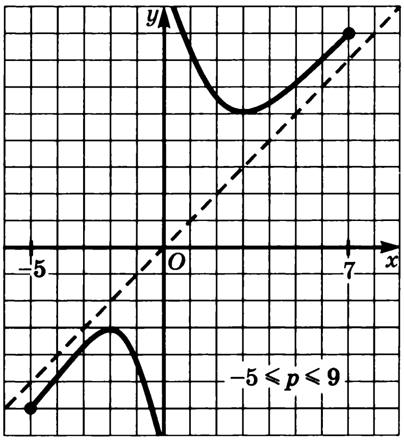


Рис. 38

46.06. Рисунки 39, 40.

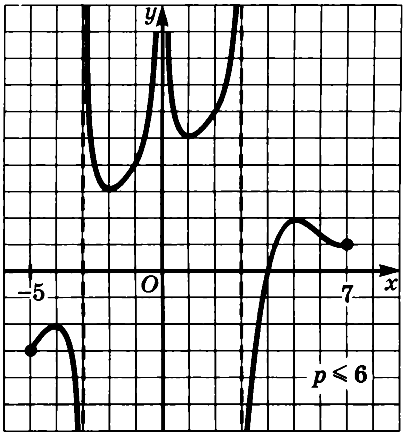


Рис. 39

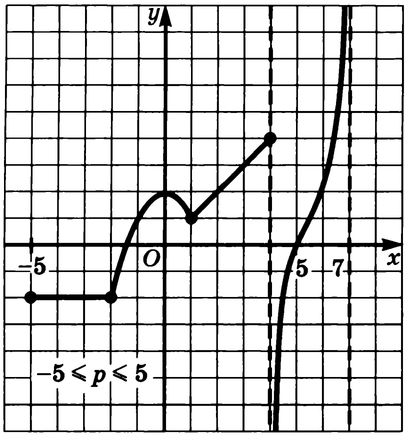


Рис. 40

46.07. Рисунки 41, 42.

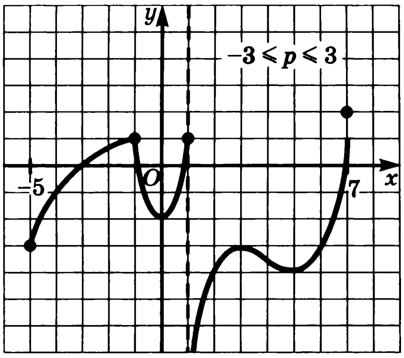


Рис. 41

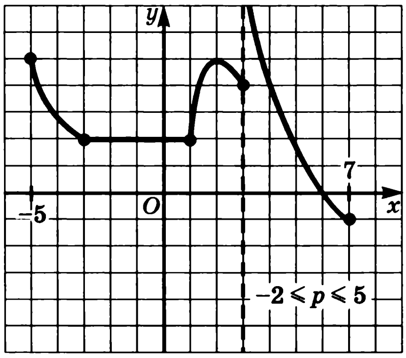


Рис. 42

46.08. Постройте график какой-либо непрерывной функции, заданной на промежутке. При этом функция считается непрерывной на промежутке, если весь ее график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

а) На отрезке $[-3; 5]$ функция возрастает, на отрезке $[5; 10]$ убывает и проходит через точки:

x	-3	0	5	6	8	10
y	-4	1	2	1,5	1,2	1

б) На отрезке $[-5; -3]$ функция убывает, на отрезке $[-3; 0]$ возрастает, на отрезке $[0; 7]$ убывает и проходит через точки:

x	-5	-4	-3	-2	0	3	7
y	4	1	0	8	12	0	-5

в) На отрезке $[-10; -2]$ функция постоянна, на отрезке $[-2; 1]$ убывает, на отрезке $[1; 8]$ постоянна и проходит через точки:

x	-9	-1	0	6
y	5	4	-1	-5

46.09. Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке I, если для любых чисел x_1 и x_2 из I из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Докажите, что приведенное выше определение равносильно следующим определениям.

а) Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке I, если для любых чисел x_1 и x_2 из I из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что разность $f(x_2) - f(x_1)$ положительна.

б) Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке I, если для любых различных чисел x_1 и x_2 из I $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

в) Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке I, если для любых чисел x и $x + h$ из I $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$.

46.10. Функция называется убывающей на промежутке I, если для любых чисел x_1 и x_2 из I из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Докажите, что приведенное выше определение равносильно следующим определениям.

а) Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке I, если для любых чисел x_1 и x_2 из I из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что разность $f(x_2) - f(x_1)$ отрицательна.

б) Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке I, если для любых разных чисел x_1 и x_2 из I $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.

в) Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке I, если для любых чисел x и $x + h$ из I $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0$.

46.11. Используя каждое из четырех приведенных в задачах 46.09, 46.10 определений, докажите, что:

а) функция $f(x) = 3x + 4$ возрастает на $\boldsymbol{R}$;

б) функция $f(x) = -2x + 11$ убывает на $\boldsymbol{R}$;

в) функция $f(x) = x^2$ возрастает на $[0; +\infty)$;

г) функция $f(x) = x^2$ убывает на $(-\infty; 0]$;

д) функция $f(x) = x^3$ возрастает на $\boldsymbol{R}$;

е) функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на $(-\infty; 0)$;

ж) функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает на $(0; +\infty)$;

з) функция $f(x) = \sqrt{x}$ возрастает на $[0; +\infty)$.

46.12. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, то функция $y = f(x + 1) - f(x)$ принимает на $\boldsymbol{R}$ только положительные значения.

46.13. Докажите, что если функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, то функция $y = f(x^2 + 1) - f(x)$ принимает на $\boldsymbol{R}$ только отрицательные значения.

46.14. Каждое, кроме одного, из приведенных ниже утверждений неверно. Найдите ошибки и неточности и исправьте их.

а) Функция $y = x^2$ убывает от $-\infty$ до 0 и возрастает от 0 до $+\infty$.

б) Функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на всей области своего определения.

в) Функция $y = -x^2$ имеет два промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ — промежуток возрастания, $(0; +\infty)$ — промежуток убывания.

г) Функция $y = \frac{1}{x^2}$ имеет два промежутка монотонности: $(-\infty; 0]$ — промежуток возрастания, $[0; +\infty)$ — промежуток убывания.

д) Функция $y = -x^2 - 12$ возрастает, если $x \in [-2; -1)$.

е) Функция $y = x^3$ имеет два промежутка монотонности: $(-\infty; 0]$ — промежуток возрастания, $[0; +\infty)$ — промежуток возрастания.

ж) Функция $y = \begin{cases} 2 + x, & x \leqslant -1, \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$ возрастает на $(-\infty; -1] \cup$ $\cup [0; +\infty)$ и убывает на $[-1; 0]$.

з) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

и) Любой максимум функции больше любого ее минимума.

к) Функция называется возрастающей, если ее значения становятся все больше и больше.

л) Если функция возрастает на $\boldsymbol{R}$, то у нее всегда найдется значение, большее 100.

м) Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке I, а функция $h(x)$ убывает на том же промежутке I, то справедливо неравенство $f(x) > h(x)$, если $x \in I$.

н) Если функция $f(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, то найдутся такие значения x, при которых $f(x) < 0$.

46.15. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает на промежутке I, то на этом промежутке:

а) функция $y = a + f(x)$, где a — любое число, возрастает;

б) функция $y = k \cdot f(x)\ (k > 0)$ возрастает;

в) функция $y = -f(x)$ убывает;

г) функция $y = k \cdot f(x)\ (k < 0)$ убывает.

46.16. Докажите, что если функция $f(x)$ убывает на промежутке I, то на этом промежутке:

а) функция $y = a + f(x)$ убывает;

б) функция $y = k \cdot f(x)\ (k > 0)$ убывает;

в) функция $y = -f(x)$ возрастает;

г) функция $y = k \cdot f(x)\ (k < 0)$ возрастает.

46.17. Используя доказанные в предыдущих номерах факты, исследуйте на монотонность функции:

а) $f(x) = x^2 + 2$;

б) $g(x) = 5x^2 - 11$;

в) $q(x) = 7 - 8x^2$;

г) $y = 2x^3 - 3{,}7$;

д) $\alpha(t) = 2 + \frac{1}{t}$;

е) $z(u) = 2 - \sqrt{u}$.

46.18. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(a; b)$, или на промежутке $(a; +\infty)$, или на промежутке $(-\infty; b)$, то:

а) функция $y = f(x + m)$ возрастает на промежутке $(a - m; b - m)$; $(a - m; +\infty)$; $(-\infty; b - m)$;

б) функция $y = f(kx)\ (k > 0)$ возрастает на промежутке $\left(\frac{a}{k}; \frac{b}{k}\right)$; $\left(\frac{a}{k}; +\infty\right)$; $\left(-\infty; \frac{b}{k}\right)$;

в) функция $y = f(-x)$ убывает на промежутке $(-b; -a)$; $(-\infty; a)$; $(-b; +\infty)$.

46.19. Докажите, что если функция $f(x)$ убывает на промежутке $(a;\ b)$, или на промежутке $(a;\ +\infty)$, или на промежутке $(-\infty;\ b)$, то:

а) функция $y = f(x + m)$ убывает на промежутке $(a - m;\ b - m)$; $(a - m;\ +\infty)$; $(-\infty;\ b - m)$;

б) функция $y = f(kx)$ $(k > 0)$ убывает на промежутке $\left(\frac{a}{k};\ \frac{b}{k}\right)$; $\left(\frac{a}{k};\ +\infty\right)$; $\left(-\infty;\ \frac{b}{k}\right)$;

в) функция $y = f(-x)$ возрастает на промежутке $(-b;\ -a)$; $(-\infty;\ a)$; $(-b;\ +\infty)$.

46.20. Используя доказанные в предыдущих номерах факты, исследуйте на монотонность функции:

а) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$;

б) $g(x) = (1 - 5x)^2 - 11$;

в) $q(x) = (8x - 5)^3$;

г) $\alpha(t) = 2 + \frac{5}{t + 3}$;

д) $z(u) = 2 + \sqrt{u - 1}$;

е) $y = 3 - \sqrt{x + 6}$;

ж) $E(v) = 7 - \sqrt{6 - 5v}$.

46.21. Докажите, что функция:

а) $y = ax^2$ $(a > 0)$ убывает на $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на $[0;\ +\infty)$;

б) $y = a(x - m)^2 + p$ $(a > 0)$ убывает на $(-\infty;\ m]$ и возрастает на $[m;\ +\infty)$;

в) $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ убывает на $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.

46.22. Докажите, что функция:

а) $y = ax^2$ $(a < 0)$ возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и убывает на $[0;\ +\infty)$;

б) $y = a(x - m)^2 + p$ $(a < 0)$ возрастает на $(-\infty;\ m]$ и убывает на $[m;\ +\infty)$;

в) $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ возрастает на $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.

46.23. Пусть функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a;\ b]$ и на промежутке $[b;\ c]$. Докажите, что функция $f(x)$ возрастает и на промежутке $[a;\ c]$.

46.24. Пусть функция $f(x)$ убывает на промежутке $[a; b]$ и на промежутке $[b; c]$. Докажите, что функция $f(x)$ убывает и на промежутке $[a; c]$.

46.25. Исследуйте на монотонность функцию:

а) $Y(x) = \begin{cases} -x^2 + 10, & x \leqslant -3; \\ 4 + x, & x > -3; \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \leqslant -1; \\ \sqrt{3 - x} - 3, & x > -1. \end{cases}$

46.26. Докажите, что если функции $g(x)$ и $f(x)$ возрастают на одном и том же промежутке I, то и функция $y = g(x) + f(x)$ возрастает на этом промежутке.

46.27. Докажите, что если функции $g(x)$ и $f(x)$ убывают на одном и том же промежутке I, то и функция $y = g(x) + f(x)$ убывает на этом промежутке.

46.28. Докажите, что функция $y = x^3 + 2x - 10$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

46.29. Докажите, что функция $y = \frac{1}{x} - 3\sqrt{x}$ убывает на $(0; +\infty)$.

46.30. Докажите, что функция $y = 3x^3 - \frac{5}{x}$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

46.31. Докажите, что если функция $y = f(x)$ возрастает и положительна на промежутке I, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ убывает на этом промежутке.

46.32. Докажите, что если функция $y = f(x)$ убывает и положительна на промежутке I, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ возрастает на этом промежутке.

46.33. Найдите промежутки монотонности функций: $y = x^2 + 5$; $y = \frac{1}{x^2 + 5}$ и $y = 3 + \frac{12}{x^2 + 5}$.

46.34. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = x^2 + 6x + 10$;

б) $y = \frac{6}{x^2 + 6x + 10}$;

в) $y = \frac{3}{x^2 + 6x + 10} + 11$;

г) $y = 1 - \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$.

Найдите промежутки монотонности функции (46.35—46.37):

46.35. а) $y = 3x^2 - x + 3$;

в) $y = \frac{3x^2 - x + 4}{3x^2 - x + 3}$;

б) $y = \frac{7}{3x^2 - x + 3} - 1$;

г) $y = \frac{7}{3x^2 - x + 3} - 3x^2 + x$.

46.36. а) $y = 1 + \sqrt{x + 1}$;

в) $y = \frac{\sqrt{x + 1}}{1 + \sqrt{x + 1}}$;

б) $y = \frac{2}{1 + \sqrt{x + 1}}$;

г) $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x + 1}}$.

46.37. а) $y = 2 + \sqrt{2 - x}$;

в) $y = \frac{1}{2 + \sqrt{2 - x}} - \frac{1}{x - 3}$;

б) $y = \frac{1}{2 + \sqrt{2 - x}}$;

г) $y = 5 - \frac{4}{2 + \sqrt{2 - x}}$.

46.38. Докажите, что если функции $g(x)$ и $f(x)$ возрастают и положительны на одном и том же промежутке I, то и функция $y = g(x) \cdot f(x)$ возрастает на этом же промежутке.

46.39. Докажите, что если функции $g(x)$ и $f(x)$ убывают и положительны на одном и том же промежутке I, то и функция $y = g(x) \cdot f(x)$ убывает на этом же промежутке.

46.40. Докажите, что если функции $g(x)$ и $f(x)$ возрастают и отрицательны на одном и том же промежутке I, то функция $y = g(x) \cdot f(x)$ убывает на этом же промежутке.

46.41. Докажите, что если функции $g(x)$ и $f(x)$ убывают и отрицательны на одном и том же промежутке I, то функция $y = g(x) \cdot f(x)$ возрастает на этом же промежутке.

