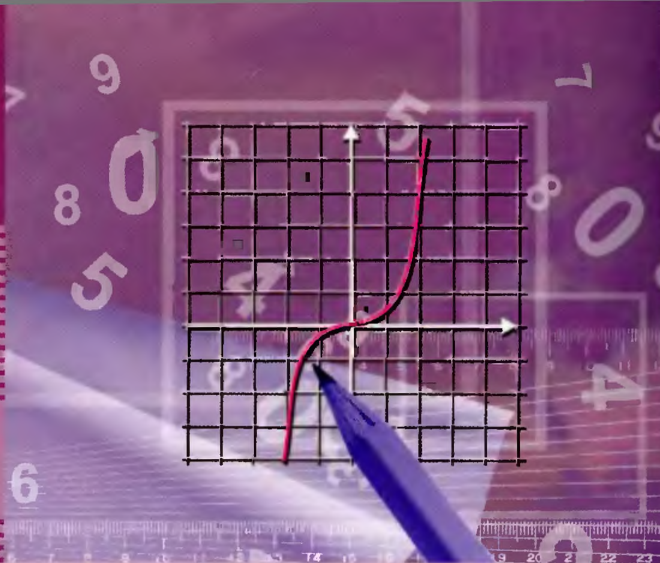


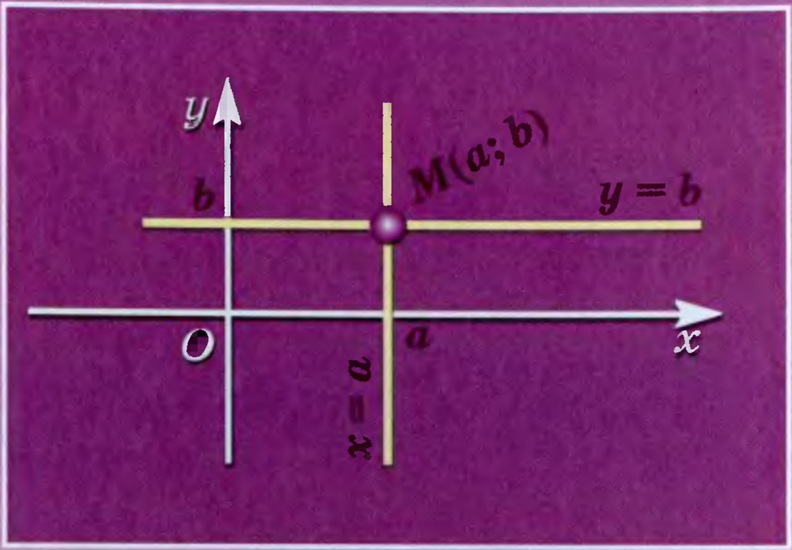
А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев

Алгебра

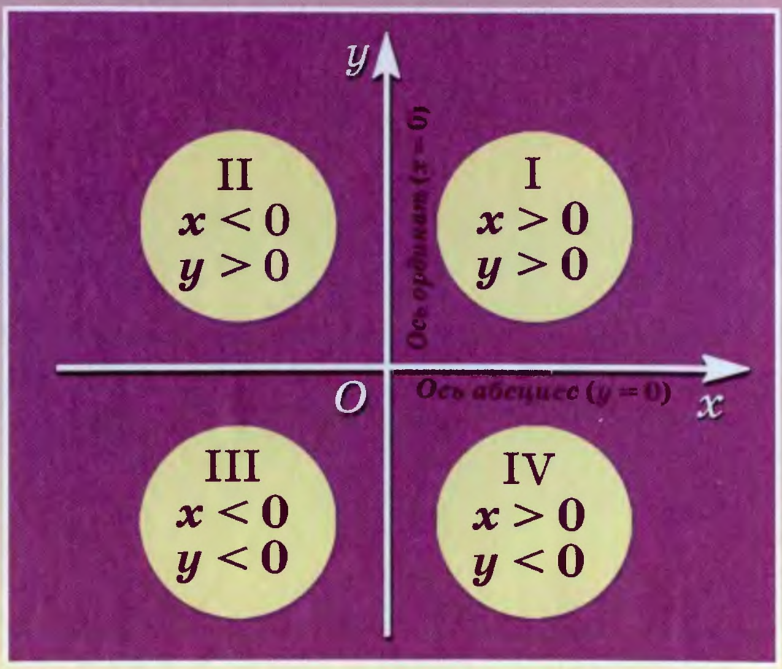
Учебник

7 класс

Издательство
Мнемозина



y
M(a; b)
b
y = b
O
a
x
x = a



y
Ось ординат (x = 0)
II
x < 0
y > 0
I
x > 0
y > 0
O
Ось абсцисс (y = 0)
x
III
x < 0
y < 0
IV
x > 0
y < 0

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \qquad a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots)$

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$a^n : a^k = a^{n-k}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$(a^n)^k = a^{nk}$$

А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев

АЛГЕБРА

7 класс

В двух частях
Часть 1

Учебник
для учащихся общеобразовательных учреждений

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МНЕМОЗИНА

Москва 2009

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М79

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106–5215/510 от 23.10.2008)
и Российской академии образования (№ 01–5/7д–226 от 02.10.2008)

Мордкович А. Г.
М79 Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. — М. : Мнемозина, 2009. — 191 с. : ил.
ISBN 978-5-346-01195-8

Это — учебник для классов с **повышенным уровнем математической подготовки** в общеобразовательных школах. Он написан в русле той концепции, которая использована в соответствующем учебнике А. Г. Мордковича для 7-го класса общеобразовательных учреждений, но с естественным для математических классов углублением и качественным расширение материала.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Николаев Николай Петрович

АЛГЕБРА

7 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*. Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *С. А. Сорока*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*. Корректор *И. Н. Баханова*
Компьютерная верстка: *Е. Н. Подчепаева*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001625.02.08 от 29.02.2008.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,0. Тираж 10 000 экз. Заказ № 1185

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б. Тел.: 8 (495) 783 8284, 783 8285, 783 8286.
Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

ISBN 978-5-346-01194-1 (общ.)
ISBN 978-5-346-01195-8 (ч. 1)

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Данный учебник адресован не специализированным математическим школам или классам с собственными авторскими программами, а обычным классам в общеобразовательных школах, если в таких классах есть возможность (и желание) **изучать курс алгебры на более высоком уровне** по сравнению с массовой школой. При этом следует учесть, что, на наш взгляд, ученики 7-го класса в большинстве своем еще не определились со своими возможностями и интересами, поэтому переводить их сразу на повышенный уровень математической подготовки вряд ли целесообразно. Именно поэтому данный учебник в значительной мере (и по структуре, и по содержанию, да и по стилю) соответствует нашему учебнику для массовой школы (речь идет о книге А. Г. Мордковича «Алгебра—7». Часть 1. Учебник. Мнемозина, 2007—2009). Отличие же, во-первых, заключается в том, что в одноименных параграфах слишком простые примеры и рассуждения заменены на более сложные и интересные; во-вторых, добавлен параграф о решении текстовых задач на составление линейных уравнений с одной переменной; в-третьих, в конец учебника перенесена глава о линейных системах, поскольку в содержащихся в ней достаточно сложных примерах активно используется весь предшествующий материал курса алгебры для 7-го класса.

На уроках математики учитель всегда сочетает обыденный язык (язык общения, язык литературного повествования) с предметным языком — строгим, сухим, лаконичным, строящимся по принятым в математике законам. Так написан и этот учебник, представляющий собой книгу не для заучивания, а для изучения, т. е. для чтения и понимания.

Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберется в том, что́ надо рассказать учащимся на уроке, что́ предложить им запомнить, а что́ просто прочитать дома (и, возможно, обсудить в классе на следующем уроке в жанре беседы).

Всюду, где возможно, авторы старались следовать идеям проблемного обучения. Проблема (по большому счету) — это то, что мы сегодня решить не можем и завтра не решим; это то, что мучает нас продолжительное время; это то, к решению чего мы постепенно приближаемся, ощущая это приближение; это то, наконец, что, будучи решено, дает эмоциональный заряд, приносит радость. Именно такое (не локальное, а глобальное) понимание проблемного обучения руководило авторами в работе над учебником. Примеров можно привести очень много, внимательный читатель (прежде всего, конечно, учитель математики) все увидит и поймет.

Лишь простейшие понятия даются сразу в готовом виде, остальные же вводятся постепенно, с уточнениями и корректировкой, а некоторые вообще остаются на интуитивном уровне восприятия до тех пор, пока не наступит благоприятный момент для их точного определения. К числу таких понятий относится, например, понятие функции. В этом учебнике строгого определения функции нет, оно будет введено лишь в курсе алгебры 9-го класса.

Продолжением данной книги являются учебники алгебры для 8-го и 9-го классов тех же авторов. В приложении приведено примерное планирование учебного материала из расчета 5 ч в неделю.

Авторы

⟨■ — окончание решения примера (при отсутствии рубрики «ответ»).

ГЛАВА 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

В младших классах вы учились оперировать с целыми и дробными числами, решали уравнения, знакомились с геометрическими фигурами, с координатной прямой и координатной плоскостью. Все это составляло содержание одного школьного предмета «Математика». В действительности такая важная область науки, как математика, подразделяется на огромное число самостоятельных дисциплин: алгебру, геометрию, теорию вероятностей, математический анализ, математическую логику, математическую статистику, теорию игр и т. д. У каждой дисциплины — свои объекты изучения, свои методы познания реальной действительности.

Алгебра, к изучению которой мы приступаем, дает человеку возможность не только выполнять различные вычисления, но и учит его делать это как можно быстрее, рациональнее. Человек, владеющий алгебраическими методами, имеет преимущество перед теми, кто не владеет этими методами: он быстрее считает, успешнее ориентируется в жизненных ситуациях, четче принимает решения, лучше мыслит. Наша задача — помочь вам овладеть алгебраическими методами, ваша задача — не противиться обучению, с готовностью следовать за нами, преодолевая возникающие трудности.

На самом деле, в младших классах вам уже приоткрыли окно в волшебный мир алгебры, ведь алгебра в первую очередь изучает числовые и алгебраические выражения.

Напомним, что *числовым выражением* называют всякую запись, составленную из чисел и знаков арифметических действий (составленную, разумеется, со смыслом, например: $3 + 5 \cdot 7$ — числовое выражение, тогда как $3 + :$ — не числовое выражение, а бессмысленный набор символов). По некоторым причинам (о них мы будем говорить в дальнейшем) часто вместо конкретных чисел употребляются буквы (преимущественно из латинского алфавита), тогда получается *алгебраическое выражение*. Эти выражения могут быть очень громоздкими. Алгебра учит упрощать их, используя разные правила, законы, свойства, формулы.

Пример 1. Найти значение числового выражения

$$\frac{(2{,}73+4{,}81+3{,}27-2{,}81):\left(\frac{2}{5}-\frac{14}{15}\right)}{25\cdot 37\cdot 0{,}4}.$$

Решение. Сейчас мы вместе с вами кое-что вспомним, и вы увидите, как много алгебраических фактов вы уже знаете.

Прежде всего нужно выработать план осуществления вычислений. Для удобства введем следующие обозначения. Числитель данного дробного выражения обозначим буквой A, а знаменатель — буквой B:

$$A = (2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81) : \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{15}\right); \quad B = 25 \cdot 37 \cdot 0{,}4.$$

В выражении A обозначим делимое буквой C, а делитель — буквой D. Тогда план наших действий будет выглядеть так:

1) найдем значение c выражения C;

2) найдем значение d выражения D;

3) разделив c на d, найдем значение a выражения A;

4) найдем значение b выражения B;

5) разделив a на b, найдем значение заданного числового выражения.

Итак, план вычислений есть (а наличие плана — половина успеха!), приступим к его реализации.

1) $C = 2{,}73 + 4{,}81 + 3{,}27 - 2{,}81$. Конечно, можно считать подряд или, как иногда говорят, «в лоб»: $2{,}73 + 4{,}81$, затем к

этому числу прибавить 3,27, затем вычесть 2,81. Но красивее сделать так, вспомнив переместительный и сочетательный законы сложения:

$$(2,73 + 3,27) + (4,81 - 2,81) = 6 + 2 = 8.$$

Итак, $c = 8$.

2) $D = \frac{2}{5} - \frac{14}{15}$. Здесь нам придется вспомнить, как действовать с обыкновенными дробями. Сначала надо привести дроби к общему знаменателю. Наименьшим общим кратным чисел 5 и 15 является число 15, оно и будет общим знаменателем. Для дроби $\frac{2}{15}$ получаем $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$. Далее находим

$$\frac{2}{5} - \frac{14}{15} = \frac{6}{15} - \frac{14}{15} = \frac{6 - 14}{15} = -\frac{8}{15}.$$

Итак, $d = -\frac{8}{15}$.

3) Разделим c на d:

$$8 : \left(-\frac{8}{15}\right) = 8 \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{8 \cdot 15}{8} = -15.$$

Итак, $a = -15$.

4) $B = 25 \cdot 37 \cdot 0,4$. Опять-таки можно проводить вычисления «в лоб», т. е. вычислить $25 \cdot 37$, затем то, что получится, умножить на 0,4. Но рациональнее воспользоваться переместительным и сочетательным законами умножения:

$$25 \cdot 37 \cdot 0,4 = (25 \cdot 0,4) \cdot 37 = 10 \cdot 37 = 370.$$

Итак, $b = 370$.

5) Осталось разделить числитель a на знаменатель b. Получим $-\frac{15}{370} = -\frac{3}{74}$ (разделили числитель и знаменатель дроби на 5, т. е. сократили дробь).

Ответ: $-\frac{3}{74}$.

А теперь вместе проанализируем, какие сведения из математики нам пришлось вспомнить в процессе решения примера (причем не просто вспомнить, но и использовать).

1. Порядок арифметических действий.

2. Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.

3. Переместительный закон умножения: $ab = ba$.

4. Сочетательный закон сложения:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

5. Сочетательный закон умножения: $abc = (ab)c = a(bc)$.

6. Понятия обыкновенной дроби, десятичной дроби, отрицательного числа.

7. Арифметические операции с десятичными дробями.

8. Арифметические операции с обыкновенными дробями.

9. Основное свойство обыкновенной дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (значение дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель одновременно умножить на одно и то же число или разделить на одно и то же число, отличное от нуля). Это свойство позволило нам преобразовать дробь $\frac{2}{5}$ к виду $\frac{6}{15}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{5}$ одновременно умножили на одно и то же число 3). Оно же позволило нам сократить дробь $\frac{15}{370}$ (числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{370}$ одновременно разделили на одно и то же число 5).

10. Правила действий с положительными и отрицательными числами.

Все это вы знаете, но ведь все это — алгебраические факты. Таким образом, некоторое знакомство с алгеброй у вас уже состоялось в младших классах. Основная трудность, как видно уже из примера 1, заключается в том, что таких фактов довольно много, причем их надо не только знать, но и уметь использовать, как говорят, «в нужное время и в нужном месте». Вот этому и будем учиться.

И последнее, чтобы закончить обсуждение примера 1. То число, которое получается в результате упрощений числового выражения (в данном примере это было число $-\frac{3}{74}$), называют *значением числового выражения.*

Если дано алгебраическое выражение, то можно говорить о *значении алгебраического выражения*, но только при конкретных значениях входящих в него букв. Например, алгебраическое выражение $a + b$ при $a = 5$, $b = 7$ имеет значение 12 (поскольку $a + b = 5 + 7 = 12$); при $a = -16$, $b = -14$ оно имеет значение -30 (так как $a + b = -16 + (-14) = -16 - 14 = -30$). Алгебраическое выражение $a^2 - 3b$ при $a = -2$, $b = 0{,}4$ принимает вид числового выражения $(-2)^2 - 3 \cdot 0{,}4$; упрощая, получаем $4 - 1{,}2 = 2{,}8$ — это и есть значение алгебраического выражения $a^2 - 3b$ при $a = -2$, $b = 0{,}4$.

Поскольку буквам, входящим в состав алгебраического выражения, можно придавать различные числовые значения (т. е. можно менять значения букв), эти буквы называют *переменными*.

Пример 2. Найти значение алгебраического выражения

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)},$$

если: а) $a = 1$, $b = 2$; б) $a = 3{,}7$, $b = -1{,}7$; в) $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{5}$.

Решение.

а) Соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$;

2) $a + b = 1 + 2 = 3$;

3) $a - b = 1 - 2 = -1$;

4) $(a + b)(a - b) = 3 \cdot (-1) = -3$;

5) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{9}{-3} = -3$.

б) Аналогично, соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = 3{,}7^2 + 2 \cdot 3{,}7 \cdot (-1{,}7) + (-1{,}7)^2 =$
$= 13{,}69 - 12{,}58 + 2{,}89 = 4$;

2) $a + b = 3{,}7 + (-1{,}7) = 2$;

3) $a - b = 3{,}7 - (-1{,}7) = 5{,}4$;

4) $(a + b)(a - b) = 2 \cdot 5{,}4 = 10{,}8$;

5) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{4}{10{,}8} = \frac{4 \cdot 10}{10{,}8 \cdot 10} = \frac{40}{108} = \frac{10}{27}$

(разделили числитель и знаменатель дроби $\frac{40}{108}$ на 4, т.е. сократили дробь).

в) Снова, соблюдая порядок действий, последовательно находим:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

$= \frac{9}{25} + \frac{18}{25} + \frac{9}{25} = \frac{36}{25};$

2) $a + b = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5};$

3) $a - b = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0;$

4) $(a + b)(a - b) = \frac{6}{5} \cdot 0 = 0.$

А на нуль делить нельзя! Что это значит в данном случае (и в других аналогичных случаях)? Это значит, что при $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{5}$ заданное алгебраическое выражение *не имеет смысла.* ◙

Используется такая терминология: если при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение имеет числовое значение, то указанные значения переменных называют *допустимыми;* если же при конкретных значениях букв (переменных) алгебраическое выражение не имеет смысла, то указанные значения переменных называют *недопустимыми.* Так, в примере 2 значения $a = 1$ и $b = 2$, $a = 3{,}7$ и $b = -1{,}7$ — допустимые, тогда как значения $a = \frac{3}{5}$ и $b = \frac{3}{5}$ — недопустимые (более точно, первые две пары значений — допустимые, а третья пара значений — недопустимая).

Вообще в примере 2 недопустимыми будут такие значения переменных a, b, при которых либо $a + b = 0$, либо $a - b = 0$. Например, $a = 7$, $b = -7$ или $a = 28{,}3$, $b = 28{,}3$ — недопустимые пары значений; в первом случае $a + b = 0$, а во втором случае $a - b = 0$. В обоих случаях знаменатель заданного в этом примере выражения обращается в нуль, а на нуль, повторим еще раз, делить нельзя. Теперь, наверное, вы и сами сможете придумать как допустимые пары значений для переменных a, b, так и недопустимые пары значений этих переменных в примере 2. Попробуйте!

Замечание 1. Пример 2в) на самом деле мы решали плохо (некультурно), поскольку сделали ряд лишних, ненужных вычислений. Надо было сразу заметить, что при $a = \frac{3}{5}$ и $b = \frac{3}{5}$ знаменатель обращается в нуль, и объявить: выражение не имеет смысла! Но, как говорится, сразу замечает тот, кто знает, что надо замечать. Этому и учит алгебра.

Замечание 2. Если бы мы с вами решали пример 2 позднее, то сделали бы это лучше. Мы бы смогли преобразовать выражение к более простому виду $\frac{a+b}{a-b}$, а тогда, согласитесь, гораздо проще было бы и вычислять. А вот почему верно равенство $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$, пока мы сказать не можем. На этот вопрос ответим позднее (в § 32).

§ 2. ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

На математическом языке многие утверждения выглядят яснее и прозрачнее, чем на обычном. Например, на обычном языке говорят: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется». Слыша это, математик пишет (или говорит):

$$a + b = b + a.$$

Он переводит высказанное утверждение на математический язык, в котором используются разные числа, буквы (переменные), знаки арифметических действий, иные символы. Запись $a + b = b + a$ экономна и удобна для применения.

Возьмем другой пример. На обычном языке говорят: «Чтобы сложить две обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить без изменения». Математик осуществляет «синхронный перевод» на свой язык:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

А вот пример обратного перевода. На математическом языке записан распределительный закон:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Осуществляя перевод на обычный язык, получим длинное предложение: «Чтобы умножить число a на сумму чисел b и c, можно число a умножить поочередно на каждое слагаемое и полученные произведения сложить».

Во всяком языке есть письменная и устная речь. Выше мы говорили о письменной речи в математическом языке. А устная речь — это употребление специальных терминов («слагаемое», «уравнение», «неравенство», «график», «координата» и т. п.), а также различные математические утверждения, выраженные словами.

Чтобы овладеть новым языком, необходимо изучить его буквы, слоги, слова, предложения, правила, грамматику. Это не самое веселое занятие, интереснее сразу начать читать и говорить. Но так не бывает, придется набраться терпения и сначала изучить основы. В результате такого изучения ваши представления о математическом языке будут постепенно расширяться.

§ 3. ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Представьте себе такую ситуацию: в школе четыре седьмых класса. В **7А** учатся 15 девочек и 13 мальчиков, в **7Б** — 12 девочек и 12 мальчиков, в **7В** — 9 девочек и 18 мальчиков, в **7Г** — 20 девочек и 10 мальчиков. Если нам нужно ответить на вопрос, сколько учеников в каждом из седьмых классов, то нам 4 раза придется осуществлять одну и ту же операцию сложения:

в **7А**	$15 + 13 = 28$ учеников;
в **7Б**	$12 + 12 = 24$ ученика;
в **7В**	$9 + 18 = 27$ учеников;
в **7Г**	$20 + 10 = 30$ учеников.

Используя математический язык, можно все эти четыре разные ситуации объединить: в классе учатся a девочек и b мальчиков, значит, всего учеников $a + b$. Такова ***математическая модель*** данной реальной ситуации. Алгебра, в частности, занимается тем, что описывает различные реальные ситуации на математическом языке в виде математических моделей, а затем имеет дело уже не с реальными ситуациями, а с этими моделями, используя разные правила, свойства, законы, выработанные в алгебре.

В следующей таблице приведены различные реальные ситуации и их математические модели; при этом a — число девочек в классе, b — число мальчиков в том же классе.

№	Реальная ситуация	Математическая модель
1	В классе девочек и мальчиков поровну (как в **7Б**)	$a = b$
2	Девочек на 2 больше, чем мальчиков (как в **7А**)	$a - b = 2$ или $a = b + 2$ или $a - 2 = b$
3	Девочек на 9 меньше, чем мальчиков (как в **7В**)	$b - a = 9$ или $b = a + 9$ или $a = b - 9$
4	Девочек в 2 раза больше, чем мальчиков (как в **7Г**)	$a = 2b$ или $b = \frac{a}{2}$
5	Девочек в 2 раза меньше, чем мальчиков (как в **7В**)	$a = \frac{b}{2}$ или $b = 2a$
6	Если в данный класс придут еще одна девочка и три мальчика, то девочек и мальчиков станет поровну (как в **7А**)	$a + 1 = b + 3$
7	Если из класса уйдут три девочки, то мальчиков станет в 3 раза больше (как в **7В**)	$b = 3(a - 3)$

Составляя эту таблицу, мы шли от реальной ситуации к ее математической модели. Но надо уметь двигаться и в обратном направлении, т. е. по заданной математической модели описывать словами реальную ситуацию. Например, что означает (при тех же обозначениях, что и в нашей таблице) такая математическая модель: $a - 5 = b + 5$? Она означает, что если из класса уйдут 5 девочек и придут 5 мальчиков, то девочек и мальчиков в классе станет поровну (эта ситуация имеет место в **7Г** из рассмотренного примера).

Наверное, у вас возник вопрос: а зачем нужна математическая модель реальной ситуации, что она нам дает, кроме краткой выразительной записи? Чтобы ответить на этот вопрос, решим следующую задачу.

Пример 1. В классе девочек вдвое больше, чем мальчиков. Если из этого класса уйдут три девочки и придут три мальчика, то девочек будет на 4 больше, чем мальчиков. Сколько учеников в данном классе?

Решение. Пусть x — число мальчиков в классе, тогда $2x$ — число девочек. Если уйдут три девочки, то останется $(2x - 3)$ девочек. Если придут три мальчика, то станет $(x + 3)$ мальчиков. По условию девочек будет тогда на 4 больше, чем мальчиков; на математическом языке это записывается так: $(2x - 3) - (x + 3) = 4$.

Это уравнение — математическая модель задачи. Используя известные правила решения уравнений, последовательно получаем:

$2x - 3 - x - 3 = 4$ (раскрыли скобки);
$x - 6 = 4$ (привели подобные слагаемые);
$x = 6 + 4$;
$x = 10$.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи. В классе 10 мальчиков, а значит, 20 девочек (вы помните, их по условию было в 2 раза больше).

Ответ: всего в классе 30 учеников.

Интересно, заметили ли вы, что в ходе решения было четкое разделение рассуждений на три этапа? Давайте посмотрим вместе.

<u>На первом этапе</u>, введя переменную x и переведя текст задачи на математический язык, мы составили математическую модель — в виде уравнения $(2x - 3) - (x + 3) = 4$.

<u>На втором этапе</u>, используя наши знания из курса математики 5—6-го классов, мы это уравнение решили: $x = 10$. На этом этапе мы не думали ни про девочек, ни про мальчиков, а занимались «чистой» математикой, работали только с математической моделью.

<u>На третьем этапе</u> мы использовали полученное решение, чтобы ответить на вопрос задачи. На этом этапе мы снова вернулись к девочкам, мальчикам и интересующему нас классу.

Подведем итоги. В процессе решения задачи были четко выделены три этапа.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Второй этап. *Работа с математической моделью.*

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Вот так обычно применяется математика к реальной действительности. После рассмотренного примера повторим вопрос: нужны ли математические модели и надо ли уметь работать с ними? Нужны! Разумеется, чем сложнее модель, тем больше фактов, правил, свойств приходится применять для работы с ней. Эти факты, правила, свойства надо изучить, что мы и будем с вами делать на протяжении всех лет освоения алгебры в школе.

Математические модели бывают не только алгебраическими (в виде равенства с переменными как в таблице на с. 13, или в виде уравнения, как было в примере 1). Для знакомства еще с одним видом математической модели возьмем задачу из учебника математики для 6-го класса (специально берем задачу, с которой вы, может быть, встречались).

Пример 2. Построить график температуры воздуха, если известно, что температуру измеряли в течение суток и по результатам измерения составили следующую таблицу:

Время суток, ч	0	2	4	6	8	10	11	14	16	18	22	24
Температура, °C	5	0	0	−3	−4	−2	0	6	8	5	3	3

Решение. Построим прямоугольную систему координат. По горизонтальной оси (оси абсцисс) будем откладывать значения времени t, а по вертикальной оси (оси ординат) — значения температуры T. Построим на координатной плоскости точки, координатами которых являются соответствующие числа из таблицы. Всего получается 12 точек (рис. 1). Соединив их плавной линией, получим один из возможных графиков температуры (рис. 2). ■

Построенный график есть математическая модель, описывающая зависимость температуры от времени. Анализируя этот график, можно описать словами, что происходило с температурой воздуха в течение суток. Ночью с 0 ч до 8 ч утра становилось все

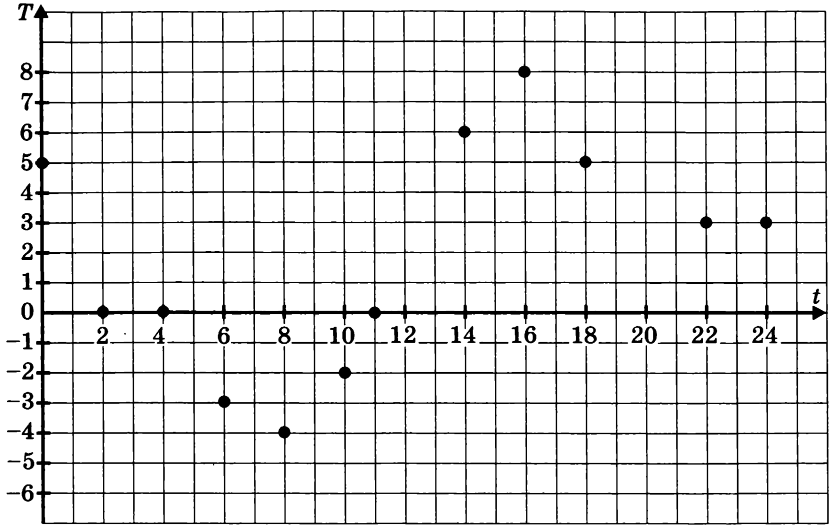

T
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
t
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Рис. 1

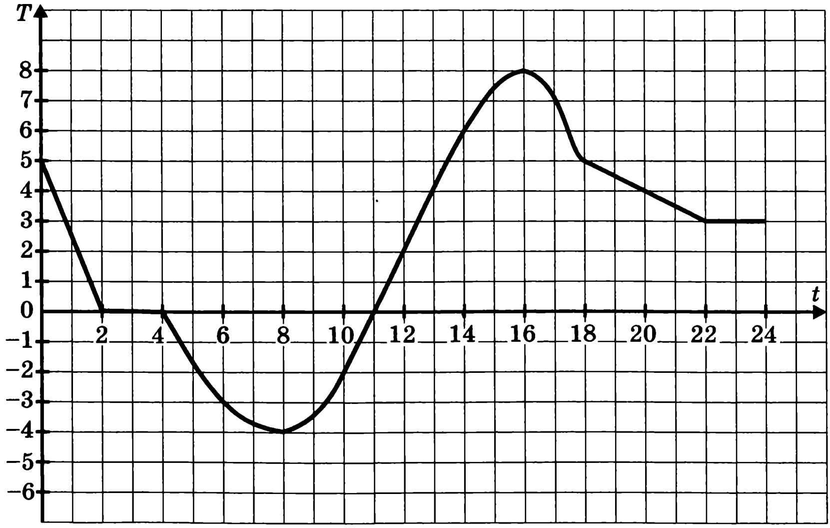

T
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
t
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Рис. 2

холоднее (от 5 °C в 0 ч до −4 °C в 8 ч утра). Потом, видимо, выглянуло солнышко и стало теплеть, так что в 11 ч температура была уже не отрицательной, а нулевой (0 °C). До 16 ч теплело, причем в 16 ч было теплее всего (8 °C). А затем стало темнеть, температура начала постепенно снижаться и понизилась до 3 °C в 22 ч.

Глядя на график температуры, можно приближенно определить, какая температура была наименьшей (−4 °C в 8 ч утра), какая — наибольшей (8 °C в 16 ч), где температура менялась быстрее, где медленнее, а где вообще не менялась (от 2 до 4 ч ночью и от 22 до 24 ч вечером). Рассмотренная математическая модель является примером графической модели.

Итáк, нам нужно учиться описывать реальные ситуации словами (*словесная модель*), алгебраически (*алгебраическая модель*), графически (*графическая модель*). Бывают еще *геометрические модели* реальных ситуаций — они изучаются в курсе геометрии. Впрочем, графические модели также иногда называют геометрическими, а вместо термина «алгебраическая модель» употребляют термин «аналитическая модель». Все это — виды математических моделей.

Чтобы свободно оперировать любыми видами математических моделей, нужно научиться переходить от одной из них к другой. Так, выше, в примере 1, нам удалось перейти от словесной модели к аналитической. В примере 2 удалось перейти от словесной (точнее, табличной) модели к графической, что позволило вновь вернуться к словесному описанию рассматриваемой ситуации, но уже на более содержательном уровне. Будем учиться этим переходам.

§ 4. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Одним из самых простых и в то же время очень важных видов математических моделей реальных ситуаций являются известные вам из курса математики 5—6-го классов *линейные уравнения с одной переменной*. Приведем примеры линейных уравнений:

$$3x = 12,\ 5y - 10 = 0,\ 2a + 7 = 0$$

и т. д.

Решить линейное уравнение — это значит найти все те значения переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Каждое такое значение переменной называют **корнем уравнения**. Так, уравнение $3x = 12$ имеет корень $x = 4$, поскольку $3 \cdot 4 = 12$ — верное равенство, причем других корней нет; уравнение $5y - 10 = 0$ имеет корень $y = 2$, поскольку $5 \cdot 2 - 10 = 0$ — верное равенство, причем других корней нет; уравнение $2a + 7 = 0$ имеет корень $a = -3{,}5$, поскольку $2 \cdot (-3{,}5) + 7 = 0$ — верное равенство, причем других корней нет.

Вообще **линейным уравнением с одной переменной x** называют уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — любые числа (*коэффициенты*). Если $a = 0$ и $b = 0$, т. е. уравнение имеет вид $0 \cdot x + 0 = 0$, то корнем уравнения является любое число (бесконечное множество корней). Если $a = 0$ и $b \neq 0$, т. е. уравнение имеет вид $0 \cdot x + b = 0$, то ни одно число этому уравнению не удовлетворяет; говорят, что уравнение не имеет корней.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда $a \neq 0$. Рассуждаем так:

1) $ax + b = 0$, значит, $ax = -b$ (поскольку $(-b) + b = 0$); фактически слагаемое b перенесли из левой части уравнения в правую с противоположным знаком;

2) $ax = -b$, т.е. произведение чисел a и x равно $-b$; но тогда множитель x равен частному от деления произведения $-b$ на второй множитель. Значит, $x = (-b) : a$. Вместо знака деления можно использовать черту дроби:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

А как быть, если уравнение записано в более сложном виде, например

$$2x - 2 = 10 - x?$$

Рассуждаем так. Два выражения равны тогда и только тогда, когда их разность равна нулю:

$$(2x - 2) - (10 - x) = 0.$$

Воспользуемся известными из курса математики 5—6-го классов правилами раскрытия скобок и приведения подобных членов:

$$2x - 2 - 10 + x = 0;$$

$$3x - 12 = 0;$$
$$3x = 12;$$
$$x = 4.$$

Такие уравнения вы уже решали в курсе математики 5—6-го классов. Фактически при этом используется определенная программа действий, определенный порядок ходов. В математике в таких случаях используют термин *алгоритм*. Для линейного уравнения вида $ax + b = cx + d$ где $a \neq c$, этот алгоритм выглядит так:

1) перенести все члены уравнения из правой части в левую с противоположными знаками;

2) привести в левой части подобные слагаемые, в результате чего получится уравнение вида $kx + m = 0$, где $k \neq 0$;

3) преобразовать уравнение к виду $kx = -m$ и записать его корень $x = -\frac{m}{k}$.

Именно так было решено уравнение, которое получилось в предыдущем параграфе в примере 1.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{2}{3}y + \frac{7}{8} = \frac{5}{6}y - \frac{1}{4}$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся алгоритмом:

$$\frac{2}{3}y + \frac{7}{8} - \frac{5}{6}y + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right)y + \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{4}\right) = 0;$$

$$-\frac{1}{6}y + \frac{9}{8} = 0;$$

$$-\frac{1}{6}y = -\frac{9}{8};$$

$$\frac{1}{6}y = \frac{9}{8};$$

$$y = \frac{9}{8} : \frac{1}{6};$$

$$y = \frac{27}{4}, \text{ т. е. } y = 6\frac{3}{4}.$$

Второй способ. Прежде чем применять алгоритм, умножим обе части уравнения на 24 — это наименьший общий знаменатель имеющихся дробей. При этом мы пользуемся тем, что если $A = B$, то $24A = 24B$ и обратно. Получим

$$24\left(\frac{2}{3}y + \frac{7}{8}\right) = 24\left(\frac{5}{6}y - \frac{1}{4}\right);$$

$$\left(24\cdot\frac{2}{3}\right)y + 24\cdot\frac{7}{8} = \left(24\cdot\frac{5}{6}\right)y - 24\cdot\frac{1}{4};$$

$$16y + 21 = 20y - 6.$$

А далее воспользуемся алгоритмом:

$$16y + 21 - 20y + 6 = 0;$$

$$-4y + 27 = 0;$$

$$4y = 27;$$

$$y = \frac{27}{4}, \text{ т. е. } y = 6\frac{3}{4}.$$

Ответ: $y = 6\frac{3}{4}$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{3z - 4}{5} = \frac{2z + 1}{2}$.

Решение. Воспользовавшись основным свойством пропорции (произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов), получим

$$2(3z - 4) = 5(2z + 1).$$

Дальнейший ход решения, надеемся, уже не требует комментариев:

$$6z - 8 - 10z - 5 = 0;$$

$$-4z - 13 = 0;$$

$$-4z = 13;$$

$$z = -\frac{13}{4}, \text{ т. е. } z = -3\frac{1}{4}.$$

Ответ: $z = -3\frac{1}{4}$.

Умения составлять математические модели и решать линейные уравнения с одной переменной можно использовать и в игровых ситуациях. Приведем простой пример.

Задумайте число (для простоты вычислений однозначное, хотя это совсем не обязательно), умножьте его на 2, к полученному числу прибавьте 5, затем эту сумму умножьте на 3 и из полученного произведения вычтите 13. Скажите мне, что получилось, и я тут же скажу, какое число задумано.

Например, вы задумали число 7. Выполняя мои указания, вы последовательно получали такие числа: 14, 19, 57, 44. Чтобы отгадать задуманное число, я из числа 44 вычитаю 2 и полученную разность делю на 6; получается $42 : 6 = 7$.

Второй эксперимент: вы задумали число 10. Выполняя мои указания, вы последовательно получали такие числа: 20, 25, 75, 62. Чтобы отгадать задуманное число, я из числа 62 вычитаю 2 и полученную разность делю на 6; получается $60 : 6 = 10$.

Секрет фокуса очень прост. Вы задумали число x; выполняя мои указания, вы составили число $3(2x + 5) - 13$, т. е. $6x + 2$. Мне осталось лишь в уме решить линейное уравнение: в первом случае $6x + 2 = 44$ (получится $x = 7$), а во втором случае $6x + 2 = 62$ (получится $x = 10$).

§ 5. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

С теоретической точки зрения эта тема не является для вас абсолютно новой. Пример текстовой задачи, процесс решения которой привел к линейному уравнению с одной переменной, уже был выше (см. пример 1 в § 3). Да и в курсе математики 5–6-х классов подобные задачи встречались. Тем не менее мы рассмотрим в этом параграфе довольно много разнообразных примеров, поскольку умение составлять математическую модель по заданным условиям и работать с ней — одно из важнейших в курсе алгебры.

Пример 1. Купили несколько книг и пытаются разместить их на одинаковых полках в книжном шкафу. Сначала поставили по 20 книг на каждую полку. В результате две полки оказались пустыми, а остальные заполненными (по 20 книг). Затем решили ставить по 15 книг на полку. Попытка оказалась удачной: все полки заполнились (по 15 книг на каждой). Сколько книг было куплено?

Первый этап. *Составление математической модели.*

Обозначим буквой x число полок в книжном шкафу. Когда на каждую полку поставили по 20 книг, то заполненными оказались $(x - 2)$ полки. Значит, общее число купленных книг выражается формулой $20(x - 2)$. Далее в задаче сказано, что когда на каждую полку поставили по 15 книг, то все x полок оказались заполненными. Значит, общее число купленных книг выражается формулой $15x$. Остается приравнять два полученных выражения для числа купленных книг:

$$20(x - 2) = 15x.$$

Это уравнение — математическая модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной математической моделью.*

Решаем уравнение:

$$20(x - 2) - 15x = 0;$$
$$20x - 40 - 15x = 0;$$
$$5x - 40 = 0;$$
$$5x = 40;$$
$$x = 8.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы выяснили, что в книжном шкафу 8 полок. Все купленные книги разместились на этих полках по 15 штук на каждой. Значит, всего было куплено $15 \cdot 8 = 120$ книг.

Ответ: всего было куплено 120 книг.

Важно подчеркнуть, что в школьных задачах принято идеализировать ситуацию: считать, что путник (поезд, автомобиль) движется все время с постоянной скоростью, что скорость течения реки всегда одна и та же, что мастер, выполняя заказ, работает с постоянной производительностью труда и т. д. и т. п. Учтем это в примерах 2—6 — это так называемые задачи на движение.

Пример 2. Пункты A, B и C расположены на шоссе так, как показано на рисунке 3. Расстояние между A и B равно 16 км. Из B по направлению к C вышел пешеход. Через 2 ч после этого из A по направлению к C выехал велосипедист, скорость которого

Рис. 3

на 6 км/ч больше скорости пешехода. Через 4 ч после своего выезда велосипедист догнал пешехода в пункте C. Чему равно расстояние от B до C?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость пешехода, тогда $(x + 6)$ км/ч — скорость велосипедиста.

Расстояние от A до C велосипедист проехал за 4 ч, значит, это расстояние выражается формулой $4(x + 6)$ км. Итак, $AC = 4(x + 6)$.

Расстояние от B до C пешеход прошел за 6 ч (ведь до выезда велосипедиста он уже был в пути 2 ч), следовательно, это расстояние выражается формулой $6x$ км. Итак, $BC = 6x$.

А теперь обратите внимание на рисунок 3: $AC - BC = AB$, т. е. $AC - BC = 16$. Это — основа для составления математической модели задачи. Напомним, что $AC = 4(x + 6)$, $BC = 6x$; следовательно,

$$4(x + 6) - 6x = 16.$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

$$4x + 24 - 6x = 16;$$
$$24 - 2x = 16;$$
$$-2x = 16 - 24;$$
$$-2x = -8;$$
$$x = 4.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы получили, что $x = 4$, значит, скорость пешехода 4 км/ч. Но нам нужно найти не это, в задаче требуется найти расстояние от B до C. Мы установили, что $BC = 6x$; значит, $BC = 6 \cdot 4 = 24$.

Ответ: расстояние от B до C равно 24 км.

Пример 3. Лодка плыла по течению реки 3 ч 12 мин, а затем против течения 1,5 ч. Найти собственную скорость лодки (т. е. скорость в стоячей воде), если известно, что скорость течения реки 2 км/ч, а всего лодкой пройден 41 км.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, тогда по течению она плывет со скоростью $(x + 2)$ км/ч (течение помогает), а против течения — со скоростью $(x - 2)$ км/ч (течение препятствует).

По течению реки лодка плыла 3 ч 12 мин. Поскольку скорость выражена в километрах в час, это время надо записать в часах. Имеем 12 мин $= \frac{12}{60}$ ч $= \frac{1}{5}$ ч $= 0,2$ ч. Значит, 3 ч 12 мин $= 3,2$ ч. За это время со скоростью $(x + 2)$ км/ч лодкой пройден путь $3,2(x + 2)$ км.

Против течения лодка плыла 1,5 ч. За это время со скоростью $(x - 2)$ км/ч лодкой пройден путь $1,5(x - 2)$ км.

По условию весь ее путь равен 41 км. Так как он состоит из пути по течению и пути против течения, то получаем

$$3,2(x + 2) + 1,5(x - 2) = 41.$$

Это уравнение — математическая модель задачи.

Второй этап. *Работа с математической моделью.*

$$3,2x + 6,4 + 1,5x - 3 = 41;$$
$$4,7x + 3,4 = 41;$$
$$4,7x = 41 - 3,4;$$
$$4,7x = 37,6;$$
$$x = \frac{37,6}{4,7}, \text{ т. е. } x = 8.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, чему равна собственная скорость лодки, т. е. чему равен x? Но ответ на этот вопрос уже получен: $x = 8$.

Ответ: собственная скорость лодки 8 км/ч.

Пример 4. Турист идет от деревни к железнодорожной станции. Пройдя за час 3 км, он понял, что, продолжая движение с этой скоростью, он опоздает на поезд на 40 минут, и пошел со скоростью 4 км/ч. На станцию турист пришел за 45 минут до отправления поезда. Чему равно расстояние от деревни до станции?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км — расстояние от деревни до станции. Найдем расчетное время до отправления поезда. Если турист будет весь путь идти со скоростью 3 км/ч, он потратит $\frac{x}{3}$ ч и опоздает на поезд на $\frac{2}{3}$ ч. Значит, расчетное время до отправления поезда выражается формулой $\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)$ ч.

На самом деле турист с упомянутой выше скоростью шел 1 час, а оставшиеся $(x - 3)$ км, он шел со скоростью 4 км/ч, затратив на оставшийся путь $\frac{x-3}{4}$ ч. На станции он ждал отправления поезда $\frac{3}{4}$ ч. Значит, время до отправления поезда можно выразить формулой $\left(1 + \frac{x-3}{4} + \frac{3}{4}\right)$ ч.

