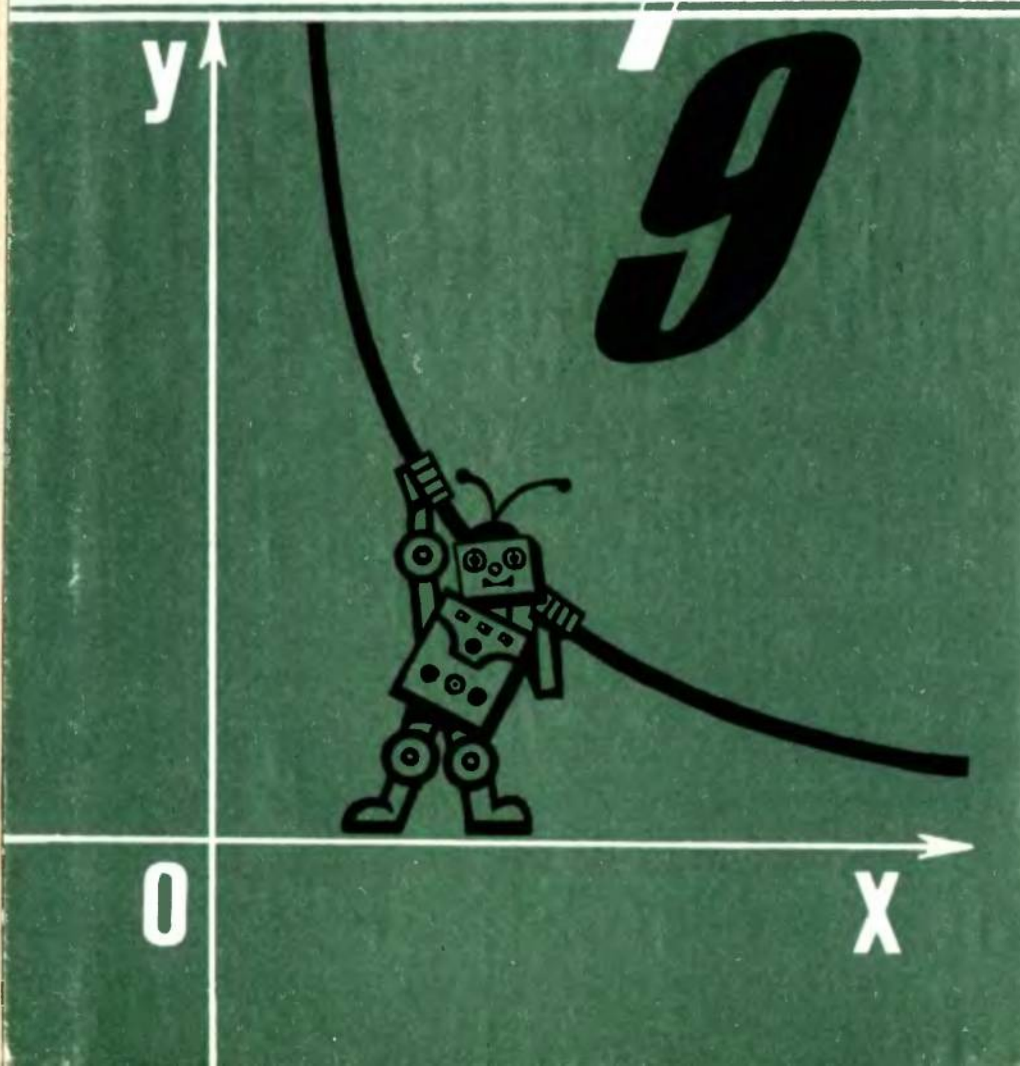
Алгебра

9



АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$$b_{n+1} = b_n q$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1-q}$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

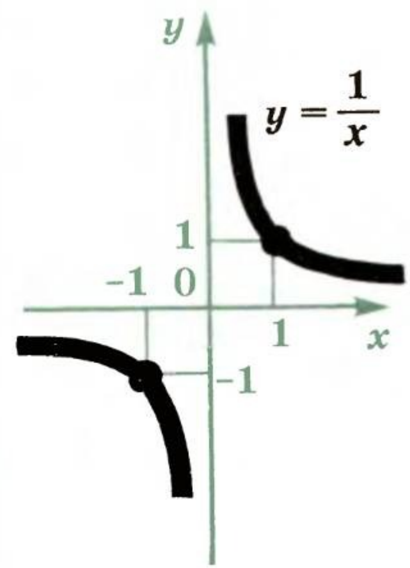
$$a^p a^q = a^{p+q}$$

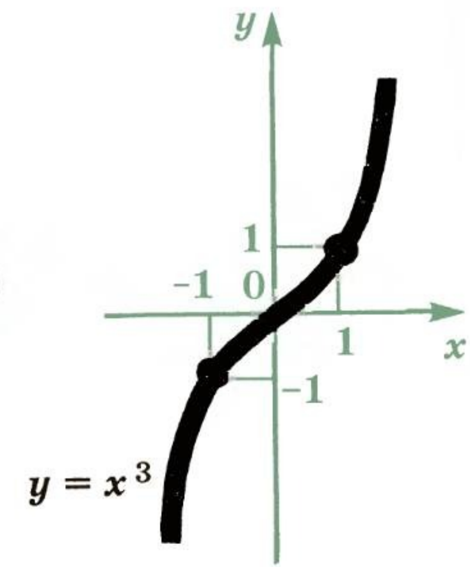
$$(ab)^p = a^p b^p$$

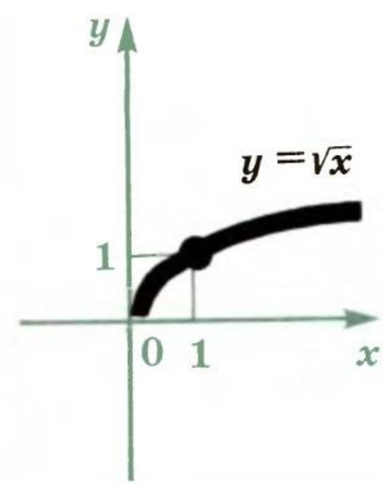
$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

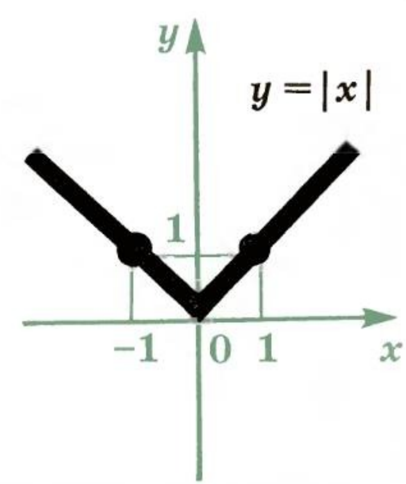
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ



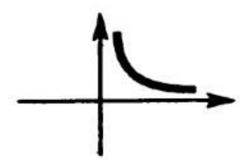






Алгебра

**УЧЕБНИК
ДЛЯ
9 КЛАССА
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ
УЧРЕЖДЕНИЙ**



*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации*

2-е издание

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1995

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
А50

Авторы:
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров,
Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Издание подготовлено под научным руководством академика А. Н. Тихонова

Учебник занял второе место на Всесоюзном конкурсе учебников для средней общеобразовательной школы

Условные обозначения в учебнике

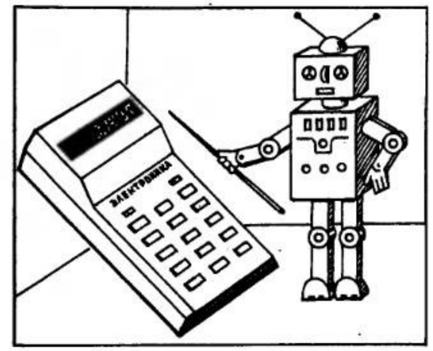
△	— начало решения задачи
▲	— окончание решения задачи
○	— начало обоснования математического утверждения или вывода формулы
●	— окончание обоснования или вывода
═	— знак, отделяющий обязательные задачи от дополнительных
*	— дополнительный более сложный материал
**	— трудные задачи
|	— выделение основного материала
	— занимательные задачи
	— текст, который важно знать и полезно помнить (необязательно наизусть)
ПРОВЕРЬ СЕБЯ	— самостоятельная работа для проверки знаний по основному материалу

Алгебра: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений /
А50 Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— 2-е изд.— М.: Просвещение, 1995. — 223 с.: ил. — ISBN 5-09-006556-X.

А $\frac{4306020500-138}{103(03)-95}$ Уточн. пл. 1995 г. № 119 ББК 22.14я72

ISBN 5-09-006556-X

Глава I
ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ПРОГРАММИРУЕМОМ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ



§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ

Задача 1. Вычислить на микрокалькуляторе гипотенузу c прямоугольного треугольника с катетами $a=5{,}1$ см, $b=6{,}8$ см.
△ Проведем вычисления на микрокалькуляторе «Электроника МК-54», используя формулу $c=\sqrt{a^2+b^2}$, по следующей программе:

$$a\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ b\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}\,. \qquad (1)$$

При $a=5{,}1$, $b=6{,}8$ получаем:

$$5{,}1\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ 6{,}8\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \underline{8{,}5}\,.$$

Ответ. 8,5 см. ▲

Напомним, что *программа вычисления гипотенузы* на МКШ-2 такова:

$$a\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ b\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\,. \qquad (2)$$

Программы (1) и (2) похожи, однако в программе (1) знак действия $\boxed{+}$ стоит после введения a^2 и b^2, а в программе (2) — между ними. Кроме того, в программе (1) нет команды $\boxed{=}$ (обратите внимание на то, что на МК-54 нет клавиши $\boxed{=}$). *Преимущество микрокалькулятора МК-54* перед МКШ-2 состоит в том, что программа (1) может быть введена в его память в общем виде, что дает возможность вычислять гипотенузу треугольника для любых катетов вводом данных в микрокалькулятор. Поэтому микрокалькулятор МК-54 называют *программируемым*. О том, как проводятся вычисления на МК-54 с помощью программной памяти, будет рассказано в § 4.

Рассмотрим подробнее, как выполняются основные операции на микрокалькуляторе МК-54.

Ввод чисел в МК-54 осуществляется так же, как и в МКШ-2. Нажатием клавиши $\boxed{C_x}$ осуществляется *сброс чисел*, и на табло высвечивается 0.

Простейшими операциями на микрокалькуляторе являются *одноместные операции*. Примерами одноместных операций являются вычисления значений выражений x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, 10^x. В этих операциях участвует только одно заданное число и только одно действие, которое выполняется после нажатия соответствующей клавиши. Клавиша микрокалькулятора МК-54 выполняет свое второе назначение, указанное над ней, если сначала нажать клавишу $\boxed{F}$.

Задача 2. Вычислить $(23{,}78)^2$.

△ Вычисления проводятся по следующей программе:

$$23{,}78\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \underline{565{,}4884}.$$

Ответ. 565,4884. ▲

Задача 3. Вычислить $\sqrt{11728{,}89}$.

$$\triangle\ 11728{,}89\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \underline{108{,}3}.$$

Ответ. 108,3. ▲

Отметим, что число 108,3 является точным значением $\sqrt{11728{,}89}$, в чем можно убедиться возведением 108,3 в квадрат. Однако на микрокалькуляторе иногда получается приближенное значение результата вычислений.

Задача 4. Используя МК-54, представить в виде десятичной дроби число $\frac{1}{64}$.

△ Деление проведем с помощью клавиши $\boxed{1/x}$ по программе

$$64\ \boxed{F}\ \boxed{1/x}.$$

На табло высветится следующее:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	5	6	2	5				—	0	2

знак числа (позиция 1); знак порядка (позиция 10); мантисса числа (позиции 1–9); порядок числа (позиции 10–12)

Результат появился на табло в стандартном виде.

Ответ. 0,015625. ▲

Отметим, что на табло МК-54 *порядок числа, записанного в стандартном виде, всегда занимает три последние позиции.* Если эти позиции не светятся, то число изображено в обычной форме. *Первая позиция табло отводится для знака числа.* Таким образом, в МК-54 в обычной форме может быть введено число, которое содержит не более восьми цифр. Если число вводится в стандартном виде, то его мантисса должна содержать не более восьми цифр, а порядок — не более двух цифр (от −99 до 99). Если в результате вычислений получается число, меньшее 1 или большее 99999999, то на табло МК-54 оно изображается в стандартном виде.

Числа в стандартном виде вводятся в МК-54 с помощью клавиши $\boxed{ВП}$. Например, число $-3{,}75\cdot 10^{-7}$ вводится так:

$$\boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{/-/}\ \boxed{ВП}\ \boxed{7}\ \boxed{/-/}.$$

Отметим еще, что число π вводится нажатием клавиш $\boxed{F}\ \boxed{\pi}$.

Задача 5. Вычислить $\sqrt{\pi}$.

$$\triangle\ \boxed{F}\ \boxed{\pi}\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \underline{1{,}7724538}.\ ▲$$

Упражнения

Вычислить (**1—2**).

1. 1) $(17{,}15)^2$; 2) $(31{,}27)^2$; 3) $(618{,}3)^2$; 4) $(131{,}3)^2$.

2. 1) $\sqrt{139{,}34}$; 2) $\sqrt{240{,}25}$; 3) $\sqrt{11815{,}69}$; 4) $\sqrt{84374{,}09}$.

3. Используя микрокалькулятор, представить в виде десятичной дроби число:

1) $\frac{1}{32}$; 2) $\frac{1}{128}$; 3) $\frac{1}{725}$; 4) $\frac{1}{443}$.

4. Ввести в микрокалькулятор число, записанное в стандартном виде:

1) $2{,}78\cdot 10^5$; 2) $-3{,}451\cdot 10^8$; 3) $4{,}04\cdot 10^{-12}$;
4) $-1{,}003\cdot 10^{-18}$; 5) $5{,}41\cdot 10^{-3}$; 6) $-7{,}48\cdot 10^{-8}$.

Вычислить **(5—7)**.

5. 1) π^2; 2) $\frac{1}{\pi}$.

---

6. 1) $(3{,}7\cdot10^3)^2$; 2) $\sqrt{5{,}71\cdot10^6}$; 3) $\frac{1}{4{,}1\cdot10^8}$; 4) $\frac{1}{-1{,}78\cdot10^{-3}}$.

7. 1) $(2{,}781)^2$; 2) $\sqrt{2{,}781}$; 3) $\frac{1}{2{,}781}$; 4) $\sqrt{8{,}49\cdot10^{-8}}$.

8*. С помощью микрокалькулятора составить таблицу квадратов чисел от 2 до 2,2 с шагом 0,01, т. е. чисел 2; 2,01; 2,02; ...; 2,19; 2,2.

9*. Вычислить на микрокалькуляторе значения функции $y=x^2$ на промежутке $[-2;\ 2]$ с шагом 0,05.

§ 2. ВЫПОЛНЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

1. Двуместные операции.

К двуместным операциям относятся арифметические действия над двумя числами и действие возведения в степень. Эти операции выполняются с помощью клавиш сложения $\boxed{+}$, вычитания $\boxed{-}$, умножения $\boxed{\times}$, деления $\boxed{\div}$, возведения в степень $\boxed{x^y}$.

Для *выполнения арифметического действия* над двумя числами a и b нужно:

1) ввести число a;
2) нажать клавишу $\boxed{\text{В}\uparrow}$ — клавишу разделения вводимых чисел;
3) ввести число b;
4) нажать клавишу требуемой операции.

После этого на индикаторе высветится результат.

Задача 1. Вычислить: 1) $79{,}3+4{,}87$; 2) $3457-2309$; 3) $4{,}47\cdot10^{13}\cdot34$; 4) $7326:198$.

△ 1) 79,3 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 4,87 $\boxed{+}$ $\underline{84{,}17}$;

2) 3457 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 2309 $\boxed{-}$ $\underline{1148}$;

3) 4,47 $\boxed{\text{ВП}}$ 13 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 34 $\boxed{\times}$ $\underline{1{,}5198\cdot10^{15}}$;

4) 7326 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 198 $\boxed{\div}$ 37. ▲

Для *выполнения действия возведения в степень* x^y нужно:

1) ввести число y — показатель степени;
2) нажать клавишу $\boxed{\text{В}\uparrow}$;

3) ввести число x — основание степени;
4) нажать клавиши $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^y}$.

После этого на индикаторе высветится результат.

Задача 2. Вычислить 7^3.

$$\triangle\ 3\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 7\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{x^y}\ \underline{342{,}99989}.$$

Ответ. 343. ▲

При вычислении 7^3 на индикаторе высветилось приближенное значение результата. Округляя до целых, получаем точный ответ 343, так как 7^3 — целое число.

Есть операции, которые микрокалькулятор не может выполнить. Такие операции называются *некорректными*. К некорректным относятся невыполнимые операции, например деление на нуль или извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Если попытаться извлечь корень, например, из числа -25, то на табло высветится *сигнал ошибки* ЕГГОГ — это символическое изображение английского слова ERROR — ошибка.

Сигнал ошибки высвечивается на табло и в том случае, когда в результате вычислений должно получиться число, модуль которого больше 10^{99}.

Операция возведения в степень x^y *является некорректной для МК-54*, если основание $x\leqslant0$. Например, $(-2)^3$ или $(-5)^2$ нельзя непосредственно вычислить с помощью клавиши $\boxed{x^y}$, хотя эти выражения имеют смысл. При вычислении значений таких выражений нужно устно определить знак результата и выполнить действия с положительным основанием. Например, $(-2)^3=-2^3$, $(-5)^2=5^2$.

При выполнении на МК-54 операций вычитания, деления и возведения в степень важен порядок ввода данных чисел. Если числа ошибочно введены в другом порядке, то для восстановления нужного порядка используется клавиша $\boxed{\leftrightarrow}$, которую называют *клавишей операции обмена*.

Например, пусть при вычислении 2^3 вместо правильной программы 3 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 2 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^y}$ ошибочно набрано 2 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 3. Тогда можно воспользоваться клавишей $\boxed{\leftrightarrow}$ и вычисления выполнить по программе

$$2\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 3\ \boxed{\leftrightarrow}\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{x^y}.$$

2. Цепочечные операции.

Последовательное выполнение на микрокалькуляторе нескольких действий над заданными числами называют *цепочечной* *операцией.* Например, цепочечными являются операции вычисления на микрокалькуляторе значений выражения вида

$$ab:c+d,\ (a+b)\,c-\frac{1}{d},\ (a^2+\sqrt{b}):c.$$

З а д а ч а 3. Вычислить $573\cdot 27-15032$.

△ Вычисления можно провести по программе

$$573\ \boxed{B\uparrow}\ 27\ \boxed{\times}\ 15032\ \boxed{-}\ \underline{439}.\ ▲$$

Заметим, что вычисления можно провести и по программе

$$573\ \boxed{B\uparrow}\ 27\ \boxed{\times}\ \boxed{B\uparrow}\ 15032\ \boxed{-}\ 439.$$

Однако перед вводом числа 15032 клавишу $\boxed{B\uparrow}$ можно не нажимать, так как с помощью клавиши операции (в данном случае $\boxed{\times}$) уже происходит разделение вводимых чисел.

При выполнении цепочечной операции после нажатия очередной клавиши операции на индикаторе высвечивается результат уже проделанных операций.

З а д а ч а 4. Вычислить:

1) $\frac{174{,}2\cdot 359{,}8}{344{,}38}-76$;
2) $((35{,}4+47{,}6)\cdot 28{,}4-1593{,}4):1{,}34$;
3) $347^2-289^2+\sqrt{64516}$.

△ 1) $174{,}2\ \boxed{B\uparrow}\ 359{,}8\ \boxed{\times}\ 344{,}38\ \boxed{\div}\ 76\ \boxed{-}\ \underline{106}.$

2) $35{,}4\ \boxed{B\uparrow}\ 47{,}6\ \boxed{+}\ 28{,}4\ \boxed{\times}\ 1593{,}4\ \boxed{-}\ 1{,}34\ \boxed{\div}\ \underline{570}.$

3) $347\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ 289\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ 64516$

$\boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{+}\ \ \underline{37142}.$ ▲

З а д а ч а 5. Вычислить приближенно с точностью до 0,01 значение выражения

$$\frac{1}{0{,}23}+\left(\frac{1}{3{,}4}\right)^2-\sqrt{\frac{1}{4{,}5}}.$$

△ $0{,}23\ \boxed{F}\ \boxed{1/x}\ 3{,}4\ \boxed{F}\ \boxed{1/x}\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ 4{,}5\ \boxed{F}\ \boxed{1/x}\ \boxed{F}$

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{-}\ \underline{3{,}9629267}.$

О т в е т: 3,96. ▲

Упражнения

Вычислить **(10—11)**.

10. 1) $84{,}431+1{,}649$; 2) $101{,}31+34{,}79$; 3) $8{,}007-95{,}012$; 4) $31{,}75-48{,}43$.

11. 1) $7481\cdot 4{,}08$; 2) $8{,}778\cdot 1{,}435$; 3) $10{,}415\cdot 1{,}32$; 4) $181{,}17\cdot 15{,}7$.

12. Вычислить с точностью до 0,001: 1) $15{,}78:3{,}1$; 2) $103{,}45:13{,}7$; 3) $14151:45$; 4) $2007:301$.

Вычислить **(13—17)**.

13. 1) $3{,}78\cdot 10^8+4{,}491\cdot 10^9$; 2) $4{,}85\cdot 10^{12}-3{,}87\cdot 10^{10}$; 3) $4{,}48\cdot 10^5\cdot 48$; 4) $5{,}07\cdot 10^{12}:39$; 5) $(8{,}52\cdot 10^{-8}):(2{,}13\cdot 10^{-5})$; 6) $(7{,}83\cdot 10^{12}):(8{,}7\cdot 10^{-3})$.

14. 1) 8^3; 2) 7^5; 3) 12^6; 4) 17^4; 5) 25^3; 6) 105^2.

15. 1) $(3{,}1\cdot 10^8)^3$; 2) $(4{,}48\cdot 10^{-5})^4$; 3) π^8; 4) $(7{,}01\cdot 10^{-3})^5$.

16. 1) $348\cdot 31-789$; 2) $579\cdot 49-18408$; 3) $431\cdot 18+1208$; 4) $13075+553\cdot 76$.

17. 1) $\frac{135{,}2\cdot 27{,}8}{1879{,}28}-109$;

2) $\frac{139{,}2}{17{,}4\cdot 0{,}8}+491$;

3) $((68{,}8-39{,}9)\cdot 42{,}1-223{,}75):2{,}47$;

4) $\sqrt{767376}+549^2-187^2$.

18. Вычислить приближенно с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{\frac{1}{3{,}48}+\frac{1}{0{,}48}+\left(\frac{1}{6{,}4}\right)^2}$; 2) $\frac{1}{5{,}04}+\left(\frac{1}{7{,}1}\right)^2-\sqrt{\frac{1}{3{,}7}}$.

Вычислить **(19—20)**.

19. 1) $743\cdot 77-288$; 2) $\frac{221\cdot 5{,}78}{2{,}89}+368$;

3) $\frac{23{,}94\cdot 741}{21{,}66}+\sqrt{94249}$; 4) $\sqrt{\frac{547{,}6\cdot 75{,}1}{30{,}04}}+\sqrt{26569}$.

20. 1) $(13{,}4\cdot 75+\sqrt{6084}-967)^2$; 2) $\frac{1}{4{,}32\cdot 0{,}95-(1{,}3)^2-2{,}289}$;

3) $\sqrt{13{,}69\cdot 25-(14{,}8)^2}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{13{,}4\cdot 17{,}5-228{,}25}}$.

21. Вычислить на микрокалькуляторе катет прямоугольного треугольника, если заданы другой его катет a и гипотенуза c: 1) $a=52{,}8$ см, $c=66$ см; 2) $a=3{,}42$ м, $c=5{,}7$ м.

22*. Преобразовать выражение $3{,}1x^2+4{,}3x-1{,}2$ так, чтобы программа вычислений его значений была цепочечной операцией. Выполнить вычисления при: 1) $x=23$; 2) $x=-3{,}4$.

23*. Высота h прямоугольного треугольника с катетами a и b вычисляется по формуле $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Составить программу вычислений в виде цепочечной операции. Вычислить h при: 1) $a=52$, $b=39$; 2) $a=10{,}8$, $b=8{,}1$.

24*. Крабовидная туманность в созвездии Тельца расширяется со скоростью 1500 км/с. На какое расстояние расширится туманность через 1 мин; 1 мин 15 с; 1 ч 30 мин; 12 ч 30 мин?

25*. Перевод температуры из шкалы Фаренгейта (F) в шкалу Цельсия (C) выражается формулой $C=\frac{5(F-32)}{9}$.
1) Определить C, если F=3; 48; 80; 108; 205.
2) Определить F, если C=1; 20; 35; 40; 52; 100.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЯ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАМЯТИ

В МК-54 для хранения промежуточных результатов есть специальные ячейки памяти, которые называют *адресуемыми регистрами. Всего их 14, и они обозначаются так*:

RG0, RG1, RG2, ..., RG9, RGa, RGb, RGc, RGd.

При вычислении можно использовать любой регистр или несколько.

З а д а ч а 1. Вычислить $13\cdot47-9\cdot24$.

△ Вычисления проведем в следующем порядке:

1) Вычислим $9\cdot24$.

2) Поместим результат в RGd (можно использовать любую другую ячейку памяти). Для этого нужно нажать клавишу $\boxed{x\to\Pi}$ перевода числа в память и затем клавишу $\boxed{\text{d}}$ индекса адресуемого регистра (это третье назначение клавиши $\boxed{C_x}$).

3) Вычислим $13\cdot47$.

4) Вычтем из результата $13\cdot47$ число, хранящееся в RGd.

Программа вычислений в указанном порядке такова:

$$9\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 24\ \boxed{\times}\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{\text{d}}\ 13\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 47\ \boxed{\times}\ \boxed{\Pi\to x}\ \boxed{\text{d}}\ \boxed{-}$$

<u>395</u>. ▲

Заметим, что если сначала вычислить произведение $13\cdot47$, а затем $9\cdot24$, то перед вычитанием нужно поменять местами результаты умножения, используя клавишу $\boxed{\leftrightarrow}$. В этом случае программа будет такой:

$$13\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 47\ \boxed{\times}\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{\text{d}}\ 9\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 24\ \boxed{\times}\ \boxed{\Pi\to x}\ \boxed{\text{d}}\ \boxed{\leftrightarrow}$$

$\boxed{-}$ <u>395</u>.

З а д а ч а 2. Вычислить $\frac{234}{3{,}7}+\frac{357}{4{,}8}-7{,}8\cdot6{,}7$ с точностью до 0,1.

△ Вычисление проведем по следующему алгоритму:

1) Вычислим $\frac{234}{3{,}7}$ и результат поместим в RG1.

2) Вычислим $\frac{357}{4{,}8}$, сложим с числом, хранящимся в RG1, и результат поместим в RG2 (можно снова в RG1).

3) Вычислим $-7{,}8\cdot6{,}7$ и результат сложим с числом, хранящимся в RG2.

Получаем программу:

$$234\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 3{,}7\ \boxed{\div}\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{1}\ 357\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 4{,}8\ \boxed{\div}\ \boxed{\Pi\to x}\ \boxed{1}\ \boxed{+}$$

$$\boxed{x\to\Pi}\ \boxed{2}\ 7{,}8\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 6{,}7\ \boxed{\times}\ \boxed{/-/}\ \boxed{\Pi\to x}\ \boxed{2}\ \boxed{+}$$

<u>85,35824</u>.

О т в е т: 85,4. ▲

З а д а ч а 3*. Вычислить полную поверхность цилиндрической банки с диаметром основания 9,5 см и высотой 5,5 см.

△ Полная поверхность цилиндра с диаметром основания D и высотой h вычисляется по формуле

$$S=\frac{\pi D^2}{2}+\pi Dh.$$

Вычисления по этой формуле с использованием памяти можно проводить по программе

$$\boxed{\text{F}}\ \boxed{\pi}\ D\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\times}\ 2\ \boxed{\div}\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{\pi}\ D\ \boxed{\times}$$

$$h\ \boxed{\times}\ \boxed{\Pi\to x}\ \boxed{0}\ \boxed{+}.$$

Однако если предварительно преобразовать формулу к виду

$$S=\left(\frac{D}{2}+h\right)\pi D,$$

то вычисления можно провести без использования памяти по более короткой программе:

$$D\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 2\ \boxed{\div}\ h\ \boxed{+}\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ D\ \boxed{\times}.$$

Получаем:

$$9{,}5\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ 2\ \boxed{\div}\ 5{,}5\ \boxed{+}\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ 9{,}5\ \boxed{\times}\ \underline{305{,}91258}.$$

О т в е т. $S=306$ см². ▲

Упражнения

Вычислить **(26—29)**.

26. 1) $2337:123-4029:237$; 2) $3{,}7\cdot 4{,}3+6{,}9\cdot 2{,}1$;
3) $6228:346+4{,}2\cdot 3{,}5$; 4) $4{,}8\cdot 6{,}5-5564:428$.

27. 1) $(38{,}4+53{,}6)\cdot(3{,}41-1{,}91)$;
2) $(6521-3253):(24{,}27+18{,}73)$;
3) $(761-435)\cdot(4{,}261+2{,}239)$;
4) $(12{,}18+10{,}76):(7{,}45-4{,}35)$.

28. 1) $(391:23+33)(45{,}99:7{,}3-2{,}1)$;
2) $(4{,}32\cdot 6{,}5-13{,}08)(3{,}91:2{,}3+4{,}3)$;
3) $(15{,}51:4{,}7+18{,}14):(2{,}3\cdot 3{,}8-2{,}04)$;
4) $(6{,}1\cdot 7{,}6-13{,}25):(19{,}6:5{,}6+4{,}2)$.

29. 1) $45\cdot 0{,}24-\frac{11{,}96}{5{,}2}+\frac{6{,}29}{1{,}7}$; 2) $3{,}4\cdot 7{,}5\cdot 12-\frac{252}{14}-\frac{1118}{43}$;

3) $39\cdot 1{,}2+\frac{13{,}33}{3{,}1}-34\cdot 0{,}45$; 4) $4{,}8\cdot 2{,}5-\frac{63}{4{,}2}-\frac{76{,}8\cdot 15}{48}$.

30. Пол в комнате, план которой дан на рисунке 1, нужно покрасить краской. Хватит ли 2 кг 800 г краски, если расход краски равен 130 г/м^2?

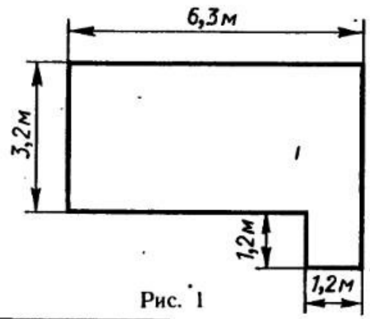


Рис. 1

31. Вычислить:
1) $(3{,}8\cdot 4{,}5+23\cdot 1{,}3)^2$; 2) $\sqrt{6{,}29:3{,}7+16{,}79}$;
3) 14^4-34^3; 4) $12^6-8^7-7^7$.

32*. Вычислить приближенно с точностью до 0,1:

1) $\frac{74\cdot 4{,}2}{5{,}3}-\frac{263}{3{,}6\cdot 2{,}7}$; 2) $\frac{8765}{43}-\frac{6543}{37}+\frac{2345}{87}$;

3) $\sqrt{37\cdot 67}+\sqrt{23\cdot 75}-\sqrt{17\cdot 53}$; 4) $\sqrt{7\pi^3-3\pi^2}$.

33.** Мяч, брошенный вертикально вверх со скоростью $v_0=40$ (м/с), через t секунд оказывается на высоте $h=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ метров от точки бросания, где $g=9{,}8$ (м/с^2). Составить программу вычислений значения h на микрокалькуляторе с использованием памяти и без нее. Вычислить h при $t=3$; 4; 5; 6. Определить, через сколько секунд высота будет наибольшей и найти эту высоту.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОЙ ПАМЯТИ

Микрокалькулятор МК-54 имеет специальную *программную память*, которая может запомнить введенную в общем виде программу для вычислений по одной или нескольким формулам при различных значениях входящих в них букв.

МК-54 имеет *два режима работы*:

1) *автоматический режим*, в котором проводятся вычисления;

2) *режим «Программирование»*, в котором в микрокалькулятор вводится программа для ее запоминания.

При включении МК-54 он начинает работать в автоматическом режиме (в этом режиме проводились вычисления в § 1—3). Для перехода в режим «Программирование» нужно нажать клавиши $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{ПРГ}}$. Для обратного перехода в автоматический режим нужно нажать клавиши $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{АВТ}}$.

Задача 1. Составить и ввести программу для вычисления гипотенузы c прямоугольного треугольника по данным его катетам a и b. Используя эту программу, вычислить c при: 1) $a=3$, $b=4$; 2) $a=3{,}06$, $b=4{,}08$; 3) $a=17{,}4$, $b=7{,}9$.

△ **Воспользуемся программой для вычисления гипотенузы по формуле** $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Эта программа была составлена в § 1:

$$a\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ b\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}.$$

Для того чтобы ввести ее в программную память, нужно указать, в какие ячейки памяти будут вводится конкретные значения a и b. Выберем для этого, например, RG1 и RG2. Тогда программа запишется так:

$$\boxed{\text{П}\to x}\ \boxed{1}\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\text{П}\to x}\ \boxed{2}\ \boxed{F}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}. \quad (1)$$

Эта программа разбивается на следующие *простейшие команды:*

1) $\boxed{\text{П}\to x}\ \boxed{1}$; 2) $\boxed{F}\ \boxed{x^2}$; 3) $\boxed{\text{П}\to x}\ \boxed{2}$;

4) $\boxed{F}\ \boxed{x^2}$; 5) $\boxed{+}$; 6) $\boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}$.

Начнем вводить программу (1) в программную память.

1) Включим микрокалькулятор и перейдем в режим «Программирование» нажатием клавиш $\boxed{F}\ \boxed{\text{ПРГ}}$. На последних двух позициях табло высветятся цифры 00. Это номер ячейки программной памяти (адрес), в которую будет послана первая команда (в программной памяти МК-54 всего 98 адресов, занумерованных 00; 01; 02; ...; 97).

2) Введем первую команду нажатием клавиш $\boxed{\text{П}\to x}$ и $\boxed{1}$. На второй и третьей позициях табло высветится число 61 — код этой команды, а на последних двух позициях 01 — адрес, по которому будет послана вторая команда.

После ввода в микрокалькулятор каждой *простейшей команды* она высвечивается на табло в кодированном виде. Для кодов простейших команд имеется специальная таблица

3) Введем вторую команду нажатием клавиш $\boxed{F}$ и $\boxed{x^2}$. На второй и третьей позициях табло появится код этой команды 22, на пятой и шестой позициях — код предыдущей команды 61, а на последних двух 02 — адрес, по которому будет послана третья команда.

4) Введем третью команду нажатием клавиш $\boxed{\text{П}\to x}$ и $\boxed{2}$. На второй и третьей позициях табло высветится код этой команды 62, на пятой и шестой позициях — код второй команды, на восьмой и девятой позициях — код первой команды, на последних двух позициях 03 — адрес, по которому будет послана четвертая команда.

5) Введем четвертую команду нажатием клавиш $\boxed{F}$ и $\boxed{x^2}$. На табло высветятся по порядку: код этой команды 22, коды двух предыдущих команд 62, 22 и адрес 04, по которому будет послана пятая команда.

6) Вводим остальные команды: $\boxed{+}$ и $\boxed{F}\ \boxed{\sqrt{\ }}$. Коды этих команд 10 и 21.

Правильность ввода программы наблюдается по табло: при введении каждой команды на табло высвечивается код данной команды, коды двух предыдущих команд и адрес последующей команды.

Если при введении очередной команды допущена ошибка (например, нажата не та клавиша), то ее можно исправить. Для этого нужно нажать клавишу $\boxed{\overleftarrow{\text{ШГ}}}$ и повторить введение этой команды.

7) *Для завершения ввода* каждой *программы* нужно нажать клавишу $\boxed{\text{С/П}}$, которая дает команду окончания работы, на табло высветится число 50 — код этой команды.

Для удобства работы с программой ее обычно оформляют в виде следующей таблицы:

Программа 1

Адрес	Клавиши	Код
00	$\boxed{\text{П}\to x}$ $\boxed{1}$	61
01	$\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$	22
02	$\boxed{\text{П}\to x}$ $\boxed{2}$	62
03	$\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$	22
04	$\boxed{+}$	10
05	$\boxed{F}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$	21
06	$\boxed{\text{С/П}}$	50

Для того *чтобы перейти к вычислениям* по введенной *программе*, нужно перевести микрокалькулятор в автоматический режим работы нажатием клавиш $\boxed{F}\boxed{АВТ}$.

Начнем вычисления по данным условиям задачи.

1) $a=3$, $b=4$. Введем числа 3 и 4 соответственно в RG1 и RG2:

$$3\ \boxed{x\to П}\ \boxed{1}\ 4\ \boxed{x\to П}\ \boxed{2}.$$

Для того чтобы начались вычисления по данной программе с адреса 00, нажмем клавишу $\boxed{В/О}$ и клавишу пуска программы $\boxed{С/П}$. На табло появится результат — число 5.

2) $a=3{,}06$, $b=4{,}08$. Введем данные числа в RG1, RG2 и запустим программу:

$$3{,}06\ \boxed{x\to П}\ \boxed{1}\ 4{,}08\ \boxed{x\to П}\ \boxed{2}\ \boxed{В/О}\ \boxed{С/П}\ \underline{5{,}1}.$$

3) $a=17{,}4$, $b=7{,}9$. Аналогично получаем:

$$17{,}4\ \boxed{x\to П}\ \boxed{1}\ 7{,}9\ \boxed{x\to П}\ \boxed{2}\ \boxed{В/О}\ \boxed{С/П}\ \underline{19{,}109421}. ▲$$

З а д а ч а 2. Составить программу для вычисления сопротивления R участка электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединенных проводников с сопротивлениями R_1 и R_2.

△ Из курса физики известно, что

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Выражая R через R_1 и R_2, получаем:

$$R=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}.$$

Предполагая, что значения R_1 и R_2 находятся в RGa и RGb, получаем программу:

$$\boxed{П\to x}\ \boxed{a}\ \boxed{F}\ \boxed{1/x}\ \boxed{П\to x}\ \boxed{b}\ \boxed{F}\ \boxed{1/x}\ \boxed{+}\ \boxed{F}\ \boxed{1/x}.$$

Используя таблицу кодов, оформим эту программу в виде таблицы.