46.42. Исследуйте функцию на монотонность:

а) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$;

б) $f(x) = (x^2 + 7)(x^2 + 11)$;

в) $f(t) = (t^3 + 5) \cdot \sqrt{t - 2}$;

г) $T(v) = (v^2 - 4v + 11) \cdot \sqrt{3v - 10}$;

д) $F(u) = \frac{1}{u^2}$.

46.43. Докажите, что если $y = f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, то и функция $y = f(f(x))$ возрастает на $\boldsymbol{R}$. Справедливо ли это утверждение для убывающей функции $f(x)$?

46.44. Исследуйте на монотонность функцию $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$.

46.45. Докажите, что если $y = f(x)$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, а функция $h(x)$ убывает на $\boldsymbol{I}$, то и функция $y = f(h(x))$ убывает на $\boldsymbol{I}$. Справедливо ли это утверждение, если $y = f(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, а $y = h(x)$ возрастает на $\boldsymbol{I}$?

46.46. Покажите, что если функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то наименьшее значение функции на этом отрезке равно $f(a)$, а наибольшее равно $f(b)$.

46.47. Покажите, что если функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(a; b)$, то на этом промежутке функция не достигает ни наименьшего ни наибольшего значения.

46.48. Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, и убывает на отрезке $[b; c]$, то своего наибольшего значения на отрезке $[a; c]$ функция достигает в точке b.

46.49. Докажите, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$ и возрастает на отрезке $[b; c]$, то своего наименьшего значения на отрезке $[a; c]$ функция достигает в точке b.

46.50. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 4x - 1$ на данном промежутке:

а) $(-3; 2]$; б) $[2; 5)$; в) $(-3; 5)$.

46.51. Найдите наименьшее значение функции $y = -2x^2 - x$ на данном промежутке:

а) $[-3; -1]$; в) $[-3; 5]$;
б) $[-1; 7]$; г) $(-3; 5)$.

46.52. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{1}{a - x}$ на отрезке $[a + 1; a + 4]$.

46.53. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{x + 1}{a - x}$ на отрезке $[a + 1; a + 4]$.

46.54. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 2$ на отрезке $[-1; a]$.

46.55. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 4x + 2$ на отрезке $[a - 4; a + 1]$.

46.56. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - ax$ на отрезке $[-1; 4]$.

46.57. Покажите, что если функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$ и для некоторого числа c из промежутка $(a; b)$ значение функции $f(c) = C$, то:

а) для всех x из промежутка $[a; c)$ верно неравенство $f(x) < C$;

б) для всех x из промежутка $(c; b]$ верно неравенство $f(x) > C$.

46.58. Покажите, что если функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$ и уравнение $f(x) = m$ имеет на этом отрезке корень x_0, то других корней на этом отрезке уравнение $f(x) = m$ не имеет.

46.59. Покажите, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$, то наименьшее значение функции на этом отрезке равно $f(b)$, а наибольшее равно $f(a)$.

46.60. Покажите, что если функция $f(x)$ убывает на промежутке $(a; b)$, то на этом промежутке функция не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значения.

46.61. Покажите, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$ и для некоторого числа c из промежутка $(a; b)$ значение функции $f(c) = C$, то:

а) для всех x из промежутка $[a; c)$ верно неравенство $f(x) > C$;

б) для всех x из промежутка $(c; b]$ верно неравенство $f(x) < C$.

46.62. Покажите, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$ и уравнение $f(x) = m$ имеет на этом отрезке корень x_0, то других корней на этом отрезке уравнение $f(x) = m$ не имеет.

46.63. Решите уравнения, используя свойство монотонности:

а) $x^3 + 5x = 18$;

б) $x^3 + 3x = 5\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 4} = 2$;

г) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 7} + \sqrt{3x + 19} = 10$;

д) $x^2 + \sqrt{x} = 9 + \sqrt{3}$;

е) $3x - \frac{2}{\sqrt{x}} = 6 - \sqrt{2}$.

46.64. Сколько корней может иметь уравнение $f(x) = a$, если функция $f(x)$ имеет 7 промежутков монотонности.

0.02. а) $129\frac{29}{102}$; б) $107\frac{29}{30}$; в) $3\frac{5}{49}$; $7\frac{2}{7}$. **0.03.** а) 4; б) −500; в) −100; г) −50; д) 51; е) −50; ж) −151; з) 0. **0.06.** б) 12...21 (всего 101 разряд); г) 101...01 (всего 99 разрядов); д) 100010001...0001 (всего 97 разрядов). **0.07.** а) 0; б) 7; в) 77; г) 7777. **0.08.** 10. **0.09.** 440. **0.10.** а) $\frac{43}{7}$; б) $\frac{43}{93}$; в) $\frac{4}{3}$. **0.11.** а) $-\frac{1}{7}$; б) 2,1. **0.12.** а) 401; б) 110; в) 40; г) 10; д) 171. **0.13.** От 15 до 21. **0.14.** Пятница или суббота. **0.15.** 4 или 5. **0.16.** 1128. **0.17.** 0. **0.18.** а) 13; б) 3.

0.19.

b	2,8	5,7	0,0768	57,2	24,28	68	161

0.20.

b	1,2	2,3	3,0096	7,52	11,05	20,04	$a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$

0.21.

b	0,8	1,7	2,04	0,48	4,4	4,62	$a\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)$

0.22.

b	5	$\frac{40}{3}$	937,5	$\frac{50}{11}$	$\frac{125}{3}$	$\frac{100}{39}$

0.23.

b	50%	$\frac{40}{3}$ %	10%	$\frac{50}{11}$ %	200%	750%	1000%	2200%

0.24. Уменьшилась на 4%. **0.25.** 26%. **0.26.** 75%. **0.27.** 48%. **0.28.** От 3% до 35%. **0.29.** 7,1%. **0.30.** Вес примерно увеличился на 2%. **0.31.** 20%. **0.32.** 20 кг. **0.33.** 200 жильцов. **0.34.** 15 учащихся, из которых 4 получили оценку «три». **0.35.** 2 ч 24 мин. **0.36.** 1 ч 24 мин. **0.37.** Мастеру 500 р., ученикам по 300 р. **0.38.** 65 км. **0.39.** а) 345 км; б) 45 км. **0.40.** 160 м. **0.41.** 120 м. **0.42.** 100 м. **0.43.** 60 м. **0.44.** Всего существует 900 различных трехзначных чисел, при этом самое большое число 999. Поэтому сумма всех трехзначных чисел меньше, чем $900\cdot999$. Но $900\cdot999 < 1000\cdot1000 = 1\,000\,000$. **0.45.** а) 23; б) 22; в) 44; г) 48; д) 44. **0.46.** Всего 8 разных одночленов. **0.48.** а) $-38x^2 - xy + 3y^2$; б) $-38x^2 + xy + 3y^2$; д) $128y^4 - 2y^2z^2 - 10z^4$; е) $72y^3z + 2yz^3$; ж) $4y^2z^2$. **0.52.** 142. **0.53.** а) $p^3 - 3pq$; б) $p^4 - 4p^2q + 2q^2$; в) $p^5 - 5p^3q + 5pq^2$. **0.54.** а) $y^{100} - x^{100}$; б) $y^{100} + x^{100}$. **0.55.** y^{16}. **0.56.** $y^{16} + y^8x^8 + x^{16}$. **0.58.** а) $5x - 4y$; б) $x^2 + xy + 2y^2$; в) $x^2 + xy + y^2$; г) $3x - xy + y^2$. **0.59.** а) 1; б) 12 343,12.
0.62. $888\,777\cdot888\,777$. *Указание.* Обозначить $a = 888\,777$. **0.63.** $(888^2 + 3\cdot888 + 1)^2$. *Указание.* Обозначить $a = 888$. Тогда

$888 \cdot 889 \cdot 890 \cdot 891 + 1 = a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1 = (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1 = (a^2 + 3a)^2 + 2 \cdot (a^2 + 3a) + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2$. **0.64**. 2003. **0.67**. а) 1, при $x + 2y = 0$; б) -2, при $x = -8$, $y = -2$; в) 1, при $x + 2y = 0$; г) 7, при $x + y + 1 = 0$, $z = 2$. **0.70**. а) -1; б) 2. **0.71**. 12, при $x = 0{,}125$; $y = -1{,}875$. **0.72**. -2, при $x = 0{,}5$. **0.73**. -17, при $x = -1$, $y = -2$. **0.74**. 3. *Указание.* Найдем числа α и β такие, что

$$\alpha(3x - 2y - z) + \beta(x + 2y + 2z) = 4z + 6y - 5x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3\alpha + \beta)x + (-2\alpha + 2\beta)y + (-\alpha + 2\beta) = -5x + 6y + 4z.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = -5, \\ -2\alpha + 2\beta = 6, \\ -\alpha + 2\beta = 4, \end{cases}$$

из которой находим $\alpha = -2$; $\beta = 1$. По условию $3x - 2y - z = 1$, $x + 2y + 2z = 5$, поэтому $4z + 6y - 5x = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 3$. **0.75**. $-0{,}2$. (См. *указание* к задаче 0.74.) **0.76**. 2. (См. *указание* к задаче 0.74.)

1.01. а) $x = 4$; б) $a = 5$ и $a = -8$; в) $t = 0$ и $t = 4$; г) $v = -2$; д) таких значений нет; е) таких значений нет; ж) $t \geqslant 0$; з) $t = 0$ и $t = 1$; и) $a = -0{,}5$; $b = 2$; к) $s = t$ и $s = -5t$; л) $b = -1$; $b = 0$; $b = 2$; м) $z = -2$; $z = 1$; $z = 10$. **1.02**. а) $b \neq 2$; б) $a \neq -\frac{2}{3}$; в) $l \in (-\infty; +\infty)$; г) $c \neq -\frac{7}{3}$; $c \neq 3$; д) $a \neq \pm 5$; е) $a \neq \pm 5$; ж) $h \neq \pm 1$; з) $x \in (-\infty; +\infty)$; и) $k > 0$; к) $a \neq -2$; $a \neq 3$; л) $s \in (-\infty; +\infty)$; м) $d \neq -5$; $d \neq 0$; $d \neq 1$. **1.03**. а) $a = 0$; б) $a \geqslant 5$; в) $a < -8$; г) $a \geqslant 11$ или $a < 3$; д) $-1 \leqslant a \leqslant 1$; е) $a < -2$ или $a > 2$; ж) $a \leqslant -100$ или $a = 0$, или $a \geqslant 100$; з) $a < -3$ или $a > 3$, или $-1 < a < 1$. **1.04**. а) $a < -1{,}5$; б) $a > -1{,}5$; в) $a > -1{,}5$; г) $a < -1{,}5$; д) $a > 1{,}1$; е) $a \leqslant -2{,}5$ или $a > -1{,}5$; ж) $a > 0{,}5$; з) $a < -3{,}5$ или $a > -0{,}5$. **1.05**. а) При целых значениях $a \leqslant 1$; б) при целых значениях $a \geqslant 2$; в) при $a = 2$; 3; 4; 5; 6; г) при $a = -10$; -9; -8; ...; 0; 1; д) таких целых значений a не существует; е) таких целых значений a не существует; ж) при целых значениях $a \leqslant 0$ или при целых значениях $a \geqslant 5$; з) при $a = 1$. **1.06**. а) $a \leqslant -8$; б) $a > 1$; в) $1 < a < 7$; г) $a \leqslant -8$; д) $a > 1{,}1$; е) $1 < a < 2$; ж) $a \leqslant -9$ или $a > 4$; з) $0 < a \leqslant 1$. **1.07**. а) При всех отрицательных значениях a; б) при любых значениях a; в) ни при каких значениях a; г) при $a = 0$. **1.08**. а) $(3t; -8t)$, где t — любое число; б) $(3t; -5t)$, где t — любое число; в) $(2t; -5t)$ и $(4t; -5t)$, где t — любое число; г) $(0; 0)$; д) $(t; -2t)$ и $(3t; -4t)$, где t — любое число; е) $(1; t)$ и $(t; 1)$, где t — любое число. **1.09**. а) $-\frac{14}{17}$; дробь не определена; $\frac{2}{7}$; 0; $-\frac{18}{55}$; $-\frac{133}{153}$;

б) $-\frac{5}{26}$; 0,6; дробь не определена. **1.10.** $f(1) = -\frac{1}{3}$; $f(-3) = 5$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{12}$; $f(x + 1) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 6}$; $f(3x - 1) = \frac{9x^2 - 9x}{3x + 4}$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{5x^2 + x - 1}{5x^2 + x}$. **1.11.** 1. **1.12.** $-15{,}8$. **1.13.** а) $\frac{x}{a}$; не изменилось; б) $\frac{1}{x}$; изменилось; в) $\frac{1}{5x}$; не изменилось; г) $\frac{1}{|x|}$; не изменилось; д) $\frac{|x|(x^2 + 1)}{|x| + 1}$; изменилось; е) $\frac{4n - d}{3}$; изменилось; ж) $\frac{2(x + 4)}{x^2 + 4x + 16}$; изменилось; з) $\frac{1}{x}$; не изменилось. **1.14.** а) $\frac{c - d}{f - d}$; б) $\frac{a - b + c}{b - a + c}$; в) $\frac{t^2 + 2t + 2}{t}$; г) $\frac{c - b}{b - a}$. **1.15.** а) $x \neq 1$; б) $x \neq 2$; в) $x \neq 0$ и $x \neq 1$; г) $x < 0$. **1.16.** а) При $a = 3$ значение дроби равно 1 при всех $t \neq 3$; б) при $a = 1$ значение дроби равно -1 при всех $t \neq -2$. **1.17.** При $a = -5$. **1.18.** При $a = 6$. **1.19.** а) 3; б) -3; в) решений нет; г) если $a \neq -6$, то $x = a$; если $a = -6$, то уравнение не имеет решений. **1.20.** а) $x = 2$; б) $x = 2$; в) решений нет; г) если $a \neq 2$, то $x = 2$; если $a = 2$, то уравнение не имеет решений. **1.21.** а) 3; б) -1; в) решений нет; г) если $a \neq \pm 2$, то $x = a$; если $a = 2$ или $a = -2$, то уравнение не имеет решений. **1.23.** а) Все точки прямой $x = 1$, за исключением точки (1; 1); б) все точки прямой $x = y$, за исключением точки (0; 0); в) таких точек не существует; г) все точки прямой $y = x - 1$, за исключением точки $(0; -1)$. **1.24.** а) Если $c \neq -1$, то $x = -1$; если $c = -1$, то решений нет; б) если $c \neq 5$, то $x = c$; если $c = 5$, то решений нет; в) если $c \neq 8$, то $x = c - 4$; если $c = 8$, то решений нет; г) если $c \neq 1$, то $x = \frac{4c + 3}{c - 1}$; если $c = 1$, то решений нет; д) если $b \neq 0$ и $b \neq -1{,}5$, то $x = \frac{3}{b}$; если $b = 0$ или $b = -1{,}5$, то решений нет; е) если $b \neq 2$, то $x = 0$; если $b = 2$, то уравнению удовлетворяет любое значение x за исключением числа -2. **1.25.** а) $y = \frac{23 - 4x}{x - 2}$; б) $k = \frac{x - 4}{x^2 - x}$; в) $x = \frac{5 + yz - 2y^2}{1 + 2y - z}$; г) $z = \frac{1}{-y + \frac{1}{1 - x}}$. **1.26.** *Указание.*

Так как уравнение имеет решение при любом значении b, то оно имеет решение при $b = 0$. Отсюда находим, что $a = 2$. Осталось проверить, что при $a = 2$ данное уравнение имеет решения при любом значении b.