В итоге получаем уравнение $\frac{x}{3} - \frac{2}{3} = 1 + \frac{x-3}{4} + \frac{3}{4}$.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Умножив обе части уравнения на 12, получим:

$$12\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) = 12\left(1 + \frac{x-3}{4} + \frac{3}{4}\right);$$

$$4x - 8 = 12 + 3(x - 3) + 9;$$

$$4x - 8 = 12 + 3x;$$

$$x = 20.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Он уже получен, ведь буквой x мы как раз обозначили то, о чем спрашивается в задаче.

Ответ: от деревни до станции 20 км.

Пример 5. Самолет пролетел первую часть маршрута со скоростью 450 км/ч, а вторую часть, которая на 300 км меньше первой, — со скоростью 600 км/ч. Какова протяженность всего маршрута, если известно, что средняя скорость движения самолета оказалась равной 500 км/ч?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км — протяженность первой части маршрута, тогда протяженность второй части — $(x - 300)$ км. Время, потраченное самолетом на весь маршрут, таково: $\left(\frac{x}{450} - \frac{x-300}{600}\right)$ ч. Длина всего маршрута равна $x + x - 300$, т. е. $(2x - 300)$ км. Пролетев весь маршрут со средней скоростью 500 км/ч, самолет потратил бы $\frac{2x-300}{500}$ ч. Значит,

$$\frac{x}{450}+\frac{x-300}{600}=\frac{2x-300}{500}.$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.* Целесообразно сначала умножить обе части составленного уравнения на 10; получим

$$\frac{x}{45}+\frac{x-300}{60}=\frac{2x-300}{50}.$$

Найдем наименьшее общее кратное чисел 45, 60, 50. Имеем НОК(60, 50) = 300, НОК(45, 300) = 900. Умножим обе части последнего уравнения на 900:

$$900\left(\frac{x}{45}+\frac{x-300}{60}\right)=900\left(\frac{2x-300}{50}\right);$$

$$20x+15(x-300)=18(2x-300);$$

$$35x-4500=36x-5400;$$

$$x=900.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Первая часть маршрута равна 900 км, а вторая — на 300 км меньше, т. е. 600 км. Значит, протяженность всего маршрута 1500 км.

Замечание. В примерах 6—12, ради краткости, мы не будем явно выделять три этапа математического моделирования при решении текстовой задачи, заменив их пунктами 1, 2, 3. Кроме того, постепенно все меньшее и меньшее внимание будем уделять технической стороне дела — решению линейного уравнения; надеемся, вы справитесь с этим без нашей помощи.

Пример 6. Пассажир, сидящий в поезде, который едет со скоростью 40 км/ч, заметил, глядя в окно, что в противоположном направлении в течение 3 секунд прошел встречный поезд, длина которого 75 м. Какова скорость встречного поезда?

Решение. 1. Если x км/ч — скорость встречного поезда, то мимо пассажирского окна он проходит с суммарной скоростью двух поездов, т. е. со скоростью $(x+40)$ км/ч. За 3 с мимо окна проехал встречный поезд длиной 75 м, т. е. 0,075 км. Имеем

$3\ с = \frac{1}{20}$ мин $= \frac{1}{1200}$ ч. В итоге получаем уравнение — математическую модель задачи:

$$\frac{1}{1200}(x + 40) = 0{,}075.$$

2. Умножив обе части уравнения на 1200, получим:

$$x + 40 = 90;$$
$$x = 50.$$

3. Скорость встречного поезда равна 50 км/ч.

В следующих примерах мы рассмотрим две задачи на отыскание неизвестного числа по заданным условиям. Главное в этих задачах — умение использовать знания о десятичной системе счисления при записи числа.

Пример 7. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, не меняя порядок остальных цифр, то новое число станет больше на 1, чем утроенное первоначальное число. Найти исходное число.

Решение. 1. Исходное трехзначное число, оканчивающееся цифрой 3, можно записать в виде $10x + 3$, где x — двузначное число, образованное первыми двумя цифрами исходного числа (например, $273 = 27 \cdot 10 + 3$, $503 = 50 \cdot 10 + 3$ и т. д.). Если цифру 3 перенести на первое место, то новое число будет иметь вид $300 + x$ (например, $327 = 300 + 27$, $350 = 300 + 50$ и т. д.). По условию новое число больше утроенного исходного числа на 1. Это значит, что $3(10x + 3) + 1 = 300 + x$.

2. Поработаем с составленной моделью:

$$30x + 9 + 1 = 300 + x;$$
$$29x = 290;$$
$$x = 10.$$

3. Итак, в искомом числе первые две цифры образуют число 10, а на третьем месте стоит цифра 3. Значит, 103 — исходное число.

Пример 8. Задумали шестизначное число, запись которого начинается с цифры 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то полученное число будет втрое больше первоначального. Какое число было задумано?

Решение. 1. После цифры 2 в задуманном шестизначном числе следуют в определенном порядке 5 цифр, они составляют некое пятизначное число; обозначим его буквой x. Тогда задуманное число можно выразить формулой $200000 + x$. Если цифру 2 поместить на последнее место, то число будет иметь вид $\overline{x2}$, т. е. $10x + 2$. Согласно условию новое число в три раза больше задуманного. Это значит, что

$$10x + 2 = 3(200\,000 + x).$$

Математическая модель составлена.

2. Решим полученное уравнение:

$$10x + 2 = 600\,000 + 3x;$$
$$7x = 599\,998;$$
$$x = 85\,714.$$

3. Задуманное число начинается с цифры 2, значит, это число 285 714. ◼

Последние примеры, которые мы рассмотрим в настоящем параграфе, это пугающие многих учащихся, но на самом деле не такие уж страшные задачи на проценты, сплавы, смеси.

Пример 9. Два завода по плану должны были за месяц выпустить 360 станков. На самом деле они выпустили 400 станков, причем первый завод выполнил заказ на 112%, а второй — на 110%. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод?

Решение. 1. Сразу отметим, что $112\,\% = 1{,}12$, $110\,\% = 1{,}1$. По плану первый завод должен был выпустить x станков, а второй $(360 - x)$ станков. На самом деле первый выпустил $1{,}12x$, а второй — $1{,}1(360 - x)$ станков. Вместе они выпустили 400 станков, значит, $1{,}12x + 1{,}1(360 - x) = 400$.

2. Решим составленное уравнение:

$$1{,}12x + 396 - 1{,}1x = 400;$$
$$0{,}02x = 4;$$
$$x = 200.$$

3. По плану первый завод должен был выпустить 200 станков, а второй, соответственно, 160 станков. Первый завод перевыполнил план на 12%, т. е. выпустил сверх плана $0{,}12 \cdot 200 = 24$ станка. Второй завод перевыполнил план на 10%, т. е. выпустил сверх плана $0{,}1 \cdot 160 = 16$ станков.

Ответ: 24 станка, 16 станков.

Пример 10. В течение нескольких лет цену на некоторый товар постепенно повышали: сначала на 10%, затем на 300 р., затем еще на 25%. В результате цена на товар повысилась на 75% по сравнению с первоначальной. Сколько стоил товар до повышения цен?

Решение. 1. Пусть x р. — первоначальная цена товара. После первого повышения товар стоил $1{,}1x$ р., после второго — $(1{,}1x + 300)$ р., после третьего — $1{,}25(1{,}1x + 300)$ р. По условию после третьего повышения цена товара составила $1{,}75x$ р. (175%, т. е. 1,75 от первоначальной цены). В итоге получаем следующее уравнение:

$$1{,}25(1{,}1x + 300) = 1{,}75x.$$

2. Решим составленное уравнение. Есть смысл сначала умножить обе его части на 4:

$$5(1{,}1x + 300) = 7x.$$

Далее имеем:

$$5{,}5x + 1500 = 7x;$$
$$x = 1000.$$

Ответ: первоначальная цена товара 1000 р.

Пример 11. Смешали некоторое количество 40 и 10%-го растворов кислоты и получили 800 г 21,25%-го раствора кислоты. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение. 1. Предположим, что взяли x г более насыщенного раствора. Тогда менее насыщенного раствора пришлось взять $(800 - x)$ г. В более насыщенном растворе чистой кислоты было $0{,}4x$ г, а в менее насыщенном — $0{,}1(800 - x)$ г. После объединения получилось 800 г 21,25%-го раствора кислоты, т. е. чистой кислоты в новом растворе $0{,}2125 \cdot 800$ г. В итоге получаем следующее уравнение:

$$0{,}4x + 0{,}1(800 - x) = 0{,}2125 \cdot 800.$$

Математическая модель составлена.

2. Решим полученное уравнение:

$$0{,}4x + 80 - 0{,}1x = 170;$$
$$0{,}3x = 90;$$
$$x = 300.$$

Ответ: взяли 300 г 40%-го раствора и 500 г 10%-го раствора кислоты.

Пример 12. В 500 кг руды имеется некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20%. Сколько железа осталось в руде?

Решение. 1. Обозначим буквой x процент содержания железа в руде. Это значит, что железа было $\frac{x}{100} \cdot 500 = 5x$ кг. В 200 кг примесей содержалось 12,5% железа, т. е. $0{,}125 \cdot 200 = 25$ кг. В очищенной руде массой 300 кг железо составило $(x + 20)\%$, т. е. $\frac{x+20}{100} \cdot 300 = 3(x + 20)$ кг. Поскольку с примесями было удалено 25 кг железа, получаем уравнение: $5x - 25 = 3(x + 20)$.

2. Решив уравнение, получим $x = 42{,}5$. Это значит, что в руде было 42,5% железа.

3. Нас спрашивают, сколько железа осталось в руде после удаления примесей. Это количество выражается формулой $5x - 25$. Получаем $5 \cdot 42{,}5 - 25 = 187{,}5$ кг. ◼

Пример 13. Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

Решение. Обозначим буквой x процент примесей в руде. Тогда в 40 т руды примесей содержится $\frac{x}{100} \cdot 40 = 0{,}4x$ т, а «чистого» металла будет $(40 - 0{,}4x)$ т. В 20 т выплавленного металла «чистого» металла содержится 94%, т. е. $0{,}94 \cdot 20 = 18{,}8$ т. Этого «чистого» металла и в руде, и в выплавленном металле одно и то же количество. Значит, $40 - 0{,}4x = 18{,}8$, откуда находим $x = 53$.

Ответ: в руде 53% примесей.

§ 6. КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

В конце § 3 мы говорили, что нужно уметь свободно переходить от одного вида математической модели к другому, выбирать то, что удобнее. В этой связи весьма полезна известная вам из курса математики 5—6-го классов такая графическая модель, как координатная прямая.

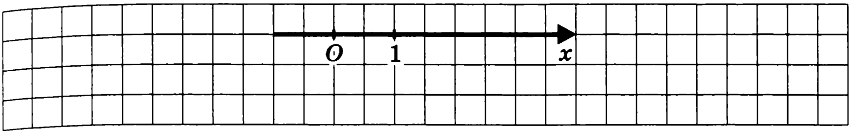


Рис. 4

Прямую l, на которой выбрана начальная точка O (начало отсчета), масштаб (единичный отрезок, т. е. отрезок, длина которого считается равной 1) и положительное направление, называют **координатной прямой** или **координатной осью** (рис. 4); употребляют также термин «ось x» («ось y», «ось z» и т. д.).

Каждому числу соответствует единственная точка координатной прямой. Например, числу 4,5 соответствует точка M (рис. 5), которая удалена от начала отсчета, т. е. от точки O, на расстояние, равное 4,5 (в заданном масштабе), и отложена от точки O в заданном (положительном) направлении. Числу −4 соответствует точка P (см. рис. 5), которая удалена от точки O на расстояние, равное 4, и отложена от точки O в отрицательном направлении, т. е. в направлении, противоположном заданному.

Можно говорить и о решении обратной задачи. Например, точка K, удаленная от точки O на расстояние 6,4 в положительном (заданном) направлении, соответствует числу 6,4, а точка N, удаленная от точки O на расстояние 2,1 в отрицательном направлении, соответствует числу −2,1 (см. рис. 5).

Указанные числа называют **координатами** соответствующих точек. Так, на рисунке 5 точка K имеет координату 6,4; точка P — координату −4; точка M — координату 4,5; точка N — координату −2,1; точка O — координату 0 (нуль). Отсюда и происходит название — координатная прямая. Образно выражаясь, координатная прямая — это густо заселенный дом, жильцы этого дома — точки, а координаты точек — это номера квартир, в которых живут точки-жильцы.

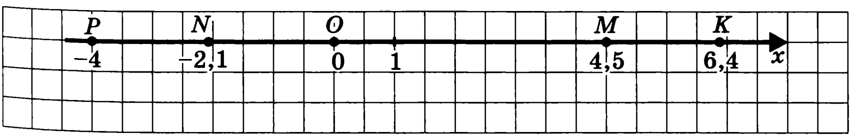


Рис. 5

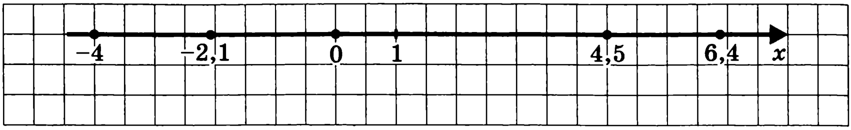


Рис. 6

Зачем нужна координатная прямая? Зачем характеризовать точку числом, а число — точкой? Есть ли в этом какая-либо польза? Да, есть.

Пусть, например, на координатной прямой даны две точки: A — с координатой a и B — с координатой b (обычно в таких случаях пишут короче: $A(a)$, $B(b)$). Пусть нам надо найти расстояние d между точками A и B. Оказывается, вместо того чтобы делать геометрические измерения, достаточно воспользоваться готовой формулой $\rho(A; B) = |a - b|$ (ρ — «ро» — буква греческого алфавита; впрочем, вместо $\rho(A; B)$ можно писать просто AB).

Так, на рисунке 5 имеем:

$$KM = |6,4 - 4,5| = |1,9| = 1,9;$$
$$PM = |-4 - 4,5| = |-8,5| = 8,5;$$
$$PN = |-4 - (-2,1)| = |-4 + 2,1| = |-1,9| = 1,9.$$

Стремясь к лаконичности рассуждений, математики договорились вместо длинной фразы «точка A координатной прямой, имеющая координату a», использовать короткую фразу: «точка a», и на чертеже рассматриваемую точку обозначать ее координатой. Так, на рисунке 6 изображена координатная прямая, на которой отмечены точки −4; −2,1; 0; 1; 4,5; 6,4.

Пример 1. Решить уравнение $|x + 1| = 3$.

Решение. $|x + 1|$ — это с геометрической точки зрения расстояние между точками x и −1 координатной прямой. Нам нужно найти такие точки x, которые удалены от точки −1 на расстояние 3. Таких точек две: −4 и 2 (рис. 7). Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. ■

Координатная прямая дает нам возможность свободно переходить с алгебраического языка на геометрический и обратно. Пусть, например, число a меньше числа b. На алгебраическом языке это записывают так: $a < b$; на геометрическом языке это

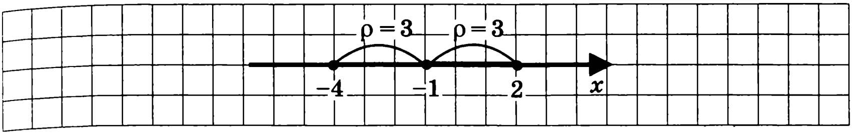


Рис. 7

означает, что точка a расположена на координатной прямой *левее* точки b; при этом мы, если не оговорено противное, будем считать, что координатная прямая располагается на листе бумаги горизонтально. Впрочем, подчеркнем еще раз, и алгебраический, и геометрический языки — это разделы одного и того же математического языка, который мы с вами изучаем.

Познакомимся еще с несколькими элементами математического языка, которые связаны с координатной прямой.

1. Пусть на координатной прямой отмечена точка a. Рассмотрим все точки, которые лежат на прямой правее точки a, и отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 8). Это множество точек (чисел) называют **открытым лучом** и обозначают $(a; +\infty)$, где знак $+\infty$ читают так: «плюс бесконечность»; оно характеризуется неравенством $x > a$ (под x понимается любая точка луча).

Обратите внимание: точка a открытому лучу <u>не принадлежит</u>. Если же эту точку надо присоединить к открытому лучу, то пишут $x \geqslant a$ или $[a; +\infty)$ (перед a ставят не круглую, а квадратную скобку), а на чертеже такую точку обозначают не светлым, как на рисунке 8, а закрашенным кружком (рис. 9). Если про множество точек $(a; +\infty)$ говорят, что это — открытый луч, то для $[a; +\infty)$ употребляют термин **луч** (без прилагательного «открытый»).

Рис. 8

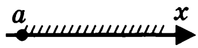


Рис. 9

2. Пусть на координатной прямой отмечена точка b. Рассмотрим все точки, которые лежат на прямой левее точки b, и отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 10). Это множество точек (чисел) также называют *открытым лучом* и обозначают $(-\infty; b)$, где знак $-\infty$ читают так: «минус бесконечность». Оно характеризуется неравенством $x < b$.

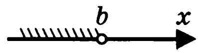


Рис. 10

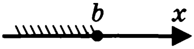


Рис. 11

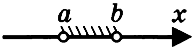


Рис. 12

Рис. 13

Снова обращаем ваше внимание на то, что точка b открытому лучу не принадлежит. Если же мы эту точку хотим присоединить к открытому лучу, то будем писать $x \leqslant b$ или $(-\infty; b]$ и на чертеже точку b закрашивать (рис. 11); для $(-\infty; b]$ также будем употреблять термин *луч*.

3. Пусть на координатной прямой отмечены точки a и b, причем $a < b$ (т. е. точка a расположена на прямой левее точки b). Рассмотрим все точки, которые лежат правее точки a, но левее точки b; отметим соответствующую часть координатной прямой штриховкой (рис. 12). Это множество точек (чисел) называют **интервалом** и обозначают $(a; b)$. Оно характеризуется строгим двойным неравенством $a < x < b$ (под x понимается любая точка интервала).

Обратите внимание: интервал $(a; b)$ есть *пересечение* (общая часть) двух открытых лучей $(-\infty; b)$ и $(a; +\infty)$ — это хорошо видно на рисунке 13.

Если к интервалу $(a; b)$ добавить его концы, т. е. точки a и b, то получится **отрезок** $[a; b]$ (рис. 14), который характеризуется нестрогим двойным неравенством $a \leqslant x \leqslant b$. Обратите внимание:

Рис. 14

Рис. 15

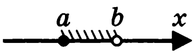


Рис. 16

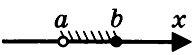


Рис. 17

в обозначении отрезка используют не круглые скобки, как это было в обозначении интервала, а квадратные; на чертеже точки a и b отмечены темными кружками, а не светлыми, как это было в случае интервала.

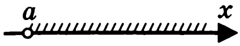
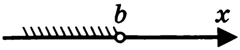
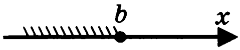
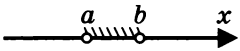
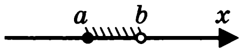
Отрезок $[a; b]$ есть пересечение (общая часть) двух лучей $(-\infty; b]$ и $[a; +\infty)$ — это хорошо видно на рисунке 15.

А что получится, если к интервалу $(a; b)$ добавить только один конец — только точку a (рис. 16) или только точку b (рис. 17)? Получится **полуинтервал**, который в первом случае обозначают $[a; b)$, а во втором — $(a; b]$ и который характеризуется с помощью двойных неравенств: $a \leqslant x < b$ — в первом случае, $a < x \leqslant b$ — во втором.

Итак, мы ввели пять новых для вас терминов математического языка: луч, открытый луч, интервал, отрезок, полуинтервал (см. табл.). Есть и общий термин: **числовые промежутки.**

Сама координатная прямая также считается числовым промежутком; для нее используют обозначение $(-\infty; +\infty)$.

Сводная таблица числовых промежутков

Геометрическая модель	Обозначение	Название числового промежутка	Аналитическая модель
	$(a; +\infty)$	открытый луч	$x > a$
	$[a; +\infty)$	луч	$x \geqslant a$
	$(-\infty; b)$	открытый луч	$x < b$
	$(-\infty; b]$	луч	$x \leqslant b$
	$(a; b)$	интервал	$a < x < b$
	$[a; b]$	отрезок	$a \leqslant x \leqslant b$
	$[a; b)$	полуинтервал	$a \leqslant x < b$
	$(a; b]$	полуинтервал	$a < x \leqslant b$

Пример 2. Ученик составил множество чисел, представляющих собой попарно различные произведения двух множителей a и c, где a — натуральное число из интервала $(3; 7)$, а c — натуральное число из отрезка $[8; 12]$. Случайным образом он выбирает произвольный элемент ac составленного числового множества. Какова вероятность того, что ac делится на 9?

Решение. В интервале $(3; 7)$ имеется три натуральных числа: 4, 5, 6; в отрезке $[8; 12]$ — пять натуральных чисел: 8, 9, 10, 11, 12. Значит, всего можно составить 15 пар чисел вида $(a; c)$. Но среди произведений чисел, входящих в пару, есть одинаковые: $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$; $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$; $5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$. Различных произведений всего 12. На 9 делятся такие произведения:

$4 \cdot 9$; $5 \cdot 9$; $6 \cdot 9$; $6 \cdot 12$ — их всего четыре. Искомая вероятность $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Пример 3. На координатной прямой взяты три точки: $A\left(\frac{2}{73}\right)$, $B\left(\frac{2}{75}\right)$, $C\left(\frac{1}{37}\right)$. К какой из точек A, B ближе точка C?

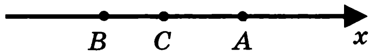


Рис. 18

Решение. Имеем: $\frac{1}{37} = \frac{2}{74}$; $\frac{2}{75} < \frac{2}{74} < \frac{2}{73}$. Значит, точка C располагается на координатной прямой между точками A и B (рис. 18). Найдем расстояния BC и CA: $BC = \frac{2}{74} - \frac{2}{75} = \frac{2}{74 \cdot 75}$; $CA = \frac{2}{73} - \frac{2}{74} = \frac{2}{73 \cdot 74}$. Поскольку $\frac{2}{74 \cdot 75} < \frac{2}{74 \cdot 73}$, делаем вывод: точка C располагается ближе к точке B.

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 7. КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

На координатной прямой «прописаны» точки — «жильцы», у каждой точки есть свой «номер дома» — ее координата. Если же точка берется в плоскости, то для ее «прописки» нужно указывать не только «номер дома», но и «номер квартиры». Напомним, как это делается.

Проведем две взаимно перпендикулярные координатные прямые и будем считать началом отсчета на обеих прямых точку их пересечения — точку O. Тем самым на плоскости задана **прямоугольная система координат** (рис. 19), которая превращает обычную плоскость в **координатную**. Точку O называют **началом координат**, координатные прямые (ось x и ось y) называют **осями координат**, а прямые углы, образованные осями координат, называют **координатными углами**. Координатные углы нумеруют так, как показано на рисунке 19.

А теперь обратимся к рисунку 20, где изображена прямоугольная система координат и отмечена точка M. Проведем через точку M прямую, параллельную оси y. Прямая пересекает ось x в некоторой точке, у этой точки есть координата на оси x (для точки, изображенной на рисунке 20, эта координата равна $-1{,}5$), ее называют **абсциссой точки** M. Далее проведем через точку M прямую, параллельную оси x. Прямая пересекает ось y в некоторой точке, у этой точки есть координата — на оси y (для точки M, изображенной на рисунке 20, эта координата равна 2), ее

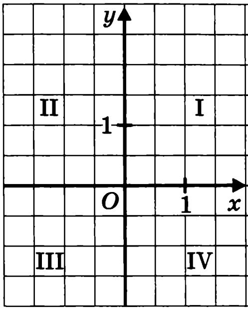


Рис. 19

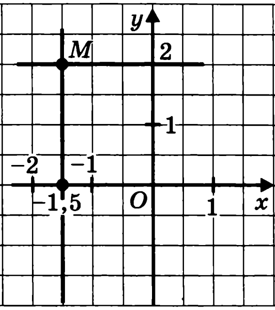


Рис. 20

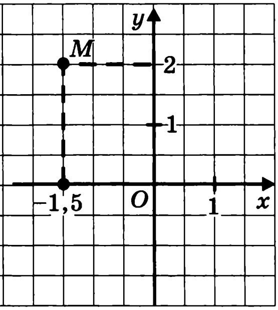


Рис. 21

называют **ординатой точки** M. Коротко пишут так: M $(x;\ y)$ (для точки на рисунке 20 имеем $M(-1{,}5;\ 2)$). Абсциссу записывают на первом месте, ординату — на втором.

Замечание 1. На практике для отыскания координат точки M обычно вместо прямых, параллельных осям координат и проходящих через точку M, строят отрезки этих прямых от точки M до осей координат (рис. 21).

Замечание 2. В предыдущем параграфе мы ввели разные обозначения для числовых промежутков. В частности, как мы условились, запись $(3;\ 5)$ означает, что на координатной прямой рассматривается интервал с концами в точках 3 и 5. В настоящем же параграфе пару чисел мы рассматриваем как координаты точки; например, $(3;\ 5)$ — это точка на координатной плоскости с абсциссой 3 и ординатой 5. Как же правильно по символической записи определить, о чем идет речь: об интервале или о координатах точки? Обычно это бывает ясно из контекста.

Учитывая введенные термины и обозначения, горизонтальную координатную прямую называют **осью абсцисс** или **осью x**, а вертикальную координатную прямую — **осью ординат** или **осью y**. Обозначения x, y используют обычно при задании на плоскости прямоугольной системы координат (см. рис. 19) и часто говорят так: дана система координат xOy. Впрочем, встречаются и другие обозначения, например, на рисунке 22 задана система координат tOs.

Алгоритм отыскания координат точки M, заданной в системе координат xOy

1. Провести через точку M прямую, параллельную оси y, и найти координату точки пересечения этой прямой с осью x — это будет абсцисса точки M.
2. Провести через точку M прямую, параллельную оси x, и найти координату точки пересечения этой прямой с осью y — это будет ордината точки M.

Именно так мы и действовали, находя координаты точки M на рисунке 20.

Если точка $M_1(x;\ y)$ принадлежит первому координатному углу, то $x > 0$, $y > 0$; если точка $M_2(x;\ y)$ принадлежит второму координатному углу, то $x < 0$, $y > 0$; если точка $M_3(x;\ y)$ принадлежит третьему координатному углу, то $x < 0$, $y < 0$; если точка $M_4(x;\ y)$ принадлежит четвертому координатному углу, то $x > 0$, $y < 0$ (рис. 23).

А что будет, если точка, координаты которой надо найти, лежит на одной из осей координат? Пусть точка A лежит на оси x, а точка B — на оси y (рис. 24). Проводить через точку A прямую, параллельную оси y, и находить точку пересечения этой прямой с осью x не имеет смысла, поскольку такая точка пересечения уже есть — это точка A, ее координата (абсцисса) равна 3. Точно так же не нужно проводить через точку A прямую, параллельную оси x: сама ось x пересекает ось y в точке O с координатой

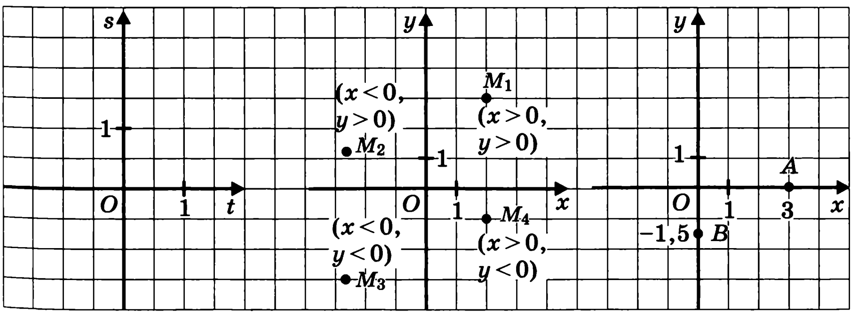


Рис. 22 Рис. 23 Рис. 24

(ординатой) 0. В итоге для точки A получаем $A(3;\ 0)$. Аналогично для точки B получаем $B(0;\ -1{,}5)$. А для точки O имеем $O(0;\ 0)$.

Вообще любая точка на оси x имеет координаты $(x;\ 0)$, а любая точка на оси y — координаты $(0;\ y)$.

Итак, как находить координаты точки в координатной плоскости, мы обсудили. А как решать обратную задачу, т. е. как, задав координаты, построить соответствующую точку? Чтобы выработать алгоритм, проведем два вспомогательных, но в то же время важных рассуждения.

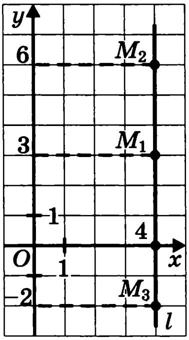


Рис. 25

Первое рассуждение. Пусть в системе координат xOy проведена прямая l, параллельная оси y и пересекающая ось x в точке с координатой (абсциссой) 4 (рис. 25). Любая точка, лежащая на этой прямой, имеет абсциссу 4. Так, для точек M_1, M_2, M_3 имеем $M_1(4;\ 3)$, $M_2(4;\ 6)$, $M_3(4;\ -2)$. Иными словами, абсцисса любой точки M прямой l удовлетворяет условию $x = 4$. Если же взять точку, не лежащую на этой прямой, то ее абсцисса будет отлична от 4. Говорят, что $x = 4$ — *уравнение прямой l* или что *прямая l (и только она) удовлетворяет уравнению* $x = 4$.

На рисунке 26 изображены прямые, удовлетворяющие уравнениям $x = -4$ (прямая l_1), $x = -1$ (прямая l_2), $x = 3{,}5$ (прямая l_3). А какая прямая удовлетворяет уравнению $x = 0$? Догадались? Ось y.

Второе рассуждение. Пусть в системе координат xOy проведена прямая l, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке с координатой (ординатой) 3 (рис. 27). Любая точка, лежащая на этой прямой, имеет ординату 3. Так, для точек M_1, M_2, M_3 имеем: $M_1(0;\ 3)$, $M_2(4;\ 3)$, $M_3(-2;\ 3)$. Иными словами, ордината любой точки M прямой l удовлетворяет условию $y = 3$. Если же взять точку, не лежащую на этой прямой, то ее ордината будет отлична от 3. Говорят, что $y = 3$ — *уравнение прямой l* или что *прямая l (и только она) удовлетворяет уравнению* $y = 3$.

На рисунке 28 изображены прямые, удовлетворяющие уравнениям $y = -4$ (прямая l_1), $y = -1$ (прямая l_2), $y = 3{,}5$ (прямая l_3).

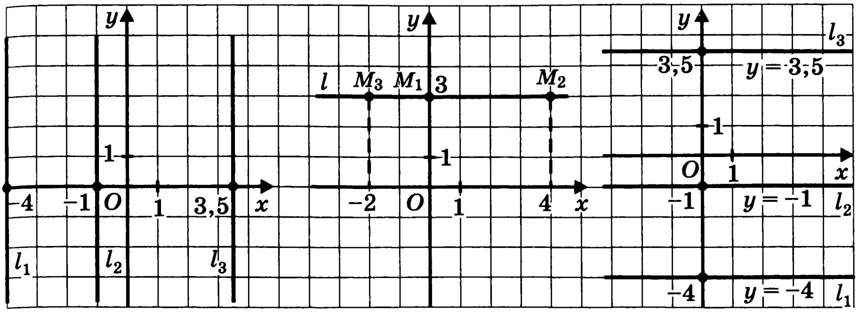


Рис. 26 **Рис. 27** **Рис. 28**

А какая прямая удовлетворяет уравнению $y = 0$? Догадались? Ось x.

Заметим, что математики, стремясь к краткости речи, говорят «прямая $x = 4$», а не «прямая, удовлетворяющая уравнению $x = 4$». Аналогично они говорят «прямая $y = 3$», а не «прямая, удовлетворяющая уравнению $y = 3$». Мы будем поступать точно так же.

Вернемся теперь к рисунку 20. Обратите внимание, что точка $M(-1{,}5;\ 2)$, которая там изображена, есть точка пересечения прямой $x = -1{,}5$ и прямой $y = 2$. Теперь, видимо, будет понятен алгоритм построения точки по заданным ее координатам.

Алгоритм построения точки $M(a;\ b)$ в прямоугольной системе координат xOy

1. Построить прямую $x = a$.
2. Построить прямую $y = b$.
3. Найти точку пересечения построенных прямых — это и будет точка $M(a;\ b)$.

Пример 1. В системе координат xOy построить точки:

$A(1;\ 3)$, $B(-2;\ 1)$, $C(4;\ 0)$, $D(0;\ -3)$.

Решение. Точка A есть точка пересечения прямых $x = 1$ и $y = 3$. Точка B есть точка пересечения прямых $x = -2$ и $y = 1$.

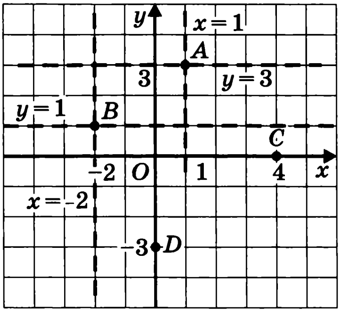


Рис. 29

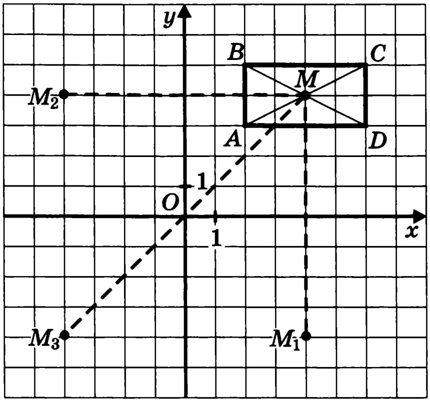


Рис. 30

Точка C принадлежит оси x, а точка D — оси y (рис. 29). ◘

Впервые прямоугольную систему координат на плоскости стал активно использовать французский философ Рене Декарт (1596—1650) для решения геометрических задач алгебраическими методами и, обратно, для замены алгебраических моделей геометрическими. Поэтому иногда говорят: «декартова система координат», «декартовы координаты».

Пример 2. На координатной плоскости построен четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(2;\ 3)$, $B(2;\ 5)$, $C(6;\ 5)$, $D(6;\ 3)$. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке M. Найти площадь и периметр четырехугольника, а также координаты точки M_1, симметричной точке M относительно оси абсцисс, координаты точки M_2, симметричной точке M относительно оси ординат, и координаты точки M_3, симметричной точке M относительно начала координат.

Решение. Четырехугольник $ABCD$ изображен на рисунке 30; это прямоугольник, его стороны равны 4 и 2, площадь 8, периметр 12, диагонали пересекаются в точке $M(4;\ 4)$.

Нетрудно найти координаты всех трех интересующих нас точек:

$$M_1(4;\ -4),\ M_2(-4;\ 4),\ M_3(-4;\ -4).$$ ◘

§ 8. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

В главе 1 мы видели, что математической моделью реальной ситуации может служить линейное уравнение с одной переменной или уравнение, которое после преобразований сводится к линейному. А теперь рассмотрим такую реальную ситуацию.

Из городов A и B, расстояние между которыми 500 км, навстречу друг другу вышли два поезда, каждый со своей постоянной скоростью. Известно, что первый поезд вышел на 2 ч раньше второго. Через 3 ч после выхода второго поезда они встретились. Чему равны скорости поездов?

Составим математическую модель задачи. Пусть x км/ч — скорость первого поезда, y км/ч — скорость второго поезда. Первый был в пути 5 ч и, значит, прошел путь $5x$ км. Второй поезд был в пути 3 ч, т. е. прошел путь $3y$ км. Их встреча произошла в пункте C.

На рисунке 31 представлена геометрическая модель ситуации. На алгебраическом языке ее можно описать так:

$$5x + 3y = 500$$

или

$$5x + 3y - 500 = 0.$$

Такую математическую модель называют линейным уравнением с двумя переменными x, y.

Вообще

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c — числа (коэффициенты) — **линейное уравнение с двумя переменными x и y** (или с двумя неизвестными x и y).

Вернемся к уравнению $5x + 3y = 500$. Замечаем, что если $x = 40$, $y = 100$, то $5 \cdot 40 + 3 \cdot 100 = 500$ — верное равенство. Значит, ответ на вопрос задачи может быть таким: скорость первого поезда 40 км/ч, скорость второго поезда 100 км/ч. Пару чисел $x = 40$, $y = 100$ называют *решением уравнения* $5x + 3y = 500$. Говорят также, что пара значений (40; 100) *удовлетворяет уравнению* $5x + 3y = 500$.

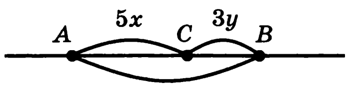


Рис. 31

Найденное решение не единственное. В самом деле, возможен и такой вариант: $x = 64$, $y = 60$; действительно, $5 \cdot 64 + 3 \cdot 60 = 500$ — верное равенство. И такой: $x = 70$, $y = 50$ (поскольку $5 \cdot 70 + 3 \cdot 50 = 500$ — верное равенство).

А вот, скажем, пара чисел $x = 80$, $y = 60$ решением уравнения не является, поскольку при этих значениях верного равенства не получается: $5 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \neq 500$.

Вообще **решением уравнения** $ax + by + c = 0$ называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство.

Замечание. Вернемся еще раз к уравнению $5x + 3y = 500$, полученному в рассмотренной выше задаче. Среди бесконечного множества его решений имеются, например, и такие: $x = 100$, $y = 0$ (в самом деле, $5 \cdot 100 + 3 \cdot 0 = 500$ — верное числовое равенство); $x = 118$, $y = -30$ (так как $5 \cdot 118 + 3 \cdot (-30) = 500$ — верное числовое равенство). Однако, являясь решениями уравнения, эти пары не могут служить решениями данной задачи, ведь скорость поезда не может быть равной нулю (тогда он не едет, а стоит на месте); тем более скорость поезда не может быть отрицательной.

Пример 1*. Нужно смешать 30%-й и 3%-й растворы перекиси водорода так, чтобы в результате получился 12%-й раствор. В каком отношении надо взять имеющиеся растворы?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Предположим, что взяли x г 30%-го раствора и y г 3%-го раствора. В более насыщенном растворе чистой перекиси водорода содержится $0{,}3x$ г, а в менее насыщенном — $0{,}03y$ г. Всего после смешивания получается $(0{,}3x + 0{,}03y)$ г чистой перекиси водорода. Где она находится? Она находится в новом растворе, масса которого равна $(x + y)$ г, и составляет там 12 %, т. е. $0{,}12(x + y)$ г. В итоге получаем следующее уравнение:

$$0{,}3x + 0{,}03y = 0{,}12(x + y).$$

Математическая модель составлена.

* Пример заимствован из книги Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра»

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Последовательно получаем:

$$0{,}3x + 0{,}03y = 0{,}12x + 0{,}12y;$$
$$0{,}18x = 0{,}09y;$$
$$y = 2x.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Он фактически уже получен: равенство $y = 2x$ означает, что 3%-го раствора перекиси водорода следует взять ровно в 2 раза больше, чем 30%-го раствора. ◼

Пример 2. Пункт B расположен ниже пункта A по течению реки. Катер проходит путь от A до B за 5,5 ч, а обратно — за 7 ч 15 мин. Можно ли утверждать, что собственная скорость катера (скорость в стоячей воде) более чем в 7 раз превышает скорость течения реки?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость катера, y км/ч — скорость течения реки. Из A в B по течению реки катер идет со скоростью $(x + y)$ км/ч, а обратно — против течения реки — со скоростью $(x - y)$ км/ч. Туда он идет 5,5 ч и за это время проходит путь, равный $5{,}5(x + y)$ км. Обратно он идет 7,25 ч и за это время проходит путь, равный $7{,}25(x - y)$ км. Эти пути, естественно, одинаковы, значит, получаем уравнение $5{,}5(x + y) = 7{,}25(x - y)$.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Последовательно получаем:

$$5{,}5(x + y) = 7{,}25(x - y);$$
$$5{,}5x + 5{,}5y = 7{,}25x - 7{,}25y;$$
$$5{,}5y + 7{,}25y = 7{,}25x - 5{,}5x;$$
$$12{,}75y = 1{,}75x.$$

Умножив обе части последнего уравнения на 4, получим $51y = 7x$, т. е. $\frac{x}{y} = \frac{51}{7}$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Имеем $\frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}$, во столько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости течения реки. Значит, ответ на вопрос задачи

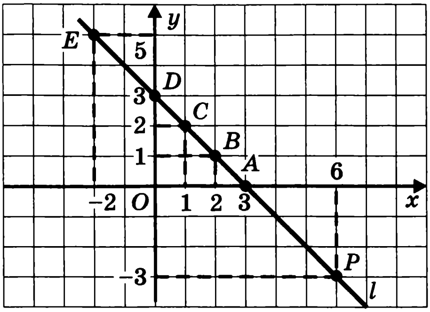


Рис. 32

положителен: собственная скорость катера более чем в 7 раз превышает скорость течения реки. ◼

Пример 3. Изобразить решения линейного уравнения с двумя переменными $x + y - 3 = 0$ точками в координатной плоскости xOy.

Решение. Подберем несколько решений заданного уравнения, т. е. несколько пар чисел, которые удовлетворяют уравнению: (3; 0), (2; 1), (1; 2); (0; 3), (–2; 5).

Построим в координатной плоскости xOy точки $A(3; 0)$, $B(2; 1)$, $C(1; 2)$, $D(0; 3)$, $E(-2; 5)$ (рис. 32). Обратите внимание: все эти пять точек лежат на одной прямой l, проведем ее.

Говорят, что прямая l является ***графиком уравнения*** $x + y - 3 = 0$, или что прямая l — *геометрическая модель* уравнения $x + y - 3 = 0$ (или $x + y = 3$). Вообще **графиком уравнения** $p(x; y) = 0$ называют множество всех тех точек плоскости xOy, при подстановке координат которых в выражение $p(x; y)$ оно принимает числовое значение 0.

Итак, если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $x + y - 3 = 0$, то точка $M(x; y)$ принадлежит прямой l; если точка $M(x; y)$ принадлежит прямой l, то пара $(x; y)$ — решение уравнения $x + y - 3 = 0$. Например, точка $P(6; -3)$ принадлежит прямой l (рис. 32) и пара (6; –3) — решение уравнения $x + y - 3 = 0$. ◼

Подведем итоги:

Словесная модель	Алгебраическая модель	Геометрическая модель
Сумма двух чисел равна 3	$x + y = 3$ (линейное уравнение с двумя переменными)	Прямая l на рисунке 32 (график линейного уравнения с двумя переменными)

◼

А как вообще выглядит график линейного уравнения $ax + by + c = 0$? Рассмотрим конкретные случаи.

1) Пусть $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$, т. е. $0 = 0$ при любых значениях x, y. Это значит, что любая пара чисел $(x; y)$ является решением уравнения, а график уравнения — вся координатная плоскость.

2) Пусть $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$, т. е. $c = 0$. Это не выполняется ни при каких значениях x, y, т. е. уравнение не имеет решений.

3) Пусть $a = 0$, $b \neq 0$. Тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x + by + c = 0$, т. е. $y = -\frac{c}{b}$. Графиком служит прямая, параллельная оси x, об этом мы говорили в § 7.

4) Пусть $a \neq 0$, $b = 0$. Тогда уравнение принимает вид $ax + 0 \cdot y + c = 0$, т. е. $x = -\frac{c}{a}$. Графиком служит прямая, параллельная оси y, об этом мы также говорили в § 7.

5) Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$. В этом случае графиком является прямая, не параллельная ни одной из осей координат (как это было в примере 3).

Вообще справедлива следующая теорема (для ее доказательства нужны некоторые факты из геометрии, которых вы пока не знаете).

Теорема 1. ***Если хотя бы один из коэффициентов a, b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ отличен от нуля, то графиком уравнения служит прямая линия.***

Пример 4. Построить график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$.

Решение. Подберем несколько решений заданного уравнения:

1) $(0; 3)$; в самом деле, если $x = 0$, $y = 3$, то $3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 6 = 0$ — верное равенство (в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ мы подставили значения $x = 0$, $y = 3$);

2) $(-2; 0)$; действительно, если $x = -2$, $y = 0$, то $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 6 = 0$ — верное равенство;

3) $(2; 6)$; если $x = 2$, $y = 6$, то $3 \cdot 2 - 2 \cdot 6 + 6 = 0$ — верное равенство;

4) (4; 9); если $x = 4$, $y = 9$, то $3 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 6 = 0$ — верное равенство.