П р о г р а м м а 2

Адрес	Клавиши	Код
00	$\boxed{П\to x}$ $\boxed{a}$	6⁻
01	$\boxed{F}$ $\boxed{1/x}$	23
02	$\boxed{П\to x}$ $\boxed{b}$	6L
03	$\boxed{F}$ $\boxed{1/x}$	23
04	$\boxed{+}$	10
05	$\boxed{F}$ $\boxed{1/x}$	23
06	$\boxed{С/П}$	50

Заметим, что *код команды* может изображаться не только двумя цифрами, но также цифрой и одним из символов: L, Г, ⊏, Е, —.

Например, команда $\boxed{П\to x}\boxed{a}$ имеет код 6^{-}, а команда $\boxed{П\to x}\boxed{b}$ — код 6L.

Вы можете самостоятельно ввести программу 2 в МК-54 и провести вычисления для нескольких значений R_1 и R_2.

Если в программной памяти находится некоторая программа, то в автоматическом режиме можно выполнять любые другие вычисления. Чтобы вернуться к вычислениям по хранящейся программе, достаточно ввести новые данные в указанные этой программой ячейки памяти и нажать клавиши $\boxed{В/О}\boxed{С/П}$. Выключение микрокалькулятора очищает все его регистры, включая программную память.

Упражнения

34. Составить программу для вычисления значений выражения $8a+a^2$, ввести в программную память и найти значение этого выражения при:
1) $a=3$; 2) $a=3{,}4$; 3) $a=-2{,}1$; 4) $a=\pi$.

35. Составить программу для вычисления значений выражения $27b^2+12c$ и найти значение этого выражения при:
1) $b=3$, $c=-4$; 2) $b=1{,}6$, $c=-5{,}76$;
3) $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$; 4) $b=2\pi$, $c=-9\pi^2$.

36. По программе, введенной в программную память, найти значение выражения $3x^2-8x+5$ при:
1) $x=7$; 2) $x=2{,}3$; 3) $x=3\frac{1}{3}$; 4) $x=\frac{4}{3}+\pi$.

Вычислить **(37—38).**

37. $\frac{6ab^2-c}{3a+4c}$ при:
1) $a=1$, $b=2$, $c=-1$; 2) $a=4{,}2$, $b=3{,}4$, $c=1{,}7$;
3) $a=-\sqrt{80}$, $b=\sqrt{15}$, $c=-7{,}3$; 4) $a=\sqrt{\pi}$, $b=3$, $c=-\sqrt{\pi}$.

38. $\frac{a^2}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{c}}{d^2}$ при:
1) $a=6$, $b=9$, $c=16$, $d=2$;
2) $a=\sqrt{18}$, $b=324$, $c=529$; $d=\sqrt{23}$;
3) $a=7\sqrt{13}$, $b=49$, $c=2916$, $d=3\sqrt{2}$;
4) $a=b=c=d=\sqrt{\pi}$.

39*. Электрическая цепь состоит из трех параллельно соединенных сопротивлений R_1, R_2, R_3. Найти общее сопротивление, пользуясь формулой $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ при:
1) $R_1=40$ Ом, $R_2=75$ Ом, $R_3=95$ Ом;
2) $R_1=130$ Ом, $R_2=235$ Ом, $R_3=345$ Ом.

§ 5. ПРОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Вам известно, что корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ находятся по формулам

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (1)$$

В случае сложных вычислений или когда нужно решить несколько квадратных уравнений можно воспользоваться программируемым микрокалькулятором.

Составим программу вычисления корней квадратного уравнения на МК-54 по следующей схеме:

1) Выберем ячейки памяти RGa, RGb, RGc для значений коэффициентов уравнения a, b, c.

2) Составим программу для вычисления x_1 по формуле (1). Чтобы программа была проще, запишем эту формулу так:

$$x_1=(\sqrt{-a\cdot c\cdot 4+b^2}-b):2:a.$$

Тогда вычисления проводятся одной цепочечной операцией без использования памяти (адреса 00—15 программы).

3) Поместим найденное значение x_1 в RG1 (адрес 16).

4) Составим программу для вычисления x_2, используя теорему Виета, по формуле

$$x_2=-\left(\frac{b}{a}+x_1\right)$$

(адреса 17—22).

5) Завершим программу командой $\boxed{\text{С/П}}$ (адрес 23).

По этой схеме, используя таблицу кодов, запишем программу в следующем виде:

Программа

Адрес	Клавиши	Код
00	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{a}$	6−
01	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{c}$	6[
02	$\boxed{\times}$	12
03	$\boxed{4}$	04
04	$\boxed{\times}$	12
05	$\boxed{/-/}$	0L
06	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{b}$	6L
07	$\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$	22
08	$\boxed{+}$	10
09	$\boxed{F}$ $\boxed{\sqrt{}}$	21
10	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{b}$	6L
11	$\boxed{-}$	11
12	$\boxed{2}$	02
13	$\boxed{\div}$	13
14	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{a}$	6−
15	$\boxed{\div}$	13
16	$\boxed{x\to\Pi}$ $\boxed{1}$	41
17	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{b}$	6L
18	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{a}$	6−
19	$\boxed{\div}$	13
20	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{1}$	61
21	$\boxed{+}$	10
22	$\boxed{/-/}$	0L
23	$\boxed{\text{С/П}}$	50

З а д а ч а. Ввести в МК-54 составленную программу и решить уравнения:

1) $x^2-2{,}3x-19{,}38=0$;
2) $x^2-45x+503=0$;
3) $5x^2+13x+8{,}6=0$.

$\triangle$ Включим микрокалькулятор, перейдем в режим «Программирование» нажатием клавиш $\boxed{F}$ $\boxed{ПРГ}$, введем программу нажатием клавиш, указанных в среднем столбце таблицы-программы, и перейдем в автоматический режим нажатием клавиш $\boxed{F}$ $\boxed{АВТ}$.

$\triangle$ 1) Введем коэффициенты уравнения $x^2-2{,}3x-19{,}38=0$ в RGa, RGb, RGc и запустим программу:

1 $\boxed{x\to П}$ $\boxed{a}$ 2,3 $\boxed{/-/}$ $\boxed{x\to П}$ $\boxed{b}$ 19,38 $\boxed{/-/}$ $\boxed{x\to П}$ $\boxed{c}$

$\boxed{В/О}$ $\boxed{С/П}$ $-\underline{3{,}4}$.

На табло высветилось значение корня $x_2=-3{,}4$. Значение x_1 находится в RG1, выведем его на табло нажатием клавиш: $\boxed{П\to x}$ $\boxed{1}$ $\underline{5{,}7}$. Итак, $x_1=5{,}7$.

2) Вводя коэффициенты уравнения $x^2-45x+503=0$ в RGa, RGb, RGc, найдем его корни с точностью до 0,1:

1 $\boxed{x\to П}$ $\boxed{a}$ 45 $\boxed{/-/}$ $\boxed{x\to П}$ $\boxed{b}$ 503 $\boxed{x\to П}$ $\boxed{c}$ $\boxed{В/О}$

$\boxed{С/П}$ $\underline{20{,}697225}$,

$\boxed{П\to x}$ $\boxed{1}$ $\underline{24{,}302775}$;

$$x_1\approx 24{,}3,\quad x_2\approx 20{,}7.$$

3) Вводя коэффициенты уравнения $5x^2+13x+8{,}6=0$ в RGa, RGb, RGc, получаем:

5 $\boxed{x\to П}$ $\boxed{a}$ 13 $\boxed{x\to П}$ $\boxed{b}$ 8,6 $\boxed{x\to П}$ $\boxed{c}$ $\boxed{В/О}$ $\boxed{С/П}$

<u>ERROR</u>.

Микрокалькулятор показал, что вычисления невозможны, т. е. уравнение не имеет действительных корней. ▲

Упражнения

Решить квадратное уравнение и выяснить, точные или приближенные значения корней найдены (**40—41**).

40. 1) $x^2+4x-1517=0$; 2) $x^2+3x-158=0$;
3) $x^2-2x-17{,}6=0$; 4) $x^2+2x-18{,}36=0$.

41. 1) $4x^2-44x+105=0$; 2) $5x^2+11x-275{,}2=0$;
3) $3x^2-64x+97=0$; 4) $4x^2-26x-373=0$.

42. Прямоугольный участок земли обнесен изгородью, длина которой 350 м. Найти длину и ширину этого участка, если его площадь равна 7626 м^2.

43. Решить уравнение с точностью до 0,01:
1) $x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{3}=0$; 2) $x^2+\sqrt{5}x-\sqrt{3}=0$.

44. Масса одного слитка металла 153 г, другого 230 г, причем плотность первого на 2,9 г/см^3 больше плотности второго. Каков объем каждого слитка, если объем первого на 13,6 см^3 меньше объема второго? (Ответ дать с точностью до 0,1 см^3.)

45*. Звук от удара предмета, упавшего с моста в воду, был услышан через 3 с. Определить высоту моста (с точностью до 0,1 м), считая, что скорость звука равна 330 м/с, а путь свободно падающего тела выражается формулой $s=\frac{gt^2}{2}$, где $g\approx 9{,}8$ (м/с^2).

§ 6. ЭТАПЫ РАБОТЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММ

Решение вычислительных задач на ЭВМ, в том числе и на МК-54, состоит из следующих *этапов:*

1. Программирование решения задачи.
2. Ввод программы в память.
3. Редактирование и отладка программы.
4. Вычисления по программе.

З а д а ч а. Составить программу для вычисления высоты цилиндра, у которого радиус основания равен r (см) и полная поверхность равна S (см^2). Провести вычисления при:

1) $S=1600$, $r=7$;

2) $S=23\frac{5}{7}$, $r=\sqrt{2}$.

$\triangle$ 1. П р о г р а м м и р о в а н и е р е ш е н и я з а д а ч и.

Полная поверхность цилиндра S с радиусом основания r и высотой H вычисляется по формуле

$$S=2\pi r\,(r+H).$$

Из этой формулы находим H:

$$H=\frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Преобразуем это выражение так, чтобы программа вычислений была по возможности простой:

$$H=\frac{S}{2\pi r}-r. \qquad (1)$$

Поместим значение S в RG1, а значение r в RG2. Составим программу для вычисления значения H по формуле (1):

$$\boxed{\Pi\to x}\ \boxed{1}\ 2\ \boxed{\div}\ \boxed{F}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\div}\ \boxed{\Pi\to x}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{\Pi\to x}\ \boxed{2}\ \boxed{-}\ \boxed{С/П}. \qquad (2)$$

С помощью таблицы кодов запишем эту программу:

Программа

Адрес	Клавиши	Код
00	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{1}$	61
01	$\boxed{2}$	02
02	$\boxed{\div}$	13
03	$\boxed{F}$ $\boxed{\pi}$	20
04	$\boxed{\div}$	13
05	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{2}$	62
06	$\boxed{\div}$	13
07	$\boxed{\Pi\to x}$ $\boxed{2}$	62
08	$\boxed{-}$	11
09	$\boxed{С/П}$	50

Таким образом, на первом этапе работы составляется алгоритм решения задачи (формула 1) и затем этот алгоритм формулируется на языке машины, т. е. составляется программа.

2. Ввод программы в память.

Включим микрокалькулятор. Нажатием клавиш $\boxed{F}$ $\boxed{ПРГ}$ перейдем в режим «Программирование» и введем программу.

3. Редактирование и отладка программы.

1) Правильность ввода программы проверяется визуальным наблюдением порядка появления кодов команд на табло. Если при вводе программы допущены ошибки, то их можно исправить, т. е. *отредактировать программу.*

Пусть, например, при вводе команды по адресу 06 высветился код 12, а не 13 (это означает, что вместо клавиши $\boxed{\div}$ нажата клавиша $\boxed{\times}$). Ошибку можно исправить, нажав клавишу $\boxed{\overleftarrow{ШГ}}$ и введя верную команду. Если после ввода некоторой команды обнаружена ошибка в какой-то из предыдущих, то нажатием клавиши $\boxed{\overleftarrow{ШГ}}$ несколько раз можно возвратиться к этой неверной команде, исправить ее и с помощью клавиши $\boxed{\overrightarrow{ШГ}}$ вернуться к очередной команде.

2) После ввода программы в микрокалькулятор нужно ее *отладить*: проверить правильность вычислений по этой программе, найти ошибки и, если они есть, исправить их.

Пусть в МК-54 введена программа (2) и осуществлен переход в автоматический режим. Проверим работу программы на простом примере *(проверка по тесту)*. Пусть $S=\pi$, $r=\frac{1}{2}$. Тогда должно получиться

$$H=\frac{\pi}{2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Проведем вычисления по программе в автоматическом режиме:

$$\boxed{F}\ \boxed{\pi}\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{1}\ 0{,}5\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{2}\ \boxed{В/О}\ \boxed{С/П}\ \underline{0{,}5}.$$

Если при проверке по тесту оказалось, что программа работает неверно, то нужно найти ошибки и исправить их. Для этого сначала нужно проверить правильность составленной программы по среднему столбцу. Пусть, например, обнаружена ошибка по адресу 08: вместо строки | 08 | $\boxed{-}$ | 11 | написана строка | 08 | $\boxed{/-/}$ | 0L |. Исправив эту строку в таблице, нужно в автоматическом режиме нажать клавишу $\boxed{БП}$, набрать адрес 08 нажатием клавиш $\boxed{0}$ $\boxed{8}$, нажать клавиши $\boxed{F}$, $\boxed{ПРГ}$

и набрать верную команду $\boxed{-}$. Вернувшись в автоматический режим, повторить проверку по тесту.

Если программа составлена верно, то нужно проверить, правильно ли она введена. Для этого в автоматическом режиме нажмем клавишу $\boxed{\text{В/О}}$, клавиши $\boxed{F}$, $\boxed{\text{ПРГ}}$ и $\boxed{\overrightarrow{\text{ШГ}}}$. На табло высветится код первой команды. Нажимая клавишу $\boxed{\overrightarrow{\text{ШГ}}}$ второй раз, третий и т. д., проверим по табло коды команд, сверяясь с третьим столбцом таблицы. Если обнаружена ошибка, нужно ее исправить, нажав клавишу $\boxed{\overleftarrow{\text{ШГ}}}$ и введя команду верно.

4. Вычисления по программе.

Введем в автоматическом режиме исходные данные и запустим программу:

1) 1600 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{1}$ 7 $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{В/О}}$ $\boxed{\text{С/П}}$ $\underline{29,378272}$; $H\approx 29,4$;

2) 5 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 7 $\boxed{\div}$ 23 $\boxed{+}$ $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{1}$ 2 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x\to\text{П}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{В/О}}$ $\boxed{\text{С/П}}$ $\underline{1,2545814}$; $H\approx 1,25$. ▲

Упражнения

46. Составить программу для вычисления значений выражения $(a+\sqrt{b})(a-b^2)$ и ввести ее в программную память МК-54. Проверить правильность набора команд, просмотрев всю программу по шагам, используя клавишу $\boxed{\overrightarrow{\text{ШГ}}}$. Вычислить значение выражения при:

1) $a=17$, $b=49$; 2) $a=-13$, $b=64$;
3) $a=3,6$, $b=4,7$; 4) $a=-2,7$, $b=3,9$.

47. Пусть в программной памяти МК-54 находится программа задачи 46. Изменением одной команды получить программу для вычисления значений выражения $(a+\sqrt{b})(a-b)$. Найти значения этого выражения при:
1) $a=17$, $b=49$; 2) $a=-13$, $b=64$;
3) $a=3,6$, $b=4,7$; 4) $a=-2,7$, $b=3,9$.

---

48. Пусть в программной памяти МК-54 находится программа задачи 47. Изменением одной команды получить программу для вычисления значений выражения $(a-\sqrt{b})(a-b)$. Найти значения этого выражения при:

1) $a=17$, $b=49$; 2) $a=-17$, $b=64$;
3) $a=3,6$, $b=4,7$; 4) $a=-2,7$, $b=3,9$.

49*. Используя программу задачи 46, найти значение выражения $(a+\sqrt{b})(a-b^2)$ при:
1) $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{11}$; 2) $a=-\sqrt{10}$, $b=\sqrt{23}$;
3) $a=\frac{7}{\sqrt{40}}$, $b=\frac{8}{\sqrt{3}}$; 4) $a=\frac{\sqrt{30}}{7}$, $b=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

50.** Для вычисления значений выражения $(a\sqrt{b}+c)(ab-\sqrt{c})$ составить такую программу, чтобы из нее можно было получить программу для вычисления значений выражения $\frac{a\sqrt{b}+c}{ab-\sqrt{c}}$ изменением только одной команды. Вычислить значения этих выражений при:
1) $a=2$, $b=4$, $c=36$; 2) $a=3,1$, $b=4,7$, $c=17$;
3) $a=\sqrt{7}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\pi$; 4) $a=\pi-1$, $b=2\pi$, $c=\sqrt{10}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

Вычислить на микрокалькуляторе **(51—55)**.

51. 1) $\sqrt{68,89}$; 2) $\sqrt{7,84\cdot 10^8}$;
3) $\frac{1}{6,4\cdot 10^{-3}}$; 4) $\frac{1}{25\cdot 10^{-2}}$;
5) $(-3,18\cdot 10^{-5})^2$; 6) $(-2,46\cdot 10^3)^3$.

52. 1) $3,4\cdot(-13,8)$; 2) $(-4,6)\cdot(-28,7)$;
3) $(-73,92):13,2$; 4) $(-55224):(-236)$.

53. 1) $24,13\cdot 43,01:32,131-32,3$;
2) $486,4\cdot 209,1:314,88+117$;
3) $((11453-3212):123-17)\cdot 0,48$;
4) $((23,4+67,6)\cdot 14,3+338,8):2,31$.

54. 1) $\sqrt{798^2+32320}$; 2) $\sqrt{19018-117^2}$;
3) $\sqrt{4400+\sqrt{7921}}$; 4) $\sqrt{\sqrt{5041}+5329}$.

55. 1) $\frac{694,3}{5,3}+\frac{280,8}{7,2}$; 2) $\frac{1088,4}{907}+\frac{100,8}{36}$;
3) $215,4\cdot 7,2-\frac{7216,528}{13,1}$; 4) $\frac{2362,8}{132}-29,3\cdot 13$.

56. Вычислить приближенно с точностью до 0,01 м² площадь концентрического кольца, у которого радиус внешней окружности 72,8 см, а внутренней — 19,2 см.

57. Составить программу для вычисления значений выражения $(a^2+2a+5)^3$, ввести ее в микрокалькулятор и вычислить значение этого выражения при:

1) $a=-1$; 2) $a=2,5$; 3) $a=-0,5$; 4) $a=\frac{3}{4}$.

58. Вычислить приближенно с точностью до 0,01 корни квадратного уравнения:

1) $x^2-2{,}1x-3{,}25=0$; 2) $x^2-5{,}14x+1{,}7=0$;
3) $3{,}8x^2-1{,}7x-3{,}1=0$; 4) $0{,}2x^2+0{,}82x-35{,}1=0$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

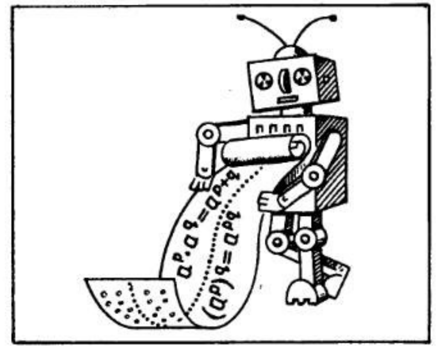
1. Вычислить с помощью МК-54 с точностью до 0,01:
   1) $(21{,}15)^2$; 2) $\sqrt{115328{,}61}$; 3) π^3; 4) $\frac{1}{4{,}81}$;
   5) 5^7; 6) $(0{,}23)^{0{,}5}$; 7) $299^2-176^2+\sqrt{17\,613}$;
   8) $\frac{317}{4{,}8}-3{,}7\cdot 9{,}1$.
2. Составить программу для вычисления значений выражения $9x+\sqrt{x}$ и найти его значение при: 1) $x=7$; 2) $x=5{,}2$.
3. Решить с помощью микрокалькулятора квадратное уравнение
$$x^2+17{,}1x-231=0.$$

59. В цилиндрический сосуд с высотой 17,2 см и радиусом основания 5,4 см налита жидкость на высоту 14,8 см. Можно ли в этот сосуд долить еще 0,25 л жидкости? (Объем цилиндра равен $V=\pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота цилиндра.)

60. Составить программу для вычисления значений полной поверхности цилиндра $S=2\pi r^2+2\pi rh$, где r — радиус основания, h — высота цилиндра, ввести ее в микрокалькулятор и вычислить S при:
1) $r=5$, $h=6$; 2) $r=3{,}5$, $h=3{,}08$.

61**. Сберегательный банк начисляет по окончании каждого квартала 30% от суммы вклада, имеющегося на счету вкладчика к началу квартала. Вычислить сумму денег, которую получит вкладчик, если он закроет счет по окончании:
а) I квартала;
б) полугодия;
в) года.
Первоначальная сумма вклада составляет 200 000 р.

Глава II
СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ



§ 7. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При рассмотрении свойств степени с натуральным показателем отмечалось, что свойство деления степеней
$$a^n:a^m=a^{n-m} \quad (1)$$
справедливо при $n>m$ и $a\neq 0$.

Если $n\leqslant m$, то в правой части равенства (1) показатель степени $n-m$ отрицателен или равен нулю.

Степень с отрицательным и с нулевым показателями определяют так, чтобы равенство (1) было верно не только при $n>m$, но и при $n\leqslant m$.

Например, если $n=2$, $m=5$, то по формуле (1) получаем:
$$a^2:a^5=a^{2-5}=a^{-3}.$$
С другой стороны,
$$a^2:a^5=\frac{a^2}{a^5}=\frac{a^2}{a^2a^3}=\frac{1}{a^3}.$$
Поэтому считают, что $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$.

(!) Определение 1. *Если $a\neq 0$ и n — натуральное число, то*
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Примеры.
1) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$;
2) $(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$;
3) $(-0{,}5)^{-3}=\frac{1}{(-0{,}5)^3}=-\frac{1}{0{,}125}=-8$.

Если $n=m$, то по формуле (1) получаем:
$$a^n:a^n=a^{n-n}=a^0.$$
С другой стороны, $a^n:a^n=\frac{a^n}{a^n}=1$. Поэтому считают, что $a^0=1$.

Определение 2. *Если $a \neq 0$, то*

$$a^0 = 1.$$

Например, $3^0 = 1$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$.

Степени с отрицательными показателями уже использовались при записи чисел в *стандартном виде*. Например:

$$0{,}00027 = 2{,}7 \cdot \frac{1}{10^4} = 2{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

Все свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем.

Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых n и m справедливы равенства:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$.	4. $(ab)^n = a^n b^n$.
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$.	
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.	5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Докажем, например, справедливость равенства $(ab)^n = a^n b^n$ при $n < 0$.

○ Пусть n — целое отрицательное число. Тогда $n = -k$, где k — натуральное число. Используя определение степени с отрицательным показателем и свойства степени с натуральным показателем, получаем:

$$(ab)^n = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} b^{-k} = a^n b^n. \ \bullet$$

Аналогично доказываются и другие свойства степени с целым показателем.

Приведем примеры применения свойств степени с целым показателем:

1) $4^{-3} \cdot 4^{11} \cdot 4^{-6} = 4^{-3+11-6} = 4^2 = 16$;

2) $\left(\frac{p^{-3}}{3q^2}\right)^{-2} = \frac{p^{-3\cdot(-2)}}{3^{-2} \cdot q^{2\cdot(-2)}} = \frac{3^2 p^6}{q^{-4}} = 9p^6 q^4$.

Задача. Упростить выражение

$$a^6 (a^{-2} - a^{-4})(a^2 + a^3)^{-1}.$$

$\triangle$ $a^6 (a^{-2} - a^{-4})(a^2 + a^3)^{-1} = a^6 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4}\right) \cdot \frac{1}{a^2 + a^3} =$

$= a^6 \cdot \frac{a^2 - 1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^2(1+a)} = a - 1.$ ▲

Упражнения

62. Вычислить:

1) $2^3 + (-3)^3 - (-2)^2 + (-1)^5$; 2) $(-7)^2 - (-4)^3 - 3^4$;
3) $13 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 2^3$; 4) $6(-2)^3 - 5(-2)^3 - (-2)^3$.

63. Представить выражение в виде степени с натуральным показателем:

1) $\frac{7^2 \cdot 7^{15}}{7^{13}}$; 2) $\frac{5^3 \cdot 5^{10} \cdot 5}{5^4 \cdot 5^{15}}$; 3) $\frac{a^2 a^8 b^3}{a^9 b^2}$; 4) $\frac{c^3 d^5 c^9}{c^{10} d^7}$.

64. (Устно.) Вычислить:

1) 1^{-5}; 2) 4^{-3}; 3) $(-10)^0$; 4) $(-5)^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; 6) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$.

65. Записать в виде степени с отрицательным показателем:

1) $\frac{1}{4^5}$; 2) $\frac{1}{21^3}$; 3) $\frac{1}{x^7}$; 4) $\frac{1}{a^9}$.

Вычислить **(66—67)**.

66. 1) $\left(\frac{10}{3}\right)^{-3}$; 2) $\left(-\frac{9}{11}\right)^{-2}$; 3) $(0{,}2)^{-4}$;
4) $(0{,}5)^{-5}$; 5) $-(-17)^{-1}$; 6) $-(-13)^{-2}$.

67. 1) $3^{-1} + (-2)^{-2}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 4^{-2}$;
3) $(0{,}2)^{-2} + (0{,}5)^{-5}$; 4) $(-0{,}1)^{-3} - (-0{,}2)^{-3}$.

68. (Устно.) Сравнить с единицей:

1) 12^{-3}; 2) 21^0; 3) $(0{,}6)^{-5}$; 4) $\left(\frac{5}{19}\right)^{-4}$.

69. Записать без степеней с отрицательным показателем:

1) $(x-y)^{-2}$; 2) $(x+y)^{-3}$; 3) $3b^{-5}c^8$;
4) $9a^3 b^{-4}$; 5) $a^{-1} b^2 c^{-3}$; 6) $a^2 b^{-1} c^{-4}$.

Вычислить **(70—71)**.

70. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\left(\frac{1}{7}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}$;
3) $0{,}3^7 \cdot 0{,}3^{-10}$; 4) $17^{-5} \cdot 17^3 \cdot 17$.

71. 1) $9^7 : 9^{10}$; 2) $(0{,}2)^2 : (0{,}2)^{-2}$;
3) $\left(\frac{2}{13}\right)^{-12} : \left(\frac{2}{13}\right)^{-10}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$.

72. Возвести степень в степень:

1) $(a^3)^{-5}$; 2) $(b^{-2})^{-4}$; 3) $(a^{-3})^7$; 4) $(b^7)^{-4}$.

73. Возвести в степень произведение:

1) $(ab^{-2})^3$; 2) $(a^2 b^{-1})^4$; 3) $(2a^2)^{-6}$; 4) $(3a^3)^{-4}$.

74. Выполнить действия:

1) $\left(\frac{a^8}{b^7}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{m^{-4}}{n^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{2x^6}{3y^{-4}}\right)^2$; 4) $\left(\frac{-4x^{-5}y}{z^3}\right)^3$.

75. **Вычислить** значение выражения:

1) $(x^2y^{-2}-4y^{-2})\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{-2}$ при $x=5$, $y=6{,}7$;

2) $((a^2b^{-1})^4-a^0b^4):\frac{a^4-b^4}{b^2}$ при $a=2$, $b=-3$.

Записать в стандартном виде **(76—77).**

76. 1) 200000^4; 2) $0{,}0003^3$; 3) 4000^{-2}; 4) $0{,}002^{-3}$.

77. 1) 0,0000087; 2) 0,00000005086; 3) $\frac{1}{125}$; 4) $\frac{1}{625}$.

78. Процесс шлифовки стекла заканчивается, когда глубина выемок на его поверхности не превышает $3\cdot10^{-3}$ мм. Записать это число в виде десятичной дроби.

79. Атом сверхтяжелого водорода существует лишь 0,0000000001 с. Записать это число в виде степени с отрицательным показателем.

---

80. Размеры вируса гриппа составляют около 10^{-4} мм. Записать это число в виде десятичной дроби.

81. Дробь представить в виде степени и найти ее значение при данном значении a:

1) $\frac{a^8a^{-7}}{a^{-2}}$, $a=0{,}8$; 2) $\frac{a^{15}a^3}{a^{13}}$, $a=\frac{1}{2}$.

82. Вычислить:

1) $((-20)^7)^{-7}:((-20)^{-6})^8+2^{-2}$;

2) $((-17)^{-4})^{-6}:((-17)^{-13})^{-2}-\left(\frac{1}{17}\right)^2$.

83. Используя свойства степени, вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $(1{,}3)^{-118}\cdot(1{,}3)^{127}$; 2) $(0{,}87)^{-74}:(0{,}87)^{-57}$;

3) $\left(\frac{17}{19}\right)^{-47}:\left(\frac{17}{19}\right)^{-26}$; 4) $\left(\frac{23}{21}\right)^{56}\cdot\left(\frac{23}{21}\right)^{-25}$.

84. Вычислить на микрокалькуляторе и записать результат в стандартном виде:

1) $(786^{-7})^4$; 2) $(923^3)^{-6}$;
3) $(1{,}76)^{-8}\cdot(35{,}4)^{-8}$; 4) $(0{,}47)^{-5}:(7{,}81)^{-5}$.

85. С помощью микрокалькулятора вычислить объем куба, длина ребра которого равна:
1) $1{,}54\cdot10^{-4}$ мм; 2) $3{,}18\cdot10^5$ км.

86*. Упростить:

1) $(a^{-3}+b^{-3})\cdot(a^{-2}-b^{-2})^{-1}\cdot(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})^{-1}$;

2) $(a^{-2}b-ab^{-2})\cdot(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})^{-1}$.

№ 2

РЕШИТЬ ЧИСЛОВОЙ РЕБУС:

1)

```
    * 7 6
×     * *
  -------
  1 8 * *
* * * *
---------
* * 9 2 0
```

2)

```
    2 * 9
×     * *
  -------
    * 5 *
* * * *
---------
* * * 0 6
```

3)

```
    * * 7
×   3 * *
  -------
  * 0 * 3
  * 1 *
* 5 *
---------
* 7 * * 3
```

§ 8. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Задача 1. Решить уравнение

$$x^4=81.$$

△ Запишем уравнение в виде

$$x^4-81=0$$

или

$$(x^2-9)(x^2+9)=0.$$

Так как $x^2+9\neq0$, то $x^2-9=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. ▲

Итак, уравнение $x^4=81$ имеет два действительных корня $x_1=3$, $x_2=-3$. Их называют корнями четвертой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют *арифметическим корнем* четвертой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81}=3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n=a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Определение. ***Арифметическим корнем*** *натуральной степени $n\geqslant2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.*

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется подкоренным выражением. Если $n=2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень третьей степени — *кубическим корнем*.

В тех случаях, когда ясно, что речь идет об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «Корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что $\sqrt[n]{a}$ равен b, нужно показать, что:

1) $b\geqslant0$;
2) $b^n=a$.

Например, $\sqrt[3]{64}=4$, так как $4>0$ и $4^3=64$.

Из определения арифметического корня следует, что если $a\geqslant0$, то

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n=a \qquad \sqrt[n]{a^n}=a.}$$

Например, $(\sqrt[5]{7})^5=7$, $\sqrt[6]{13^6}=13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня n-й степени*. Это действие является обратным к возведению в n-ю степень.

Задача 2. Решить уравнение

$$x^3=-8.$$

△ Это уравнение можно записать так:

$$-x^3=8 \text{ или } (-x)^3=8.$$

Обозначим $-x=y$, тогда

$$y^3=8.$$

Это уравнение имеет один положительный корень $y=\sqrt[3]{8}=2$. Отрицательных корней уравнение $y^3=8$ не имеет, так как $y^3<0$ при $y<0$. Число $y=0$ также не является корнем этого уравнения.

Итак, уравнение $y^3=8$ имеет только один корень $y=2$, а значит, уравнение $x^3=-8$ имеет только один корень $x=-y=-2$.

Ответ. $x=-2$. ▲

Коротко решение уравнения $x^3=-8$ можно записать так:

$$x=-\sqrt[3]{8}=-2.$$

Вообще для любого нечетного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1}=a$ при $a<0$ имеет только один корень, причем отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечетной степени из отрицательного числа*.

Например, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Корень нечетной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a=|a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Упражнения

87. (Устно.) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа: 1; 0; 16; 0,81; 169; $\frac{1}{289}$.

2) Найти арифметический кубический корень из числа: 1; 0; 125; $\frac{1}{27}$; 0,027; 0,064.

3) Найти арифметический корень четвертой степени из числа: 0; 1; 16; $\frac{16}{81}$; $\frac{256}{625}$; 0,0016.

Вычислить **(88—90).**

88. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

89. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$.

90. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

91. Решить уравнение:

1) $x^4=81$; 2) $x^5=-\frac{1}{32}$; 3) $5x^5=-160$; 4) $2x^6=128$.

---

92. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить **(93—94)**.

93. 1) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32}-0{,}5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0{,}0001}-2\sqrt{0{,}25}+\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$;

6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0{,}001}-\sqrt[4]{0{,}0016}$.

94. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$;

3) $(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}})^2$; 4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

95*. Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x\geqslant 2$; б) $x<2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x\leqslant 3$; б) $x>3$.

96.** Сколько имеется натуральных чисел n, таких, что $1987<\sqrt{n}<1988$?

§ 9. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ

Арифметический корень n-й степени обладает следующими *свойствами:*

(!) Если $a\geqslant 0$, $b>0$ и n, m — натуральные числа, причем $n\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.	3. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.	4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

В свойстве 1 число b может также быть равным 0, в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a>0$.

Докажем, например, что

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

○ Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\geqslant 0$, так как $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$.

2) $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=ab$, так как $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$. ●

Аналогично доказываются и остальные свойства.

Приведем примеры применения свойств арифметического корня.

1) $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot 3}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$;

2) $\sqrt[3]{\frac{256}{625}}:\sqrt[3]{\frac{4}{5}}=\sqrt[3]{\frac{256}{625}:\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{4}{5}$;

3) $\sqrt[7]{5^{21}}=\sqrt[7]{(5^7)^3}=(\sqrt[7]{5^7})^3=5^3=125$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$;

5) $(\sqrt[4]{9})^{-2}=\sqrt[4]{9^{-2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3}$.

З а д а ч а. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}},\ \text{где } a>0,\ b>0.$$

△ Используя свойства арифметического корня, получаем:

$$\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\frac{a^3b^2}{a^2b}=ab. ▲$$

Упражнения[1]

Вычислить **(97—100)**.

97. 1) $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125}$; 2) $\sqrt[3]{864\cdot 216}$;

3) $\sqrt[4]{256\cdot 0{,}0081}$; 4) $\sqrt[5]{32\cdot 100000}$.

98. 1) $\sqrt[3]{5^3\cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4\cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5\cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot 21^7}$.

99. 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt[3]{0{,}04}$; 3) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}$.

100. 1) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5^6}$; 3) $\sqrt[4]{3^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

101. Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

102. Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; 2) $\sqrt[4]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

Вычислить **(103—104)**.

103. 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$;

104. 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$;

4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$; 5) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$; 6) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$.

105. Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить **(106—107)**.

106. 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$; 3) $(\sqrt[10]{32})^2$; 4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

107. 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

108. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{x})^6$; 2) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; 3) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$;

4) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3})^{12}$; 5) $(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}})^6$; 6) $(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}})^4$.

Вычислить **(109—111)**.

109. 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$;

3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; 4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$;

5) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$; 6) $(\sqrt{\sqrt[3]{16}})^3$.

110. 1) $\sqrt[3]{\frac{ab^2}{c}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^5b}{c^2}}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{8a^3}{b^2}}\cdot\sqrt[5]{\frac{4a^7}{b^3}}$;

3) $\frac{\sqrt[4]{a^2b^2c}\cdot\sqrt[4]{a^3b^3c^2}}{\sqrt[4]{abc^3}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{2a^4b}\cdot\sqrt[3]{4ab}}{2b\sqrt[3]{a^2b^2}}$;

5) $(\sqrt[5]{a^3})^5\cdot(\sqrt[3]{b^2})^3$; 6) $(\sqrt[4]{a^3b^3})^4:(\sqrt[3]{ab^2})^3$.

111. 1) $\frac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$;

3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; 4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$;

5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; 6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

Упростить выражение **(112—114)**.

112. 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}$; 2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$;

3) $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}\cdot\sqrt[5]{3a^2b^3}}{\sqrt[5]{3ab}}$; 4) $\frac{\sqrt[4]{8x^2y^5}\cdot\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

113. 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}})^3$; 2) $(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}})^3+2(\sqrt[4]{\sqrt{x}})^8$;

3) $2\sqrt{\sqrt{a^4b^8}}-(\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6}})^2$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-(\sqrt[5]{xy^2})^5$;

5) $(\sqrt{\sqrt[4]{x^8y^2}})^4-(\sqrt[4]{x^2y^8})^2$; 6) $((\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}})^5-\sqrt[5]{a}):\sqrt[10]{a^2}$.

114. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}:\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6,7}\cdot\sqrt{23}\cdot\sqrt{0,37}$;

3) $\sqrt{(1,34)^{-7}}\cdot\sqrt{(0,43)^{-7}}$; 4) $\sqrt{(3,44)^{-9}}:\sqrt{(4,57)^{-9}}$.

115*. Вычислить:

1) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{7}\,\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$;

3) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$;

4) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

116.** Доказать, что $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$.

117.** Упростить выражение:

1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

3) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

4) $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$.

§ 10. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Задача 1. Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

△ Так как $5^{12}=(5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}}=\sqrt[4]{(5^3)^4}=5^3=125$. ▲

Таким образом,

$$\sqrt[4]{5^{12}}=5^{\frac{12}{4}}.$$

Точно так же можно показать, что

$$\sqrt[5]{7^{-15}}=7^{-\frac{15}{5}}.$$

Вообще если n — натуральное число, $n \geqslant 2$, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство

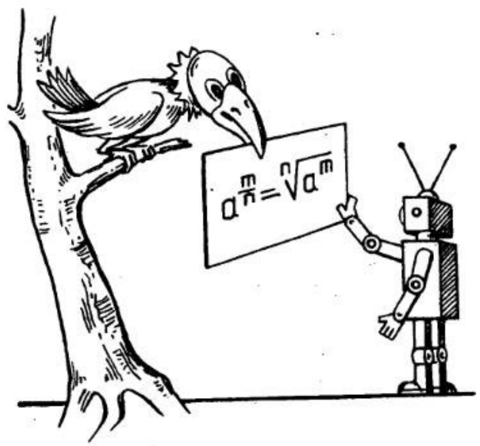
$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.} \qquad (1)$$

○ По условию $\frac{m}{n}$ — целое число, т. е. при делении m на n в результате получается целое число k. Тогда из равенства $\frac{m}{n} = k$ следует, что $m = kn$. Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \; ●$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.} \qquad (2)$$



Таким образом, формула (2) справедлива для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geqslant 2$ и $a > 0$.