2.01. б) $\frac{3y}{x+3y}$; в) $\frac{x-y}{7-x}$; г) $\frac{10x}{2x-3y}$. **2.02.** а) 9; б) 1, при $7x \neq 3y$; в) -1, при $17z \neq 5y$; г) -1, при $2x \neq 3y$. **2.03.** а) 3, при $t \neq 7z$; б) 5, при $x \neq 0$ и $x \neq y$. **2.04.** а) -1, при всех a; б) $5m - 3$, при $5m - 3 \neq 0$; в) $0{,}2t - 10$, при $t \neq 50$; г) $\frac{1}{7b-15}$, при $7b + 15 \neq 0$; д) $\frac{12x+7}{12x-7}$, при $12x - 7 \neq 0$; е) $\frac{1}{1-y}$, при $y \neq 2$, $y \neq 1$. **2.05.** а) 20; б) $-12{,}5$.

2.07. б) $\frac{5a^2}{a-b}$; в) $\frac{3t^2}{2-3t}$; г) $\frac{9}{r+3}$. **2.08.** а) $\frac{7x}{15y}$; в) $\frac{10(p+q+r)}{pqr}$; г) 0.

2.10. б) $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$. **2.11.** а) $\frac{100}{(b^2-25)^2}$; б) $\frac{16m^2}{(4m^2-25n^2)^2}$. **2.13.** а) 500; б) 2,01; в) 3,21. **2.14.** 0. **3.15.** 0. **2.18.** а) $\frac{22}{7}$; б) -6; в) $x = \frac{ah}{b+h}$; г) $x = \frac{a(h-R)-R^2}{h}$. **2.19.** $a = 3$; $b = -2$. **2.20.** $a = -0{,}5$; $b = 1{,}5$. **2.21.** $a = -2{,}5$; $b = 4{,}5$. **3.23.** $a + b + c$. **2.24.** а) 4; б) 0. **2.25.** 0,99.

3.01. а) $\frac{2pq}{x}$; б) $\frac{15bc}{2a}$; в) $\frac{25n^2}{245p^2m^2}$; г) $\frac{20c}{ab}$. **3.02.** а) $\frac{10x}{y}$; б) $-\frac{2t^2}{5z^2}$; в) $-\frac{5xy}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **3.03.** а) $\frac{a}{b}$; б) b. **3.04.** а) $\frac{x+y}{x}$; б) $\frac{a}{a-4}$;

3.05. а) $\frac{(x-5)(x-4)}{6}$; б) $\frac{(a+1)(a+2b)}{12}$. **3.06.** а) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$; б) $(2a + 1)n$. **3.08.** а) $\frac{2}{a}$; б) $-\frac{c}{8b}$. **3.09.** а) $\frac{1}{x-1}$; б) $\frac{y-2}{y-3}$. **3.10.** а) $\frac{(3-a)(b+1)}{2(b^2+b+1)}$; б) $\frac{(3-b)(3+2b)}{2}$. **3.12.** а) 1, если $x \neq -1$; б) x, если $x \neq \frac{1}{3}$.

3.13. а) $y = 2x - 1$, $x \neq 1$; б) $y = 5x$, $x \neq 0$ и $x \neq -1{,}5$; в) $y = 0{,}5(x + 4)$, $x \neq 0$, $x = 4$; г) $y = x + 1$, $x \neq -2$. **3.14.** а) $y = x + 3$, $x \neq 2$, $x \neq 0$; б) $y = 6(x + 4)$, $x \neq -3$, $x \neq 1$. **3.16.** $R_{общ} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$.

3.17. $\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$. Средняя скорость изменится и станет равной $\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{(k+1)(v_1+v_2)}$.

4.01. а) $a^4 - 16b^4$; б) $81n^4 - p^4$; в) $8m^6 - n^3$; г) $-c^3 - 8p^6$. **4.02.** а) $d + 2$; б) 0. **4.03.** а) 2; б) 0. **4.04.** а) $-\frac{a}{2(a-b)}$; б) $\frac{1}{5c+1}$. **4.05.** а) 0; б) 0; в) $\frac{b+2}{b}$; г) 1. **4.06.** а) 0,25; б) $\frac{19}{11}$; в) $-0{,}6$; г) $\frac{5}{3}$. **4.07.** а) $-\frac{1}{2(3a+1)}$; б) $\frac{2a}{a^2+a+1}$. **4.08.** а) $\frac{2n-1}{n}$; б) $\frac{9}{x-y}$. **4.09.** а) $\frac{x-1}{1-3x}$; б) $\frac{(a+1)x-a}{a-x}$; в) $\frac{9-5x}{14x-25}$; г) $\frac{(a^2+bk)x+(a+m)k}{(a+m)bx+(m^2+bk)}$. **4.10.** а) $\frac{1}{1-x}$; б) $\frac{4}{2-x}$.

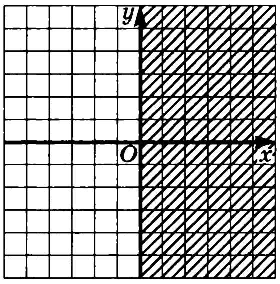
5.01. а) -3; б) 1; в) 0; 11; г) 0; $-\frac{5}{7}$. **5.02.** а) Нет корней; б) 40. **5.03.** а) $\frac{10}{3}$; б) 0,5. **5.04.** $-\frac{5}{9}$. **5.05.** $-0{,}5$. **5.06.** а) -1; б) общих точек нет. **5.07.** а) 2; б) -1. **5.08.** а) Решений нет; б) -3; в) 0; г) решений нет. **5.09.** а) x — любое действительное число; б) x — любое действительное число, кроме 1. **5.10.** а) 1; б) 3. **5.11.** а) 3; б) 2. **5.12.** а) При $a = -11$ и при $a = \frac{10}{3}$ решений нет, при прочих a $x = -\frac{4a+11}{a+11}$; б) при $a = 1$ и при $a = 3$ решений нет, при прочих a $x = \frac{a-5}{a-1}$; в) при $a = 4$ или $a = 6$, или при $a = 8$ уравнение имеет только один корень $x = 0$; при других значениях a, т. е. при $a \neq 4$, $a \neq 6$ и $a \neq 8$ уравнение имеет два корня: $x = 0$; $x = \frac{6-a}{a-4}$; г) при $a = -0{,}5$ или при $a = -6$, или $a = 5$ уравнение имеет единственный корень: $x = 0$; при прочих значениях a корнями являются $x = 0$ и $x = -\frac{6+a}{1+2a}$. **5.13.** а) При $a = -17$, $x = 3$; б) при $a = 1$, $x = 1$; в) при $a = 3$, $x = 3$; г) при $a = 18$, $x = 2$. **5.14.** 8. **5.15.** а) (5; 1); б) (1; 1).

6.21. $a^2 < a < 1 < a + a^{-1} < a^2 + a^{-2} < 2a^{-2}$.

7.04. $\frac{26}{17}$; $\frac{27}{17}$; $\frac{28}{17}$. **7.05.** а) Нет; б) может. **7.06.** 1197. **7.07.** $\frac{223}{225}$; верно. **7.09.** 4. **7.21.** а) 8; б) 1; г) 5. **7.22.** $1 = \frac{1}{42} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь равенством $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ и найдите аналогичные суммы. **7.23.** 8. **7.28.** Есть только одна дробь $\frac{1}{53}$. **7.29.** $\frac{2}{3}$. **7.32.** Верно.

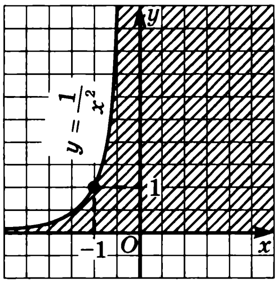
8.03. Равенство можно записать в виде $b^2 = -1 - (a - 1)^2$. Отсюда видим, что при любом значении a число $-1 - (a - 1)^2 < 0$, в то время как $b^2 \geqslant 0$. **8.07.** При $a \neq 0$. **8.08.** При $a = 0$. **8.11.** Неверно. **8.12.** $a = 0$, $b = 5$. **8.13.** а) Если $ab \geqslant 0$; б) если $a \leqslant 0$, $b \leqslant 1$; в) если $a \geqslant -4$, $b \leqslant 0$; г) если a — любое число, $b > -1$; д) если $a = 0$, $b < 0$; е) если $y = 0$, то x — любое число, или если $y \neq 0$, то $x \leqslant 0$; ж) если x, y — любые числа; з) если $x = 0$, то y — любое число, или если $x \neq 0$, то $y \leqslant 2$; и) если $x + 1 = 0$ или $y - 2 = 0$. **8.18.** 1, 4, 5, 6, 9. **8.19.** а) Квадрат не может оканчиваться на 7; б) на 2; в) на 3; г) на 7. **8.22.** в) Предпоследней цифрой может быть одна из следующих: 0, 2, 4, 6, 8. **8.24.** *Указание.* Последовательные квадраты натуральных чисел отличаются друг от друга на нечетное число. В самом деле, разность квадратов двух последовательных натуральных чисел $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, т. е. является нечетным числом. Самое большое двузначное число, являющееся полным квадратом, есть число $9^2 = 81$, для которого $n = 9$. Поэтому наибольшее число последовательных двузначных чисел, среди которых нет ни одного полного квадрата, равно $2 \cdot 9 + 1 = 19$. Значит, среди двадцати последовательных двузначных чисел всегда будет хотя бы один полный квадрат. **8.25.** $198 = 100^2 - 99^2 - 1$. (См. *указание* к 14.24.) **8.26.** 630. **8.27.** Существуют, так как, например, между числом $10\,000^2 = 10^8$ и следующим квадратом $10\,001^2$ находится 20 000 чисел, среди которых нет ни одного полного квадрата. **8.28.** Купили 11 тетрадей по 11 р. за каждую. **8.29.** а) 0; ± 1; $\pm\sqrt{2}$; решений нет; ± 2; $\pm\sqrt{5}$; б) 4; решений нет; $-2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; $-1{,}5$ или $4{,}5$; $\frac{-2 \pm \sqrt{6}}{11}$. **8.30.** а) ± 1; б) ± 2; в) ± 1; г) ± 3; д) -3; -1; е) 0,2; 1. **8.33.** а) 5; б) 19; в) -8; г) -21. **8.34.** г) 6. **8.35.** б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. *Указание.* Представьте число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ в виде $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$, где $5 + 2\sqrt{6} < 10$; г) $\sqrt{5} + \sqrt{8} - \sqrt{3} - \sqrt{10}$. **8.36.** 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4. В списке число 100 содержалось бы 201 раз. **8.37.** а) 25; б) нет корней; в) -14; г) 0; 2; д) 0; е) нет корней. **8.38.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $-\frac{3}{5}$ и $\frac{31}{3}$. **8.39.** а) $(-3; 4)$; б) $\left(-\frac{2}{3}; 7\right)$; в) $(1; 1)$; г) $(-3; 2)$ и $(-3; -2)$; д) $(1; 4)$, $(-1; 4)$, $(1; -4)$, $(-1; -4)$. **8.40.** а) $(4; 1)$, $(4; -1)$; б) $(3; 1)$, $(3; -1)$, $(-3; 1)$, $(-3; -1)$. **8.43.** Не может, так как квадрат натурального числа имеет нечетное число делителей.

8.44. а)

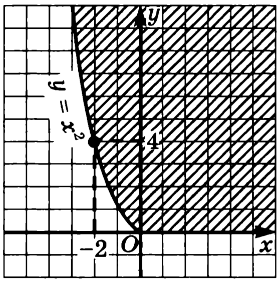


Правая полуплоскость;

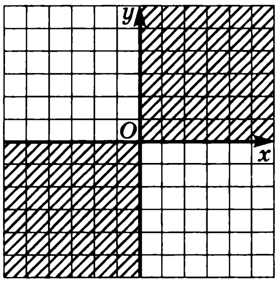
б)



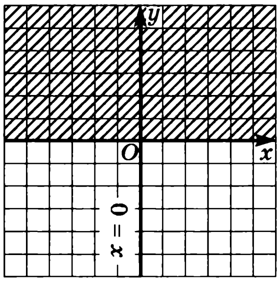
в)



г)

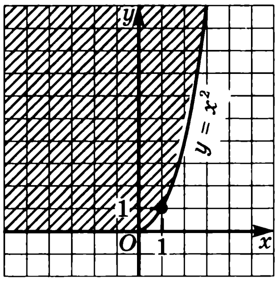


д)

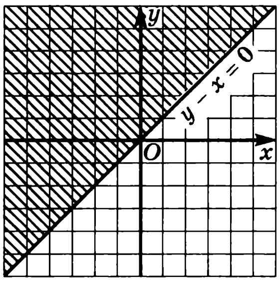


ось Oy: $x = 0$ и вся верхняя полуплоскость;

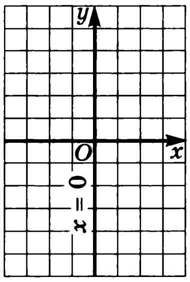
е)



ж)

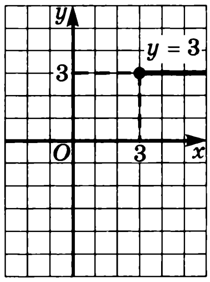


з)



только все точки оси Oy: $x = 0$;

и)