Построим точки (0; 3), (−2; 0), (2; 6), (4; 9) на координатной плоскости xOy. Они лежат на одной прямой, проведем ее (рис. 33). Эта прямая и есть график уравнения $3x - 2y + 6 = 0$. ◙

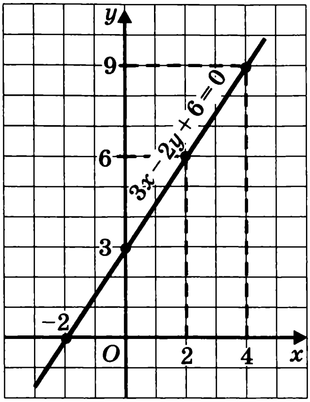


Рис. 33

Пример 4 решен верно, но, признаемся, очень нерационально. Почему? Давайте рассуждать.

1. Мы знаем, что графиком линейного уравнения $3x - 2y + 6 = 0$ является прямая (это утверждается в теореме 1). Чтобы провести прямую, достаточно указать две ее точки. Через две точки можно провести прямую и притом только одну — этому нас учит геометрия. Поэтому построенные выше четыре точки — это явный перебор. Достаточно было построить точки (0; 3) и (−2; 0) и с помощью линейки провести через них прямую.

2. Решения данного уравнения мы <u>подбирали</u>, т. е. угадывали. Угадать что-либо всегда труднее, чем действовать по определенному правилу. Нельзя ли было и здесь не угадывать, а действовать по какому-то правилу? Можно. Например, так. Дадим переменной x конкретное значение, например $x = 0$ (обычно пишут $x_1 = 0$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим $3 \cdot 0 - 2y + 6 = 0$, т. е. $-2y + 6 = 0$. Из этого уравнения находим $y = 3$ (обычно пишут $y_1 = 3$). Значит, если $x = 0$, то $y = 3$; пара (0; 3) — решение данного уравнения.

Дадим переменной x еще одно конкретное значение, например $x = -2$ (обычно пишут $x_2 = -2$). Подставив это значение в уравнение $3x - 2y + 6 = 0$, получим $3 \cdot (-2) - 2y + 6 = 0$, т. е. $-2y = 0$. Из этого уравнения находим $y = 0$ (обычно пишут $y_2 = 0$). Значит, если $x = -2$, то $y = 0$; пара (−2; 0) — решение данного уравнения.

Вот теперь мы в состоянии сформулировать алгоритм построения графика линейного уравнения $ax + by + c = 0$ для общего случая, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Алгоритм построения графика уравнения
$ax + by + c = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

1. Придать переменной x конкретное значение $x = x_1$; найти из уравнения $ax_1 + by + c = 0$ соответствующее значение $y = y_1$.
2. Придать переменной x другое значение $x = x_2$; найти из уравнения $ax_2 + by + c = 0$ соответствующее значение $y = y_2$.
3. Построить на координатной плоскости xOy точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.
4. Провести через эти две точки прямую — она и будет графиком уравнения $ax + by + c = 0$.

Замечание. Чаще всего на первом шаге алгоритма берут значение $x = 0$. Второй шаг иногда немного изменяют: полагают $y = 0$ и находят соответствующее значение x.

Пример 5. Построить график уравнения
$$4x + 3y - 12 = 0.$$

Решение. Будем действовать по алгоритму (с учетом замечания).

1) Положим $x = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим $4 \cdot 0 + 3y - 12 = 0$, $3y - 12 = 0$, $y = 4$.

2) Положим $y = 0$, подставим это значение в уравнение $4x + 3y - 12 = 0$, получим $4 \cdot x + 3 \cdot 0 - 12 = 0$, $4x - 12 = 0$, $x = 3$.

3) Построим на координатной плоскости xOy две точки: (0; 4) — она найдена на первом шаге алгоритма — и (3; 0) — она найдена на втором шаге.

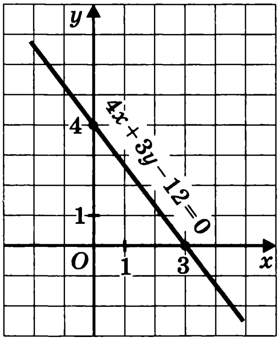


Рис. 34

4) Проведем через точки (0; 4) и (3; 0) прямую. Это и есть искомый график (рис. 34).

Пример 6. Иванов и Петров посадили на своих садовых участках яблони, причем Петров посадил яблонь в 2,5 раза больше, чем Иванов. На следующий год они увеличили число яблонь (подсадили новые саженцы), причем у Иванова стало яблонь в 3 раза больше, чем было, а у Петрова в 2 раза больше, чем было.

В итоге у них вместе стало 16 яблонь. Сколько яблонь посадили Иванов и Петров в первый год?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число яблонь, посаженных в первый год Ивановым, а y — число яблонь, посаженных в первый год Петровым. По условию задачи $y = 2{,}5x$. Здесь целесообразно умножить обе части уравнения на 2, получим $2y = 5x$. Это уравнение перепишем в виде

$$5x - 2y = 0. \qquad (1)$$

На второй год Иванов увеличил число саженцев на своем участке в 3 раза и, значит, у него стало $3x$ яблонь. Петров увеличил число саженцев на своем участке в 2 раза, т. е. у него стало $2y$ яблонь. По условию у обоих в сумме стало 16 яблонь, т. е. $3x + 2y = 16$. Перепишем это уравнение в виде

$$3x + 2y - 16 = 0. \qquad (2)$$

Математическая модель задачи готова, она состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными x и y — из уравнений (1) и (2). Обычно в таких случаях уравнения записывают одно под другим и используют специальный символ — фигурную скобку — и специальный термин — *система уравнений*:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

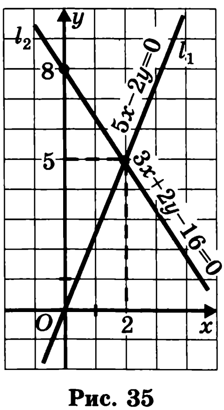


Рис. 35

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Интересующая нас пара чисел $(x;\ y)$ должна удовлетворять и уравнению (1), и уравнению (2), т. е. интересующая нас точка $(x;\ y)$ должна лежать как на прямой (1), так и на прямой (2). Что делать? Ответ очевиден: надо построить прямую (1), затем прямую (2) и, наконец, найти точку пересечения этих прямых.

1) Строим график уравнения $5x - 2y = 0$. Если $x = 0$, то $y = 0$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведем через точки (0; 0) и (2; 5) прямую l_1 (рис. 35).

2) Строим график уравнения $3x + 2y - 16 = 0$. Если $x = 0$, то $y = 8$; если $x = 2$, то $y = 5$. Проведем через точки (0; 8) и (2; 5) прямую l_2 (рис. 35).

3) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке (2; 5), т. е. $x = 2$, $y = 5$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько яблонь посадили в первый год Иванов и Петров, т. е. чему равны x и y? Ответ на этот вопрос уже получен: $x = 2$, $y = 5$.

Ответ: в первый год Иванов посадил 2 яблони, а Петров — 5 яблонь.

Как видите, не зря мы с вами учились строить графики линейных уравнений с двумя переменными. Это позволило нам от одной математической модели (алгебраической модели (3)) перейти к другой математической модели — геометрической (две прямые на координатной плоскости на рисунке 35), что и дало возможность довести решение до конца.

А можно ли работать непосредственно с моделью (3), не переходя к геометрической модели? Можно, но об этом речь впереди, в главе 8. Там, используя новые знания, мы снова вернемся к модели (3).

Завершая этот параграф, рассмотрим примеры построения более сложных графиков, в той или иной степени связанных с графиками линейных уравнений.

Пример 7. Построить график уравнения: а) $y - |x| = 0$; б) $|y| + x = 0$; в) $|x| + |y| = 2$; г) $x + |x| = y + |y|$.

Решение. а) Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$ и уравнение принимает вид $y - x = 0$. Что это означает? Это означает, что при $x \geqslant 0$, т. е. в правой координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $y - x = 0$. На рисунке 36 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит правой полуплоскости.

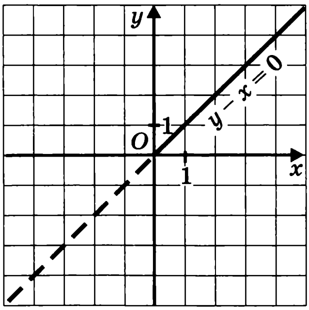


Рис. 36

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и уравнение принимает вид $y + x = 0$. Что это означает? Это означает, что при $x < 0$,

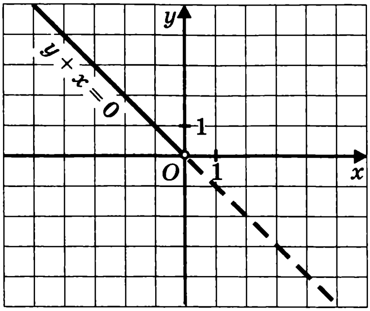


Рис. 37

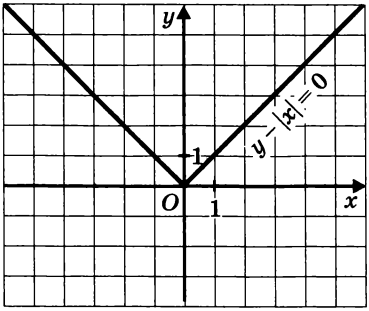


Рис. 38

т. е. в левой координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $y + x = 0$. На рисунке 37 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит левой полуплоскости.

Ну а как же выглядит график заданного уравнения? Он изображен на рисунке 38: мы соединили рисунки 36 и 37.

б) Если $y \geqslant 0$, то $|y| = y$ и уравнение принимает вид $y + x = 0$. Что это означает? Это означает, что при $y \geqslant 0$, т. е. в верхней координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $y + x = 0$. На рисунке 39 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит верхней полуплоскости.

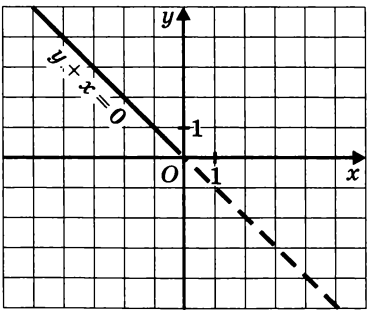


Рис. 39

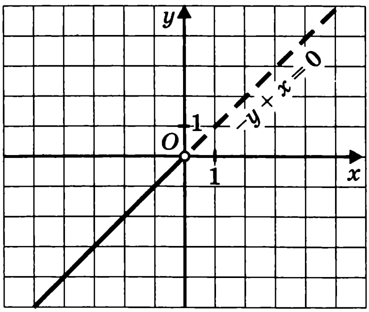


Рис. 40

Если $y < 0$, то $|y| = -y$ и уравнение принимает вид $-y + x = 0$. Что это означает? Это означает, что при $y < 0$, т. е. в нижней координатной полуплоскости, надо построить график уравнения $x - y = 0$. На рисунке 40 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит нижней полуплоскости.

График заданного уравнения изображен на рисунке 41.

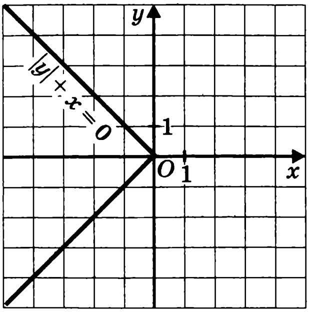


Рис. 41

в) Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $|x| = x$, $|y| = y$ и уравнение принимает вид $y + x = 2$. Что это означает? Это означает, что при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, т. е. в правом верхнем координатном угле, надо построить график уравнения $y + x = 2$. На рисунке 42 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

Если $x \geqslant 0$ и $y < 0$, то $|x| = x$, $|y| = -y$ и уравнение принимает вид $x - y = 2$. Что это означает? Это означает, что при $x \geqslant 0$, $y < 0$, т. е. в правом нижнем координатном угле надо построить график уравнения $x - y = 2$. На рисунке 43 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

Если $x < 0$ и $y \geqslant 0$, то $|x| = -x$, $|y| = y$ и уравнение принимает вид $-x + y = 2$. Это означает, что при $x < 0$, $y \geqslant 0$, т. е. в левом

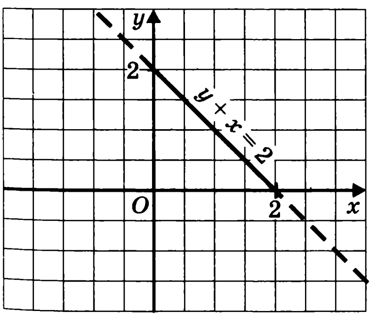


Рис. 42

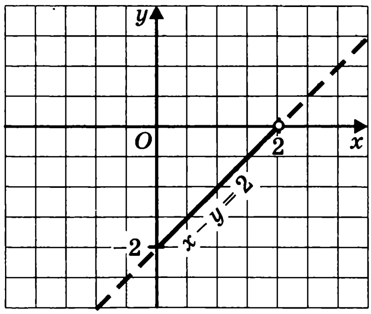


Рис. 43

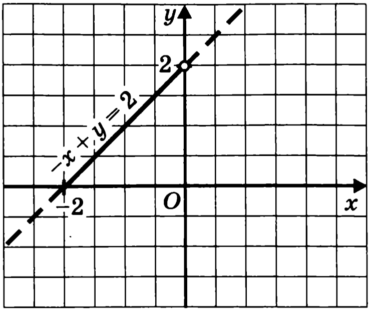


Рис. 44

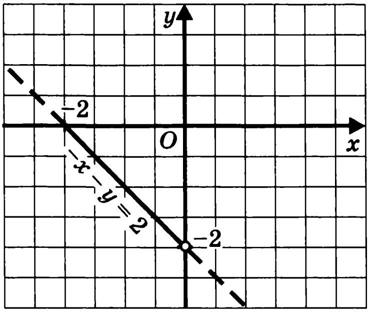


Рис. 45

верхнем координатном угле надо построить график уравнения $-x + y = 2$. На рисунке 44 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

Если, наконец, $x < 0$ и $y < 0$, то $|x| = -x$, $|y| = -y$ и уравнение принимает вид $-x - y = 2$. Это означает, что в левом нижнем координатном угле надо построить график уравнения $x + y = -2$. На рисунке 45 построен график этого уравнения, причем выделена та его часть, которая принадлежит упомянутому координатному углу.

График заданного уравнения изображен на рисунке 46.

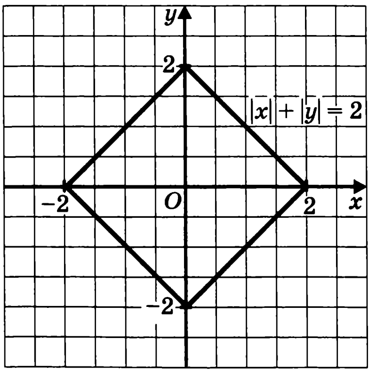


Рис. 46

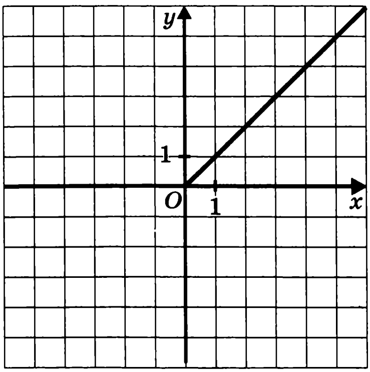


Рис. 47

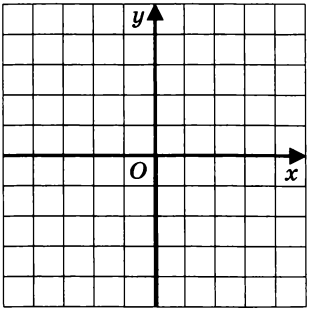


Рис. 48

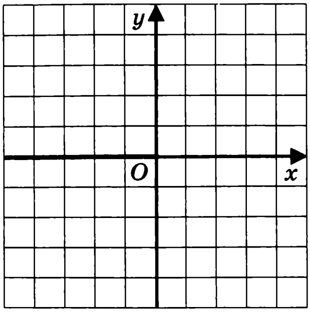


Рис. 49

г) Рассуждая как в пункте в), приходим к выводу, что в правом верхнем координатном угле надо построить график уравнения $x + x = y + y$, т. е. $x = y$ (рис. 47). В правом нижнем координатном угле надо построить график уравнения $x + x = y - y$, т. е. $x = 0$ (рис. 48). В левом верхнем координатном угле надо построить график уравнения $x - x = y + y$, т. е. $y = 0$ (рис. 49). Наконец, в левом нижнем координатном угле надо построить график уравнения $x - x = y - y$, т. е. $0 = 0$. Последнее равенство верно при любых x, y. Это значит, что все точки рассматриваемого координатного угла удовлетворяют уравнению (рис. 50).

Подводя итоги, получаем график заданного уравнения — он изображен на рисунке 51. ◼

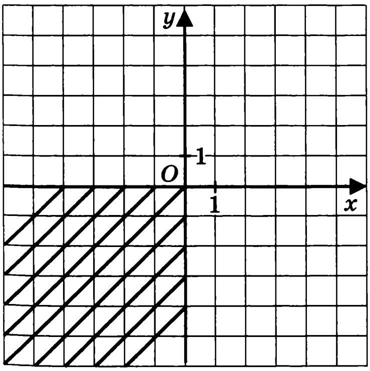


Рис. 50

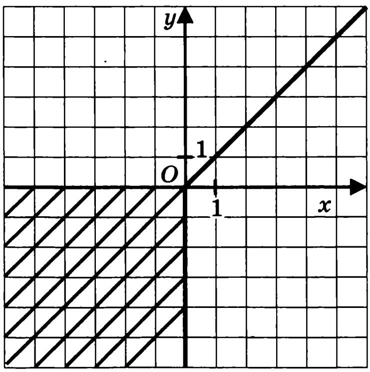


Рис. 51

§9. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$, который мы сформулировали в § 8, при всей его четкости и определенности математикам не очень нравится. Обычно они выдвигают претензии к первым двум шагам алгоритма. Зачем, говорят они, дважды решать уравнение относительно переменной y: сначала $ax_1 + by + c = 0$, затем $ax_2 + by + c = 0$? Не лучше ли сразу выразить y из уравнения $ax + by + c = 0$, тогда легче будет проводить вычисления (и, главное, быстрее)? Давайте проверим.

Рассмотрим сначала уравнение $3x - 2y + 6 = 0$ (см. пример 4 из § 8), т. е. $2y = 3x + 6$.

Умножив обе части уравнения на $\frac{1}{2}$, получим $\frac{1}{2} \cdot 2y = \frac{1}{2}(3x + 6)$, т. е. $y = \frac{3}{2}x + 3$. Впрочем, тот же результат мы получили бы, если бы обе части исходного уравнения почленно разделили на 2. Обычно предпочитают в подобных случаях говорить не об умножении, а о почленном делении обеих частей уравнения на одно и то же число.

Итак, $y = \frac{3}{2}x + 3$.

Придавая x конкретные значения, легко вычислить соответствующие значения y. Например, при $x = 0$ получаем $y = 3$; при $x = -2$ имеем $y = 0$; при $x = 2$ имеем $y = 6$; при $x = 4$ получаем $y = 9$. Видите, как легко и быстро найдены точки $(0; 3)$, $(-2; 0)$, $(2; 6)$ и $(4; 9)$, которые были выделены в примере 4 из § 8.

Точно так же уравнение $5x - 2y = 0$ (см. пример 6 из § 8) можно было преобразовать к виду $2y = 5x$ и далее $y = 2{,}5x$; нетрудно найти точки $(0; 0)$ и $(2; 5)$, удовлетворяющие этому уравнению. Наконец, уравнение $3x + 2y - 16 = 0$ из того же примера можно было преобразовать к виду $2y = 16 - 3x$ и далее $y = 8 - \frac{3}{2}x$. Из этого уравнения можно найти точки $(0; 8)$ и $(2; 5)$, которые ему удовлетворяют.

Рассмотрим теперь указанные преобразования в общем виде.

Случаи, когда в уравнении $ax + by + c = 0$ оба коэффициента a, b равны нулю, мы рассмотрели в § 8. Там же мы отметили, что в случае, когда $a \neq 0$, $b = 0$, графиком уравнения является прямая, параллельная оси y.

Рассмотрим случай, когда $b \neq 0$.
Имеем:

$$ax + by + c = 0; \tag{1}$$

$$by = -ax - c;$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Введя обозначения $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = m$, получаем

$$y = kx + m.$$

Таким образом, *линейное уравнение* (1) *с двумя переменными x и y в случае, когда $b \neq 0$, можно преобразовать к виду*

$$y = kx + m, \tag{2}$$

где k, m — числа (коэффициенты).

Это частный вид линейного уравнения. Зная, чему равен x, по правилу $y = kx + m$ всегда можно найти, чему равен y. Будем называть уравнение (2) **линейной функцией**.

С помощью уравнения (2) легко, указав конкретное значение x, вычислить соответствующее значение y. Пусть, например, $y = 2x + 3$. Тогда

если $x = 0$, то $y = 3$;
если $x = 1$, то $y = 5$;
если $x = -1$, то $y = 1$;
если $x = 3$, то $y = 9$ и т. д.

Обычно эти результаты оформляют в виде таблицы:

x	0	1	-1	3
y	3	5	1	9

Значения y из второй строки таблицы называют *значениями линейной функции* $y = 2x + 3$ соответственно *в точках* $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$.

В уравнении (1) переменные x и y равноправны, а в уравнении (2) — нет: конкретные значения мы придаем одной из них — переменной x, тогда как значение переменной y зависит от выбранного значения переменной x. Поэтому обычно говорят, что x — **независимая переменная** (или **аргумент**), y — **зависимая переменная**.

Частным случаем теоремы 1 из § 8 является следующая теорема.

Теорема 2. ***Графиком линейной функции $y = kx + m$ является прямая.***

Пример 1. Построить график линейной функции $y = 2x + 3$.

Решение. Составим таблицу:

x	0	1
y	3	5

Построим на координатной плоскости xOy точки (0; 3) и (1; 5) и проведем через них прямую. Это и есть график линейной функции $y = 2x + 3$ (рис. 52).

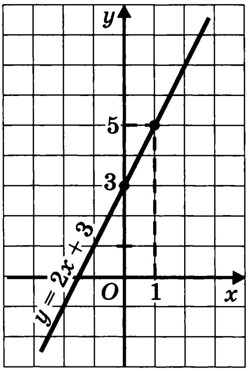


Рис. 52

При рассмотрении линейных функций $y = kx + m$ особо выделяют случай, когда $m = 0$; в этом случае линейная функция принимает вид $y = kx$.

Теорема 3. ***Графиком линейной функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.***

Доказательство осуществим в два этапа.

1. $y = kx$ — частный случай линейной функции, а графиком линейной функции, согласно теореме 2, является прямая; обозначим ее через l.

2. Пара $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяет уравнению $y = kx$, а потому точка (0; 0) принадлежит графику уравнения $y = kx$, т. е. прямой l.

Следовательно, прямая l проходит через начало координат. Теорема доказана.

Надо уметь переходить не только от аналитической модели $y = kx$ к геометрической, но и от геометрической модели к аналитической. Рассмотрим, например, прямую на координатной плоскости xOy, изображенную на рисунке 53. Она является графиком линейной функции $y = kx$, нужно лишь найти значение коэффициента k. Так как $k = \frac{y}{x}$, то достаточно взять любую точку на прямой и найти отношение ординаты этой точки к ее абсциссе. Прямая проходит через точку $P(3;\ 6)$, а для этой точки имеем $\frac{6}{3} = 2$. Значит, $k = 2$, а потому заданная прямая линия служит графиком линейной функции $y = 2x$.

График линейной функции $y = kx$ обычно строят так: берут точку $(1;\ k)$ (если $x = 1$, то из равенства $y = kx$ находим, что $y = k$) и проводят прямую через эту точку и начало координат. Впрочем, в случае необходимости точку $(1;\ k)$ можно заменить другой точкой, более удобной. На рисунке 54 изображены графики линейных функций $y = x$ (прямая l_1), $y = 2x$ (прямая l_2), $y = \frac{1}{3}x$ (прямая l_3; здесь не очень удобно брать точку $\left(1; \frac{1}{3}\right)$, мы взяли точку $(3;\ 1)$), $y = -2x$ (прямая l_4)).

Обратите внимание: от коэффициента k зависит угол, который построенная прямая образует с положительным направлением оси x; заметим, что этот угол отсчитывают от оси x в направлении против часовой стрелки. Если $k > 0$, то этот угол *острый* (так обстоит дело на рисунке 54 с прямыми l_1, l_2, l_3); если $k < 0$, то этот угол *тупой* (так обстоит дело на рисунке 54 с прямой l_4). Далее, если $k > 0$, то чем больше k, тем больше угол. Так, на рисунке 54 для прямой l_3 имеем $k = \frac{1}{3}$, для прямой l_1 имеем $k = 1$, для прямой l_2 имеем $k = 2$; при увеличении коэффициента k увеличивается

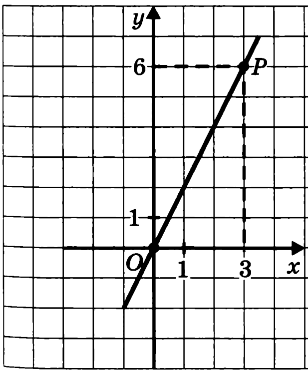


Рис. 53

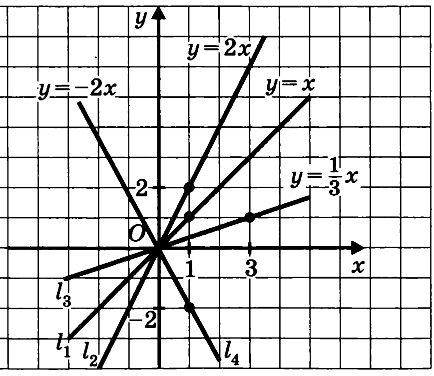


Рис. 54

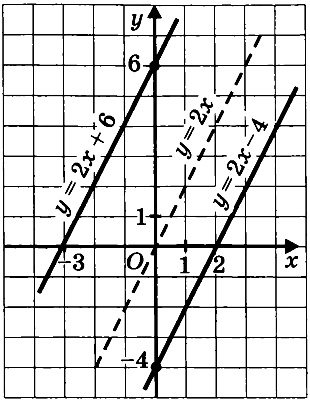


Рис. 55

и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс. Поэтому коэффициент k в записи $y = kx$ называют **угловым коэффициентом.**

Как известно из курса физики, $s = vt$ — закон равномерного прямолинейного движения; здесь s — путь, v — скорость, t — время. Если перейти к обозначениям, которые мы использовали в этом параграфе, закон равномерного движения можно записать в виде $y = kx$ (x — время, y — путь). Угловой коэффициент k — это скорость движения.

На рисунке 55 изображены графики линейных функций $y = 2x - 4$, $y = 2x + 6$. Оба они параллельны графику линейной функции $y = 2x$, только первая прямая ($y = 2x - 4$) получается из прямой $y = 2x$ сдвигом вниз на 4 единицы масштаба, а вторая прямая ($y = 2x + 6$) получается из прямой $y = 2x$ сдвигом вверх на 6 единиц масштаба.

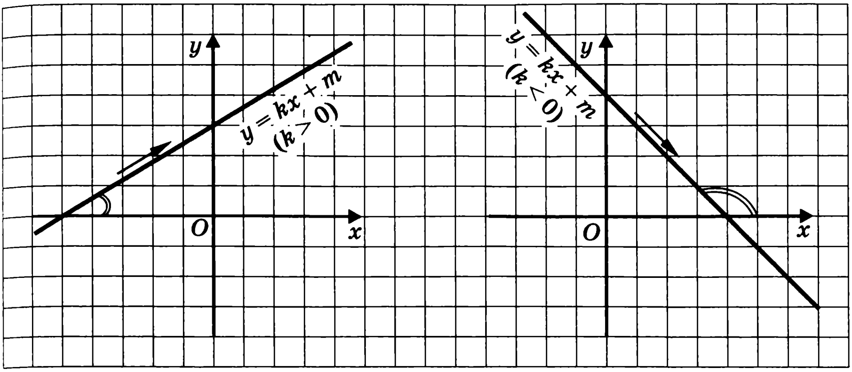
Справедлив следующий общий результат, который мы оформим в виде теоремы.

Теорема 4. ***Прямая, служащая графиком линейной функции $y = kx + m$, параллельна прямой, служащей графиком линейной функции $y = kx$.***

Вследствие этого коэффициент k в записи линейной функции $y = kx + m$ также называют *угловым коэффициентом.* ***Если $k > 0$, то прямая $y = kx + m$ образует с положительным направлением оси x острый угол*** (рис. 56, *а*), а ***если $k < 0$ — тупой угол*** (рис. 56, *б*).

Многие реальные ситуации описываются математическими моделями, представляющими собой линейные функции. Приведем примеры.

Первая ситуация. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали подвозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе через 2, 4, 10 дней?



а *б*

Рис. 56

Если пройдет x дней, то количество угля y на складе (в тоннах) выразится формулой $y = 500 + 30x$. Таким образом, линейная функция $y = 30x + 500$ есть математическая модель ситуации.

Теперь нетрудно установить, что:

при $x = 2$ имеем $y = 560$ (в уравнение $y = 30x + 500$ подставили $x = 2$ и получили $y = 560$);

при $x = 4$ имеем $y = 620$;

при $x = 10$ имеем $y = 800$.

Вторая ситуация. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали увозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе через 2, 4, 10 дней?

Здесь математической моделью ситуации является линейная функция $y = 500 - 30x$. С помощью этой модели нетрудно ответить на вопрос задачи:

если $x = 2$, то $y = 440$ (в уравнение $y = 500 - 30x$ подставили $x = 2$ и получили $y = 440$);

если $x = 4$, то $y = 380$;

если $x = 10$, то $y = 200$.

Третья ситуация. Турист проехал на автобусе 15 км от пункта A до пункта B, а затем продолжил движение из пункта B в том же направлении, но уже пешком со скоростью 4 км/ч. На каком расстоянии от пункта A будет турист через 2 ч, через 4 ч, через 5 ч ходьбы?

Математической моделью ситуации является линейная функция $y = 15 + 4x$, где x — время ходьбы (в часах), y — расстояние от A (в километрах). С помощью этой модели отвечаем на вопрос задачи:

если $x = 2$, то $y = 23$ (в уравнение $y = 15 + 4x$ подставили $x = 2$ и получили $y = 23$);

если $x = 4$, то $y = 31$;

если $x = 6$, то $y = 39$.

Итак, в каждой из рассмотренных ситуаций математической моделью служит линейная функция. Но (внимание!), строго говоря, все три составленные модели не совсем точны, они не учитывают тех ограничений на переменную, которые вытекают из смысла задачи. Ведь ясно, что в первой ситуации независимая переменная x может принимать только значения 1, 2, 3, ..., поскольку x — число дней. Следовательно, уточненная математическая модель первой ситуации выглядит так:

$$y = 500 + 30x, \text{ где } x \text{ — натуральное число.}$$

Вторую ситуацию необходимо уточнить условием $y \geqslant 0$. Это значит, что независимая переменная x, обозначающая, как и в первой ситуации, число дней, может принимать только значения 1, 2, 3, ..., 16. Действительно, если $x = 16$, то по формуле $y = 500 - 30x$ находим $y = 500 - 30 \cdot 16 = 20$. Значит, уже на 17-й день вывезти со склада 30 т угля не удастся, поскольку на складе к этому дню останется всего 20 т и процесс вывоза угля придется прекратить. Следовательно, уточненная математическая модель второй ситуации выглядит так:

$$y = 500 - 30x,\ y \geqslant 0 \text{ или}$$
$$y = 500 - 30x, \text{ где } x = 1, 2, 3, \ldots, 16.$$

В третьей ситуации независимая переменная x теоретически может принять любое неотрицательное значение ($x = 0$, $x = 2$, $x = 3{,}5$ и т. д.), но практически турист не может шагать с постоянной скоростью без сна и отдыха сколько угодно времени. Значит, нам нужно было сделать разумные ограничения на x, скажем, $0 \leqslant x \leqslant 6$ (т. е. турист идет не более 6 ч).

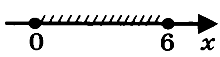


Рис. 57

Напомним, что геометрической моделью нестрогого двойного неравенства $0 \leqslant x \leqslant 6$ служит отрезок [0; 6] координатной прямой (рис. 57). Значит, уточненная модель третьей ситуации выглядит так: $y = 15 + 4x$, где x принадлежит отрезку $[0; 6]$.

Условимся вместо фразы «x принадлежит множеству X» писать $x \in X$ (читают: «элемент x принадлежит множеству X», $\in$ — *знак принадлежности*). Как видите, наше знакомство с математическим языком продолжается. Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой N. Значит, вместо фразы «x — натуральное число» мы можем использовать соотношение $x \in N$.

Если линейную функцию $y = kx + m$ надо рассматривать не при всех значениях x, а лишь для значений x из некоторого числового множества X, то пишут

$$y = kx + m,\ x \in X.$$

А теперь запишем более точные математические модели для рассмотренных выше трех ситуаций.

Первая ситуация: $y = 500 + 3x,\ x \in N$.

Вторая ситуация: $y = 500 - 3x,\ x \in \{1, 2, 3, ..., 16\}$.

Третья ситуация: $y = 15 + 4x,\ x \in [0; 6]$.

Пример 2. Построить график линейной функции:

а) $y = -2x + 1,\ x \in [-3; 2]$; б) $y = -2x + 1,\ x \in (-3; 2)$.

Решение. а) Составим таблицу для линейной функции $y = -2x + 1$:

x	-3	2
y	7	-3

Построим на координатной плоскости xOy точки $(-3; 7)$ и $(2; -3)$ и проведем через них прямую линию. Это график уравнения $y = -2x + 1$. Далее выделим отрезок, соединяющий построенные точки (рис. 58). Этот отрезок и есть график линейной функции $y = -2x + 1$, где $x \in [-3; 2]$.

Обычно говорят так: мы построили график линейной функции $y = -2x + 1$ на отрезке $[-3; 2]$.

б) Чем отличается этот пример от предыдущего? Линейная функция та же ($y = -2x + 1$), значит, и ее графиком служит та же прямая. Но — будьте внимательны! — на этот раз $x \in (-3; 2)$, т. е. значения $x = -3$ и $x = 2$ не рассматриваются, они не принадлежат интервалу $(-3; 2)$. Как мы отмечали концы интервала на

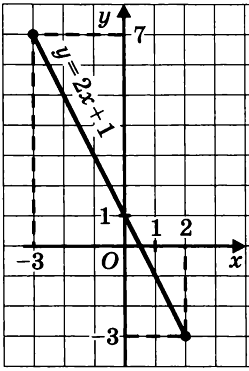


Рис. 58

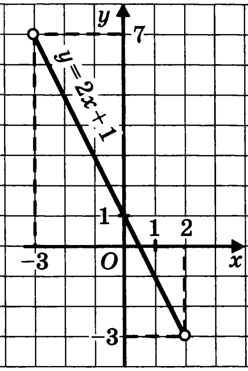


Рис. 59

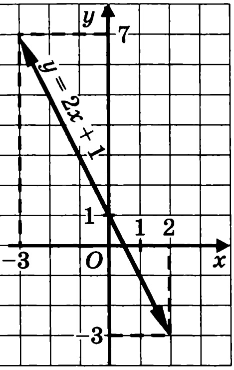


Рис. 60

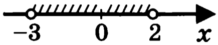


Рис. 61

координатной прямой? Светлыми кружочками (рис. 61), об этом мы говорили в § 6. Точно так же и точки (−3; 7) и (2; −3) придется отметить на чертеже светлыми кружочками. Это будет напоминать нам о том, что берутся лишь те точки прямой $y = -2x + 1$, которые лежат между точками, отмеченными кружочками (рис. 59). Впрочем, иногда в таких случаях используют не светлые кружочки, а стрелки (рис. 60). Это непринципиально: главное понимать, о чем идет речь. ◼

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ на отрезке [0; 6].

Решение. Составим таблицу для линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$:

x	0	6
y	4	7

Построим на координатной плоскости xOy точки (0; 4) и (6; 7) и проведем через них прямую — график линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ (рис. 62).

Нам нужно рассмотреть эту линейную функцию не целиком, а на отрезке [0; 6], т. е. для $x \in [0; 6]$. Соответствующий отрезок графика выделен на чертеже. Замечаем, что самая большая ордината у точек, принадлежащих выделенной части, равна 7 — это и есть *наибольшее значение* линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ на отрезке [0; 6]. Обычно используют такую запись: $y_{\text{наиб}} = 7$.

Замечаем, что самая маленькая ордината у точек, принадлежащих выделенной на рисунке 62 части прямой, равна 4 — это и есть *наименьшее значение* линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 4$ на отрезке [0; 6]. Обычно используют такую запись: $y_{\text{наим}} = 4$.

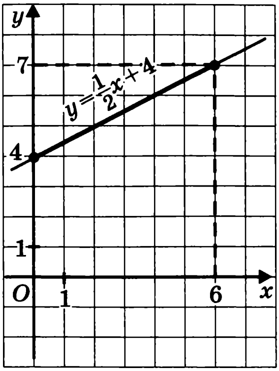


Рис. 62

Ответ: $y_{\text{наиб}} = 7$, $y_{\text{наим}} = 4$.

Пример 4. Найти $y_{\text{наиб}}$ и $y_{\text{наим}}$ для линейной функции $y = -1,5x + 3,5$:

а) на отрезке [1; 5];

б) на интервале (1; 5);

в) на полуинтервале [1; 5);

г) на луче [0; +∞);

д) на луче (−∞; 3].

Решение. Составим таблицу для линейной функции $y = -1,5x + 3,5$:

x	1	5
y	2	−4

Построим на координатной плоскости xOy точки (1; 2) и (5; −4) и проведем через них прямую (рис. 63—67). Выделим на построенной прямой часть, соответствующую значениям x из отрезка [1; 5] (рис. 63), из интервала (1; 5) (рис. 64), из полуинтервала [1; 5) (рис. 65), из луча [0; +∞) (рис. 66), из луча (−∞; 3] (рис. 67).

а) С помощью рисунка 63 нетрудно сделать вывод, что $y_{\text{наиб}} = 2$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 1$), а $y_{\text{наим}} = -4$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 5$).

б) В отличие от предыдущего случая, оба конца отрезка, в которых как раз и достигались наибольшее и наименьшее значения, из рассмотрения исключены (рис. 64). Среди остальных

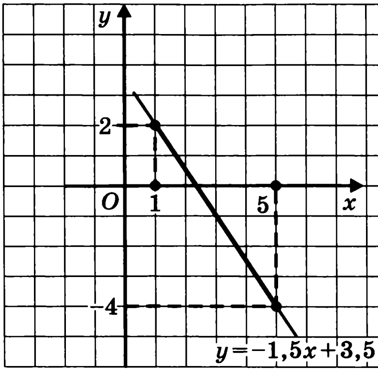


Рис. 63

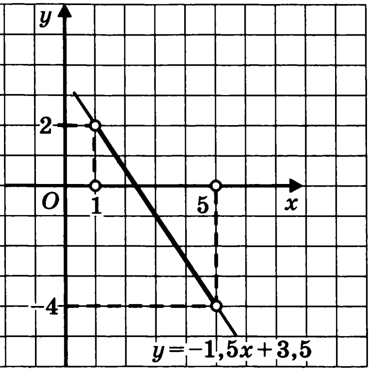


Рис. 64

точек графика нет ни точки с наименьшей ординатой, ни точки с наибольшей ординатой. Значит, ни наибольшего, ни наименьшего значений на заданном интервале у данной линейной функции нет, они *не существуют*.

в) С помощью рисунка 65 заключаем, что $y_{\text{наиб}} = 2$ (как и в первом случае), а наименьшего значения у линейной функции нет (как и во втором случае).

г) $y_{\text{наиб}} = 3{,}5$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 0$), а $y_{\text{наим}}$ не существует (рис. 66).

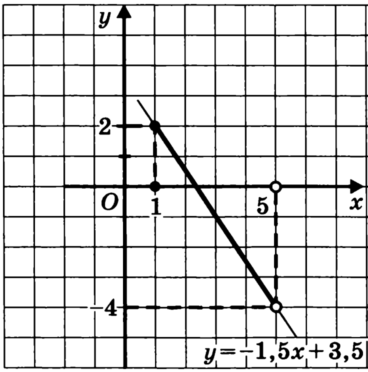


Рис. 65

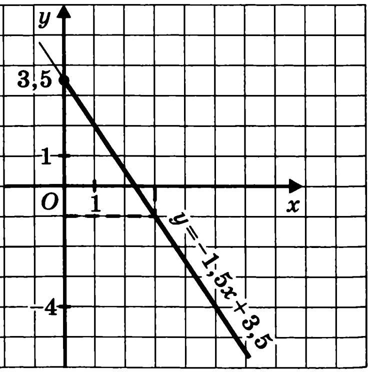


Рис. 66

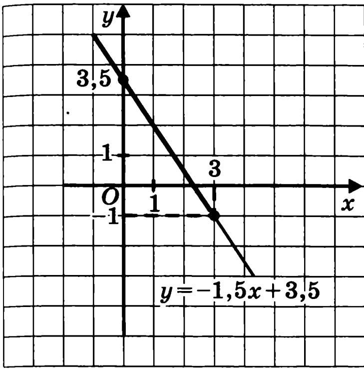


Рис. 67

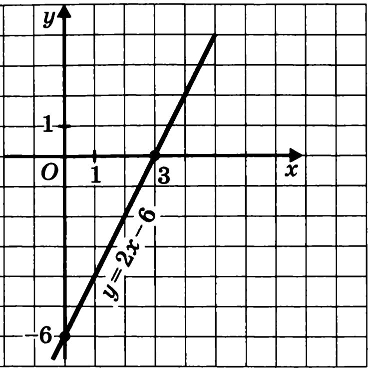


Рис. 68

д) $y_{\text{наим}} = -1$ (этого значения линейная функция достигает при $x = 3$), а $y_{\text{наиб}}$ не существует (рис. 67).

Пример 5. Построить график линейной функции $y = 2x - 6$. С помощью графика ответить на следующие вопросы:

а) при каком значении x будет $y = 0$;

б) при каких значениях x будет $y > 0$;

в) при каких значениях x будет $y < 0$;

г) при каких значениях x выполняется двойное неравенство $-4 \leqslant y \leqslant -2$?

Решение. Составим таблицу для линейной функции $y = 2x - 6$:

x	0	3
y	-6	0

Через точки $(0; -6)$ и $(3; 0)$ проведем прямую — график линейной функции $y = 2x - 6$ (рис. 68).

а) $y = 0$ при $x = 3$. График пересекает ось x в точке $x = 3$, это и есть точка с ординатой $y = 0$.

б) $y > 0$ при $x > 3$. В самом деле, если $x > 3$, то соответствующая часть прямой расположена выше оси x, значит, ординаты соответствующих точек прямой положительны.

в) $y < 0$ при $x < 3$. В самом деле, если $x < 3$, то соответствующая часть прямой расположена ниже оси x, значит, ординаты соответствующих точек прямой отрицательны.

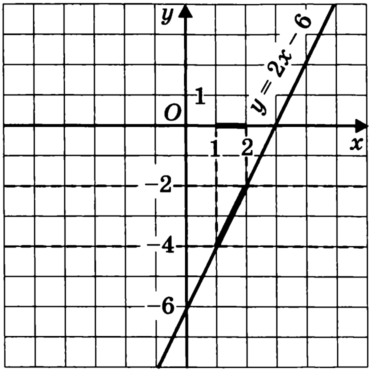


Рис. 69

г) На рисунке 69 выделены часть прямой, ординаты точек которой удовлетворяют двойному неравенству $-4 \leqslant y \leqslant -2$, и соответствующий промежуток оси абсцисс. Это и есть интересующий нас промежуток $1 \leqslant x \leqslant 2$. ◼

Обратите внимание, что в этом примере мы с помощью графика решили:

а) уравнение $2x - 6 = 0$ (получили $x = 3$);

б) неравенство $2x - 6 > 0$ (получили $x > 3$);

в) неравенство $2x - 6 < 0$ (получили $x < 3$);

г) неравенство $-4 \leqslant 2x - 6 \leqslant -2$ (получили $1 \leqslant x \leqslant 2$).

Замечание. В русском языке часто один и тот же объект называют по-разному, например: «дом», «здание», «сооружение», «коттедж», «особняк», «барак», «хибара», «избушка». В математическом языке ситуация примерно та же. Скажем, равенство с двумя переменными $y = kx + m$, где k, m — конкретные числа, можно назвать линейной функцией, можно назвать линейным уравнением с двумя переменными x и y (или с двумя неизвестными x и y), можно назвать формулой, можно назвать соотношением, связывающим x и y, можно, наконец, назвать зависимостью между x и y. Это неважно, главное, понимать, что во всех случаях речь идет о математической модели $y = kx + m$.