Например,

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Напомним, что *рациональное число* r — это число вида $\frac{m}{n}$, т. е. $r = \frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Тогда по формуле (2) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Таким образом, степень определена для любого рационального показателя и любого положительного основания. Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$, причем $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулами (1) и (2), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Отметим, что из формулы (2) и свойств корня следует равенство

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}},$$

где $a > 0$, m — целое и n, k — натуральные числа.

Например, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.

Можно показать, что *все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.* А именно для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$.	4. $(ab)^p = a^p b^p$.
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.	5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.
3. $(a^p)^q = a^{pq}$.	

Эти свойства вытекают из свойств корней.

Докажем, например, свойство $a^p a^q = a^{p+q}$.

○ Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, где n и l — натуральные числа, m и k — целые числа. Нужно доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \qquad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{k}{l}}=a^{\frac{ml}{nl}}\cdot a^{\frac{kn}{nl}}=\sqrt[nl]{a^{ml}}\cdot\sqrt[nl]{a^{kn}}=$$
$$=\sqrt[nl]{a^{ml}\cdot a^{kn}}=\sqrt[nl]{a^{ml+kn}}=a^{\frac{ml+kn}{nl}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}. \bullet$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведем примеры применения свойств степени.

1) $7^{\frac{1}{4}}\cdot 7^{\frac{3}{4}}=7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=7;$

2) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3;$

3) $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{9}{4}}=16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\cdot\frac{3}{4}}=2^3=8;$

4) $24^{\frac{2}{3}}=(2^3\cdot 3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}=4\sqrt[3]{3^2}=4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}.$

Задача 2. Вычислить $25^{\frac{1}{5}}\cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

$$\triangle\ 25^{\frac{1}{5}}\cdot 125^{\frac{1}{5}}=(25\cdot 125)^{\frac{1}{5}}=(5^5)^{\frac{1}{5}}=5. \blacktriangle$$

Задача 3. Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

$$\triangle\ \frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=ab. \blacktriangle$$

Задача 4. Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}$.

$$\triangle\ \frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=$$
$$=1+a-(1-a)=2a. \blacktriangle$$

Покажем, как можно ввести степень с иррациональным показателем, на примере $3^{\sqrt{2}}$. Найдем приближенное значение $\sqrt{2}$ с помощью микрокалькулятора:

$$2\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \underline{1{,}4142135}.$$

Выпишем последовательно приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. Получим последовательность:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots\ .$$

Запишем последовательность степеней числа 3 с этими рациональными показателями:

$$3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ \ldots\ .$$

Можно показать, что эти степени являются последовательными приближенными значениями некоторого действительного числа, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$. Вычислим на микрокалькуляторе:

$$3^{1,4}=\underline{4},6555355,$$
$$3^{1,41}=\underline{4,7}069644,$$
$$3^{1,414}=\underline{4,72}76942,$$
$$3^{1,4142}=\underline{4,728}7329,$$
$$3^{\sqrt{2}}=\underline{4,7288033}.$$

Аналогично определяется степень a^b с положительным основанием a и любым иррациональным показателем. Таким образом, теперь степень с положительным основанием определена для любого действительного показателя, причем свойства степени с действительным показателем такие же, как и свойства степени с рациональным показателем.

Задача 5. Вычислить на МК-54:

1) $\sqrt[7]{13^5}$; 2) $\sqrt[6]{13^5+27^7}$; 3) $\pi^{\sqrt{3}}$.

$\triangle$ 1) Так как $\sqrt[7]{13^5}=13^{\frac{5}{7}}$, то вычисления можно провести по программе

$$5\ \boxed{\mathrm{B}\uparrow}\ 7\ \boxed{\div}\ 13\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{x^y}\ \underline{6{,}2470326}.$$

2) Так как $\sqrt[6]{13^5+27^7}=(13^5+27^7)^{\frac{1}{6}}$, то вычисления можно провести по программе

$$5\ \boxed{\mathrm{B}\uparrow}\ 13\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{x^y}\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{1}\ 7\ \boxed{\mathrm{B}\uparrow}\ 27\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{x^y}$$
$$\boxed{\Pi\to x}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{x\to\Pi}\ \boxed{1}\ 1\ \boxed{\mathrm{B}\uparrow}\ 6\ \boxed{\div}$$
$$\boxed{\Pi\to x}\ \boxed{1}\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{x^y}\ \underline{46{,}765632}.$$

3) $3\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\mathrm{F}}\ \boxed{x^y}\ \underline{7{,}2625433}.$ $\blacktriangle$

Упражнения

118. (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

119. (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислить (**120—123**).

120. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

121. 1) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$;

4) $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{5}{6}}$; 5) $(7^{-3})^{-\frac{2}{3}}$; 6) $(8^{\frac{1}{12}})^{-4}$.

122. 1) $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}}\cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$.

123. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $(5^{-\frac{2}{5}})^{-5}+((0,2)^{\frac{3}{4}})^{-4}$.

124. Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ при $a=0,09$; 2) $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ при $b=27$;

3) $\frac{\sqrt{b}\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b=1,3$; 4) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^5}$ при $a=2,7$.

125. Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7}\cdot x^{2,8}:\sqrt{x^5}$; 6) $y^{-3,8}:y^{-2,3}\cdot\sqrt{y^3}$.

126. Вычислить:

1) $2^{2-3\sqrt{5}}\cdot 8^{\sqrt{5}}$; 2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}$;

3) $6^{1+2\sqrt{3}}:(4^{\sqrt{3}}\cdot 9^{\sqrt{3}})$; 4) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$.

Упростить выражение (**127—128**).

127. 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$;

3) $(\sqrt{x^{0,4}\cdot y^{1,2}})^{10}$; 4) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$.

128. 1) $\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\frac{b^{\frac{1}{5}}(\sqrt[5]{b^4}-\sqrt[5]{b^{-1}})}{b^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}})}$;

3) $\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1}-ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$; 4) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

129. Вычислить:

1) $(2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}})\cdot\sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[4]{1000}$;

3) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}+(3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}$; 4) $\left((0,5)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}-(4^{-0,3})^{-\frac{5}{3}}$.

130. Упростить выражение:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$;

3) $(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}})\sqrt[6]{ab^4}$; 4) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab})$.

131. Сократить дробь:

1) $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\frac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$; 4) $\frac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$.

Упростить выражение (**132—134**).

132. 1) $\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$;

4) $\frac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\frac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

133. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2-4ab}{a-b}$;

2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

134.** 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

135*. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{7+\sqrt[5]{10}}$; 3) $5^{\sqrt{3}}$;

4) $(\sqrt[3]{2})^{\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt[3]{(7{,}1)^3+(8{,}3)^3}$; 6) π^{π}.

§ 11. ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ЧИСЛОВОГО НЕРАВЕНСТВА

В курсе алгебры VIII класса было доказано, что при умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака.

(!) Отсюда следует, что если $a>b>0$ и n — натуральное число, то $a^n>b^n$.

○ По условию $a>0$, $b>0$. Перемножая n одинаковых неравенств $a>b$, получаем $a^n>b^n$. ●

З а д а ч а 1. Сравнить числа $(0{,}43)^5$ и $\left(\frac{3}{7}\right)^5$.

△ Так как $\frac{3}{7}\approx 0{,}428$ с точностью до 0,001, то $0{,}43>\frac{3}{7}$. Поэтому $(0{,}43)^5>\left(\frac{3}{7}\right)^5$. ▲

(!) Неравенство, у которого левая и правая части положительны, можно возводить в любую рациональную степень:

$$\boxed{\text{если } a>b>0,\ r>0, \text{ то } a^r>b^r;} \qquad (1)$$

$$\boxed{\text{если } a>b>0,\ r<0, \text{ то } a^r<b^r.} \qquad (2)$$

Докажем свойство (1).

○ Докажем сначала, что свойство (1) верно при $r=\frac{1}{n}$, а затем в общем случае при $r=\frac{m}{n}$.

а) Пусть $r=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, большее 1, $a>0$, $b>0$. По условию $a>b$. Нужно доказать, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$. Предположим, что это неверно, т. е. $a^{\frac{1}{n}}\leqslant b^{\frac{1}{n}}$. Но тогда, возводя это неравенство в натуральную степень n, получим $a\leqslant b$, что противоречит условию $a>b$. Итак, из $a>b>0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

б) Пусть $r=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда по доказанному из условия $a>b>0$ следует, что $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$. Возводя это неравенство в натуральную степень m, получаем $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m>\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$, т. е. $a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}$. ●

Например, $5^{\frac{2}{7}}>3^{\frac{2}{7}}$, так как $5>3$; $2^{\frac{3}{4}}<4^{\frac{3}{4}}$, так как $2<4$; $\sqrt[5]{7^2}>\sqrt[5]{6^2}$, так как $7>6$.

Теперь докажем свойство (2).

○ Если $r<0$, то $-r>0$. По свойству (1) из условия $a>b>0$ следует, что $a^{-r}>b^{-r}$. Умножая обе части этого неравенства на положительное число a^rb^r, получаем $b^r>a^r$, т. е. $a^r<b^r$. ●

Например, $(0{,}7)^{-8}<(0{,}6)^{-8}$, так как $0{,}7>0{,}6$; $13^{-0{,}6}>15^{-0{,}6}$, так как $13<15$; $\sqrt[4]{8^{-3}}<\sqrt[4]{7^{-3}}$, так как $8>7$.

В курсе высшей математики доказывается, что свойство (1) справедливо для любого положительного действительного числа r, а свойство (2) — для любого отрицательного действительного числа r.

Например, $\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}}<\left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}$, так как $\frac{8}{9}>\frac{7}{8}$; $\left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}}<\left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}$, так как $\frac{7}{8}>\frac{6}{7}$.

Отметим, что рассмотренные свойства возведения в степень строгих неравенств (со знаками $>$ или $<$) справедливы и для нестрогих неравенств (со знаком $\geqslant$ или $\leqslant$).

(!) Итак, если обе части неравенства положительны, то при возведении его *в положительную степень* знак неравенства *сохраняется*, а при возведении *в отрицательную степень* знак неравенства *меняется на противоположный*.

Напомним, что для строгих неравенств *противоположными* считаются знаки $>$ и $<$, а для нестрогих — знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Задача 2. Сравнить числа: 1) $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}$ и $(0{,}86)^{\sqrt{2}}$.

△ 1) Так как $\frac{17}{18}<1$, а $\frac{18}{17}>1$, то $\frac{17}{18}<\frac{18}{17}$. Возведя это неравенство в отрицательную степень $\left(-\frac{1}{3}\right)$, получаем

$$\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

2) Сравним основания степени. Так $\frac{6}{7}=0{,}857...$, то $\frac{6}{7}<0{,}86$.

Возведя это неравенство в положительную степень $\sqrt{2}$, получаем $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}}<(0{,}86)^{\sqrt{2}}$. ▲

Задача 3. Решить уравнение $10^x=1$.

△ Число $x=0$ является корнем этого уравнения, так как $10^0=1$. Покажем, что других корней нет.

Запишем данное уравнение в виде $10^x=1^x$.

Если $x>0$, то $10^x>1^x$, и, следовательно, уравнение не имеет положительных корней.

Если $x<0$, то $10^x<1^x$, и, следовательно, уравнение не имеет отрицательных корней.

Таким образом, $x=0$ — единственный корень уравнения $10^x=1$. ▲

Аналогично доказывается, что уравнение $a^x=1$, где $a>0$, $a\neq 1$, имеет единственный корень $x=0$. Отсюда следует, что равенство

$$a^x=a^y, \tag{3}$$

где $a>0$, $a\neq 1$, верно только при $x=y$.

○ Умножая равенство (3) на a^{-y}, получаем $a^{x-y}=1$, откуда $x=y$. ●

Задача 4. Решить уравнение $3^{2x-1}=9$.

△ $3^{2x-1}=3^2$, откуда $2x-1=2$, $x=1{,}5$. ▲

Рассмотрим уравнение

$$a^x=b,$$

где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.

Можно доказать, что это уравнение имеет единственный корень x_0. *Число x_0 называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают* $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x=9$ является число 2, т. е. $\log_3 9=2$. Точно так же $\log_2 16=4$, так как $2^4=16$; $\log_5 \frac{1}{5}=-1$, так как $5^{-1}=\frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27=-3$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$.

Логарифм числа b по основанию 10 называют *десятичным логарифмом* и обозначают $\lg b$. Например, $\lg 100=2$, так как $10^2=100$; $\lg 0{,}001=-3$, так как $10^{-3}=0{,}001$.

Задача 5. С помощью микрокалькулятора МК-54 решить уравнение $10^{3x+1}=5$.

△ $3x+1=\lg 5$, откуда $x=\frac{1}{3}(\lg 5-1)$.

Вычисления проведем по программе

5 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\lg}$ 1 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\div}$ $-$<u>0,10034333.</u>

Ответ. $x\approx -0{,}1$. ▲

Упражнения

136. (Устно.) Сравнить числа:

1) $2^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$; 2) $5^{-\frac{4}{5}}$ и $3^{-\frac{4}{5}}$;
3) $5^{\sqrt{3}}$ и $7^{\sqrt{3}}$; 4) $21^{-\sqrt{2}}$ и $31^{-\sqrt{2}}$.

137. Сравнить числа:

1) $(0{,}88)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $(0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $(4{,}09)^{\sqrt[3]{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

138. Решить уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$;
3) $7^{1-3x}=7^{10}$; 4) $2^{2x+1}=32$;
5) $4^{2+x}=1$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3}=5$.

139. Сравнить числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$.

Решить уравнение **(140—142)**.

140. 1) $3^{2-y}=27$; 2) $3^{5-2x}=1$;

3) $9^{\frac{1}{2}x-1}-3=0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$.

141. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$; 2) $2^{4x-9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$;

3) $8^x4^{x+13}=\frac{1}{16}$; 4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7{,}5}$.

---

142. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=(3\sqrt{3})^x$; 2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1}=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;

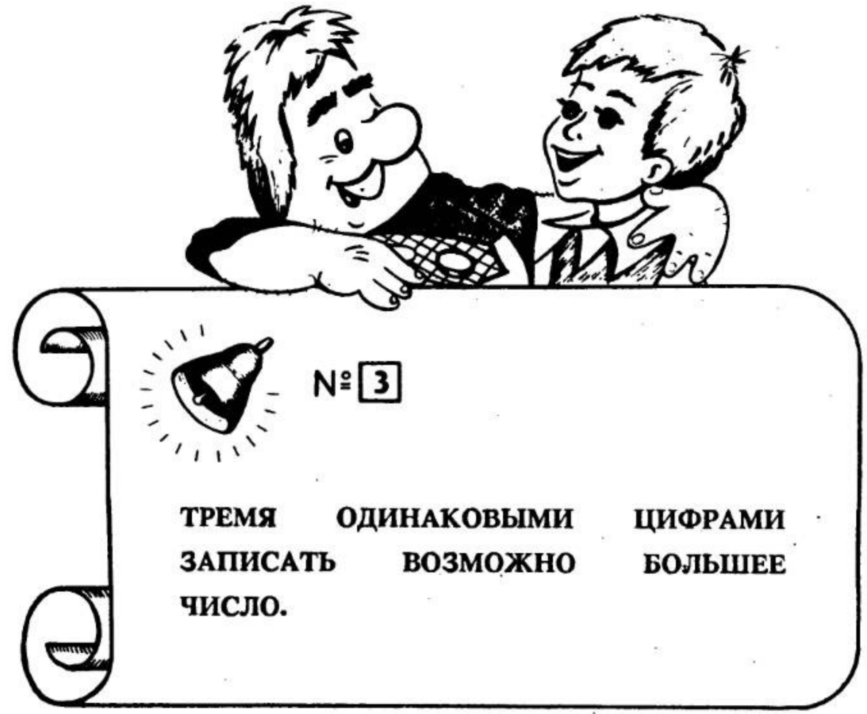
3) $9^{3x+4}\sqrt{3}=\frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^x}=4^{3x-2}\sqrt{2}$.

143. Вычислить:

1) $\log_7 49$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 4) $\log_3 \frac{1}{27}$.

144. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:
1) $\lg 23$; 2) $\lg 131$; 3) $40\lg 2$; 4) $57\lg 3$.

145*. С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $10^{2x-1}=7$; 2) $10^{1-3x}=6$.



УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

146. Вычислить:

1) $(0{,}175)^0+(0{,}36)^{-2}-1^{\frac{4}{3}}$; 2) $1^{-0{,}43}-(0{,}008)^{-\frac{1}{3}}+(15{,}1)^0$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+4\cdot 379^0$; 4) $(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-(1{,}85)^0$.

147. Вычислить:
1) $9{,}3\cdot10^{-6}:(3{,}1\cdot10^{-5})$; 2) $1{,}7\cdot10^{-6}\cdot3\cdot10^7$;
3) $8{,}1\cdot10^{16}\cdot2\cdot10^{-14}$; 4) $6{,}4\cdot10^5:(1{,}6\cdot10^7)$;
5) $2\cdot10^{-1}+\left(6^0-\frac{1}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$;
6) $3\cdot10^{-1}-\left(8^0-\frac{1}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$.

148. Найти значение выражения:

1) $\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}$ при $x=\frac{7}{9}$; 2) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}$ при $a=0{,}1$.

149. Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x})-(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x})$;

2) $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{16x})+(\sqrt[4]{81x}-\sqrt[4]{625x})$;

3) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}$;

4) $\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right):(\sqrt{x^2-y^2}-x)$.

150. Решить уравнение:

1) $7^{5x-1}=49$; 2) $(0,2)^{1-x}=0,04$;

3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+3}=7^{2x}$; 4) $3^{5x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислить:

   1) $3^{-5}:3^{-7}-2^{-2}\cdot 2^4+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^3$;

   2) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 32}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}}$;

   3) $25^{\frac{3}{2}}\cdot 25^{-1}+(5^3)^{\frac{2}{3}}:5^3-48^{\frac{2}{3}}:6^{\frac{2}{3}}$.

2. Записать числа в стандартном виде и выполнить их умножение и деление: 8600 и 0,0078.
3. Упростить выражение:

   1) $\frac{3x^{-9}\cdot 2x^5}{x^{-4}}$; 2) $(x^{-1}+y^{-1})\cdot\left(\frac{1}{xy}\right)^{-2}$.

4. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot a^{\frac{3}{4}}}$ и найти его числовое значение при $a=81$.
5. Сравнить числа:

   $(0,78)^{\frac{2}{3}}$ и $(0,67)^{\frac{2}{3}}$; $(3,09)^{-\frac{1}{3}}$ и $(3,08)^{-\frac{1}{3}}$.

151. Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+10000^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$;

2) $(0,001)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}$;

3) $27^{\frac{2}{3}}-(-2)^{-2}+\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

4) $(-0,5)^{-4}-625-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

152. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}$; 2) $\sqrt[3]{x^2-5x+6}$;

3) $\sqrt[6]{\frac{x-2}{x+3}}$; 4) $\sqrt[4]{x^2-5x+6}$;

5) $\sqrt[8]{x^3-x}$; 6) $\sqrt[6]{x^3-5x^2+6x}$?

153*. Упростить выражение:

1) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{3}{4}}}$; 2) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}$;

3) $\frac{b^{\frac{5}{4}}+2b^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}}$; 4) $\frac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2}-a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}$;

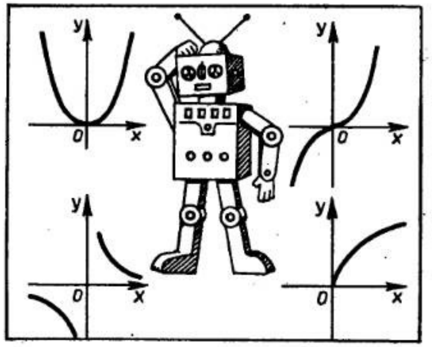
5) $\frac{\sqrt{a^3b^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}}-\sqrt{a^{-1}b}}$; 6) $\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$;

7) $\left(\frac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}+\frac{\sqrt[4]{a^3b}-\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^{-2}\cdot\left(1+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

8) $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\frac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\right):(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})$.

154.** Сравнить ребро куба объемом 100 см^3 с радиусом шара такого же объема. (Объем шара вычисляется по формуле $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.) Можно ли поместить данный шар в этот куб?

155.** С помощью микрокалькулятора вычислить период колебаний маятника длиной 18,5 см по формуле $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника (в метрах), $g\approx 9,8$ (м/с^2), T — период колебаний (в секундах).



Глава III
СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

§ 12. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана *функция* $y(x)$. При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y — *зависимой переменной* или *функцией*.

Вы знакомы с линейной функцией $y=kx+b$ и квадратичной функцией $y=ax^2+bx+c$.

Для этих функций значение аргумента может быть любым действительным числом.

Рассмотрим теперь функцию, которая каждому неотрицательному числу x сопоставляет число $\sqrt{x}$, т. е. функцию $y=\sqrt{x}$. Для этой функции аргумент может принимать только неотрицательные значения: $x\geqslant 0$. В этом случае говорят, что функция определена на множестве всех неотрицательных чисел, и это множество называют областью определения функции $y=\sqrt{x}$.

Вообще *областью определения* функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Например, функция, заданная формулой $y=\frac{1}{x}$, определена при $x\neq 0$, т. е. область определения этой функции — множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, т. е. выполнимы все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.

Найти область определения функции, заданной формулой,— это значит найти все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

Задача 1. Найти область определения функции:

1) $y(x)=2x^2+3x+5$; 2) $y(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $y(x)=\frac{1}{x+2}$; 4) $y(x)=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$.

△ 1) Так как выражение $2x^2+3x+5$ имеет смысл при любом x, то функция определена при всех x.

Ответ. x — любое число.

2) Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет смысл при $x-1\geqslant 0$, т. е. функция определена при $x\geqslant 1$.

Ответ. $x\geqslant 1$.

3) Выражение $\frac{1}{x+2}$ имеет смысл при $x+2\neq 0$, т. е. функция определена при $x\neq -2$.

Ответ. $x\neq -2$.

4) Выражение $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$ имеет смысл при $\frac{x+2}{x-2}\geqslant 0$. Решая это неравенство, получаем (рис. 2): $x\leqslant -2$ и $x>2$, т. е. функция определена при $x\leqslant -2$ и при $x>2$.

Ответ. $x\leqslant -2$, $x>2$. ▲

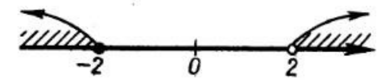


Рис. 2

Напомним, что *графиком функции* называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, ординаты — соответствующим значениям функции.

Задача 2. Построить график функции $y=|x|$.

△ Напомним, что

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Таким образом, выражение $|x|$ имеет смысл при любом действительном значении x, т. е. областью определения функции $y=|x|$ является множество всех действительных чисел.

Если $x\geqslant 0$, то $|x|=x$, и поэтому графиком функции $y=|x|$ при $x\geqslant 0$ является биссектриса первого координатного угла (рис. 3).

Если $x<0$, то $|x|=-x$, и, значит, для отрицательных x графиком функции $y=x$ является биссектриса второго координатного угла (рис. 4).

График функции $y=|x|$ изображен на рисунке 5. ▲

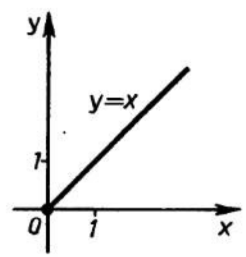


Рис. 3

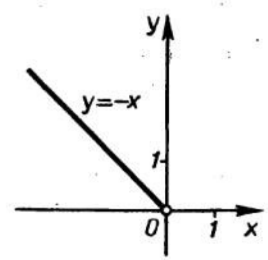


Рис. 4

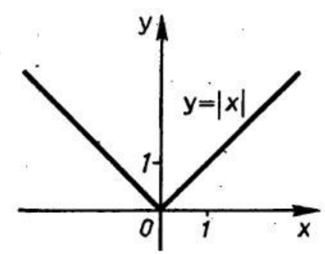


Рис. 5

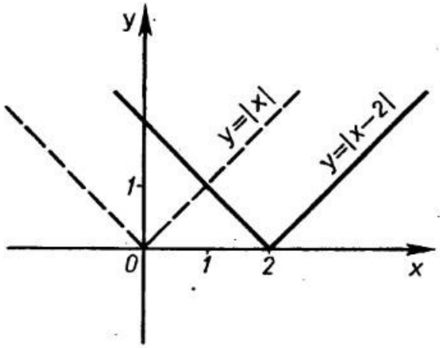


Рис. 6

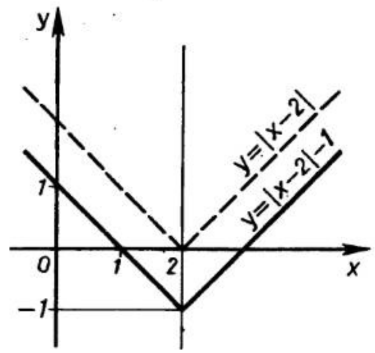


Рис. 7

Заметим, что $|-x|=|x|$ для любого x, поэтому график функции $y=|x|$ симметричен относительно оси ординат.

Задача 3. Построить график функции $y=|x-2|-1$.

△ График функции $y=|x-2|$ получается из графика функции $y=|x|$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы вправо (рис. 6).

Для получения графика функции $y=|x-2|-1$ достаточно сдвинуть график функции $y=|x-2|$ на единицу вниз (рис. 7). ▲

Упражнения

156. Функция задана формулой $y(x)=x^2-4x+5$.
1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$.
2) Найти значение x, если $y(x)=1$, $y(x)=5$, $y(x)=10$, $y(x)=17$.

157. Функция задана формулой $y(x)=\frac{x+5}{x-1}$.
1) Найти $y(-2)$, $y(0)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y(3)$.
2) Найти значение x, если $y(x)=-3$, $y(x)=-2$, $y(x)=13$, $y(x)=19$.

Найти область определения функции (**158—159**).

158. (Устно.) 1) $y=4x^2-5x+1$; 2) $y=2-x-3x^2$;
3) $y=\frac{2x-3}{x-3}$; 4) $y=\frac{3}{5-x^2}$;
5) $y=\sqrt[4]{6-x}$; 6) $y=\sqrt{\frac{1}{x+7}}$.

159. 1) $y=\frac{2x}{x^2-2x-3}$; 2) $y=\sqrt[6]{x^2-7x+10}$;
3) $y=\sqrt[8]{3x^2-2x+5}$; 4) $y=\sqrt[6]{\frac{2x+4}{3-x}}$.

160. Функция задана формулой $y(x)=|2-x|-2$.
1) Найти $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$.
2) Найти значение x, если $y(x)=-2$, $y(x)=0$, $y(x)=2$, $y(x)=4$.

161*. Найти область определения функции:
1) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$; 2) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;
3) $y=\sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 4) $y=\sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$;
5) $y=\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}$; 6) $y=\sqrt[8]{\frac{x^2+4x-5}{x-2}}$;
7) $y=\sqrt[4]{-x}+\sqrt{x+2}$; 8) $y=\sqrt[6]{x}+\sqrt{1+x}$.

162. Принадлежит ли точка $(-2;\ 1)$ графику функции:
1) $y=3x^2+2x+29$; 2) $y=|4-3x|-9$;
3) $y=\frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y=|\sqrt{2-x}-5|-2$?

163.** Построить график функции:
1) $y=|x+3|+2$; 2) $y=-|x|$;
3) $y=2|x|+1$; 4) $y=1-|1-2x|$;
5) $y=|x|+|x-2|$; 6) $y=|x+1|-|x|$.

§ 13. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Вы знакомы с функциями $y=x$ и $y=x^2$. Эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции

$$y=x^r, \tag{1}$$

где r — заданное число.

Степенная функция определена для тех значений x, при которых формула (1) имеет смысл. Например, областью определения функций $y=x$ и $y=x^2$ ($r=1$ и $r=2$) является множество всех действительных чисел; областью определения функции $y=\frac{1}{x}$ ($r=-1$) является множество всех действительных чисел, не равных нулю; областью определения функции $y=\sqrt{x}$ $\left(r=\frac{1}{2}\right)$ является множество всех неотрицательных чисел.

(!) Напомним, что функция $y(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2, принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $y(x_2)>y(x_1)$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка из неравенства $x_2>x_1$ следует, что $y(x_2)<y(x_1)$.

Например, функция $y=x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y=x^2$ возрастает на промежутке $x\geqslant 0$, убывает на промежутке $x\leqslant 0$.

Поведение степенной функции $y=x^r$ зависит от знака показателя степени r.

(!) *Если* $r>0$, то степенная функция $y=x^r$ *возрастает* на промежутке $x\geqslant 0$.

○ Пусть $x_2>x_1\geqslant 0$. Возводя неравенство $x_2>x_1$ в положительную степень r, получаем $x_2^r>x_1^r$, т. е. $y(x_2)>y(x_1)$. ●

Например, функции $y=\sqrt{x}$ и $y=x^{\frac{3}{2}}$ возрастают на промежутке $x\geqslant 0$. Графики этих функций изображены на рисунке 8. Из этого рисунка видно, что график функции $y=\sqrt{x}$ на промежутке $0<x<1$ лежит выше графика функции $y=x$, а на промежутке $x>1$ — ниже графика функции $y=x$.

Таким же свойством обладает график функции $y=x^r$, если $0<r<1$.

График функции $y=x^{\frac{3}{2}}$ на промежутке $0<x<1$ лежит ниже графика функции $y=x$, а на промежутке $x>1$ — выше графика функции $y=x$.

Таким же свойством обладает график функции $y=x^r$, если $r>1$.

Рассмотрим теперь *случай, когда* $r<0$.

(!) Если $r<0$, то степенная функция $y=x^r$ *убывает* на промежутке $x>0$.

○ Пусть $x_2>x_1>0$. Возводя неравенство $x_2>x_1$ в отрицательную степень r, по свойству неравенств, у которых левая и правая часть положительны, получаем $x_2^r<x_1^r$, т. е. $y(x_2)<y(x_1)$. ●

Например, функция $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, т. е. $y=x^{-\frac{1}{2}}$, убывает на промежутке $x>0$. График этой функции изображен на рисунке 9.

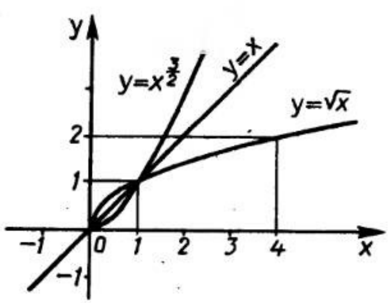


Рис. 8

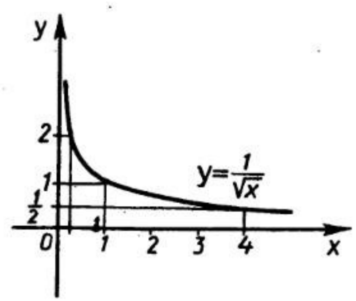


Рис. 9

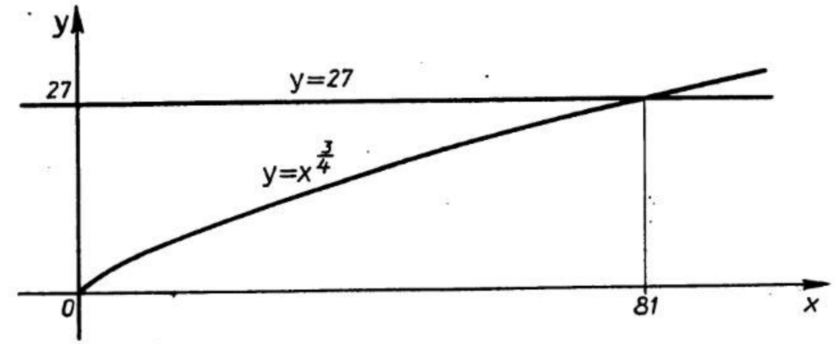


Рис. 10

З а д а ч а 1. Решить уравнение $x^{\frac{3}{4}}=27$.

△ Функция $y=x^{\frac{3}{4}}$ определена при $x\geqslant 0$. Поэтому данное уравнение может иметь только неотрицательные корни. Один такой корень есть: $x=27^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{3^3})^4=3^4=81$. Других корней нет, так как функция $y=x^{\frac{3}{4}}$ возрастает при $x\geqslant 0$, и поэтому если $x>81$, то $x^{\frac{3}{4}}>27$, а если $x<81$, то $x^{\frac{3}{4}}<27$ (рис. 10). ▲

Аналогично доказывается, что уравнение $x^r=b$, где $r\neq 0$, $b>0$, всегда имеет положительный корень $x=b^{\frac{1}{r}}$, причем только один. Следовательно, функция $y=x^r$, где $r>0$, при $x>0$ *принимает все положительные значения.*

Это означает, например, что, несмотря на медленное возрастание функции $y=x^{\frac{3}{4}}$ (рис. 10), ее график как угодно далеко удалится от оси Ox и пересечет прямую $y=b$, каким бы ни было положительное число b.

З а д а ч а 2. Доказать, что функция $y=x+\frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $x>1$.

△ Пусть $x_2>x_1>1$. Покажем, что $y(x_2)>y(x_1)$. Рассмотрим разность

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\frac{1}{x_2}-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=$$

$$=(x_2-x_1)\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}.$$

Так как $x_2>x_1$, $x_1>1$, $x_2>1$, то $x_2-x_1>0$, $x_1x_2>1$ и $x_1x_2>0$. Поэтому

$$y(x_2)-y(x_1)>0,\ \text{т. е. } y(x_2)>y(x_1). \ ▲$$

Упражнения

164. Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y=2x+3$; 2) $y=1-3x$; 3) $y=x^2+2$;
4) $y=3-x^2$; 5) $y=(1-x)^2$; 6) $y=(2+x)^2$.

165. (Устно.) Возрастает или убывает на промежутке $x>0$ функция:

1) $y=x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y=x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y=x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y=x^{\sqrt{3}}$?

166. Нарисовать эскиз графика функции при $x>0$:

1) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y=x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y=x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y=x^{-\frac{2}{3}}$.

167. Найти положительный корень уравнения:

1) $x^{\frac{1}{2}}=3$; 2) $x^{\frac{1}{4}}=2$; 3) $x^{-\frac{1}{2}}=3$;
4) $x^{-\frac{1}{4}}=2$; 5) $x^{\frac{5}{6}}=32$; 6) $x^{-\frac{4}{5}}=81$.

168. Построить на миллиметровой бумаге график функции $y=\sqrt[4]{x}$. Найти по графику приближенно:

1) значения x, при которых $y=0,5$; 1; 4; $2,5$;
2) значения $\sqrt[4]{1,5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2,5}$; $\sqrt[4]{3}$.

---

169. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=x^{\frac{4}{3}}$ и $y=625$; 2) $y=x^{\frac{6}{5}}$ и $y=64$;
3) $y=x^{\frac{3}{2}}$ и $y=216$; 4) $y=x^{\frac{7}{3}}$ и $y=128$.

170.** Доказать, что функция:

1) $y=x+\frac{1}{x}$ убывает на интервале $0<x<1$;
2) $y=\frac{1}{x^2+1}$ убывает на промежутке $x\geqslant 0$ и возрастает на промежутке $x\leqslant 0$;
3) $y=x^3-3x$ возрастает на промежутках $x\leqslant -1$ и $x\geqslant 1$, убывает на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$;
4) $y=x-2\sqrt{x}$ возрастает на промежутке $x\geqslant 1$ и убывает на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$.

171.** Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y=\begin{cases} x+2, & \text{если } x\leqslant -1, \\ x^2, & \text{если } x>-1; \end{cases}$

2) $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant 1, \\ 2-x^2, & \text{если } x>1. \end{cases}$

§ 14. ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ ФУНКЦИИ

Вы знаете, что графики функций $y=x^2$ и $y=|x|$ симметричны относительно оси ординат (рис. 11 и 12). Такие функции называют *четными*.

(!) Функция $y(x)$ называется *четной*, если

$$y(-x)=y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y=x^4$ и $y=\frac{1}{x^2}$ четные, так как $(-x)^4=x^4$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$ для любого $x\neq 0$.

Задача 1. Построить график функции $y=x^3$.

△ 1) Область определения функции $y=x^3$ — множество всех действительных чисел.

2) Значения функции $y=x^3$ положительны при $x>0$, отрицательны при $x<0$, равно нулю при $x=0$.

3) Докажем, что график функции $y=x^3$ симметричен относительно начала координат.

○ Пусть точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y=x^3$, т. е. $y_0=x_0^3$. Точка, симметричная точке $(x_0; y_0)$ относительно начала координат, имеет координаты $(-x_0; -y_0)$. Эта точка также принадлежит графику функции $y=x^3$, так как, умножая обе части верного равенства $y_0=x_0^3$ на -1, получаем $-y_0=-x_0^3$, или $-y_0=(-x_0)^3$. ●

Это свойство позволяет для построения графика функции $y=x^3$ построить сначала график для $x\geqslant 0$, а затем отразить его симметрично относительно начала координат.

4) Функция $y=x^3$ возрастает на всей области определения. Это следует из свойства возрастания степенной функции с положительным показателем при $x\geqslant 0$ и симметрии графика относительно начала координат.

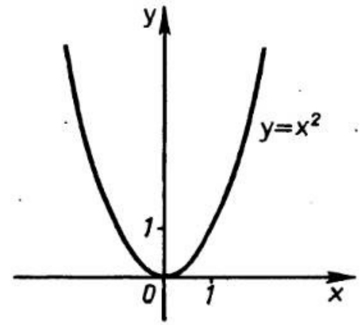


Рис. 11

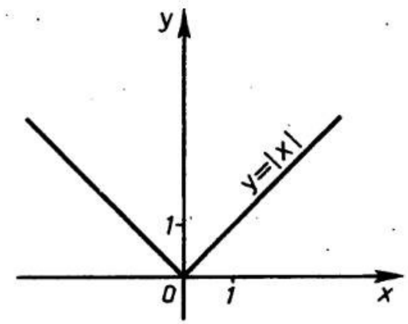


Рис. 12

5) Составив таблицу значений функции $y=x^3$ для некоторых значений $x\geqslant 0$ (например, для $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$), построим часть графика при $x\geqslant 0$ и затем с помощью симметрии — ту его часть, которая соответствует отрицательным значениям x (рис. 13). ▲

Функции, графики которых симметричны относительно начала координат, называют *нечетными*. Таким образом, $y=x^3$ — функция нечетная.

(!) **Функция $y(x)$ называется *нечетной*, если**

$$y(-x)=-y(x)$$

для любого x из области определения этой функции.