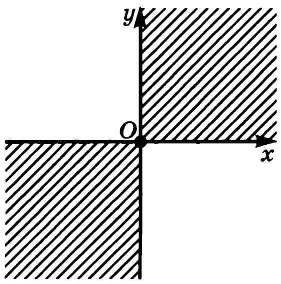


9.05. Может, например $2 - \sqrt{5}$ и $3 + \sqrt{5}$. **9.06.** Может, например $3 - \sqrt{2}$ и $6 + \sqrt{8}$. **9.07.** Может, например $\sqrt{12}$ и $\sqrt{3}$. **9.08.** Могут, например $2 - \sqrt{5}$ и $2 + \sqrt{5}$. **9.09.** Не может. **9.10.** Может, но только в том случае, если рациональное число равно нулю. **9.11.** Не могут. В самом деле, пусть α и β — иррациональные числа и $\alpha - \beta = a$ — *рациональное число*. Тогда $\frac{\alpha - \beta}{\beta}$ — иррациональное число. **9.12.** Доказательство от противного. **9.13.** Доказательство от противного. **9.14.** Доказательство от противного. **9.15.** Доказательство от противного. **9.16.** Доказательство от противного. **9.17.** Например, 1,1 и 1,11; $0{,}1\sqrt{122}$ и $0{,}1\sqrt{123}$. **9.18.** Начиная с шестой после запятой цифры. Больше $\frac{2}{3}$. **9.19.** 1. **9.20.** 0. *Указание.* $\sqrt{334} - \sqrt{333} = \frac{1}{\sqrt{334} + \sqrt{333}}$. **9.21.** Например, $1 - \sqrt{0{,}00001}$ и $1 + \sqrt{0{,}00001}$. **9.22.** Могут, например $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$. **9.23.** Могут, например $4 - \sqrt{15}$ и $4 + \sqrt{15}$. **9.24.** Например, $\frac{\sqrt{2}}{300}$; $\frac{\sqrt{2}}{299}$; ...; $\frac{\sqrt{2}}{201}$. **9.25.** Рациональным. **9.26.** Например, $x^2 + 2x - 6$. **9.27.** Например, $x^4 + 10x^2 + 1$. **9.28.** Например, $(\pi; 3\pi + 7)$ и $(\sqrt{2}; 3\sqrt{2} + 7)$. Рациональным. **9.29.** Только одна точка (0; 5). **9.31.** Есть, например, точки с абсциссами $\frac{n - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, где n — целое число. **9.32.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет; ж) да. **9.33.** Нет. **9.34.** Использовать теоремы Пифагора и Фалеса. **9.35.** а) Встретятся через 221 с в точке T и далее будут встречаться через каждые 221 с в точках P, M, K и т. д.; б) материальные точки никогда не встретятся.

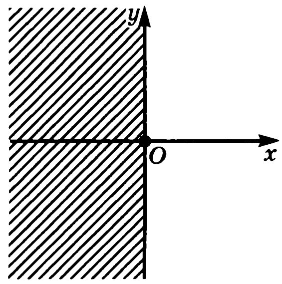
10.16. Строим отрезки $a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, $b = \sqrt{2} - 1$ и $c = \frac{2a - b}{2}$. Длина отрезка c равна 1. Поэтому откладываем от точки 1 влево отрезок, равный c. **10.19.** $a = \pm\frac{8}{5}$. **10.20.** $a = \pm\frac{3}{7}$. **10.21.** $a = -1$ или $a = 3$. **10.22.** Таких a не существует. **10.23.** $\frac{10}{3}$. **10.25.** $\frac{x_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda}$. **10.36.** $0 < \varepsilon \leqslant 1$. **10.37.** $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}3$.

11.01. а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a > b$. **11.02.** а) $a < b$; б) $a \geqslant b$; в) $a > b$; г) $a \leqslant b$. **11.03.** а) $a < b$; б) $a > b$; в) $a \leqslant b$; г) $a > b$. **11.04.** $\frac{1}{d} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. **11.05.** а) $b > c$; б) $b > d$; в) $ab > ac$; г) $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. **11.08.** а) Верно; б) неверно; в) верно; г) неверно. **11.09.** а) $a - b > 2(a + b)$; б) $a^2 < a$; в) $a^2 + b^2 \leqslant 0$; г) $(a + b)^2 \leqslant 0$; д) $a^2 - b^2 \geqslant a^2 + b^2$; е) $\sqrt{a} > a$; ж) $a^2 + b^2 \leqslant -2ab$; з) $\frac{a+b}{2} > b$. **11.12.** а) $\sqrt{231} - 55 < 0 < 1 < \sqrt{10} < 3{,}4 < 3\frac{37}{40}$; б) $a - c^2 - 11 < a - \sqrt{11} < a - 3 < a + 8 < \frac{3a + 25{,}7}{3}$. **11.13.** а) $c^2 + \sqrt{c^2 + 3} > c^2 > c^2 - 0{,}(3) > c^2 - \frac{101}{301} > c^2 - 8\sqrt{c^2 + 3}$; б) $\frac{2}{\sqrt{6} - 2} > \frac{4}{1 - \sqrt{0{,}0001}} > \sqrt{10} > \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} > -a^2 + 2a - 3$.

11.14. в)

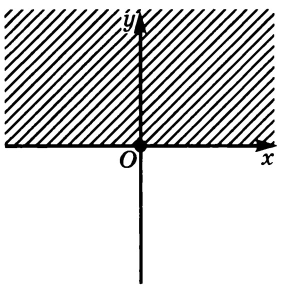


г)



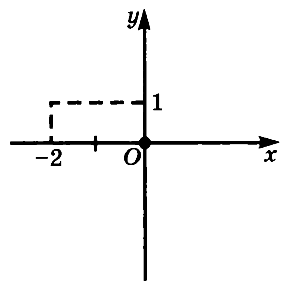
Левая полуплоскость и положительный луч оси Ox;

д)



верхняя полуплоскость и отрицательный луч оси Oy;

е)



только одна точка $(-2; 1)$.

11.16. а) 1 и 2; б) 3 и 4; в) 7 и 8; г) 13 и 14; д) 27 и 28. **11.17.** [0; 16). **11.18.** (0,25; 2). **11.19.** $(-\infty; -2) \cup (0,25; +\infty)$. **11.20.** $\left(\frac{8}{9}; 8\right)$.

11.21. $\left(-4; -2\frac{2}{3}\right)$. **11.22.** а) 139; б) 96. **11.23.** а) 20; б) 35. **11.24.** −18.

11.25. −1. **11.26.** 3 и −10,75. **11.27.** 143,5 и 7,375. **11.28.** 182 и −12. **11.29.** 64 и 164. **11.30.** а) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{9}\right)$; в) $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{19}\right)$;

г) $\left(-14\frac{2}{3}; -4\right)$; д) $\left(\frac{5}{9}; 5\right)$; е) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$; ж) $(-\infty; -7) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$. *Указание.* При $1 < a < 3$ и $a \neq 2$ запишем: $a^2 - 2a = (a - 1)^2 - 1$. Тогда $0 < a - 1 < 2$ и $a - 1 \neq 1 \Rightarrow 0 < (a - 1)^2 < 4$ и $(a - 1)^2 \neq 1 \Rightarrow -1 < (a - 1)^2 - 1 < 3$ и $(a - 1)^2 - 1 \neq 0$. Поэтому при $-1 < (a - 1)^2 - 1 < 0$ найдем $\frac{7}{a^2 - 2a} < -7$, а при $0 < (a - 1)^2 - 1 < 3$ получим $\frac{7}{3} < \frac{7}{a^2 - 2a}$. **11.31.** Нет. *Указание.* Записать неравенство в виде $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 < 9$ и получить оценки $0 \leqslant x \leqslant 6$ и $-7 \leqslant y \leqslant -1$. Далее убедиться, что точка (0; 1), в которой разность $x - y = 1$, не удовлетворяет данному неравенству. **11.32.** См. *указание* к задаче 29.43. **11.33.** а) $-1 < ab < 1,35$; б) $-4 < m(n + 3) < 3,52$. **11.34.** а) [−24; 53]; б) [−24; 33].

12.01. а) 2; б) 3; в) нет; г) 0; д) нет; е) 10. **12.04.** а) −1; б) −2; в) нет; г) −11; д) нет; е) −13. **12.07.** а) 4; б) −3; в) 1; г) −4; д) 1; е) −1. **12.09.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 16; г) $\frac{35}{6}$. **12.11.** а) $y = \sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$; б) $y = \sqrt{x + 3}$ при $x \geqslant -1$; в) $y = \sqrt{x}$ при $x \geqslant 1$; г) $y = \sqrt{x + 5}$ при $x > 0$. **12.12.** 2. **12.31.** При $a = 2$. **12.32.** При $b = -1$. **12.33.** При $a = -9$; $b = 16$. **12.34.** Не может. **12.35.** $a = -5$; $b = 2$; $c = 1$. **12.36.** $a = -1$; $b = -5$. **12.37.** $a = -1$; $b = 5$; **12.38.** $a = -100$; $b = 5$. **12.39.** $a = 2$; $b = -11$. **12.42.** (4; 6).

13.01. а) 15; б) 60; в) 144; г) 0,000008. **13.02.** а) 784; б) 216; в) 196; г) 0,0000008. **13.03.** а) 4; б) 5; в) 162; г) 0. **13.04.** а) $a = 59$; $b = -30$; б) $a = 31$; $b = 12$; в) $a = 149$; $b = 14$; г) $a = 240$; $b = -120$; д) $a = 6$; $b = 109$; е) $a = -2$; $b = 49$; ж) таких чисел нет. **13.05.** а) $a = b = 1$; б) $a = 2$; $b = -1$; в) $a = 1$; $b = 3$; г) $a = 1$; $b = -2$; д) $a = 2$; $b = 1$; е) $a = 1$; $b = -2$. **13.06.** а) $\sqrt{2} - 1$; б) $2 + \sqrt{3}$; в) $\sqrt{6} - 1$; г) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; д) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}$; е) $\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}$. **13.08.** а) $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; б) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; в) $a = 0$, $b \leqslant 0$; или $a > 0$, $b = 0$; г) $a \geqslant 0$, $b > 0$; д) $a \leqslant 0$, $b < 0$;

е) $a = 0$, $b > 0$; ж) выражение не определено ни при каких значениях a и b; з) $a \geqslant 0$; и) $a \leqslant 0$; к) a — любое число; л) $a = 0$; м) если $y = 0$, то x — любое число или $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; н) если $y = 0$, то x — любое число или $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$. **13.09.** а) $m = n = 1$, $a = 6$; б) $m = n = 1$, $a = 28$; в) $m = n = 1$, $a = 50$; г) $m = 1$; $n = 3$, $a = 18$; д) $m = 1$; $n = 5$, $a = 200$; е) $m = 1$; $n = 997$, $a = 997$. **13.10.** а) $\frac{22}{15}$; б) $\frac{7}{24}$; в) $\frac{100}{279}$; г) $\frac{42}{85}$. **13.11.** а) 15; б) 10; в) 20; г) 44. **13.12.** а) 13; б) 29; в) 53; г) 37. **13.13.** а) 11; б) 31; в) 224; г) 75. **13.15.** $u^2 + v^2$.

13.34. а) $(6 - \sqrt{a})(6 + \sqrt{a})$. **13.35.** а) $(2 - \sqrt{a})^2$; б) $(\sqrt{a} + x)^2$; в) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$; г) $-(\sqrt{-a} - 3\sqrt{-b})^2$. **13.39.** а) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; г) $2\sqrt{5}$; д) $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **13.40.** а) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; в) $2\sqrt{15} - \sqrt{6}$; г) $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$. **13.41.** а) $2 + \sqrt{3}$; б) $-8 - 2\sqrt{5}$; в) $12 + 7\sqrt{3}$; г) $-7\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$. **13.42.** а) $2(\sqrt{5} + \sqrt{10})$; б) $-\frac{2 + \sqrt{2}}{3}$.

13.43. а) $\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{3 + \sqrt{6} + \sqrt{15}}{6}$. **13.44.** а) $\frac{8}{17}$ больше; б) $\frac{2}{9}$ меньше. **13.45.** а) 0; б) 0. **13.47.** а) 1,3; б) 1; в) 3; г) −1; д) −1; е) 0. *Указание.* Левая часть уравнения $x^2 \geqslant 0$, а правая часть $-\sqrt{\sqrt{x + 4} - 2} \leqslant 0$. Следовательно, корнем уравнения может быть только то значение x, при котором одновременно выполняются два равенства $x^2 = 0$, и $-\sqrt{\sqrt{x + 4} - 2} = 0$. Проверка показывает, что число 0 удовлетворяет второму равенству. **13.48.** При $a > 0$. **13.49.** При $a < 0$ и при $a = 1$. **13.50.** При $a > 0$, но $a \neq 4$.

13.51. а) $y = 4x$, $x \geqslant 0$; б) $y = \frac{1}{4}x$, $x \leqslant 0$; в) $y = 2x^2$, $x \geqslant 0$; г) $y = -0{,}4x^2$, $x \leqslant 0$; д) $y = -3x^2$, $x \geqslant 0$; е) $y = -x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$; ж) $y = 2x$, $x \geqslant 0$; з) $y = 3\sqrt{x}$, $x > 0$; и) $y = -2\sqrt{-x}$, $x < 0$.

13.52.

S	84	126	210	240	108	$2{,}5\sqrt{2}$	$1{,}5\sqrt{3}$	12	$0{,}5\sqrt{6}$

13.53. а) $\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{3}$; в) $3\sqrt{2} - 1$; г) 0,5. **13.54.** а) $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; б) $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$; в) $(\sqrt{10}; 4)$. **13.63.** а) $10^{100} + 1$; б) $10^{100} - 1$.

14.01. а) 1; б) 2; в) 2; г) 2; д) $6\sqrt{2}$; е) 42; ж) 2. **14.04.** а) $\frac{4x - y}{2x}$; б) $\frac{14}{9 - a}$. **14.05.** а) 1; б) 0. **14.07.** а) 3; б) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$. **14.08.** а) 28; $-2\sqrt{7}$; б) 40; $-2\sqrt{10}$. **14.09.** а) Нет; б) да. **14.10.** а) $\frac{a^2}{4(a^2 - x)}$; б) $\frac{\sqrt{a - b}}{b}$.

14.11. а) $-\sqrt{ab}$; б) $\frac{a}{a - b}$; в) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b}} - 1}$. *Указание.* Обозначьте $\sqrt{\frac{a}{b}} = x$; г) $\sqrt{1 - x^2}$. *Указание.* Обозначьте $\sqrt{1 - x} = a$, $\sqrt{1 + x} = b$. **14.12.** $a + b$.