Рассмотрим график линейной функции, изображенный на рисунке 56, *а* (с. 61). Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика все время увеличиваются, мы как бы «поднимаемся в горку». В таких случаях математики употребляют термин *возрастание* и говорят так: ***если $k > 0$, то линейная функция $y = kx + m$ возрастает.***

Рассмотрим график линейной функции, изображенный на рисунке 56, *б*. Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика все время уменьшаются, мы как бы «спускаемся с горки». В таких случаях математики употребляют

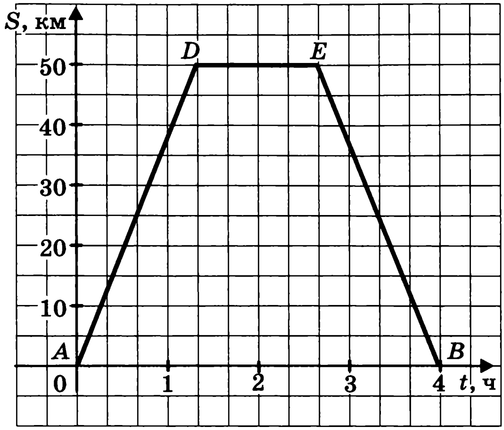


Рис. 70

термин *убывание* и говорят так: ***если k < 0, то линейная функция y = kx + m убывает.***

Пример 6. На рисунке 70 изображен график движения автомобиля из пункта A в пункт B и обратно. Требуется охарактеризовать весь процесс движения словами.

Решение. 1) До пункта B автомобиль доехал за $1\frac{1}{3}$ ч — об этом можно судить по абсциссе точки D. Расстояние от A до B равно 50 км — об этом можно судить по ординате точки D. Значит, можно вычислить скорость движения автомобиля на участке от A до B: $v = 50 : \frac{4}{3} = 37{,}5$ км/ч.

2) На участке DE ордината постоянна, т. е расстояние от пункта A не менялось. Это значит, что автомобиль не двигался. Причем он стоял в промежутке от $1\frac{1}{3}$ ч до $2\frac{2}{3}$ ч (это абсциссы точек D и E). Остановка длилась, таким образом, 1 ч 20 мин.

3) На обратный путь после остановки автомобиль потратил столько же времени, сколько на путь от A до B $\left(\text{поскольку } 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}\right)$ значит, обратно он ехал с той же скоростью.

§10. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Вернемся еще раз к графикам линейных функций $y = 2x - 4$ и $y = 2x + 6$, представленным на рисунке 55 (с. 60). Мы уже отмечали (в § 9), что эти две прямые параллельны прямой $y = 2x$, а значит, параллельны друг другу. Признаком параллельности служит равенство угловых коэффициентов ($k = 2$ для всех трех прямых: и для $y = 2x$, и для $y = 2x - 4$, и для $y = 2x + 6$). Если же угловые коэффициенты различны, как, например, у линейных функций $y = 2x$ и $y = 3x + 1$, то прямые, служащие их графиками, не параллельны и тем более не совпадают. Следовательно, указанные прямые пересекаются. Вообще справедлива следующая теорема.

Теорема 5. ***Пусть даны две линейные функции $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$. Прямые, служащие графиками заданных линейных функций:***

1) ***параллельны, если $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$;***
2) ***совпадают, если $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$;***
3) ***пересекаются, если $k_1 \neq k_2$.***

Пример 1. Найти точку пересечения прямых:

а) $y = 2x - 3$ и $y = 2 - \frac{x}{2}$;

б) $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$.

Решение. а) Для линейной функции $y = 2x - 3$ имеем:

x	0	2
y	−3	1

Прямая l_1, служащая графиком линейной функции $y = 2x - 3$, проведена на рисунке 71 через точки (0; −3) и (2; 1).

Для линейной функции $y = 2 - \frac{1}{2}x$ имеем:

x	0	2
y	2	1

Прямая l_2, служащая графиком линейной функции $y = 2 - \frac{1}{2}x$, проведена на рисунке 71 через точки (0; 2) и (2; 1).

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке (2; 1).

б) Линейные функции $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ имеют один и тот же угловой коэффициент ($k = -3$), значит, прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ параллельны, т. е. точки пересечения у них нет.

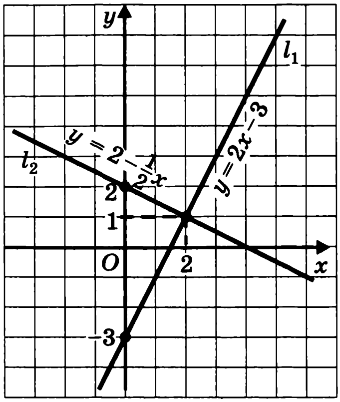


Рис. 71

Пример 2. Найти точку пересечения прямых $y = 4x + 7$ и $y = -2x + 7$.

Решение. Здесь можно обойтись без чертежа. Будем рассуждать так. Во-первых, угловые коэффициенты прямых различны ($k_1 = 4$, $k_2 = -2$), значит, прямые пересекаются в одной точке.

Во-вторых, как одна, так и другая прямая проходят через точку (0; 7) (вы обратили внимание, что $m_1 = m_2 = 7$?).

Следовательно, (0; 7) и есть искомая точка пересечения.

Вообще *прямые* $y = k_1x + m$ *и* $y = k_2x + m$, *где* $k_1 \neq k_2$, *пересекаются в точке* $(0; m)$.

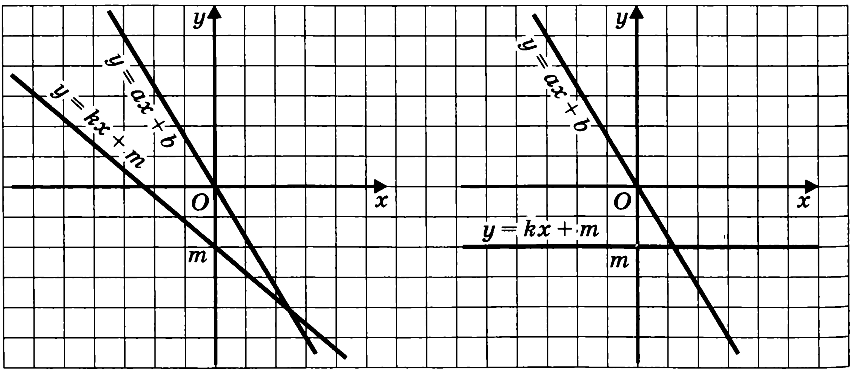
Завершая главу 2, обратим внимание на характерную особенность математического языка: во многих фразах, как вы, наверное, заметили, одновременно встречаются элементы алгебраического и геометрического языков — составных частей единого математического языка. Так, мы говорим: точка 3, прямая $x = 2$, прямая $y = -5$, прямая $y = 2x + 3$, отрезок [3; 7], луч $[-2; +\infty]$ и т. п. А в § 10 мы получили, пожалуй, наиболее яркие образцы свободного оперирования алгебраическим и геометрическим языками в одном суждении — они представлены в приведенной таблице.

Линейные функции	Алгебраическое условие	Геометрический вывод
$y = k_1x + m_1$ $y = k_2x + m_2$	1) $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$ 2) $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$ 3) $k_1 \neq k_2$	1) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ параллельны 2) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ совпадают 3) Прямые $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ пересекаются

Пример 3. Графики линейных функций $y = kx + m$ и $y = ax + b$ пересекаются в точке, принадлежащей четвертому координатному углу координатной плоскости xOy. Известно, что первая прямая не пересекает первый координатный угол, а вторая проходит через начало координат. Найти знаки коэффициентов k, m, a, b.

Решение. На рисунке 72 представлена геометрическая иллюстрация условий задачи, которая позволяет сделать все необходимые выводы. Линейная функция $y = kx + m$ убывает (рис. 72, *а*) или постоянна (рис. 72, *б*), значит, $k < 0$ или $k = 0$. Ее график пересекает ось ординат в точке, лежащей ниже начала координат, значит $m < 0$. Линейная функция $y = ax + b$ также убывает, значит $a < 0$. Ее график проходит через начало координат, значит $b = 0$.

Ответ: $k \leqslant 0$, $m < 0$, $a < 0$, $b = 0$.



а *б*

Рис. 72

ГЛАВА

3 СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

§11. ЧТО ТАКОЕ СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Одна из особенностей математического языка, которым мы с вами должны научиться пользоваться, состоит в стремлении применять как можно более короткие записи. Математик не будет писать $a + a + a + a + a$, он напишет $5a$; не будет писать $a + a + a + a + a + a + a + a + a + a$ (здесь 10 слагаемых), а напишет $10a$; не будет писать $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}}$, а напишет na.

Точно так же математик не будет писать $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, а воспользуется специально придуманной короткой записью 2^5. Аналогично вместо произведения семи одинаковых множителей $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ он запишет 3^7. Конечно, в случае необходимости он будет двигаться в обратном направлении, например, заменит короткую запись 2^6 более длинной $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Если появляется новое обозначение, то возникают и новые термины. И все это (и обозначения, и термины) охватывается новым определением. **Определением** обычно называют предложение, разъясняющее суть нового термина, нового слова, нового обозначения. Просто так определения не придумываются, они появляются только тогда, когда в этом возникает необходимость.

Определение 1. Под a^n, где $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, понимают произведение n одинаковых множителей, каждым из которых является число a. Выражение a^n называют **степенью**, число a — **основанием степени**, число n — **показателем степени.**

Подчеркнем еще раз, что показатель степени — натуральное число (в старших классах мы снимем это ограничение); обычно говорят короче: *натуральный показатель*. Отсюда и происходит название как всей главы, так и этого параграфа.

Итак,

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n;$$

a^n	—	степень с натуральным показателем;
a	—	основание степени;
n	—	показатель степени.

Запись a^n читают так: «a в n-й степени». Исключение составляют запись a^2, которую читают: «a в квадрате» (хотя можно читать и «a во второй степени»), и запись a^3, которую читают: «a в кубе» (хотя можно читать и «a в третьей степени»).

Пример 1. Записать в виде степени произведение

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

и использовать соответствующие термины.

Решение. Поскольку дано произведение шести одинаковых множителей, каждый из которых равен 5, имеем:

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$;

5^6 — степень;

5 — основание степени;

6 — показатель степени. ◼

Пример 2. Вычислить $(-2)^4$.

Решение. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.

Ответ: 16.

Пример 3. Вычислить $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Решение. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$.

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Как вы думаете, полностью ли соответствует названию параграфа определение 1? Параграф называется «Что такое степень с натуральным показателем», т. е. имеется в виду, что в качестве показателя может фигурировать любое натуральное число. А любое ли натуральное число фигурирует в качестве показателя в определении 1? Как вы ответите на этот вопрос?

Ответим на этот вопрос вместе: мы говорили о степени a^n, где $n = 2, 3, 4, \ldots$, а вот случай, когда $n = 1$, пока упустили из виду («потеряли» одно натуральное число). Это упущение исправим с помощью нового определения.

Определение 2. Степенью числа a с показателем 1 называют само это число:

$$\boxed{a^1 = a.}$$

Пример 4. Найти значение степени a^n при заданных значениях a и n:

а) $a = 2{,}5$, $n = 2$; д) $a = -1$, $n = 5$;

б) $a = \frac{1}{3}$, $n = 4$; е) $a = 0$, $n = 1$;

в) $a = -5$, $n = 1$; ж) $a = 0$, $n = 12$;

г) $a = -1$, $n = 4$; з) $a = 1$, $n = 17$.

Решение. а) $a^n = 2{,}5^2 = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$;

б) $a^n = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$;

в) $a^n = (-5)^1 = -5$;

г) $a^n = (-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$;

д) $a^n = (-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

е) $a^n = 0^1 = 0$;

ж) $a^n = 0^{12} = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{12 \text{ множителей}} = 0$;

з) $a^n = 1^{17} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{17 \text{ множителей}} = 1$. ◼

Операцию отыскания степени a^n называют **возведением в степень**. В примере 4 мы рассмотрели восемь случаев возведения в степень.

Пример 5. Вычислить $7^1 \cdot 3^2 \cdot (-2)^3$.

Решение. 1) $7^1 = 7$;
2) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$;
3) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;
4) $7 \cdot 9 \cdot (-8) = -504$.

Ответ: -504.

В рассмотренных примерах мы несколько раз возводили в степень отрицательные числа. Заметили ли вы закономерность: если отрицательное число возводится в *четную* степень, то получается *положительное* число, если же отрицательное число возводится в *нечетную* степень, то получается *отрицательное* число? Попробуйте объяснить, почему это так.

§12. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Вы знаете таблицу умножения, в нее включены произведения любых двух однозначных чисел ($3 \cdot 5$, $4 \cdot 7$ и т. д.), этой таблицей вы постоянно пользуетесь при вычислениях. На практике полезна и таблица степеней простых однозначных чисел (в пределах тысячи). Составим ее.

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$5^1 = 5$	$7^1 = 7$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$7^2 = 49$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$7^3 = 343$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$		
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$		
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

С помощью этой таблицы можно находить и степени составных чисел (поэтому такие степени в таблицу обычно не включают). Например:

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = (3 \cdot 3)(3 \cdot 3)(3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729.$$

Пример 1. Известно, что $2^n = 128$, $3^k = 243$. Что больше: n или k?

Решение. По таблице находим, что $128 = 2^7$, значит, $n = 7$. По таблице так же находим, что $243 = 3^5$, значит, $k = 5$. Так как $7 > 5$, то $n > k$.

Ответ: $n > k$.

Имеются еще три числа, для которых легко составить таблицу степеней, особенно учитывая, что ничего вычислять не нужно и результат фактически известен заранее. Это числа 1, 0, −1, а таблица степеней для этих оснований выглядит следующим образом:

$1^n = 1$ для любого n;
$0^n = 0$ для любого n;
если n — четное число ($n = 2, 4, 6, 8, ...$), то $(-1)^n = 1$;
если n — нечетное число ($n = 1, 3, 5, 7, ...$), то $(-1)^n = -1$.

Кстати, используя формулу четного числа $n = 2k$ и формулу нечетного числа $n = 2k - 1$, можем записать, что

$$\boxed{(-1)^{2k} = 1;\ (-1)^{2k-1} = -1.}$$

А теперь выберем в качестве основания степени число 10:

$$10^1 = 10, \qquad 10^2 = 100, \qquad 10^3 = 1000.$$

Обратите внимание: каков показатель, столько нулей надо записать после цифры 1.

Вообще,

$$10^n = 1\underbrace{000...0}_{n \text{ нулей}}.$$

Например, $10^6 = 1\,000\,000$; напротив, $100\,000 = 10^5$.

Пример 2. Найти значение выражения

$$\frac{a^{17} + b^{18} + c^{19}}{a^{18} - b^{37} + c^1} + \frac{(10c)^4}{(a+3)^4}$$

при $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

Решение.

1) $\dfrac{a^{17} + b^{18} + c^{19}}{a^{18} - b^{37} + c^1} = \dfrac{(-1)^{17} + 0^{18} + 1^{19}}{(-1)^{18} - 0^{37} + 1^1} = \dfrac{-1 + 0 + 1}{1 - 0 + 1} = \dfrac{0}{2} = 0;$

2) $\dfrac{(10c)^4}{(a+3)^4} = \dfrac{(10\cdot 1)^4}{(-1+3)^4} = \dfrac{10^4}{2^4} = \dfrac{10\,000}{16} = 625;$

3) $0 + 625 = 625.$

Ответ: 625.

В заключение данного параграфа еще раз отметим, что математики всегда стремятся к краткости записей, четкости рассуждений. Поэтому, введя новое понятие, они начинают изучать его свойства, а затем применяют эти свойства на практике. О разных свойствах степени с натуральным показателем поговорим в следующем параграфе, а пока, забегая вперед, заметим, что если бы одно из таких свойств мы уже знали, то не вычисляли бы так долго 9^3, как это было сделано выше. Мы бы записали так:

$$9^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$$

Видите, запись в два раза короче. А почему это так, узнаем в §13.

§13. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Бо́льшая часть математических утверждений проходит в своем становлении три этапа.

На первом этапе человек в ряде конкретных случаев подмечает одну и ту же закономерность.

На втором этапе он пытается сформулировать подмеченную закономерность в общем виде, т. е. предполагает, что эта закономерность действует не только в рассмотренных случаях, но и во всех других аналогичных случаях.

На третьем этапе он пытается доказать, что закономерность, сформулированная (гипотетически) в общем виде, на самом деле верна.

Доказать какое-либо утверждение — это значит объяснить, почему оно верно (объяснить убедительно, а не так: «это верно потому, что это верно»). При доказательстве можно ссылаться только на уже известные факты (так мы действовали, например, при доказательстве теоремы 3 на с. 58).

Давайте попытаемся вместе пройти все три этапа, попробуем самостоятельно *открыть*, *сформулировать* и *доказать* свойства степеней, хорошо известные в математике.

Открытие первое

Пример 1. Вычислить: а) $2^3 \cdot 2^5$; б) $3^1 \cdot 3^4$.

Решение. а) Имеем $2^3 \cdot 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\text{ множителя}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\text{ множителей}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8\text{ множителей}}.$$

Всего имеется 8 одинаковых множителей, каждый из которых равен 2, т. е. 2^8, что по таблице (см. § 12) дает 256.

б) Имеем

$$3^1 \cdot 3^4 = 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{3}_{1\text{ множитель}} \quad \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\text{ множителя}} = 3^5 = 243.$$

Ответ: а) 256; б) 243.

В процессе решения примера мы заметили, что

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8, \text{ т. е. } 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5};$$
$$3^1 \cdot 3^4 = 3^5, \text{ т. е. } 3^1 \cdot 3^4 = 3^{1+4}.$$

Наблюдается закономерность: основания перемножаемых степеней одинаковы, при этом показатели складываются. Первый этап завершен.

На втором этапе осмелимся предположить, что мы открыли (для себя) *общую закономерность*: $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

Теорема 1. ***Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство***

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

Обычно теорему формулируют так: если ... (условие), то ... (заключение). Например, теорему 1 можно (и, честно говоря, так было бы аккуратнее) сформулировать следующим образом:

если a — любое число и n, k — натуральные числа, то справедливо равенство

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

На третьем этапе надо доказать, что наше предположение верно, т. е. доказать теорему 1. Сделаем это и мы.

Доказательство.

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ множителей}};$

2) $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k\ \text{множителей}}$;

3) $a^n \cdot a^k = a^n \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ \text{множителей}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k\ \text{множителей}} =$

$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k\ \text{множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+k\ \text{множителей}} = a^{n+k}$.

Теорема доказана.

Итак, первое открытие у нас состоялось. Идем дальше.

Открытие второе

Пример 2. Вычислить: а) $2^6 : 2^4$; б) $3^8 : 3^5$.

Решение. а) Запишем частное в виде дроби и сократим ее:

$$2^6 : 2^4 = \frac{2^6}{2^4} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 2}{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4.$$

$$\text{б) } 3^8 : 3^5 = \frac{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27.$$

Ответ: а) 4; б) 27.

В процессе решения примера мы заметили, что

$$2^6 : 2^4 = 2^2, \text{ т. е. } 2^6 : 2^4 = 2^{6-4};$$

$$3^8 : 3^5 = 3^3, \text{ т. е. } 3^8 : 3^5 = 3^{8-5}.$$

Наблюдается закономерность: основания делимого и делителя одинаковы, показатель делимого больше, чем показатель делителя, при этом из показателя делимого вычитается показатель делителя. Первый этап завершен.

На втором этапе предположим, что мы открыли общую закономерность: $a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

Теорема 2. ***Для любого числа $a \neq 0$ и любых натуральных чисел n и k таких, что $n > k$, справедливо равенство***

$$a^n : a^k = a^{n-k}.$$

Можете ли вы сформулировать теорему 2 иначе, используя грамматическое построение «если..., то...»? Видите ли вы, где в этой теореме условие, а где заключение? Ответьте для себя на эти вопросы (а наш ответ будет приведен после доказательства теоремы).

Доказательство. Рассмотрим произведение $a^{n-k} \cdot a^k$. Мы знаем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются (об этом шла речь в теореме 1). Сложив показатели $n - k$ и k, получим $(n - k) + k = n$.

Итак, $a^{n-k} \cdot a^k = a^n$, а это как раз и означает, что $a^n : a^k = a^{n-k}$. Теорема доказана.

А теперь иначе сформулируем теорему 2:

если $a \neq 0$ и n, k — натуральные числа такие, что $n > k$, то справедливо равенство

$$a^n : a^k = a^{n-k}.$$

Условие теоремы: $a \neq 0$; n, k — натуральные числа, $n > k$.
Заключение теоремы: $a^n : a^k = a^{n-k}$.

Второе открытие у нас состоялось. Идем дальше.

Открытие третье

Пример 3. Вычислить: а) $(2^5)^2$; б) $(3^2)^3$.

Решение. а) Имеем

$(2^5)^2 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5+5} = 2^{10} = 1024$ (см. § 12).

б) Имеем

$(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^6 = 729$ (см. § 12).

Ответ: а) 1024; б) 729.

В процессе решения примера мы заметили, что

$$(2^5)^2 = 2^{10}, \text{ т. е. } (2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2};$$
$$(3^2)^3 = 3^6, \text{ т. е. } (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3}.$$

Наблюдается закономерность: в обоих случаях при возведении степени в степень показатели перемножаются. Первый этап завершен.

На втором этапе предположим, что мы открыли общую закономерность: $(a^n)^k = a^{nk}$.

Теорема 3. ***Для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство***

$$(a^n)^k = a^{nk}.$$

Доказательство теоремы (третий этап) мы приводим на с. 83. Если есть желание, попытайтесь доказать ее самостоятельно (или с помощью учителя).

Мы совершили с вами три открытия, которые привели нас к трем серьезным теоремам. Эти теоремы на практике удобнее формулировать в виде трех правил, которые полезно запомнить.

Правило 1. *При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются.*
Правило 2. *При делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя делимого вычитают показатель делителя.*
Правило 3. *При возведении степени в степень показатели перемножаются.*

Сравните эти три правила с формулировками теорем 1, 2, 3. Почувствовали разницу? В теоремах все четко, все оговорено, все предусмотрено, а в правилах ощущается какая-то неполнота, легкость мысли, поэтому они легче запоминаются и воспринимаются; правила похожи на афоризмы. Это тоже одна из особенностей математического языка: наряду с серьезными отточенными формулировками используются и краткие афористичные правила.

Пример 4. Вычислить $\dfrac{\left(2^3 \cdot 2^4\right)^5}{\left(2 \cdot 2^8\right)^3}$.

Решение. 1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (правило 1);

2) $(2^7)^5 = 2^{7 \cdot 5} = 2^{35}$ (правило 3);

3) $2 \cdot 2^8 = 2^{1+8} = 2^9$ (правило 1);

4) $(2^9)^3 = 2^{9 \cdot 3} = 2^{27}$ (правило 3);

5) $2^{35} : 2^{27} = 2^{35-27} = 2^8$ (правило 2);

6) $2^8 = 256$ (см. § 12).

Ответ: 256.

Опытный оратор, выступив с длинной и трудной для слушателей речью, обязательно в конце доклада еще раз выделит самое главное, самое важное. У нас с вами была очень трудная и напряженная работа, давайте же и мы выделим самое главное.

Самое главное — три формулы:

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k};$$
$$a^n : a^k = a^{n-k}, \text{ где } n > k,\ a \neq 0;$$
$$(a^n)^k = a^{nk}.$$

Их можно применять как справа налево, так и слева направо. Например,

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8; \qquad 2^8 = 2^{4+4} = 2^4 \cdot 2^4; \qquad 2^{2+n} = 2^2 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n;$$

$$3^7 : 3^1 = 3^6; \qquad 3^6 = 3^{10-4} = \frac{3^{10}}{3^4}; \qquad 3^{n-4} = \frac{3^n}{3^4} = \frac{3^n}{81};$$

$$(5^3)^4 = 5^{12}; \qquad 5^{12} = (5^6)^2 = (5^2)^6 = (5^4)^3 = (5^3)^4.$$

Замечание. Мы говорили только об умножении и делении степеней с одинаковыми основаниями. А вот об их сложении и вычитании ничего не известно, так что не сочиняйте новых правил. Нельзя, например, заменять сумму $2^4 + 2^3$ на 2^7; в самом деле, посчитайте: $2^4 = 16$; $2^3 = 8$; $16 + 8 = 24$, но это не есть 2^7, поскольку $2^7 = 128$. Нельзя заменять разность $3^5 - 3^4$ на 3^1; действительно, посчитайте: $3^5 = 243$; $3^4 = 81$; $243 - 81 = 162$, но это не есть 3^1, так как $3^1 = 3$. Будьте внимательны!

Теперь, как было обещано выше, докажем теорему 3. Имеем

$$(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{k \text{ множителей}} =$$
$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot \ldots \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k \text{ групп по } n \text{ множителей в каждой}} =$$
$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nk \text{ множителей}} = a^{nk}.$$

Пример 5. Расположить в порядке возрастания числа 2^{45}, 4^{22}, 8^{14}, 16^{12}.

Решение. Имеем $4^{22} = (2^2)^{22} = 2^{44}$; $8^{14} = (2^3)^{14} = 2^{42}$; $16^{12} = (2^4)^{12} = 2^{48}$.

Ясно, что $2^{42} < 2^{44} < 2^{45} < 2^{48}$. Значит, в порядке возрастания заданные числа следует расположить так: 8^{14}, 4^{22}, 2^{45}, 16^{12}. ◼

Пример 6. Сравнить числа $a = 5^{88}$, $b = 3^{132}$.

Решение. $a = 5^{88} = (5^2)^{44} = 25^{44}$; $b = 3^{132} = (3^3)^{44} = 27^{44}$. Ясно, что $25^{44} < 27^{44}$, т. е. $a < b$. ◼

Пример 7. а) Найти последнюю цифру числа 38^{200};

б) доказать, что $(7^{48} - 3^{72}) \vdots 10$ (символ $\vdots$ означает «делится на»).

Решение. а) $38^{200} = (38^4)^{50}$; число 38^2 оканчивается цифрой 4, а число 38^4, т. е. $(38^2)^2$, — цифрой 6. Осталось лишь заметить, что любая степень числа, оканчивающегося на 6, также имеет своей последней цифрой цифру 6 (смотрите: $6^1 = 6$, $6^2 = 36$, $6^3 = 216$ и т. д.).

б) $7^{48} = ((7^2)^2)^{12}$; $7^2 = 49$, 49^2 оканчивается цифрой 1. Любая степень числа, оканчивающегося на 1, также имеет своей последней цифрой цифру 1.

Далее, $3^{72} = (3^4)^{18}$; $3^4 = 81$; 81^{18} оканчивается цифрой 1.

Итак, последние цифры чисел 7^{48} и 3^{72} одинаковы, значит, разность этих чисел оканчивается цифрой 0, а потому делится на 10. ◼

Пример 8. Без использования знаков арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) записать наибольшее возможное число: а) тремя единицами; б) тремя двойками; в) тремя тройками; г) тремя четверками; д) четырьмя единицами; е) четырьмя двойками.

Решение. а) Выпишем возможные варианты записи: 111, 11^1, 1^{11}, 1^{1^1}. Наибольшим является число 111.

б) Выпишем возможные варианты записи: 222, 22^2, 2^{22}, 2^{2^2}. Наибольшим является число 2^{22}.

в) Выпишем возможные варианты записи: 333, 33^3, 3^{33}, 3^{3^3}. Наибольшим является либо 33^3, либо 3^{33}. Но смотрите: $33^3 = 33 \cdot 33 \cdot 33 < 81 \cdot 81 \cdot 81 = 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 3^{12} < 3^{33}$. Значит, наибольшим является число 3^{33}.

г) Выпишем возможные варианты записи: 444, 44^4, 4^{44}, 4^{4^4}. Ясно, что 444 — самое маленькое из этих четырех чисел, а $4^{44} < 4^{4^4} = 4^{256}$. Значит, осталось сравнить числа 44^4 и 4^{4^4}. Сделаем это: $44^4 = 44 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 44 < 64 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 64 = 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 = 4^{12} < 4^{256}$. Значит, наибольшим является число 4^{4^4}.

д) Выпишем возможные варианты записи: 1111, 111^1, 11^{11}, 11^{1^1}, 1^{111}, 1^{11^1}, $1^{1^{11}}$, $1^{1^{1^1}}$.

Наибольшим является число 11^{11}.

е) Выпишем возможные варианты записи: 2222, 222^2, 22^{22}, 22^{2^2}, 2^{222}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$.

Наибольшим может быть либо 22^{22} либо $2^{2^{22}}$. Сравним эти числа: $22^{22} < 32^{32} = (2^5)^{32} = 2^{160} < 2^{2^{22}}$. Итак, наибольшим является число $2^{2^{22}}$. ◼

§ 14. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В предыдущем параграфе мы рассматривали умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями. Оказывается, можно умножать и делить степени и с *разными* основаниями, если только показатели у этих степеней одинаковы.

Пример 1. Вычислить $2^4 \cdot 5^4$.

Решение. Конечно, можно по таблице из § 12 установить, что $2^4 = 16$, $5^4 = 625$, а затем умножить 16 на 625. Однако эффективнее следующее рассуждение:

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$$
$$= (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000. \quad ◼$$

В процессе решения мы получили числовое равенство

$$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4.$$

Точно так же можно доказать, что $a^3b^3 = (ab)^3$.

В самом деле,

$$a^3b^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = ab \cdot ab \cdot ab = (ab)^3.$$

Вообще имеет место равенство

$$a^nb^n = (ab)^n.$$

Приведем «молчаливое» доказательство этого утверждения. Попробуйте его «озвучить» и прокомментировать:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множителей}} = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b =$$
$$= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ множителей}} = (ab)^n.$$

Пример 2. Вычислить $\frac{12^6}{4^6}$.

Решение. Конечно, можно производить вычисления «в лоб», т. е. найти 12^6, затем 4^6, затем первое число разделить на второе. Но лучше рассуждать так:

$$\frac{12^6}{4^6} = \frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} =$$

$$= \left(\frac{12}{4}\right)^6 = 3^6 = 729.$$

В процессе решения мы получили числовое равенство $\frac{12^6}{4^6} = \left(\frac{12}{4}\right)^6$.

Точно так же можно доказать, что $\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ и $\frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$. Вообще имеет место равенство

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ если } b \neq 0 \text{ (докажите!)}.$$

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered} a^n b^n = (ab)^n; \\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \; b \neq 0. \end{gathered}}$$

Обе эти формулы применяют как слева направо, так и справа налево. Их также можно оформить в виде правил действий над степенями, тогда к трем правилам из § 13 добавятся еще два.

Правило 4. *Чтобы перемножить степени с одинаковыми показателями, достаточно перемножить основания, а показатель степени оставить неизменным.*

Правило 5. *Чтобы разделить друг на друга степени с одинаковыми показателями, достаточно разделить одно основание на другое, а показатель степени оставить неизменным.*

Пример 3. Упростить выражение $\left(\frac{2^2 a^3 b^4}{3}\right)^5$.

Решение. Имеем

$$\left(\frac{2^2 a^3 b^4}{3}\right)^5 = \frac{\left(2^2 a^3 b^4\right)^5}{3^5} \text{ (правило 5);}$$

$$(2^2a^3b^4)^5 = (2^2)^5(a^3)^5(b^4)^5 \text{ (правило 4).}$$

Но

$$(2^2)^5 = 2^{10} = 1024; \ (a^3)^5 = a^{15}; \ (b^4)^5 = b^{20} \text{ (правило 3).}$$

Значит, $(2^2a^3b^4)^5 = 1024a^{15}b^{20}$. Так как $3^5 = 243$, то окончательно получаем $\left(\frac{2^2a^3b^4}{3}\right)^5 = \frac{1024a^{15}b^{20}}{243}$. ◼

Пример 4. Расположить в порядке убывания числа: $a = 27^{37} \cdot 25^{28}$, $b = 75^{28} \cdot 9^{41}$, $c = 45^{56}$.

Решение. $a = 27^{37} \cdot 25^{28} = (3^3)^{37} \cdot (5^2)^{28} = 3^{111} \cdot 5^{56}$;

$b = 75^{28} \cdot 9^{41} = (3 \cdot 5^2)^{28} \cdot (3^2)^{41} = 3^{28} \cdot 5^{56} \cdot 3^{82} = 3^{110} \cdot 5^{56}$;

$c = 45^{56} = (3^2 \cdot 5)^{56} = 3^{112} \cdot 5^{56}$.

Итак, $a = 3^{111} \cdot 5^{56}$, $b = 3^{110} \cdot 5^{56}$, $c = 3^{112} \cdot 5^{56}$, значит, $c > a > b$. ◼

В заключение — одно предостережение. Мы знаем, что

если *основания* одинаковы, то	если *показатели* одинаковы, то
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$; $a^n : a^k = a^{n-k}$;	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$; $a^n : b^n = (a : b)^n$.

Если же умножение и деление выполняется над степенями с различными основаниями и разными показателями, то будьте внимательны. Так, $3^5 \cdot 2^4$ можно вычислить «в лоб»: сначала вычислить 3^5, затем 2^4 и, наконец, выполнить умножение. А можно так: $3 \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 3 \cdot (3 \cdot 2)^4 = 3 \cdot 6^4$.

§15. СТЕПЕНЬ С НУЛЕВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В предыдущих параграфах мы с вами научились вычислять значение степени с любым *натуральным* показателем. Например:

$$0{,}2^1 = 0{,}2; \qquad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9; \qquad 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64;$$

$$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1; \qquad (-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$

$$0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ и т. д.}$$

В дальнейшем вы узнаете, что показателем степени может быть не только натуральное число. Но это произойдет позднее, в старших классах, а пока мы сделаем лишь один скромный шаг в этом направлении: введем понятие *степени с нулевым показателем*, т. е. выясним, какой смысл придается в математике символу a^0. А ведь этот символ «напрашивается». Смотрите: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$, $3^8 : 3 = 3^{8-1} = 3^7$. Почему бы не написать $5^4 : 5^4 = 5^0$?

До сих пор все было хорошо: a^3 — это значит, что число a нужно умножить само на себя 3 раза, a^{10} — это значит, что число a нужно умножить само на себя 10 раз, a^1 — это просто a. А что такое a^0? Ведь нельзя же, в самом деле, умножить число a само на себя 0 раз!

Хотелось бы, чтобы для a^0 выполнялись привычные правила, например, чтобы при вычислении $a^3 \cdot a^0$ показатели складывались: $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0}$. Но $3 + 0 = 3$. Что же получается? Получается, что $a^3 \cdot a^0 = a^3$. Значит, $a^0 = a^3 : a^3 = 1$ (при этом нужно ввести естественное ограничение — $a \neq 0$). Проведенное рассуждение как-то мотивирует следующее определение.

Определение. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Например, $5{,}7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $(2^n)^0 = 1$ и т. д. Однако учтите, что символ 0^0 считается в математике не имеющим смысла.

ГЛАВА

4 ОДНОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОДНОЧЛЕНАМИ

§16. ПОНЯТИЕ ОДНОЧЛЕНА. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ОДНОЧЛЕНА

Определение. **Одночленом** называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел и переменных, возведенных в степень с натуральными показателями.

Примеры одночленов:

$$2ab;\quad \frac{1}{3}a^2xy^3;\quad (-2)xy^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4x^3ab^4;\quad 1{,}7a^nb^n\ \ (n\in N).$$

Одночленами являются, в частности, также все числа, любые переменные, степени переменных. Например, одночленами являются:

$$0;\ \ 2;\ \ -0{,}6;\ \ x;\ \ a;\ \ b;\ \ x^2;\ \ a^3;\ \ b^n\ \ (n\in N).$$

Теперь приведем примеры алгебраических выражений, не являющихся одночленами:

$$a+b;\quad 2x^2-3y^3+5;\quad \frac{a^2}{b}.$$

А как вы считаете: выражение $\frac{2ab}{3}$ — одночлен или нет? Ведь оно по форме похоже на выражение $\frac{a^2}{b}$, которое фигурирует у нас в числе выражений, не являющихся одночленами, и содержит в своей записи черту дроби. Тем не менее $\frac{2ab}{3}$ — одночлен: $\frac{2ab}{3}=\frac{2}{3}ab.$

Вот еще два примера, построенных на контрасте: $\frac{a}{3}$ и $\frac{3}{a}$. Как вы считаете, какое из этих выражений одночлен, а какое нет?

А теперь проверьте себя: $\frac{a}{3}$ — одночлен, его можно записать в виде $\frac{1}{3}a$; выражение же $\frac{3}{a}$ не является одночленом. Термины в математике надо употреблять правильно.

Рассмотрим одночлен $3a \cdot \frac{2}{3}a^2bc$. Глядя на это выражение, математик обычно рассуждает так: «От перемены мест множителей произведение не изменится, запишу-ка я это выражение в более удобном виде:

$$\left(3 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot (a \cdot a^2)bc.$$

Тогда, — думает математик, — я получу $2a^3bc$, а эта запись приятнее той, что была, хотя бы потому, что короче. Кроме того, в ней нет того сумбура, какой был сначала: первый множитель — число, второй — переменная a, затем снова число, потом опять переменная a, но уже в квадрате и т. д.».

Стремящийся к четкости, краткости и порядку математик на самом деле привел одночлен *к стандартному виду.*

Вообще, *чтобы привести одночлен к стандартному виду, нужно*:

1) ***перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место;***

2) ***перемножить все имеющиеся степени с одним буквенным основанием;***

3) ***перемножить все имеющиеся степени с другим буквенным основанием и т. д.***

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом одночлена.**

Любой одночлен можно привести к стандартному виду.

Пример. Привести одночлен к стандартному виду и назвать коэффициент одночлена:

а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5$;

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c$;

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz$;

г) $\frac{3ab}{10}$.

Решение. а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5 = 3 \cdot (-2)x^2xyy^2zz^5 = -6x^3y^3z^6$. Коэффициент одночлена равен -6.

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c = 4 \cdot \frac{1}{4}ab^2(c \cdot c) = 1 \cdot ab^2c^2 = ab^2c^2$.

Коэффициент одночлена равен 1, такой коэффициент обычно не пишут, но подразумевают.

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz = (-2) \cdot \frac{1}{2}aax^2x^5y^3yz^nz = -a^2x^7y^4z^{n+1}$.

Коэффициент одночлена равен -1.

г) А это, как говорят, «маленькая провокация»: одночлен не надо приводить к стандартному виду, он и так записан в стандартном виде: $\frac{3}{10}ab$. Коэффициент одночлена равен 0,3. ◼

§ 17. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ

В этой главе мы изучаем новые для вас математические объекты — одночлены. Образно говоря, если для математического языка числа, переменные и степени переменных являются буквами, то одночлены — слогами. Когда в детстве вы учились читать, то сначала изучали буквы, затем читали слоги и только потом целиком произносили написанное слово; буквы, слоги, слова, предложения — этапы изучения языка. И тут уже не важно, нравятся нам одночлены как самостоятельный объект изучения или нет, ничего не поделаешь — без уверенного владения ими нам не обойтись, если мы хотим свободно владеть математическим языком.

В § 16 мы ввели понятия одночлена, стандартного вида одночлена. Значит, надо научиться работать с одночленами, например, выполнять над ними арифметические операции. При этом сразу договоримся, что будем рассматривать только одночлены, записанные в стандартном виде.

Определение. Два одночлена, состоящие из одних и тех же переменных, каждая из которых входит в оба одночлена в одинаковых степенях (т. е. с равными показателями степеней), называют **подобными одночленами**.

Примеры подобных одночленов:

$$2a \quad \text{и} \quad 5a, \qquad 3ab^2c \quad \text{и} \quad -\frac{2}{7}ab^2c, \qquad x^n \quad \text{и} \quad 5x^n.$$

Как видите, подобные одночлены отличаются друг от друга только коэффициентами (впрочем, и коэффициенты могут быть равны, например, $7ab$ и $7ab$ — подобные одночлены).

А вот примеры неподобных одночленов:

$$5a \quad \text{и} \quad 3a^2, \qquad 2x \quad \text{и} \quad 7y, \qquad 3a^2b^2 \quad \text{и} \quad 6a^2b.$$

Слово «подобные» имеет примерно тот же смысл, что в обыденной речи слово «похожие». Согласитесь, что одночлены $5a^2b$ и $23a^2b$ похожи друг на друга (подобные одночлены), тогда как одночлены $5a^2b$ и $23ab^3c^2$ не похожи друг на друга (неподобные одночлены).

Рассмотрим сумму двух подобных одночленов $5a^2b + 23a^2b$. Воспользуемся *методом введения новой переменной*: положим $a^2b = c$. Тогда сумму $5a^2b + 23a^2b$ можно переписать в виде $5c + 23c$. Эта сумма равна $28c$. Итак, $5a^2b + 23a^2b = 28a^2b$.

В чем смысл этого преобразования? Смысл в том, что равенство $5a^2b + 23a^2b = 28a^2b$ является верным при подстановке любых значений переменных.

Нам удалось сложить подобные одночлены; оказалось, что это очень просто: достаточно сложить их коэффициенты, а буквенную часть оставить неизменной. Так же обстоит дело и с вычитанием подобных одночленов. Например,

$$7abc^3 - 9abc^3 = (7 - 9)abc^3 = -2abc^3.$$

А как быть, если одночлены неподобны: можно ли их складывать, вычитать? Увы, пока нельзя! Мы вернемся к этому вопросу позднее, в главе 5.

Сейчас мы сформулируем алгоритм сложения и вычитания одночленов (впрочем, обычно оставляют только термин «сложение», а знак минус относят к коэффициенту).

Алгоритм сложения одночленов

1. Привести все одночлены к стандартному виду.
2. Убедиться, что все одночлены подобны; если же они неподобны, то алгоритм далее не применяется.
3. Найти сумму коэффициентов подобных одночленов.
4. Записать ответ: одночлен, подобный данным, с коэффициентом, полученным на третьем шаге.

Пример 1. Упростить выражение

$$2a^2b - 7a \cdot 0{,}5ba + 3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a).$$

Решение. Речь идет о сложении одночленов, значит, будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1) Первый одночлен уже имеет стандартный вид.

Для второго одночлена имеем

$$7a \cdot 0{,}5ba = (7 \cdot 0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = 3{,}5a^2b,$$

это стандартный вид.

Приведем к стандартному виду третий одночлен:

$$3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a) = 3 \cdot 2 \cdot (-0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = -3a^2b.$$

2) Получили три одночлена: $2a^2b$, $3{,}5a^2b$, $-3a^2b$. Они подобны, поэтому с ними можно производить дальнейшие действия, т. е. переходить к третьему шагу алгоритма.

3) Найдем сумму коэффициентов трех полученных одночленов: $2 - 3{,}5 - 3 = -4{,}5$.

4) Запишем ответ: $-4{,}5a^2b$. ■

Пример 2. Представить одночлен $27ab^2$ в виде суммы одночленов.

Решение. Здесь в отличие от рассмотренных ранее примеров решение не единственное (а разве в жизни во всех случаях вы можете найти единственное решение? Иногда решений несколько, а иногда решения и вовсе нет). Можно написать

$$27ab^2 = 20ab^2 + 7ab^2,$$

и это будет верно. Можно написать

$$27ab^2 = 15ab^2 + 12ab^2,$$

что также будет верно. Можно написать так

$$27ab^2 = ab^2 + 26ab^2$$

и даже так

$$27ab^2 = 100ab^2 - 73ab^2.$$

Можно указать еще ряд решений. Главное, чтобы сумма коэффициентов складываемых подобных одночленов была равна 27.

Кстати, не обязательно составлять сумму двух одночленов (в условии ведь это не оговорено). Значит, можно предложить, например, такое решение: $27ab^2 = 20ab^2 + 4ab^2 + 3ab^2$.

Или такое: $27ab^2 = 2ab^2 + 8ab^2 + 22ab^2 - 5ab^2$.

Попробуйте сами придумать еще несколько решений примера 2.

Мы заканчиваем изучение темы «Сложение и вычитание одночленов». Но вы, наверное, ощущаете какую-то недоговоренность. Мало ли с какими одночленами нам придется иметь дело в дальнейшем, а вдруг среди них будут неподобные? Что делать, если, составляя математическую модель реальной ситуации, мы пришли к выражению, представляющему собой сумму неподобных одночленов, например $2ab + 3a - 5b$? Математики нашли выход из положения: такую сумму назвали *многочленом*, т. е. ввели новое понятие, и научились производить операции над многочленами. Но об этом речь впереди, в главе 5.