Например, функции $y=x^5$, $y=\frac{1}{x^3}$ нечетные, так как $(-x)^5=-x^5$ для любого x и $\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}$ для любого $x\neq 0$.

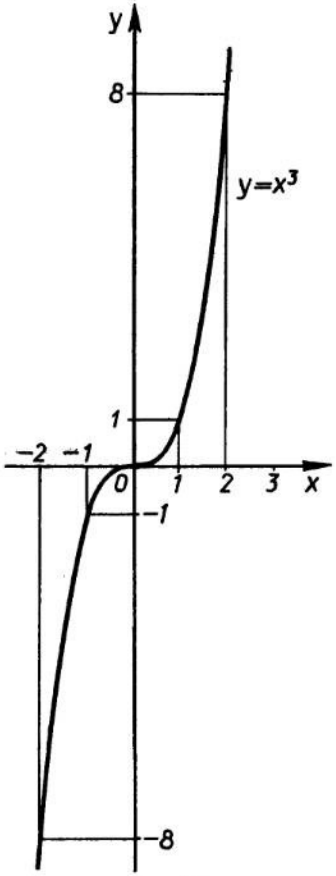


Рис. 13

Отметим, что и у четной, и у нечетной функции *область определения симметрична относительно начала координат.*

Существуют функции, которые не обладают свойствами четности или нечетности. Например, покажем, что функция $y=2x+1$ не является четной и не является нечетной. Если бы эта функция была четной, то равенство $2(-x)+1=2x+1$ выполнялось бы для всех x; но, например, при $x=1$ это равенство неверно: $-1\neq 3$. Если бы эта функция была нечетной, то тогда при всех x выполнялось бы равенство $2(-x)+1=-(2x+1)$; но, например, при $x=2$ это равенство неверно: $-3\neq -5$.

З а д а ч а 2. Построить график функции $y=\sqrt[3]{x}$.

△ 1) Область определения — все действительные числа.

2) Функция является нечетной, так как $\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$ для любого x.

3) При $x\geqslant 0$ функция возрастает по свойству возрастания степенной функции с положительным показателем, так как $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ при $x\geqslant 0$.

4) При $x>0$ значения функции положительны; $y(0)=0$.

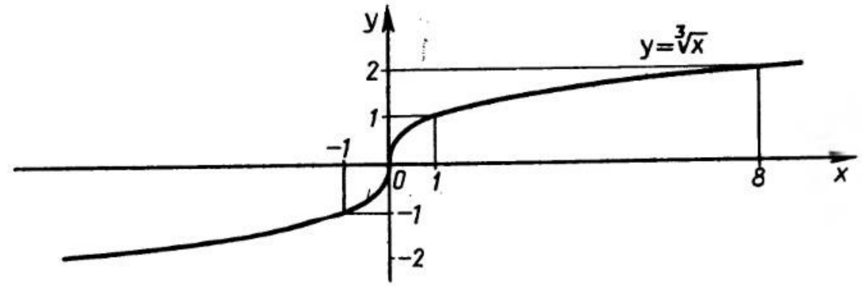


Рис. 14

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, например точки (0; 0), (1; 1), (8; 2), построим часть графика для значений $x\geqslant 0$ и затем с помощью симметрии — часть графика для значений $x<0$ (рис. 14). ▲

Отметим, что функция $y=\sqrt[3]{x}$ определена при всех x, а функция $y=x^{\frac{1}{3}}$ только при $x\geqslant 0$.

Упражнения

Выяснить, является ли функция четной или нечетной (**172—173**).

172. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

173. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$; 4) $y=x^3+x^5$; 5) $y=x^2-x+1$; 6) $y=\frac{1}{x+1}$.

174. Построить эскиз графика функции:
1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-x^2+3$; 4) $y=\sqrt[5]{x}$.

175. Показать, что функция не является четной и не является нечетной:
1) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^2+x-1}{x+4}$.

176. Выяснить, является ли функция четной или нечетной:
1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3+2x+1$; 3) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$; 4) $y=x^4+|x|$; 5) $y=|x|+x^3$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

---

177. Используя симметрию, построить график четной функции:
1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2|x|$.

178. Используя симметрию, построить график нечетной функции:
1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

179*. Выяснить свойства функции и построить ее график:
1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$; 4) $y=1-x^4$; 5) $y=(x+1)^3$; 6) $y=x^3-2$.

180.** Построить график функции:

1) $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\geqslant 0,\\ x^3, & \text{если } x<0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^3, & \text{если } x>0,\\ x^2, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$

Определить, при каких значениях аргумента значения функции положительны. Указать промежутки возрастания и убывания.

181.** Построить график функции y при $x>0$, если:
1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.
Достроить график каждой из функций для $x<0$ так, чтобы построенная линия была графиком: а) четной функции; б) нечетной функции. Задать одной формулой каждую из полученных функций.

182.** Записать уравнение оси симметрии графика функции: 1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$.

183.** Указать координаты центра симметрии графика функции: 1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$.

§ 15. ФУНКЦИЯ $y=\frac{k}{x}$

Задача 1. Построить график функции $y=\frac{1}{x}$.

△ 1) Область определения — все действительные числа, кроме нуля.

2) Функция является нечетной, так как $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$.

3) Функция убывает на промежутке $x>0$ по свойству степенной функции с отрицательным показателем, так как $\frac{1}{x}=x^{-1}$.

4) При $x>0$ функция принимает положительные значения.

5) Найдя несколько точек, принадлежащих графику, например точки $\left(\frac{1}{3};\ 3\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, $(1;\ 1)$, $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, построим часть графика для значений $x>0$ и затем с помощью симметрии — его часть для значений $x<0$ (рис. 15). ▲

График функции $y=\frac{1}{x}$ называют *гиперболой*. Она состоит из двух частей, называемых *ветвями гиперболы*. Одна ветвь расположена в первом квадранте, а другая — в третьем.

Задача 2. Построить график функции $y=\frac{k}{x}$ при $k=2$ и $k=-2$.

△ Заметим, что при одних и тех же значениях аргумента значения функции $y=\frac{2}{x}$ получаются умножением на 2 значений

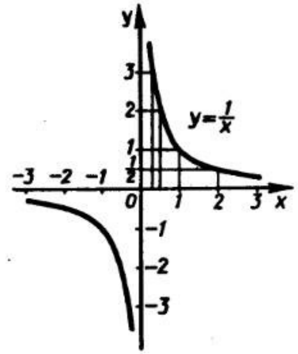


Рис. 15

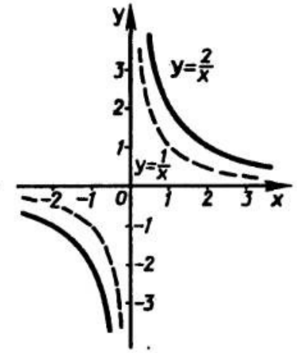


Рис. 16

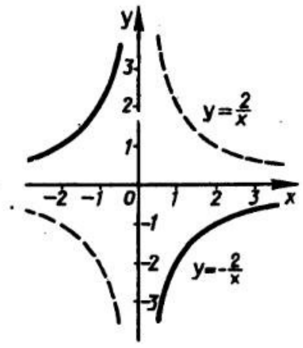


Рис. 17

функции $y=\frac{1}{x}$. Это значит, что график функции $y=\frac{2}{x}$ получается растяжением графика функции $y=\frac{1}{x}$ от оси абсцисс вдоль оси ординат в 2 раза (рис. 16).

Значения функции $y=-\frac{2}{x}$ отличаются от соответствующих значений функции $y=\frac{2}{x}$ только знаком. Следовательно, график функции $y=-\frac{2}{x}$ симметричен графику функции $y=\frac{2}{x}$ относительно оси абсцисс (рис. 17). ▲

График функции $y=\frac{k}{x}$ при любом $k\neq 0$ также называют *гиперболой*. *Гипербола имеет две ветви*, которые расположены в первом и третьем квадрантах, если $k>0$, и во втором и четвертом квадрантах, если $k<0$.

Функция $y=\frac{k}{x}$, *где* $k>0$, обладает такими же свойствами, что и функция $y=\frac{1}{x}$, а именно эта функция:

1) *определена при* $x\neq 0$;
2) *принимает все действительные значения, кроме нуля;*
3) *нечетная;*
4) принимает *положительные* значения при $x>0$ и *отрицательные* — при $x<0$;
5) *убывает* на промежутках $x<0$ и $x>0$.

Если $k<0$, то функция $y=\frac{k}{x}$ обладает свойствами 1—3, а свойства 4—5 формулируются так:

4) принимает *положительные* значения при $x<0$ и *отрицательные* — при $x>0$;
5) *возрастает* на промежутках $x<0$ и $x>0$.

Говорят, что функция $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$ выражает *обратную пропорциональную зависимость* между x и y. Такая зависимость между величинами часто встречается в физике, технике и т. д.

Например, при равномерном движении по окружности с постоянной скоростью v тело движется с центростремительным ускорением a, равным $\frac{v^2}{r}$, где r — радиус окружности, т. е. в этом случае ускорение обратно пропорционально радиусу окружности.

З а д а ч а 3. Вычислить центростремительное ускорение Луны, которая движется вокруг Земли на расстоянии $3{,}84\cdot10^8$ м, совершая один оборот за 27,3 сут.

△ Вычислим ускорение a по формуле $a=\frac{v^2}{r}$, где $v=\frac{C}{t}$, $C=2\pi r$, $t=27{,}3\cdot24\cdot3600$ с, $r=3{,}84\cdot10^8$. Используя микрокалькулятор, получим:

$$a=\frac{4\cdot\pi^2\cdot3{,}84\cdot10^8}{(27{,}3\cdot24\cdot3600)^2}\approx2{,}72\cdot10^{-3}.$$

О т в е т. $2{,}72\cdot10^{-3}$ м/с². ▲

З а д а ч а 4. Построить график функции $y=\frac{2}{x-1}-2$.

△ График этой функции можно построить, сдвигая график функции $y=\frac{2}{x}$ (рис. 16) вдоль оси Ox вправо на единицу и вдоль оси Oy вниз на 2 единицы (рис. 18). ▲

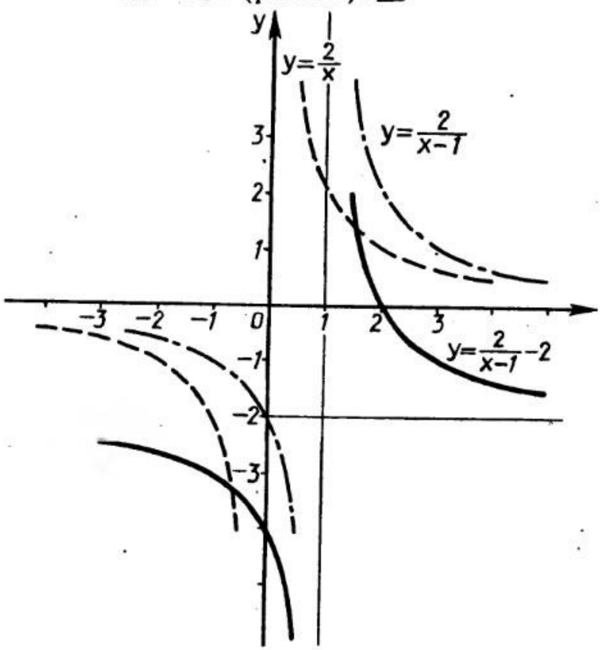


Рис. 18

Упражнения

184. Построить график функции $y=\frac{2}{x}$. Выяснить, при каких значениях x:

1) $y(x)=4$; 2) $y(x)=-\frac{1}{2}$;

3) $y(x)>1$; 4) $y(x)\leqslant1$.

185. На одной координатной плоскости построить графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=x$. Выяснить, при каких значениях x:

1) графики этих функций пересекаются;

2) график первой функции лежит выше (ниже) графика второй.

186. Не строя графики функций, найти точки их пересечения:

1) $y=\frac{12}{x}$, $y=3x$; 2) $y=-\frac{8}{x}$, $y=-2x$;

3) $y=\frac{2}{x}$, $y=x-1$; 4) $y=\frac{6}{x+1}$, $y=x+2$.

187. Построив графики функций, приближенно найти точки их пересечения:

1) $y=\frac{3}{x}$, $y=x+1$; 2) $y=-\frac{3}{x}$, $y=1-x$;

3) $y=\frac{2}{x}$, $y=x^2+2$; 4) $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2+4x$.

---

188. В цилиндре под поршнем при постоянной температуре находится газ. Объем V (литров) газа при давлении p (атмосфер) вычисляется по формуле $V=\frac{12}{p}$.

1) Найти объем, занимаемый газом при 4 атм; 5 атм; 10 атм.

2) Вычислить, при каком давлении газ имеет объем 3 л, 5 л, 15 л.

3) Построить график зависимости объема газа от его давления.

189. Сила тока в реостате I (в амперах) вычисляется по формуле $I=\frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление (в омах).

1) Построить график зависимости $I(R)$ при $U=6$.

2) По графику приближенно найти: а) силу тока при сопротивлении, равном 6, 12, 20 Ом; б) сопротивление реостата при силе тока, равной 10, 5, 1,2 А.

190.** Автомобиль движется по закруглению дороги радиусом 150 м со скоростью 60 км/ч. Найти центростремительное ускорение автомобиля. Увеличится или уменьшится центростремительное ускорение, если скорость автомобиля останется прежней, а радиус закругления дороги увеличится?

191*. Построить график функции:

1) $y=\frac{3}{x}-2$;

2) $y=\frac{2}{x}+1$;

3) $y=\frac{2}{x+2}-1$;

4) $y=\frac{3}{1-x}+1$.

§ 16. НЕРАВЕНСТВА И УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ СТЕПЕНЬ

Свойства степенной функции используются при решении различных уравнений и неравенств.

Задача 1. Решить неравенство $x^5>32$.

△ Функция $y=x^5$ определена и возрастает при всех действительных значениях x. Так как $y(2)=32$, то $y(x)>32$ при $x>2$ и $y(x)<32$ при $x<2$.

Ответ. $x>2$. ▲

Задача 2. Решить неравенство $x^4\leqslant 81$.

△ Функция $y=x^4$ убывает при $x\leqslant 0$ и возрастает при $x\geqslant 0$. Уравнение $x^4=81$ имеет два действительных корня $x_1=-3$, $x_2=3$. Поэтому неравенство $x^4\leqslant 81$ при $x\leqslant 0$ имеет решения $-3\leqslant x\leqslant 0$ и при $x\geqslant 0$ — решения $0\leqslant x\leqslant 3$ (рис. 19).

Ответ. $-3\leqslant x\leqslant 3$. ▲

Задача 3. С помощью графиков решить уравнение $\frac{3}{x}=x^2+1$.

△ На одной координатной плоскости построим графики функций $y=\frac{3}{x}$ и $y=x^2+1$ (рис. 20).

При $x<0$ уравнение $\frac{3}{x}=x^2+1$ корней не имеет, так как $\frac{3}{x}<0$, а $x^2+1>0$. При $x>0$ это уравнение имеет один корень,

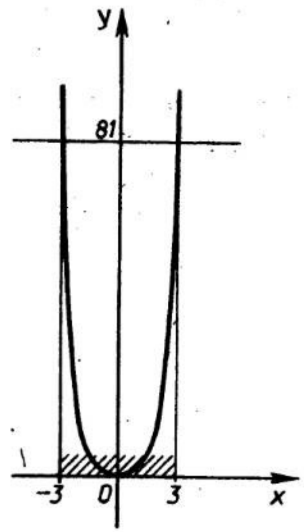


Рис. 19

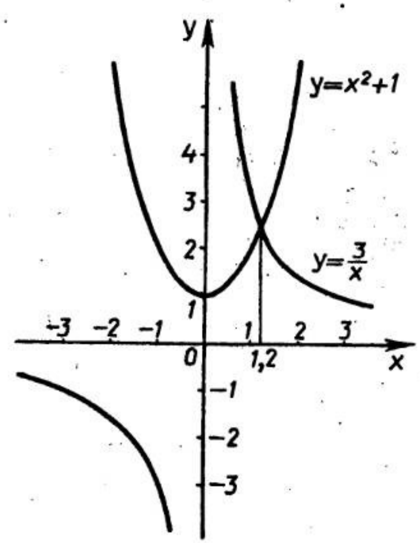


Рис. 20

равный абсциссе точки пересечения графиков этих функций. Из рисунка 20 видно, что $x_1 \approx 1,2$. Других положительных корней уравнение не имеет, так как при $x > x_1$ функция $y = \frac{3}{x}$ убывает, а функция $y = x^2 + 1$ возрастает, и, следовательно, графики функций при $x > x_1$ не пересекаются. По той же причине они не пересекаются при $0 < x < x_1$.

Ответ. $x \approx 1,2$. ▲

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{2 - x^2} = x. \qquad (1)$$

△ Пусть x — корень данного уравнения, т. е. x — такое число, при котором уравнение (1) обращается в верное равенство. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2 - x^2 = x^2. \qquad (2)$$

Отсюда $x^2 = 1$, $x_{1,2} = \pm 1$.

Итак, предположив, что уравнение (1) имеет корни, мы получили, что этими корнями могут быть только числа 1 и -1. Проверим, являются ли эти числа корнями уравнения (1). При $x = 1$ уравнение (1) обращается в верное равенство $\sqrt{2 - 1^2} = 1$, поэтому $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x = -1$ левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{2 - (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, а правая равна -1, т. е. $x = -1$ не является корнем уравнения (1).

Ответ. $x = 1$. ▲

В рассмотренной задаче уравнение (1) было решено с помощью возведения обеих частей этого уравнения в квадрат. При этом получилось уравнение (2).

Уравнение (1) имеет только один корень $x = 1$, а уравнение (2) — два корня $x_{1,2} = \pm 1$, т. е. при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) появляется так называемый *посторонний корень*. Это произошло потому, что при $x = -1$ уравнение (1) обращается в неверное равенство $1 = -1$, а при возведении обеих частей этого неверного равенства в квадрат получается верное равенство $1^2 = (-1)^2$.

(!) Таким образом, при возведении обеих частей уравнения в квадрат могут появиться посторонние корни.

При решении уравнения возведением в квадрат обеих его частей необходимо делать проверку.

Уравнение (1) — пример *иррационального уравнения*. Приведем еще примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{3 - 2x} = 1 - x; \quad \sqrt{x + 1} = 2 - \sqrt{x - 3}.$$

Рассмотрим решение нескольких иррациональных уравнений.

Задача 5. Решить уравнение $\sqrt{5 - 2x} = 1 - x$.

△ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$5 - 2x = x^2 - 2x + 1,$$

или $x^2 = 4$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Проверим найденные корни.

При $x = 2$ левая часть исходного уравнения равна $\sqrt{5 - 2 \cdot 2} = 1$, правая часть равна $1 - 2 = -1$. Так как $1 \neq -1$, то $x = 2$ не является корнем исходного уравнения.

При $x = -2$ левая часть уравнения равна $\sqrt{5 - 2(-2)} = 3$, правая часть равна $1 - (-2) = 3$. Следовательно, $x = -2$ — корень исходного уравнения.

Ответ. $x = -2$. ▲

Задача 6. Решить уравнение $\sqrt{x - 2} + 3 = 0$.

△ Запишем это уравнение в виде $\sqrt{x - 2} = -3$.

Так как арифметический корень не может быть отрицательным, то это уравнение корней не имеет.

Ответ. Корней нет. ▲

Задача 7. Решить уравнение $\sqrt{x - 1} + \sqrt{11 - x} = 4$.

△ Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x - 1 + 2\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{11 - x} + 11 - x = 16.$$

Приведем подобные члены и запишем уравнение в виде

$$2\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{11 - x} = 6, \text{ или } \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{11 - x} = 3.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим:

$$(x - 1)(11 - x) = 9, \text{ или } x^2 - 12x + 20 = 0,$$

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 10$. Проверка показывает, что каждое из чисел 2 и 10 является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = 10$. ▲

Упражнения

192. Решить неравенство:
1) $x^7 > 1$; 2) $x^3 \leqslant 27$; 3) $y^3 \geqslant 64$;
4) $y^3 < 125$; 5) $x^4 \leqslant 16$; 6) $x^4 > 625$.

193. 1) Какой может быть сторона квадрата, если его площадь больше 361 см²?
2) Каким может быть ребро куба, если его объем больше 343 дм³?

194. (Устно.) Показать, что число 7 является корнем уравнения:
1) $\sqrt{x - 3} = 2$; 2) $\sqrt{x^2 - 13} - \sqrt{2x - 5} = 3$.

195. (Устно.) Решить уравнение:
1) $\sqrt{x} = 3$; 2) $\sqrt{x} = 7$; 3) $\sqrt{2x - 1} = 0$; 4) $\sqrt{3x + 2} = 0$.

Решить уравнение (196—199).

196. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$; 4) $\sqrt{2x-1}=3$.

197. 1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}$;
3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

198. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$;
3) $\sqrt{20-x^2}=2x$; 4) $\sqrt{0{,}4-x^2}=3x$.

199. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$;
2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

200. Решить неравенство:
1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geqslant 1$;
4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

201. Объяснить, почему данное уравнение не имеет корней:
1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$;
3) $\sqrt{-2-x^2}=12$; 4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$.

Решить уравнение (202—204).

202. 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;
3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

203. 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

204. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;
3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

205*. При каких значениях x функции принимают одинаковые значения:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$;

2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

206.** Решить неравенство:
1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\leqslant 1$; 3) $\sqrt{2-x}\geqslant x$;
4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\leqslant x+1$.

207.** Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведется из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через ее центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от нее до края мишени и до центра была не больше 2 см?

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

208. Найти область определения функции:
1) $y=\frac{1}{2x+1}$; 2) $y=(3-2x)^{-2}$;
3) $y=\sqrt{-5-3x}$; 4) $y=\sqrt[3]{7-3x}$.

209. (Устно.) Используя свойства возрастания или убывания функций $y=\sqrt[4]{x}$ и $y=x^5$, сравнить числа:
1) $\sqrt[4]{2{,}7}$ и $\sqrt[4]{2{,}9}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{7}}$ и $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$;
3) $(-2)^5$ и $(-3)^5$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^5$ и $\left(2\frac{3}{4}\right)^5$.

210. Выяснить свойства функции и построить эскиз ее графика:
1) $y=-2x^4$; 2) $y=\frac{1}{2}x^5$;
3) $y=2\sqrt[4]{x}$; 4) $y=3\sqrt[3]{x}$.

211. (Устно.) В каких квадрантах расположены ветви гиперболы $y=\frac{k}{x}$, если $k=-4$; $k=3$?

212. Построить на одном рисунке графики функций $y=x$ и $y=x^3$. Найти координаты точек пересечения этих графиков.

213. Найти координаты точек пересечения графиков функций:
1) $y=x^2$, $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $y=2x$;
3) $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$; 4) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\frac{1}{x}$.

214. Решить неравенство:
1) $x^4\leqslant 81$; 2) $x^5>32$; 3) $x^6>64$; 4) $x^5\leqslant -32$.

215. Решить уравнение:
1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{3x+1}=7$;
3) $\sqrt{3-11x}=2x$; 4) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$;
5) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 6) $\sqrt{2-2x}=x+3$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Найти область определения функции:
1) $y=\frac{8}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$.
2. Построить график функции:
1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\frac{6}{x}$; 3) $y=-\frac{5}{x}$; 4) $y=x^3$.
Для каждой функции по графику найти: а) $y(2)$; б) значения x, если $y(x)=3$; в) промежутки, на которых $y(x)>0$, $y(x)<0$; г) промежутки возрастания, убывания.
3. Исследовать функцию на четность и нечетность.
1) $y=3x^6+x^2$; 2) $y=8x^5-x$.
4. Решить уравнение:
1) $\sqrt{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$.

216. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt[5]{x^2+x-2}$; 2) $y=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$;
3) $y=\sqrt[6]{6-x-x^2}$; 4) $y=\sqrt[4]{13x-22-x^2}$;
5) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+6x+5}{x+7}}$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

217. Выяснить, возрастает или убывает функция:

1) $y=\frac{1}{(x-3)^2}$ на промежутке $x>3$;

2) $y=\frac{1}{(x-2)^3}$ на промежутке $x<2$;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}$ на промежутке $x\geqslant 0$;

4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ на промежутке $x<-1$.

218. Выяснить, является ли функция четной или нечетной:

1) $y=x^6-3x^4+x^2-2$; 2) $y=x^5-x^3+x$;
3) $y=\frac{1}{(x-2)^2}+1$; 4) $y=x^7+x^5+1$.

219*. Выяснить свойства функции и построить ее график:

1) $y=\frac{1}{x^2}$; 2) $y=\frac{1}{x^3}$; 3) $y=\frac{1}{x^3}+2$;
4) $y=3-\frac{1}{x^2}$; 5) $y=\frac{1}{(3-x)^2}+1$; 6) $y=\frac{1}{(x-1)^3}-2$.

220*. Решить неравенство:

1) $(3x+1)^4>625$; 2) $(3x^2+5x)^5\leqslant 32$.

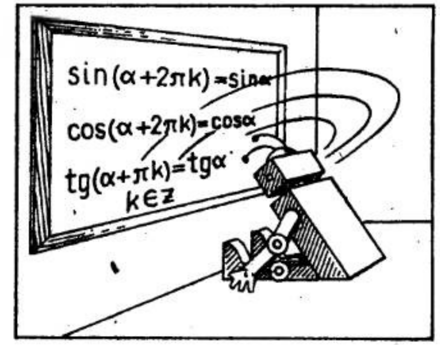
221*. Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1$; 2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=x+4$;
3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+19}=1+\sqrt{x}$;
5) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-3}=6$; 6) $\sqrt{7-x}+\sqrt{3x-5}=4$.

222.** Решить неравенство:

1) $\sqrt{x^2-8x}>3$; 2) $\sqrt{x^2-3x}<2$;
3) $\sqrt{3x-2}>x-2$; 4) $\sqrt{2x+1}\leqslant x-1$.

Глава IV
ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ



§ 17. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1 (рис. 21). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой — направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек: ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$ (напомним, что π — иррациональное число, приближенно равное 3,14). Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будем мысленно наматывать ее на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4, такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

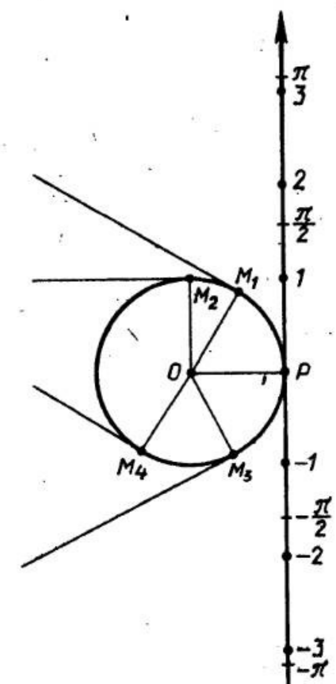


Рис. 21

Таким образом, каждой *точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.*

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1, то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$, угол POM_3 — равным -1, угол POM_4 — равным -2. Такой способ измерения углов широко используется

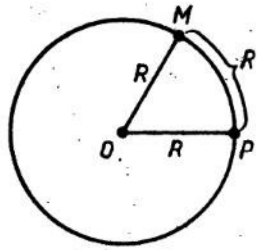


Рис. 22

в математике и физике. В этом случае говорят, что углы *измеряются в радианной мере*, а угол POM_1 называют *углом в 1 радиан* (1 рад). Отметим, что длина дуги окружности PM_1 равна радиусу.

Теперь рассмотрим окружность произвольного радиуса R и отметим на ней дугу PM, длина которой равна R, и угол POM (рис. 22).

(!) Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется *углом в 1 радиан*.

Найдем градусную меру угла в 1 рад. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R стягивает угол, в π раз меньший, т. е.

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.}$$

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\boxed{\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^\circ.} \qquad (1)$$

З а д а ч а 1. Найти градусную меру угла, равного:

1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

△ По формуле (1) находим:

1) π рад $=180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад $=90°$;

3) $\frac{3\pi}{4}$ рад $=\left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)^\circ=135°$. ▲

Найдем радианную меру угла в 1°. Так как угол 180° равен π рад, то

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.}$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\boxed{\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад}.} \qquad (2)$$

З а д а ч а 2. Найти радианную меру угла, равного: 1) 45°; 2) 15°.

△ По формуле (2) находим:

1) $45° = \frac{\pi}{180}\cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад; 2) $15° = \frac{\pi}{180}\cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ▲

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и в радианной мере.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 радиан стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α радиан стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R. \qquad (3)$$

З а д а ч а 3. Конец минутной стрелки Кремлевских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 3{,}06$ м. Какой путь проходит конец этой стрелки за 15 мин?

△ За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ радиан. По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим:

$$l = \frac{\pi}{2}R \approx \frac{3{,}14}{2}\cdot 3{,}06 \text{ м} \approx 4{,}8 \text{ м}.$$

О т в е т. 4,8 м. ▲

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R=1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т. е. $l=\alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и т. д.

З а д а ч а 4. Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2}\alpha, \text{ где } 0 < \alpha < \pi.$$

△ Площадь кругового сектора в π рад (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад в π раз меньше, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{2}:\pi$. Следовательно, площадь сектора в α рад равна $\frac{R^2}{2}\alpha$. ▲

Упражнения

223. Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:
1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

224. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;
5) 2; 6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36.

225. Записать с точностью до 0,01 число:
1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{3}\pi$.

226. Сравнить числа:
1) $\frac{\pi}{2}$ и 2; 2) 2π и 6,7; 3) π и $3\frac{1}{5}$;
4) $\frac{3}{2}\pi$ и 4,8; 5) $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ и $-\sqrt{10}$.

227. (Устно.) Определить градусную и радианную меру углов:
а) равностороннего треугольника;
б) равнобедренного прямоугольного треугольника;
в) квадрата;
г) правильного шестиугольника.

---

228. Вычислить радиус окружности, если дуга длиной 0,36 м стягивает центральный угол в 0,9 рад.

229. Найти радианную меру угла, стягиваемого дугой окружности, если длина дуги 3 см, а радиус окружности 1,5 см.

230. Дуга кругового сектора стягивает угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 1 см.

231. Радиус круга равен 2,5 см, а площадь кругового сектора равна 6,25 см^2. Найти угол, который стягивается дугой этого кругового сектора.

232*. Найти радианную меру угла (вычисления произвести с помощью микрокалькулятора МК-54 по программе

$$a\ \boxed{\text{В}\uparrow}\ \boxed{\text{F}}\ \boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ 180\ \boxed{\div}\ ):$$

1) $a=32°$; 2) $a=47°$; 3) $a=163°$;
4) $a=189°$; 5) $a=10{,}3°$; 6) $a=400{,}8°$.

233**. С помощью микрокалькулятора найти градусную меру угла, предварительно составив программу вычислений, если его радианная мера равна:
1) $\frac{\pi}{75}$; 2) $\frac{\pi}{23}$; 3) $\frac{15\pi}{11}$; 4) $8{,}8\pi$; 5) 1,03; 6) 10,37.

§ 18. ПОВОРОТ ТОЧКИ ВОКРУГ НАЧАЛА КООРДИНАТ

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Покажем теперь, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют *единичной окружностью*. Введем *понятие поворота точки* единичной окружности вокруг начала координат на угол α радиан, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 23). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α радиан.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α радиан означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 24).

Поворот на 0 рад означает, что точка остается на месте.

Примеры.

1) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 25) получается точка M с координатами (0; 1).

2) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 25) получается точка $N(0; -1)$.

3) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад (рис. 26) получается точка $K(0; -1)$.

4) При повороте точки $P(1; 0)$ на угол $-\pi$ рад (рис. 26) получается точка $L(-1; 0)$.

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180°. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала ко-

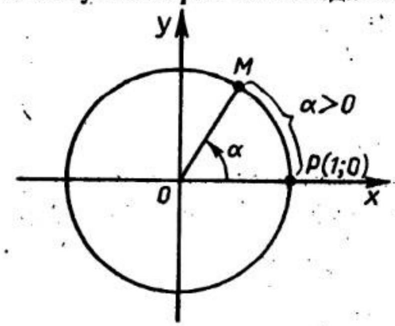


Рис. 23

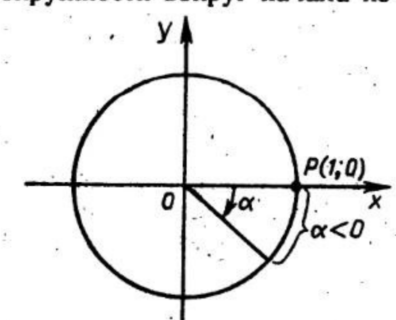


Рис. 24

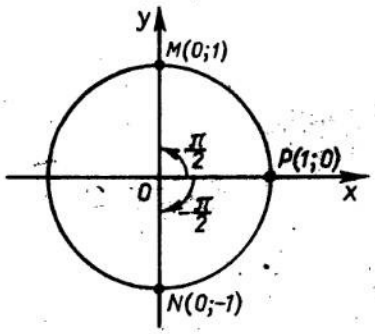


Рис. 25

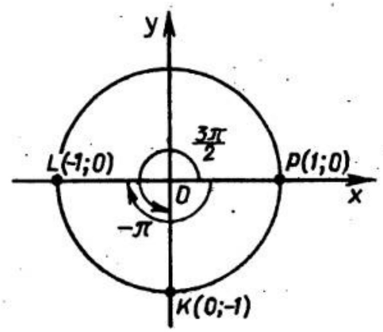


Рис. 26

ординат, можно рассматривать углы, большие 180°, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на 270°; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на $-90°$.

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах (рис. 27).

Отметим, что при повороте точки $P(1; 0)$ на 2π, т. е. на 360°, точка возвращается в первоначальное положение (см. таблицу). При повороте этой точки на -2π, т. е. на $-360°$, она также возвращается в первоначальное положение.

Рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2}=2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и проходит еще путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 28). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}=-2\cdot 2\pi-\frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 29).

Заметим, что при повороте точки $P(1; 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 28). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 29).

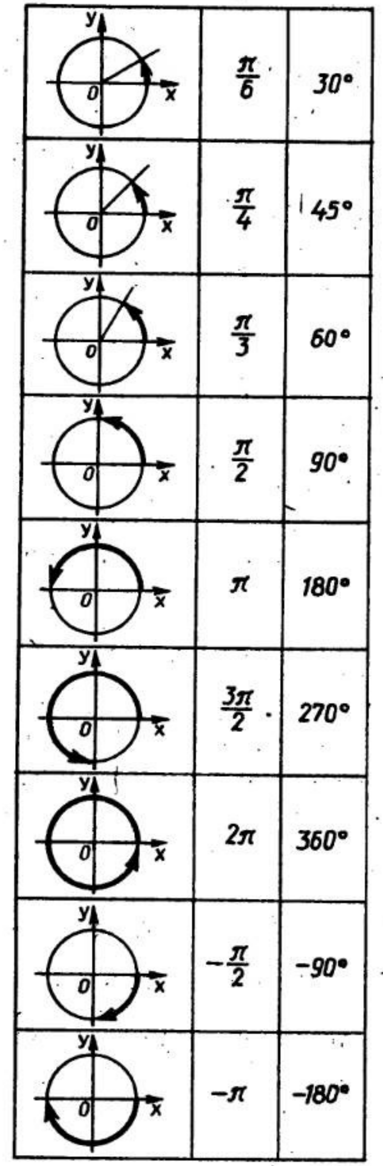


Рис. 27

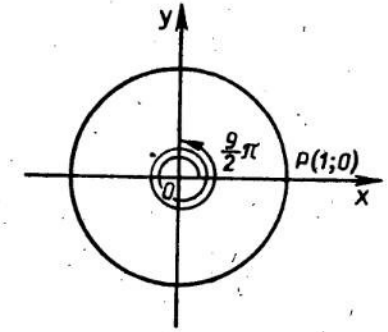


Рис. 28

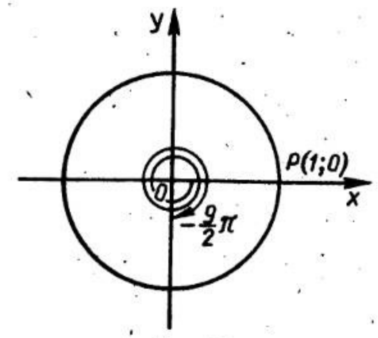


Рис. 29

Вообще если $\alpha=\alpha_0+2\pi k$, где k — целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $(1; 0)$ на угол α рад.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha+2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P(1; 0)$ в точку M (рис. 30).

Задача 1. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

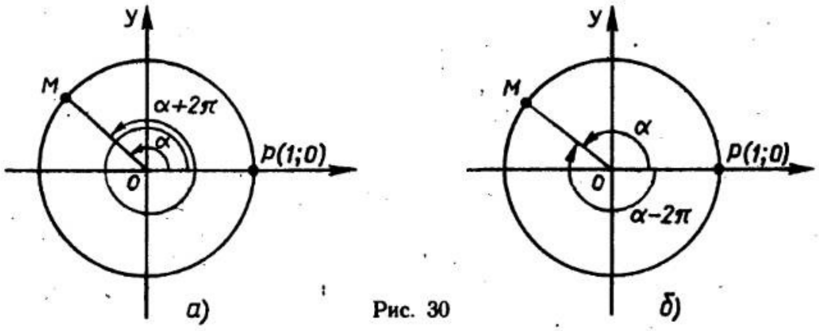


Рис. 30

△ 1) Так как $7\pi=\pi+2\pi\cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т. е. получается точка с координатами $(-1;\ 0)$.

2) Так как $-\frac{5\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}-2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т. е. получается точка с координатами $(0;\ -1)$. ▲

З а д а ч а 2. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\ 0)$, чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

△ Из прямоугольного треугольника AOM (рис. 31) следует, что угол AOM равен $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно, все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\ 0)$, чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, где k — любое целое число, т. е. $k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$. ▲

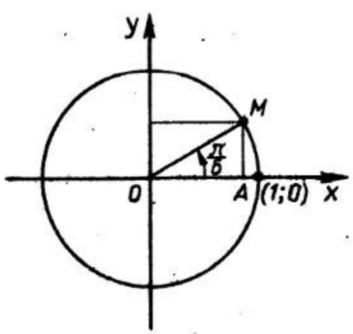


Рис. 31

Упражнения

234. Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) $90°$; 2) $-\pi$; 3) $180°$; 4) $-\frac{\pi}{2}$; 5) $270°$; 6) 2π.

235. На единичной окружности отметить точку, полученную поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi$; 6) $-\pi-2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4}-4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3}+6\pi$.

236. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) $2{,}1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$;

4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) $727°$; 6) $460°$.

237. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$;

4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

238. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку:

1) $(-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$; 3) $(0;\ 1)$; 4) $(0;\ -1)$.

239. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95.

---

240. Найти число x, где $0\leqslant x<2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a=x+2\pi k$, если:

1) $a=6{,}7\pi$; 2) $a=9{,}8\pi$; 3) $a=4\frac{1}{2}\pi$;

4) $a=7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a=\frac{11}{2}\pi$; 6) $a=\frac{17}{3}\pi$.

241. На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P(1;\ 0)$ на заданный угол:

1) $\frac{\pi}{4}\pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3}\pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}\pm 6\pi$;

4) $-\frac{3\pi}{4}\pm 8\pi$; 5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$;

7) -6π; 8) -7π.

№ 5

НА КЛАССНОМ ВЕЧЕРЕ БЫЛО 20 ТАНЦУЮЩИХ. МАРИЯ ТАНЦЕВАЛА С СЕМЬЮ ТАНЦОРАМИ, ОЛЬГА – С ВОСЕМЬЮ, ВЕРА – С ДЕВЯТЬЮ И Т.Д. ДО НАДЕЖДЫ, КОТОРАЯ ТАНЦЕВАЛА СО ВСЕМИ ТАНЦОРАМИ. СКОЛЬКО ТАНЦОРОВ – ЮНОШЕЙ БЫЛО НА ВЕЧЕРЕ?

242. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол (k — целое число):

1) $-\frac{3\pi}{2}+2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2}+2\pi k$;

3) $\frac{7\pi}{2}+2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2}+2\pi k$.

243*. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

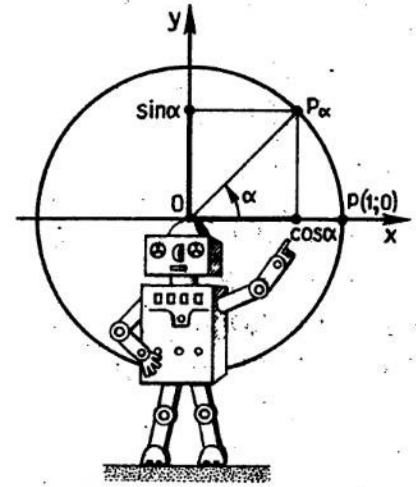
1) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$;

3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

§ 19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА УГЛА

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180°. Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом:

(!) Определение 1. ***Синусом угла*** *α называется ордината точки, полученной поворотом точки* $(1;\ 0)$ *вокруг начала координат на угол α* (обозначается $\sin\alpha$).



(!) Определение 2. ***Косинусом угла*** *α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки* $(1;\ 0)$ *вокруг начала координат на угол α* (обозначается $\cos\alpha$).

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.

Например, при повороте точки $(1;\ 0)$ на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. угол 90°, получается точка $(0;\ 1)$. Ордината точки $(0;\ 1)$ равна 1, поэтому

$$\sin\frac{\pi}{2}=\sin 90^\circ=1;$$

абсцисса этой точки равна 0, поэтому

$$\cos\frac{\pi}{2}=\cos 90^\circ=0.$$

Заметим, что приведенные определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключен в промежутке от 0° до 180°, совпадают с определениями синуса и косинуса, известными из курса геометрии.

Например:

$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\cos\pi=\cos 180^\circ=-1.$$

Задача 1. Найти $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.
$\triangle$ Точка $(1;\ 0)$ при повороте на угол $-\pi$ перейдет в точку $(-1;\ 0)$ (рис. 32). Следовательно, $\sin(-\pi)=0$, $\cos(-\pi)=-1$. $\blacktriangle$

Задача 2. Найти $\sin 270^\circ$ и $\cos 270^\circ$.
$\triangle$ Точка $(1;\ 0)$ при повороте на угол 270° перейдет в точку $(0;\ -1)$ (рис. 33). Следовательно, $\cos 270^\circ=0$, $\sin 270^\circ=-1$. $\blacktriangle$

Задача 3. Решить уравнение $\sin t=0$.
$\triangle$ Решить уравнение $\sin t=0$ — это значит найти все углы, синус которых равен нулю.

Ординату, равную нулю, имеют две точки единичной окружности: $(1;\ 0)$ и $(-1;\ 0)$ (рис. 32). Эти точки получаются из точки $(1;\ 0)$ поворотом на углы $0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ и т. д., а также на углы $-\pi,\ -2\pi,\ -3\pi$ и т. д.

Следовательно, $\sin t=0$ при $t=k\pi$, где k — любое целое число. $\blacktriangle$

Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$. Для обозначения того, что число k принадлежит $\boldsymbol{Z}$, используют запись $k\in\boldsymbol{Z}$ (читается: «k принадлежит $\boldsymbol{Z}$»). Поэтому ответ к задаче 3 можно записать так:

$$t=\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Задача 4. Решить уравнение $\cos t=0$.
$\triangle$ Абсциссу, равную нулю, имеют две точки единичной окружности: $(0;\ 1)$ и $(0;\ -1)$ (рис. 34).

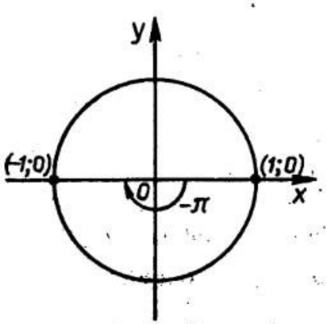


Рис. 32

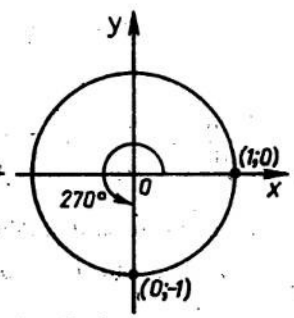


Рис. 33

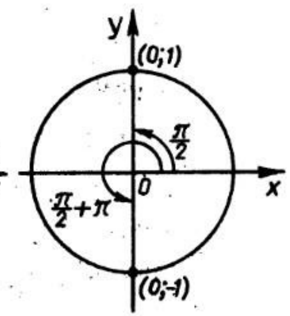


Рис. 34

Эти точки получаются из точки $(1;\ 0)$ поворотом на углы $\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi$ и т. д., а также на углы $\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi$ и т. д., т. е. на углы $\frac{\pi}{2}+k\pi$, где $k\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ. $t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. $\blacktriangle$

Задача 5. Решить уравнение: 1) $\sin t=1$; 2) $\cos t=1$.
$\triangle$ 1) Ординату, равную единице, имеет точка $(0;\ 1)$ единичной окружности. Эта точка получается из точки $(1;\ 0)$ поворотом на углы $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную единице, имеет точка, полученная из точки $(1;\ 0)$ поворотом на углы $2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\sin t=1$ при $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$\cos t=1$ при $t=2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. $\blacktriangle$

(!) Определение 3. ***Тангенсом угла*** α ***называется отношение синуса угла*** α ***к его косинусу*** (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$).

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Например:

$$\operatorname{tg}0^\circ=\frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ}=\frac{0}{1}=0,\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1.$$

Иногда используется *котангенс угла* α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$), который определяется формулой

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Например:

$$\operatorname{ctg}270^\circ=\frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ}=\frac{0}{-1}=0,\quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{1}=1.$$

Отметим, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от -1 до 1; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ определен лишь для тех углов, для которых $\cos\alpha\neq0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3}{2}\pi$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

Задача 6. Вычислить:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

△ Используя таблицу, получаем:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2{,}5. \blacktriangle$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно найти по четырехзначным математическим таблицам В. М. Брадиса, а также с помощью микрокалькулятора.

Задача 7. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01: 1) $\sin 25°$; 2) $\cos\frac{\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg} 5$.

△ На любом микрокалькуляторе вычисления проводятся с помощью одних и тех же клавиш: $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\operatorname{tg}}$, перед которыми нужно нажимать клавишу $\boxed{F}$. Перед вычислением нужно установить переключатель Р—Г (радиан — градус) в нужном положении.

1) $25\ \boxed{F}\ \boxed{\sin}\ \underline{0{,}42261825.}$ Ответ. 0,42.

2) $\boxed{F}\ \boxed{\pi}\ 5\ \boxed{\div}\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}\ \underline{0{,}80901703.}$ Ответ. 0,81.

3) $5\ \boxed{F}\ \boxed{\operatorname{tg}}\ \underline{-3{,}380514.}$ Ответ. $-3{,}38$. ▲

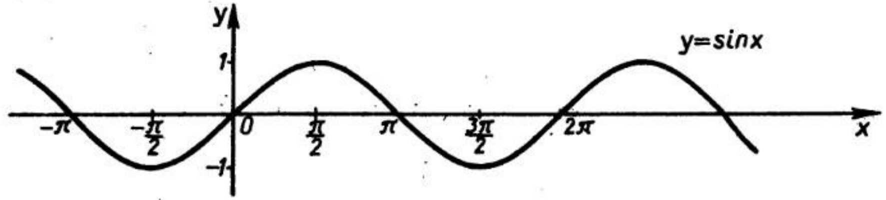


Рис. 35

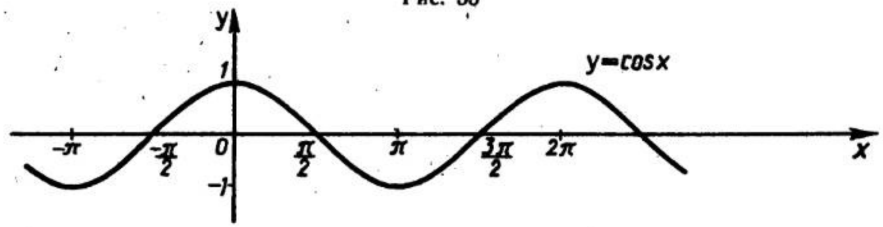


Рис. 36

В последнем примере числу 5 поставлено в соответствие число $\operatorname{tg} 5\approx -3{,}38$, а во втором примере числу $\frac{\pi}{5}$ поставлено в соответствие число $\cos\frac{\pi}{5}\approx 0{,}81$.

Если каждому действительному числу x поставить в соответствие число $\sin x$, то тем самым на множестве действительных чисел (оно обозначается буквой $\boldsymbol{R}$) будет задана функция $y=\sin x$. Аналогично задаются функции $y=\cos x$ и $y=\operatorname{tg} x$. Функция $y=\cos x$ определена при всех $x\in\boldsymbol{R}$, а функция $y=\operatorname{tg} x$ — при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ изображены на рисунке 35 и 36.

Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ называют *тригонометрическими*.

Упражнения

244. Вычислить:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sin(-90°)$; 5) $\cos(-180°)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $\cos(-135°)$; 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

245. Изобразить на единичной окружности точки, соответствующие углу α, если:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; 5) $\sin\alpha=-0{,}6$; 6) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Вычислить (246—248).

246. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin\pi-\cos\pi$;

4) $\sin 0-\cos 2\pi$; 5) $\sin\pi+\sin 1{,}5\pi$; 6) $\cos 0-\cos\frac{3}{2}\pi$.

247. 1) $\operatorname{tg}\pi+\cos\pi$; 2) $\operatorname{tg}0^\circ-\operatorname{tg}180^\circ$;
3) $\operatorname{tg}\pi+\sin\pi$; 4) $\cos\pi-\operatorname{tg}2\pi$.

248. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

2) $5\sin\frac{\pi}{6}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-10\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$;

4) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

249. Решить уравнение:

1) $2\sin x=0$; 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$;

3) $\cos x-1=0$; 4) $1-\sin x=0$.

250. (Устно.) Может ли $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ быть равным:
1) 0,49; 2) $-0{,}875$; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2-\sqrt{2}$?

---

251. Найти значение выражения при данном значении α:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$ при $\alpha=60^\circ$;

3) $\sin 3\alpha-\cos 2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$ при $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

252*. Решить уравнение:
1) $\sin x=-1$; 2) $\cos x=-1$; 3) $\sin 3x=0$;
4) $\cos 0{,}5x=0$; 5) $\cos 2x-1=0$; 6) $1-\cos 3x=0$.

253. Вычислить с точностью до 0,01, используя микрокалькулятор:

1) $\cos 12^\circ$; 2) $\sin 38^\circ$; 3) $\operatorname{tg}100^\circ$;

4) $\sin 400^\circ$; 5) $\cos 2{,}7$; 6) $\operatorname{tg}(-13)$;

7) $\sin\frac{\pi}{6}$; 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

§ 20. ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА

1. Знаки синуса и косинуса

Пусть точка (1; 0) движется по единичной окружности против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти (квадранте), ординаты и абсциссы положительны. Поэтому $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (рис. 37, 38).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ (рис. 37, 38). Аналогично в третьей четверти $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$, а в четвертой четверти $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$ (рис. 37, 38). При дальнейшем движении точки по окружности знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка.

Если точка (1; 0) движется по часовой стрелке, то *знаки синуса и косинуса* также *определяются тем, в какой четверти окажется точка*; это показано на рисунках 37 и 38.

Задача 1. Выяснить знаки синуса и косинуса угла:

1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4}>0$, $\cos\frac{3\pi}{4}<0$.

2) Так как $745^\circ=2\cdot360^\circ+25^\circ$, то повороту точки (1; 0) на угол 745° соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745^\circ>0$, $\cos 745^\circ>0$.

3) Так как $-\pi<-\frac{5\pi}{7}<-\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки (1; 0) на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)<0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)<0$. ▲

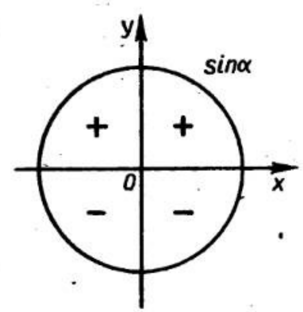


Рис. 37

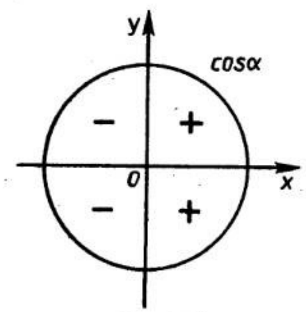


Рис. 38

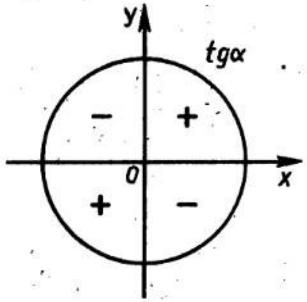


Рис. 39

2. Знаки тангенса

По определению $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha>0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg}\alpha<0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. *Знаки тангенса* изображены на рисунке 39.

Задача 2. Выяснить знак тангенса угла: 1) 260°; 2) 3.

△ 1) Так как $180°<260°<270°$, то $\operatorname{tg} 260°>0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, то $\operatorname{ctg} 3<0$. ▲

Упражнения

254. Определить четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки (1; 0) на угол α, если:

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=210°$;
4) $\alpha=-210°$; 5) $\alpha=735°$; 6) $\alpha=848°$.

255. Определить знак числа $\sin\alpha$, если:

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha=-\frac{5}{8}\pi$;
4) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$; 5) $\alpha=740°$; 6) $\alpha=510°$.

256. Определить знак числа $\cos\alpha$, если:

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$;
4) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$; 5) $\alpha=290°$; 6) $\alpha=-150°$.

257. Определить знаки чисел $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;
5) $\alpha=190°$; 6) $\alpha=283°$; 7) $\alpha=172°$; 8) $\alpha=200°$.

258. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$;
3) $\frac{7}{4}\pi<\alpha<2\pi$; 4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$.

259. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если:
1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$.

260. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$;
4) $\sin(\pi-\alpha)$; 5) $\cos(\alpha-\pi)$; 6) $\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$;
7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

261. Найти все значения аргумента α, заключенные в промежутке от 0 до 2π, для которых знаки синуса и косинуса совпадают (различны).

262. Определить знак числа:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$;
3) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

263. Сравнить значения выражений:
1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ и $\cos 2{,}3$.

264*. Решить уравнение:
1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x+3\pi)=0$;
3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

265.** В какой четверти находится точка, соответствующая числу α, если:
1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$;
2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$?

266*. Составить программу для вычисления значений выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$ на программируемом микрокалькуляторе и провести вычисления при:

1) $\alpha=48°$; 2) $\alpha=67°$; 3) $\alpha=\frac{2}{7}\pi$; 4) $\alpha=\frac{7}{8}\pi$;
5) $\alpha=\frac{\pi}{13}$; 6) $\alpha=\frac{\pi}{18}$; 7) $\alpha=-\frac{9}{5}\pi$; 8) $\alpha=-\frac{13}{7}\pi$.

§ 21. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ СИНУСОМ, КОСИНУСОМ И ТАНГЕНСОМ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ УГЛА

Выясним *зависимость между синусом и косинусом.*

Пусть точка $M(x;\ y)$ единичной окружности получена поворотом точки (1; 0) на угол α (рис. 40). Тогда по определению синуса и косинуса

$$x=\cos\alpha,\quad y=\sin\alpha.$$

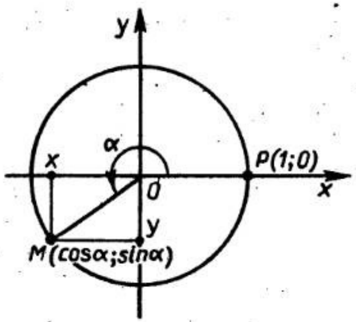


Рис. 40

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$. Следовательно,

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.} \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством.*

Из равенства (1) можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\boxed{\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},} \qquad (2)$$

$$\boxed{\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.} \qquad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

△ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha<0$, поэтому в формуле (2) перед корнем нужно поставить знак «минус»:

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}. \ ▲$$

Задача 2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

△ Так как $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, то $\cos\alpha>0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «плюс»:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}. \ ▲$$

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом.* По определению тангенса и котангенса

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.} \qquad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и наоборот:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},} \qquad (5)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.} \qquad (6)$$

Равенства (4) — (6) справедливы при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Задача 3. Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=13$.

△ По формуле (6) находим:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{13}. \ ▲$$

Задача 4. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

△ По формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то $\cos\alpha<0$. Поэтому

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}64}=-0{,}6.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}8}{-0{,}6}=-\frac{4}{3}. \ ▲$$

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдем *зависимость между тангенсом и косинусом.*

Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha\neq 0$. Получим равенство

$$\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

откуда

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.} \qquad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos\alpha\neq 0$, т. е. при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Из формулы (7) можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

З а д а ч а 5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

△ Из формулы (7) получаем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. ▲

З а д а ч а 6. Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

△ Из формулы (7) находим:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{10}.$$

Так как $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$ и поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{0{,}1}$. ▲

Упражнения

267. Вычислить:

1) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

4) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

5) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{15}{8}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

6) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-3$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

268. С помощью основного тригонометрического тождества выяснить, могут ли одновременно выполняться равенства:
1) $\sin\alpha=1$ и $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=-1$;
3) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

269. Могут ли одновременно выполняться равенства:
1) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha=\frac{3}{4}$?

270. Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{11}$.

271. Угол при вершине равнобедренного треугольника имеет тангенс, равный $2\sqrt{2}$. Найти косинус этого угла.

272. Найти $\cos\alpha$, если $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\frac{1}{8}$.

273. Найти:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{5}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

274*. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найти значение выражения:
1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;
3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$; 4) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

275.** Известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Найти:
1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

276.** Решить уравнение:
1) $2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x=1$; 2) $\sin^2 x-2=\sin x-\cos^2 x$;
3) $2\cos^2 x-1=\cos x-2\sin^2 x$; 4) $3-\cos x=3\cos^2 x+3\sin^2 x$.

§ 22. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

З а д а ч а 1. Доказать, что при $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, справедливо равенство

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

△ По определению $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и поэтому

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Эти преобразования верны, так как $\sin\alpha\neq 0$ при $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. ▲

Равенство (1) справедливо для всех допустимых значений α, т. е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл. Такие равенства называют *тождествами*, а задачи на доказательства таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

В дальнейшем при доказательстве тождеств мы не будем находить допустимые значения углов, если это не требуется в условии задачи.

Задача 2. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha).$$

$\triangle$ $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$ ▲

Задача 3. Доказать тождество

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$\triangle$ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)}=0.$$ ▲

При решении задач 1—3 использовались следующие *способы доказательства тождеств:* преобразование правой части к левой; преобразование левой части к правой; установление того, что разность между правой и левой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4. Доказать тождество $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha.$

$$\triangle\ \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. ▲

Задача 5. Упростить выражение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

$$\triangle\ \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.$$ ▲

При решении задач на упрощение тригонометрических выражений мы не будем находить допустимые значения углов, если это не требуется в условии задачи.

Упражнения

277. Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$; 2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

5) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$; 6) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

278. Упростить выражение:

1) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

279. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\sin^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

280. Доказать тождество:

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=1$;
2) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

---

281. Доказать, что при всех допустимых значениях α выражение принимает одно и то же значение, т. е. не зависит от α:

1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$;
3) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
4) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$.

282. Доказать тождество:

1) $(1-\cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha)=\sin^2 2\alpha$;
2) $\dfrac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$;
3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;
4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;
5) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$;
6) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
7) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$;
8) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

283. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}-(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)-\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

284*. Найти значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$.

285.** Найти значение выражения $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$.

286.** Решить уравнение:

1) $3\cos^2 x-2\sin x=3-3\sin^2 x$;

2) $\cos^2 x-\sin^2 x=2\sin x-1-2\sin^2 x$.

§ 23. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС УГЛОВ α и $-\alpha$

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 41). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси OX. Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha);\ \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\boxed{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha.} \qquad (1)$$

Используя определение тангенса, получаем:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.} \qquad (2)$$

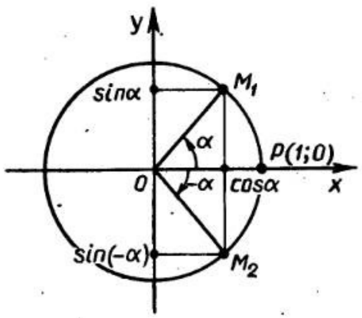


Рис. 41

Формулы (1) справедливы при любых α, а формула (2) — при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Можно показать, что если $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, то $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Формулы (1) — (2) позволяют найти значения синуса, косинуса и тангенса для отрицательных углов.

Например: $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$,

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

Упражнения

287. Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{1+\operatorname{tg}^2(-30^\circ)}{1+\operatorname{ctg}^2(-30^\circ)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

288. Упростить выражение:

1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\,(-\sin\alpha)$;

3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

---

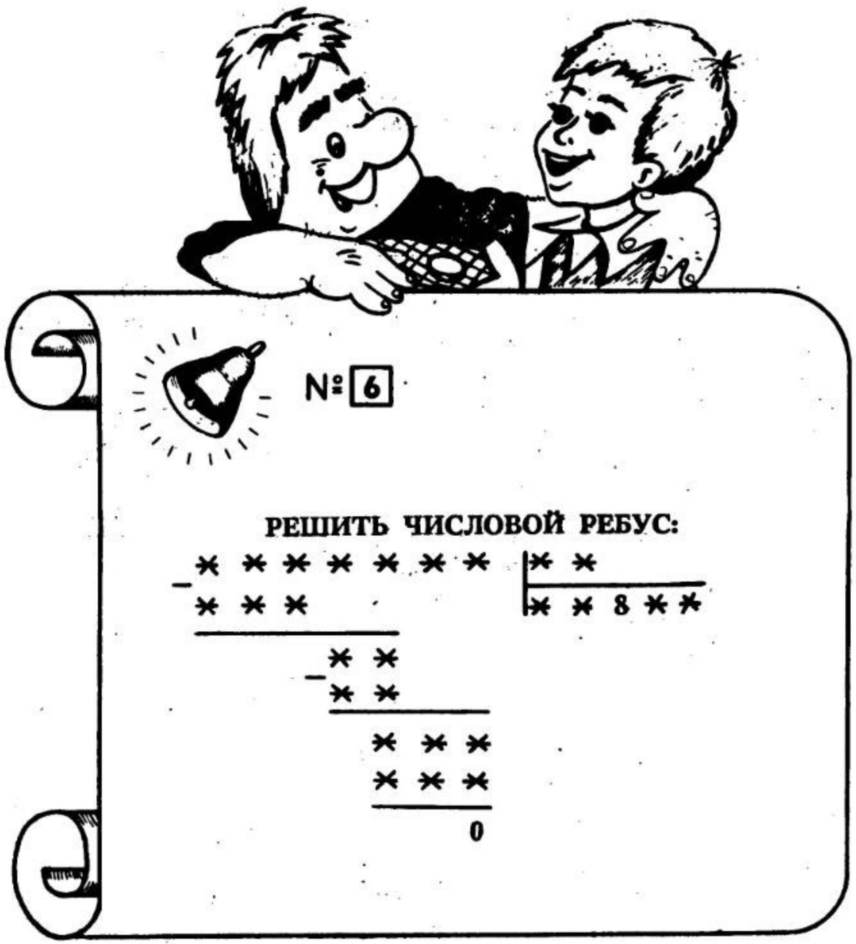
289. Доказать тождество:

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\operatorname{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

290. Вычислить:

1) $\dfrac{3-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+7{,}5\operatorname{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.



291.** Упростить:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$;

2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

292*. Решить уравнение:

1) $\sin(-x)=1$; 2) $\cos(-2x)=0$;

3) $\cos(-2x)=1$; 4) $\sin(-2x)=0$;

5) $\sin(-x)=\sin\frac{3\pi}{2}$; 6) $\cos(-x)=\cos\pi$.

§ 24. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha\pm\beta)$ и $\sin(\alpha\pm\beta)$ через косинусы и синусы углов α и β.

Теорема. ***Для любых α и β справедливо равенство***

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.} \qquad (1)$$

○ Пусть точки M_α, $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки $M_0(1;\,0)$ на углы α, $-\beta$ и $\alpha+\beta$ радиан соответственно (рис. 42).

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$M_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$,

$M_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta))$,

$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta))$.

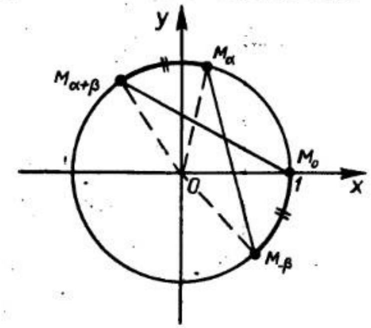


Рис. 42

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны, и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно,

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

Используя формулу для расстояния между двумя точками, известную из курса геометрии, получаем:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=$$
$$=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) из § 23:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. ●

Задача 1. Вычислить $\cos 75°$.

△ По формуле (1) находим:

$$\cos 75°=\cos(45°+30°)=$$
$$=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}.\ ▲$$

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.} \qquad (2)$$

Задача 2. Вычислить $\cos 15°$.

△ По формуле (2) получаем:

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=$$
$$=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \ ▲$$

Задача 3. Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \qquad (3)$$

△ При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\beta=\sin\beta, \text{ т. е.}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta. \qquad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Полагая в формуле (4) $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \ ▲$$

Используя формулы (1)—(4), выведем *формулы сложения для синуса*:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Таким образом,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.} \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.} \qquad (6)$$

Задача 4. Вычислить $\sin 210°$.

△ $\sin 210°=\sin(180°+30°)=$
$$=\sin 180°\cos 30°+\cos 180°\sin 30°=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}. \ ▲$$

Задача 5. Вычислить

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

△ $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0.$ ▲

Задача 6*. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

△ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу (7). ▲

Формула (7) может быть полезна при вычислениях. Например, по этой формуле находим:

$$\operatorname{tg}225°=\operatorname{tg}(180°+45°)=\frac{\operatorname{tg}180°+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}180°\operatorname{tg}45°}=1.$$

Упражнения

С помощью формул сложения вычислить (293—295).

293. 1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$.

294. 1) $\cos 57°30'\cos 27°30'+\sin 57°30'\sin 27°30'$;
2) $\cos 19°30'\cos 25°30'-\sin 19°30'\sin 25°30'$;
3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;
4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

295. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Упростить выражение **(296—297)**.

296. 1) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$;

2) $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right) \sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

297. 1) $\cos(\alpha+\beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - \cos(\alpha-\beta)$.

С помощью формул сложения вычислить **(298—299)**.

298. 1) $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$;

2) $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$;

3) $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$;

4) $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

299. 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

300. Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - \sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \sin(-\beta)$.

---

301. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, и $\sin \beta = \frac{8}{17}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

302. Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos \alpha = -0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, и $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

303. Упростить выражение:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right) + \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha \sin\beta + \sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta)}$;

4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta}$.

304*. Доказать тождество:

1) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

4) $\frac{\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

305*. Решить уравнение:

1) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;

2) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = -1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cos x = 1$;

4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = 1$.

306*. Упростить выражение:

1) $\frac{\mathrm{tg}\,29^\circ + \mathrm{tg}\,31^\circ}{1 - \mathrm{tg}\,29^\circ \cdot \mathrm{tg}\,31^\circ}$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{16} - \mathrm{tg}\,\frac{3}{16}\pi}{1 + \mathrm{tg}\,\frac{7}{16}\pi \cdot \mathrm{tg}\,\frac{3}{16}\pi}$.

307.** Доказать тождество:

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}$; 2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta - 1}$.

§ 25. СИНУС И КОСИНУС ДВОЙНОГО УГЛА

Выведем *формулы синуса и косинуса двойного угла*, используя формулы сложения.

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
Итак,

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.} \qquad (1)$$

З а д а ч а 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

△ По формуле (1) находим:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ▲

2) $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-$ $-\sin^2\alpha$. Итак,

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.} \qquad (2)$$

З а д а ч а 2. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=0{,}3$.

△ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1=$$
$$=2\cdot(0{,}3)^2-1=-0{,}82. \ ▲$$

З а д а ч а 3. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

$$△\ \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha}=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha. \ ▲$$

З а д а ч а 4. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

△ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (см. § 24) $\beta=\alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}. \ ▲$$

Упражнения

Вычислить (308—309).

308. 1) $2\sin 15°\cos 15°$; 2) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$;
3) $(\cos 75°-\sin 75°)^2$; 4) $(\cos 15°+\sin 15°)^2$.

309. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

310. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:
1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

311. Вычислить $\cos 2\alpha$, если:
1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

Упростить выражение **(312—313)**.

312. 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\cos 4\alpha+\sin^2 2\alpha$; 4) $\sin 2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

313. 1) $\frac{\cos 2\alpha+1}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;
3) $\frac{\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 4) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$;

---

314. Доказать тождество:
1) $\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1$; 2) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=1$.

315. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:
1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$.

316. Доказать тождество:
1) $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$; 2) $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$.

317. Вычислить:
1) $2\cos^2 15°-1$; 2) $1-2\sin^2 22{,}5°$;
3) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 4) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$.

318. Упростить выражение:
1) $1-2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha-1$;
3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$; 4) $\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{\sin 2\alpha}$.

319*. Доказать тождество:
1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-1$;
2) $\frac{\sin 2\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$;
4) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$.

320*. Решить уравнение:
1) $\sin 2x-2\cos x=0$; 2) $\cos 2x+3\sin x=1$;
3) $2\sin x=\sin 2x$; 4) $\sin^2 x=-\cos 2x$.

321*. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}6$.

322.** Вычислить:
1) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\frac{6\operatorname{tg} 15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$.

§ 26. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° $\left(\text{или от } 0^\circ \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

З а д а ч а 1. Вычислить $\sin 870^\circ$ и $\cos 870^\circ$.

△ Заметим, что $870^\circ = 2\cdot 360^\circ + 150^\circ$. Следовательно, при повороте точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на 870° точка совершит два полных оборота и еще повернется на угол 150°, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на 150° (рис. 43). Поэтому $\sin 870^\circ = \sin 150^\circ$, $\cos 870^\circ = \cos 150^\circ$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси OY (рис. 44). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы отличаются только знаком. Поэтому $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т. $\sin 870^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\sin(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ,\ \cos(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ, \quad (1)$$

$$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ,\ \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ. \quad (2)$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P(1;\ 0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, получается та же самая точка, что и при повороте на угол α.

Следовательно, верны формулы

(!)

$$\boxed{\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}.} \quad (3)$$

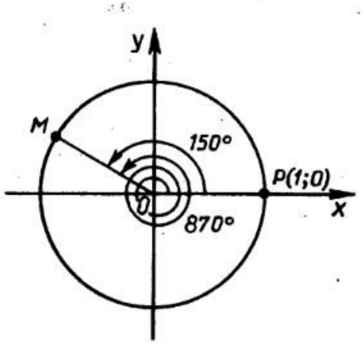


Рис. 43

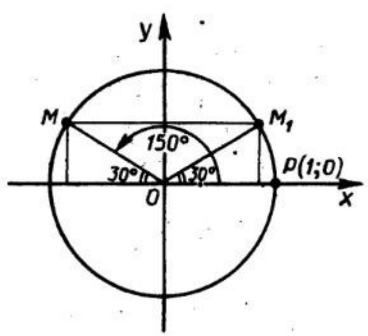


Рис. 44

Равенства (2) являются частными случаями формул

(!)

$$\boxed{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.} \quad (4)$$

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

○ Применяя формулу сложения для синуса, получаем:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha. \ ●$$

Аналогично доказывается и вторая из формул (4). Формулы (4) называются *формулами приведения*. С помощью формул (3) и (4) можно свести вычисление синуса и косинуса любого угла к их значениям для острого угла.

З а д а ч а 2. Вычислить $\sin 930^\circ$.

△ Используя формулы (3), получаем:

$$\sin 930^\circ = \sin(3\cdot 360^\circ - 150^\circ) = \sin(-150^\circ).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ получим

$$\sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ.$$

По формуле (4) находим:

$$-\sin 150^\circ = -\sin(180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

О т в е т. $\sin 930^\circ = -\frac{1}{2}$. ▲

З а д а ч а 3. Вычислить $\cos\frac{15\pi}{4}$.

△ $\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ▲

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислениям тангенса острого угла.

Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Используя это равенство и формулы (4), получаем:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}. \quad (5)$$

Задача 4. Вычислить: 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

△ 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}=1$. ▲

В § 24 были доказаны формулы

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,}$$

которые также называют *формулами приведения*. Используя эти формулы, например, получаем $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}$.

Упражнения

Вычислить **(323—326)**.

323. 1) $\sin\frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$;
4) $\cos\frac{11}{2}\pi$; 5) $\sin 720°$; 6) $\cos 540°$.

324. 1) $\cos 420°$; 2) $\operatorname{tg} 570°$; 3) $\sin 3630°$;
4) $\operatorname{ctg} 960°$; 5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{11}{6}\pi$.

325. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\cos 120°$; 4) $\sin 315°$.

326. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$;
4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

---

327. Найти числовое значение выражения:
1) $\cos 630°-\sin 1470°-\operatorname{ctg} 1125°$;
2) $\operatorname{tg} 1800°-\sin 495°+\cos 945°$;
3) $\sin(-7\pi)-2\cos\frac{31\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;
4) $\cos(-9\pi)+2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

328. Упростить выражение:
1) $\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2(\alpha-\pi)$;
2) $\cos(\pi-\alpha)\cos(3\pi-\alpha)-\sin(\alpha-\pi)\sin(\alpha-3\pi)$.

329. Вычислить:
1) $\cos 7230°+\sin 900°$; 2) $\sin 300°+\operatorname{tg} 150°$;
3) $2\sin 6{,}5\pi-\sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos 4{,}25\pi-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{61\pi}{6}$;
5) $\frac{\sin(-6{,}5\pi)+\operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi)+\operatorname{ctg}(-16{,}25\pi)}$; 6) $\frac{\cos(-540°)+\sin 480°}{\operatorname{tg} 405°-\operatorname{ctg} 330°}$.

330. Упростить выражение:
1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$; 2) $\frac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;
3) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

331. Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

332*. Доказать тождество:
1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;
3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

333*. Решить уравнение:
1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin(\pi-x)=1$;
3) $\cos(x-\pi)=0$; 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$.

334*. Доказать тождество:
1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$;
2) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=0$.

335.** Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключенного в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

336. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Определить четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:
1) $\frac{\pi}{2}-\alpha$; 2) $\alpha-\pi$; 3) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$;
4) $\frac{\pi}{2}+\alpha$; 5) $\alpha-\frac{\pi}{2}$; 6) $\pi-\alpha$.

337. Найти значение синуса и косинуса угла:
1) 3π; 2) 4π; 3) $3{,}5\pi$;
4) $\frac{5}{2}\pi$; 5) $\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$; 6) $(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

338. Вычислить:
1) $\sin 3\pi-\cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0-\cos 3\pi+\cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin \pi k+\cos 2\pi k$, где k — целое число;

4) $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2}-\sin \frac{(4k+1)\pi}{2}$, где k — целое число.

339. Найти:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

4) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

340. Доказать тождество:

1) $5\sin^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha=5+\sin\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha-2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=\cos\alpha-2$;

3) $\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=3\cos^2\alpha$; 4) $\frac{5}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=5\sin^2\alpha$.

341. Упростить выражение:

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $3\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $(1-\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{tg}(\pi+\alpha))\cos^2\alpha$;

4) $(1+\operatorname{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha)}\right)$.

342. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\frac{1}{4}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{6}$.

343. Вычислить:

1) $2\sin 75^\circ\cos 75^\circ$; 2) $\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ$;

3) $\sin 15^\circ$; 4) $\sin 75^\circ$.

344. Упростить выражение:

1) $\cos^2(\pi-\alpha)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\frac{\cos^2(2\pi+\alpha)-\sin^2(\alpha+2\pi)}{2\cos(\alpha+2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\frac{2\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2(\alpha-\pi)}$.

Вычислить **(345—346)**.

345. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

346. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$;

2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $3\cos 3660^\circ+\sin(-1560^\circ)$; 4) $\cos(-945^\circ)+\operatorname{tg} 1035^\circ$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислить $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.
2. Найти значение выражения:

   1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\pi$; 2) $\cos 150^\circ$;

   3) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$.
3. Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,001:

   1) $\sin 37^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{7}$; 3) $\operatorname{tg} 7$.
4. Доказать тождество:

   1) $3-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2$; 2) $1-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\sin^2\alpha$.
5. Упростить выражение:

   1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$;

   2) $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$;

   3) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)+\sin(4\pi+\alpha)$.

347. Сравнить числа:

1) $\sin 3$ и $\cos 4$; 2) $\cos 0$ и $\sin 5$.

348. Определить знак числа:

1) $\sin 3{,}5\operatorname{tg} 3{,}5$; 2) $\cos 5{,}01\sin 0{,}73$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 13}{\cos 15}$; 4) $\sin 1\cos 2\operatorname{tg} 3$.