16.17. а) -1; б) 10. **16.18.** а) 2; б) 38; в) 21; г) 66. **16.32.** 7 или 3. **16.33.** 15 или 27. **16.34.** 5 или 11. **16.35.** 22. **16.36.** 6, такое число единственное. **16.37.** Таких чисел нет. **16.38.** 116 или 106. **16.39.** 560 или 486. **16.40.** 437 или 367. **16.41.** 3 или 10. **16.42.** 12 или 22. **16.43.** 30 или 184. **16.59.** а) 22 (напр., при $x = 1$); б) 446 (напр., при $x = 1$); в) 16 (напр., при $x = 1$). **16.60.** а) 103 (напр., при $x = 0$); б) 5 (напр., при $x = 0$); в) 18 (напр., при $x = 0$). **16.61.** а) 1; 2; 3; б) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; в) 4; г) 1; 2; 3.

17.05. а) При $k = 2$; б) при $k = -\frac{7}{4}$; в) при $k = \frac{2}{25}$. **17.35.** а) $a < 0$; б) $a \geqslant 0$; в) $a = 0$. **17.36.** При $a = 0$. **17.37.** а) При $k < 0$; б) при $k > 0$; в) ни при каких k. **17.38.** При $k \neq 0$.

18.07. а) $k = 2$; б) $k = 14$; в) $k = -10$. **18.08.** а) $\max\limits_{[-2;\,-1]} \frac{2}{x} = -1$; $\min\limits_{[-2;\,-1]} \frac{2}{x} = -2$. **18.09.** а) $\min\limits_{[-2;\,-1]} \frac{2}{x} = -2$; максимума нет. **18.18.** (2; 2), (−2; −2). **18.26.** 0,25. **18.27.** $\frac{2}{11}$. **18.28.** При $a = \pm 1$. **18.29.** $\frac{7}{72}$. **18.30.** $\frac{11}{15}$. **18.31.** При $b = \pm 1$. **18.32.** (1; 1), (−1; −1). **18.33.** (3; −3), (−3; 3). **18.45.** а) При $a = 0$; ± 1 — одна точка; при прочих значениях a — две точки. **18.48.** а) (0,5; 1); в) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **18.49.** $f(x) = \frac{2}{x}$. **18.50.** $f(x) = \frac{1}{x}$.

19.08. $A(0; 7)$ или $A(0; -7)$. **19.09.** 99 или −99. **19.23.** $A(-7; 0)$ или $A(7; 0)$.

20.33. $y = 2x^2 + 8x$. **20.34.** $y = -0{,}5x^2 + 4x - 8$. **20.35.** $y = x^2 - 2x - 8$. **20.36.** $y = -x^2 + 2x - 3$. **20.37.** 0; 4. **20.38.** а) 4; б) 2; в) 2. **20.39.** Вниз. **20.40.** При $a \geqslant 5$. **20.41.** При $a \geqslant -4$. **20.42.** При $a \geqslant 3{,}5$. **20.43.** При $a \leqslant -6$. **20.48.** 15. **20.49.** 5. **20.50.** 0. **20.51.** 1. **20.52.** 11. **20.53.** 4. **20.54.** 12. **20.55.** 4. **20.56.** 11. **20.57.** 5. **20.58.** $M(-1; 4)$. **20.59.** $M(3; 9)$. **20.60.** $K(-0{,}5; 0{,}25)$. **20.61.** $K\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$. **20.62.** $K(0{,}5; 1)$. **20.63.** $K\left(-3; \frac{6}{5}\right)$.

20.64. $K(2; -2)$. **20.65.** а) $M(-2; -9)$; б) $K\left(\frac{41}{32}; \frac{1}{8}\right)$. **20.66.** $-\frac{8}{5}$.

20.67. а) (1; 1) и (−0; 5); б) первая. *Указание.* Сравните значения данных функций в точке 0; в) длина наибольшего отрезка равна 0,75; г) координаты его концов (0; 2) и (0; 2,75). *Указание.* Длина искомого отрезка задается формулой $l(x) = 0{,}25(x^2 - 8x + 11) - (x^2 - 2x + 2)$ на $(-1; 1)$. Функция $l(x)$ принимает наибольшее значение $\frac{3}{4} = 0{,}75$, которое достигается при $x = 0$. **20.73.** 6 + 6.

20.74. 5 + 5. **20.75.** 0,5 + 9,5. **20.76.** 12,25. **20.77.** 32. **20.83.** $y = 3x^2 - 6x + 5$. **20.84.** $y = -x^2 - 2x + 3$. **20.85.** $y = x^2 + 2x - 3$ или $y = 0{,}25x^2 + 0{,}5x - 3{,}75$. **20.86.** $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)^2 + y_0$.

20.87. $y = \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot (x - x_1)(x - x_2)$. **20.88.** $y = x^2 - 2x$.

20.89. $-x^2 + 3x + 1$. **20.92.** **1.** а) $a \geqslant 0$; б) $-3 < a \leqslant 0$. **3.** а) $-3 < a \leqslant 3$; б) $a \geqslant 3$. **20.94.** а) 7; б) 5; в) 1; г) 9. **20.95.** 2.

21.27. а) На 15; б) на 6; в) на 9; г) на 4.

22.02. б) $x < -0{,}5$, $x > 0$; в) $x \leqslant -0{,}5$, $x > 0$. **22.08.** а) 1; б) 10; в) $|a - b|$. **22.09.** а) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; е) $(-1; 0)$. **22.15.** При $a = 2$. **22.16.** 0. *Указание.* Воспользуйтесь нечетностью функций. **22.17.** 0. **22.18.** При $a = 7$. **22.21.** (−1,25; −0,75). **22.22.** (1,75; 0,75). **22.23.** а) (−2; −1); б) (1; −0,5). **22.24.** а) (1; 1) и (−1; −1); б) (5; 5) и (−5; −5). **22.28.** $a = 1$, $k = 3$. **22.29.** $a = 3$, $k = -2$. **22.38.** 25.

26.01. а) 4 и −15; б) корней нет; в) −2,75 и −1,25; г) 3 и −7. **26.02.** а) $2\sqrt{3}$ и 2; б) −1 и $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{12\pi + 5}{2\pi}$ и $\frac{5}{12\pi}$; г) $-\frac{1}{41}$ и −1. **26.04.** а) 23,5 и −29,5; б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{3} - \frac{7}{3}$; в) −2 и $\frac{27}{\sqrt{13}} + 2$; г) 0,1 и −3,6; д) $\sqrt{7}$

и $37 - \sqrt{7}$. **26.05.** а) 2 и $-1{,}8$; б) $3\frac{4}{6}$ и -2; в) $0{,}1$ и $-\frac{87}{70}$; г) $0{,}01$ и $-8\frac{103}{300}$; д) 10 и $-10\frac{7}{9}$; е) 1000 и $-1001{,}6$. **26.06.** е) $4x^2 - 15x - 4 = 0$; ж) $12x^2 - 7x + 1 = 0$. **26.07.** а) $x^2 + (8 - a)x - 8a$; е) $x^2 - (3 - 7a)^2$. **26.08.** а) $ax^2 + (a^2 + 1)x + a$; б) $abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$. **26.09.** а) $x^2 - 7x\sqrt{2} + 10 = 0$; б) $x^2 - 2x - 1 = 0$. **26.10.** а) 7 и 2; б) корней нет; в) 13 и $\frac{7}{\sqrt{3}}$; г) 36 и 0,2. **26.11.** а) $x^2 - 8x + 4$; б) не существует; в) $x^2 - 32x + 144$; г) $x^2 - 200x + 400$. **26.13.** Могут. Графики имеют общие точки, лежащие на оси Ox; графики имеют общую ось симметрии; графики отличаются направлением или расположением ветвей парабол (более и менее пологие). **26.14.** Графики а) имеют общую ось симметрии; б) пересекают ось Oy в одной и той же точке. **26.15.** Больше у положительного корня. **26.16.** Больше у отрицательного корня. **26.19.** $x^2 - 9x + 5 = 0$. **26.20.** $x^2 + 14x + 32 = 0$. **26.21.** $8x^2 + 7x - 11 = 0$. **26.22.** $13x^2 + 7x - 5 = 0$. **26.23.** $5x^2 - 7x - 9 = 0$. **26.24.** $175x^2 - 15x - 9 = 0$. **26.25.** а) $\frac{11}{3}$; б) -7; в) $\frac{59}{12}$. **26.26.** (3; 5); (5; 3). **26.27.** $(4 - \sqrt{7}; 4 + \sqrt{7})$; $(4 + \sqrt{7}; 4 - \sqrt{7})$. **26.28.** (4; 4). **26.29.** Таких действительных чисел не существует. **26.31.** а) (1; 2); (2; 1); б) $(-3; -4)$; $(-4; -3)$; в) решений нет; г) $(-3; -3)$; д) при $a = 2$ (2; 2), при остальных a $(2; a)$; $(a; 2)$; е) $(2\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$; $(3\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. **26.32.** г) (1; 2). **26.34.** $x^2 - 10x + 14 = 0$.

27.01. а) $(x + 1)(x + 2)$; г) разложение невозможно. **27.08.** а) $(x + a)(x + 2a)$; б) $(2x + a)(x - 1)$; в) $-5x^2 - (4y + 5)x + y(y + 1)$; г) $b^2 + 3(p - 1)b + 2p^2 - 3p$. **27.10.** а) $(x - 2y + 3)(x + y + 2)$; б) $(x - y)(x - y^3)$. **27.15.** а) 3, -9, 1; б) 0, 3, $-0{,}5$; в) $-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $-\frac{d}{a}$. **27.16.** Корни x_1, x_2, и x_3 кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$, удовлетворяют соотношениям: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ и $x_1x_2x_3 = -\frac{c}{a}$.

28.01. 10 и 4. **28.02.** 20 см. **28.03.** 17 и 18. **28.04.** 20 и 21. **28.05.** 21 ряд. **28.06.** 12 км/ч. **28.07.** 15 км/ч и 18 км/ч. **28.08.** $\frac{3}{4}$. **28.09.** 36 дней. **28.10.** 15 км/ч. **28.11.** 18 км/ч. **28.12.** 5 км. **28.13.** 18 км. **28.14.** 50 км/ч. **28.15.** $\frac{3}{4}$. **28.16.** 72 км/ч. **28.17.** 2 км/ч. **28.18.** 16 км. **28.19.** 16 км/ч.

28.20. Первый поезд был в пути 75 ч, а второй 50 ч. **28.21.** 6 с. **28.22.** 30 км/ч. **28.23.** 120 км. **28.24.** 40 км/ч и 50 км/ч. **28.25.** Скорость поезда при движении в гору 60 км/ч, скорость его по ровному месту 78 км/ч. **28.26.** 20 км/ч, 18 км/ч. **28.27.** 40%.

28.28. $\frac{\pm at + \sqrt{a^2t^2 + 4adt}}{2t}$ км/ч. **28.29.** 30 км; 4 км/ч и 6 км/ч.

28.30. 12 сут. **28.31.** 4 ч и 8 ч. **28.32.** 60 км/ч. **28.33.** 9 ч. **28.34.** 50 км/ч. **28.35.** 18 км/ч и 24 км/ч. **28.36.** 160 км. **28.37.** 10 км/ч. **28.38.** За 15 дней. **28.39.** За 10 дней. **28.40.** 10 ч и 15 ч. **28.41.** 42 ч и 56 ч. **28.42.** 55 и 30 дней. **28.43.** За 10 дней. **28.44.** 3м^3. **28.45.** 456 ц. **28.46.** 8 ч и 6 ч. **28.47.** 28 дней; 21 день. **28.48.** 3 ч и 4 ч. **28.49.** 6 дней и 12 дней. **28.50.** 40 ч и 24 ч. **28.51.** 336 и 280 деталей. **28.52.** 10 ч и 15 ч. **28.53.** 10 автоматов. **28.54.** 13,5 кг. **28.55.** 40% и 25%. **28.56.** 20% и 60%. **28.57.** 441 г. **28.58.** 150 г. **28.59.** 8%. **28.60.** 170 кг. **28.61.** 280 кг. **28.62.** 6 раз. **28.63.** 17 кг меди и 7 кг цинка. **28.64.** 0,25 кг. **28.65.** 20% и 60%. **28.66.** 4 кг и 6 кг. **28.67.** 60 кг.

28.68. $\frac{aq - 100b}{q - p}$ и $\frac{100b - ap}{q - p}$. **28.69.** $0{,}8(r - 30)$ кг и $(32 - 0{,}8r)$ кг; $30\% \leqslant r \leqslant 33{,}75\%$. **28.70.** 10 л. **28.71.** $\frac{mn}{m + n}$. **28.72.** 40 т и 100 т.

28.73. 2,5 кг. **28.74.** 15. **28.75.** 108. **28.76.** На 20%. **28.77.** На 25%. **28.78.** 20%. **28.79.** 5%. **28.80.** ≈41,4%. **28.81.** 110 000 р. **28.82.** На 30%.

28.83. 375 р. **28.84.** 24 человека. **28.85.** $\frac{1}{15}$. **28.86.** 2 р. 50 к. **28.87.** 18.

28.88. 24. **28.89.** 77. **28.90.** 857 142. **28.91.** 24. **28.93.** 83 или 38. **28.94.** 23. **28.95.** 44. **28.96.** 83. **28.97.** 811. **28.98.** 135.

29.11. б) $n = 1; 3; 9; 27$; в) $n = 2; 3; 4; 6; 12$; г) $n = 1; 2; 3; 6$; д) $n = 2; 6$; е) $n = 36$. **29.13.** $a = 114$, точка $A(1; 1)$. **29.14.** $a = 1$ или $a = 3$. **29.15.** $a = 1$, или $a = 2$, или $a = 4$. **29.16.** $a = 0{,}5$, или $a = 1$, или $a = 1{,}5$, или $a = 3$.

30.04. б) *Указание.* Все числа 201, 202, ..., 210 являются составными. **30.05.** 50 или 51. **30.06.** 333 или 334. **30.07.** 1428 или 1429. **30.08.** а) Не может; б) может; в) может. **30.09.** 112, 113, ..., 147. Наименьшее число 112, наибольшее — 963. **30.10.** а) — г) Не может; д) может. **30.11.** Таких чисел от 91 до 99 девять: 91; 92; ...; 99. **30.20.** 3. **30.21.** 3. **30.22.** 2 и 5. **30.25.** Числа 237 и 732 каждое делятся на 3. **30.26.** Число $2^{110} + 7^{52}$ делится на 5, поскольку его последняя цифра равна 5.