§18. УМНОЖЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ. ВОЗВЕДЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА В НАТУРАЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ

В § 17 мы рассматривали сложение и вычитание одночленов. Оказалось, что эти операции применимы только к подобным одночленам. А как обстоит дело с умножением одночленов? Очень просто: если между двумя одночленами поставить знак умножения, то снова получится одночлен; остается лишь привести его к стандартному виду (фактически это мы уже делали в примере из § 16). Не вызывает затруднений и возведение одночлена в степень. При этом используются правила действий со степенями (фактически в примере 3 из § 14 мы уже возводили одночлен в степень).

Пример 1. Найти произведение трех одночленов: $2a^2bc^5$, $\frac{3}{4}a^3cx^3$ и a^2b.

Решение.

$$(2a^2bc^5)\cdot\left(\frac{3}{4}a^3cx^3\right)\cdot(a^2b)=\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot(a^2a^3a^2)\cdot(b\cdot b)\cdot(c^5c)x^3=$$
$$=1{,}5a^7b^2c^6x^3.$$

Пример 2. Упростить выражение $(-2a^2bc^3)^5$ (т. е. представить его в виде одночлена).

Решение. $(-2a^2bc^3)^5=-2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5=-32a^{10}b^5c^{15}$.

Мы использовали, во-первых, тот факт, что при возведении произведения в степень надо возвести в эту степень каждый множитель. Поэтому у нас появилась запись $2^5(a^2)^5b^5(c^3)^5$.

Во-вторых, мы воспользовались тем, что $(-2)^5=-2^5$.

В-третьих, мы использовали тот факт, что при возведении степени в степень показатели перемножаются. Поэтому вместо $(a^2)^5$ мы написали a^{10}, а вместо $(c^3)^5$ мы написали c^{15}.

Пример 3. Представить одночлен $36a^2b^4c^5$ в виде произведения одночленов.

Решение. Здесь, как и в примере 2 из § 17, решение не единственное. Вот несколько вариантов решения:

$$36a^2b^4c^5=(18a^2)\cdot(2b^4c^5);$$
$$36a^2b^4c^5=(36abc)\cdot(ab^3c^4);$$
$$36a^2b^4c^5=(-3b^4)\cdot(-12a^2c^5);$$
$$36a^2b^4c^5=(2a^2)\cdot(3bc)\cdot(6b^3c^4).$$

Попробуйте сами придумать еще несколько решений примера 3.

Пример 4. Представить данный одночлен A в виде B^n, где B — одночлен, если:

а) $A=32a^5,\ n=5$;
б) $A=a^3b^6,\ n=3$;
в) $A=49a^2b^4c^6,\ n=2$;
г) $A=-27a^3b^9,\ n=3$;
д) $A=16a^8b^5,\ n=4$.

Решение.

а) $32a^5=2^5a^5=(2a)^5$. Значит, $A=B^5$, где $B=2a$.

б) $a^3b^6=a^3(b^2)^3=(ab^2)^3$. Следовательно, $A=B^3$, где $B=ab^2$.

в) Так как $49a^2b^4c^6=7^2a^2(b^2)^2(c^3)^2=(7ab^2c^3)^2$, то $A=B^2$, где $B=7ab^2c^3$.

г) Поскольку $-27a^3b^9 = (-3)^3a^3(b^3)^3 = (-3ab^3)^3$, заключаем, что $A = B^3$, где $B = -3ab^3$.

д) С одночленом $16a^8b^5$ у нас ничего не получится. Почему? Давайте рассуждать. Если бы не было множителя b^5, то задача решалась бы без труда: $16a^8 = 2^4(a^2)^4 = (2a^2)^4$; если бы вместо b^5 был множитель, например, b^{12}, то мы решили бы задачу так:

$$16a^8b^{12} = 2^4(a^2)^4(b^3)^4 = (2a^2b^3)^4.$$

Однако множитель b^5 нельзя представить в виде $(b^k)^4$, где k — натуральное число; этот множитель, как говорится, «портит все дело». Значит, одночлен $16a^8b^5$ нельзя представить в виде B^4, где B — некоторый одночлен. ◼

Пример показывает, что в математике далеко не все получается, не любая задача имеет решение (как и в реальной жизни).

Кстати, если математику предлагают задание, заведомо невыполнимое (например, разделить 5 на 0 или найти точку пересечения параллельных прямых), то он говорит: «*Задача поставлена некорректно*» или «Это — *некорректная задача*». Тот, кто предложил некорректную задачу, должен извиниться. Вот и авторы извиняются за пример 4д). Хотя согласитесь, что он был дан не без пользы.

Раз уж мы заговорили о корректных и некорректных задачах, приведем еще несколько примеров и тех и других, а вы попытайтесь объяснить, почему задача корректна или некорректна.

Корректные задачи:

1. Упростить $2ab^2 \cdot (3ab)^3$.
2. Упростить $7ab + 8ab + ab$.
3. Вычислить $\dfrac{2{,}7 + 3{,}8}{2 - 6}$.
4. Представить одночлен $13a^4b^5$ в виде суммы одночленов.
5. Представить одночлен $48x^3y^5z$ в виде произведения одночленов.
6. Представить одночлен $A = 25a^4$ в виде квадрата некоторого одночлена B.

Некорректные задачи:

1. Сложить одночлены $3ab^2$, $5ab^2$ и $7a^2b$.
2. Вычислить $\dfrac{2{,}7 + 3{,}8}{6 - 6}$.

3. Представить одночлен A в виде квадрата некоторого одночлена B, если $A = -25a^4$.

4. Найти точку пересечения прямых $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ (см. пример 1б) в § 10).

§19. ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Что такое одночлен, мы знаем; как одночлены складывать, вычитать, перемножать и даже возводить в степень — обсудили. Но ведь имеется еще одна арифметическая операция — деление, операция, обратная умножению. Можно ли быть уверенным в том, что операция деления одночлена на одночлен всегда выполнима — в том смысле, что в частном получится одночлен? Вот об этом и поговорим.

Пример 1. Опираясь на свойства арифметических действий, попытаемся выполнить деление одночленов:

а) $10a : 2$; в) $36a^3b^5 : (4ab^2)$; д) $4x^3 : (2xy)$;

б) $18ab : (3a)$; г) $\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z)$; е) $a^2 : a^5$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что если произведение двух чисел делят на третье число, то можно разделить на это число один из множителей и полученное частное умножить на другой множитель. (Вспомнили? Например, $(12 \cdot 4) : 3 = (12 : 3) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$.) Имеем

$$10a : 2 = (10 : 2) \cdot a = 5a.$$

б) Рассуждая как в примере а), получаем

$$18ab : (3a) = (18 : 3) \cdot (a : a)b = 6 \cdot 1 \cdot b = 6b.$$

в) $36a^3b^5 : (4ab^2) = (36 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b^5 : b^2) = 9a^{3-1} \cdot b^{5-2} = 9a^2b^3$.

Иногда удобнее вместо знака деления (:) использовать черту дроби. Вот как тогда будет выглядеть решение примера в):

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

г) Здесь мы используем комбинированную запись решения, т. е. и знак деления, и черту дроби:

$$\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z) = \left(\frac{4}{7} : (-2)\right) \cdot \frac{x^3y^2z}{x^3y^2z} =$$

$$= -\frac{4}{7 \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{y^2}{y^2} \cdot \frac{z}{z} = -\frac{2}{7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{7}.$$

Здесь все верно, но, как говорят математики, *нерационально*, поскольку сразу было ясно, что $x^3y^2z : x^3y^2z = 1$ (фактически выражение делится само на себя).

д) $4x^3 : (2xy) = \dfrac{4x^3}{2xy} = \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{x^3}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = 2x^2 \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x^2}{y}.$

Это не одночлен, значит, разделить $4x^3$ на $2xy$ нельзя (в том смысле, чтобы в частном получился одночлен).

е) И эта задача невыполнима, так как мы пока не умеем делить при одном и том же основании степень с меньшим показателем на степень с бо́льшим показателем. ◼

Мы рассмотрели шесть примеров, из них четыре оказались корректными, а два (последние) — некорректными (этот термин мы ввели в § 18).

Проанализируем теперь решенные примеры и попробуем с помощью этого анализа выяснить, когда можно разделить одночлен на одночлен так, чтобы в частном снова получился одночлен.

Естественно, удобнее, чтобы оба одночлена (и делимое, и делитель) были записаны в стандартном виде (впрочем, об этом мы условились еще в § 17) с отличными от нуля коэффициентами.

Первое наблюдение. В делителе не должно быть переменных, которых нет в делимом (по этой причине мы «споткнулись» в примере 1д)).

Второе наблюдение. Если в делимом и делителе есть одна и та же переменная, причем в делимом она возводится в степень n, а в делителе — в степень k, то число k не должно быть больше числа n (поэтому мы «споткнулись» в примере 1е)).

Третье наблюдение. Коэффициенты делимого и делителя могут быть любыми, за исключением делителя, равного нулю (поскольку мы умеем делить друг на друга любые числа, кроме, разумеется, деления на нуль).

Значит, если вам предложат разделить одночлен на одночлен, то сначала убедитесь, что задача корректна, т. е. проведите указанные наблюдения и убедитесь, что все в порядке. В случае, когда задача корректна, решайте ее по образцу примера 1.

Пример 2. Упростить $48a^4b^5c^6d : (36ab^3c^6)$.

Решение. 1) Оба одночлена (и делимое, и делитель) записаны в стандартном виде.

2) В делимом фигурируют переменные a, b, c, d, в делителе a, b, c. Лишних переменных в делителе нет.

3) В делителе нет степеней бóльших, чем у одноименных переменных в делимом.

Вывод: задача корректна, будем ее решать.

Имеем

$$\frac{48a^4b^5c^6d}{36ab^3c^6} = \frac{48}{36} \cdot \frac{a^4}{a} \cdot \frac{b^5}{b^3} \cdot \frac{c^6}{c^6} \cdot d = \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot 1 \cdot d = \frac{4}{3}a^3b^2d.$$

Вы чувствуете, что в § 19, как и в § 17, есть недоговоренность? А что же все-таки делать, если одночлен на одночлен не разделился? Разве мы застрахованы от такой ситуации? Поэтому математики ввели новый объект — *алгебраическую дробь*. Вспомните, ведь и обыкновенные дроби появились из-за того, что во множестве натуральных чисел деление выполнимо не всегда; например, 14 делится на 7, а 13 не делится на 7. Как записывается ответ во втором случае, когда надо все-таки разделить 13 на 7? Он записывается в виде обыкновенной дроби $\frac{13}{7}$. Алгебраическая дробь встретилась нам в примере 1д) — это было выражение $\frac{2x^2}{y}$. И конечно, математики научились оперировать этими новыми объектами — алгебраическими дробями. Мы будем изучать их в 8-м классе, а встретимся еще раз в § 32.

ГЛАВА

5 МНОГОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

§20. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В главе 4 мы уже отмечали, что не любые одночлены можно складывать и вычитать, а только подобные; также отмечали и то, что реальная задача может привести к такой математической модели, в которой будет содержаться сумма неподобных одночленов. Для изучения таких сумм в математике введено понятие многочлена.

Определение. **Многочленом** называют сумму одночленов.

Примеры многочленов:

$2a + b$; $\quad 5a^2b - 3ab^2 - 3ab^2 + 7c$; $\quad x^5 + x^4 + x^2 - 2$.

Разумеется, существуют алгебраические выражения, не являющиеся многочленами. Например, $\frac{x}{y}$, $2x^2 + 5y - \frac{2}{y}$.

Слагаемые (одночлены), из которых состоит многочлен, называют **членами многочлена**: если их два, то говорят, что дан **двучлен** (например, $2a + b$ — двучлен), если их три, то говорят, что дан **трехчлен** (например, $5a^2 - 2cb^2 + 7c$ — трехчлен). С этой точки зрения становится понятнее термин «одночлен» и то, что одночлен обычно считают частным случаем многочлена.

Рассмотрим многочлен

$$2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2.$$

То, что это — многочлен, сомнению не подлежит (поскольку записана сумма одночленов), но нравится ли вам такая запись? Наверное, нет. Почему?

Во-первых, одночлен $2ab^2 \cdot 3a^2b$ не записан в стандартном виде, а мы знаем, что стандартный вид — наиболее удобная запись одночлена. Приведя его к стандартному виду, получим $6a^3b^3$.

Аналогично надо привести к стандартному виду еще один член многочлена, а именно $-\frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a$. Получим $-2a^3b^3$.

Теперь запись данного многочлена принимает более приятный вид $6a^3b^3 - 5a - 7a + 3b^2 - 2a^3b^3 - 2b^2$.

Во-вторых, поскольку от перемены мест слагаемых сумма не меняется, подобные одночлены можно расположить рядом, а затем сложить.

Получим

$$(6a^3b^3 - 2a^3b^3) + (-5a - 7a) + (3b^2 - 2b^2) = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Правда, обычно подобные одночлены в многочлене не переставляют, их одинаково подчеркивают, а потом складывают:

$$\underline{6a^3b^3} - \underline{\underline{5a}} - \underline{\underline{7a}} + \underline{\underline{\underline{3b^2}}} - \underline{2a^3b^3} - \underline{\underline{\underline{2b^2}}} = 4a^3b^3 - 12a + b^2.$$

Эту процедуру называют **приведением подобных членов.**

Если в многочлене все члены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то говорят, что многочлен приведен к **стандартному виду** (или записан в стандартном виде).

Теперь вы понимаете, почему запись $4a^3b^3 - 12a + b^2$ предпочтительнее первоначальной записи

$$2ab^2 \cdot 3a^2b - 5a - 7a + 3b^2 - \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot 6a - 2b^2?$$

Дело в том, что первоначальная запись — не стандартный вид многочлена, а $4a^3b^3 - 12a + b^2$ — стандартный вид.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду. Условимся в дальнейшем всегда с этого начинать — так удобнее производить действия с многочленами.

Обычно многочлен обозначают буквой p или P — с этой буквы начинается греческое слово *polys* («многий», «многочисленный»; многочлены в математике называют также *полиномами*).

В обозначение включают и переменные, из которых состоят члены многочлена. Например, многочлен $2x^2 - 5x + 3$ обозначают $p(x)$ — читают: «пэ от икс»; многочлен $2x^2 + 3xy - y^4$ обозначают $p(x; y)$ — читают: «пэ от икс, игрек» и т. д.

Пример. Дан многочлен

$p(x; y) = 2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2$.

а) Записать его в стандартном виде;

б) вычислить: $p(1; 2)$; $p(-1; 1)$; $p(0; 1)$.

Решение.

$$\text{а) } 2x \cdot 3xy^2 - 7x^3 \cdot 2x - 3x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - 2xy \cdot 4y^2 =$$
$$= \underline{6x^2y^2} - \underline{\underline{14x^4}} - \underline{\underline{3x^4}} + 2y^4 + \underline{5x^2y^2} - 8xy^3 =$$
$$= 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3,$$

это стандартный вид многочлена.

б) Запись $p(1; 2)$ означает, что нужно найти значение многочлена $p(x; y)$ при $x = 1$, $y = 2$. Вычисления будем производить для многочлена, записанного в стандартном виде:

$$p(x; y) = 11x^2y^2 - 17x^4 + 2y^4 - 8xy^3.$$

Имеем

$$p(1; 2) = 11 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 17 \cdot 1^4 + 2 \cdot 2^4 - 8 \cdot 1 \cdot 2^3 =$$
$$= 44 - 17 + 32 - 64 = -5.$$

Итак, $p(1; 2) = -5$.

Аналогично

$$p(-1; 1) = 11 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot (-1) \cdot 1^3 =$$
$$= 11 - 17 + 2 + 8 = 4,$$

т. е. $p(-1; 1) = 4$.

Наконец,

$$p(0; 1) = 11 \cdot 0^2 \cdot 1^2 - 17 \cdot 0^4 + 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot 0 \cdot 1^3 =$$
$$= 0 - 0 + 2 - 0 = 2.$$

Итак, $p(0; 1) = 2$. ◼

§21. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

В предыдущем параграфе мы ввели понятия многочлена и стандартного вида многочлена. Вы уже, наверное, начинаете привыкать к тому, что, введя новое понятие, надо учиться работать с ним. В частности, будем учиться выполнять арифметические операции над многочленами.

Начинаем со сложения и вычитания. Это очень простые операции: чтобы сложить несколько многочленов, их записывают в скобках со знаком «+» между скобками, раскрывают скобки и приводят подобные члены. При вычитании одного многочлена из другого их записывают в скобках со знаком «−» перед вычитаемым, раскрывают скобки и приводят подобные члены.

Пример 1. Сложить многочлены:

а) $p_1(x) = 2x^2 + 3x - 8$ и $p_2(x) = 5x + 2$;

б) $p_1(a; b) = a^2 + 2ab - b^2$, $p_2(a; b) = 2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5$, $p_3(a; b) = a^2 - ab - b^2 - 4$.

Решение. а) Обозначим сумму многочленов через $p(x)$. Тогда

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) =$$
$$= (2x^2 + 3x - 8) + (5x + 2) = 2x^2 + 3x - 8 + 5x + 2 =$$
$$= 2x^2 + (3x + 5x) + (-8 + 2) = 2x^2 + 8x - 6.$$

б) Обозначим сумму многочленов через $p(a; b)$. Тогда

$$p(a; b) = p_1(a; b) + p_2(a; b) + p_3(a; b) =$$
$$= (a^2 + 2ab - b^2) + (2a^3 - a^2 + 3ab - b^2 + 5) + (a^2 - ab - b^2 - 4) =$$
$$= \underline{a^2} + \underline{\underline{2ab}} - \underline{\underline{\underline{b^2}}} + 2a^3 - \underline{a^2} + \underline{\underline{3ab}} - \underline{\underline{\underline{b^2}}} + \underset{\sim}{5} + \underline{a^2} - \underline{\underline{ab}} - \underline{\underline{\underline{b^2}}} - \underset{\sim}{4} =$$
$$= a^2 + 4ab - 3b^2 + 2a^3 + 1.$$

Пример 2. Найти разность многочленов

$$p_1(x; y) = x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5$$

и

$$p_2(x; y) = x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7.$$

Решение. Обозначим разность многочленов через $p(x; y)$. Тогда

$$p(x; y) = p_1(x; y) - p_2(x; y) =$$
$$= (x^3 + y^3 + 2x + 3y + 5) - (x^3 - y^3 - 5x + 3y - 7) =$$
$$= \underline{x^3} + \underline{\underline{y^3}} + 2x + \underline{\underline{\underline{3y}}} + \underset{\sim}{5} - \underline{x^3} + \underline{\underline{y^3}} + 5x - \underline{\underline{\underline{3y}}} + \underset{\sim}{7} = 2y^3 + 7x + 12.$$

Обратите внимание: $x^3 - x^3 = 0$ и $3y - 3y = 0$. Поэтому «исчезли» одночлен x^3 и одночлен $3y$ из состава обоих многочленов. В таких случаях говорят: x^3 и $-x^3$, $3y$ и $-3y$ *взаимно уничтожились* (правда, школьники в таких случаях любят говорить «сократились», но так говорить не следует: термин «сокращение» в математике принято употреблять только по отношению к дробям; например, можно сократить дробь $\frac{15}{20}$ и тогда получится $\frac{3}{4}$).

Заметим, что сложение и вычитание многочленов выполняют по одному и тому же правилу, т.е. необходимости в различении операций сложения и вычитания нет, значит, нет и особой необходимости в использовании двух терминов «сложение многочленов», «вычитание многочленов». Вместо них можно употребить термин *алгебраическая сумма многочленов*. Вот несколько примеров алгебраических сумм трех многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$:

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x);$$
$$p_1(x) - p_2(x) + p_3(x);$$
$$p_1(x) - p_2(x) - p_3(x);$$
$$p_2(x) - p_3(x) + p_1(x).$$

Теперь мы можем подвести итог всему сказанному в этом параграфе в виде следующего правила составления алгебраической суммы многочленов.

Правило 1. *Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. При этом если перед скобкой стоит знак «+», то при раскрытии скобок надо знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, оставить без изменения. Если же перед скобкой стоит знак «−», то при раскрытии скобок нужно знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, заменить на противоположные («+» на «−», «−» на «+»).*

А теперь обязательно вернитесь к примерам 1 и 2 и прокомментируйте (хотя бы для себя) их решение с помощью этого правила. Сделали? Тогда рассмотрим заключительный пример.

Пример 3. Даны три многочлена:

$p_1(x) = 2x^2 + x - 3;\quad p_2(x) = x^2 - 3x + 1;\quad p_3(x) = 5x^2 - 2x - 8.$

Найти алгебраическую сумму

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_3(x).$$

Решение.

$$p(x) = (2x^2 + x - 3) + (x^2 - 3x + 1) - (5x^2 - 2x - 8) =$$
$$= 2x^2 + x - 3 + x^2 - 3x + 1 - 5x^2 + 2x + 8 = -2x^2 + 6.$$

§22. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Вы, наверное, заметили, что до сих пор глава 5 строилась по тому же плану, что и глава 4. В обеих главах сначала вводились основные понятия: в главе 4 это были одночлен, стандартный вид одночлена, коэффициент одночлена; в главе 5 — многочлен, стандартный вид многочлена. Затем в главе 4 мы рассматривали сложение и вычитание одночленов; аналогично в главе 5 — сложение и вычитание многочленов.

Что было в главе 4 дальше? Дальше мы говорили об умножении одночленов. Значит, по аналогии, о чем нам следует поговорить теперь? Об умножении многочленов. Но здесь придется действовать не спеша: сначала (в этом параграфе) рассмотрим умножение многочлена на одночлен (или одночлена на многочлен, это все равно), а потом (в следующем параграфе) — умножение любых многочленов. Когда вы в младших классах учились перемножать числа, вы ведь тоже действовали постепенно: сначала учились умножать многозначное число на однозначное и только потом умножали многозначное число на многозначное.

Приступим к делу. При умножении многочлена на одночлен используют распределительный закон умножения: $(a + b)c = ac + bc$.

Пример 1. Выполнить умножение $(2a^2 - 3ab) \cdot (-5a)$.

Решение. Введем новые переменные:

$$x = 2a^2, \quad y = -3ab, \quad z = -5a.$$

Тогда данное произведение перепишем в виде $(x + y)z$, что по распределительному закону равно $xz + yz$. Теперь вернемся к старым переменным:

$$xz + yz = 2a^2 \cdot (-5a) + (-3ab) \cdot (-5a).$$

Нам остается лишь найти произведения одночленов. Получим

$$-10a^3 + 15a^2b.$$

Приведем краткую запись решения (так мы и будем записывать в дальнейшем, не вводя новых переменных):

$$(2a^2 - 3ab) \cdot (-5a) = 2a^2 \cdot (-5a) + (-3ab) \cdot (-5a) =$$
$$= -10a^3 + 15a^2b.$$

Теперь мы можем сформулировать соответствующее правило умножения многочлена на одночлен.

Правило 2. *Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.*

Это же правило действует и при умножении одночлена на многочлен:

$$-5a(2a^2 - 3ab) = (-5a) \cdot 2a^2 + (-5a) \cdot (-3ab) = -10a^3 + 15a^2b$$

(мы взяли пример 1, но поменяли местами множители).

Пример 2. Представить заданный многочлен в виде произведения многочлена и одночлена:

а) $2x^2y + 4x$; б) $x^2 + 3y^2$.

Решение. а) Заметим, что $2x^2y = 2x \cdot xy$, а $4x = 2x \cdot 2$. Значит,

$$2x^2y + 4x = xy \cdot 2x + 2 \cdot 2x = (xy + 2) \cdot 2x.$$

б) В примере а) нам удалось в составе каждого члена многочлена $2x^2y + 4x$ выделить одинаковую часть (одинаковый множитель) $2x$. Здесь же такой общей части нет. Тем не менее и многочлен $x^2 + 3y^2$ можно представить в виде произведения, например, так:

$$x^2 + 3y^2 = (2x^2 + 6y^2) \cdot 0{,}5$$

или так:

$$x^2 + 3y^2 = (x^2 + 3y^2) \cdot 1.$$

Но это — искусственное преобразование и без большой необходимости не используется.

Кстати, требование представить заданный многочлен в виде произведения одночлена и многочлена встречается в математике довольно часто, поэтому указанной процедуре присвоено специальное название: *вынесение общего множителя за скобки*. Задание вынести общий множитель за скобки может быть корректным (как в примере 2а)), а может быть и не совсем корректным (как в примере 2б)). В следующей главе мы специально рассмотрим этот вопрос.

Пример 3. Дан многочлен $p(x; y; z) = ax + by + cz$, где a, b, c — некоторые коэффициенты, x, y, z — переменные. Известно, что $p(12; 8; 6) = 48$. Вычислить $p\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$.

Решение. Подставим в данный многочлен вместо переменных x, y, z их заявленные значения 12, 8, 6 соответственно. Получим $p(12; 8; 6) = 12a + 8b + 6c = 48$. Теперь составим выражение для $p\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$; получим $p\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$. Умножим обе части этого равенства на 24:

$$24p\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right) = 24\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c\right) = 12a + 8b + 6c = 48.$$

Итак, $24p\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right) = 48$, значит, $p\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right) = 2$. ■

§23. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Овладев правилом умножения многочлена на одночлен, нетрудно сделать следующий шаг: получить правило умножения любых двух многочленов. Рассмотрим сначала произведение самых простых (после одночленов) многочленов, а именно двучленов $a + b$ и $c + d$.

Итак, пусть нужно раскрыть скобки в произведении $(a + b)(c + d)$. Введем новую переменную $m = c + d$, тогда получим

$$(a + b)(c + d) = (a + b)m = am + bm.$$

Вернемся к исходным переменным:

$$am + bm = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Таким образом,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Аналогично можно проверить, что

$$(a + b + c)(x + y) = ax + ay + bx + by + cx + cy$$

(сделайте это!), т. е., как и в случае умножения двучлена на двучлен, приходится каждый член первого многочлена поочередно умножать на каждый член второго многочлена и полученные произведения складывать.

Правило 3. *Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена поочередно на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.*

В результате умножения многочленов всегда получается многочлен, надо лишь привести его к стандартному виду.

Пример 1. Выполнить умножение многочленов

$$p_1(x) = 2x^2 - 5x + 1 \text{ и } p_2(x) = 3x - 4.$$

Решение.

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = (2x^2 - 5x + 1)(3x - 4) =$$
$$= 2x^2 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-4) + (-5x) \cdot 3x + (-5x) \cdot (-4) + 1 \cdot 3x + 1 \cdot (-4) =$$
$$= 6x^3 - 8x^2 - 15x^2 + 20x + 3x - 4 = 6x^3 - 23x^2 + 23x - 4.$$ ■

Особенно внимательно нужно следить за знаками коэффициентов тех одночленов, которые получаются при раскрытии скобок. И еще один совет: если у одного многочлена m членов, а у другого n членов, то в произведении должно быть (до приведения подобных членов) mn членов; если же их не mn, то вы что-то потеряли, проверьте. Так, в рассмотренном примере мы умножали трехчлен на двучлен, получилась сумма шести слагаемых (а после приведения подобных членов осталось четыре слагаемых).

Пример 2. Даны многочлены $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 7$, $q(x) = x^5 - 7x^3 + 4x + 1$.

Чему равна сумма коэффициентов многочлена $h(x) = (p(x))^2 q(x)$?

Решение. Можно, конечно, перемножить многочлены $p(x)$, $p(x)$, $q(x)$, привести произведение к стандартному виду, выписать последовательно все полученные коэффициенты, а затем найти их сумму. Но есть значительно более красивый и рациональный способ решения. Чтобы его понять, рассмотрим вспомогательный пример.

Пусть дан многочлен $r(x) = x^6 + 2x^5 + 12x^4 - 13x^3 - 15x^2 + 10x - 17$; вычислим $r(1)$:

$r(1) = 1 + 2 + 12 - 13 - 15 + 10 - 17 = -20$. Но обратите внимание: $1 + 2 + 12 - 13 - 15 + 10 - 17$ это как раз сумма коэффициентов многочлена $r(x)$. Вообще, чтобы найти сумму коэффициентов произвольного многочлена $m(x)$, достаточно вычислить $m(1)$.

Вернемся к нашей задаче и вычислим $h(1)$:

$h(1) = (p(1))^2q(1) = (2 + 3 - 5 + 1 - 7)^2 \cdot (1 - 7 + 4 + 1) = -36$.

Ответ: сумма коэффициентов многочлена $h(x)$ равна -36.

§24. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Имеется несколько случаев, когда умножение одного многочлена на другой приводит к компактному, легко запоминающемуся результату. В этих случаях предпочтительнее не умножать каждый раз один многочлен на другой, а пользоваться готовым результатом. Рассмотрим эти случаи.

1. Квадрат суммы и квадрат разности

Умножим двучлен $a + b$ на себя, т. е. раскроем скобки в произведении $(a + b)(a + b)$ или, что то же самое, в выражении $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Аналогично получаем

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned}&(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad &(1)\\ &(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad &(2)\end{aligned}}$$

На обычном языке формулу (1) читают так: ***квадрат суммы двух выражений равен сумме их квадратов плюс их удвоенное произведение.***

Формулу (2) читают так: ***квадрат разности двух выражений равен сумме их квадратов минус их удвоенное произведение.***

Этим формулам присвоены специальные названия: формуле (1) — **квадрат суммы**, формуле (2) — **квадрат разности.**

Пример 1. Раскрыть скобки в выражении:

а) $(3x + 2)^2$; б) $(5a^2 - 4b^3)^2$.

Решение. а) Воспользуемся формулой (1), учтя, что в роли a выступает $3x$, а в роли b — число 2. Получим

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4.$$

б) Воспользуемся формулой (2), учтя, что в роли a выступает $5a^2$, а в роли b выступает $4b^3$. Получим

$$(5a^2 - 4b^3)^2 = (5a^2)^2 - 2 \cdot 5a^2 \cdot 4b^3 + (4b^3)^2 = 25a^4 - 40a^2b^3 + 16b^6. ■$$

При использовании формул квадрата суммы или квадрата разности учитывайте, что

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2;$$
$$(b - a)^2 = (a - b)^2.$$

Это следует из того, что $(-a)^2 = a^2$.

Отметим, что на формулах (1) и (2) основаны некоторые математические фокусы, позволяющие производить вычисления в уме. Например, можно практически устно возводить в квадрат двузначные числа, оканчивающиеся на 1, 2, 8 и 9. Смотрите:

$$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041;$$
$$91^2 = (90 + 1)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 1 + 1^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281;$$
$$69^2 = (70 - 1)^2 = 70^2 - 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 - 140 + 1 = 4761;$$
$$102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 =$$
$$= 10\,000 + 400 + 4 = 10404;$$
$$48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304.$$

Но самый элегантный фокус связан с возведением в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5. Проведем соответствующие рассуждения для 85^2. Имеем

$$85^2 = (80 + 5)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 5^2 =$$
$$= 80 \cdot (80 + 10) + 25 = 80 \cdot 90 + 25 = 7200 + 25 = 7225.$$

Замечаем, что для вычисления 85^2 достаточно было умножить 8 на 9 и к полученному результату приписать справа 25. Аналогично можно поступать и в других случаях. Например, $35^2 = 1225$ ($3 \cdot 4 = 12$ и к полученному числу приписали справа 25); $65^2 = 4225$; $125^2 = 15\,625$ ($12 \cdot 13 = 156$ и к полученному числу приписали справа 25).

Приведем доказательство отмеченного факта.

Пусть число a оканчивается цифрой 5, это значит, что $a = 10b + 5$, где b — число, полученное из числа a отбрасыванием последней цифры 5 (например, $125 = 10 \cdot 12 + 5$; здесь $b = 12$). Тогда

$$a^2 = (10b + 5)^2 = 100b^2 + 100b + 25 = 100b(b + 1) + 25.$$

Получили, что число b надо умножить на $b + 1$, умножить полученное произведение на 100 и затем прибавить 25. Это равносильно тому, что к числу $b(b + 1)$ справа приписать 25.

Раз уж мы с вами заговорили о различных любопытных обстоятельствах, связанных со скучными (на первый взгляд) формулами (1) и (2), то дополним этот разговор следующим геометрическим рассуждением. Пусть a и b — положительные числа. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b$ и вырежем в двух его углах квадраты со сторонами, соответственно равными a и b (рис. 73).

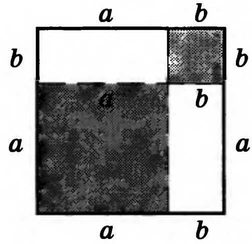


Рис. 73

Площадь квадрата со стороной $a + b$ равна $(a + b)^2$. Этот квадрат мы разрезали на четыре части: квадрат со стороной a (его площадь равна a^2), квадрат со стороной b (его площадь равна b^2), два прямоугольника со сторонами a и b (площадь каждого такого прямоугольника равна ab). Значит, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, т. е. получили формулу (1).

Пример 2. Вычислить наиболее рациональным способом $(729 - 171)^2 + 4 \cdot 729 \cdot 171$.

Решение. $(729 - 171)^2 + 4 \cdot 729 \cdot 171 =$

$$= 729^2 - 2 \cdot 729 \cdot 171 + 171^2 + 4 \cdot 729 \cdot 171 =$$

$$= 729^2 + 2 \cdot 729 \cdot 171 + 171^2 = (729 + 171)^2 = 900^2 = 810\,000.$$ ◼

Пример 3. Решить уравнение $(3x-2)^2+(4x+1)^2=(5x-3)^2$.

Решение. Воспользуемся формулами квадрата суммы и квадрата разности:

$$(9x^2-12x+4)+(16x^2+8x+1)=25x^2-30x+9;$$
$$9x^2-12x+4+16x^2+8x+1-(25x^2-30x+9)=0;$$
$$26x-4=0;$$
$$x=\frac{2}{13}.$$

2. Разность квадратов

Умножим двучлен $a+b$ на двучлен $a-b$:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2.$$

Итак,

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2.} \qquad (3)$$

Любое равенство в математике употребляют как слева направо (т.е. левая часть равенства заменяется его правой частью), так и справа налево (т. е. правая часть равенства заменяется его левой частью). Если формулу (3) использовать слева направо, то она позволяет заменить произведение $(a+b)(a-b)$ готовым результатом a^2-b^2. Эту же формулу можно использовать справа налево, тогда она позволяет заменить разность квадратов a^2-b^2 произведением $(a+b)(a-b)$. Формуле (3) в математике дано специальное название — **разность квадратов.**

Замечание. Не путайте термины «разность квадратов» и «квадрат разности». Разность квадратов — это a^2-b^2, значит, речь идет о формуле (3); квадрат разности — это $(a-b)^2$, значит, речь идет о формуле (2).

На обычном языке формулу (3) читают справа налево так:

разность квадратов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на их разность.

Пример 4. Выполнить умножение

$$(3x-2y)(3x+2y).$$

Решение.

$$(3x-2y)(3x+2y)=(3x)^2-(2y)^2=9x^2-4y^2.$$

Пример 5. Представить двучлен $16x^4 - 9$ в виде произведения двучленов.

Решение. Имеем $16x^4 = (4x^2)^2$, $9 = 3^2$, значит, заданный двучлен есть разность квадратов, т. е. к нему можно применить формулу (3), прочитанную справа налево. Тогда получим

$$16x^4 - 9 = (4x^2)^2 - 3^2 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3).$$

Формула (3), как и формулы (1) и (2), используется иногда для быстрого счета. Смотрите:

$$79 \cdot 81 = (80 - 1)(80 + 1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399;$$
$$42 \cdot 38 = (40 + 2)(40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596.$$

Пример 6. Вычислить наиболее рациональным способом $6275 \cdot 6269 - 6272^2$.

Решение.

$$6275 \cdot 6269 - 6272^2 = (6272 + 3) \cdot (6272 - 3) - 6272^2 =$$
$$= (6272^2 - 3^2) - 6272^2 = -9.$$

Пример 7. Найти отрицательный корень уравнения $x^4 = 631 \cdot 619 + 36$.

Решение. Рассмотрим правую часть уравнения:

$$631 \cdot 619 + 36 = (625 + 6)(625 - 6) + 36 =$$
$$= (625^2 - 6^2) + 36 = 625^2 = 25^4.$$

Теперь заданное уравнение мы можем переписать в виде $x^4 = 25^4$, отрицательным корнем этого уравнения является число -25.

Ответ: $x = -25$.

Завершим разговор о формуле разности квадратов любопытным геометрическим рассуждением. Пусть a и b — положительные числа, причем $a > b$. Рассмотрим прямоугольник со сторонами $a + b$ и $a - b$ (рис. 74). Его площадь равна $(a + b)(a - b)$. Отрежем прямоугольник со сторонами b и $a - b$ и подклеим его к оставшейся части так, как показано на рисунке 75. Ясно, что

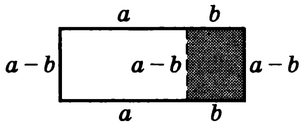


Рис. 74

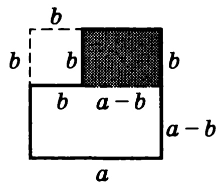


Рис. 75

полученная фигура имеет ту же площадь, т. е. $(a + b)(a - b)$. Но эту фигуру можно построить так: из квадрата со стороной a вырезать квадрат со стороной b (это хорошо видно на рис. 75). Значит, площадь новой фигуры равна $a^2 - b^2$. Итак, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, т. е. получили формулу (3).

3. Разность кубов и сумма кубов

Умножим двучлен $a - b$ на трехчлен $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a \cdot a^2 + a \cdot ab + a \cdot b^2 - b \cdot a^2 - b \cdot ab - b \cdot b^2 = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Аналогично

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

(проверьте это сами).

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned}&(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3; \quad (4)\\ &(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \quad (5)\end{aligned}}$$

Формулу (4) обычно называют **разностью кубов**, формулу (5) — **суммой кубов** (по виду правой части).

Попробуем перевести формулы (4) и (5) на обычный язык. Прежде чем это сделать, заметим, что выражение $a^2 + ab + b^2$ похоже на выражение $a^2 + 2ab + b^2$, которое фигурировало в формуле (1) и давало $(a + b)^2$; выражение $a^2 - ab + b^2$ похоже на выражение $a^2 - 2ab + b^2$, которое фигурировало в формуле (2) и давало $(a - b)^2$.

Чтобы отличить (в языке) эти пары выражений друг от друга, каждое из выражений $a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 - 2ab + b^2$ называют **полным квадратом** (суммы или разности), а каждое из выражений $a^2 + ab + b^2$ и $a^2 - ab + b^2$ называют **неполным квадратом** (суммы или разности). Тогда получается следующий перевод формул (4) и (5) (прочитанных справа налево) на обычный язык:

разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы;

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

Пример 8. Выполнить умножение $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.

Решение. Так как первый множитель есть разность одночленов $2x$ и 1, а второй множитель — неполный квадрат их суммы, то можно воспользоваться формулой (4). Получим

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1.$$

Пример 9. Представить двучлен $27a^6 + 8b^3$ в виде произведения многочленов.

Решение. Имеем $27a^6 = (3a^2)^3$, $8b^3 = (2b)^3$. Значит, заданный двучлен есть сумма кубов, т. е. к нему можно применить формулу (5), прочитанную справа налево. Тогда получим

$$27a^6 + 8b^3 = (3a^2)^3 + (2b)^3 =$$
$$= (3a^2 + 2b)((3a^2)^2 - 3a^2 \cdot 2b + (2b)^2) = (3a^2 + 2b)(9a^4 - 6a^2b + 4b^2).$$

Пример 10. Вычислить наиболее рациональным способом $0{,}546^3 + 0{,}454^3 + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454$.

Решение.

$$(0{,}546^3 + 0{,}454^3) + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 =$$
$$= (0{,}546 + 0{,}454)(0{,}546^2 - 0{,}546 \cdot 0{,}454 + 0{,}454^2) + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 =$$
$$= 0{,}546^2 - 0{,}546 \cdot 0{,}454 + 0{,}454^2 + 3 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 =$$
$$= 0{,}546^2 + 2 \cdot 0{,}546 \cdot 0{,}454 + 0{,}454^2 = (0{,}546 + 0{,}454)^2 = 1^2 = 1.$$

4. Куб суммы и куб разности

Рассмотрим выражение $(a + b)^3$. Имеем

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Аналогично получаем

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + b^2a - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Итак,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (6)$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \quad (7)$$

Формулу (6) читают так:

куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.

Формулу (7) читают так:
куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения.

Этим формулам присвоены специальные названия: формуле (6) — **куб суммы**, формуле (7) — **куб разности.**

Пример 11. Раскрыть скобки в выражении:

а) $(2a + 3b)^3$; б) $(x^2 - 5y^3)^3$.

Решение.

а) $(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (3b) + 3 \cdot (2a) \cdot (3b)^2 + (3b)^3 =$
$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$;

б) $(x^2 - 5y^3)^3 = (x^2)^3 - 3 \cdot (x^2)^2 \cdot (5y^3) + 3 \cdot (x^2)(5y^3)^2 - (5y^3)^3 =$
$= x^6 - 15x^4y^3 + 75x^2y^6 - 125y^9$. ◼

Пример 12. Решить уравнение $x^3 - 448 = 149^3 + 3 \cdot 149^2$.

Решение. Заметив, что $448 = 447 + 1 = 3 \cdot 149 + 1 = 3 \cdot 149 \cdot 1^2 + 1^3$, перепишем данное уравнение следующим образом: $x^3 = 149^3 + 3 \cdot 149^2 \cdot 1 + 3 \cdot 149 \cdot 1^2 + 1^3$. В правой части получился куб суммы чисел 149 и 1, т. е. приходим к уравнению $x^3 = (149 + 1)^3$. Получаем $x^3 = 150^3$; $x = 150$. ◼

В заключение еще раз подчеркнем, что все полученные в этом параграфе формулы (1)—(7) используют как слева направо, так и справа налево, только в первом случае (слева направо) говорят, что (1)—(7) — *формулы сокращенного умножения*, а во втором случае (справа налево) говорят, что (1)—(7) — *формулы разложения на множители.*

§25. МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛНОГО КВАДРАТА

Во многих задачах бывает полезно преобразовать заданное выражение так, чтобы, обнаружив в нем в разных местах три слагаемых вида a^2, b^2 и $2ab$, объединить их в одну группу $(a^2 + b^2 + 2ab)$, что позволит записать эту группу слагаемых в виде квадрата суммы $(a + b)^2$. В этом заключается определенный метод рассуждений, который обычно называют **методом выделения полного квадрата.** Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Найти наименьшее значение многочлена $p(x)$:

а) $p(x) = x^2 - 6x + 8$; б) $p(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

При каком значении x оно достигается?

Решение. а) $p(x) = x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1$. Теперь ясно, что наименьшее значение достигается многочленом при $x = 3$; $p(3) = -1$.

б) $p(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) - 5 = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x\right) - 5$.

У выражения в скобках для полного квадрата не хватает квадрата числа $\frac{3}{4}$. Заметив это, сделаем в скобках следующее: прибавим и вычтем квадрат этого числа:

$$p(x) = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) - 5 =$$

$$= 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} - 5 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 6\frac{1}{8}.$$

Теперь ясно, что наименьшее значение достигается многочленом при $x = -\frac{3}{4}$; $p\left(-\frac{3}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$

Ответ: а) $p(3) = -1$; б) $p\left(-\frac{3}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$

Пример 2. Найти наибольшее значение многочлена $p(x)$:

а) $p(x) = 5 - 4x - 4x^2$; б) $p(x) = 7 + 4x - 3x^2$.

При каком значении x оно достигается?

Решение.

а) $p(x) = 5 - 4x - 4x^2 = 6 - (1 + 4x + 4x^2) = 6 - (2x + 1)^2$.

Наибольшее значение достигается многочленом при $x = -\frac{1}{2}$; $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$.

б) $p(x) = 7 + 4x - 3x^2 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 7 =$

$$= -3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 7 = -3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{3} + 7 =$$

$$= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 8\frac{1}{3}.$$

Наибольшее значение достигается многочленом при $x = \frac{2}{3}$; $p\left(\frac{2}{3}\right) = 8\frac{1}{3}$.

Ответ: а) $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$; б) $p\left(\frac{2}{3}\right) = 8\frac{1}{3}$.

Пример 3. Найти ту пару значений $(x; y)$, при которых многочлен $p(x; y) = 2x^2 + 3xy + 5y^2 + 4y + 3$ достигает наименьшего значения при условии, что $x - 3y = 4$.