349. Вычислить:

1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 165^\circ$; 3) $\sin 105^\circ$;

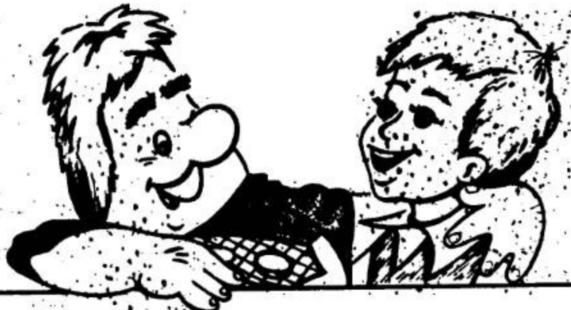
4) $\sin\frac{\pi}{12}$; 5) $1-2\sin^2 195^\circ$; 6) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$.

350. Упростить выражение:

1) $(1+\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$;

2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha}$.

351. Дано: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

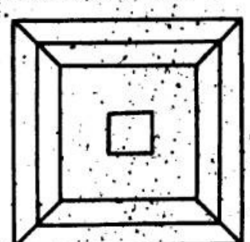


№ 7

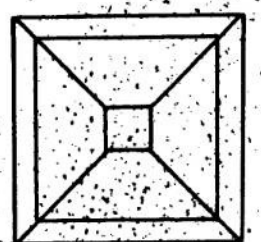
0.

НА КАКОМ ИЗ РИСУНКОВ 1 – 4 ИЗОБРАЖЕН ВИД СВЕРХУ ФИГУРЫ, ВИД СБОКУ КОТОРОЙ ИЗОБРАЖЕН НА РИСУНКЕ 0?

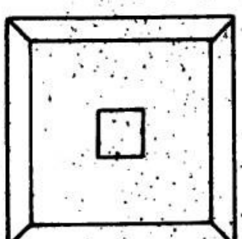
1.



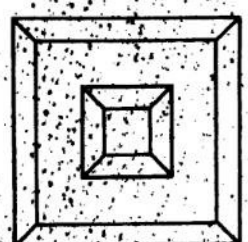
2.



3.



4.



Упростить выражение (352—354).

352. 1) $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$.

353. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{4\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$; 4) $\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha-\cos 2\alpha}$.

354. 1) $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\sin(\pi-x)$; 2) $\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}+\cos(1{,}5\pi+x)$;

3) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}-\sin(1{,}5\pi+x)$; 4) $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}+\cos(3\pi-x)$.

355. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha=-\dfrac{\pi}{12}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha=-\dfrac{\pi}{8}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ при $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

356*. Доказать, что значение выражения

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)+\cos 2\alpha-1}{\cos 2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}$$

не зависит от α.

357*. Решить уравнение:

1) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\dfrac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cos 2x=-1$;

2) $\sin\left(5x-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi)-\sin(5x+\pi)\sin 2x=0$.

358.** Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta=2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

359.** Упростить выражение:

1) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$;

2) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$;

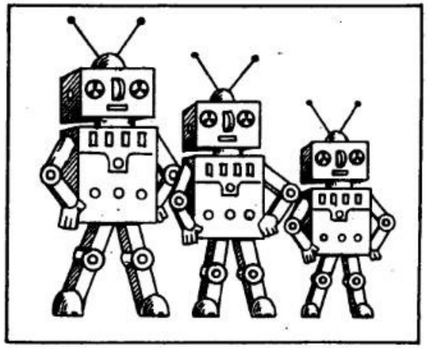
3) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

4) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

360.** Решить уравнение:

1) $1+\cos 2x=2\cos x$; 2) $1-\cos 2x=2\sin x$.

Глава V
ПРОГРЕССИИ



§ 27. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

В повседневной практике часто используется нумерация различных предметов, чтобы указать порядок их расположения. Например, дома на каждой улице нумеруются. В библиотеке нумеруются читательские абонементы и затем располагаются в порядке присвоенных номеров в специальных картотеках.

В сберегательном банке по номеру лицевого счета вкладчика можно легко найти этот счет и посмотреть, какой вклад на нем лежит. Пусть на счете № 1 лежит вклад a_1 рублей, на счете № 2 лежит вклад a_2 рублей и т. д. Получается *числовая последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_N,$$

где N — число всех счетов. Здесь каждому натуральному числу n от 1 до N поставлено в соответствие число a_n.

В математике изучаются *бесконечные* числовые последовательности:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ .$$

Число a_1 называют *первым членом* последовательности, число a_2 — *вторым членом* последовательности, число a_3 — *третьим членом* последовательности и т. д.

Число a_n называют *n-м (энным) членом* последовательности, а натуральное число n — его *номером*.

Например, в последовательности квадратов натуральных чисел

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ (n+1)^2,\ \ldots$$

$a_1=1$ — первый член последовательности; $a_n=n^2$ является n-м членом последовательности; $a_{n+1}=(n+1)^2$ является $(n+1)$-м (эн плюс первым) членом последовательности.

Часто *последовательность можно задать формулой ее n-го члена.*

Например, формулой $a_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ задана последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\ .$$

Задача 1. Числовая последовательность задана формулой $a_n=n(n-2)$. Вычислить сотый член этой последовательности.

$$\triangle\ a_{100}=100(100-2)=9800.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Числовая последовательность задана формулой $x_n=2n+3$. Найти номер члена последовательности, равного: 1) 43; 2) 50.

△ 1) По условию $2n+3=43$, откуда $n=20$.

2) $2n+3=50$, откуда $n=23{,}5$. Так как искомый номер — натуральное число, то в данной последовательности нет члена, равного 50. ▲

Иногда последовательность задают формулой, позволяющей вычислить $(n+1)$-й член последовательности через предыдущие n членов. В этом случае дополнительно задают один или несколько первых членов последовательности. Такой способ задания последовательности называют *рекуррентным* (от латинского слова recurro — возвращаться).

Задача 3. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $b_{n+1}=b_n+b_{n-1}$ и условиями $b_1=1$, $b_2=3$. Вычислить пятый член этой последовательности.

$$\triangle\ b_3=b_2+b_1=3+1=4,$$
$$b_4=b_3+b_2=4+3=7,$$
$$b_5=b_4+b_3=7+4=11.$$

Ответ. $b_5=11$. ▲

Упражнения

361. Дана последовательность квадратов натуральных чисел

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ (n+1)^2,\ \ldots\ .$$

1) Назвать третий, шестой, n-й члены последовательности.
2) Указать номер члена последовательности, равного 4, 25, n^2, $(n+1)^2$.

362. Вычислить первые три члена последовательности, которая задана формулой n-го члена:

1) $a_n=2n+3$; 2) $a_n=1+3n$; 3) $a_n=100-10n^2$;
4) $a_n=\frac{n-2}{3}$; 5) $a_n=\frac{1}{n}$; 6) $a_n=-n^3$.

363. (Устно.) Последовательность задана формулой $x_n=n^2$. Какой номер имеет член этой последовательности, равный 100; 144; 225? Является ли членом последовательности число: 48; 49; 169?

364. Последовательность задана формулой $a_n=n^2-2n-6$. Является ли членом этой последовательности число:
1) -3; 2) 2; 3) 3; 4) 9?

365. Найти первые четыре члена последовательности, заданой условием $a_1=2$ и рекуррентной формулой:
1) $a_{n+1}=3a_n+1$; 2) $a_{n+1}=5-2a_n$.

---

366. Числовая последовательность задана формулой n-го члена $a_n=(n-1)(n+4)$. Найти n, если: 1) $a_n=150$; 2) $a_n=104$.

367. Вычислить первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ и условием $a_1=256$.

368. Записать первые шесть членов последовательности, заданной условием $a_1=1$ и рекуррентной формулой:

1) $a_{n+1}=\sin\left(\frac{\pi}{2}a_n\right)$; 2) $a_{n+1}=\cos(\pi a_n)$.

369*. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+2}=a_n^2-a_{n+1}$ и условиями $a_1=2$, $a_2=3$. Вычислить пятый член последовательности.

370.** Последовательность задана формулой n-го члена. Записать $(n+1)$-й, $(n-1)$-й и $(n+5)$-й члены этой последовательности:

1) $a_n=-5n+4$; 2) $a_n=2(n-10)$;

3) $a_n=2\cdot 3^{n+1}$; 4) $a_n=7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

§ 28. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Продолжительность года приблизительно равна 365 суткам. Более точное значение равно $365\frac{1}{4}$ суток, поэтому каждые четыре года накапливается погрешность, равная одним суткам. Для учета этой погрешности к каждому четвертому году добавляются сутки, и удлиненный год называют високосным.

Например, в третьем тысячелетии високосными годами будут годы 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, ...

В этой последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 4. Такие последовательности называют *арифметическими прогрессиями.*

Определение. *Числовая последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называется* ***арифметической прогрессией****, если для всех натуральных n выполняется равенство*

$$a_{n+1}=a_n+d,$$

где d — некоторое число.

Из этой формулы следует, что $a_{n+1}-a_n=d$. Число d называют *разностью арифметической прогрессии.*

Примеры.

1) Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, ..., n, ... является арифметической прогрессией. Разность этой прогрессии $d=1$.

2) Последовательность целых отрицательных чисел -1, -2, -3, ..., $-n$, ... — арифметическая прогрессия с разностью $d=-1$.

3) Последовательность 3, 3, 3, ..., 3, ...— арифметическая прогрессия с разностью $d=0$.

Задача 1. Доказать, что последовательность, заданная формулой $a_n=1{,}5+3n$, является арифметической прогрессией.

△ Требуется доказать, что разность $a_{n+1}-a_n$ одна и та же для всех n (не зависит от n).

Запишем $(n+1)$-й член данной последовательности:

$$a_{n+1}=1{,}5+3(n+1).$$

Поэтому

$$a_{n+1}-a_n=1{,}5+3(n+1)-(1{,}5+3n)=3.$$

Следовательно, разность $a_{n+1}-a_n$ не зависит от n. ▲

По определению арифметической прогрессии $a_{n+1}=a_n+d$, $a_{n-1}=a_n-d$, откуда

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\ n>1.$$

Таким образом, каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «арифметическая» прогрессия.

Отметим, что если a_1 и d заданы, то остальные члены арифметической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $a_{n+1}=a_n+d$. Таким способом нетрудно вычислить несколько первых членов прогрессии, однако, например, для a_{100} уже потребуется много вычислений. Обычно для этого используется формула n-го члена.

По определению арифметической прогрессии

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d,} \qquad (1)$$

так как n-й член арифметической прогрессии получается из первого члена прибавлением $(n-1)$ раз числа d.

Формулу (1) называют *формулой n-го члена арифметической прогрессии.*

Задача 2. Найти сотый член арифметической прогрессии, если $a_1=-6$ и $d=4$.

△ По формуле (1) имеем $a_{100}=-6+(100-1)\cdot 4=390$. ▲

Задача 3. Число 99 является членом арифметической прогрессии 3, 5, 7, 9, ... Найти номер этого члена.

△ Пусть n — искомый номер. Так как $a_1=3$ и $d=2$, то по формуле $a_n=a_1+(n-1)d$ имеем $99=3+(n-1)\cdot 2$. Поэтому $99=3+2n-2$; $98=2n$, $n=49$.

Ответ. $n=49$. ▲

Задача 4. В арифметической прогрессии $a_8=130$ и $a_{12}=166$. Найти формулу n-го члена.

△ Используя формулу (1), находим:

$$a_8=a_1+7d,\ a_{12}=a_1+11d.$$

Подставив данные значения a_8 и a_{12}, получим систему уравнений относительно a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1+7d=130, \\ a_1+11d=166. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$4d=36,\ d=9.$$

Следовательно,

$$a_1=130-7d=130-63=67.$$

Запишем формулу n-го члена прогрессии:

$$a_n=67+9(n-1)=$$
$$=67+9n-9=58+9n.$$

Ответ. $a_n=9n+58$. ▲

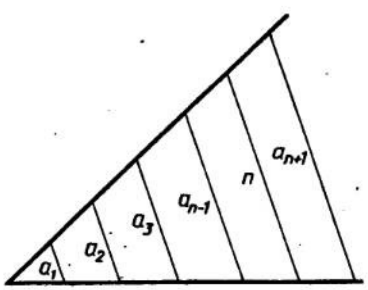


Рис. 45

Задача 5. На стороне угла откладываются от его вершины равные отрезки. Через их концы проводятся параллельные прямые (рис. 45). Доказать, что длины a_1, a_2, a_3, ... отрезков этих прямых, заключенных между сторонами угла, образуют арифметическую прогрессию.

△ В трапеции с основаниями a_{n-1} и a_{n+1} средняя линия равна a_n. Поэтому

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

Отсюда $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$, или $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$.

Так как разность между каждым членом последовательности и предшествующим ему членом одна и та же, то эта последовательность — арифметическая прогрессия. ▲

Упражнения

371. (Устно.) Назвать первый член и разность арифметической прогрессии:
1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) -12, -9, -6, ...

372. Записать первые пять членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1=2$, $d=5$; 2) $a_1=-3$, $d=2$.

373. Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является арифметической прогрессией:
1) $a_n=3-4n$; 2) $a_n=-5+2n$;
3) $a_n=3(n+1)$; 4) $a_n=2(3-n)$.

374. В арифметической прогрессии найти:
1) a_{15}, если $a_1=2$, $d=3$;
2) a_{20}, если $a_1=3$, $d=4$;
3) a_{18}, если $a_1=-3$, $d=-2$;
4) a_{11}, если $a_1=-2$, $d=-4$.

375. Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии:
1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) -4, -6, -8, -10, ...; 4) 1, -4, -9, -14, ...

376. Число -22 является членом арифметической прогрессии 44, 38, 32, ... Найти номер этого члена.

377. Является ли число 12 членом арифметической прогрессии -18, -15, -12, ... ?

378. Число -59 является членом арифметической прогрессии 1, -5, ... Найти его номер. Является ли число -46 членом этой прогрессии?

379. Найти разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_1=7$, $a_{16}=67$; 2) $a_1=-4$, $a_9=0$.

380. Разность арифметической прогрессии равна 1,5. Найти a_1, если:
1) $a_9=12$; 2) $a_7=-4$.

381. Найти первый член арифметической прогрессии, если:
1) $d=-3$, $a_{11}=20$;
2) $a_{21}=-10$, $a_{22}=-5{,}5$.

382. Найти формулу n-го члена арифметической прогрессии, если:
1) $a_3=13$, $a_6=22$;
2) $a_2=-7$, $a_7=18$.

---

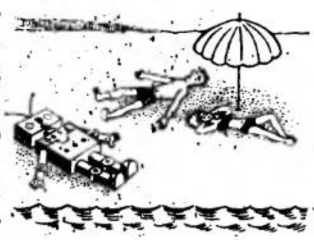
383. При каких n члены арифметической прогрессии 15, 13, 11, ... отрицательны?

384. В арифметической прогрессии $a_1=-10$, $d=0{,}5$. При каких n выполняется неравенство $a_n<2$?

385. Найти девятый член и разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_8=126$, $a_{10}=146$;
2) $a_8=-64$, $a_{10}=-50$;
3) $a_8=-7$, $a_{10}=3$;
4) $a_8=0{,}5$, $a_{10}=-2{,}5$.

386. Свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние будет пройдено падающим телом за пятую секунду?

387*. Курс воздушных ванн начинают с 15 мин в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 мин. Сколько дней следует принимать воздушные ванны в указанном режиме, чтобы достичь их максимальной продолжительности 1 ч 45 мин?



388.** Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство

$$a_n+a_k=a_{n-l}+a_{k+l}.$$

Найти $a_{10}+a_5$, если $a_7+a_8=30$.

389.** Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо равенство

$$a_n=\frac{a_{n+k}+a_{n-k}}{2}.$$

Найти a_{20}, если $a_{10}+a_{30}=120$.

§ 29. СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Задача 1. Найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

△ Запишем эту сумму двумя способами:

$$S=1+2+3+\ldots+99+100,$$
$$S=100+99+98+\ldots+2+1.$$

Сложим почленно эти равенства:

$$2S=\underbrace{101+101+101+\ldots+101+101}_{100\ \text{слагаемых}}.$$

Следовательно, $2S=101\cdot100$, откуда $S=101\cdot50=5050$. ▲

Рассмотрим теперь произвольную арифметическую прогрессию

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ .$$

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n.$$

(!) Теорема. ***Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна***

$$\boxed{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n.} \qquad (1)$$

○ Запишем S_n двумя способами:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n,$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1.$$

По определению арифметической прогрессии эти равенства можно записать так:

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+(a_1+(n-1)\,d), \qquad (2)$$
$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\ldots+(a_n-(n-1)\,d). \qquad (3)$$

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)}_{n\ \text{слагаемых}}.$$

Следовательно, $2S_n=(a_1+a_n)\,n$, откуда $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$. ●

Задача 2. Найти сумму шестидесяти первых четных натуральных чисел.

△ Последовательность четных натуральных чисел

$$2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...$$

является арифметической прогрессией с разностью $d=2$. Так как $a_n=2n$, то $a_1=2$, $a_{60}=120$. По формуле (1) находим:

$$S_{60}=\frac{2+120}{2}\cdot 60=3660. \blacktriangle$$

Задача 3. Найти сумму $38+35+32+...+(-7)$, если известно, что ее слагаемые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

△ По условию $a_1=38$, $d=-3$, $a_n=-7$. Применяя формулу $a_n=a_1+(n-1)d$, получаем $-7=38+(n-1)(-3)$, откуда $n=16$.

По формуле $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ находим:

$$S_{16}=\frac{38-7}{2}\cdot 16=248. \blacktriangle$$

Задача 4*. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 1, чтобы их сумма была равна 153?

△ Натуральный ряд чисел — арифметическая прогрессия с разностью $d=1$. По условию $a_1=1$, $S_n=153$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n.$$

Используя данные, получаем уравнение с неизвестным n:

$$153=\frac{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1}{2}n,$$

откуда

$$306=2n+(n-1)n, \quad n^2+n-306=0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+1224}}{2}=\frac{-1\pm 35}{2},$$
$$n_1=-18, \quad n_2=17.$$

Число слагаемых не может быть отрицательным, поэтому $n=17$. $\blacktriangle$

Упражнения

390. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1=1$, $a_n=20$, $n=50$; 2) $a_1=1$, $a_n=200$, $n=100$;
3) $a_1=-1$, $a_n=-40$, $n=20$; 4) $a_1=2$, $a_n=100$, $n=50$.

391. Найти сумму всех натуральных чисел от 2 до 98 включительно.

392. Найти сумму всех нечетных чисел от 1 до 133 включительно.

393. Найти сумму двенадцати первых членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_1=-5$, $d=0{,}5$; 2) $a_1=\frac{1}{2}$, $d=-3$.

394. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии:
1) 9; 13; 17; ..., если $n=11$;
2) -16; -10; -4; ..., если $n=12$.

395. Найти сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:
1) $3+6+9+...+273$; 2) $90+80+70+...+(-60)$.

396. Найти сумму всех двузначных чисел; сумму всех трехзначных чисел.

397. Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена. Найти S_{50}, если:
1) $a_n=3n+5$; 2) $a_n=7+2n$.

398. Последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1}=a_n-3$ и условием $a_1=7$. Найти сумму девяти первых членов этой последовательности.

399. Сколько нужно взять последовательных натуральных чисел, начиная с 3, чтобы их сумма была равна 75?

400. Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:
1) $a_1=10$, $n=14$, $S_{14}=1050$;
2) $a_1=2\frac{1}{3}$, $n=10$, $S_{10}=90\frac{5}{6}$.

401. Найти a_1 и d арифметической прогрессии, у которой:
1) $a_7=21$, $S_7=205$; 2) $a_{11}=92$, $S_{11}=22$.

402. При хранении бревен строевого леса их укладывают так, как показано на рисунке 46. Сколько бревен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

Рис. 46

403*. В арифметической прогрессии $a_3+a_9=8$. Найти S_{11}.

404.** Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $S_5=65$ и $S_{10}=230$.

405.** Доказать, что для арифметической прогрессии выполняется равенство

$$S_{12}=3(S_8-S_4).$$

§ 30. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 4 см. Построим треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника (рис. 47). По свойству средней линии треугольника сторона второго треугольника равна 2 см. Продолжая аналогичные построения, получим треугольники со сторонами 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см и т. д. Запишем последовательность длин сторон этих треугольников:

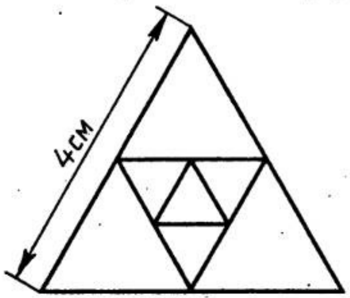


Рис. 47

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \dots .$$

В этой последовательности каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $\frac{1}{2}$. Такие последовательности называют *геометрическими прогрессиями*.

О п р е д е л е н и е. *Числовая последовательность*

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots,\ b_n,\ \dots$$

называется ***геометрической прогрессией****, если для всех натуральных n выполняется равенство*

$$b_{n+1}=b_n q,$$

где $b_n\neq 0$, q *— некоторое число не равное нулю.*

Из этой формулы следует, что $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

П р и м е р ы.

1) 2, 8, 32, 128, ...— геометрическая прогрессия со знаменателем $q=4$;

2) $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ \dots$— геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{2}{3}$;

3) $-\frac{1}{12},\ 1,\ -12,\ 144,\ \dots$— геометрическая прогрессия со знаменателем $q=-12$;

4) 7, 7, 7, 7, ...— геометрическая прогрессия со знаменателем $q=1$.

З а д а ч а 1. Доказать, что последовательность, заданная формулой $b_n=7^{2n}$, является геометрической прогрессией.

△ Отметим, что $b_n=7^{2n}\neq 0$ при всех n. Требуется доказать, что частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ — одно и то же число для всех n (не зависит от n). Получаем $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}}=\frac{7^{2n+2}}{7^{2n}}=49$, т. е. частное $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ не зависит от n. ▲

По определению геометрической прогрессии

$$b_{n+1}=b_n q,\quad b_{n-1}=\frac{b_n}{q},$$

откуда

$$b_n^2=b_{n-1}\,b_{n+1},\quad n>1.$$

Если все члены прогрессии положительны, то $b_n=\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, т. е. каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов. Этим объясняется название «геометрическая» прогрессия.

Отметим, что если b_1 и q заданы, то остальные члены геометрической прогрессии можно вычислить по рекуррентной формуле $b_{n+1}=b_n q$. Однако для больших n это трудоемко. Обычно пользуются формулой n-го члена.

По определению геометрической прогрессии

$$b_2=b_1 q,$$
$$b_3=b_2 q=b_1 q^2,$$
$$b_4=b_3 q=b_1 q^3 \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$\boxed{b_n=b_1q^{n-1},} \qquad (1)$$

так как n-й член геометрической прогрессии получается из первого члена умножением $(n-1)$ раз на число q.

Формулу (1) называют формулой n-го члена геометрической прогрессии.

Задача 2. Найти седьмой член геометрической прогрессии, если $b_1=81$ и $q=\frac{1}{3}$.

△ По формуле (1) имеем:

$$b_7=81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}=\frac{81}{3^6}=\frac{1}{9}. \blacktriangle$$

Задача 3. Число 486 является членом геометрической прогрессии 2, 6, 18, ... Найти номер этого члена.

△ Пусть n — искомый номер. Так как $b_1=2$, $q=3$, то по формуле $b_n=b_1q^{n-1}$ имеем:

$$486=2\cdot3^{n-1},\ 243=3^{n-1},\ 3^5=3^{n-1},$$

откуда $n-1=5$, $n=6$. ▲

Задача 4*. В геометрической прогрессии $b_6=96$ и $b_8=384$. Найти формулу n-го члена.

△ По формуле $b_n=b_1q^{n-1}$ имеем $b_6=b_1q^5$, $b_8=b_1q^7$. Подставив данные значения b_6 и b_8, получим $96=b_1q^5$, $384=b_1q^7$. Разделив второе из этих равенств на первое, получим:

$$\frac{384}{96}=\frac{b_1q^7}{b_1q^5},$$

откуда $4=q^2$, или $q^2=4$. Из последнего равенства находим $q=2$ или $q=-2$.

Чтобы найти первый член прогрессии, воспользуемся равенством $96=b_1q^5$.

1) При $q=2$ находим:

$$96=b_1\cdot2^5,\quad 96=b_1\cdot32,\quad b_1=3.$$

Если $b_1=3$ и $q=2$, то формула n-го члена имеет вид:

$$b_n=3\cdot2^{n-1}.$$

2) При $q=-2$ находим:

$$96=b_1(-2)^5,\quad 96=b_1(-32),\quad b_1=-3.$$

Если $b_1=-3$ и $q=-2$, то формула n-го члена имеет вид $b_n=-3\cdot(-2)^{n-1}$.

Ответ. $b_n=3\cdot2^{n-1}$ или $b_n=-3\cdot(-2)^{n-1}$. ▲

Задача 5*. В окружность вписан квадрат, а в него вписана вторая окружность. Во вторую окружность вписан второй квадрат, а в него — третья окружность и т. д. (рис. 48). Доказать, что радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию.

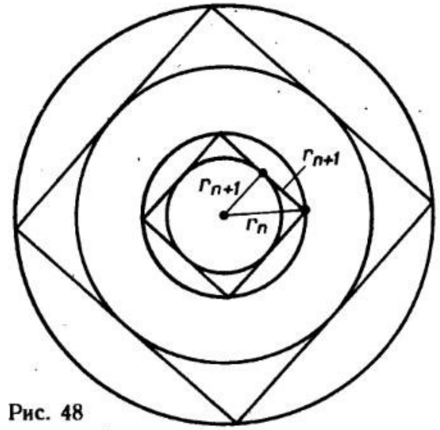


Рис. 48

△ Пусть r_n — радиус n-й окружности. Тогда по теореме Пифагора

$$r_{n+1}^2+r_{n+1}^2=r_n^2,$$

откуда $r_{n+1}^2=\frac{1}{2}r_n^2$, т. е. $r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}r_n$.

Значит, последовательность радиусов окружностей образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ▲

Упражнения

406. (Устно.) Назвать первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

1) 8, 16, 32, ...; 2) −10, 20, −40, ...;
3) 4, 2, 1, ...; 4) −50, 10, −2, ...

407. Записать первые пять членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1=12$, $q=2$; 2) $b_1=-3$, $q=-4$.

408. Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена, является геометрической прогрессией:

1) $b_n=3\cdot2^n$; 2) $b_n=5^{n+3}$; 3) $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; 4) $b_n=\frac{1}{5^{n-1}}$.

409. Для геометрической прогрессии вычислить:

1) b_4, если $b_1=3$ и $q=10$;
2) b_7, если $b_1=4$ и $q=\frac{1}{2}$;
3) b_5, если $b_1=1$ и $q=-2$;
4) b_6, если $b_1=-3$ и $q=-\frac{1}{3}$.

410. Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии:

1) $4,\ 12,\ 36,\ \ldots;$ 2) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots;$

3) $4,\ -1,\ \frac{1}{4},\ \ldots;$ 4) $3,\ -4,\ \frac{16}{3},\ \ldots$.

411. Найти номер подчеркнутого члена геометрической прогрессии:

1) $6,\ 12,\ 24,\ \ldots,\ \underline{192},\ \ldots;$ 2) $4,\ 12,\ 36,\ \ldots,\ \underline{324},\ \ldots;$

3) $625,\ 125,\ 25,\ \ldots,\ \underline{\frac{1}{25}},\ \ldots;$ 4) $-1,\ 2,\ -4,\ \ldots,\ \underline{128},\ \ldots$.

412. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $b_1=2,\ b_5=162;$ 2) $b_1=-128,\ b_7=-2;$

3) $b_1=3,\ b_4=81;$ 4) $b_1=250,\ b_4=-2.$

413. Дана геометрическая прогрессия 2, 6, 18, ...

1) Вычислить восьмой член этой прогрессии.

2) Найти номер члена последовательности, равного 162.

414. Найти седьмой член и знаменатель геометрической прогрессии с положительными членами, если:

1) $b_8=\frac{1}{9},\ b_6=81;$ 2) $b_6=9,\ b_8=3.$

415. Найти пятый и первый члены геометрической прогрессии, если:

1) $b_4=5,\ b_6=20;$ 2) $b_4=9,\ b_6=4.$

416*. Вкладчик 1 января 1994 г. внес в сберегательный банк 300 000 р. Какой станет сумма его вклада на 1 января 1996 г., если сбербанк начисляет ежегодно 120% от суммы вклада?

417.** Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата. Середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т. д. Доказать, что последовательность площадей этих квадратов является геометрической прогрессией. Найти площадь седьмого квадрата.

418.** Каждое простейшее одноклеточное животное инфузория-туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после шестикратного деления их стало 320?

419.** Доказать, что если $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, то числа $1-\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $1+\sin\alpha$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

§ 31. СУММА n ПЕРВЫХ ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Задача 1. Найти сумму

$$S=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5. \qquad (1)$$

△ Умножим обе части равенства на 3:

$$3S=3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6. \qquad (2)$$

Перепишем равенства (1) и (2) так:

$$S=1+(3+3^2+3^3+3^4+3^5),$$
$$3S=(3+3^2+3^3+3^4+3^5)+3^6.$$

Выражения, стоящие в скобках, одинаковы. Поэтому, вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем:

$$3S-S=3^6-1,\ 2S=3^6-1,$$

$$S=\frac{3^6-1}{2}=\frac{729-1}{2}=364. \ ▲$$

Рассмотрим теперь произвольную геометрическую прогрессию $b_1, b_1 q, \ldots, b_1 q^n, \ldots$, знаменатель которой $q \neq 1$.

Пусть S_n — сумма n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} \qquad (3)$$

Теорема. ***Сумма n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ равна***

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.} \qquad (4)$$

○ Умножим обе части равенства (3) на q:

$$qS_n = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^n. \qquad (5)$$

Перепишем равенства (3) и (5), выделив в них одинаковые слагаемые:

$$S_n = b_1 + (b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1}),$$

$$qS_n = (b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^{n-1}) + b_1 q^n.$$

Выражения, стоящие в скобках, равны. Поэтому, вычитая из верхнего равенства нижнее, получаем:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1 q^n.$$

Отсюда

$$S_n(1-q) = b_1(1-q^n),$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \; ●$$

Заметим, что если $q=1$, то

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ слагаемых}} = b_1 n, \text{ т. е. } S_n = b_1 n.$$

Задача 2. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии $6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$.

△ В этой прогрессии $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. По формуле (4) находим:

$$S_5 = \frac{6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}. \; ▲$$

Задача 3. В геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ сумма первых шести членов равна 252. Найти первый член этой прогрессии.

△ Воспользуемся формулой (4):

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$252 = 2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right), \quad 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, \quad b_1 = 128. \; ▲$$

Задача 4. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна -93. Первый член этой прогрессии равен -3, а знаменатель q равен 2. Найти n.

△ Используя формулу (4), получаем:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Отсюда $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^n = 2^5$, $n = 5$. ▲

Задача 5. Последовательность 5, 15, 45, ..., 1215, ... является геометрической прогрессией. Найти сумму $5 + 15 + 45 + \ldots + 1215$.

△ В этой прогрессии $b_1 = 5$, $q = 3$, $b_n = 1215$. Формулу суммы n первых членов преобразуем так:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 q^{n-1} q}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}.$$

Используя условия задачи, находим:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3-1} = \frac{3645-5}{2} = 1820. \; ▲$$

Упражнения

420. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$;
3) $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 4$; 4) $b_1 = -5$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$;
5) $b_1 = 6$, $q = 1$, $n = 200$; 6) $b_1 = -4$, $q = 1$, $n = 100$.

421. Найти сумму семи первых членов геометрической прогрессии:
1) 5, 10, 20, ...; 2) 2, 6, 18, ...

422. В геометрической прогрессии найти:
1) b_1 и b_7, если $q=2$, $S_7=635$;
2) b_1 и b_8, если $q=-2$, $S_8=85$.

423. В геометрической прогрессии найти число n членов, если:
1) $S_n=189$, $b_1=3$, $q=2$;
2) $S_n=635$, $b_1=5$, $q=2$;
3) $S_n=170$, $b_1=256$, $q=-\frac{1}{2}$;
4) $S_n=-99$, $b_1=-9$, $q=-2$.

424. В геометрической прогрессии найти:
1) n и b_n, если $b_1=7$, $q=3$, $S_n=847$;
2) n и b_n, если $b_1=8$, $q=2$, $S_n=4088$;
3) n и q, если $b_1=2$, $b_n=1458$, $S_n=2186$;
4) n и q, если $b_1=1$, $b_n=2401$, $S_n=2801$.

425. Найти сумму чисел, если ее слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии:
1) $1+2+4+...+128$; 2) $1+3+9+...+243$;
3) $-1+2-4+...+128$; 4) $5-15+45-...+405$.

---

426. В геометрической прогрессии найти b_5 и S_4, если:
1) $b_2=15$, $b_3=25$; 2) $b_2=14$, $b_4=686$, $q>0$.

427. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена:
1) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$, найти S_5; 2) $b_n=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, найти S_6.

428*. Доказать тождество
$$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)=x^n-1,$$
где n — натуральное число, большее 1.

429.** В геометрической прогрессии найти:
1) b_1 и q, если $b_3=135$, $S_3=195$;
2) q и b_3, если $b_1=12$, $S_3=372$.

430.** В геометрической прогрессии найти:
1) q, если $b_1=1$ и $b_3+b_5=90$;
2) q, если $b_2=3$ и $b_4+b_6=60$;
3) S_{10}, если $b_1-b_3=15$ и $b_2-b_4=30$;
4) S_5, если $b_3-b_1=24$ и $b_5-b_1=624$.

§ 32. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим квадраты, изображенные на рисунке 49. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго равна $\frac{1}{2}$, сторона третьего $\frac{1}{2^2}$ и т. д. Таким образом, стороны квадрата образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ ...,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ ... . \qquad (1)$$

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ ...,\ \frac{1}{4^{n-1}},\ ... . \qquad (2)$$

Из рисунка 49 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся все меньше, приближаясь к нулю. Поэтому прогрессии (1) и (2) называются бесконечно убывающими. Отметим, что у этих прогрессий знаменатели меньше единицы.

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{3^3},\ ...,\ \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},\ ... . \qquad (3)$$

Знаменатель этой прогрессии $q=-\frac{1}{3}$, а ее члены $b_1=1$, $b_2=-\frac{1}{3}$, $b_3=\frac{1}{9}$, $b_4=-\frac{1}{27}$ и т. д.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Прогрессию (3) также называют бесконечно убывающей. Отметим, что модуль ее знаменателя меньше единицы: $|q|<1$.

(!) Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если модуль ее знаменателя меньше единицы.

З а д а ч а 1. Доказать, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n-го члена $b_n=\frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

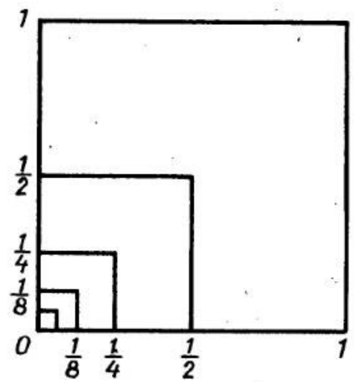


Рис. 49

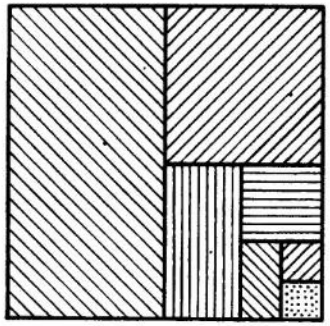


Рис. 50

$\triangle$ По условию $b_1=\frac{3}{5}$, $b_2=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$, откуда $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{5}$.

Так как $|q|<1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. $\blacktriangle$

На рисунке 50 изображен квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и т. д. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \dots .$$

Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, т. е.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots=1.$$

В левой части этого равенства стоит сумма бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю). В этом случае пишут:

$$\frac{1}{2^n}\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

(читается: «$\frac{1}{2^n}$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности»).

Так как $\frac{1}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\to 1$ при $n\to\infty$, т. е. $S_n\to 1$ при $n\to\infty$. Поэтому бесконечную сумму $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$ считают равной 1.

Рассмотрим теперь любую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \dots,\ b_1q^{n-1},\ \dots,$$

где $|q|<1$.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называют число, к которому стремится сумма ее первых n членов при $n\to\infty$.

Воспользуемся формулой $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Запишем ее так:

$$S_n=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n. \qquad (4)$$

Так как $|q|<1$, то $q^n\to 0$, если n неограниченно возрастает. Поэтому $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ также стремится к нулю при $n\to\infty$. Первое слагаемое в формуле (4) не зависит от n. Следовательно, S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$ при $n\to\infty$.

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$\boxed{S=\frac{b_1}{1-q}.} \qquad (5)$$

В частности, при $b_1=1$ получаем $S=\frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так:

$$1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+\dots=\frac{1}{1-q}.$$

Подчеркнем, что это равенство и равенство (5) справедливы только при $|q|<1$.

З а д а ч а 2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{18},\ -\frac{1}{54},\ \dots$.

△ Так как $b_1=\frac{1}{2}$, $b_2=-\frac{1}{6}$, то $q=\frac{b_2}{b_1}=-\frac{1}{3}$, и по формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$ получим:

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{8}. \ ▲$$

Задача 3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3=-1$, $q=\frac{1}{7}$.

△ Применяя формулу $b_n=b_1q^{n-1}$, при $n=3$ получаем $-1=b_1\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1=b_1\cdot\frac{1}{49}$, откуда $b_1=-49$.

По формуле (5) находим сумму S:

$$S=\frac{-49}{1-\frac{1}{7}}=-57\frac{1}{6}. \ ▲$$

Задача 4. Пользуясь формулой (5), записать бесконечную периодическую десятичную дробь $a=0,(15)=0,151515\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

△ Составим следующую последовательность приближенных значений данной бесконечной дроби:

$$a_1=0,15=\frac{15}{100},$$

$$a_2=0,1515=\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2},$$

$$a_3=0,151515=\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2}+\frac{15}{100^3}.$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a=\frac{15}{100}+\frac{15}{100^2}+\frac{15}{100^3}+\ldots.$$

По формуле (5) получим:

$$a=\frac{\frac{15}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}. \ ▲$$

Упражнения

431. Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$; 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$;
3) $-81, -27, -9, \ldots$; 4) $-16, -8, -4, \ldots$.

432. Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1=40$, $b_2=-20$; 2) $b_7=12$, $b_{11}=\frac{3}{4}$;
3) $b_7=-30$, $b_6=15$; 4) $b_5=-9$, $b_9=-\frac{1}{27}$.

433. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$; 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots$;
3) $-25, -5, -1, \ldots$; 4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \ldots$.

434. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{8}$; 2) $q=-\frac{1}{3}$, $b_1=9$;
3) $q=\frac{1}{3}$, $b_5=\frac{1}{81}$; 4) $q=-\frac{1}{2}$, $b_4=-\frac{1}{8}$.

---

435. Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $b_n=3\cdot(-2)^n$; 2) $b_n=-3\cdot4^n$;
3) $b_n=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$?

436. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) $100, -10, 1, \ldots$.

437. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q=\frac{1}{2}$, $b_5=\frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4=\frac{9}{8}$.

438. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти:

1) b_1, если $q=\frac{1}{3}$; 2) q, если $b_1=75$.

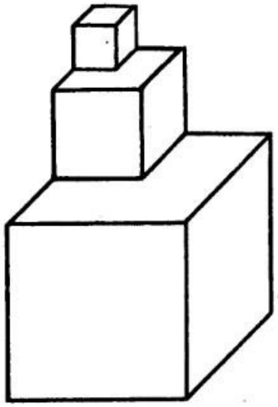


Рис. 51

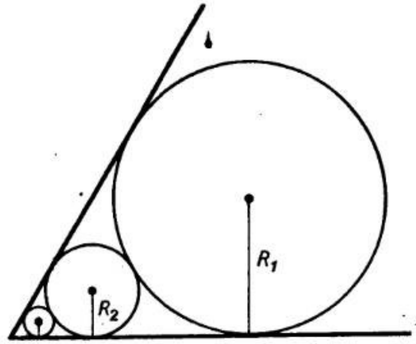


Рис. 52

439*. На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 51). Найти высоту получившейся фигуры.

440.** В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 52). Радиус первой окружности равен R_1. Найти радиусы R_2, R_3, ..., R_n, ... остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1+2(R_2+R_3+...+R_n+...)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

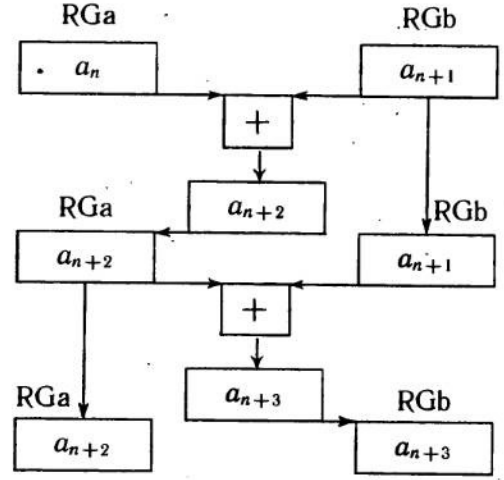
441.** Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:
1) $0,(5)$; 2) $0,(9)$; 3) $0,(12)$; 4) $0,2(3)$.

§ 33*. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧЛЕНОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НА ПРОГРАММИРУЕМОМ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ

Задача 1. Последовательностью Фибоначчи называется последовательность, заданная рекуррентной формулой $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ и условиями $a_1=a_2=1$. Вычислить на МК-54 a_{29}, a_{30}, a_{99}, a_{100}.

△ Формула $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ задает алгоритм вычисления: каждый член последовательности (начиная с третьего) равен сумме двух предыдущих, например $a_3=a_1+a_2$, $a_4=a_2+a_3$. По этому алгоритму программу вычислений можно составить по следующей схеме:

Блок-схема



При вычислении следующих членов последовательности этот процесс повторяется. Повторение некоторого процесса вычислений на МК-54 осуществляется одной из команд

F L0, F L1, F L2, F L3.

Они называются командами организации циклов. После такой команды нужно в программе указать адрес, с которого вычисления должны повторяться. Кроме того, нужно задать число повторений и ввести его в RG0, если выбрана команда F L0, или в RG1, если выбрана команда F L1, и т. п.

Программа 1

Адрес	Клавиши	Код	Адрес	Клавиши	Код
00	П→x b	6L	05	+	10
01	П→x a	6—	06	x→П b	4L
02	+	10	07	F L0	5Г
03	x→П a	4—	08	0 1	01
04	П→x b	6L	09	С/П	50

Для вычислений по этой программе введем в ее МК-54 в режиме «Программирование». Перейдем в автоматический режим нажатием клавиш $\boxed{F}$ $\boxed{АВТ}$.

Для вычисления a_{30} поместим в RGa и RGb начальные значения $a_1=1$ и $a_2=1$.

Так как по программе 1 вычисляются сразу по два члена последовательности при заданных двух первых, то для вычисления a_{30} нужно повторить процесс вычислений $\frac{30-2}{2}=14$ раз. Число 14 помещаем в RG0 и пускаем программу:

$$1\ \boxed{x\to П}\ \boxed{a}\ \boxed{x\to П}\ \boxed{b}$$

$$14\ \boxed{x\to П}\ \boxed{0}\ \boxed{В/О}\ \boxed{С/П}\ \underline{832040}.$$

Для нахождения a_{29} нажмем клавиши $\boxed{П\to x}$ $\boxed{a}$. На экране высветится число 514229.

Теперь в RGa и RGb находятся значения a_{29} и a_{30}. Поэтому для нахождения a_{100} нужно повторить процесс вычислений еще $\frac{100-30}{2}=35$ раз. Поместим число 35 в RG0 и пустим программу:

$$35\ \boxed{x\to П}\ \boxed{0}\ \boxed{В/О}\ \boxed{С/П}\ \underline{3{,}442249\cdot 10^{20}}.$$

Находим a_{99}:

$$\boxed{П\to x}\ \boxed{a}\ \underline{2{,}1892303\cdot 10^{20}}.\ \blacktriangle$$

Задача 2. Вычислить с помощью микрокалькулятора сумму квадратов натуральных чисел

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

для $n=30$ и $n=100$.

$\triangle$ Заметим, что $S_{n+1}=S_n+(n+1)^2$. Поэтому программу для вычисления S_n можно составить по аналогии с программой 1, используя одну из команд организации циклов, например команду $\boxed{F}$ $\boxed{L0}$.

Программа 2

Адрес	Клавиши	Код
00	$\boxed{П\to x}$ $\boxed{a}$	6—
01	$\boxed{1}$	01
02	$\boxed{+}$	10
03	$\boxed{x\to П}$ $\boxed{a}$	4—
04	$\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$	22
05	$\boxed{П\to x}$ $\boxed{b}$	6L

Адрес	Клавиши	Код
06	$\boxed{+}$	10
07	$\boxed{x\to П}$ $\boxed{b}$	4L
08	$\boxed{F}$ $\boxed{L0}$	5Г
09	$\boxed{0}$ $\boxed{0}$	00
10	$\boxed{С/П}$	50

Введем программу 2 в МК-54 в режиме «Программирование». Перейдем в автоматический режим нажатием клавиш $\boxed{F}$ $\boxed{АВТ}$.

Вычислим S_{30}:

$$30\ \boxed{x\to П}\ \boxed{0}\ \boxed{В/О}\ \boxed{С/П}\ \underline{9455}.$$

Теперь в RGa находится S_{30}. Поэтому для вычисления S_{100} нужно число $100-30=70$ послать в RG0 и пустить программу:

$$70\ \boxed{x\to П}\ \boxed{0}\ \boxed{В/О}\ \boxed{С/П}\ \underline{338350}.\ \blacktriangle$$

Упражнения

442. Последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1}=3a_n-1$ и условием $a_1=1$. Вычислить на МК-54 a_{50} и a_{100}.

443. Последовательность задана формулой $x_{n+1}=1+\frac{6}{x_n}$ и условием $x_1=20$. С помощью вычислений на МК-54 показать, что $x_n\to 3$ при $n\to\infty$.

444.** Последовательность задана формулой $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ и условием $x_1=b$, где $a>0$, b — любое положительное число. Известно, что $x_n\to\sqrt{a}$ при $n\to\infty$. Вычислить на МК-54 несколько приближенных значений квадратных корней.

445*. Вычислить при $n=10$; 25; 50 сумму:

1) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$; 2) $\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots\sqrt[3]{n}$.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

446. Вычислить три первых члена последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n=n(n+3)$; 2) $a_n=4^n$;
3) $a_n=5\cdot 2^n$; 4) $a_n=\sin\frac{\pi}{n}$.

447. Вычислить десятый и тридцатый члены последовательности, заданной формулой n-го члена:

1) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$; 2) $a_n=\frac{n+9}{2n-1}$;
3) $a_n=|n-15|-5$; 4) $a_n=10-|n-20|$.

448. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1}=1-0{,}5a_n$ и условием $a_1=2$. Вычислить седьмой член этой последовательности.

449. Найти разность арифметической прогрессии и записать ее четвертый и пятый члены:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ \ldots$; 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots$;
3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ \ldots$; 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6,\ \ldots$.

450. Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n=-2(1-n)$, является арифметической прогрессией.

451. В арифметической прогрессии вычислить:

1) a_5, если $a_1=6$, $d=\frac{1}{2}$;
2) a_7, если $a_1=-3\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{3}$.

452. Найти сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1=-1$, $a_2=1$; 2) $a_1=3$, $a_2=-3$.

453. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1=-2$, $a_n=-60$, $n=10$;
2) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=25\frac{1}{2}$, $n=11$.

454. Найти сумму, если ее слагаемые — последовательные члены арифметической прогрессии:

1) $-38+(-33)+(-28)+\ldots+12$;
2) $-17+(-14)+(-11)+\ldots+13$.

455. Найти знаменатель геометрической прогрессии и записать четвертый и пятый ее члены:

1) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots$; 2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$;
3) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \ldots$; 4) $5,\ -5\sqrt{2},\ 10,\ \ldots$.

456. Записать формулу n-го члена геометрической прогрессии:

1) $-2,\ 4,\ -8,\ \ldots$; 2) $-\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ \ldots$.

457. В геометрической прогрессии найти b_n, если:

1) $b_1=2$, $q=2$, $n=6$;
2) $b_1=\frac{1}{8}$, $q=5$, $n=4$.

458. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1=\frac{1}{2}$, $q=-4$, $n=5$; 2) $b_1=2$, $q=-\frac{1}{2}$, $n=10$;
3) $b_1=10$, $q=1$, $n=6$; 4) $b_1=5$, $q=-1$, $n=9$.

459. Найти сумму n членов геометрической прогрессии:

1) $128,\ 64,\ 32,\ \ldots$, $n=6$;
2) $162,\ 54,\ 18,\ \ldots$, $n=5$;
3) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \ldots$, $n=5$;
4) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$, $n=4$.

460. Доказать, что данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, и найти ее сумму:

1) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$; 2) $-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ \ldots$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1. Вычислить первые три члена последовательности, которая задана формулой n-го члена $a_n=\frac{n^2-n}{2}$.
2. В арифметической прогрессии $a_1=2$, $d=-3$. Найти a_{10} и сумму первых десяти ее членов.
3. В геометрической прогрессии $b_1=4$, $q=\frac{1}{2}$. Найти b_6 и сумму первых шести ее членов.
4. Доказать, что последовательность $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, и найти сумму ее членов.

461. Числовая последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ и условиями $a_1=-1$, $a_2=3$. Вычислить пятый член последовательности.

462. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1=2\frac{1}{2}$ и $a_8=23\frac{1}{2}$.

463. Записать первые 5 членов арифметической прогрессии, если: 1) $a_1=5$, $a_3=15$; 2) $a_3=8$, $a_5=2$.

464. Между числами -10 и 5 вставить число так, чтобы получились 3 последовательных члена арифметической прогрессии.

465. Найти девятнадцатый и первый члены арифметической прогрессии, если:
1) $a_{13}=28$, $a_{20}=38$; 2) $a_{18}=-6$, $a_{20}=6$.

466. При каком значении x являются последовательными членами арифметической прогрессии числа:

1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x-1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$?

467. Показать, что следующие числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии:
1) $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha-\beta)$;
3) $\cos 2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1;
4) $\sin 5\alpha$, $\sin 3\alpha\cos 2\alpha$, $\sin\alpha$.

468. Сколько нужно взять последовательных нечетных натуральных чисел, начиная с 5, чтобы их сумма была равна 252?

469. Найти a_n и d арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_1=40$, $n=20$, $S_{20}=-40$; 2) $a_1=\frac{1}{3}$, $n=16$, $S_{15}=-10\frac{2}{3}$.

470. Для геометрической прогрессии вычислить:
1) b_9, если $b_1=4$ и $q=-1$;
2) b_7, если $b_1=1$ и $q=\sqrt{3}$.

471. Найти пятый член геометрической прогрессии, если:

1) $b_2=\frac{1}{2}$, $b_7=16$; 2) $b_3=-3$, $b_6=-81$;

3) $b_2=4$, $b_4=1$; 4) $b_4=-\frac{1}{5}$, $b_6=-\frac{1}{125}$.

472. Между числами 4 и 9 вставить положительное число так, чтобы получились 3 последовательных члена геометрической прогрессии.

473. Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:
1) $b_n=5^{n+1}$; 2) $b_n=(-4)^{n+2}$;
3) $b_n=\frac{10}{7^n}$; 4) $b_n=-\frac{50}{3^{n+3}}$?

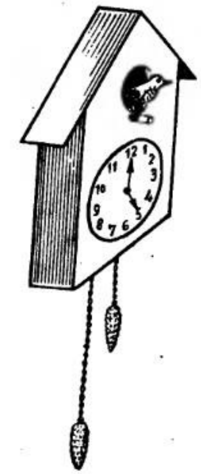
474. Показать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:
1) $b_2=-81$, $S_2=162$;
2) $b_2=33$, $S_2=67$;
3) $b_1+b_3=130$, $b_1-b_3=120$;
4) $b_2+b_4=68$, $b_2-b_4=60$.

475. Отдыхающий, следуя совету врача, загорал в первый день 5 мин, а в каждый последующий день увеличивал время пребывания на солнце на 5 мин. В какой день недели время его пребывания на солнце будет равно 40 мин, если он начал загорать в среду?

476*. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1+a_2+a_3=15$ и $a_1\cdot a_2\cdot a_3=80$.

477*. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_1+a_2+a_3=0$ и $a_1^2+a_2^2+a_3^2=50$.

478*. Настенные русские часы с кукушкой устроены так, что кукушка кукует по одному разу, когда часы показывают половину очередного часа, и каждый час столько раз, каково время от 1 до 12. Сколько раз прокукует кукушка за сутки?



479.** Доказать, что для геометрической прогрессии справедливо равенство $b_n^2=b_{n+k}\,b_{n-k}$. Вычислить b_7, если $b_3\,b_{11}=225$.

480.** Доказать, что для геометрической прогрессии справедливо равенство $b_n\,b_k=b_{n+l}\,b_{k-l}$. Вычислить $b_1\,b_7$, если $b_3\,b_5=72$.

481.** Рост дрожжевых клеток происходит делением каждой клетки на две части. Сколько стало клеток после десятикратного их деления, если первоначально было a клеток?

482.** Из пункта A в пункт B одновременно с постоянными скоростями отправились пешеход и велосипедист. Велосипедист, прибыв в пункт B, повернул назад и встретил пешехода через 1 ч после начала движения из пункта A. После встречи с пешеходом велосипедист снова поехал в пункт B, а по прибытии туда повернул обратно и встретился с пешеходом через $\frac{2}{3}$ ч после первой встречи. После второй встречи велосипедист опять поехал в пункт B, а доехав, повернул обратно и т. д. Найти время, за которое пешеход пройдет путь AB.

483.** Музыкальная октава делится на 12 равных интервалов-полутонов. Частота каждого последующего звука приблизительно в 1,059 раза больше частоты предыдущего. Во сколько раз нота *соль* выше ноты *до* той же октавы (вычисления провести на МК-54)?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ IX КЛАССА

484. Извлечь корень:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, где $a\neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, где $y>0$.

485. Упростить:

1) $(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}):\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0{,}5\sqrt{343}$.

486. Сравнить значения выражений:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ и $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

487. Упростить выражение:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

488. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{9a^2b}$, где $a<0$, $b>0$;
2) $\sqrt{25a^2b^3}$, где $a>0$, $b>0$;
3) $\sqrt{8a^3b^5}$, где $a<0$, $b<0$;
4) $\sqrt{121a^3b^3}$, где $a<0$, $b<0$.

489. Внести множитель под знак корня:

1) $x\sqrt{5}$, где $x\geqslant 0$; 2) $x\sqrt{3}$, где $x<0$;
3) $-a\sqrt{3}$, где $a\geqslant 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, где $a<0$.

490. Вычислить:

1) $\sqrt[3]{1000}\cdot(0{,}0001)^{0{,}25}+(0{,}027)^{\frac{1}{3}}\cdot 7{,}1^0-\left(\frac{10}{13}\right)^{-1}$;

2) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:\frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}}+(6{,}25)^{\frac{1}{2}}:(-4)^{-1}$.

491. Найти значение выражения:

1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a}$ при $a=3$, $b=12$;

2) $\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{n}\cdot\frac{\sqrt{mn}}{m-n}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ при $m=5$, $n=20$.

492. Решить уравнение:

1) $x^{\frac{1}{2}}=2$; 2) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 3) $x^{-3}=8$; 4) $x^{\frac{5}{2}}=0$.

493. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y=-\frac{25}{x}$ точка:

1) $A(\sqrt{5};\ -5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2};\ 5\sqrt{2})$.

494. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y=\sqrt{1-2x}$ точка:

1) $C\left(\frac{1}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $D\left(-\frac{1}{2};\ 1\right)$.

495. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{-x^2-3x+10}$; 2) $y=\sqrt[4]{\frac{x-7}{3-2x}}$; 3) $y=\sqrt[3]{\frac{x+4}{6-x}}$;

4) $y=\sqrt[6]{\frac{2x+15}{6}}$; 5) $y=\sqrt[5]{\frac{x}{0{,}5x+1}}$; 6) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$.

496. Построить график функции:

1) $y=x^2+6x+10$; 2) $y=-x^2-7x-6$; 3) $y=\frac{4}{x}$;

4) $y=-\frac{6}{x}$; 5) $y=\frac{x^3}{2}$; 6) $y=\frac{1}{4}x^4$.

По графику выяснить, на каких промежутках функция возрастает, убывает; является ли функция четной или нечетной.

497. Указать несколько углов поворота, при котором точка $P(1;\ 0)$ перемещается в точку:

1) $A(0;\ 1)$; 2) $B(0;\ -1)$; 3) $C(-1;\ 0)$; 4) $D(1;\ 0)$.

498. Вычислить $\dfrac{2\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-2\cos\frac{\pi}{4}}$.

499. Выяснить, положительно или отрицательно число:

1) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$;

2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

500. Дано: $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=-0{,}28$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.
Вычислить: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$.

501. Разложить на множители:

1) $\sin 2\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) $\cos\alpha-\sin 2\alpha$; 4) $1-\sin 2\alpha-\cos^2\alpha$.

502. Вычислить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{8}{17}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}<0$.

503. Является ли число 107 членом последовательности $a_n=3n^2$?

504. Последовательность задана рекуррентно. Задать ее формулой n-го члена:
1) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+1$; 2) $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n$.

505. Последовательность задана рекуррентной формулой $a_{n+1}=(3n+1)\cdot a_n$. Вычислить первые 4 члена последовательности, если $a_1=1$.

506. Вычислить n-й член арифметической прогрессии и сумму n первых членов, если:
1) $a_1=10$, $d=6$, $n=23$;

2) $a_1=42$, $d=\frac{1}{2}$, $n=12$;

3) $a_1=0$, $d=-2$, $n=7$;

4) $a_1=\frac{1}{3}$, $d=\frac{2}{3}$, $n=18$.

507. Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если $a_1=2$, $a_n=120$ и $n=20$.

508. Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена $a_n=\frac{1-2n}{3}$, является арифметической прогрессией.

509. Для геометрической прогрессии найти:
1) b_4, если $b_1=5$ и $q=-10$;
2) b_1, если $b_4=-5000$ и $q=-10$.

510. Вычислить n-й член геометрической прогрессии и сумму n первых членов, если:
1) $b_1=3$, $q=2$, $n=5$;
2) $b_1=1$, $q=5$, $n=4$;

3) $b_1=8$, $q=\frac{1}{4}$, $n=4$;

4) $b_1=1$, $q=-3$, $n=5$.

511. Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если $b_1=\frac{1}{4}$, $q=2$, $n=6$.

512. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \ldots$; 2) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \ldots$;

3) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \ldots$; 4) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$;

5) $\sqrt{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ldots$; 6) $-\sqrt{5},\ -1,\ -\frac{\sqrt{5}}{5},\ \ldots$.

513. Используя микрокалькулятор, вычислить первую космическую скорость у поверхности Луны по формуле $v=\sqrt{aR}$, где ускорение силы тяжести на Луне $a\approx 1{,}623$ м/с^2 и радиус Луны $R\approx 1737$ км.

514. С помощью микрокалькулятора найти длину катета прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 2,45 м, а другой катет 1,78 м.

515. Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{20a^4b}$, где $a<0$, $b>0$; 2) $\sqrt[3]{8a^3b^4}$, где $a<0$, $b>0$;

3) $\sqrt{(a-1)^2}$, где $a<1$; 4) $\sqrt{(3+a)^2}$, где $a>-3$.

516. Упростить выражение:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $a>b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, где $b>a$;

3) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x>0$; 4) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$, где $x<0$.

517. Какое из равенств верно:
$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ или $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$?

518. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$.

519. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt[4]{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}}-\dfrac{a^2+4}{a^2-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$;

3) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

520. Выяснить, возрастает или убывает функция $y=\frac{4}{x^2}$ на промежутке $x>0$.

521. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{(x-2)(x-3)}$; 2) $y=\sqrt{x^2-6x}$;

3) $y=\dfrac{1}{x^2-2\sqrt{2}x+2}$; 4) $y=\dfrac{3}{2\sqrt{3}x-x^2+3}$;

5) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)x}{x+5}}$; 6) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2-2x}}$.

522. Построить график функции и по графику установить ее основные свойства:

1) $y=\dfrac{3}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{1}{2-x}$; 3) $y=\dfrac{x+2}{x}$;

4) $y=\dfrac{3-x}{x}$; 5) $y=\sqrt{x-3}$; 6) $y=\sqrt[3]{2-x}$.

523. Решить уравнение:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$;
4) $\sqrt{3-x}=\sqrt{1+3x}$; 5) $\sqrt[4]{x^2+12}=x$; 6) $\sqrt[3]{6x-x^2}=x$.

524. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 4) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

525. Упростить выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin(\pi+\alpha)\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)(\cos(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha-2\pi))}$;

2) $\sin(x-2\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\operatorname{tg}(\pi-x)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)$.

526. Решить уравнение:

1) $1-\cos x-2\sin\frac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos 2x+2\cos x=0$.

527. Доказать тождество:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$.

528. Доказать тождество:

1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

529. Внутренние углы треугольника являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, у которой разность равна $\frac{\pi}{6}$. Найти эти углы.

530. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

531. В арифметической прогрессии $a_1+a_5=\frac{5}{3}$; $a_3a_4=\frac{65}{72}$. Найти сумму семнадцати первых членов прогрессии.

532. Найти первые 4 члена геометрической прогрессии, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

533. В геометрической прогрессии $q=3$, $S_6=1820$. Найти b_1 и b_5.

534. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{8}{5}$, второй член равен $-\frac{1}{2}$. Найти третий член.

535. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 39. Если из первого числа вычесть 4, из второго 5, а из третьего 2, то полученные числа будут тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

536. С помощью микрокалькулятора по формуле $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ найти сопротивление R участка цепи, состоящего из трех параллельно соединенных сопротивлений $R_1=24$ Ом, $R_2=12$ Ом, $R_3=32$ Ом.

537. Вычислить на МК-54 с точностью до 0,01 значения функции $y(x)$ при $x=0$; 0,2; 0,4; 0,6; ...; 4 и построить график этой функции на отрезке [0; 4], если:

1) $y(x)=x^3-6x^2+11x-4$;

2) $y(x)=x^4-9x^3+26x^2-24x$;

3) $y(x)=\dfrac{x^2-4x+13}{x+1}$;

4) $y(x)=\sqrt{9+4x-x^2}$.

Упростить выражение **(538—539)**.

538*. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

539*. 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}-1)^2-\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}$, где $0<a\leqslant 1$;

2) $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

540*. Построить график функции:

1) $y=\frac{1}{|x-1|}$; 2) $y=\frac{3}{|x|}-1$;

3) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 4) $y=x^2-3|x|-4$.

541*. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2{,}4$.

542*. Доказать тождество:

1) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

543.** Найти четыре числа, обладающие следующими тремя свойствами:

а) сумма первого и четвертого чисел равна 11, а сумма второго и третьего равна 2;

б) первое, второе и третье числа являются последовательными членами арифметической прогрессии;

в) второе, третье и четвертое числа являются последовательными членами геометрической прогрессии.

544.** Пусть S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии. Доказать, что:

1) $S_{n+3}=3S_{n+2}-3S_{n+1}+S_n$; 2) $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$.

545.** Составить программу для вычисления значений функции

$$y=\sqrt{x^3-2x^2-5x+6}+\sqrt{x^2+4x+5}$$

и вычислить y с точностью до 0,001 при $x=-10;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 25;\ 50$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ VII—IX КЛАССОВ

1. Числа и алгебраические преобразования

Вычислить **(546—547)**.

546. 1) $(5{,}4\cdot 1{,}2-3{,}7:0{,}8)(3{,}14+0{,}86):0{,}25$;

2) $(20{,}88:18+45:0{,}36):(19{,}59+11{,}95)$;

3) $\left(5\frac{8}{9}-3\frac{11}{12}\right)\cdot\frac{18}{71}-7\frac{5}{6}:15\frac{2}{3}$;

4) $\frac{7}{36}\cdot 9+8\cdot\frac{11}{32}+\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18}$.

547. 1) $\left(3\frac{4}{25}+20{,}24\right)\cdot 2{,}15+\left(5{,}1625-2\frac{3}{16}\right)\cdot\frac{2}{5}$;

2) $0{,}364:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0{,}125+2{,}5\cdot 0{,}8$;

3) $\frac{\left(3{,}25-\frac{3}{4}\right)\cdot 6{,}25}{(2-0{,}75):\frac{4}{5}}+\frac{\left(5{,}5-3\frac{3}{4}\right):5}{(-2-0{,}8)\cdot 1\frac{3}{4}}$;

4) $\frac{\left(2\frac{3}{20}+1\frac{5}{16}\right):27{,}7}{\left(1{,}75\cdot\frac{2}{3}-1{,}75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}$.

548. Найти неизвестный член пропорции:

1) $x:7=9:3$; 2) $125:25=35:x$;

3) $144:x=36:3$; 4) $9\frac{1}{2}:14\frac{1}{4}=x:0{,}75$;

5) $\frac{x}{6\frac{5}{6}}=\frac{3{,}9}{4{,}1}$; 6) $0{,}3:x=\frac{4}{9}:3\frac{1}{3}$.

549. Найти p процентов от числа a, если:

1) $a=400$, $p=27$; 2) $a=2{,}5$, $p=120$;

3) $a=2500$, $p=0{,}2$; 4) $a=4{,}5$, $p=2{,}5$.

550. Найти число, если p процентов от него равны b:

1) $p=23$, $b=690$; 2) $p=3{,}2$, $b=9{,}6$;

3) $p=125$, $b=3{,}75$; 4) $p=0{,}6$, $b=21{,}6$.

551. Какой процент составляет число a от числа b:

1) $a=24,\ b=120$; 2) $a=4{,}5,\ b=90$;
3) $a=650,\ b=13$; 4) $a=0{,}08,\ b=0{,}48$?

552. Выполнить действия:

1) $(-3a^3b)(-2ab^2)(-5a^3b^7)$; 2) $35a^5b^4c:(7ab^3c)$;

3) $(-5ab^4c)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}a^5bc^2\right)^2$;

4) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right)^3:\left(-\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^2$.

553. Записать выражение в виде многочлена стандартного вида:

1) $(x-6)(5+x)-x^2(x^2-5x+1)$;
2) $(x+7)(5-x)-x^2(x^3+2x-1)$;
3) $(b-3a)^2+8\left(a-\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)$;
4) $(3a+6)^2+4\left(b-\frac{1}{2}a\right)\left(b+\frac{1}{2}a\right)$.

554. Найти числовое значение выражения:

1) a^3-ba^2 при $a=-0{,}6,\ b=9{,}4$;
2) ab^2+b^3 при $a=10{,}7,\ b=-0{,}7$;
3) $(m-5)(2m-3)-2m(m-4)$ при $m=\frac{3}{5}$;
4) $(3a-2)(a-4)-3a(a-2)$ при $a=\frac{3}{4}$.

555. Выполнить действия:

1) $(-15x^5+10x^4-25x^3):(-5x^2)-3(x-3)(x^2+3x+9)$;
2) $(9a^2b^3-12a^4b^4):3a^2b-b^2\cdot(2+3a^2b)$.

Разложить на множители (**556—560**).

556. 1) $1-\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{b^2}{9}-1$; 3) a^2-b^4; 4) b^4-9.

557. 1) $1-a+\frac{a^2}{4}$; 2) $0{,}25b^2+b+1$;
3) $49a^2-14a+1$; 4) $1+18b+81b^2$.

558. 1) $y^2-xy-y+x$; 2) $a^2-ax-x+a$;
3) $3a^2+3ab+a+b$; 4) $5a^2-5ax-7a+7x$.

559. 1) $6m^4n+12m^3n+3m^2n$; 2) $2a^5b-4a^4b+2a^3b$;
3) $a^2-2ab+b^2-y^2$; 4) $a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2$.

560. 1) $x^2+3x-28$; 2) $2x^2-12x+18$;
3) $2x^2-5x+3$; 4) x^2+x-2.

561. Сократить дробь:

1) $\frac{4-b^2}{4b+2b^2}$; 2) $\frac{b^2-9}{3b^2-9b}$; 3) $\frac{5a^2-10ab}{ab-2b^2}$;

4) $\frac{3xy-21y^2}{4x^2-28xy}$; 5) $\frac{x^2-x-12}{x^2-16}$; 6) $\frac{x^2-x-20}{x^2-25}$;

7) $\frac{3x^2-2x-8}{2x^2-3x-2}$; 8) $\frac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+6}$.

Упростить выражение (**562—566**).

562. 1) $\frac{a^5}{6c^3}:\frac{a^2}{4c^3}$; 2) $\frac{9a^2}{m^3}:\frac{6a^2}{m^5}$; 3) $\left(\frac{4a}{b^3}\right)^2\cdot\frac{b^4}{8a}$;

4) $\left(\frac{3c}{k^2}\right)^3:\frac{9c}{k^3}$; 5) $\frac{5a}{28b^2}\cdot 8ab\cdot\frac{7b}{5a^3}$; 6) $\left(-\frac{25a^4b^3}{14c^2}\right)\cdot\left(\frac{-21c}{10a^3b^3}\right)$;

7) $\frac{4x(x-1)+1}{4-x^2}:\frac{1-2x}{x-2}$; 8) $\frac{x^2-4(x-1)}{x-1}:\frac{2-x}{1-x^2}$.

563. 1) $\frac{a-3}{a+3}-\frac{a^2+27}{a^2-9}$; 2) $\frac{a^2+12}{a^2-4}-\frac{a+3}{a-2}$;

3) $\frac{a+1}{a^2-ax}-\frac{x+1}{a^2-x^2}$; 4) $\frac{3-a}{ab-a^2}-\frac{3-b}{b^2-a^2}$.

564. 1) $\frac{4}{a-b}+\frac{9}{a+b}-\frac{8a}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{42}{4a^2-9}+\frac{8}{2a+3}+\frac{7}{3-2a}$;

3) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)ab$; 4) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}\right)ab$.

565. 1) $\frac{1}{(x+3)^2}:\frac{x}{x^2-9}-\frac{x-9}{x^2-9}$; 2) $\frac{a+6}{a^2-4}-\frac{1}{a^2-4}\cdot\frac{(a+2)^2}{a}$;

3) $a+b-\frac{a^2}{a-1}$; 4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

566. 1) $\frac{b^2}{a^2-2ab}:\left(\frac{2ab}{a^2-4b^2}-\frac{b}{a+2b}\right)$;

2) $\left(\frac{2xy}{x^2-9y^2}-\frac{y}{x-3y}\right):\frac{y^2}{x^2+3xy}$;

3) $\left(\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{y}{2x-2y}\right):\frac{3y}{x^2-y^2}$;

4) $\left(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}\right)\cdot\frac{10a-5}{4a}$.

567. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}-\frac{a+3}{a+1}$ при $a=-9$;

2) $\frac{b+5}{b+2}-\frac{3}{b^2-4}-\frac{b+1}{b-2}$ при $b=-8$;

3) $\frac{a-2}{a-3}:\left(\frac{a^2-6a+10}{a^2-9}+\frac{2}{a+3}\right)$ при $a=-1\frac{1}{2}$;

4) $\frac{b+1}{b-4}:\left(\frac{b^2+9}{b^2-16}+\frac{2}{b+4}\right)$ при $b=4\frac{1}{3}$.

568. Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-3^{-2}:3^{-5}$; 2) $(-6)^0\cdot 81^{-2}\cdot 27^3$.

569. Сократить дробь:

1) $\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}$; 2) $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$; 3) $\frac{y-9y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}+3}$; 4) $\frac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x-1}$.

570. Вычислить:

1) $(6-3\sqrt{5})(6+3\sqrt{5})$; 2) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$;
3) $(3\sqrt{5}-2\sqrt{20})\sqrt{5}$; 4) $(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2$.

571. Упростить выражение:

1) $4\sqrt{3}-\sqrt{3}(\sqrt{16}-\sqrt{3})$; 2) $6\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{36})$;
3) $\sqrt{48}-\sqrt{27}-\frac{1}{2}\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{50}-\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$;
5) $(\sqrt{2}+3)^2-3\sqrt{8}$; 6) $(2-\sqrt{3})^2+2\sqrt{12}$.

572. Вычислить:

1) $(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}})^2$; 2) $(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})^2$;
3) $\frac{1}{5-\sqrt{5}}-\frac{1}{5+\sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}$.

573. Упростить:

1) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1}{5-\sqrt{3}}-\frac{1}{5+\sqrt{3}}$;
3) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}-\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

574. Представить число в стандартном виде:

1) $0{,}00051$; 2) $\frac{1}{500}$; 3) 250000; 4) $\frac{3}{2500}$.

575. Вычислить:

1) $\dfrac{(0{,}25)^5\cdot 8^6}{2^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}$; 2) $\dfrac{16\cdot 4^{-2}+4\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{4+\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

576. Вычислить:

1) $\sqrt{8{,}75^3+8{,}75^2\cdot 7{,}25}$; 2) $\dfrac{0{,}625\cdot 6{,}75^2-3{,}25^2\cdot 0{,}625}{\sqrt{3{,}5^2+7\cdot 2{,}75+2{,}75^2}}$.

577. Упростить при $x>0$, $y>0$:

1) $\sqrt{\frac{4}{81}x^6y^{20}}$; 2) $\sqrt{x^4y^{18}}$; 3) $\sqrt[3]{27x^3y^6}$; 4) $\sqrt[5]{x^5y^{10}}$.

578. Упростить выражение:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a+b}$;

2) $\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}+a}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-x}\right)$;

4) $\dfrac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\dfrac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1}-\dfrac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right)$.

---

579. Лекарственное растение ромашка при сушке теряет 84% массы. Сколько ромашки должны собрать школьники, если они обязались высушить и сдать 16 кг этого растения?

580. Завод дважды в течение года увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод выпускал 1200 изделий, а в конце года стал выпускать 1452 изделия.

581*. Два сплава состоят из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в обоих сплавах одинаково. Из 300 кг первого сплава и 500 кг второго получен новый сплав, содержащий 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

582. Автомобиль «Москвич 2140» в соответствии с паспортными данными расходует 8,8 л бензина АИ-93 на 100 км пути при скорости 80 км/ч; 1 л бензина стоит 40 к. При движении со скоростями выше рекомендованных расход топлива в среднем повышается на 25%. На сколько дороже окажется поездка на расстояние 500 км по автостраде при езде с повышенными скоростями?

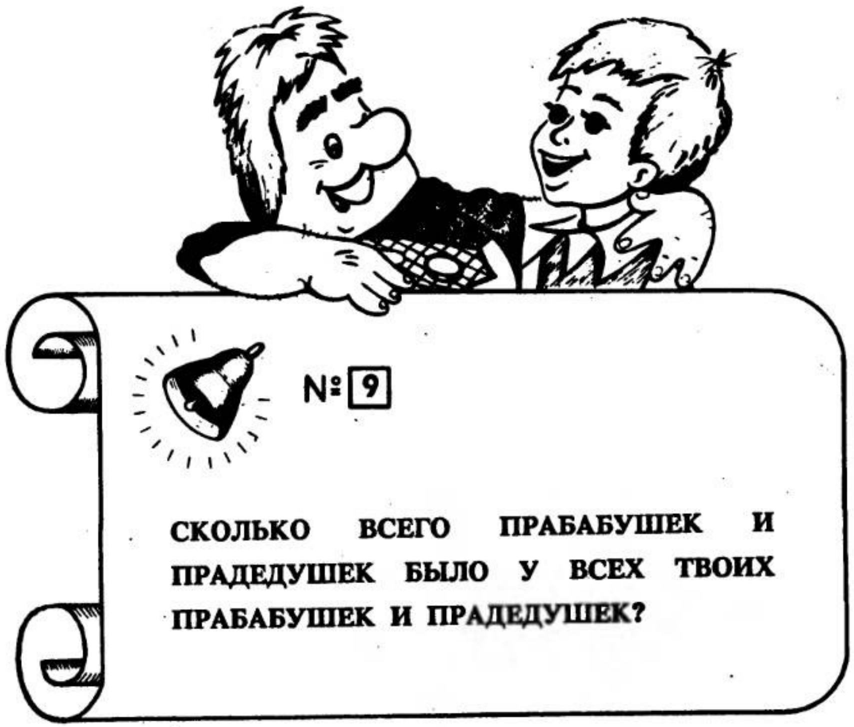
583. Записать выражение в виде многочлена стандартного вида:

1) $(5a^2+3a-1)(2a^2-4a+2)$;
2) $(3m^2-6m+7)(-2m^2+5m-1)$;
3) $\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{3}{4}n\right)^2$;
4) $(a^2b-3b^2)^2$.

Разложить на множители **(584—586)**.

584. 1) $4x^8-81y^4$; 2) $16a^6-25b^8$;
3) $(x+y)^2-z^2$; 4) $m^2-(n-k)^2$;
5) $25x^4y^6-\frac{9}{16}a^6b^6$; 6) $\frac{1}{25}a^6b^2-\frac{4}{49}c^8$;
7) $(x+y)^2-16(x-y)^2$; 8) $(a+b)^2+4(a+b)+4$.