31.02. а) 6; б) 1. **31.03.** а) Существует; б) существует. **31.09.** *Указание.* Представьте каждое из 35 чисел в виде $35k + r$ и заметьте, что r может принимать 35 различных значений: 0; 1; ...; 34. **31.10.** а) Нет; б) нет; в) можно. **31.16.** Нельзя. **31.28.** а) 7; б) 7; в) 1; г) 7 или 31; д) 7, 31, 55. **31.29.** а) 17; б) 2; в) 7; г) 67; д) 17; 42; 67; 82; 117. **31.33.** а) Пусть $a = 3n + r_1$, $b = 3m + r_2$, где r_1, r_2 — могут независимо принимать значения 0, 1, 2. Тогда $a^2 + b^2 = 3(m + n) + r_1^2 + r_2^2$, где $r_1^2 + r_2^2$ может принимать одно из значений 0, 1, 2, 4, 5, 8. Следовательно, сумма квадратов делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма $r_1^2 + r_2^2 = 0$, откуда следует, что $r_1 = r_2 = 0$, т. е. когда оба числа a и b делятся на 3; б) сумма $6^2 + 8^2 = 10^2$ делится на 5, но ни одно из чисел 6 и 8 не делится на 5. **31.52.** 6. **31.53.** 0. **31.54.** 0. **31.55.** 3.

32.02. а) НОД = 14; НОК = 1232; д) НОД = 60; НОК = 3600; **32.03.** а) НОД = 154!; НОК = 210!; в) НОД = 88!; НОК = 510!. **32.04.** а) НОД = $\underbrace{111\ldots111}_{\text{пятьдесят единиц}}$; НОК = $\underbrace{111\ldots111}_{\text{сто единиц}}$. **32.06.** а) НОД = 2^{14}; НОК = 25!. *Указание.* Покажите, что $20! = 2^{22} \cdot k$, где k — некоторое нечетное число; НОД = 2^{97}; НОК = $8 \cdot 100!$. б) *Указание.* Покажите, что $100! = 2^{97} \cdot k$, где k — некоторое нечетное число. **32.08.** а) НОД = 1; НОК = $133 \cdot (134! - 1)$.

33.05. $101^2 = 10\,201$. **33.07.** *Указание.* Число 2001 — нечетное. **33.12.** а) 831 нулем; б) 40 006 нулями. **33.13.** 499 нулями. **33.15.** $a = 0{,}5$, или $a = 1$, или $a = 2{,}5$, или $a = 5$. **33.16.** $a = 5$. **33.17.** $a = 0$, или $a = 3$, или $a = 5$. **33.18.** $a = 1$ или $a = 3$. **33.21.** а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; б) $\frac{9}{11} - \frac{1}{2}$; в) $\frac{4}{5} - \frac{5}{7}$; г) $\frac{10}{11} - \frac{10}{13}$; д) $\frac{7}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$; е) $\frac{3}{2} - \frac{3}{5} - \frac{5}{7}$.

33.22. б) (3; 1); в) решений нет; г) (3; 1). **33.23.** б) (−13; −3), (−8; −4), (−5; −7), (−4; −12), (−2; 8), (−1; 3), (2; 0), (7; −1). **33.25.** б) $x = 2 + 7k$; $y = 1 - 3k$, где k — любое целое число; в) $x = 2 + 5k$; $y = 4 + 11k$, где k — любое целое число. **33.26.** Решений нет. *Указание.* Числа 138 и 777 111 кратны 3, а число 569 не делится на 3. **33.29.** а) $x = k$; $y = 1 - 2k - 3n$; $z = n$, где n, k — любые целые числа; б) $x = -6 + 25k + 5n$; $y = n$; $z = 1 - 3k$, где n, k — любые целые числа.

34.01. а) $f(-3) = 50$; $f(1) = -8$; $f(0) = -10$. **34.03.** д) $9x^2 - 12x + 4$. **34.04.** а) При $a = 0$.

34.07.

Степень $f(x)$	Степень $g(x)$	Степень $f(x)+g(x)$	Степень $f(x)\cdot g(x)$	Степень $f^3(x)$
4	6	6	10	12
5	8	8	13	15
5	3	5	8	15
3	3	2	6	9
9	9	3	18	18

34.11. а) При $a = \frac{5}{3}$; б) при $a \neq \frac{4}{3}$; в) при $a = \frac{4}{3}$; г) при $a = 2$. **34.12.** 1; $x - 1$; $x + 5$; $(x - 1)^2$; $(x - 1)(x + 5)$; $(x - 1)^2(x + 5)$. **34.17.** а) При $a = -5$; $b = 4$; в) при $a = -1$; $b = 1$ или при $a = -5$; $b = 2$. **34.21.** г) $x^{43} + x^{42} + \ldots + x + 1 - \frac{1}{x - 1}$. **34.22.** б) При $a = -1$; $b = 47$; в) таких a и b не существует; г) $a = -1$; $b = 1$; д) $a = -\frac{7}{9}$; $b = \frac{44}{3}$; е) $a = \frac{1}{3}$; $b = 1$. **34.23.** а) $a = \frac{21}{17}$; $b = -\frac{14}{17}$; г) $a = -b = 0{,}125$. **34.31.** г) 101. **34.38.** 136,5. **34.39.** $x - 3$. **34.43.** а) $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$; б) 6; $\frac{11}{3}$; д) 1; $-0{,}75$. **34.44.** б) При $a \neq -4$, $a \neq 0$, $a \neq 8$. **34.48.** а) $3x^2 - 5x + 1 - \frac{3}{x}$; г) $\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}$. **34.49.** а) $f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{3}{x}$; $f(10) \approx 111$; $f(0{,}01) \approx -299$. **34.50.** а) $x + 8 + \frac{11}{x - 1}$; б) $5x - 16 + \frac{48}{x + 3}$; в) $3x^2 + 11x + 25 + \frac{38}{x - 2}$; г) $7(x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2) + \frac{3}{x + 5}$. **34.51.** а) $f(x) = 2x + 9 + \frac{8}{x - 1}$; $f(100) \approx 209$; $f(1{,}001) \approx 8011$; б) $f(x) = 5x - 12 + \frac{29}{x + 3}$; $f(-100) \approx -512$; $f(-2{,}99) \approx -2897$. **34.52.** а) $1 + \frac{9}{x - 1} + \frac{11}{(x - 1)^2}$. *Указание*: сделать замену $t = x - 1$; б) $5x^3 + 30x + 29 + \frac{141}{x + 3} - \frac{143}{(x + 3)^2}$. **34.53.** а) $\frac{3}{x - 1} + \frac{7}{(x - 1)^2} + \frac{7}{(x - 1)^3}$; в) $\frac{2}{x - 2} + \frac{15}{(x - 2)^2} + \frac{31}{(x - 2)^3} + \frac{19}{(x - 2)^4}$. **34.54.** а) $a = -\frac{5}{8}$; $b = \frac{21}{8}$. **34.55.** б) $a = 1$; $b = 8$; в) $a = -5$; $b = -2$

или $a = -2$; $b = -5$. **34.56.** а) $a = b = 0{,}5$; г) $a = -\frac{21}{4}$; $b = -\frac{47}{4}$. **34.58.** а) $a = -b = \frac{3}{16}$; $c = -\frac{3}{4}$; б) $a = -b = -\frac{5}{16}$; $c = \frac{3}{4}$; в) $a = \frac{4}{9}$; $b = \frac{5}{9}$; $c = -\frac{2}{3}$; г) $a = -\frac{1}{3}$; $b = 0$; $c = \frac{1}{3}$. **34.59.** 0,999. **34.60.** $\frac{500}{1001}$. **34.60.** $\frac{1001}{6010}$.

35.01. а) -1; 0; 4; б) 0; в) 0; $\frac{-11 \pm 5\sqrt{5}}{2}$; г) 0; $\frac{-139 \pm 3\sqrt{1457}}{2}$. **35.02.** а) 0,25; 1; б) $-\frac{2}{7}$; в) $\frac{9 \pm \sqrt{85}}{2}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$; г) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **35.03.** а) ± 1; 3; б) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3; в) 2; $\sqrt[3]{11}$; г) 1; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **35.04.** а) -5; -1; 7; б) $-2{,}75$; 4; 6,25; в) $-0{,}25$; 2; г) $\left(-\frac{1}{12}; 0\right) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. **35.05.** а) При $a = 6$; $x = 2$; $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) при $a = -11$; $x = -1$; $x = \frac{7 \pm \sqrt{113}}{4}$; в) при $a = 0$; $x = 1$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; г) при $a = 1$; $x = -1$; $x = 2 \pm \sqrt{5}$; при $a = -2$; $x = -1$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$. **35.06.** Найдите целые корни уравнения: а) -1; 2; 3; б) -1; 2; в) -2; 1. **35.08.** а) 0,5; б) 1 и $-0{,}5$. **35.11.** Один целый корень при $a = -5$ и $a = 3$. **35.12.** а) При $a = 0$ три корня; при $a = -4$ один корень; при $a = -1$ один корень; б) при $a = 2$ один корень; при $a = 4$ один корень. **35.13.** При $a = 0$, $b = -3$ корни 1; -2; 1 или при $a = -2$, $b = -1$ корни ± 1; 2; при $a = 0$, $b = -1$. **35.14.** а) ± 1; $\pm\sqrt{2}$; б) четыре корня $\pm\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}}$; в) $\pm\sqrt{10}$; г) нет корней. **35.15.** а) 1; $\sqrt[3]{3}$; б) -1; 2. **35.16.** а) 7; б) $t^2 - 2$. **35.17.** а) 13; б) $t^2 - 12$; в) 21. **35.18.** а) -18; б) $t^3 - 3t$. **35.19.** а) -2; $-0{,}5$; 1; б) -2; $-0{,}5$; 1; в) -2; $-0{,}5$; 1; г) -2; $-0{,}5$; 1. **35.20.** в) 0,5 и 1; г) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 1. **35.21.** в) $-\frac{2}{3}$; 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$. **35.22.** а) -1; $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$; г) 1; $-\frac{1}{5}$; $\frac{3 \pm \sqrt{14}}{5}$. **35.23.** $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 323$; корни -7 и 2. **35.24.** а) 0,5; б) 0,5 и 0. **35.25.** а) 3 и 4; б) -1 и 3; в) $\frac{-5 \pm \sqrt{93}}{2}$; г) $\frac{5 \pm \sqrt{93}}{2}$. **35.26.** а) $\frac{5}{8}$; $\frac{13}{12}$; б) $\frac{9}{8}$; $\frac{16}{13}$; в) $\frac{11 \pm \sqrt{105}}{2}$;

$\frac{21 \pm \sqrt{421}}{2}$; г) 0; 11; $\frac{2}{7}$. **35.27.** а) 1 и -2; б) 1; 3 и $-3 \pm \sqrt{11}$; в) -9; 1; $\frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$; г) -3 и 6. **35.28.** а) ± 2; б) ± 1. **35.29.** а) -3; 1; б) -1; в) 0; 0,8. **35.30.** а) ± 1; $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) -1; $\sqrt[3]{10}$; в) 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$; г) $2 \pm \sqrt{6}$; д) $1 \pm \sqrt{2}$; е) 1. **35.31.** При $a > 4$ решений нет; при $a = 0$ корни 0 и 4; при $a = 3$ корни 3 и 1; при $a = 4$ корни 4 и 2. При остальных значениях a корни: a; $2 - \sqrt{4 - a}$; $2 + \sqrt{4 - a}$. *Указание.* Решите это уравнение как квадратное относительно a. **35.32.** а) При $a \geqslant 0$, $b = 0$; б) $-8 < a < 8$, $b = 0$; в) $a \leqslant 0$, $b = 0$.

36.01. а) -1 и 2,2; б) 4 и -3. **36.02.** а) -18; 0; б) -2; $-1\frac{3}{7}$. **36.03.** а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **36.04.** а) 0 и $-\frac{13}{3}$; б) ± 3. **36.05.** а) 3; 1,5; б) 2; $\frac{4}{3}$. **36.06.** а) 3; $-\frac{5}{3}$; б) 0,5; -2. **36.07.** а) 1; -1; б) 0 и -2. **36.08.** а) 0,4; б) 1,5. **36.09.** а) -1; б) 0,5. **36.10.** а) 0; $2 + \sqrt{5}$; б) 0 и $-3 + \sqrt{10}$. **36.11.** а) 1; $\sqrt{3}$; б) 2 и $\sqrt{7}$. **36.12.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $1 - \sqrt{2}$. **36.13.** а) 0; 2; б) 0,5; 2. **36.14.** а) 4; 12; б) 8. **36.15.** а) 1; 8; б) -2; 4; $1 \pm \sqrt{2}$; в) корней нет; г) -9; -2; 0; 7. **36.16.** а) $-\frac{40}{21}$; 1; б) 0,4; 0,8; в) $-\frac{3}{11}$; $-\frac{2}{11}$; г) $-\frac{3}{17}$. **36.17.** а) 0; б) $-0{,}125$; 0; в) $\pm 1{,}75$; г) $-\frac{4}{3}$; 0. **36.18.** а) -3; б) 0; в) ± 9; г) $\frac{1}{15}$. **36.19.** а) -3; 6; б) $3 \pm \sqrt{5}$; $3 \pm \sqrt{6}$; в) -3; -1; $3 \pm \sqrt{11}$; г) -1; $-\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{9}$. **36.20.** а) $-\frac{4}{3}$; $-\frac{1}{3}$; б) -3; -1; $-\frac{1}{3}$. **36.21.** а) -9; 1; $\frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$; б) $-10 \pm \sqrt{85}$. **36.22.** а) 0,5; 3,5; б) -3; 1. **36.23.** а) 0; б) $-\frac{5}{7}$. **36.24.** а) Нет; б) нет. **36.25.** а) Если $a \neq -2$, $a \neq -0{,}5$ и $a \neq 1$, то $x = -2a$ или $x = -a - 1$. Если $a = -2$, то $x = 4$. Если $a = -0{,}5$, то $x = -0{,}5$. Если $a = 1$, то решений нет; б) если $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = a$ или $x = a + 1$. Если $a = -1$, то $x = -1$. Если $a = 0$ или $a = 1$, то $x = 1$. Если $a = 2$, то $x = 3$. **36.26.** а) Если $a \in \left(-\infty; -2 - 2\sqrt{5}\right] \cup$

$\cup \left[-2 + 2\sqrt{5}; 2{,}5\right) \cup (2{,}5; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 16}}{2}$.
Если $a = 2{,}5$, то $x = -1{,}5$. Если $a = 4$, то $x = -4$. Если $a \in \left(-2 - 2\sqrt{5}; -2 + 2\sqrt{5}\right)$, то решений нет.