Решение. Из условия следует, что $x = 3y + 4$. Подставим выражение $3y + 4$ вместо x в данный многочлен:

$$p(y) = 2(3y + 4)^2 + 3(3y + 4)y + 5y^2 + 4y + 3 =$$
$$= 2(9y^2 + 24y + 16) + 3y(3y + 4) + 5y^2 + 4y + 3 =$$
$$= 32y^2 + 64y + 35 = 32(y^2 + 2y + 1) + 3 =$$
$$= 32(y + 1)^2 + 3.$$

Наименьшее значение многочлена равно 3, достигается оно при $y = -1$.

Если $y = -1$, то $x = 3y + 4 = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = -1$.

Пример 4. Доказать, что многочлен $p(a; b) = 72ab - 16a^2 - 83b^2$ при любых значениях переменных принимает неположительные значения.

Решение. $p(a; b) = 72ab - 16a^2 - 83b^2 = -(16a^2 - 72ab + 81b^2) - 2b^2 = -(4a - 9b)^2 - 2b^2 = -((4a - 9b)^2 + 2b^2)$. Выражение $(4a - 9b)^2 + 2b^2$, как сумма двух квадратов, при любых значениях переменных принимает неотрицательные значения, тогда как выражение $-((4a - 9b)^2 + 2b^2)$ неположительно при любых значениях a и b, что и требовалось доказать. ◼

Пример 5. Какими должны быть размеры прямоугольного участка, периметр которого равен 60 м, чтобы площадь участка была наибольшей?

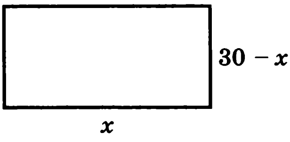


Рис. 76

Решение. Участок представляет собой прямоугольник; пусть его длина равна x м, тогда его ширина равна $(30 - x)$ м (рис. 76). Площадь S прямоугольника вычисляется по формуле $S = x(30 - x)$ м^2. Поработаем с выражением для площади:

$$S = x(30 - x) = 30x - x^2 = -(x^2 - 30x) =$$
$$= -(x^2 - 30x + 225) + 225 = 225 - (x - 15)^2.$$

Значит, $S_{наиб} = 225$ и достигается это значение при $x = 15$, т. е. когда участок представляет собой квадрат.

Ответ: наибольшую площадь имеет квадратный участок со стороной 15 м.

§26. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Снова, как и в начале § 22, сравним планы построения глав 4 и 5. Вы, наверное, заметили, что эти планы почти одинаковы, хотя полное совпадение нарушил предыдущий параграф (посвященный специфическим формулам сокращенного умножения), да и в главе 4 мы рассмотрели возведение одночлена в степень, а в главе 5 соответствующего разговора о возведении в степень многочлена не было, за исключением случаев, когда двучлен возводится в квадрат или куб. После умножения одночленов в главе 4 шла речь о делении одночлена на одночлен. Вот и в главе 5 мы поговорим об аналогичной операции — делении многочлена на одночлен.

В ее основе лежит следующее свойство деления суммы на число:

$$(a + b + c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m).$$

Это позволяет сразу сформулировать правило деления многочлена на одночлен.

Правило 4. *Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.*

В § 19 мы отмечали, что не всегда можно разделить одночлен на одночлен; чтобы деление было выполнимо, необходимо соблюдение целого ряда условий — вспомните их (или посмотрите в § 19), прежде чем рассматривать пример, который приведен ниже. Если задача деления одночлена (простейшего многочлена) на одночлен не всегда была корректной, то что же говорить о делении многочлена на одночлен. Такое деление выполнимо достаточно редко.

Пример 1. Разделить многочлен $2a^2b + 4ab^2$ на одночлен $2a$.

Решение.

$$(2a^2b + 4ab^2) : 2a = (2a^2b : 2a) + (4ab^2 : 2a) = \frac{2a^2b}{2a} + \frac{4ab^2}{2a} =$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot b + \frac{4}{2} \cdot \frac{a}{a} \cdot b^2 = 1 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 1 \cdot b^2 = ab + 2b^2.$$

Здесь мы использовали тот способ записи, который обговорили в § 19. А вот другой способ (можно применять и тот и другой, смотря по тому, какой из них вам больше нравится): выделим в каждом члене многочлена $2a^2b + 4ab^2$ множитель, в точности равный делителю $2a$. Получим

$$2a^2b + 4ab^2 = 2a \cdot ab + 2a \cdot 2b^2.$$

Эту сумму можно записать в виде произведения $2a(ab + 2b^2)$. Теперь ясно, что если это произведение разделить на $2a$ (на один множитель), то в частном получится $ab + 2b^2$ (другой множитель).

Пример 2. Разделить многочлен $6x^3 - 24x^2$ на $6x^2$.

Решение.

Первый способ.

$$(6x^3 - 24x^2) : 6x^2 = (6x^3 : 6x^2) - (24x^2 : 6x^2) =$$

$$= \frac{6x^3}{6x^2} - \frac{24x^2}{6x^2} = \frac{6}{6} \cdot \frac{x^3}{x^2} - \frac{24}{6} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 1 \cdot x - 4 \cdot 1 = x - 4.$$

Второй способ.

$$6x^3 - 24x^2 = 6x^2 \cdot x - 6x^2 \cdot 4 = 6x^2(x - 4).$$

Значит, частное от деления $6x^3 - 24x^2$ на $6x^2$ равно $x - 4$.

Пример 3. Разделить многочлен $8a^3 + 6a^2b - b$ на $2a^2$.

Решение.

$$8a^3 + 6a^2b - b = 2a^2 \cdot 4a + 2a^2 \cdot 3b - b.$$

Поскольку в третьем члене заданного многочлена (речь идет о члене $-b$) множитель $2a^2$ не выделяется, деление невозможно. Эта задача некорректна. Фактически мы снова, как и в конце § 19, пришли к алгебраической дроби — на этот раз к алгебраической дроби $\frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}$.

Итак, деление многочлена на одночлен выполняется не всегда, а если и выполняется, то требует определенных усилий. Деление же многочлена на многочлен — еще более трудная (и еще более редко выполнимая) операция, это нам пока не по силам.

ГЛАВА

6 РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

§27. ЧТО ТАКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ И ЗАЧЕМ ОНО НУЖНО

Для начала выполним знакомую операцию: умножим многочлен $2x - 3$ на многочлен $x + 2$.

$$(2x - 3)(x + 2) = 2x \cdot x + 2x \cdot 2 - 3 \cdot x - 3 \cdot 2 =$$
$$= 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6.$$

Итак, $(2x - 3)(x + 2) = 2x^2 + x - 6$.

Это равенство можно записать по-другому, поменяв его части местами:

$$2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2).$$

Такая запись означает, что многочлен $2x^2 + x - 6$ представлен в виде произведения более простых многочленов $2x - 3$ и $x + 2$. Обычно в таких случаях говорят, что многочлен удалось *разложить на множители*.

На самом деле формулировка «разложение многочлена на множители» вам уже знакома, мы несколько раз использовали ее в главе 5, но там же мы говорили, что позднее более подробно обсудим эту проблему (проблему разложения многочлена на множители). Это время пришло. Однако сначала убедимся в том, что разложение многочлена на множители — вещь полезная (иначе зачем нам этим заниматься?).

Представьте себе, что вам предложили решить уравнение $2x - 3 = 0$. Вы справитесь с этим без труда: $2x = 3$, $x = 1{,}5$. Затем вам предложили решить уравнение $x + 2 = 0$. И с ним вы справитесь легко: $x = -2$. А теперь вам предлагают решить уравнение $2x^2 + x - 6 = 0$, т. е. дать ответ на вопрос, при каких значениях x трехчлен $2x^2 + x - 6$ обращается в нуль, — эти значения x называют ***корнями уравнения***. Для таких уравнений имеется специальное правило решения, но вы его пока не знаете. Как быть?

Воспользуемся полученным выше разложением многочлена $2x^2 + x - 6$ на множители: $2x^2 + x - 6 = (2x - 3)(x + 2)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$(2x - 3)(x + 2) = 0.$$

Теперь остается воспользоваться следующим известным фактом: если произведение двух множителей равно нулю, то один из множителей равен нулю. Значит, либо $2x - 3 = 0$, либо $x + 2 = 0$. Задача свелась к решению двух более простых уравнений. Из уравнения $2x - 3 = 0$ получаем $x = 1{,}5$. Из уравнения $x + 2 = 0$ получаем $x = -2$. Уравнение решено, оно имеет два корня: 1,5 и −2.

Итак, разложение многочлена на множители может пригодиться нам для решения уравнений.

Рассмотрим другую ситуацию. Пусть нужно найти значение числового выражения $\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2}$. Можно, конечно, проводить вычисления «в лоб», но более эффективно дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2} = \frac{(53 - 47)(53 + 47)}{(61 - 39)(61 + 39)} = \frac{6 \cdot 100}{22 \cdot 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}.$$

Разложение на множители позволило нам сократить дробь. Позднее мы оценим это и при выполнении действий с алгебраическими дробями.

Таким образом, разложение многочлена на множители используется для решения уравнений, для преобразования числовых и алгебраических выражений. Применяется оно и в других ситуациях, как, скажем, в следующем примере, где ключ к успеху опять-таки в разложении на множители.

Пример. Доказать, что для любого натурального числа n выражение $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится без остатка на 6.

Решение. Пусть $p(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$.

Если $n = 1$, то $p(1) = 1 + 3 + 2 = 6$. Значит, $p(1)$ делится на 6 без остатка.

Если $n = 2$, то $p(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 + 12 + 4 = 24$. Следовательно, и $p(2)$ делится на 6 без остатка.

Если $n = 3$, то $p(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 27 + 27 + 6 = 60$. Поэтому и $p(3)$ делится на 6 без остатка.

Но вы же понимаете, что так перебрать <u>все</u> натуральные числа нам не удастся. Как быть? На помощь приходят алгебраические методы.

Имеем

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2).$$

В самом деле,

$$n(n + 1) = n^2 + n,$$

а

$$(n^2 + n)(n + 2) = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 2n.$$

Итак,

$$p(n) = n(n + 1)(n + 2),$$

т. е. $p(n)$ есть произведение трех идущих подряд натуральных чисел n, $n + 1$, $n + 2$. Но из трех таких чисел одно обязательно делится на 3, значит, и их произведение делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из этих чисел — четное, т. е. делится на 2, значит, и произведение делится на 2. Итак, $p(n)$ делится и на 2, и на 3, т. е. делится и на 6. ■

Все прекрасно, скажете вы, но как догадаться, что $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2)$? Ответ очевиден: надо учиться разложению многочленов на множители. К этому и перейдем: в каждом из следующих параграфов этой главы мы будем изучать тот или иной прием разложения многочлена на множители.

§28. ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

Прежде чем начинать изучение этого параграфа, вернитесь к § 22. Там мы уже рассмотрели пример, в котором требовалось представить многочлен в виде произведения многочлена и одночлена. Если такое произведение удалось составить, то обычно говорят, что многочлен разложен на множители с помощью *вынесения общего множителя за скобки*. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Разложить на множители многочлен:

а) $2x + 6y$; в) $4a^3 + 6a^2$; д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$.
б) $a^3 + a^2$; г) $12ab^4 - 18a^2b^3c$;

Решение. а) $2x + 6y = 2(x + 3y)$. За скобки вынесли общий делитель коэффициентов членов многочлена.

б) $a^3 + a^2 = a^2(a + 1)$. Если одна и та же переменная входит во все члены многочлена, то ее можно вынести за скобки в степени, равной наименьшей из имеющихся (т. е. выбирают наименьший из имеющихся показателей).

в) Здесь используем те же приемы, что и при решении примеров а) и б): для коэффициентов находим общий делитель (в данном случае число 2), для переменных — наименьшую степень из имеющихся (в данном случае a^2). Получаем

$$4a^3 + 6a^2 = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot 3 = 2a^2(2a + 3).$$

г) Обычно для целочисленных коэффициентов стараются найти не просто общий делитель, а *наибольший* общий делитель. Для коэффициентов 12 и 18 им будет число 6. Замечаем, что переменная a входит в оба члена многочлена, при этом наименьший показатель равен 1. Переменная b также входит в оба члена многочлена, причем наименьший показатель равен 3. Наконец, переменная c входит только во второй член многочлена и не входит в первый член, значит, эту переменную нельзя вынести за скобки ни в какой степени. В итоге получаем

$$12ab^4 - 18a^2b^3c = 6ab^3 \cdot 2b - 6ab^3 \cdot 3ac = 6ab^3(2b - 3ac).$$

д) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2)$. ◼

В этом примере мы фактически использовали следующий алгоритм.

Алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов

1. Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, — он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).
2. Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.
3. Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, и степеней, найденных на втором шаге, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.

Замечание 1. В ряде случаев полезно выносить за скобку в качестве общего множителя и дробный коэффициент. Например:

$$2{,}4x + 7{,}2y = 2{,}4(x + 3y);$$

$$\frac{3}{7}a - \frac{6}{7}b + \frac{9}{7}c = \frac{3}{7}(a - 2b + 3c).$$

Замечание 2. Следует понимать, что шаги 1 и 2 алгоритма имеют совершенно разный статус. В реальных задачах коэффициенты почти никогда не бывают целыми числами (а оказываются целыми благодаря усилиям составителей задачников, подбирающих условия так, чтобы ответ был покрасивее). Поэтому шаг 1 посвящен лишь получению наиболее приятной для глаза записи, тогда как шаг 2 есть нечто содержательное.

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2.$$

Решение. Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

1) Наибольший общий делитель коэффициентов -1, -2 и 5 равен 1.

2) Переменная x входит во все члены многочлена с показателями соответственно 4, 3, 2; следовательно, можно вынести за скобки x^2.

Переменная y входит не во все члены многочлена; значит, ее нельзя вынести за скобки.

3) Вывод: за скобки можно вынести x^2. Правда, в данном случае целесообразнее вынести за скобки $-x^2$. Получим

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5).$$

Пример 3. Можно ли разделить многочлен $5a^4 - 10a^3 + 15a^5$ на одночлен: а) $5a^3$; б) $25a^2$? Если да, то выполнить деление.

Решение. а) В примере 1д) мы получили, что

$$5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2).$$

Значит, заданный многочлен можно разделить на $5a^3$, при этом в частном получится $a - 2 + 3a^2$.

б) $5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 25a^2\left(\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a^3\right).$

Значит, заданный многочлен можно разделить на $25a^2$, при этом в частном получится $\frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a^3$.

Подобные примеры мы рассматривали в § 26; просмотрите их, пожалуйста, еще раз, но уже с точки зрения вынесения общего множителя за скобки.

Разложение многочлена на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки тесно связано с двумя операциями, которые мы изучали в § 22 и 26, — с умножением многочлена на одночлен и с делением многочлена на одночлен.

А теперь несколько расширим наши представления о вынесении общего множителя за скобки. Дело в том, что иногда алгебраическое выражение задается в таком виде, что в качестве общего множителя может выступать не одночлен, а сумма нескольких одночленов.

Пример 4. Разложить на множители

$$2x(x - 2) + 5(x - 2)^2.$$

Решение. Введем новую переменную $y = x - 2$. Тогда получим

$$2x(x - 2) + 5(x - 2)^2 = 2xy + 5y^2.$$

Замечаем, что переменную y можно вынести за скобки: $2xy + 5y^2 = y(2x + 5y)$. А теперь вернемся к старым обозначениям:

$$y(2x + 5y) = (x - 2)(2x + 5(x - 2)) =$$
$$= (x - 2)(2x + 5x - 10) = (x - 2)(7x - 10).$$

В подобных случаях после приобретения некоторого опыта можно не вводить новую переменную, а сразу использовать следующую запись:

$$2x(x-2)+5(x-2)^2=(x-2)(2x+5(x-2))=$$
$$=(x-2)(2x+5x-10)=(x-2)(7x-10).$$

Пример 5. Вычислить $(2\cdot10^3+3\cdot10^2+7\cdot10+5)\cdot(9\cdot10^2+8\cdot10+4)-984\cdot2365$.

Решение. Числовое выражение в первых скобках — это число 2375, числовое выражение во вторых скобках — это число 984. Заметив это, произведем вычисления:

$$2375\cdot984-984\cdot2365=984\cdot(2375-2365)=984\cdot10=9840.$$

Пример 6. Доказать, что $(7^5+14^4)\ \vdots\ 23$ (напомним еще раз, что символ $\vdots$ означает «делится на»).

Решение. Имеем $7^5+14^4=7^5+7^4\cdot2^4=7^4(7+2^4)=7^4\cdot23$. Делимость полученного произведения на 23 теперь не вызывает никаких сомнений.

Пример 7. Решить уравнение $(x-2)(x+3)^3=(x+3)(x-2)^3$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x-2)(x+3)^3-(x+3)(x-2)^3=0$ и вынесем в левой его части за скобки общий множитель $(x-2)(x+3)$; получим:

$$(x-2)(x+3)((x+3)^2-(x-2)^2)=0;$$
$$(x-2)(x+3)((x^2+6x+9)-(x^2-4x+4))=0;$$
$$(x-2)(x+3)(10x+5)=0.$$

Значит, либо $x-2=0$, откуда находим $x=2$; либо $x+3=0$, откуда находим $x=-3$; либо $10x+5=0$, откуда находим $x=-0{,}5$.

Ответ: -3, $-0{,}5$, 2.

§29. СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

Для уяснения сути способа группировки рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$2a^2+6a+ab+3b.$$

Решение. Объединим в одну группу первые два члена, а в другую — последние два члена многочлена:

$$(2a^2+6a)+(ab+3b).$$

Замечаем, что в первой группе можно вынести за скобки $2a$, а во второй группе — b; получим $2a(a + 3) + b(a + 3)$. Теперь мы видим, что «проявился» общий множитель $(a + 3)$, который можно вынести за скобки. В результате получим $(a + 3)(2a + b)$.

Поскольку процесс преобразований в примере 1 перемежался комментариями, приведем еще раз решение, но уже без комментариев:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + 6a) + (ab + 3b) =$$
$$= 2a(a + 3) + b(a + 3) = (a + 3)(2a + b).$$

Объединение членов многочлена $2a^2 + 6a + ab + 3b$ в группы можно осуществить различными способами. Однако нужно учитывать, что иногда такая группировка оказывается удачной для последующего разложения на множители, а иногда нет. Проведем эксперимент. Объединим в одну группу первый и третий члены рассматриваемого многочлена, а в другую группу — второй и четвертый:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + ab) + (6a + 3b) =$$
$$= a(2a + b) + 3(2a + b) = (2a + b)(a + 3).$$

Разложение на множители получилось, группировка оказалась удачной.

Теперь объединим в одну группу первый и четвертый члены, а в другую — второй и третий:

$$2a^2 + 6a + ab + 3b = (2a^2 + 3b) + (6a + ab) = (2a^2 + 3b) + a(6 + b).$$

Эта группировка явно неудачна.

Подведем итоги. Члены многочлена можно группировать так, как нам хочется. Иногда удается такая группировка, что в каждой группе после вынесения общих множителей в скобках остается один и тот же многочлен, который, в свою очередь, может быть вынесен за скобки как общий множитель. Тогда говорят, что разложение многочлена на множители осуществлено *способом группировки*.

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$xy - 6 + 3x - 2y.$$

Решение.

Первый способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 6) + (3x - 2y).$$

Группировка неудачна.

Второй способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy + 3x) + (-6 - 2y) =$$
$$= x(y + 3) - 2(y + 3) = (y + 3)(x - 2).$$

Третий способ группировки:

$$xy - 6 + 3x - 2y = (xy - 2y) + (-6 + 3x) =$$
$$= y(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(y + 3).$$

Ответ: $xy - 6 + 3x - 2y = (x - 2)(y + 3)$.

Как видите, не всегда с первого раза группировка бывает удачной. Если группировка оказалась неудачной, то откажитесь от нее, ищите иной способ. По мере приобретения опыта вы будете быстро находить удачную группировку, как это сделано в следующем примере.

Пример 3. Разложить на множители многочлен

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6.$$

Решение. Составим три группы: в первую включим первый и четвертый члены, во вторую — второй и пятый, в третью — третий и шестой:

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (ab^2 + 2b^2) + (-2ab - 4b) +$$
$$+ (3a + 6) = b^2(a + 2) - 2b(a + 2) + 3(a + 2).$$

Во всех группах оказался общий множитель $(a + 2)$, который можно вынести за скобки. Получим $(a + 2)(b^2 - 2b + 3)$.

Ответ: $ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 = (a + 2)(b^2 - 2b + 3)$.

Иногда полезно проверить себя, т.е. в полученном разложении на множители выполнить операцию умножения многочленов (раскрыть скобки) и убедиться, что в результате получится тот многочлен, который был задан. А если нет? Тогда надо искать ошибку в разложении на множители.

Пример 4. Разложить на множители многочлен $x^2 - 7x + 12$.

Решение. Наверное, вы думаете: какое отношение имеет этот пример к способу группировки, ведь здесь и группировать-то нечего? Это верно, но можно сделать небольшой «фокус»: если представить слагаемое $-7x$ в виде суммы $-3x - 4x$, то получится сумма уже не трех (как в заданном многочлене), а четырех слагаемых. Эти четыре слагаемых можно распределить по двум группам:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = (x^2 - 3x) + (-4x + 12) =$$
$$= x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4).$$

Пример 5. Решить уравнение:

а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$.

Решение. а) Разложим трехчлен $x^2 - 7x + 12$ на множители так, как это сделано в примере 4:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Тогда заданное уравнение можно переписать в виде $(x - 3)(x - 4) = 0$. Теперь ясно, что исходное уравнение имеет два корня: $x = 3$, $x = 4$.

б) Разложим многочлен $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ на множители:

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x^3 - 2x^2) + (3x - 6) =$$
$$= x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3).$$

Перепишем теперь заданное уравнение в виде

$$(x - 2)(x^2 + 3) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то равен нулю один из множителей. Но $x^2 + 3$ при любых значениях x является положительным числом, т. е. в нуль обратиться не может. Значит, может выполняться только равенство $x - 2 = 0$, откуда получаем: $x = 2$.

Ответ: *а*) 3, 4; б) 2.

Пример 6. Построить в системе координат xOy график линейной функции $y = p^2 + 3px$, если известно, что этот график проходит через точку $(2; -5)$ и пересекает ось абсцисс в точке, расположенной левее точки $(1; 0)$.

Решение. Поскольку график проходит через точку $(2; -5)$, должно выполняться соотношение $-5 = p^2 + 3p \cdot 2$, т. е. $p^2 + 6p + 5 = 0$.

Подобное уравнение, применив способ группировки, мы уже решили выше — в примере 5а). Здесь мы тоже применим способ группировки:

$$p^2 + 6p + 5 = 0;$$
$$(p^2 + p) + (5p + 5) = 0;$$
$$p(p + 1) + 5(p + 1) = 0;$$
$$(p + 1)(p + 5) = 0.$$

Значит, либо $p + 1 = 0$, т. е. $p = -1$, либо $p + 5 = 0$, т. е. $p = -5$.

Если $p = -1$, то заданная линейная функция принимает вид $y = 1 - 3x$; если $p = -5$, то заданная линейная функция принимает

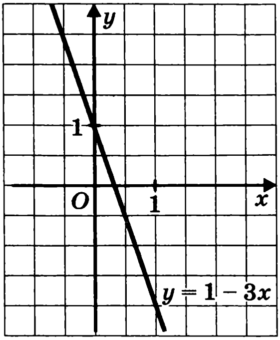


Рис. 77

вид $y = 25 - 15x$. Осталось из этих двух линейных функций выбрать ту, график которой пересекает ось абсцисс в точке, расположенной левее точки (1; 0).

Прямая $y = 1 - 3x$ пересекает ось абсцисс в точке $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, а прямая $y = 25 - 15x$ — в точке $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$; левее точки (1; 0) расположена лишь точка $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Значит, искомая линейная функция — это $y = 1 - 3x$, ее график изображен на рисунке 77. ◼

Пример 7. Построить график уравнения $x^2 + 2xy - 8x - 6y + 15 = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители, предварительно представив одночлен $-8x$ в виде $-3x - 5x$:

$$x^2 + 2xy - 8x - 6y + 15 = x^2 - 3x + 2xy - 6y - 5x + 15 =$$
$$= (x^2 - 3x) + (2xy - 6y) - (5x - 15) = x(x - 3) + 2y(x - 3) - 5(x - 3) =$$
$$= (x - 3)(x + 2y - 5).$$

Значит, уравнение, график которого нам надо построить, можно записать так:

$$(x - 3)(x + 2y - 5) = 0.$$

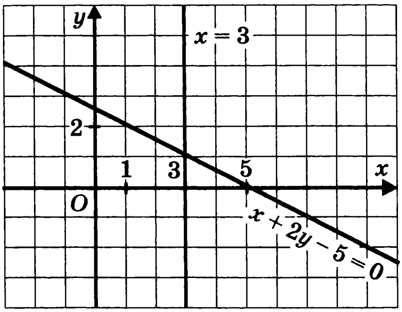


Рис. 78

График этого уравнения — объединение двух прямых: прямой $x = 3$ (прямая, параллельная оси ординат) и прямой $x + 2y - 5 = 0$. Для построения второй прямой следует найти две точки, ей принадлежащие: если $y = 0$, то $x = 5$; если $x = 1$, то $y = 2$. Итак, строим вторую прямую по точкам (5; 0) и (1; 2). График заданного уравнения изображен на рисунке 78. ◼

Пример 8. Найти пары целых чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют уравнению $9y + 10x - 6xy = 8$.

Решение. Поработаем с левой частью уравнения:

$$9y + 10x - 6xy = (9y - 6xy) + 10x = 3y(3 - 2x) + (10x - 15) + 15 =$$
$$= 3y(3 - 2x) + 5(2x - 3) + 15 = 15 - 3y(2x - 3) + 5(2x - 3) =$$
$$= 15 + (2x - 3)(5 - 3y) = 15 - (2x - 3)(3y - 5).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать так:

$15 - (2x - 3)(3y - 5) = 8$, откуда следует, что $(2x - 3)(3y - 5) = 7$.

Нас интересуют только целочисленные решения уравнения, значит, оба множителя в левой части уравнения должны быть целыми числами, которые при перемножении дают в результате 7. Какие два целых числа дадут 7 в произведении? Есть лишь 4 возможности: 1 и 7, 7 и 1, -1 и -7, -7 и -1. Рассмотрим каждый из этих четырех случаев по отдельности.

1) 1 и 7. Это значит, что $2x - 3 = 1$, $3y - 5 = 7$. Отсюда следует, что $x = 2$, $y = 4$.

2) 7 и 1. Это значит, что $2x - 3 = 7$, $3y - 5 = 1$. Отсюда следует, что $x = 5$, $y = 2$.

3) -1 и -7. Это значит, что $2x - 3 = -1$, $3y - 5 = -7$. Отсюда следует, что $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$. Эта пара нас не устраивает.

4) -7 и -1. Это значит, что $2x - 3 = -7$, $3y - 5 = -1$. Отсюда следует, что $x = -2$, $y = \frac{4}{3}$. Эта пара нас также не устраивает.

Ответ: $(2; 4)$ и $(5; 2)$.

Пример 9. Доказать, что при любом натуральном значении n выполняется соотношение $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24$.

Решение. Похожий пример, но попроще, мы рассмотрели выше, в § 27. Теперь нам по силам более сложный пример. Поработаем с многочленом $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, попытаемся разложить его на множители — это всегда полезно при решении задач на делимость:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n^3 + n^2 + 5n^2 + 5n + 6n + 6) =$$
$$= n(n^2(n + 1) + 5n(n + 1) + 6(n + 1)) = n(n + 1)(n^2 + 5n + 6).$$

Теперь разложим на множители трехчлен $n^2 + 5n + 6$:

$$n^2 + 5n + 6 = n^2 + 2n + 3n + 6 = n(n + 2) + 3(n + 2) = \\ = (n + 2)(n + 3).$$

Итак, $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

Среди четырех подряд идущих натуральных чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ обязательно присутствует хотя бы одно число, делящееся на 3, и два четных числа, причем одно из этих четных чисел даже делится на 4. Значит, произведение этих четырех чисел делится на $2 \cdot 3 \cdot 4$, т. е. на 24. Итак, $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24$. ◼

Пример 10. Имеются два сплава с различным процентным содержанием меди, один — массой 12 кг, другой — массой 8 кг. От первого и второго сплавов отрезали куски равной массы и поменяли местами. В результате получилось два новых сплава с теми же массами, но уже с равным процентным содержанием меди. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

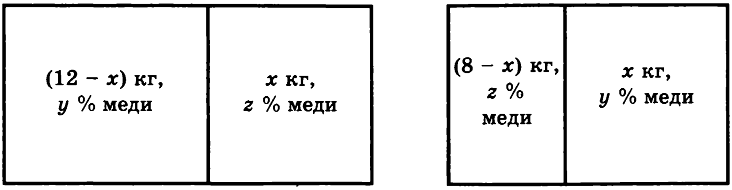
Введем три переменные: x кг — масса каждого из отрезанных кусков; y % — содержание меди в первом сплаве, z % — содержание меди во втором сплаве. После того как от каждого из первоначальных сплавов отрезали по куску массой x кг и поменяли местами, получились два новых сплава: их структура схематически представлена на рисунке 79. Обсудим эти схемы.

На рисунке 79, *а* представлена структура третьего сплава: он состоит из $(12 - x)$ кг первого сплава с y %-м содержанием меди и из x кг второго сплава с z %-м содержанием меди. Можно подсчитать массу A меди в третьем сплаве:

$$A = \left(\frac{y}{100}(12 - x) + \frac{z}{100}x\right) \text{кг.}$$

На рисунке 79, *б* представлена структура четвертого сплава: он состоит из $(8 - x)$ кг второго сплава с z %-м содержанием меди и из x кг первого сплава с y %-м содержанием меди. Можно подсчитать массу меди B в четвертом сплаве:

$$B = \left(\frac{z}{100}(8 - x) + \frac{y}{100}x\right) \text{кг.}$$



а *б*

Рис. 79

Наступил самый ответственный момент. Что значит, что процентное содержание меди в третьем и четвертом сплавах одинаково? Это значит, что отношение массы меди в третьем сплаве к массе третьего сплава равно отношению массы меди в четвертом сплаве к массе четвертого сплава: $\frac{A}{12} = \frac{B}{8}$. Из этой пропорции следует, что $2A = 3B$, т. е.

$$2\left(\frac{y}{100}(12 - x) + \frac{z}{100}x\right) = 3\left(\frac{z}{100}(8 - x) + \frac{y}{100}x\right).$$

Это уравнение — математическая модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Умножим обе части уравнения на 100 и раскроем скобки в обеих частях уравнения:

$$24y - 2xy + 2xz = 24z - 3xz + 3xy;$$
$$(24y - 24z) + (5xz - 5xy) = 0;$$
$$24(y - z) - 5x(y - z) = 0;$$
$$(y - z)(24 - 5x) = 0.$$

По условию $y \neq z$, но тогда из последнего уравнения следует, что $24 - 5x = 0$, т. е. $x = 4{,}8$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Нам нужно было найти массу каждого из отрезанных от обоих сплавов кусков, эту величину мы обозначили буквой x, так что ответ на вопрос задачи уже получен: от каждого из сплавов отрезали (и поменяли местами) по 4,8 кг. Обратите внимание, что в составленном уравнении было три переменных, из которых две нас не интересовали, да, впрочем, они и исчезли в процессе преобразований.

Ответ: 4,8 кг.

§30. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

В § 24 мы получили семь формул сокращенного умножения. Там же мы отметили, что любой из этих формул можно пользоваться как для сокращенного умножения многочлена на многочлен (если применять формулы в том виде, в котором они были записаны в § 24), так и для разложения многочлена на множители, если их переписать следующим образом:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (1)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \quad (2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad (3)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \quad (4)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2; \quad (5)$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3; \quad (6)$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3. \quad (7)$$

Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой *разность квадратов* (безразлично чего — чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью — к выражению, представляющему собой *разность (сумму) кубов;* четвертую и пятую формулы применяют к трехчлену, представляющему собой *полный квадрат,* т. е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений; шестую и седьмую формулы применяют к многочлену, представляющему собой *полный куб.*

Пример 1. Разложить на множители:

а) $64x^2 - 9$; в) $(2x - 1)^2 - 25$;

б) $x^6 - 4a^4$; г) $(a + 3)^2 - (b - 2)^2$.

Решение. Во всех четырех примерах воспользуемся формулой (1) (разность квадратов):

а) $64x^2 - 9 = (8x)^2 - 3^2 = (8x - 3)(8x + 3)$;

б) $x^6 - 4a^4 = (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2)$;

в) $(2x - 1)^2 - 25 = (2x - 1)^2 - 5^2 = ((2x - 1) - 5) \cdot ((2x - 1) + 5) =$
$= (2x - 6)(2x + 4) = 2(x - 3) \cdot 2(x + 2) = 4(x - 3)(x + 2)$.

Здесь, кроме формулы разности квадратов, мы использовали прием вынесения общего множителя за скобки — для двучленов $2x - 6$ и $2x + 4$.

г) $(a + 3)^2 - (b - 2)^2 = ((a + 3) - (b - 2)) \cdot ((a + 3) + (b - 2)) =$ $= (a + 3 - b + 2)(a + 3 + b - 2) = (a - b + 5)(a + b + 1)$. ◼

Пример 2. Разложить на множители:

а) $125a^3 - 8b^3$; б) $a^6 + 27b^3$; в) $x^6 - a^6$.

Решение. Здесь воспользуемся формулами (2) и (3) (разность и сумма кубов).

а) $125a^3 - 8b^3 = (5a)^3 - (2b)^3 = (5a - 2b) \cdot ((5a)^2 + 5a \cdot 2b + (2b)^2) =$ $= (5a - 2b)(25a^2 + 10ab + 4b^2)$.

б) $a^6 + 27b^3 = (a^2)^3 + (3b)^3 = (a^2 + 3b) \cdot ((a^2)^2 - a^2 \cdot 3b + (3b)^2) =$ $= (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^4)$.

в) Первый способ:

$$x^6 - a^6 = (x^2)^3 - (a^2)^3 = (x^2 - a^2) \cdot ((x^2)^2 + x^2 \cdot a^2 + (a^2)^2) =$$
$$= (x - a)(x + a)(x^4 + x^2a^2 + a^4).$$

Второй способ:

$$x^6 - a^6 = (x^3)^2 - (a^3)^2 = (x^3 - a^3)(x^3 + a^3) =$$
$$= (x - a)(x^2 + xa + a^2)(x + a)(x^2 - xa + a^2).$$ ◼

Замечание. В примере 2в) при одном способе решения получилось разложение

$$(x - a)(x + a)(x^4 + x^2a^2 + a^4),$$

а при другом способе — разложение

$$(x - a)(x + a)(x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2).$$

Разумеется, это одно и то же: в следующем параграфе мы покажем, как от многочлена $x^4 + x^2a^2 + a^4$ перейти к произведению $(x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2)$. Впрочем, и сейчас вы можете убедиться, что

$$x^4 + x^2a^2 + a^4 = (x^2 + xa + a^2)(x^2 - xa + a^2).$$

Для этого достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (сделайте это).

Пример 3. Разложить на множители:

а) $a^2 - 4ab + 4b^2$; в) $4x^4 - 12x^2y + 9y^2$;

б) $x^4 + 2x^2 + 1$; г) $25a^2 + 10ab + 4b^2$.

Решение. В этих примерах даны трехчлены, для их разложения на множители будем пользоваться формулами (4) и (5), если, конечно, убедимся в том, что трехчлен является полным квадратом.

а) $a^2 - 4ab + 4b^2 = a^2 + (2b)^2 - 2 \cdot a \cdot 2b = (a - 2b)^2$.

Мы убедились, что трехчлен содержит сумму квадратов одночленов a и $2b$, а также удвоенное произведение этих одночленов. Значит, это полный квадрат, причем квадрат разности.

б) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 = (x^2 + 1)^2$;

в) $4x^4 - 12x^2y + 9y^2 = (2x^2)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3y = (2x^2 - 3y)^2$;

г) $25a^2 + 10ab + 4b^2 = (5a)^2 + (2b)^2 + 5a \cdot 2b$.

Так как $10ab$ — это не удвоенное произведение одночленов $5a$ и $2b$, то данный трехчлен не является полным квадратом. Разложить его на множители с помощью формул (4) или (5) мы не можем. ■

Подчеркнем еще раз: если хотите воспользоваться формулами (4) или (5), то сначала убедитесь, что заданный трехчлен есть полный квадрат. В противном случае формулы (4) и (5) применять нельзя — именно так обстояло дело в примере 3г).

Пример 4. Доказать, что $(27^3 + 28^3) \,\vdots\, 55$.

Решение. $27^3 + 28^3 = (27 + 28)(27^2 - 27 \cdot 28 + 28^2) = 55 \cdot (27^2 - 27 \cdot 28 + 28^2)$.

Полученное произведение делится на 55, что и требовалось доказать. ■

§ 31. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ С ПОМОЩЬЮ КОМБИНАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЕМОВ

Не так уж часто бывает, чтобы при решении математического примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т. д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим в этом параграфе.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5.$$

Решение. 1) Сначала займемся вынесением общего множителя за скобки. Рассмотрим коэффициенты 36, 96, 64. Все они делятся на 4, причем это — наибольший общий делитель, вынесем его за скобки. Во все члены многочлена входит переменная a (в первый a^6, во второй a^4, в третий a^2), поэтому за скобки можно вынести a^2. Точно так же во все члены многочлена входит переменная b (в первый b^3, во второй b^4, в третий b^5) — за скобки можно вынести b^3.

Итак, за скобки вынесем $4a^2b^3$. Тогда получим

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4 - 24a^2b + 16b^2).$$

2) Рассмотрим трехчлен $9a^4 - 24a^2b + 16b^2$. Выясним, не является ли он полным квадратом. Имеем

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2)^2 + (4b)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 4b.$$

Все условия полного квадрата соблюдены, следовательно,

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2 - 4b)^2.$$

3) Комбинируя два приема (вынесение общего множителя за скобки и использование формулы сокращенного умножения), получаем окончательный результат:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2 - 4b)^2.$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен $a^2 - c^2 + b^2 + 2ab$.

Решение. 1) Сначала попробуем воспользоваться способом группировки. До сих пор четыре слагаемых мы разбивали на группы по парам (см. § 29). Попытаемся и здесь сделать так же:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 - c^2) + (b^2 + 2ab) =$$
$$= (a - c)(a + c) + b(b + 2a).$$

Эта группировка неудачна, нет общего множителя.

Попробуем по-другому:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + b^2) + (-c^2 + 2ab),$$

здесь также ничего хорошего нет.

Третья попытка:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab) + (-c^2 + b^2) =$$
$$= a(a + 2b) + (b - c)(b + c),$$

и здесь нет общего множителя.

Однако все-таки способ группировки в этом примере сработает. Ведь ниоткуда не следует, что группировать слагаемые можно только по парам, это можно сделать и так:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2.$$

Теперь вы отчетливо видите структуру данного многочлена: разность квадратов.

2) К полученному выражению применим формулу разности квадратов:

$$(a + b)^2 - c^2 = ((a + b) - c)\,((a + b) + c) = (a + b - c)\,(a + b + c).$$

Итак, комбинируя два приема (группировку и использование формул сокращенного умножения — квадрат суммы и разность квадратов), мы получили окончательный результат:

$$a^2 - c^2 + b^2 + 2ab = (a + b - c)\,(a + b + c).$$

Пример 3. Разложить на множители двучлен $x^4 + 4y^4$.

Решение. Проанализируем структуру данного двучлена. Что такое x^4? Это $(x^2)^2$. Что такое $4y^4$? Это $(2y^2)^2$. Значит, имеем сумму квадратов $(x^2)^2 + (2y^2)^2$. Обычно, увидев сумму квадратов двух выражений (чисел, одночленов, многочленов), математик ищет удвоенное произведение этих выражений для того, чтобы получить полный квадрат (об этом мы уже говорили выше — в § 25). В данном случае таким удвоенным произведением будет $2 \cdot x^2 \cdot 2y^2$, т.е. $4x^2y^2$. Но его в примере нет. Что же делать?

Нрибавим к заданному многочлену то, что нам нужно, но, чтобы ничего не изменилось, тут же и вычтем:

$$(x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2.$$

Это дает возможность сгруппировать первые три члена так, что выделится полный квадрат. Дальнейшее решение идет по плану примера 2:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = ((x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)\,(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

Пример 4. Разложить на множители трехчлен

$$x^4 + x^2a^2 + a^4.$$

Решение. Применим метод выделения полного квадрата (см. § 25). Для этого представим x^2a^2 в виде $2x^2a^2 - x^2a^2$. Получим

$$x^4 + x^2a^2 + a^4 = x^4 + 2x^2a^2 - x^2a^2 + a^4 = (x^4 + 2x^2a^2 + a^4) - x^2a^2 =$$
$$= (x^2 + a^2)^2 - (xa)^2 = (x^2 + a^2 - xa)(x^2 + a^2 + xa).$$ ■

А теперь вернитесь, пожалуйста, к замечанию, которое было сделано в § 30 (после примера 2). Как видите, мы выполнили данное там обещание.

Пример 5. Решить уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Решение.

Первый способ. Представим $-6x$ в виде суммы $-x - 5x$, а затем применим способ группировки:

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = (x^2 - x) + (-5x + 5) =$$
$$= x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5).$$

Тогда заданное уравнение примет вид

$$(x - 1)(x - 5) = 0,$$

откуда находим, что либо $x = 1$, либо $x = 5$.

Второй способ. Применим метод выделения полного квадрата, для чего представим слагаемое 5 в виде $9 - 4$. Получим

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x^2 - 6x + 9) - 4 =$$
$$= (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2)(x - 3 + 2) = (x - 5)(x - 1).$$

Снова пришли к уравнению $(x - 1)(x - 5) = 0$, имеющему корни 1 и 5.

Ответ: 1, 5.

Пример 6. Разложить на множители многочлен

$$x^5 + x^2 + 2x + 2.$$

Решение. Здесь есть смысл представить x^2 в виде $-x^2 + 2x^2$; тогда появится возможность представить одну группу слагаемых в виде $x^5 - x^2$, а другую — в виде $2x^2 + 2x + 2$. Что это дает? Смотрите:

$$x^5 + x^2 + 2x + 2 = (x^5 - x^2) + (2x^2 + 2x + 2) = x^2(x^3 - 1) +$$
$$+ 2(x^2 + x + 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1) =$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 2).$$ ■

Пример 7. Решить уравнение: а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + 14x^2 - 15 = 0$.

Решение. а) Представим $-13x^2$ в виде $-9x^2 - 4x^2$:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = x^4 - 9x^2 - 4x^2 + 36 = (x^4 - 9x^2) - (4x^2 - 36) =$$
$$= x^2(x^2 - 9) - 4(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2).$$

Значит, заданное уравнение нам удалось преобразовать к следующему виду: $(x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$. Теперь можно без особого труда указать корни данного уравнения: 3, −3, 2, −2.

б) Здесь можно использовать ту же идею, что и в пункте а): представить $14x^2$ в виде $15x^2 - x^2$; предоставим вам возможность самим довести эту идею до логического завершения. А мы, ради разнообразия, воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$x^4 + 14x^2 - 15 = (x^4 + 14x^2 + 49) - 49 - 15 = (x^2 + 7)^2 - 64 =$$
$$= (x^2 + 7 - 8)(x^2 + 7 + 8) = (x^2 - 1)(x^2 + 15) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 15).$$

Значит, заданное уравнение нам удалось преобразовать к следующему виду: $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 15) = 0$. Уравнение $x^2 + 15 = 0$ не имеет корней, значит, заданное уравнение имеет два корня: 1, −1.

Ответ: а) 3, −3, 2, −2; б) 1, −1.

Замечание. Приоткроем секрет, как в примере 7а) мы догадались представить $-13x^2$ в виде $-9x^2 - 4x^2$, а в примере 7б) представить $14x^2$ в виде $15x^2 - x^2$. Обратите внимание: $9 \cdot 4 = 36$, а $15 \cdot (-1) = -15$; в обоих случаях произведение равно свободному члену уравнения. Между прочим, ту же идею мы использовали в примерах 4 и 6 из § 29 (проверьте!).

Пример 8. Решить уравнение $x^3 + 9x^2 + 27x + 19 = 0$.

Решение. Этот пример несколько сложнее, здесь придется применить не уже привычный вам метод выделения полного квадрата, а похожую идею: выделить полный куб:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 8 = (x + 3)^3 - 8.$$

А теперь воспользуемся формулой разности кубов:

$$(x + 3)^3 - 2^3 = ((x + 3) - 2)((x + 3)^2 + 2(x + 3) + 2^2) =$$
$$= (x + 1)(x^2 + 8x + 19).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать так:

$$(x + 1)(x^2 + 8x + 19) = 0.$$

Отсюда следует, что либо $x + 1 = 0$, т. е. $x = -1$, либо $x^2 + 8x + 19 = 0$. Последнее уравнение не имеет корней. Чтобы в этом убедиться, перепишем квадратный трехчлен $x^2 + 8x + 19$ в виде $(x + 4)^2 + 3$. Это выражение положительно (т. е. отлично от нуля) при любых значениях переменной.

Ответ: $x = -1$.

§ 32. СОКРАЩЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Новое понятие в математике редко возникает «из ничего», «на пустом месте». Оно появляется тогда, когда в нем ощущается объективная необходимость. Именно так появились в математике отрицательные числа, так появились обыкновенные и десятичные дроби.

Предпосылки для введения нового понятия «алгебраическая дробь» у нас имеются. Давайте вернемся к § 19. Обсуждая там деление одночлена на одночлен, мы рассмотрели ряд примеров. Выделим два из них.

1. Разделить одночлен $36a^3b^5$ на одночлен $4ab^2$ (см. пример 1в) из § 19).

Решали мы его так. Выражение $36a^3b^5 : 4ab^2$ записали, используя черту дроби: $\frac{36a^3b^5}{4ab^2}$ (ведь $A : B$ и $\frac{A}{B}$ — одно и то же). Это позволило выражения $36 : 4$, $a^3 : a$, $b^5 : b^2$ также записать с использованием черты дроби, что сделало решение примера более наглядным:

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

2. Разделить одночлен $4x^3$ на одночлен $2xy$ (см. пример 1д) из § 19).

Действуя по тому же образцу, мы получили

$$4x^3 : 2xy = \frac{4x^3}{2xy} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1}{y} = 2x^2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x^2}{y}.$$

В § 19 мы отметили, что одночлен $4x^3$ не удалось разделить на одночлен $2xy$ так, чтобы получился одночлен. Но ведь математические модели могут содержать операцию деления любых одночленов, не обязательно таких, что один делится на другой. Поэтому математики ввели новое понятие — понятие алгебраической дроби. В частности, $\frac{2x^2}{y}$ — алгебраическая дробь.

Теперь вернемся к § 26. Обсуждая там операцию деления многочлена на одночлен, мы отметили, что она не всегда выполнима. Так, в примере 2 из § 26 речь шла о делении двучлена

$6x^3 - 24x^2$ на одночлен $6x^2$. Эта операция оказалась выполнимой, и в результате мы получили двучлен $x - 4$. Значит,

$$\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2} = x - 4.$$

Иными словами, алгебраическое выражение $\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2}$ удалось заменить более простым выражением — многочленом $x - 4$.

В то же время в примере 3 из § 26 не удалось разделить многочлен $8a^3 + 6a^2b - b$ на $2a^2$, т. е. выражение $\frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}$ не удалось заменить более простым выражением, пришлось так и оставить его в виде алгебраической дроби.

Что же касается операции деления многочлена на многочлен, то единственное, что мы можем сейчас сказать: один многочлен можно разделить на другой, если этот другой многочлен является одним из множителей в разложении первого многочлена на множители.

Например, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Значит, $x^3 - 1$ можно разделить на $x^2 + x + 1$, получится $x - 1$; $x^3 - 1$ можно разделить на $x - 1$, получится $x^2 + x + 1$.

Алгебраической дробью называют отношение двух многочленов P и Q. При этом используют запись $\frac{P}{Q}$, где P — *числитель*, Q — *знаменатель алгебраической дроби.*

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{2x^2}{y}, \frac{8a^3 + 6a^2b - b}{2a^2}, \frac{x + y}{x - y}.$$

Иногда алгебраическую дробь удается заменить многочленом. Например, как мы уже установили ранее,

$$\frac{6x^3 - 24x^2}{6x^2} = x - 4$$

(многочлен $6x^3 - 24x^2$ удалось разделить на $6x^2$, при этом в частном получается $x - 4$); мы также отмечали, что

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = x - 1.$$

Но так бывает сравнительно редко.

Впрочем, похожая ситуация уже встречалась вам — при изучении обыкновенных дробей. Например, дробь $\frac{24}{6}$ можно заменить целым числом 4, а дробь $\frac{40}{8}$ — целым числом 5. А вот дробь $\frac{32}{24}$ целым числом заменить не удается, хотя эту дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на число 8 — общий множитель числителя и знаменателя: $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$. Точно так же *можно сокращать алгебраические дроби, разделив одновременно числитель и знаменатель дроби на их общий множитель.* А для этого надо разложить и числитель, и знаменатель дроби на множители. Здесь нам и понадобится все то, что мы так долго обсуждали в этой главе.

Пример 1. Сократить алгебраическую дробь:

а) $\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5}$;   б) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)}$;   в) $\frac{x^2 - xy}{x^4 - xy^3}$.

Решение. а) Найдем общий множитель для одночленов $12x^3y^4$ и $8x^2y^5$; это $4x^2y^4$. Тогда

$$12x^3y^4 = 4x^2y^4 \cdot 3x; \quad 8x^2y^5 = 4x^2y^4 \cdot 2y.$$

Значит,

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{4x^2y^4 \cdot 3x}{4x^2y^4 \cdot 2y} = \frac{3x}{2y}.$$

Числитель и знаменатель заданной алгебраической дроби сократили на общий множитель $4x^2y^4$.

Решение этого примера можно записать по-другому:

$$\frac{12x^3y^4}{8x^2y^5} = \frac{12}{8} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y^5} = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{y} = \frac{3x}{2y}.$$

б) Чтобы сократить дробь, разложим ее числитель и знаменатель на множители. Получим

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{(a + b)(a + b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$$

(дробь сократили на общий множитель $a + b$).

А теперь вернитесь к замечанию 2 из § 1. Видите, данное там обещание мы наконец-то смогли выполнить.

в) $\dfrac{x^2 - xy}{x^4 - xy^3} = \dfrac{x(x-y)}{x(x^3 - y^3)} = \dfrac{x(x-y)}{x(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$.

(сократили дробь на общий множитель числителя и знаменателя, т. е. на $x(x - y)$).

Итак, для того чтобы сократить алгебраическую дробь, следует сначала разложить на множители ее числитель и знаменатель (если они не совпадают). Так что ваш успех в этом новом деле (сокращении алгебраических дробей) в основном зависит от того, как вы усвоили материал предыдущих параграфов этой главы.

Пример 2. Сократить алгебраическую дробь:

а) $\dfrac{a^6 + b^6}{2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2}$;

б) $\dfrac{a^4 - 10a^2 + 169}{a^2 + 6a + 13}$;

в) $\dfrac{a^3 - 6a^2 + 12a - 9}{a^4 - 3a^3 + 3a^2}$.

Решение. а) Разложим на множители числитель дроби:

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

Разложим на множители знаменатель дроби:

$$2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2 = (2a^3 + 2ab^2) - (a^2b + b^3) = 2a(a^2 + b^2) - b(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(2a - b).$$

Теперь можно сократить данную дробь:

$$\frac{a^6 + b^6}{2a^3 - b^3 - a^2b + 2ab^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)}{(a^2 + b^2)(2a - b)} = \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{2a - b}.$$

б) Разложим на множители числитель дроби:

$$a^4 - 10a^2 + 169 = ((a^2)^2 + 13^2 + 26a^2) - 26a^2 - 10a^2 = (a^2 + 13)^2 - 36a^2 = (a^2 + 13 - 6a)(a^2 + 13 + 6a).$$

Обращаем ваше внимание, что здесь мы в очередной раз воспользовались методом выделения полного квадрата.

Что касается заданной дроби, то ее уже можно сократить:

$$\frac{a^4 - 10a^2 + 169}{a^2 + 6a + 13} = \frac{(a^2 - 6a + 13)(a^2 + 6a + 13)}{a^2 + 6a + 13} = a^2 - 6a + 13.$$

в) Разложим на множители числитель дроби; для этого, как в примере 8 из предыдущего параграфа, выделим полный куб:

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 9 = (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) - 1 = (a - 2)^3 - 1 =$$
$$= ((a - 2) - 1)((a - 2)^2 + (a - 2) + 1) = (a - 3)(a^2 - 3a + 3).$$

Разложим на множители знаменатель дроби:

$$a^4 - 3a^3 + 3a^2 = a^2(a^2 - 3a + 3).$$

Теперь можно сократить данную дробь:

$$\frac{a^3 - 6a^2 + 12a - 9}{a^4 - 3a^3 + 3a^2} = \frac{(a - 3)(a^2 - 3a + 3)}{a^2(a^2 - 3a + 3)} = \frac{a - 3}{a^2}.$$

§33. ТОЖДЕСТВА

В этом параграфе мы познакомимся еще с одним алгебраическим термином. Мы знаем, например, что

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2,$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$

Написанные равенства верны при любых значениях входящих в их состав переменных. Такие равенства в алгебре называют *тождествами*. Левую и правую части тождества называют выражениями, *тождественно равными* друг другу (или просто *тождественными*). Например, $a^2 - b^2$ и $(a - b)(a + b)$ — тождественно равные выражения. Всякую замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют *тождественным преобразованием* выражения.

Все, чем мы занимались в главах 3—7: действия со степенями, с одночленами, с многочленами, — все это было изучением тождественных преобразований.

В математике часто бывает так, что, используя некоторый термин, вдруг обнаруживают, что к новой ситуации он становится не очень приспособленным, требует уточнения. Это относится и к термину «тождество». Для работы с многочленами данное выше определение абсолютно точное. Однако уже для работы с алгебраическими дробями в понимании этого термина понадобится корректировка, придется сделать некоторые уточнения.

Рассмотрим алгебраическую дробь $\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. Ее можно сократить на $x - 1$ — общий множитель числителя и знаменателя. Таким образом, имеет место равенство

$$\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x-2}. \qquad (1)$$

Является ли это равенство тождеством? Введя выше этот термин, мы отметили, что тождество — это равенство с переменными, верное при *любых* значениях переменных. Но про равенство (1) этого сказать нельзя, оно не имеет смысла при $x = 1$, при $x = 2$, т. е. оно верно уже не при любых значениях переменной x. Указанные значения не являются допустимыми для выражений, входящих в состав равенства (1). Если же ограничиться только *допустимыми* значениями переменной x, то при любых таких значениях равенство (1) окажется верным.

Учитывая подобные ситуации, математики уточнили понятие тождества.

Определение. **Тождество** — это равенство, верное *при любых допустимых* значениях входящих в его состав переменных.

В этом смысле равенство (1) — тождество. Вот та корректировка понятия «тождество», о которой мы упоминали выше.

Вернемся к последнему примеру предыдущего параграфа. В пункте а) мы видели, что $\frac{a^6+b^6}{2a^3-b^3-a^2b+2ab^2} = \frac{(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)}{(a^2+b^2)(2a-b)} = \frac{a^4-a^2b^2+b^4}{2a-b}$, т. е. получили тождество $\frac{a^6+b^6}{2a^3-b^3-a^2b+2ab^2} = \frac{a^4-a^2b^2+b^4}{2a-b}$. Каковы здесь допустимые значения переменных? Во-первых, должно выполняться условие $2a - b \neq 0$. Во-вторых, дробь мы сократили на $a^2 + b^2$, значит, должно выполняться условие $a^2 + b^2 \neq 0$ или, что то же самое, $(a; b) \neq (0; 0)$. Впрочем, если $2a - b \neq 0$, то, в частности, $(a; b) \neq (0; 0)$. Первое условие более ограничительное, чем второе, так что достаточно оставить первое условие: $2a - b \neq 0$.

В пункте б) мы видели, что $\frac{(a^2-6a+13)(a^2+6a+13)}{a^2+6a+13} = a^2 - 6a + 13$. Каковы здесь допустимые значения переменной?

Должно выполняться условие $a^2 + 6a + 13 \neq 0$. Но оно автоматически выполняется, поскольку $a^2 + 6a + 13 = (a + 3)^2 + 4$. Что это значит? Это значит, что $\frac{(a^2 - 6a + 13)(a^2 + 6a + 13)}{a^2 + 6a + 13} =$ $= a^2 - 6a + 13$ является тождеством при любых значениях переменной.

Пример 1. Построить график уравнения:

а) $\frac{xy + 4x - 2x^2 - 2y}{x - 2} = 0$; б) $\frac{y^2 + 2y - 2x - x^2}{x - y} = 0$.

Решение. а) Рассмотрим числитель алгебраической дроби в левой части уравнения:

$$xy + 4x - 2x^2 - 2y = (xy - 2y) - (2x^2 - 4x) = y(x - 2) - 2x(x - 2) =$$
$$= (x - 2)(y - 2x).$$

Значит, $\frac{xy + 4x - 2x^2 - 2y}{x - 2} = \frac{(x - 2)(y - 2x)}{x - 2} = y - 2x$. Подчеркнем, что тождество $\frac{xy + 4x - 2x^2 - 2y}{x - 2} = y - 2x$ имеет место лишь при $x \neq 2$.

Проведенные рассуждения позволяют переформулировать условия задачи: нам нужно построить график уравнения $y - 2x = 0$ при условии, что $x \neq 2$. Графиком уравнения $y - 2x = 0$ является прямая, а условие $x \neq 2$ означает, что на этой прямой нельзя брать точку с абсциссой $x = 2$. График заданного уравнения изображен на рисунке 80. Обратите внимание: точка (2; 4) отмечена светлым кружочком — «выколотая точка».

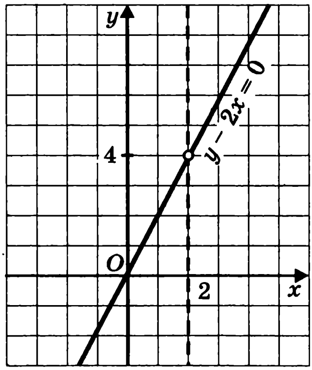


Рис. 80

б) Как и в пункте а), начнем с числителя алгебраической дроби:

$$y^2 + 2y - 2x - x^2 = (y^2 - x^2) + (2y - 2x) =$$
$$= (y - x)(y + x) + 2(y - x) = (y - x)(y + x + 2).$$

Значит, $\frac{y^2 + 2y - 2x - x^2}{x - y} = \frac{(y - x)(y + x + 2)}{x - y} = -(y + x + 2)$.

Подчеркнем, что тождество $\frac{y^2 + 2y - 2x - x^2}{x - y} = -(y + x + 2)$ имеет место лишь при $x - y \neq 0$.

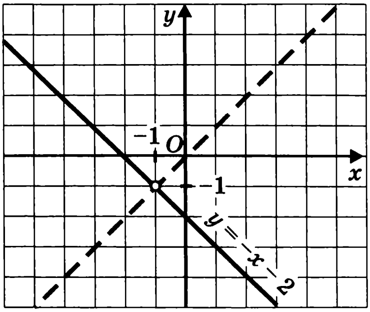


Рис. 81

Проведенные рассуждения позволяют переформулировать условия задачи: нам нужно построить график уравнения $-(y + x + 2) = 0$, т. е. график линейной функции $y = -x - 2$ при условии, что $y \neq x$. Графиком линейной функции $y = -x - 2$ является прямая, а условие $y \neq x$ означает, что на этой прямой нельзя брать точку, координаты которой удовлетворяют условию $y = x$, т. е. принадлежащую прямой $y = x$. График заданного уравнения изображен на рисунке 81; обратите внимание: точка пересечения прямых $y = -x - 2$ и $y = x$ — «выколотая точка».

Пример 2. Доказать, что при $x \neq 1$ имеет место тождество

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 = \frac{x - 6x^6 + 5x^7}{(x - 1)^2}. \qquad (2)$$

Решение. Чтобы доказать, что $A = \frac{B}{C}$, нужно установить, что $AC = B$. Воспользовавшись этим замечанием, рассмотрим произведение многочленов $(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)(x - 1)^2$. Имеем

$$(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)(x - 1)^2 =$$
$$= (x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5)(x^2 - 2x + 1) =$$
$$= x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 - 2x^2 - 4x^3 - 6x^4 - 8x^5 - 10x^6 + x +$$
$$+ 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5.$$

Осталось привести подобные члены; получим $x - 6x^6 + 5x^7$. Тождество (2) доказано.

Пример 3. Доказать, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Решение. $a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$. Сгруппируем в полученной сумме слагаемые $(a + b)^3$ и c^3; это позволит применить формулу суммы кубов:

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 = ((a + b)^3 + c^3) - 3ab(a + b) =$$
$$= ((a + b) + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b) =$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc) - 3ab(a + b).$$

Но по условию $a + b + c = 0$, значит, в полученном выражении первое произведение равно нулю, а во втором произведении вместо $a + b$ можно написать $-c$, т. е. $-3ab(a + b) = -3ab(-c) = 3abc$. В итоге получаем $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. ◀

ГЛАВА

7 ФУНКЦИЯ $y = x^2$

§34. ФУНКЦИЯ $y = x^2$ И ЕЕ ГРАФИК

В главе 2 мы ввели термин «линейная функция», понимая под этим линейное уравнение вида $y = kx + m$ с двумя переменными x, y. Правда, переменные x, y, фигурирующие в этом уравнении (в этой математической модели), считались неравноправными: x — независимая переменная (аргумент), которой мы могли придавать любые значения независимо ни от чего; y — зависимая переменная, поскольку ее значение зависело от того, какое значение переменной x было выбрано. Но тогда возникает естественный вопрос: а не встречаются ли математические модели такого же плана, но такие, у которых y выражается через x не по формуле $y = kx + m$, а каким-то иным способом? Ответ ясен: конечно, встречаются. Если, например, x — сторона квадрата, а y — его площадь, то $y = x^2$. Если x — сторона куба, а y — его объем, то $y = x^3$. Если x — одна сторона прямоугольника, площадь которого равна 100 см^2, а y — другая его сторона, то $y = \frac{100}{x}$. Поэтому, естественно, приходится изучать и модель $y = x^2$, и модель $y = x^3$, и модель $y = \frac{100}{x}$, и многие другие модели, имеющие такую же структуру: в левой части равенства находится переменная y, а в правой — какое-то выражение с переменной x. Для таких моделей сохраняют термин «функция», опуская прилагательное «линейная».

Замечание. Выше мы уже не раз говорили о том, как обстоит дело в математике с новыми понятиями, новыми терминами. Часто бывает так: ввели новое понятие, работают с ним, но затем, по мере дальнейшего изучения математики, начинают осознавать, что введенное понятие требует уточнения, развития. Именно так обстояло дело с понятием «тождество». Точно так же обстоит дело и с понятием «функция». Мы еще довольно долго будем привыкать к нему, набираться опыта, работать с этим понятием, пока не придем к строгому определению (это будет в 9-м классе).

В этом параграфе мы рассмотрим функцию $y = x^2$ и построим ее график.

Дадим независимой переменной x несколько конкретных значений и вычислим соответствующие значения зависимой переменной y (по формуле $y = x^2$):

если $x = 0$, то $y = 0^2 = 0$;
если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;
если $x = 2$, то $y = 2^2 = 4$;
если $x = 3$, то $y = 3^2 = 9$;
если $x = -1$, то $y = (-1)^2 = 1$;
если $x = -2$, то $y = (-2)^2 = 4$;
если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$.

Короче говоря, мы составили следующую таблицу:

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	4	9	1	4	9

Построим найденные точки (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9), (−1; 1), (−2; 4), (− 3; 9) на координатной плоскости xOy (рис. 82, *а*). Эти точки расположены на некоторой линии, начертим ее (рис. 82, *б*). Эту линию называют **параболой**.

Конечно, в идеале надо было дать аргументу x все возможные значения, вычислить соответствующие значения переменной y и построить полученные точки (x; y). Тогда график был бы абсолютно точным, безупречным. Однако это нереально, ведь таких точек бесконечно много. Поэтому математики поступают так: берут конечное множество точек, строят их на координатной плоскости и смотрят, какая линия намечается этими точками. Если контуры этой линии проявляются достаточно отчетливо, то эту линию проводят. Возможны ли ошибки? Не без этого. Поэтому и надо все

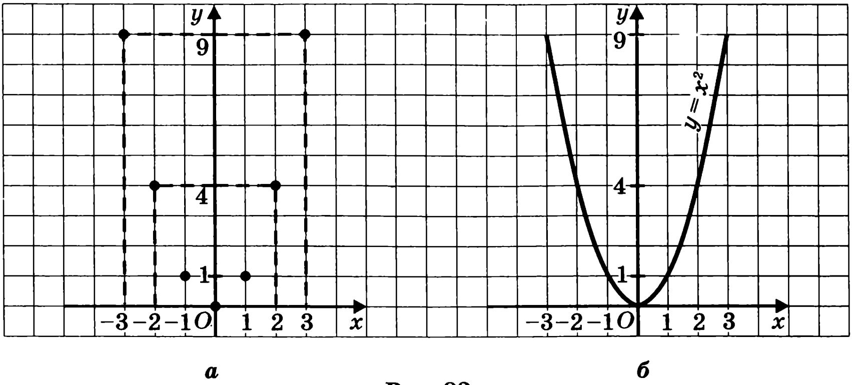


Рис. 82

глубже и глубже изучать математику, чтобы были возможности избегать ошибок.

Попробуем, глядя на рисунок 82,*б*, описать геометрические свойства параболы.

Во-первых, отмечаем, что парабола обладает симметрией. В самом деле, если провести выше оси x любую прямую, параллельную оси x, то эта прямая пересечет параболу в двух точках, расположенных на равных расстояниях от оси y, но по разные стороны от нее (рис. 83). Кстати, то же можно сказать и о точках, отмеченных на рисунке 82, *а*: (1; 1) и (−1; 1); (2; 4) и (−2; 4); (3; 9) и (−3; 9). Говорят, что ось y является **осью симметрии параболы** $y = x^2$ или что *парабола симметрична относительно оси y*.

Во-вторых, замечаем, что ось симметрии как бы разрезает параболу на две части, которые обычно называют **ветвями параболы.**

В-третьих, отмечаем, что у параболы есть особая точка, в которой смыкаются обе ветви и которая лежит на оси симметрии параболы — точка (0; 0). Учитывая ее особенность, ей присвоили специальное название — **вершина параболы.**

В-четвертых, когда одна ветвь параболы соединяется в вершине с другой ветвью, это происходит плавно, без излома; парабола как бы «прижимается» к оси абсцисс. Обычно говорят: *парабола касается оси абсцисс.*

Теперь попробуем, глядя на рисунок 82,*б*, описать некоторые свойства функции $y = x^2$.

Во-первых, замечаем, что $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

Во-вторых, отмечаем, что $y_{наим} = 0$, а $y_{наиб}$ не существует.

В-третьих, замечаем, что *функция $y = x^2$ убывает на луче* $(-\infty; 0]$ — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «спускаемся с горки». *Функция $y = x^2$ возрастает на луче* $[0; +\infty)$ — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «поднимаемся в горку».

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2$:

а) на отрезке $[1; 3]$;

б) на отрезке $[-3; -1{,}5]$;

в) на отрезке $[-3; 2]$.

Решение. а) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту ее часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[1; 3]$ (рис. 84). Для выделенной части графика находим $y_{наим} = 1$ (при $x = 1$), $y_{наиб} = 9$ (при $x = 3$).

б) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту ее часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3; -1{,}5]$ (рис. 85). Для выделенной части графика находим $y_{наим} = 2{,}25$ (при $x = -1{,}5$), $y_{наиб} = 9$ (при $x = -3$).

в) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту ее часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3; 2]$ (рис. 86). Для выделенной части графика находим $y_{наим} = 0$ (при $x = 0$), $y_{наиб} = 9$ (при $x = -3$). ◼

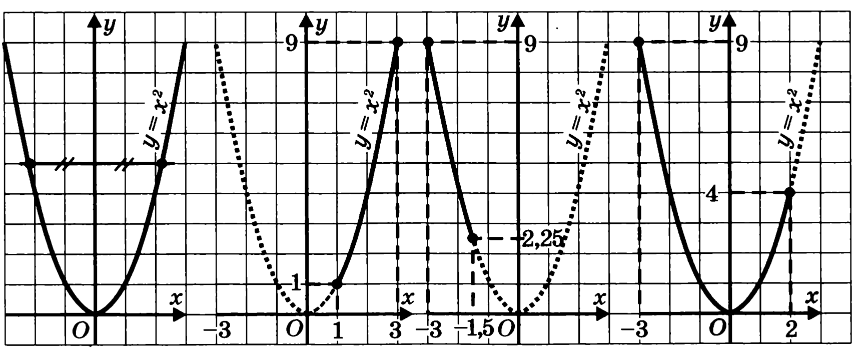


Рис. 83 Рис. 84 Рис. 85 Рис. 86

Совет. Чтобы каждый раз не строить график функции $y = x^2$ по точкам, вырежьте из плотной бумаги шаблон параболы. С его помощью вы будете очень быстро чертить параболу.

Замечание. Предлагая вам заготовить шаблон параболы, мы как бы уравниваем в правах функцию $y = x^2$ и линейную функцию $y = kx + m$. Ведь графиком линейной функции является прямая, а для изображения прямой используется обычная линейка — это и есть шаблон графика функции $y = kx + m$. Так пусть у вас будет и шаблон графика функции $y = x^2$.

Пример 2. Найти точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

Решение. Построим в одной системе координат параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 2$ (рис. 87). Они пересекаются в точках A и B, причем по чертежу нетрудно найти координаты этих точек A и B: для точки A имеем $x = -1$, $y = 1$, а для точки B имеем $x = 2$, $y = 4$.

Ответ: парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 2$ пересекаются в двух точках: $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$.

Важное замечание. До сих пор мы с вами довольно смело делали выводы с помощью чертежа. Однако математики не слишком доверяют чертежам. Обнаружив на рисунке 87 две точки пересечения параболы и прямой и определив с помощью рисунка координаты этих точек, математик обычно проверяет себя: на самом ли деле точка $(-1; 1)$ лежит как на прямой, так и на параболе; действительно ли точка $(2; 4)$ лежит и на прямой, и

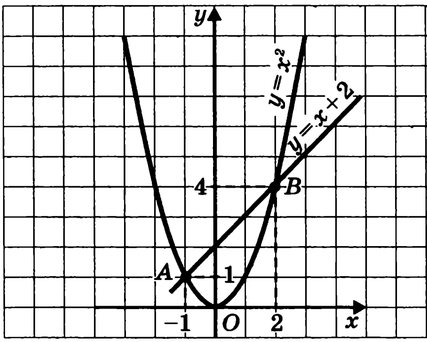


Рис. 87

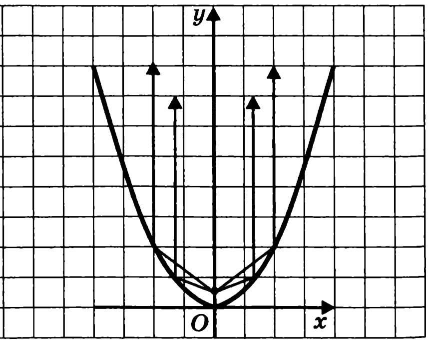


Рис. 88

на параболе? Для этого нужно подставить координаты точек A и B в уравнение прямой и в уравнение параболы, а затем убедиться, что и в том, и в другом случае получится верное равенство. В примере 2 в обоих случаях получатся верные равенства. Особенно часто проводят такую проверку, когда сомневаются в точности чертежа.

Пример 3. Построить график функции $y = -x^2$.

Решение. Сравним функции $y = x^2$ и $y = -x^2$. При одном и том же значении аргумента, например при $x = a$, первая функция принимает значение a^2, а вторая — значение $-a^2$. Значит, на графике первой функции есть точка $(a; a^2)$, а на графике второй функции — точка $(a; -a^2)$. Эти точки расположены на координатной плоскости xOy симметрично относительно оси абсцисс (рис. 89). Значит, график функции $y = -x^2$ симметричен графику функции $y = x^2$ относительно оси абсцисс (рис. 90). Это та же парабола с той же вершиной и с той же осью симметрии, но только ветви параболы направлены не вверх, а вниз. ◁■

В заключение отметим одно любопытное свойство параболы. Если рассматривать параболу $y = x^2$ как экран, как отражающую поверхность, а в точке $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ поместить источник света (рис. 88),

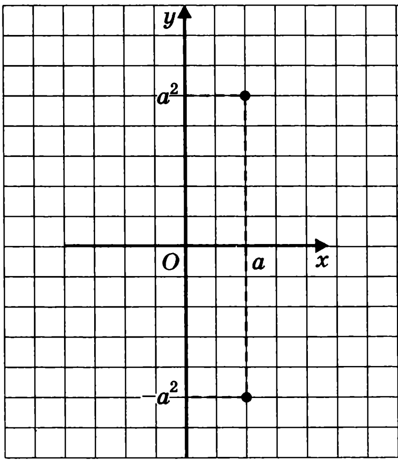


Рис. 89

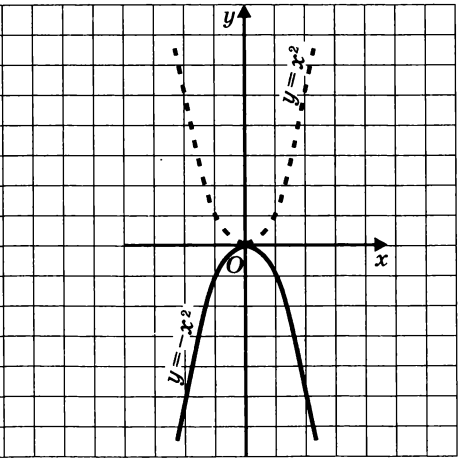


Рис. 90

то лучи, отражаясь от параболы-экрана, образуют параллельный пучок света. Точку $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ называют *фокусом параболы*. Эта идея используется в автомобилях: отражающая поверхность фары имеет параболическую форму, а лампочку помещают в фокусе — тогда свет от фары распространяется достаточно далеко.

§35. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Подытожим наши знания о графиках функций. Мы с вами научились строить графики следующих функций:

$y = b$ (прямую, параллельную оси x);

$y = kx$ (прямую, проходящую через начало координат);

$y = kx + m$ (прямую);

$y = x^2$, $y = -x^2$ (параболу).

Знание этих графиков позволит нам в случае необходимости заменить аналитическую модель геометрической (графической), например, вместо модели $y = x^2$ (которая представляет собой равенство с двумя переменными x и y) рассматривать параболу в координатной плоскости. В частности, это иногда полезно для решения уравнений. Как это делается, обсудим на нескольких примерах.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 = x + 2$.

Решение. Рассмотрим функции $y = x^2$ и $y = x + 2$; построим их графики и найдем точки пересечения графиков. Эту задачу мы с вами уже решали (см. пример 2 из § 34 и соответственно рис. 87). Парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 2$ пересекаются в точках $A(-1; 1)$ и $B(2; 4)$.

Как же найти корни уравнения $x^2 = x + 2$, т. е. те значения x, при которых выражения x^2 и $x + 2$ принимают одинаковые числовые значения? Очень просто, эти значения уже найдены: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Это абсциссы точек A и B, в которых пересекаются построенные графики.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Фактически мы использовали следующий алгоритм:

1. Ввели в рассмотрение функции $y = x^2$, $y = x + 2$ (для другого уравнения будут, разумеется, иные функции).

2. Построили в одной системе координат графики функций $y = x^2$, $y = x + 2$.

3. Нашли точки пересечения графиков.

4. Нашли абсциссы точек пересечения — это и есть корни уравнения.

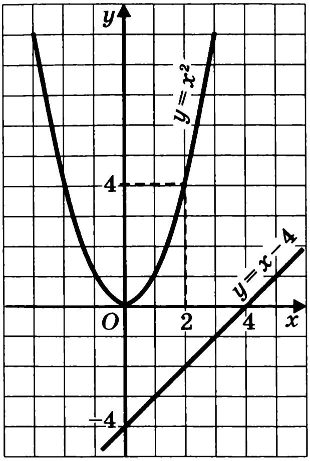


Рис. 91

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - x + 4 = 0$.

Решение. Здесь придется дополнить выработанный алгоритм еще одним шагом (подготовительным): надо переписать уравнение в виде, для которого имеется алгоритм. Этот вид таков: $x^2 = x - 4$. Теперь все в порядке, действуем в соответствии с алгоритмом.

1) Введем две функции: $y = x^2$, $y = x - 4$.

2) Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x - 4$ (рис. 91).

3) Точек пересечения у построенных параболы и прямой нет.

Как вы думаете, что означает этот геометрический факт для данной алгебраической задачи (для данного уравнения)? Догадались? А теперь сопоставьте свою догадку с тем, что ниже записано в ответе.

Ответ: уравнение не имеет корней.

Замечание. Существуют так называемые квадратные уравнения — уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$. Они решаются по специальным формулам для отыскания корней, но этих формул мы пока не знаем. Тем не менее некоторые квадратные уравнения мы уже решили. Так, в § 31 мы решили уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$ методом разложения на множители. А в настоящем параграфе мы решили еще два квадратных уравнения — графическим методом. Это уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ (см. пример 1; правда, там уравнение было записано по-другому: $x^2 = x + 2$ — но вы же понимаете, что это то же самое) и уравнение $x^2 - x + 4 = 0$ (см. пример 2).

§36. ЧТО ОЗНАЧАЕТ В МАТЕМАТИКЕ ЗАПИСЬ $y = f(x)$

Изучая какой-либо реальный процесс, обычно обращают внимание на две величины, участвующие в процессе (в более сложных процессах участвуют не две величины, а три, четыре и т. д., но мы пока такие процессы не рассматриваем): одна из них меняется как бы сама собой, независимо ни от чего (такую переменную чаще всего обозначают буквой x), а другая величина принимает значения, которые зависят от выбранных значений переменной x (такую зависимую переменную чаще всего обозначают буквой y). Математической моделью реального процесса как раз и является запись на математическом языке зависимости y от x, т. е. связи между переменными x и y.

Еще раз напомним, что к настоящему моменту мы изучили следующие математические модели: $y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$. Есть ли у этих математических моделей что-либо общее? Есть! Их структура одинакова:

$$y = f(x).$$

Эту запись следует понимать так: имеется выражение $f(x)$ с переменной x, с помощью которого мы находим значения переменной y.

Математики предпочитают запись $y = f(x)$ не случайно. Пусть, например, $f(x) = x^2$, т. е. речь идет о функции $y = x^2$. Пусть нам надо выделить несколько значений аргумента и соответствующих значений функции. До сих пор мы писали так:

если $x = 1$, то $y = 1^2 = 1$;

если $x = -3$, то $y = (-3)^2 = 9$ и т. д.

Если же использовать обозначение $f(x) = x^2$, то запись становится более экономной:

$$f(1) = 1^2 = 1;$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9.$$

Итак, мы познакомились еще с одним фрагментом математического языка: фраза «значение функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равно 4» записывается короче: «если $f(x) = x^2$, то $f(2) = 4$».

А вот образец обратного перевода: если $f(x) = x^2$, то $f(-3) = 9$. По-другому — значение функции $y = x^2$ в точке $x = -3$ равно 9.

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^3$. Вычислить:

а) $f(1)$;
б) $f(-4)$;
в) $f(a)$;
г) $f(2a)$;
д) $f(a-1)$;
е) $f(3x)$;
ж) $f(-x)$.

Решение. Во всех случаях план действий один и тот же: нужно в выражении $f(x)$ подставить вместо x то значение аргумента, которое указано в скобках, и выполнить соответствующие вычисления и преобразования.

а) $f(1) = 1^3 = 1$;
б) $f(-4) = (-4)^3 = -64$;
в) $f(a) = a^3$;
г) $f(2a) = (2a)^3 = 8a^3$;
д) $f(a-1) = (a-1)^3$;
е) $f(3x) = (3x)^3 = 27x^3$;
ж) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. ◼

Замечание. Разумеется, вместо буквы f можно использовать любую другую букву (в основном из латинского алфавита): $g(x)$, $h(x)$, $s(x)$ и т. д.

Пример 2. Даны две функции: $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, и $y = g(x)$, где $g(x) = x^3$. Доказать, что:

а) $f(-x) = f(x)$; б) $g(-x) = -g(x)$.

Решение. а) Так как $f(x) = x^2$, то $f(-x) = (-x)^2 = x^2$. Итак, $f(x) = x^3$, $f(-x) = x^2$, значит, $f(-x) = f(x)$.

б) Так как $g(x) = x^3$, то $g(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Итак, $g(x) = x^3$, $g(-x) = -x^3$, т. е. $g(-x) = -g(x)$. ◼

Использование математической модели вида $y = f(x)$ оказывается удобным во многих случаях, в частности тогда, когда реальный процесс описывается различными формулами на разных промежутках изменения независимой переменной.

Пример 3. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ если } x < 0; \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Вычислить: $f(-5)$, $f(-2)$, $f(1{,}5)$, $f(4)$, $f(0)$.

б) Построить график функции $y = f(x)$.

Решение. а) Что такое $f(-5)$? Это значение заданной функции в точке $x = -5$. Но функция задана не одним выражением, а двумя: $2x$ и x^2. Каким из них воспользоваться? Это зависит от выбранного значения аргумента. Мы выбрали $x = -5$, а число -5 удовлетворяет неравенству $x < 0$; в этом случае функция задается выражением, стоящим в первой строке, т. е. $f(x) = 2x$. Тогда $f(-5) = 2 \cdot (-5) = -10$.

Аналогично вычисляем $f(-2)$: если $x = -2$, то $x < 0$ и, значит, $f(x) = 2x$, т. е. $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Вычислим $f(1{,}5)$, т. е. значение функции $y = f(x)$ в точке $x = 1{,}5$. Это значение x удовлетворяет условию $x \geqslant 0$ и, следовательно, функция задается выражением, стоящим во второй строке, т. е. $f(x) = x^2$. Поэтому $f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

Аналогично находим $f(4)$: если $x = 4$, то $x \geqslant 0$ и, значит, $f(x) = x^2$, т. е. $f(4) = 4^2 = 16$.

Осталось вычислить $f(0)$. Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $x \geqslant 0$, следовательно, $f(x) = x^2$, т. е. $f(0) = 0^2 = 0$.

б) Мы умеем строить графики функций $y = 2x$ (рис. 92) и $y = x^2$ (рис. 93). Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = 2x$ при $x < 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 92. Заданная функция $y = f(x)$ совпадает с функцией $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ — эта часть графика выделена на рисунке 93. Если мы теперь изобразим обе выделенные части в одной системе координат, то получим требуемый график функции $y = f(x)$ (рис. 94). ◼

Конечно, математики не строят подобные графики так долго. Обычно все делается сразу в одной системе координат. Только,

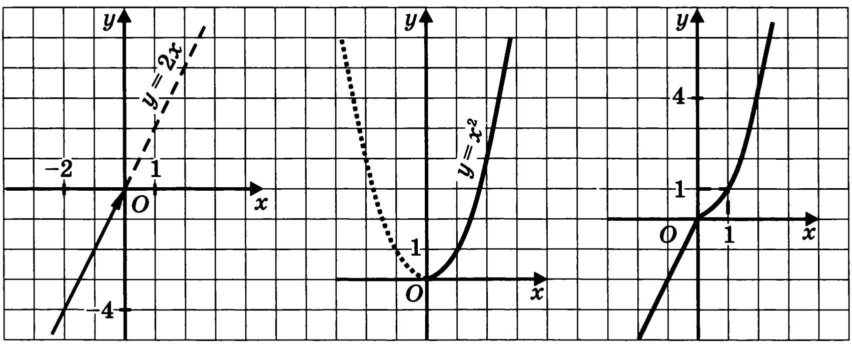


Рис. 92 Рис. 93 Рис. 94

естественно, прямая $y = 2x$ берется не целиком, а лишь при условии $x < 0$, т. е. на промежутке $(-\infty; 0)$, и парабола $y = x^2$ берется не целиком, а лишь при условии $x \geqslant 0$, т. е. на промежутке $[0; +\infty)$. Вот так, «по кусочкам», и воспроизводится весь график. Поэтому функции такого типа, как в примере 3, называют *кусочными функциями*.

Пример 4. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leqslant 0; \\ 4, & \text{если } \ 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Вычислить: $f(-4)$, $f(-2)$, $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$.

б) Построить график функции $y = f(x)$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ для различных значений a?

Решение. а) Значение $x = -4$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Поэтому $f(-4) = -4 + 2 = -2$.

Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant -1$, а в этом случае $f(x) = x + 2$. Значит, $f(-2) = -2 + 2 = 0$.

Значение $x = -0{,}5$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Следовательно, $f(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 = 0{,}25$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-1 < x \leqslant 0$, а в этом случае $f(x) = x^2$. Тогда $f(0) = 0^2 = 0$.

Значение $x = 1$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 4$, а в этом случае $f(x) = 4$; в частности и $f(1) = 4$.

Значение $x = 5$ не удовлетворяет ни одному из имеющихся условий: ни первому $-4 \leqslant x \leqslant -1$, ни второму $-1 < x \leqslant 0$, ни третьему $0 < x \leqslant 4$. Поэтому вычислить $f(5)$ мы не можем, *это задание некорректно*.

б) График функции $y = f(x)$ построим «по кусочкам». На рисунке 95 изображен график функции $y = x + 2$, где $x \in [-4; -1]$. На рисунке 96 представлен график функции $y = x^2$, где $x \in (-1; 0]$. На рисунке 97 изображен график функции $y = 4$, где $x \in (0; 4]$. Наконец, на рисунке 98 все «кусочки» воссоединены в одно целое — в график функции $y = f(x)$.

Вот так с помощью известных графиков «по кусочкам» можно строить графики на координатной плоскости.

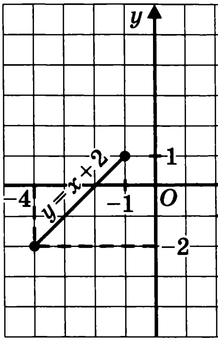


Рис. 95

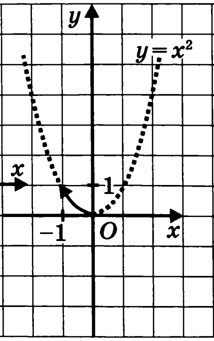


Рис. 96

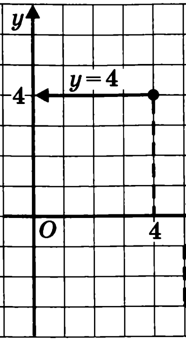


Рис. 97

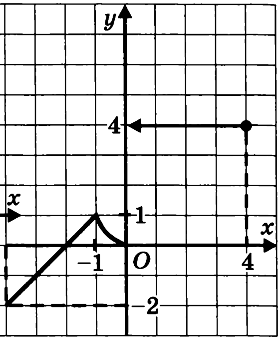


Рис. 98

в) Ответ на поставленный вопрос мы сможем получить с помощью графика функции $y = f(x)$, представленного на рисунке 98. Фактически речь идет о том, сколько точек пересечения имеет этот график с прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс. Мы видим, что, если $a < -2$, или $1 < a < 4$, или $a > 4$, то график функции $y = f(x)$ не пересекается с прямой $y = a$ (три такие прямые проведены на рис. 99); при указанных значениях a уравнение $f(x) = a$ не имеет корней. Если $-2 \leqslant a < 0$ или $a = 1$, то прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ одну точку пересечения (рис. 100); соответственно уравнение $f(x) = a$ имеет один корень. Если $0 \leqslant a < 1$, то прямая

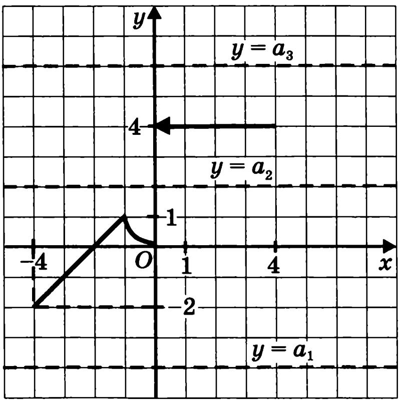


Рис. 99

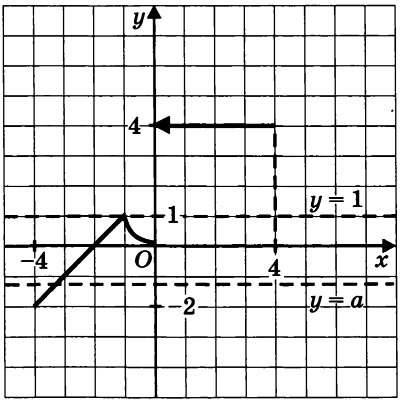


Рис. 100

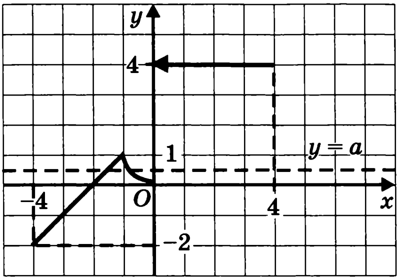


Рис. 101

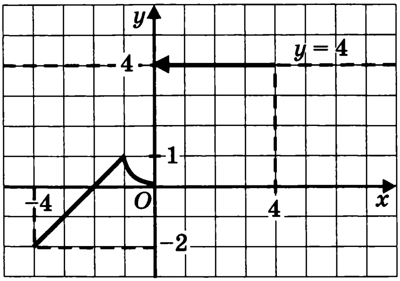


Рис. 102

$y = a$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ две точки пересечения (рис. 101); соответственно уравнение $f(x) = a$ имеет два корня. Наконец, если $a = 4$, то уравнение $f(x) = a$ имеет бесконечно много корней — корнем будет служить любое число из полуинтервала $(0; 4]$ (рис. 102).