37.01. а) 7 и −1; б) 0,(037) и −0,7(037); в) решений нет. **37.02.** а) 2; б) −12; 6; в) −6 и 6; г) −5; 6 и −6. **37.03.** 2. **37.04.** а) $\frac{7}{4}$; 2; 1,5; б) 0; 3; 2; 5; в) $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$; г) 3; $3 \pm 2\sqrt{6}$. **37.05.** а) −1; −5; 1; 5; б) −5; −1; в) $-\frac{5}{13}$ и $\frac{5}{1}$; г) 0; $\frac{2}{3}$; 0,4; $\frac{4}{15}$. **37.06.** −2. **37.07.** [−1,5; +∞) **37.08.** −7; −5; −3; −1; 1; 3; 5; 7. **37.09.** а) 5 и −0,2; б) $\frac{4}{3}$ и $-\frac{6}{7}$. **37.10.** а) 4 и −26; б) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{8}$. **37.11.** а) 0,4; б) 1,5; в) 3,5; $0{,}3\left(3 \pm \sqrt{89}\right)$; 0,3; г) 10. **37.12.** а) −8; $-\frac{6}{7}$; $-\frac{29}{13}$; $-\frac{27}{19}$; б) −1,8; $\frac{1}{7}$; −12; 1,6. **37.13.** а) −3; б) −1; 1,5; 2. **37.14.** 1; $\frac{1}{18}$. **37.15.** При всех значениях $x - x^2 + 4x - 4{,}05 < 0$. **37.16.** а) 12 и −2; б) 2; в) решений нет; г) $\frac{5 - \sqrt{37}}{2}$. **37.20.** −3; −1,5; 1; 9. **37.21.** а) −7; −1; б) $\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$. **37.22.** а) [3; 6]; б) решений нет; в) 0; г) −3. **37.23.** а) [−3; 0); б) [0; 3]; в) −6; 0; 2; г) {−5} ∪ [−3; 1]. **37.24.** а) Решений нет; б) 0; $\pm\sqrt{13}$; в) [−3; −2] ∪ [2; 3]; г) (−∞; −3] ∪ ∪ [3; +∞). **37.25.** а) $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$; б) −0,4; −2; в) $-\frac{9}{7}$; −3; г) −1,25. **37.26.** 1. **37.27.** $\pm 0{,}5\sqrt{3}$; $\pm 0{,}5\sqrt{5}$. **37.28.** $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$. **37.29.** а) (2; +∞); б) [3; 4]. **37.30.** {4} ∪ [2,5; 3,5]. **37.31.** а) (0; 2]; б) [−1; 0]. **37.32.** Произведение всех корней уравнения равно нулю. **37.33.** 0. **37.34.** а) $\left(-\infty; 2 - \sqrt{5}\right] \cup \left[0; 2 + \sqrt{5}\right] \cup [101; +\infty)$; б) $\left(-\infty; 2 - \sqrt{5}\right] \cup [101; +\infty)$. **37.35.** а) $\left[0; 2 + \sqrt{5}\right]$; б) $\left(-\infty; 2 - \sqrt{5}\right] \cup \left[0; 2 + \sqrt{5}\right] \cup [101; +\infty)$. **37.36.** а) $\left[2 + \sqrt{5}; 101\right]$; б) $\left[2 - \sqrt{5}; 0\right]$. **37.37.** а) 2; б) 2. **37.38.** 3.

38.01. а) -6; б) -3; 2; в) нет решений; г) нет решений. **38.02.** а) 0,5; 1; б) -2; 1; в) -4; 3; г) -3; 7. **38.03.** а) -1; 2; б) $-5,5$; 3; в) 0; г) нет решений. **38.04.** а) 2; б) 3; в) -7; г) $-\frac{1+\sqrt{89}}{2}$; 5. **38.05.** а) При $a < -3$ корней нет; при $a \geqslant -3$ $x = -a - 1$; б) при $a < 0$ корней нет; при $0 \leqslant a < 4$ $x = 1 + \sqrt{a}$; при $a \geqslant 4$ $x = 1 + \sqrt{a}$; в) при $a \in (-0,5; 1)$ корней нет; при $a \notin (-0,5; 1)$ $x = 0,5 + 0,5a + a^2$; г) при $|a| < \frac{1}{3}$ корней нет, при $\frac{1}{3} \leqslant |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $x = -a$; при $|x| \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ $x = -a$; $x = 3a$.

38.06. а) 4; б) $-4 + \sqrt{2}$; в) $-0,5$; г) корней нет. **38.07.** а) -1; б) $3 + \frac{2}{\sqrt{5}}$; в) 3; г) 2. **38.08.** а) 5; б) 3; в) -1; 0; г) $\pm\sqrt{2}$. **38.09.** а) -1; 2; б) 3; в) 1; г) 1. **38.10.** а) 16; б) ±2; в) 63; г) $\pm\sqrt{2}$; д) 28; е) 19; ж) 4; з) 1. **38.11.** а) 3; б) 2; в) 4; $6 + 2\sqrt{2}$; г) 2; $\frac{11-\sqrt{29}}{2}$. **38.12.** а) 1; б) 3; в) 1; г) $\pm\sqrt{3}$. **38.14.** а) 6; б) -5; -1; в) 2; г) 8; д) $\pm2\sqrt{2}$; е) 2. **38.15.** При $b < -4$ решений нет; при $4 \leqslant b < -1$ $x = 2$; при $b \geqslant -1$ $x = 1$ или $x = 2$. **38.16.** а) При любых значениях a; б) при $a \geqslant 0$; в) при $a \neq 0$; г) при $a = 0$. **38.17.** При $a = 1$, $b = 0$. **38.18.** При $a \geqslant 0$.

39.01. а) $a = 1,4$; б) $a = \frac{10}{3}$; в) $a = \frac{8}{23}$; г) ни при каких значениях a; д) при всех, кроме $-\frac{7}{3}$. **39.02.** а) $a = -0,8$; б) $a = 3,6$; в) $a = -2$ или $a = 3$; г) ни при каких значениях a. **39.03.** При $m = 19$. **39.04.** а) При всех значениях b, $x = 3b$; б) при $b = 1$ решений нет, при остальных значениях b $x = \frac{7}{b-1}$; в) при $b = -6$ решений нет, при $b = 1$ x — любое действительное число, при остальных значениях b $x = \frac{1}{b+6}$; г) при $b > 0$ решений нет; при $b = 0$ x — любое действительное число, при $b < 0$ $x = 0$. **39.05.** $a = 2$. **39.06.** $(-4; 2)$ и $(-4; -2)$. **39.07.** $a \in [-6; 6]$. **39.08.** $a > 1,5$. **39.09.** а) $b = -\frac{7}{6}$; б) $b = -17$; в) ни при каких значениях b. **39.10.** а) При любом b $x = \frac{b-3}{b^2+9}$; б) при $b \neq 9$ $x = \frac{b+3}{b-9}$; при $b = 9$ корней нет; в) при $b \neq -3$ $x = 1$;

при $b = -3$ x — любое число; г) при $b \neq \pm 3$ $x = \frac{1}{b-3}$; при $b = -3$ x — любое число; при $b = 3$ корней нет. **39.11.** а) При $a = 3$. **39.12.** а) При $a = \frac{7}{9}$ и $b = -\frac{16}{9}$; б) при $a = -4$ и $b = 1{,}5$. **39.13.** а) (14; 5); б) (7,5;4,5). **39.15.** а) $a = \frac{4}{3}$ и $b = \frac{11}{3}$. **39.16.** а) При всех значениях, кроме $k = 7$; б) при всех значениях, кроме $k = -3$. **39.17.** а) $0{,}25 \leqslant k \leqslant 1$; б) $1 \leqslant k \leqslant 2$. **39.18.** а) $0{,}25 \leqslant k \leqslant 4$; б) $0{,}4 \leqslant k \leqslant 8$. **39.19.** а) При любых отрицательных значениях b; б) при любых положительных значениях b. **39.20.** а) $-14 \leqslant b \leqslant -2$; б) $-4 \leqslant b \leqslant 0$. **39.21.** а) $0{,}25 \leqslant b \leqslant 4$; б) $-8 \leqslant b \leqslant 6$. **39.22.** а) $k > 1$; б) $k < 1$. **39.23.** а) $2 \leqslant b \leqslant 8$; б) $3 \leqslant b \leqslant 13$. **39.24.** а) При $a = -2$ $(-6; -6)$; б) при $m = -1$ $(-2; 2)$. **39.25.** При $a = -\frac{4}{3}$ (удобно, не решая системы, сложить левые и правые части уравнений). **39.26.** При $b = 3$. **39.27.** а) -2; -1; 1; 2; б) 1 и 0; в) ни при каких значениях a. **39.28.** а) -5; б) 0 и -2; в) 0 и -1; г) 0 и 2. **39.29.** -1 и 1. **39.30.** При всех значениях a. **39.31.** а) Точки гиперболы $b = \frac{a}{9}$; б) все точки параболы $b = 2a^2 - 4a$, кроме точек (0; 0) и (2; 0). **39.32.** а) При $b = 3$ решений нет, при остальных значениях b $x = 3$; б) при $b = -2$ корней нет, при $b \neq -2$ $x = b$; в) при $b = 12$ корней нет, при $b \neq 12$ $x = \frac{b-4}{2}$; г) $b = 1$ корней нет, при $b \neq 1$ $x = \frac{4b+3}{1-b}$; д) при $b = 2$ и $b = -1{,}5$ решений нет, при остальных значениях b $x = \frac{7}{b-2}$; е) при $b = 2$ $x = 0$, при $b \neq 2$ x — любое число, $x \neq -2$. **39.33.** а) При $a = 2$ второй корень равен $\frac{1}{3}$; б) при $a = -3$ второй корень уравнения равен 0,5. **39.34.** а) При $a = 2$ корни 1 и $\frac{7}{3}$; б) при $a = 135$ корни -5 и 3,375; в) при $a = 1$ корни 1 и $\frac{4}{3}$; при $a = -1$ корни -1 и $-\frac{4}{3}$; г) при $a = 0$ корень 0; д) при $a = 0$ корень 3; е) таких a нет. **39.35.** а) Для $b = 2$ и $b = 6$; б) ни для каких значений b. **39.36.** а) Для $a = -1$ $x = -1$; для остальных значений a — два корня: a и $2a + 1$; б) для $a = 0$ — один корень 0,4; для остальных — два корня: $\frac{a + 5 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 25}}{2a}$. **39.37.** а) При $m = -2$ $x = -3$; при $m = -3$ $x = -2$; при всех остальных значениях m уравнение имеет два корня: -2 и -3; б) при $m = -1$ $x = 4$; при $m = 4$ $x = -1$; при всех остальных значениях m уравнение имеет два корня: -1 и 4. **39.38.** а) При $m = 1$ корней нет, при остальных значениях m два корня: $2m$ и $m + 1$; б) при $m = -4$ один корень -5, при $m = -3$ один корень -3, при остальных же значениях m два корня: $m - 1$ и m. **39.39.** а) При $a < -1{,}125$ уравнение имеет один корень, при $a = -1{,}125$, $a = 0$, $a = 9$ — два корня; при любом $a \in (-1{,}125; 0) \cup (0; 9) \cup (9; +\infty)$ — три корня; б) при $a < -\frac{1}{3}$ — один корень, при $a = -\frac{1}{3}$, $a = 0$, $a = 16$ — два корня, при любом $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 16) \cup (16; +\infty)$ — три корня. **39.40.** а) При всех a, кроме $a = 0$; $a = -1$; $a = 0{,}25$; б) при всех a, кроме $a = -2$; $a = -0{,}5$; $a = 1$. **39.41.** а) При $p = 2$ и при $p = -\frac{2}{9}$; б) при $p = 3$ и $p = -\frac{3}{4}$. **39.42.** а) При $p = 4$ и $p = -\frac{14}{9}$; б) при $p = -3$ и $p = 0{,}75$. **39.43.** а) При $m < 0$. Положительный корень; б) при $m > 0$. Отрицательный корень. **39.44.** а) При $n = 11$; б) ни при каких n. **39.45.** а) При $q = -13$; б) ни при каких q. **39.46.** а) Ни при каких значениях d; б) при $d = 2$. **39.47.** а) Ни при каких значениях k; б) при $k = 1$. **39.48.** а) При $h = 9$; б) при $f = -4$. **39.49.** -4 или 20. **39.55.** 2. **39.56.** При $a = 5$ и при $a = -14{,}5$. **39.57.** При $a = -3$. **39.58.** 12. **39.59.** При всех $a \in [-3; 4]$. **39.60.** $a = 0$. **39.61.** а) При $b = 3$, $x = 3$; при остальных значениях b решений нет; б) при $b < -1$ и при $-1 < b < 0$ уравнение имеет два корня: $\frac{2b}{b-1}$ и $\frac{4b}{b+1}$; при $b = -1$, $x = 1$; при $b = 0$, $x = 0$; при $b = 3$, $x = 3$; при остальных значениях b решений нет; в) при $b = 3$, $x = 3$; при $b = 0$, $x = 3$; при остальных значениях b решений нет. **39.62.** При $a = -33$, $x = -1$; при $a = 12$, $x = 4$. **39.63.** а) 2,5; б) такая пара одна: $a = \frac{11}{6}$; $b = -\frac{5}{6}$; в) $a = \frac{11}{6}$, $b = \frac{5}{6}$. **39.64.** При $c = -6$ корень -2, при остальных значениях c два корня: $0{,}5(c + 2)$ и $0{,}25(c - 2)$. **39.65.** Прямая $y = 2x$. **39.66** $a \leqslant 3$. **39.67.** -1; 0 и 1. **39.68.** -2 и 4; при $a = -2$ корни: $-0{,}2$; $-1{,}5$ и 1; при $a = 4$ единственный корень: 1. **39.69.** $k = -4$. **39.70.** При $a = 0{,}6$ x — любое число; при $a < 0{,}6$ $[a; 0{,}6]$; при $a > 0{,}6$ $[0{,}6; a]$. **39.71.** При $a = 30$ уравнение имеет 12 целых корней, начиная с 10 и до 21 включительно. **39.72.** При $a < 7$ — 0 корней; при $a = 7$ — 1 корень; при $a > 7$ — 2 корня. **39.73.** При a из отрезка $[13{,}5; 14]$ — четыре корня. **39.74.** а) 0 и 1; б) $a = 1$;

$M(-1;\ 0)$ и $K(1;\ 2)$. **39.75.** а) $y = x - 3$; $M(3;\ 2)$; б) $y = 3 - x$; $M(1;\ 2)$; в) при $k = \frac{2}{3}$; $M(3;\ 2)$; при каждом $k \in (-\infty;\ -2) \cup [2;\ +\infty)$; $M\left(\frac{4}{k+2};\ \frac{4k}{k+2}\right)$; г) при каждом $k \in (-\infty;\ -2) \cup [2;\ +\infty)$; $M\left(\frac{2}{k+2};\ \frac{4(k+1)}{k+2}\right)$; д) при $k \leqslant -3$ и при $k \geqslant 2$ $M\left(-\frac{1}{k+2};\ \frac{4k+10}{k+2}\right)$; при $-3 < k \leqslant -2$ $M\left(-\frac{3}{k};\ 2\right)$; е) $a = -4$; ж) таких пар бесконечно много: $(a;\ 2a - 4)$ и $(a;\ 4 - 2a)$, где a — произвольное действительное число. **39.76.** а) При $a < -6$ и $a > 6$ решений нет; при $a = -6$ все $x \leqslant -2$; при $-6 < a < 6$ $x = 0{,}5a + 1$; при $a = 6$ $x \geqslant 4$; б) при $a < -2$ $x = 3 - 0{,}5a$; при $a = -2$ все x из промежутка $[-2;\ 4]$; при $a > -2$ $x = -3 - 0{,}5a$. **39.77.** При $p < 0$ решений нет; при $p = 0$ $x = 0$; при $p > 0$ все x из промежутка $[p;\ 2p]$. **39.78.** -8 и -4. **39.79.** При $a = 7$; сумма и произведение корней равны нулю. **39.80.** При $a = 2$ или при $a = 6$. В обоих случаях сумма и произведение корней равны нулю. **39.81.** При $a = 0$. **39.82.** При $a = 0$ и $b = 0$. **39.83.** $a = 0$ и $\frac{7}{3} \leqslant a \leqslant 7$.