Подведем итоги: если $a < -2$, $1 < a < 4$, $a > 4$, то уравнение $f(x) = a$ не имеет корней; если $-2 \leqslant a < 0$ или $a = 1$, то уравнение $f(x) = a$ имеет один корень; если $0 \leqslant a < 1$, то уравнение $f(x) = a$ имеет два корня; если $a = 4$, то уравнение $f(x) = a$ имеет бесконечно много корней. ◼

Опишем с помощью построенного на рисунке 98 графика некоторые свойства функции $y = f(x)$ — такое описание свойств обычно называют *чтением графика*. Чтение графика — это своеобразный переход от геометрической модели (от графической модели) к словесной модели (к описанию свойств функции). А построение графика — это переход от аналитической модели (она представлена в условии примера 4) к геометрической.

Итак, приступаем к чтению графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 98).

1. Независимая переменная x «пробегает» все значения от -4 до 4. Иными словами, для каждого значения x из отрезка $[-4; 4]$ можно вычислить значение функции $f(x)$. Говорят так: $[-4; 4]$ — *область определения функции*.

Почему при решении примера 4 мы сказали, что найти $f(5)$ нельзя? Да потому, что значение $x = 5$ не принадлежит области определения функции.

2. $y_{наим} = -2$ (этого значения функция достигает при $x = -4$); $y_{наиб} = 4$ (этого значения функция достигает в любой точке полуинтервала $(0; 4]$).

3. $y = 0$, если $x = -2$ и если $x = 0$; в этих точках график функции $y = f(x)$ пересекает ось x.

4. $y > 0$, если $x \in (-2; 0)$ или если $x \in (0; 4]$; на этих промежутках график функции $y = f(x)$ расположен *выше оси* x.

5. $y < 0$, если $x \in [-4; -2)$; на этом промежутке график функции $y = f(x)$ расположен *ниже оси* x.

6. Функция возрастает на отрезке $[-4; -1]$, убывает на отрезке $[-1; 0]$ и постоянна (ни возрастает, ни убывает) на полуинтервале $(0; 4]$.

По мере того как мы с вами будем изучать новые свойства функций, процесс чтения графика будет становиться более насыщенным, содержательным и интересным.

Обсудим одно из таких новых свойств. График функции, рассмотренной в примере 4, состоит из трех ветвей (из трех «кусочков»). Первая и вторая ветви (отрезок прямой $y = x + 2$ и часть параболы) «состыкованы» удачно: отрезок заканчивается в точке $(-1; 1)$, а участок параболы начинается в той же точке. А вот вторая и третья ветви менее удачно «состыкованы»: третья ветвь («кусочек» горизонтальной прямой) начинается не в точке $(0; 0)$, а в точке $(0; 4)$. Математики говорят так: «функция $y = f(x)$ *претерпевает разрыв* при $x = 0$ (или в точке $x = 0$)». Если функция не имеет точек разрыва, то ее называют *непрерывной*. Так, все функции, с которыми мы познакомились в предыдущих параграфах ($y = b$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$), — непрерывные.

Пример 5. Дана функция $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$. Построить и прочитать ее график.

Решение. Как видите, здесь функция задана достаточно сложным выражением. Но математика — единая и цельная наука, ее разделы тесно связаны друг с другом. Воспользуемся тем, что мы изучали в главе 6, и сократим алгебраическую дробь $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$. Имеем

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \frac{x^2(x - 2)}{x - 2} = x^2.$$

Итак, на самом деле $f(x) = x^2$. Правда, надо учесть, что тождество $\frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = x^2$ справедливо лишь при ограничении $x \neq 2$. Следовательно, мы можем переформулировать задачу так: вместо функции $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ будем рассматривать функцию $y = x^2$, где $x \neq 2$.

Построим на координатной плоскости xOy параболу $y = x^2$. Прямая $x = 2$ пересекает ее в точке (2; 4). Но по условию $x \neq 2$, значит, точку (2; 4) параболы мы должны исключить из рассмотрения, для чего на чертеже отметим эту точку светлым кружком. Таким образом, график функции построен — это парабола $y = x^2$ с «выколотой» точкой (2; 4) (рис. 103).

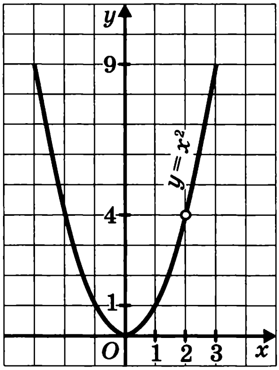


Рис. 103

Перейдем к описанию свойств функции $y = f(x)$, т. е. к чтению ее графика.

1. Независимая переменная x принимает любые значения, кроме $x = 2$. Значит, область определения функции состоит из двух открытых лучей $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$.

2. $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб}}$ не существует.

3. Функция претерпевает разрыв при $x = 2$ (в точке $x = 2$); на $(-\infty; 2)$ и на $(2; +\infty)$ она непрерывна.

4. $y = 0$, если $x = 0$.

5. $y > 0$, если $x \in (-\infty; 0)$, если $x \in (0; 2)$ и если $x \in (2; +\infty)$.

6. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на полуинтервале $[0; 2)$ и на открытом луче $(2; +\infty)$. ◼

ГЛАВА

8 СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 37. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В § 8 мы ввели понятие линейного уравнения с двумя переменными — так называют равенство $ax + by + c = 0$, где a, b, c — конкретные числа, а x, y — переменные (неизвестные).

Примеры линейных уравнений с двумя переменными:

$$2x - 3y + 1 = 0;$$
$$x + y - 3 = 0;$$
$$s - 5t + 4 = 0$$

(здесь переменные обозначены по-другому: s, t — но это роли не играет).

В том же § 8 мы ввели понятие решения линейного уравнения с двумя переменными — так называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $ax + by + c = 0$ в верное числовое равенство. На первом месте всегда пишут значение переменной x, на втором — значение переменной y.

Приведем примеры:

1. $(2; 3)$ — решение уравнения $5x + 3y - 19 = 0$. В самом деле, $5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 19 = 0$ — верное числовое равенство.

2. $(-4; 2)$ — решение уравнения $3x - y + 14 = 0$. Действительно, $3 \cdot (-4) - 2 + 14 = 0$ — верное числовое равенство.

3. $\left(0; -\frac{7}{3}\right)$ — решение уравнения $-0{,}4x + 3y + 7 = 0$. Имеем $0{,}4 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 7 = 0$ — верное числовое равенство.

4. (1; 2) не является решением уравнения $2x - 3y + 1 = 0$. В самом деле, $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 = 0$ — неверное числовое равенство (получается, что $-3 = 0$).

В § 9 мы отмечали, что математическую модель $ax + by + c = 0$ при $b \neq 0$ можно заменить более простой: $y = kx + m$. Например, уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ можно преобразовать к виду $y = \frac{3}{4}x + 3$.

Графиком линейного уравнения $ax + by + c = 0$, если хотя бы один из коэффициентов a, b отличен от нуля (случай $a = 0$, $b = 0$ мы рассматривать в этой главе не будем), является прямая (см. § 8). Координаты любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, т. е. являются решением уравнения. Сколько же решений имеет уравнение $ax + by + c = 0$? Столько же, сколько точек расположено на прямой, служащей графиком уравнения $ax + by + c = 0$, т. е. бесконечно много.

Многие реальные ситуации при переводе на математический язык оформляются в виде математической модели, состоящей из двух линейных уравнений с двумя переменными. С такой ситуацией мы встретились в § 8 в задаче про двух садоводов Иванова и Петрова. Математическая модель состояла из двух уравнений: $5x - 2y = 0$ и $3x + 2y - 16 = 0$, причем нас интересовала такая пара значений $(x; y)$, которая *одновременно* удовлетворяла и тому, и другому уравнению. В таких случаях обычно не говорят, что математическая модель состоит из двух уравнений, а говорят, что ***математическая модель представляет собой систему уравнений.***

Вообще, если даны два линейных уравнения с двумя переменными x и y: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, — и поставлена задача найти такие пары значений $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют и тому, и другому уравнению, то говорят, что заданные уравнения образуют **систему уравнений.** Уравнения системы записывают друг под другом и объединяют специальным символом — фигурной скобкой:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют **решением системы.**

Решить систему — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Теперь мы можем сказать, что встречались с системой линейных уравнений — математическая модель уже упомянутой задачи про садоводов из § 8 выглядела так:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0 \text{ (где } x \in N,\ y \in N). \end{cases} \qquad (2)$$

Ее решением была пара (2; 5), т. е. $x = 2$, $y = 5$.

Рассмотрим новые примеры.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. Графиком уравнения $x + 2y - 5 = 0$ является прямая. Найдем две пары значений переменных x, y, удовлетворяющих этому уравнению. Если $y = 0$, то из уравнения $x + 2y - 5 = 0$ находим $x = 5$. Если $x = 0$, то из уравнения $x + 2y - 5 = 0$ находим $y = 2{,}5$. Итак, нашли две точки (5; 0) и (0; 2,5). Построим на координатной плоскости xOy прямую, проходящую через эти две точки, — прямая l_1 на рисунке 104.

Графиком уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ также является прямая. Найдем две пары значений переменных x, y, удовлетворяющих этому уравнению. Если $y = 0$, то из уравнения $2x + 4y + 3 = 0$ находим $x = -1{,}5$. Если $x = 2{,}5$, то из уравнения $2x + 4y + 3 = 0$

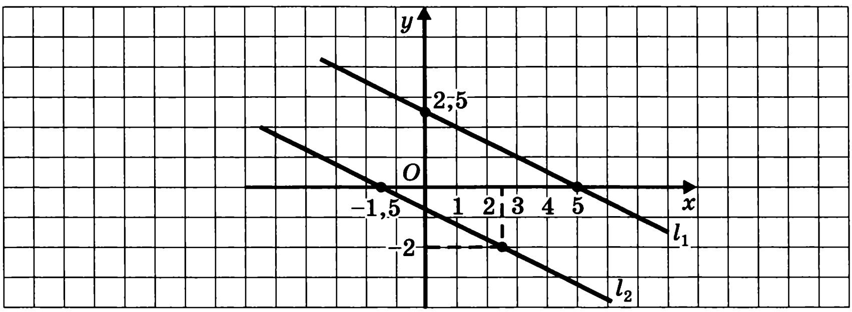


Рис. 104

находим $5 + 4y + 3 = 0$ и, следовательно, $y = -2$. Итак, нашли две точки $(-1{,}5;\ 0)$ и $(2{,}5;\ -2)$. Построим на координатной плоскости xOy прямую, проходящую через эти две точки, — прямая l_2 на рисунке 104.

Прямые l_1 и l_2 параллельны. Что означает этот геометрический факт для данной системы уравнений? То, что она не имеет решений (поскольку нет точек, удовлетворяющих одновременно и тому, и другому уравнению, т. е. принадлежащих одновременно и той, и другой из построенных прямых l_1 и l_2).

Ответ: система не имеет решений.

Пример 2. Найти два числа, если известно, что их сумма равна 39, а разность равна 11.

Решение. Если x, y — искомые числа, то $x + y = 39$ и $x - y = 11$, причем эти равенства должны выполняться одновременно:

$$\begin{cases} x + y = 39, \\ x - y = 11. \end{cases} \tag{4}$$

Получили систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

Можно угадать, чему равны x и y: $x = 25$, $y = 14$. Но, во-первых, «метод угадывания» далеко не всегда применим на практике. А во-вторых, где гарантия, что иного решения нет, может быть, мы просто до него не додумались, не «доугадали»?

Можно построить графики уравнений $x + y = 39$ и $x - y = 11$, это прямые, причем непараллельные (в отличие от тех, что в примере 1), они пересекаются в одной точке. Эту точку мы уже знаем: $(25;\ 14)$; значит, это единственная пара чисел, которая нас устраивает, единственное решение системы.

Ответ: 25 и 14.

В примерах 1 и 2 мы применили **графический метод** решения системы линейных уравнений. Этим же методом мы пользовались в § 8 при решении задачи о числе яблонь у двух садоводов (система (2) решена в § 8 графическим методом).

К сожалению, графический метод, как и «метод угадывания», не самый надежный: например, прямые могут пересечься в точке, координаты которой по чертежу не очень легко определить.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Решение. Построим графики уравнений системы. Здесь есть смысл преобразовать оба уравнения к виду линейной функции. Из первого уравнения получаем $y = 3x - 5$, а из второго $y = 7 - 2x$.

Построим в одной системе координат графики линейных функций $y = 3x - 5$ (прямая l_1 на рис. 105) и $y = 7 - 2x$ (прямая l_2 на рис. 105). Они пересекаются в точке A, координаты которой — единственное решение заданной системы. А вот чему конкретно равны абсцисса и ордината точки A, мы по рисунку 105 точно определить не сможем (точка A как бы «висит» внутри определенной клеточки). Придется нам позднее вернуться к этому примеру. ■

Но все-таки графический метод решения системы линейных уравнений имеет большое значение. С его помощью можно сделать следующие важные *выводы*:

графиками обоих уравнений системы (1) являются прямые;

эти прямые могут пересекаться, причем только в одной точке, — это значит, что система (1) имеет единственное решение (так было в рассмотренных в этом параграфе системах (2), (4), (5);

эти прямые могут быть параллельны — это значит, что система не имеет решений (говорят также, что система **несовместна** — такой была система (3));

эти прямые могут совпасть — это значит, что система имеет бесконечно много решений (говорят также, что система **неопределенна**).

Итак, мы познакомились с новой математической моделью (1) — системой двух линейных уравнений с двумя переменными. Наша задача — научиться ее решать. «Метод угадывания» ненадежен, графический метод также выручает не всегда. Значит, нам нужно располагать надежными алгебраическими методами решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Об этом и пойдет речь в следующих параграфах.

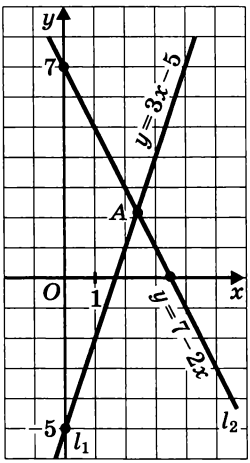


Рис. 105

§ 38. МЕТОД ПОДСТАНОВКИ

Вернемся еще раз к системе (2) из § 37:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0. \end{cases}$$

Мы ее решили графическим методом в § 8 и знаем, что $x = 2$, $y = 5$ — единственное решение этой системы. А теперь решим ту же систему другим способом.

Первое уравнение преобразуем к виду $2y = 5x$, т. е. $y = 2{,}5x$. Второе уравнение преобразуем к виду $2y = 16 - 3x$ и далее $y = 8 - 1{,}5x$ (все коэффициенты уравнения $2y = 16 - 3x$ разделили на 2). Теперь систему можно переписать так:

$$\begin{cases} y = 2{,}5x, \\ y = 8 - 1{,}5x. \end{cases}$$

Ясно, что нас интересует такое значение x, при котором $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$. Из этого уравнения находим:

$$2{,}5x + 1{,}5x = 8;$$
$$4x = 8;$$
$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то из уравнения $y = 2{,}5x$ получим $y = 5$. Итак, (2; 5) — решение системы (что, напомним, нам уже было известно).

Чем эти рассуждения отличаются от тех, что мы применяли в § 8? Тем, что никаких графиков строить не пришлось, вся работа шла на алгебраическом языке. Как же мы рассуждали?

Мы выразили y через x из первого уравнения и получили $y = 2{,}5x$. Затем подставили выражение $2{,}5x$ вместо y во второе уравнение; получили $2{,}5x = 8 - 1{,}5x$. Далее решили это уравнение относительно x; получили $x = 2$. Наконец, по формуле $y = 2{,}5x$ нашли соответствующее значение y. И вот что важно: во втором уравнении совсем не обязательно было выражать y через x, можно было подставить $2{,}5x$ вместо y в заданное уравнение $3x + 2y - 16 = 0$. Смотрите:

$$3x + 2 \cdot 2{,}5x - 16 = 0;$$
$$3x + 5x = 16;$$
$$8x = 16;$$
$$x = 2.$$

Подобный метод рассуждений называют обычно **методом подстановки.** Он представляет собой определенную последовательность шагов, т. е. некоторый алгоритм.

Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя переменными методом подстановки

1. Выразить y через x из первого уравнения системы.
2. Подставить полученное на первом шаге выражение вместо y во второе уравнение системы.
3. Решить полученное на втором шаге уравнение относительно x.
4. Подставить найденное на третьем шаге значение x в выражение y через x, полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пары значений (x; y), которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шагах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Из первого уравнения системы получаем

$$y = 3x - 5.$$

2) Подставим найденное выражение вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + (3x - 5) - 7 = 0.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$2x + 3x - 5 - 7 = 0;$$
$$5x - 12 = 0;$$
$$5x = 12;$$
$$x = \frac{12}{5}.$$

4) Подставим найденное значение x в формулу $y = 3x - 5$:

$$y = 3 \cdot \frac{12}{5} - 5 = \frac{36}{5} - 5 = \frac{36 - 25}{5} = \frac{11}{5}.$$

5) Пара $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{11}{5}$ — единственное решение заданной системы.

Ответ: $\left(\frac{12}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Вы узнали эту систему? Мы с ней встретились в предыдущем параграфе (система (5)), пробовали решить ее графическим методом, и у нас ничего не получилось. Зато метод подстановки нас выручил. Он активно применяется и в более сложных системах уравнений, не обязательно линейных; о таких системах речь впереди — в старших классах. Этот метод, быть может, не всегда эффективен (т. е. не всегда быстро приводит к цели), но достаточно надежен.

Вернемся к рассмотренному алгоритму из пяти шагов, в котором описан метод подстановки. У вас не возник вопрос, почему y выражают именно из первого уравнения и подставляют во второе, почему не выразить y из второго уравнения и подставить в первое? И вообще, почему выражали y через x, а не x через y, почему такое неравноправие? Ответ: никакой причины нет, просто ищите наиболее удобный вариант.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 3y + 8 = 0, \\ x + 12y = 11. \end{cases}$$

Решение. 1) Выразим x через y из второго уравнения:

$$x = 11 - 12y.$$

2) Подставим найденное выражение вместо x в первое уравнение системы:

$$5(11 - 12y) - 3y + 8 = 0.$$

3) Решим полученное уравнение:

$$55 - 60y - 3y + 8 = 0;$$
$$63 - 63y = 0;$$
$$63y = 63;$$
$$y = 1.$$

4) Подставим найденное значение y в формулу $x = 11 - 12y$:

$$x = 11 - 12 \cdot 1 = -1.$$

5) Пара $x = -1$, $y = 1$ — единственное решение заданной системы.

Ответ: $(-1; 1)$.

Завершая параграф, рассмотрим несколько более сложных примеров, в которых идею решения осветим подробно, а техническую часть (метод подстановки) — кратко (обстоятельное решение, надеемся, уже можно доверить вам).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x - 5y)(x^2 - 36) = 0,\\ 4x - 3y + 12 = 0.\end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x - 5y)(x - 6)(x + 6) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю. Это значит, что либо $x - 5y = 0$, либо $x - 6 = 0$, либо $x + 6 = 0$. Соответственно, заданная система «распадается» на три случая:

$$\begin{cases}x - 5y = 0,\\ 4x - 3y + 12 = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x - 6 = 0,\\ 4x - 3y + 12 = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x + 6 = 0,\\ 4x - 3y + 12 = 0.\end{cases}$$

В первой системе из первого уравнения находим $x = 5y$; подставив выражение $5y$ вместо x во второе уравнение, получим $20y - 3y + 12 = 0$; $y = -\frac{12}{17}$; соответственно $x = -\frac{60}{17}$. Из второй системы находим $x = 6$, $y = 12$; из третьей системы находим $x = -6$, $y = -4$.

Ответ: $\left(-3\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$, $(6; 12)$, $(-6; -4)$.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x - 2y)^2 = 11(x - 2y),\\ 2x + y = 50.\end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x - 2y)^2 - 11(x - 2y) = 0;$$
$$(x - 2y)(x - 2y - 11) = 0.$$

Значит, либо $x - 2y = 0$, либо $x - 2y - 11 = 0$, а потому решение заданной системы сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x + y = 50; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - 11 = 0, \\ 2x + y = 50. \end{cases}$$

Ответ: (20; 10), (22,2; 5,6).

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3x + 6y = 4xy, \\ 3x + y = 21. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) - (3x - 6y) = 0;$$

$$(x - 2y)^2 - 3(x - 2y) = 0;$$

$$(x - 2y)(x - 2y - 3) = 0.$$

Значит, либо $x - 2y = 0$, либо $x - 2y - 3 = 0$, а потому решение заданной системы сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 3x + y = 21; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - 3 = 0, \\ 3x + y = 21. \end{cases}$$

Ответ: (6; 3), $\left(6\frac{3}{7}; 1\frac{5}{7}\right)$.

Пример 6. Найти ту пару значений переменных x, y, при которых многочлен $p(x; y) = (2x + 3y - 22)^4 + 9x^2 + 5 + y^2 - 6xy$ принимает наименьшее значение.

Решение. Имеем $p(x; y) = (2x + 3y - 22)^4 + (3x - y)^2 + 5$. Выражения $(3x - y)^2$ и $(2x + 3y - 22)^4$ принимают неотрицательные значения при любых значениях переменных, а потому наименьшим значением заданного многочлена является число 5, причем это наименьшее значение достигается при одновременном выполнении двух условий: $2x + 3y - 22 = 0$, $3x - y = 0$. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - 22 = 0, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$$

Ответ: наименьшее значение многочлена $p(x; y)$, равное 5, достигается при $x = 2$, $y = 6$.

§39. МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СЛОЖЕНИЯ

Мы довольно часто возвращаемся к тому, что уже обсудили ранее, например для того, чтобы рассмотреть ситуацию под другим углом зрения. Вот и теперь давайте вернемся к примеру 1 из § 38, где речь шла о решении системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Как мы решали эту систему? Мы выразили y из первого уравнения и подставили результат во второе, что привело к уравнению с одной переменной x, т. е. фактически к временному исключению из рассмотрения переменной y. Но исключить y из рассмотрения можно было значительно проще — достаточно сложить оба уравнения системы (сложить уравнения — это значит по отдельности составить сумму левых частей, сумму правых частей уравнений и полученные суммы приравнять):

$$+\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{(3x - y - 5) + (2x + y - 7) = 0 + 0;}$$

$$5x - 12 = 0;$$

$$x = \frac{12}{5}.$$

Затем можно было найденное значение x подставить в любое уравнение системы, например в первое, и найти y:

$$3 \cdot \frac{12}{5} - y - 5 = 0;$$

$$\frac{36}{5} - 5 = y;$$

$$y = \frac{11}{5}.$$

Попробуем применить аналогичные рассуждения еще для нескольких систем линейных уравнений с двумя переменными.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$$

Решение. 1) Вычтем второе уравнение из первого:

$$-\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\overline{(2x + 3y) - (5x + 3y) = 1 - 7;}$$

$$2x + 3y - 5x - 3y = -6;$$

$$-3x = -6;$$

$$x = 2.$$

2) Подставим найденное значение $x = 2$ в первое уравнение заданной системы, т. е. в уравнение $2x + 3y = 1$:

$$2 \cdot 2 + 3y = 1;$$

$$3y = 1 - 4;$$

$$3y = -3;$$

$$y = -1.$$

3) Пара $x = 2$, $y = -1$ — решение заданной системы.

Ответ: $(2; -1)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Решение. Здесь сразу исключить переменную x или переменную y из обоих уравнений с помощью сложения или вычитания уравнений не удастся. Нужен подготовительный этап. Сначала умножим все члены первого уравнения системы на 3, а все члены второго уравнения — на 4. Получим

$$\begin{cases} 9x - 12y = 15, \\ 8x + 12y = 28. \end{cases}$$

Теперь можно сложить уравнения, что приведет к исключению переменной y. Имеем $17x = 43$, т. е. $x = \frac{43}{17}$.

Подставим найденное значение x во второе уравнение исходной системы, т. е. в уравнение $2x + 3y = 7$:

$$2 \cdot \frac{43}{17} + 3y = 7;\ 3y = 7 - \frac{86}{17};\ 3y = \frac{119 - 86}{17};\ 3y = \frac{33}{17};\ y = \frac{11}{17}.$$

Ответ: $\left(\frac{43}{17}; \frac{11}{17}\right)$.

Краткая запись приведенного решения:

$$+\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{vmatrix}$$

$$\overline{3(3x - 4y) + 4(2x + 3y) = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4.}$$

Далее находим $17x = 43$, $x = \frac{43}{17}$ и т. д.

Здесь справа от вертикальной черты записаны дополнительные множители, с помощью которых удалось уравнять абсолютные величины коэффициентов при переменной y в обоих уравнениях системы.

Метод, который мы обсудили в этом параграфе, называют **методом алгебраического сложения.**

Завершая параграф, опять-таки рассмотрим несколько более сложных примеров, в которых идею решения осветим подробно, а техническую часть (метод алгебраического сложения) — кратко (обстоятельное решение снова доверяем вам).

Пример 3. На координатной плоскости построить прямую, проходящую через точки $A(2;\ 3)$ и $B(-2;\ -9)$, и составить ее уравнение.

Решение. Искомая прямая проведена на рисунке 106. Ее уравнение будем искать в виде $y = kx + m$. Поскольку точка $A(2;\ 3)$ принадлежит прямой, получаем соотношение $3 = 2k + m$. Поскольку точка $B(-2;\ -9)$ принадлежит прямой, получаем соотношение $-9 = -2k + m$. Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений $\begin{cases} 2k + m = 3, \\ -2k + m = -9. \end{cases}$ Сложив уравнения системы, получим $2m = -6$, $m = -3$. Если из первого уравнения системы вычесть второе, получим $4k = 12$, $k = 3$.

Итак, $k = 3$, $m = -3$, т. е. уравнение прямой таково: $y = 3x - 3$.

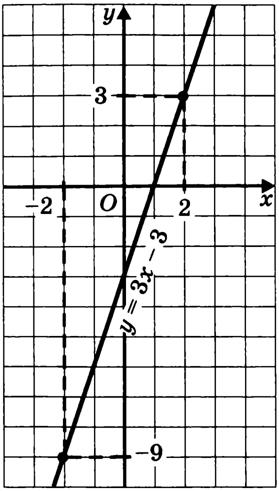


Рис. 106

Пример 4. Решить уравнение $(2x + 3y + 1)^4 + (3x - 4y - 24)^2 = 0$.

Решение. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю. Это значит, что задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x - 4y - 24 = 0. \end{cases}$

Умножив обе части первого уравнения на 4, а обе части второго уравнения — на 3, и сложив полученные уравнения, придем к уравнению $17x - 68 = 0$, откуда находим $x = 4$. При этом значении x первое уравнение системы принимает вид $8 + 3y + 1 = 0$, откуда находим $y = -3$.

Ответ: $x = 4$, $y = -3$.

Пример 5. Найти целочисленные решения уравнения:

а) $4x^2 - y^2 = 7$;

б) $100(3x - 5y + 1)^2 + (3y - 3x)^2 = 36$;

в) $3(2x + 3y)^2 + 5(4x + 5y)^2 = 8$.

Решение. а) Преобразуем заданное уравнение к виду $(2x - y)(2x + y) = 7$.

Поскольку речь идет об отыскании целочисленных решений уравнений, нас интересуют только целочисленные значения множителей $2x - y$ и $2x + y$. Произведение двух целых чисел равно 7, если множители составляют такие пары: 1 и 7, 7 и 1, −1 и −7, −7 и −1.

Таким образом, задача сводится к решению четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x + y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 7, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2x + y = -7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -7, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

В итоге получаем четыре пары решений заданного уравнения: (2; 3), (2; −3), (−2; −3), (−2; 3).

б) Если $3x - 5y + 1$ принимает целочисленное значение, отличное от нуля, то выражение $100(3x - 5y + 1)^2$ уж во всяком случае не меньше 100. Если к нему прибавить неотрицательное число $(3y - 3x)^2$, то 36 никак не получится. Что это значит? Это значит, что обязательно должно выполняться соотношение $3x - 5y + 1 = 0$. Но тогда заданное уравнение принимает вид $(3y - 3x)^2 = 36$ и далее $9(y - x)^2 = 36$; $(y - x)^2 = 4$. Значит, либо $y - x = 2$, либо $y - x = -2$.

Таким образом, задача сводится к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 3$, $y = 2$; из второй — $x = -4{,}5$, $y = -2{,}5$. Второе решение нас не устраивает, ведь в задаче требуется найти целочисленные решения уравнения. Итак, уравнение имеет лишь одну пару целочисленных решений: $x = 3$, $y = 2$.

в) Если a и b — неотрицательные целые числа, то равенство $3a + 5b = 8$ может выполняться тогда и только тогда, когда $a = 1$, $b = 1$. Для заданного уравнения это означает, что должны одновременно выполняться два соотношения:

$$(2x + 3y)^2 = 1 \text{ и } (4x + 5y)^2 = 1.$$

Таким образом, задача сводится к решению четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = 1; \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = -1; \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 5y = 1; \end{cases} \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 5y = -1. \end{cases}$$

Получаем соответственно: $(-1; 1)$, $(-4; 3)$, $(4; -3)$, $(1; -1)$. ◼

Пример 6. Найти такие пары натуральных чисел x и y, которые являются решениями двух и только двух из данных уравнений: 1) $3x + 4y = 65$, 2) $4x + 3y = 60$, 3) $5x - 2y = 13$.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y = 65, \\ 4x + 3y = 60. \end{cases}$ Решив ее, получим $x = \frac{45}{7}$, $y = \frac{80}{7}$. Это нас не устраивает.

Рассмотрим систему, состоящую из второго и третьего уравнений: $\begin{cases} 4x + 3y = 60, \\ 5x - 2y = 13. \end{cases}$ Она также не имеет натуральных решений.

Осталось рассмотреть систему, состоящую из первого и третьего уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y = 65, \\ 5x - 2y = 13. \end{cases}$ Решив ее, получим $x = 7$, $y = 11$. Это нас устроит, если найденная пара натуральных чисел не удовлетворяет второму уравнению. Подставив найденные значения во второе уравнение, получим $28 + 33 = 60$ — неверное равенство. Значит, пара (7; 11) удовлетворяет всем требованиям задачи.

Ответ: (7; 11).

§40. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Собственно говоря, ничего особенно нового вы в этом параграфе не узнаете. Ведь вам уже известно, что реальная ситуация может быть описана на математическом языке в виде математической модели, представляющей собой систему двух линейных уравнений с двумя переменными. Так было в § 8 в ситуации с садоводами Ивановым и Петровым. Так было и в примере 2 из § 37. Поэтому теоретический разговор, соответствующий названию параграфа, можно считать законченным. А вот с практической точки зрения обсуждение новых ситуаций полезно. Этим и займемся.

Пример 1. В седьмом классе в понедельник не пришли в школу одна девочка и пять мальчиков. При этом число девочек в классе оказалось в 2 раза больше числа мальчиков. Во вторник не пришли один мальчик и девять девочек. При этом число мальчиков оказалось в 1,5 раза больше числа девочек. В среду на уроки пришли все ученики. Сколько школьников присутствовало на уроках в среду в седьмом классе?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число девочек, y — число мальчиков в седьмом классе.

В понедельник было $(x - 1)$ девочек, $(y - 5)$ мальчиков. При этом оказалось, что девочек вдвое больше, т. е.

$$x - 1 = 2(y - 5).$$

Во вторник было $(x - 9)$ девочек, $(y - 1)$ мальчиков. При этом оказалось, что мальчиков в 1,5 раза больше, т. е.

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9).$$

Математическая модель ситуации составлена:

$$\begin{cases} x - 1 = 2(y - 5), \\ y - 1 = 1{,}5(x - 9). \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Сначала упростим каждое уравнение системы.

Для первого уравнения имеем:

$$x - 1 = 2(y - 5);$$
$$x - 1 = 2y - 10;$$
$$x - 2y + 9 = 0.$$

Для второго уравнения имеем:

$$y - 1 = 1{,}5(x - 9);$$
$$2(y - 1) = 3(x - 9)$$

(обе части уравнения умножили на 2); далее

$$2y - 2 = 3x - 27;$$
$$3x - 2y - 25 = 0.$$

Итак, получили следующую систему двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} x - 2y + 9 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0 \end{cases}$$

(скорректированная математическая модель рассматриваемой ситуации).

В учебных целях решим эту систему двумя способами.

Первый способ. Применим метод подстановки. Из первого уравнения системы находим $x = 2y - 9$. Подставим этот результат вместо x во второе уравнение системы. Получим:

$$3(2y - 9) - 2y - 25 = 0;$$
$$4y = 52;$$
$$y = 13.$$

Так как $x = 2y - 9$, то $x = 2 \cdot 13 - 9 = 17$.

Итак, $x = 17$, $y = 13$ — решение системы.

Второй способ. Применим метод алгебраического сложения:

$$-\begin{cases} x - 2y + 9 = 0 \\ 3x - 2y - 25 = 0 \end{cases}$$

$$(x - 2y + 9) - (3x - 2y - 25) = 0 - 0;$$

$$x - 2y + 9 - 3x + 2y + 25 = 0;$$

$$-2x + 34 = 0;$$

$$x = 17.$$

Подставим найденное значение x в первое уравнение системы, т. е. в уравнение $x - 2y + 9 = 0$:

$$17 - 2y + 9 = 0;$$

$$y = 13.$$

Итак, $x = 17$, $y = 13$ — решение системы.

Второй этап мы завершили (решили полученную систему, причем даже двумя способами).

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько школьников было в седьмом классе на уроках в среду, когда пришли все ученики. Поскольку $x = 17$, $y = 13$, т. е. в классе было 17 девочек и 13 мальчиков, делаем вывод: всего в классе $17 + 13 = 30$ учеников.

Ответ: 30 учеников.

Замечание. Вы, конечно, понимаете, что для решения конкретной системы уравнений надо выбирать тот способ, который представляется для данного случая наиболее уместным, или тот, который вам больше нравится (т. е. вы можете использовать графический метод, метод подстановки или метод алгебраического сложения — это ваше дело). Составленную в рассмотренной задаче систему мы решили двумя способами, чтобы повторить методы подстановки и алгебраического сложения и сопоставить эти методы друг с другом.

Пример 2. Если двузначное число A разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если число B, записанное теми же цифрами, что число A, но в обратном порядке, разделить на разность его цифр, то в частном получится 18 и в остатке 1. Найти число A, если известно, что $A < B$ и что рассматриваемая разность цифр является натуральным числом.

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

В условии задачи дважды говорится о делении с остатком. Например, если 35 разделить на 4, то в частном получится 8 и в остатке 3. Имеет место следующее равенство: $35 = 8 \cdot 4 + 3$. Этот пример позволит вам вспомнить формулу деления с остатком: если a — делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток, то $a = bq + r$.

Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц числа A. Тогда само число имеет вид $10x + y$. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Это значит, что $10x + y = 3(x + y) + 7$.

Число B, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, имеет вид $10y + x$.

Его предлагается разделить на разность цифр. Но какую разность взять: $x - y$ или $y - x$?

Эта разность должна быть натуральным числом, значит, все зависит от того, какая из цифр больше. Для этого в условии задачи есть подсказка: $A < B$; это значит, что у числа A цифра десятков меньше цифры единиц, а потому в качестве разности цифр придется взять $y - x$. По условию если число B разделить на разность цифр, то в частном получится 18 и в остатке 1. Это значит, что $10y + x = 18(y - x) + 1$.

Таким образом, получаем систему уравнений — математическую модель задачи:

$$\begin{cases} 10x + y = 3(x + y) + 7, \\ 10y + x = 18(y - x) + 1. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Несколько упростим полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 7x - 2y = 7, \\ 19x - 8y = 1. \end{cases}$$

Эту систему удобно решить методом алгебраического сложения:

$$-\begin{cases} 28x - 8y = 28 \\ 19x - 8y = 1 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 9x = 27. \qquad}$$

Значит, $x = 3$. Из уравнения $7x - 2y = 7$ находим, что тогда $y = 7$. Система решена.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Он фактически уже получен: поскольку $x = 3$, а $y = 7$, искомое число есть 37.

Ответ: 37.

Замечание. В примерах 3 и 4, ради краткости, мы не будем явно выделять три этапа математического моделирования при решении текстовой задачи, заменив их пунктами 1, 2, 3. Кроме того, меньшее внимание будем уделять технической стороне дела — решению системы линейных уравнений; надеемся, вы справитесь с этим без нашей помощи.

Пример 3. По окружности, длина которой равна 100 см, равномерно движутся две точки. Двигаясь в противоположных направлениях, они встречаются каждые 4 с, а двигаясь в одном направлении — каждые 20 с. Найти скорости движения обеих точек.

Решение. 1. Пусть x см/с — скорость движения первой точки, y см/с — скорость движения второй точки; положим для определенности, что $x > y$. Двигаясь в противоположных направлениях, т. е. навстречу друг другу, они встречаются каждые 4 с; это значит, что за 4 с они в сумме пройдут путь, равный длине окружности:

$$4x + 4y = 100, \text{ т. е. } x + y = 25.$$

Представим себе теперь, что, стартуя из одной и той же точки окружности, они двинулись в одном направлении. Когда произойдет их новая встреча? Когда первая точка, которая по условию движется быстрее, догонит вторую, т. е. пройдет путь больший, чем вторая точка, ровно на длину окружности, т. е. на 100 см. Первая точка догоняет вторую со скоростью $(x - y)$ см/с. Значит, $20(x - y) = 100$, т. е. $x - y = 5$.

В итоге мы пришли к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

2. Решив эту систему, получим $x = 15$, $y = 10$.

Ответ: 15 см/с, 10 см/с.

Пример 4. Имеются два раствора соли — 40%-й и 60%-й. Их смешали, добавили 5л воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо воды добавили 5 л 80%-го раствора соли, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го и 60%-го растворов?

Решение. 1. Предположим, что было x л 40%-го раствора и y л 60%-го раствора. Количество чистой соли в первом растворе выражается формулой $\frac{40}{100}x$, т. е. $\frac{2}{5}x$ л; количество чистой соли во втором растворе выражается формулой $\frac{60}{100}y$, т. е. $\frac{3}{5}y$ л. Их смешали, добавили 5 л воды и получили $(x + y + 5)$ л 20%-го раствора. Количество чистой соли в этом третьем растворе выражается формулой $\frac{20}{100}(x + y + 5)$, т. е. $\frac{1}{5}(x + y + 5)$ л. Но, с другой стороны, это количество складывается из соли в первом растворе и из соли во втором растворе. Значит, $\frac{1}{5}(x + y + 5) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y$; $x + y + 5 = 2x + 3y$; $x + 2y = 5$.

А что получилось бы, если добавили 5 л 80%-го раствора? Количество чистой соли в гипотетическом 70%-м растворе выражается формулой $\frac{70}{100}(x + y + 5)$, т. е. $\frac{7}{10}(x + y + 5)$ л. Но, с другой стороны, это количество складывается из соли в первом растворе, из соли во втором растворе и из соли, содержащейся в 5 л 80%-го раствора. Значит, $\frac{7}{10}(x + y + 5) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{80}{100} \cdot 5$. Далее имеем $7(x + y + 5) = 4x + 6y + 40$; $3x + y = 5$.

В итоге мы пришли к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + y = 5. \end{cases}$$

2. Решив эту систему, получим $x = 1$, $y = 2$.

Ответ: 1 л 40%-го раствора и 2 л 60%-го раствора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

(из расчета 5 ч в неделю, всего 170 ч)

Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ (29 ч)	
§ 1. Числовые и алгебраические выражения	6
§ 2. Что такое математический язык	2
§ 3. Что такое математическая модель	6
Контрольная работа № 1	1
§ 4. Линейное уравнение с одной переменной	3
§ 5. Задачи на составление линейных уравнений с одной переменной	6
§ 6. Координатная прямая	4
Контрольная работа № 2	1
Глава 2. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ (20 ч)	
§ 7. Координатная плоскость	4
§ 8. Линейное уравнение с двумя переменными и его график	5
§ 9. Линейная функция и ее график	7
§ 10. Взаимное расположение графиков линейных функций	3
Контрольная работа № 3	1
Глава 3. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА (14 ч)	
§ 11. Что такое степень с натуральным показателем	3
§ 12. Таблица основных степеней	2
§ 13. Свойства степени с натуральным показателем	4
§ 14. Умножение и деление степеней с одинаковым показателем	4
§ 15. Степень с нулевым показателем	1

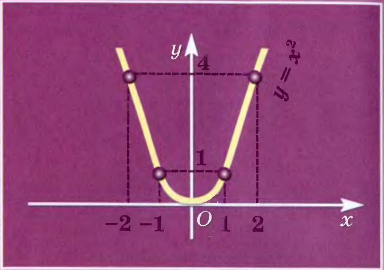
Продолжение табл.

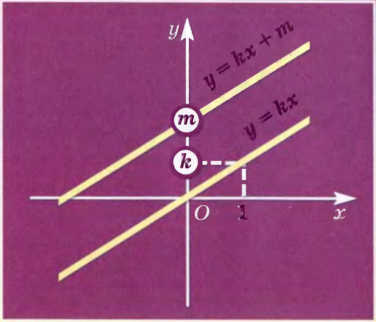
Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава 4. ОДНОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОДНОЧЛЕНАМИ (11 ч)	
§ 16. Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена	2
§ 17. Сложение и вычитание одночленов	3
§ 18. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень	3
§ 19. Деление одночлена на одночлен	2
Контрольная работа № 4	1
Глава 5. МНОГОЧЛЕНЫ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ (26 ч)	
§ 20. Основные понятия	3
§ 21. Сложение и вычитание многочленов	2
§ 22. Умножение многочлена на одночлен	4
§ 23. Умножение многочлена на многочлен	4
Контрольная работа № 5	1
§ 24. Формулы сокращенного умножения	6
§ 25. Метод выделения полного квадрата	3
§ 26. Деление многочлена на одночлен	2
Контрольная работа № 6	1
Глава 6. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ (30 ч)	
§ 27. Что такое разложение многочленов на множители и зачем оно нужно	2
§ 28. Вынесение общего множителя за скобки	3
§ 29. Способ группировки	4
§ 30. Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращенного умножения	6
Контрольная работа № 7	1
§ 31. Разложение многочленов на множители с помощью комбинации различных приемов	6
§ 32. Сокращение алгебраических дробей	4
§ 33. Тождества	3
Контрольная работа № 8	1

Окончание табл.

Изучаемый материал	Кол-во часов
Глава 7. ФУНКЦИЯ $y = x^2$ (13 ч)	
§ 34. Функция $y = x^2$ и ее график	4
§ 35. Графическое решение уравнений	3
§ 36. Что означает в математике запись $y = f(x)$	5
Контрольная работа № 9	1
Глава 8. СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (17 ч)	
§ 37. Основные понятия	3
§ 38. Метод подстановки	4
§ 39. Метод алгебраического сложения	4
§ 40. Системы линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций	5
Контрольная работа № 10	1
Обобщающее повторение	10

ОГЛАВЛЕНИЕ





$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

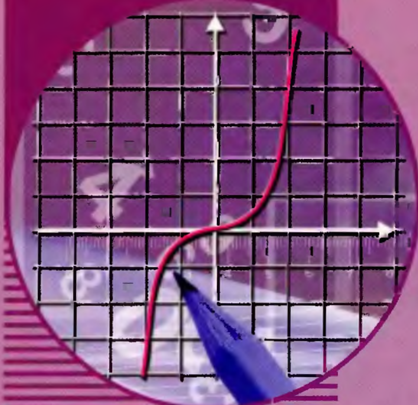
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



ISBN 978-5-346-01195-8