40.06. а) $-2 < x < 1 \Rightarrow (-2;\ 1)$; в) $4 < x < 5 \Rightarrow (4;\ 5)$; д) $-4 < x \leqslant 1 \Rightarrow (-4;\ 1]$. **40.07.** а), б), д). **40.08.** а) и д). **40.09.** а), в), г). **40.10.** а) Таких p не существует; б) $p < 5$; в) $p \geqslant 5$; г) $p \geqslant 5$; д) $p < 5$. **40.11.** а) $x < 1$; б) $x > 2$; в) $x < -\sqrt{3}$; г) $x < -2$; д) $\boldsymbol{R}$; е) решений нет. **40.12.** а) $(-\infty;\ 3{,}5]$; б) $(-\infty;\ 1]$, но $t \neq 0$; в) $(1{,}5;\ +\infty)$; г) $[1{,}25;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 3]$, но $y \neq 0$. **40.13.** а) $x < 5$; б) $x > \frac{5}{6}$; в) $x \geqslant -1$; г) $x \geqslant -\frac{50}{49}$. **40.14.** а) $x < 10$; б) $x < -\frac{38}{43}$; в) $x \leqslant \frac{17}{19}$; г) $x < -\frac{45}{71}$. **40.15.** а) $x < 3{,}3$; б) $x > 2$. **40.16.** а) Нет решений; б) $\boldsymbol{R}$; в) нет решений; г) $\boldsymbol{R}$. **40.17.** $2 < x < \frac{16}{3}$. **40.18.** $-1 < x \leqslant 1$. **40.19.** $x > 33$. **40.21.** 1, 2, 3, 4. **40.22.** 0. **40.23.** Больше 6 км, но меньше 10 км. **40.24.** Менее 4 км. **40.25.** 20, 30, 40, 50, 60 или 70 км. **40.26.** Более 180 км. **40.27.** $19{,}2 \leqslant s \leqslant 28{,}8$. **40.28.** 9 р. **40.29.** От 25 до 30 км/ч (включительно), от 2 до 4 ч. **40.30.** а) При всех значениях a $(0{,}25a;\ +\infty)$; б) при $a > 0$ $\left(\frac{6}{a};\ +\infty\right)$; при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ $\left(-\infty;\ \frac{6}{a}\right)$; в) при $a > 0$ $(1;\ +\infty)$; при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ $(-\infty;\ 1)$; г) при $a > 0$ $(-\infty;\ a - 17]$;

при $a = 0$ $\boldsymbol{R}$; при $a < 0$ $[a - 17; +\infty)$. **40.31.** а) При $a > 1$ $(-1 - a; +\infty)$; при $a = 1$ решений нет; при $a < 1$ $(-\infty; -1 - a)$; б) при $a > -0{,}5$ $(-\infty; 2a + 1)$; при $a = -0{,}5$ решений нет; при $a < -0{,}5$ $(2a + 1; +\infty)$; в) при $a > \frac{1}{6}$ $(-\infty; 4a - 1]$; при $a = \frac{1}{6}$ решений нет; при $a < \frac{1}{6}$ $[4a - 1; +\infty)$; г) при $a < -3$ или $a > 3$ $\left(-\infty; -\frac{5 + a}{3 + a}\right]$; при $a = -3$ $\boldsymbol{R}$; при $a = 3$ решений нет; при $-3 < a < 3$ $\left[-\frac{5 + a}{3 + a}; +\infty\right)$. **40.32.** а) При $a > 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$; при $a < 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$; при $a = 0$, $b < 0$ $\boldsymbol{R}$; при $a = 0$, $b \geqslant 0$ решений нет; б) при $a > 2$, $b \in \boldsymbol{R}$ $\left(-\infty; \frac{b - 3}{a - 2}\right)$; при $a < 2$, $b \in \boldsymbol{R}$ $\left(\frac{b - 3}{a - 2}; +\infty\right)$; при $a = 2$, $b < 3$ $\boldsymbol{R}$; при $a = 2$, $b \geqslant 3$ решений нет; г) при $a > 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ $[b - 1; +\infty)$; при $a < 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ $(-\infty; b - 1]$; при $a = 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{R}$. **40.33.** $a \geqslant -1{,}25$. **40.34.** $a \geqslant -50$. **40.35.** $a > 0{,}75$.

41.02. а) $\boldsymbol{R}$; б) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; в) $\left(-\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right)$; г) $\boldsymbol{R}$. **41.03.** а) $[-2; 0]$; в) $\left(0; \frac{2}{27}\right)$; д) $\left[0; \frac{2}{3}\right]$; з) $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{2}{17}; +\infty\right)$. **41.04.** а) Решений нет; в) $\left(\frac{1}{8}; 1\right)$; д) $\boldsymbol{R}$; ж) решений нет. **41.05.** а) 1; б) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **41.09.** г) $\left(-\infty; -6 - 2\sqrt{7}\right] \cup \left[6 - 2\sqrt{7}; +\infty\right)$; е) $\left[\sqrt{6} - \sqrt{3}; \sqrt{6} + \sqrt{3}\right]$. **41.10.** а) $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; в) $\left[\frac{9}{7}; 5\right]$; д) $\left(-\infty; -\frac{14}{13}\right) \cup \left(\frac{49}{19}; +\infty\right)$.

41.11. а) -1; б) 9; в) -3. **41.12.** а) Решений нет; б) 0; в) 2; г) решений нет; д) 2. **41.14.** а) 2; $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; таких x не существует; 1; г) -5 или 1; $x > 4$ или $x < -2$; $-3 < x < 3$; $x \leqslant -0{,}75$ или $x \geqslant 0{,}75$. **41.15.** а) $\boldsymbol{R}$; в) $\left(-\infty; -\frac{26}{15}\right)$, $\left(-\frac{26}{15}; 2\right)$, $(2; +\infty)$. **41.16.** а) Равносильны; б) равносильны; в) неравносильны; г) равносильны. **41.18.** а) $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{69}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{69}}{2}; +\infty\right)$. **41.19.** а) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{111}{3}; +\infty\right)$. **41.22.** $(-1; 5)$. **41.27.** $1 < a < 6$. **41.28.** $b < -1$ или $b > 4{,}5$.

41.29. $b \leqslant -\frac{13}{7}$ или $b \geqslant \frac{43}{13}$. **41.30.** а) $-1 < a < 5$; б) $a > 10$; в) $-13 < a \leqslant -1$; г) $a = 0$. **41.33.** а) $a \geqslant 3$; г) $-1 < a \leqslant 0$. **41.34.** а) $|a| > 4$; г) при $a < -2$ и при $a \geqslant 2$. **41.35.** а) $0 \leqslant a < 1$; б) $5 < a \leqslant 6$. **41.36.** а) $-9 \leqslant a < 0$.

42.06. а) 4; б) 10; в) 48; г) 46. **42.07.** а) 0,25; б) $\frac{17}{21}$; в) $\frac{19}{32}$; г) $\frac{11}{24}$.

42.16. а) *Указание*. Возведите левую часть неравенства в квадрат и воспользуйтесь неравенством из задания 30.16 б). **42.22.** 10. **42.23.** 40. **42.24.** 60. **42.26.** 2500. **42.27.** 12 500. **42.28.** 3500. **42.39.** Собака. **42.40.** Коля.

43.12. а) 55; 666; 34; 99; 0; 599; в) 1,0; 0,44; 0,00. **43.15.** 3. **43.20.** а) $3{,}35 \leqslant x \leqslant 3{,}36$; б) $3{,}295 \leqslant x \leqslant 3{,}305$; е) $3299{,}995 \leqslant x \leqslant 330{,}005$. **43.22.** а) $14{,}75 \leqslant 5x \leqslant 15{,}25$; ж) $0{,}33 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 0{,}34$. **43.23.** в) $26{,}2 \leqslant x^2 \leqslant 26{,}3$. **43.27.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **43.28.** а) Да; б) да; в) нет; г) да. **43.31.** 0,04. **43.32.** 1.

45.01. 90. **45.02.** 900. **45.03.** $9 \cdot 10^{n-1}$. **45.04.** Девять чисел, их сумма = 1 111 111 101. **45.05.** Девять чисел, их сумма = 8 888 888 880. **45.06.** Восемь чисел, их сумма = 9 999 999 992. **45.07.** 34 689, 34 698, 34 869, 34 896, ..., 98 643, всего 120 чисел. **45.09.** а) 183; б) 819; в) 645; д) 151 или 359; ж) 501; з) такого нет; и) 251; к) 253; л) 1002; м) 668. **45.13.** а) 8 чисел, наименьшее 2, наибольшее 9; б) 110 чисел, наименьшее 12, наибольшее 121; в) 1211 чисел, наименьшее 135, наибольшее 1345; г) 0; д) 1. **45.14.** Верно. **45.15.** 73 или 74. **45.16.** 734 или 735. **45.17.** 73 или 74. **45.18.** 734 или 735. **45.19.** 735 или 736. **45.20.** $441 \leqslant c - a < 443$. **45.21.** Количество натуральных чисел может быть равно 0, 1, 2, ..., 73. **45.22.** Например, $x^2 - 80x + 79$. Его корнями являются числа 1 и 79, между которыми находится ровно 77 натуральных чисел от 2 до 78. **45.23.** 200 и среди них 100 натуральных. **45.25.** $\frac{22}{9}$%. **45.26.** $\frac{2}{15}$%. **45.28.** а) 91; б) 91; в) 172. **45.29.** 10. **45.30.** 10. **45.34.** Неверно. **45.35.** Тех, у которых нет 9. **45.36.** Тех, у которых есть 9. **45.37.** а) 645; б) 48. **45.38.** 443 827. **45.39.** 4581. **45.40.** 8460. **45.41.** 8145. **45.42.** Сумма 346, а произведение равно 0. **45.43.** Произведение больше нуля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Звавич Леонид Исаакович,
Рязановский Андрей Рафаилович

АЛГЕБРА

8 класс

ЗАДАЧНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *С. А. Сорока*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректор *И. Н. Баханова*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001625.02.08 от 29.02.2008.

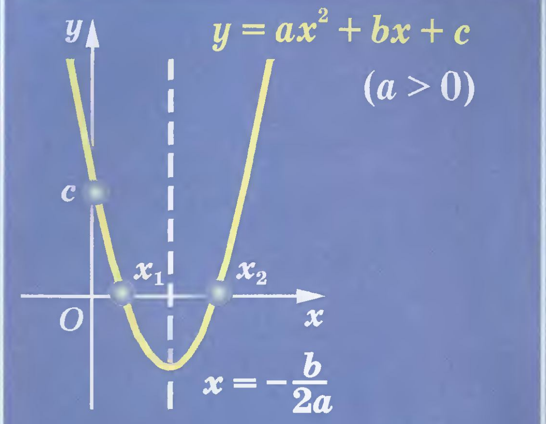
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,0. Тираж 10 000 экз. Заказ № 5377

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: (495) 657-98-98 (многоканальный).
E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14



x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

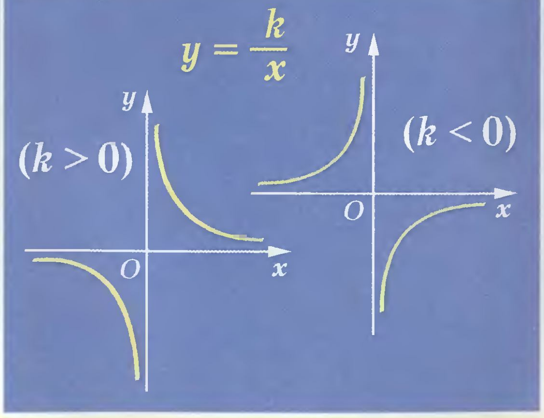
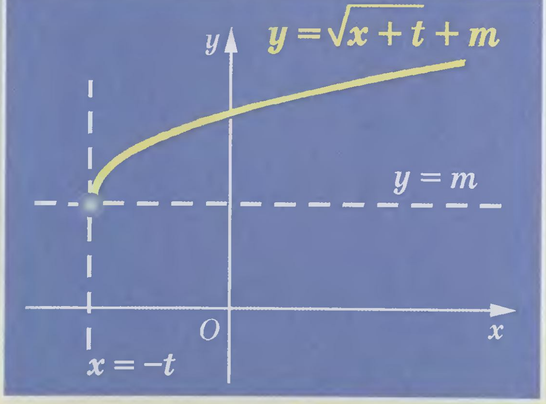
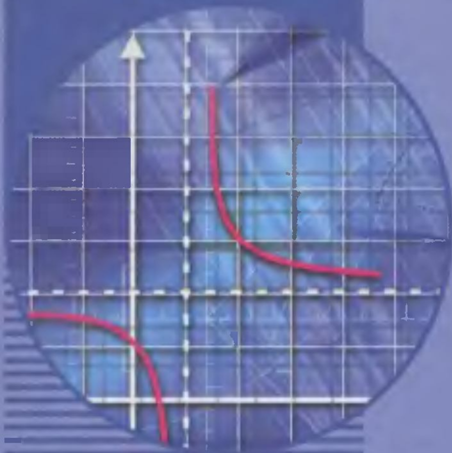


ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801





ISBN 978-5-346-01083-8
9 785346 010838