585. 1) $4a^{10}b^8+4a^5b^4+1$; 2) $4a^2-12ab^2+9b^4$;
3) $16a^4c^6-8a^2c^3+1$; 4) $25b^4+40ab^2+16a^2$.



586. 1) $8a^3b+3a^3by+3a^2bxy+8a^2bx$;
2) $25x^3-15x^2y-20xy^2+12y^3$;
3) $5a^3c+10a^2-6bc-3abc^2$;
4) $8xy^3-24y^2-7axy+21a$.

587. Упростить выражение:

1) $\left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(1+\frac{1}{a+b}\right)^{-1}$;

2) $\left(m-\frac{2}{m+n}\right)\left(m+\frac{2}{m+n}\right)+\frac{4}{(m+n)^2}$;

3) $\left(a-b+\frac{4ab}{a-b}\right):\left(a+b-\frac{4ab}{a+b}\right)$;

4) $\left(a-2b-\frac{a^2-b^2}{a+b}\right):\left(2a-b+\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)$.

588. Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\frac{a+2}{a-5}:\left(\frac{a^2+a+19}{a^2-25}+\frac{3}{a+5}\right)$ при $a=-1\frac{1}{2}$;

2) $\frac{a-3}{2+a}:\left(\frac{a^2-3a+3}{4-a^2}+\frac{3}{2+a}\right)$ при $a=\frac{1}{2}$.

589. Вычислить:

1) $(5\cdot 10^{-2}-3\cdot 5^{-1}):10^{-2}$;

2) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}:\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$;

3) $3\cdot 10^{-1}\left(8^0-\frac{1}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$;

4) $\frac{3\cdot 2^{-1}-2\cdot 3^{-1}}{\left(1\frac{1}{5}\right)^{-1}}$; 5) $\frac{\left(3\frac{1}{7}\right)^{-1}+\left(4\frac{2}{5}\right)^{-1}}{11^{-1}}$;

6) $\frac{4^{-1}\cdot 3^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$; 7) $\sqrt{5{,}8^2-4{,}2^2}$; 8) $\sqrt{6{,}8^2-3{,}2^2}$.

590. Сократить дробь:

1) $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$; 2) $\frac{y^{-1}-x^{-1}}{(x^3-y^3)(xy)^{-1}}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{a^{-1}+b^{-1}}$; 4) $\frac{m^{\frac{3}{2}}-m}{m-1}$.

591. Вычислить:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt{5}$;

3) $\sqrt{12(\sqrt{3}-2)^2}-4\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

592. Упростить при $x>0$, $y<0$:

1) $\frac{3}{5}\sqrt{2{,}25x^{10}y^6}$; 2) $0{,}11\sqrt{\frac{4}{121}x^{12}y^2}$.

593. Упростить выражение и найти его значение:

1) $\frac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{5}}+n^{\frac{1}{3}}}{m+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{2}{15}}}$ при $m=0{,}04$, $n=243$;

2) $\frac{m^{\frac{1}{2}}n^{-2}-n^{-\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}}$ при $m=81$, $n=0{,}1$;

3) $\left(1+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ при $a=5$, $x=4$;

4) $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ при $a=3$, $x=\sqrt{5}$.

6 Заказ 1206

Упростить **(594—595)**.

594. 1) $6n\cdot\sqrt{\frac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}$; 2) $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}$;

3) $\frac{m+n}{m+2\sqrt{mn}+n}:\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}-\frac{2\sqrt{mn}}{m-n}\right)$;

4) $\left(\frac{4}{4-a}+\frac{2-a^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}+a}\right):\frac{16+8a+a^2}{a^{\frac{3}{2}}}$.

595. 1) $\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$; 2) $\left(\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}$;

3) $\left(\frac{1-a}{1-\sqrt{a}}+a\right)\cdot(1-\sqrt{a})$; 4) $\left(m+\frac{1-m}{1+\sqrt{m}}\right)\cdot(1+\sqrt{m})$.

2. Уравнения

Решить уравнение **(596—601)**.

596. 1) $8(3x-7)-3(8-x)=5(2x+1)$;
2) $10(2x-1)-9(x-2)+4(5x+8)=71$;
3) $3+x(5-x)=(2-x)(x+3)$;
4) $7-x(3+x)=(x+2)(5-x)$.

597. 1) $\frac{5x-7}{6}-\frac{x+2}{7}=2$; 2) $\frac{4x-8}{3}-\frac{3+2x}{5}=8$;

3) $\frac{14-x}{4}+\frac{3x+1}{5}=3$; 4) $\frac{2x-5}{4}-\frac{6x+1}{8}=2$.

598. 1) $\frac{4}{3(x+2)}=\frac{9}{8x+11}$; 2) $\frac{1}{3(x-1)}=\frac{3}{2(x+6)}$;

3) $\frac{x}{5-x}+\frac{5-x}{5+x}=-2$; 4) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x}{x+3}=2$.

599. 1) $x(x-1)=0$; 2) $(x+2)(x-3)=0$;

3) $x\left(2x-\frac{1}{2}\right)(4+3x)=0$; 4) $\frac{(x-5)(x+1)}{x^2+1}=0$.

600. 1) $x^2+3x=0$; 2) $5x-x^2=0$; 3) $4x+5x^2=0$;

4) $-6x^2-x=0$; 5) $2x^2-32=0$; 6) $2-\frac{x^2}{2}=0$;

7) $\left(\frac{x}{2}\right)^2-1=0$; 8) $x^2-8=0$.

601. 1) $2x^2+x-10=0$; 2) $2x^2-x-3=0$;
3) $7x^2-13x-2=0$; 4) $4x^2-17x-15=0$.

602. Решить уравнение (z — комплексное число):
1) $z^2+7z+13=0$; 2) $z^2-8z+18=0$;
3) $3z^2-2z+2=0$; 4) $5z^2-4z+1=0$.

Решить уравнение **(603—608)**.

603. 1) $(3x+4)^2+3(x-2)=46$;
2) $2(1-1{,}5x)+2(x-2)^2=1$;
3) $(5x-3)(x+2)-(x+4)^2=0$;
4) $x(11-6x)-20+(2x-5)^2=0$.

604. 1) $|x|=\frac{1}{2}$; 2) $|x-1|=4$; 3) $|3-x|=2$;

4) $|3x|-3x=6$; 5) $|2{,}5-x|+3=5$; 6) $|3{,}7+x|-2=6$.

605. 1) $\frac{7}{2x+9}-6=5x$; 2) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=4$;

3) $\frac{x}{x^2-16}+\frac{x-1}{x+4}=1$; 4) $\frac{12}{(x+6)^2}+\frac{x}{x+6}=1$.

606. 1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $x^4-37x^2+36=0$;
3) $2x^4-5x^2-12=0$; 4) $x^4-3x^2-4=0$.

607. 1) $\sqrt{x+1}-5=0$; 2) $6-\sqrt{x+3}=0$;

3) $\sqrt{5-x}-1=x$; 4) $3+\sqrt{x-5}=x-4$;

5) $7x-\sqrt{2x+2}=5x$; 6) $12x-\sqrt{5x-4}=11x$.

608. 1) $2^{x-1}=64$; 2) $3^{1-x}=27$; 3) $3^{x-8}=27$; 4) $7^{2x-1}=49$.

609. Решить графически уравнение:

1) $x^3=3x+2$; 2) $x^3=-x-2$; 3) $\frac{5}{x}=6-x$;

4) $x^{-1}=2x-1$; 5) $\sqrt{x}=\frac{x+3}{4}$; 6) $\sqrt{x}=6-x$.

Решить систему уравнений **(610—612)**.

610. 1) $\begin{cases}x+y=12,\\ x-y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=10,\\ y-x=4;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x+3y=11,\\ 2x-y=7;\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x+5y=21,\\ 6x+5y=27;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}3x+5y=4,\\ 2x-y=7;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}4x-3y=1,\\ 3x+y=-9.\end{cases}$

611. 1) $\begin{cases}\frac{2x}{3}=\frac{3y}{4}-2,\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{3}{7}x-\frac{2}{5}y=2,\\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{6}y=12\frac{1}{6};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{1}{2}(x+11)=\frac{1}{3}(y+13)+2,\\ 5x=3y+8;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{1}{4}(x+3y)=\frac{1}{3}(x+2y),\\ x+5y=12.\end{cases}$

612. 1) $\begin{cases}x-y=7,\\ xy=18;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=2,\\ xy=15;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=2,\\ xy=-15;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+y=-5,\\ xy=-36;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ xy=6;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^2+y^2=41,\\ xy=20.\end{cases}$

Решить уравнение **(613—620).**

613. 1) $\frac{4(7-8x)}{5}+3(4x+1)=\frac{12x+17}{2}$;

2) $2(5x-24)-\frac{x+16}{11}=\frac{7x-2}{4}$;

3) $\frac{2x+3}{5}+\left(7x-\frac{3-x}{2}\right)=\frac{7x+11}{3}+1$;

4) $\frac{6x+5}{2}-\left(2x+\frac{2x+1}{2}\right)=\frac{10x+3}{4}$.

614. 1) $2x=1-x\sqrt{3}$; 2) $x\sqrt{5}-12=x$;

3) $x\sqrt{5}+3=x\sqrt{3}+5$; 4) $2x\sqrt{6}-\sqrt{3}=2\sqrt{6}+x\sqrt{3}$.

615. 1) $\sqrt{x^2}=1$; 2) $\sqrt{(x-1)^2}=1$;

3) $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$; 4) $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$.

616. 1) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(3+x)}{4-x^2}$;

2) $1+\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x^2-1}=\frac{3}{x+1}$;

3) $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$;

4) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}-\frac{x-1}{x-2}$.

617. 1) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+9}=1$; 2) $\sqrt{21+x}-\sqrt{28-3x}=1$;

3) $\sqrt{5x+3}=\frac{3x+1}{\sqrt{5x-3}}$; 4) $\sqrt{2x-3}=\frac{9}{\sqrt{5x+12}}$;

5) $\sqrt{9-5x}+\frac{4}{\sqrt{3+x}}=2\sqrt{3+x}$;

6) $\frac{2}{\sqrt{3x+1}}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x+9}$.

618. 1) $4^{2x+1}=64$; 2) $2^{x^2}=128$; 3) $3^x=\left(\frac{1}{3}\right)^2$; 4) $5^{7-3x}=1$.

619. 1) $\sin x+1=0$; 2) $1-\cos x=0$;

3) $\cos x+\cos 4\pi=0$; 4) $\sin x-\sin\frac{\pi}{2}=0$.

620. 1) $\cos 2x+2\sin^2 x+\cos(-x)=0$;

2) $2\cos^2 x-\cos 2x+\sin(-x)=0$.

621*. Решить уравнение относительно x:

1) $x^2-5ax-6a^2=0$; 2) $x^2-7ax+10a^2=0$;

3) $x^2-6ax+9a^2-b^2=0$; 4) $x^2-4ax-b^2+4a^2=0$.

622*. Решить уравнение ($a\neq 0$, $b\neq 0$):

1) $x^2-ax=0$; 2) $ax^2-x=0$; 3) $ax^2+bx=0$;

4) $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{b}=0$; 5) $\frac{ax^2}{b}+x=0$; 6) $\frac{ax^2}{b}-\frac{x}{a}=0$.

Решить систему уравнений **(623—624).**

623. 1) $\begin{cases}2y-3x=1,\\3x+5y=34;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}10x-3y=38,\\6x+5y=50;\end{cases}$

3) $\begin{cases}6x-15y=12,\\4x-9y=10;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}14y-9x=5,\\12x+21y=33.\end{cases}$

624.** 1) $\begin{cases}x^2-5y^2=-1,\\3xy+7y^2=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3y^2-2xy=160,\\y^2-3xy-2x^2=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2},\\\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3},\\\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{4}{3}.\end{cases}$

625. Показать, что система не имеет решений:

1) $\begin{cases}x-y=3,\\-2x+2y=-10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-2y=7,\\-9x+6y=21.\end{cases}$

3. Неравенства

Решить неравенство **(626—627).**

626. 1) $3x-7<4(x+2)$; 2) $7-6x\geqslant\frac{1}{3}(9x-1)$;

3) $1{,}5(x-4)+2{,}5x<x+6$; 4) $1{,}4(x+5)+1{,}6x>9+x$.

627. 1) $\frac{x-1}{3}-\frac{x-4}{2}\leqslant 1$; 2) $\frac{x+4}{5}-\frac{x-1}{4}\geqslant 1$;

3) $\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{3}\geqslant 7$; 4) $\frac{2x-5}{4}-\frac{3-2x}{5}<1$;

5) $x+\frac{x-3}{6}>3$; 6) $x+\frac{x+2}{4}<3$.

628. Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases}x+5\geqslant 5x-3;\\2x-5<0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3\geqslant 0,\\x-7<4x-1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x-1\leqslant 7+x,\\-0{,}2x>1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x-2\geqslant 10-x,\\-0{,}5x<1.\end{cases}$

629. Найти все решения неравенства, являющиеся натуральными числами:

1) $\frac{x-2}{6}-x\geqslant\frac{x-8}{3}$; 2) $\frac{x+5}{2}>\frac{x-5}{4}+x$.

630. Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases}2(x+1)<8-x,\\-5x-9<6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3(x-1)>x-7,\\-4x+7>-5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3y+\frac{2y-13}{11}>2,\\\frac{y}{6}-\frac{3y-20}{9}<-\frac{2}{3}(y-7);\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{y-1}{2}-\frac{y-3}{4}\geqslant\frac{y-2}{3}-y,\\1-y\geqslant\frac{1}{2}y-4.\end{cases}$

631. Найти все решения системы неравенств, являющиеся целыми отрицательными числами:

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{4}+2\frac{1}{2}>\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+2}{6}, \\ \frac{2x-5}{3}-\frac{3x-1}{2}<\frac{3-x}{5}-\frac{2x-1}{4}. \end{cases}$$

632. Решить квадратное неравенство:

1) $x^2-3x+2>0$; 2) $x^2-2x-3\leqslant 0$;
3) $x^2-7x+12>0$; 4) $-x^2+3x-1\geqslant 0$;
5) $3+4x+8x^2<0$; 6) $x-x^2-1\geqslant 0$;
7) $2x^2-x-1<0$; 8) $3x^2+x-4>0$.

633. Решить неравенство:

1) $|x|>\frac{1}{5}$; 2) $|x-1|<2\frac{1}{3}$; 3) $|x-1|>3$; 4) $|x-1|\leqslant 2$.

634. Решить методом интервалов неравенство:

1) $(x-1)(x+3)>0$; 2) $(x+4)(x-2)<0$;
3) $(x+1{,}5)(x-2)x>0$; 4) $x(x-8)(x-7)>0$;
5) $(x-1)\left(x^2-\frac{1}{9}\right)\geqslant 0$; 6) $(x+3)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\leqslant 0$.

635. Сравнить числа:

1) $5\sqrt{2}$ и 7; 2) 9 и $4\sqrt{5}$; 3) $10\sqrt{11}$ и $11\sqrt{10}$;
4) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$; 5) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$; 6) $2\sqrt[6]{3}$ и $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$.

---

636. Найти наибольшее целое отрицательное число, являющееся решением системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x}{8}-\frac{x}{4}+\frac{x}{2}>x+5, \\ \frac{1}{8}(x+2)<-\frac{1}{7}(x-2). \end{cases}$$

637. Найти наибольшее натуральное число, являющееся решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 5x-\frac{3-2x}{2}>\frac{7x-5}{2}+x, \\ \frac{7x-2}{3}-2x<5-\frac{x-2}{4}. \end{cases}$$

Решить неравенство **(638—641)**.

638. 1) $\left|\frac{x}{2}+3\right|>2{,}5$; 2) $|3x-2|\geqslant 10$;
3) $|5x-3|<7$; 4) $|2+5x|\leqslant 0$.

639. 1) $\sqrt{x^2}<1$; 2) $\sqrt{x^2}>1$;
3) $\sqrt{(x-1)^2}<1$; 4) $\sqrt{(x-1)^2}>1$.

640. 1) $x^5>-32$; 2) $x^7<128$; 3) $x^4>81$; 4) $x^6<64$;
5) $x^{-3}>27$; 6) $x^{-5}<-1$; 7) $x^{-8}>1$; 8) $x^{-10}<1$.

641. 1) $\frac{(x+3)(x-7)}{2-x}>0$; 2) $\frac{(x+1)(4-x)}{x+5}<0$;
3) $\frac{x^2-x-12}{x+5}\geqslant 0$; 4) $\frac{x^2-7x+12}{x-1}<0$;
5) $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x-4)(x+5)}<0$; 6) $\frac{(x+7)(x-3)}{(8-x)(x+6)(x-1)}<0$.

642*. Доказать неравенство:

1) $a^2-ab+b^2\geqslant ab$; 2) $1+\frac{b}{2}\geqslant\sqrt{2b}$, если $b\geqslant 0$;
3) $a^2+a^{-2}\geqslant 2$, если $a\neq 0$; 4) $a^3+a^{-3}\geqslant 2$, если $a>0$.

4. Задачи на составление уравнений

643. Сумма двух чисел равна 120, а их разность равна 5. Найти эти числа.

644. На путь по течению реки катер затратил 3 ч, а на обратный путь 4,5 ч. Какова скорость течения реки, если скорость катера относительно воды 25 км/ч?

645. Моторная лодка прошла путь от A до B по течению реки за 2,4 ч, а обратный путь за 4 ч. Найти скорость течения реки, если известно, что скорость лодки относительно воды 16 км/ч.

646. Катер проплыл 15 км вниз по течению реки за 1 ч и вернулся на ту же пристань, потратив на обратный путь 1,5 ч. Найти скорость катера относительно воды и скорость течения реки.

647. Периметр равнобедренного треугольника равен 5,4 дм. Боковая сторона в 13 раз длиннее основания. Найти длины сторон треугольника.

648. Скорость рейсового трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше, чем скорость прежнего трамвая, поэтому он проходит маршрут в 20 км на 12 мин быстрее, чем трамвай старой конструкции. За какое время новый трамвай проходит этот маршрут?

649. Некоторую часть дня автобус работает в режиме экспресса. При этом его рейсовая скорость увеличивается на 8 км/ч, а время, затраченное на маршрут в 16 км, сокращается на 4 мин. За какое время проходит этот маршрут автобус в режиме экспресса?

650. Одно звено собрало со своего участка 875 ц пшеницы, а другое звено с участка, меньшего на 2 га,— 920 ц пшеницы. Сколько центнеров пшеницы собрало каждое звено с 1 га, если известно, что с 1 га во втором звене собрали на 5 ц пшеницы больше, чем в первом?

651. При одновременной работе двух насосов пруд был очищен за 2 ч 55 мин. За сколько времени мог бы очистить пруд каждый насос, работая отдельно, если один из них может эту работу выполнить на 2 ч быстрее другого?

---

652. Отец старше дочери в 4 раза. Пять лет назад он был старше ее в 9 раз. Сколько лет сейчас отцу и дочери?

653. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость движения и за 25 мин достигает скорости 60 км/ч. Найти ускорение поезда.

654. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость и за 10 мин достигает 30 км/ч. Какое расстояние пройдет поезд за это время?

655. Тело брошено с начальной скоростью $v_0=3$ м/с вертикально вниз и движется равноускоренно с ускорением $g=9{,}8$ м/с^2. Найти время, за которое тело пройдет расстояние $s=137{,}5$ м.

656. Пешеход и велосипедист отправились одновременно навстречу друг другу из разных городов, расстояние между которыми 40 км. Велосипедист проехал мимо пешехода через 2 ч после отправления и на весь путь затратил на 7,5 ч меньше, чем пешеход. Найти скорость движения каждого, считая, что они двигались все время с постоянными скоростями.

657. Водитель междугородного автобуса вынужден был по дороге заправить автобус горючим, затратив на это 12 мин. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, он увеличил скорость автобуса на 15 км/ч и ликвидировал опоздание на перегоне в 60 км. С какой скоростью двигался автобус на этом перегоне?

658*. Поезд прошел мимо неподвижно стоящего на платформе человека за 6 с, а мимо платформы длиной 150 м за 15 с. Найти скорость движения поезда и его длину.

659*. Через основание D высоты BD равностороннего треугольника ABC, сторона которого равна a (рис. 53), проведена прямая, параллельная боковой стороне треугольника; из точки B_1 ее пересечения со стороной BC опущен перпендикуляр на основание. Через основние D_1 этого перпендикуляра проведена другая прямая, параллельная первой, и тем же способом построен второй перпендикуляр и т. д. Доказать, что сумма длин построенных перпендикуляров к стороне AC равна высоте треугольника BD.

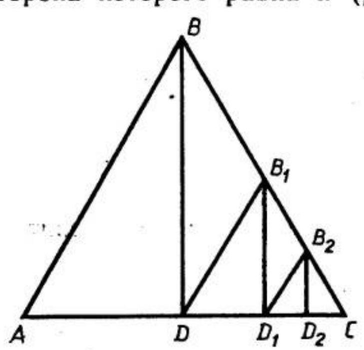


Рис. 53

5. Функции и графики

660. Выяснить, принадлежит ли точка A графику данной функции; найти координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат и значение функции при $x=-2$:

1) $y=3-0{,}5x$, $A(4;\ 1)$;
2) $y=\frac{1}{2}x-4$, $A(6;\ -1)$;
3) $y=2{,}5x-5$, $A(1{,}5;\ -1{,}25)$;
4) $y=-1{,}5x+6$, $A(4{,}5;\ -0{,}5)$.

661. Построить графики функций (в одной координатной плоскости):

1) $y=3x$, $y=-3x$; 2) $y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{1}{3}x$;
3) $y=x-2$, $y=x+2$; 4) $y=-x-2$, $y=2-x$.

662. Построить график функции:

1) $y=x^2+2\frac{1}{4}$; 2) $y=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$; 3) $y=(x+2{,}5)^2-\frac{1}{4}$;
4) $y=x^2-4x+5$; 5) $y=x^2+2x-3$; 6) $y=-x^2-3x+4$.

663. Найти координаты вершины параболы:

1) $y=x^2-8x+16$; 2) $y=x^2-10x+15$;
3) $y=x^2+4x-3$; 4) $y=2x^2-5x+3$.

664. Найти наибольшее или наименьшее значение функции:

1) $y=x^2-7x-10$; 2) $y=-x^2+8x+7$;
3) $y=x^2-x-6$; 4) $y=4-3x-x^2$.

665. Построить в одной координатной плоскости графики двух данных функций и определить, при каких значениях равны значения этих функций:

1) $y=x^2-4$ и $y=3x$;
2) $y=(x+3)^2+1$ и $y=-x$;
3) $y=(x+1)(x+3)$ и $y=-x-3$;
4) $y=x^3+1$ и $y=x+1$.

666. Построить эскиз графика и перечислить свойства функции:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=\frac{1}{x^3}$; 4) $y=\frac{1}{x^4}$.

667. Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt[4]{5{,}3}$ и $\sqrt[4]{5\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[5]{-\frac{2}{9}}$ и $\sqrt[5]{-\frac{1}{7}}$.

668. Построить график функции и найти значения x, при которых $y=0$, $y>0$, $y<0$:

1) $y=2x^2-3$; 2) $y=-2x^2+1$;
3) $y=2(x-1)^2$; 4) $y=2(x+2)^2$;
5) $y=2(x-3)^2+1$; 6) $y=-3(x-1)^2+5$;
7) $y=x^2+2x-8$; 8) $y=x^2-4x+3$.

669. Найти значения коэффициентов a и b в квадратичной функции $y=ax^2+bx-5$, если $y(-1)=0$ и $y(1)=6$.

670. Найти значения коэффициентов a, b и c, если известно, что график функции $y=ax^2+bx+c$ проходит через точки $(-1;\ 1)$, $(1;\ 0)$ и $(4;\ 3)$.

Построить график функции **(671—674).**

671. 1) $y=\frac{1}{x}-2$; 2) $y=3+\frac{1}{x^2}$;

3) $y=\frac{4}{x}-1$; 4) $y=-\frac{3}{2x}+2$.

672. 1) $y=\sqrt{x-4}$; 2) $y=-\sqrt{x}+1{,}5$; 3) $y=\sqrt[3]{x+3}$;

4) $y=-\sqrt[3]{x}+1$.

673*. 1) $y=|x-1|$; 2) $y=|-1+2x|$;

3) $y=|4-x^2|$; 4) $y=x^2-3|x|$.

674*. 1) $y=\begin{cases}\frac{6}{x}, & \text{если } x\geqslant 1,\\ 6x, & \text{если } x<1;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}2, & \text{если } x\geqslant -1,\\ \frac{2}{x^2}, & \text{если } x<-1.\end{cases}$

675. Выяснить, является ли функция четной или нечетной:

1) $y=2x^4-|x|$; 2) $y=x^3+x^2$; 3) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 4) $y=\frac{x^3+x}{3}$.

6. Элементы тригонометрии

676. Найти все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

677. Упростить выражение:

1) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

678. Доказать тождество:

1) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha$.

679. Упростить выражение:

1) $\sin^2(\alpha+8\pi)+\cos^2(\alpha+10\pi)$;

2) $\cos^2(\alpha+6\pi)+\cos^2(\alpha-4\pi)$;

3) $\left(1-\frac{1}{\cos^2(\alpha+2\pi)}\right)\left(1-\frac{1}{\sin^2(\alpha+4\pi)}\right)$;

4) $\frac{1}{\sin^2(10\pi+2\alpha)}-1$.

680. Упростить выражение:

1) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{2(1-2\cos^2\alpha)}+\frac{\sin\alpha\cos(\pi-\alpha)}{1-2\sin^2\alpha}$.

681. Доказать тождество:

1) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\sin x+\cos x$;

2) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}-\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=-\sin x-\cos x$.

682. Вычислить:

1) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

683. Найти значение выражения:

1) $\cos 765°-\sin 750°-\cos 1035°$;

2) $\sin\frac{11\pi}{3}+\cos 690°-\cos\frac{19\pi}{3}$.

684. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найти значение выражения:

1) $\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha}$; 2) $\frac{2-\sin^2\alpha}{3+\cos^2\alpha}$.

685. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

686. Упростить выражение:

1) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

687*. Упростить выражение:

1) $\frac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin(-\alpha)-\sin(2{,}5\pi+\alpha)}$;

2) $\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos(-\alpha)-\cos(2{,}5\pi+\alpha)}$;

3) $\frac{\sin 2\alpha+\cos(\pi-\alpha)\sin\alpha}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}\operatorname{ctg}(\alpha+3\pi)$;

4) $\frac{\cos^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha}{\sin(\pi+\alpha)}\operatorname{tg}(\alpha-5\pi)$.

688*. Доказать тождество:

1) $\frac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2(\alpha+\pi)}=2$; 2) $\frac{\sin^2(\alpha+90°)}{1+\sin(-\alpha)}=1+\cos(\alpha-90°)$.

689*. Упростить выражение:

1) $\frac{4\cos^2 x-\sin 2x}{\cos(\pi-2x)}+\frac{\cos x-3\sin x}{\cos x-\sin x}$;

2) $\frac{5\cos x-3\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(-x)}-\frac{\sin 2x-8\sin^2 x}{\cos 2x}$.

690*. Упростить выражение и найти его числовое значение при данном значении α:

1) $\frac{6\cos^2\alpha-2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\cos\alpha-5\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $\frac{2-3\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, $\alpha=-\frac{\pi}{8}$.

7. Прогрессии

691. Числовая последовательность задана формулой n-го члена $a_n=n(n+1)$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 20; 2) 30; 3) 40?

692. Последовательность задана условием $a_1=-1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot a_n\right)$. Вычислить следующие члены последовательности:
1) a_2; 2) a_3; 3) a_5; 4) a_{10}; 5) a_n.

693. Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1=7$, $a_7=-5$.

694. Найти первый член арифметической прогрессии, если $a_{10}=4$, $d=0{,}5$.

695. Вычислить первый член и сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:
1) $a_n=459$, $d=10$, $n=45$;
2) $a_n=121$, $d=-5$, $n=17$.

696. Найти номер n, если в арифметической прогрессии $a_1=-2$, $a_5=-6$, $a_n=-40$.

697. Найти сумму десяти первых членов последовательности, заданной рекуррентной формулой $b_{n+1}=-\frac{b_n}{2}$ и условием $b_1=1024$.

698. В геометрической прогрессии найти:
1) n, если $b_1=5$, $q=-10$ и $b_n=-5000$;
2) q, если $b_3=16$ и $b_6=2$;
3) b_1, если $b_3=16$ и $b_6=2$;
4) b_7, если $b_3=16$ и $b_6=1$.

699. Найти сумму чисел $3+6+12+\ldots+96$, если ее слагаемые являются последовательными членами геометрической прогрессии.

---

700. Вычислить первый член и разность арифметической прогрессии, если:
1) $a_3=25$, $a_{10}=-3$; 2) $a_4=10$, $a_7=19$;
3) $a_3+a_7=4$, $a_2+a_{14}=-8$; 4) $a_2+a_4=16$, $a_1\cdot a_5=28$;
5) $S_{20}=110$, $a_{15}-a_5=\frac{8}{3}$; 6) $a_1+a_2+a_3=15$, $a_1a_2a_3=80$

701. Найти десятый член арифметической прогрессии, если:
1) $a_9=-5$ и $a_{11}=7$;
2) $a_9+a_{11}=-10$;
3) $a_9+a_{10}+a_{11}=12$.

702. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, у которой $S_7=-35$ и $S_{42}=-1680$.

703. Является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n-го члена:
1) $b_n=-3^{2n}$; 2) $b_n=2^{3n}$; 3) $b_n=\frac{3}{2n}$; 4) $b_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$?

704. Вычислить знаменатель геометрической прогрессии, если:
1) $b_1=12$, $S_3=372$; 2) $b_1=1$, $S_3=157$;
3) $b_3=300$, $S_3=372$; 4) $b_3=144$, $S_3=157$.

705. Найти первый член, знаменатель и формулу n-го члена геометрической прогрессии, если $b_2=-\frac{1}{2}$ и $b_4=-\frac{1}{72}$.

706. Найти четвертый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $b_3=-6$ и $b_5=-24$.

707. Между числами $\frac{1}{3}$ и 27 вставить три числа так, чтобы получилось пять последовательных членов геометрической прогрессии.

708. В геометрической прогрессии найти:
1) b_1 и b_5, если $q=3$, $S_5=484$;
2) b_1 и q, если $b_3=0{,}024$, $S_3=0{,}504$.

709. Вычислить первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:
1) $b_1+b_2=20$, $b_2+b_3=60$;
2) $b_1+b_2=60$, $b_1+b_3=51$.

710. В геометрической прогрессии найти:
1) S_5, если $b_4=88$, $q=2$; 3) S_5, если $b_1=11$, $b_4=88$;
2) b_1, если $S_5=341$, $q=2$; 4) S_5, если $b_3=44$, $b_5=176$.

711. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:
1) 0,777...; 2) 0,44444...; 3) 0,818181...;
4) 0,272727...; 5) 1,(25); 6) 2,(05);
7) 3,0(25); 8) -4,(27).

712*. Сумма чисел x, y, z равна 25. Числа x, $2y$, z являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа x, $y+1$, z — последовательными членами геометрической прогрессии. Найти x, y, z.

713*. При каком значении x числа x, $\sqrt{4-3x}$, $3-2x$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

714.** На международном шахматном турнире в Будапеште в 1896 г. первое место занял знаменитый русский шахматист Чигорин. Участники турнира играли друг с другом один раз. Всего было сыграно 78 партий. Сколько шахматистов участвовало в этом турнире?

8. Вычисления на микрокалькуляторе

715. Вычислить на МК-54 с точностью до 0,01 значения функции $y(x)$ при $x=0$; 0,2; 0,4; 0,6; ...; 4 и построить по данным точкам график этой функции на отрезке $[0; 4]$, если:

1) $y(x)=\sqrt[3]{16x^3+72}$; 2) $y(x)=(x^4-8x^3+19x^2-12x+4)^{1,5}$.

716. Составить программу для вычисления корней уравнения

$$x^4-2ax^2+b=0$$

и решить это уравнение при:

1) $a=409$, $b=152881$; 2) $a=24{,}98$, $b=368{,}64$;
3) $a=5{,}645$, $b=29{,}16$; 4) $a=1{,}96$, $b=3{,}8416$.

717. Составить программу для вычисления значений выражения $\sqrt[k]{a+\sqrt[n]{b}}$, где $a>0$, $b>0$. Вычислить на МК-54 приближенное значение этого выражения с точностью до 0,01 при:

1) $a=17$, $b=83$, $k=4$, $n=3$;
2) $a=562$, $b=987$, $k=3$, $n=4$;
3) $a=3{,}17\cdot10^{11}$, $b=6{,}83\cdot10^{21}$, $k=9$, $n=2$;
4) $a=4{,}83\cdot10^{19}$, $b=7{,}51\cdot10^{64}$, $k=17$, $n=4$.

718. Составить программу для вычисления значений данного выражения и вычислить на МК-54 его приближенные значения с точностью до 0,001 при $\alpha=\frac{\pi}{7}$; $-\frac{\pi}{9}$; 2; -1; 70°; $-50°$:

1) $\operatorname{tg} 6\alpha+\cos 7\alpha$; 2) $\sin 5\alpha-\operatorname{tg} 4\alpha$;
3) $\sin 7\alpha+\sin 4\alpha+\sin \alpha$; 4) $\cos 9\alpha-\cos 5\alpha+\cos 3\alpha$.

9. Итоговое повторение

Вариант 1

719. Выполнить действия: $\frac{1-a}{1-a+a^2}-\frac{2}{1+a}+\frac{-3-7a+2a^2}{a^3+1}$.

720. Решить уравнение $\sqrt{x+3}+5=7x$.

721. Вычислить $\sqrt{20}-(\sqrt{\sqrt{5}+1}-\sqrt{\sqrt{5}-1})^2$.

722. График функции $y=-3x+m$ проходит через точку $(-1; 2)$. Определить значение m. Построить график и указать, при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.

723. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x+6y=18, \\ 3x-5y=-29. \end{cases}$

Вариант 2

724. Упростить выражение

$$\left(1-\frac{3a+b}{a-b}\right)\cdot\left(1-\frac{2a+b}{a+2b}\right):\left(1+\frac{3b^2}{a^2-4b^2}\right).$$

725. Вычислить $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$.

726. Решить уравнение $\sqrt{3x-14}=6-x$.

727. Построить график функции $y=2x^2-x-1$ и определить, при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.

728. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Вариант 3

729. Вычислить $\dfrac{3\cdot\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$.

730. Решить уравнение $\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5$.

731. Решить неравенство $3x^2-7x+4<0$.

732. Построить график функции $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ и найти приближенно по графику $y(7)$.

733. Решить неравенство $|3x-7|>10$.

Вариант 4

734. Вычислить $\left(\dfrac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3}-1{,}875}-\dfrac{2{,}75-1\frac{1}{2}}{8\frac{1}{8}+1{,}5}\right):\frac{10}{11}$.

735. Сократить дробь $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$.

736. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1+x}{5}-\frac{2x-y}{2}=3y-1, \\ \frac{5y-2}{2}-\frac{4x-5}{6}=8-2x. \end{cases}$

737. Построить график функции $y=-\frac{2}{x}$ и указать промежутки, на которых эта функция возрастает.

738. Найти сумму первых 15 членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен -20, а разность равна 12.

Вариант 5

739. Решить уравнение $\sqrt{3x-4}\cdot\sqrt{x-2}=4$.

740. Решить неравенство $\frac{7x-2}{3}+5x\leqslant\frac{11x-5}{2}$.

741. Упростить выражение

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}.$$

742. Найти пятый член геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, если $b_2-b_1=18$, $b_3-b_1=42$.

743. Решить уравнение $x^4=6-x^2$.

Вариант 6

744. Вычислить $\left(7\sqrt{\frac{5}{7}}-5\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2$.

745. Решить уравнение $\frac{3x-2}{2x+5}=\frac{x+4}{x-10}$.

746. Из двух городов, находящихся на расстоянии 700 км, отправились одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость движения одного из них на 20 км/ч больше скорости другого. Найти скорость движения каждого поезда, если известно, что они двигались без остановок и встретились через 5 ч после начала движения.

747. Решить уравнение $\sqrt{3x^2-2}=x$.

748. Указать, в каком квадранте расположена вершина параболы $y=x^2+7x+10$.

Вариант 7

749. Решить систему неравенств $\begin{cases}\frac{x-3}{5}+2>\frac{x-1}{10}-1,\\ x-3>\frac{x-4}{3}.\end{cases}$

750. Упростить выражение

$$\left(\frac{ax-b}{a+b}-\frac{bx+a}{b-a}\right)\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-1}:\frac{a^2+b^2}{x-1}\right).$$

751. Вычислить $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+2\sqrt{80}+3\sqrt{125})\cdot\sqrt{5}$.

752. Построить график функции $y=-x^2-8x+12$ и определить, на каком промежутке эта функция возрастает.

753. Решить уравнение $(x-2)^2+5(16-3x)=0$.

Вариант 8

754. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{24}{25}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

755. Упростить выражение

$$3\sqrt{\frac{ab}{9}}-5\frac{1}{3}a^2\sqrt{\frac{b}{16a^3}}+3a\sqrt{\frac{b}{a}}-2b\sqrt{\frac{a}{9b}},$$

где $a>0$, $b>0$.

756. Решить уравнение $\frac{x+1}{6}-\frac{(x+2)(x-1)}{4}-\frac{x-3}{3}=1\frac{2}{3}$.

757. Построить график функции $y=-2x^2+8$. Определить, при каких значениях x функция принимает неотрицательные значения.

758. Расстояние между двумя городами по реке равно 80 км. Теплоход тратит на этот путь в оба конца $8\frac{1}{3}$ ч. Найти собственную скорость теплохода, если скорость реки равна 4 км/ч.

Вариант 9

759. Разложить многочлен $5y^2-10y-yz+2z$ на множители.

760. Выполнить действия: $\left(a+\frac{b^2}{a-b}\right)\left(1-\frac{b^3}{a^3+b^3}\right)(a+b)$.

761. Решить уравнение $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{2}$.

762. Найти наибольшее значение функции $y=-2x^2+5x-3$.

763. Вычислить $(0{,}00032)^{-\frac{2}{5}}$.

Вариант 10

764. Решить неравенство $(x-1)(x+2)(x-3)<0$.

765. Построить график функции $y=4-3x-x^2$ и определить, при каком значении x эта функция принимает наибольшее значение.

766. Упростить выражение

$$\frac{1-a^{-\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{a^{-\frac{1}{5}}-a^{-\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{5}}}+\frac{a^{\frac{3}{5}}-b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{2}{5}}}.$$

767. Вычислить $(\sqrt{75}-\sqrt{27}+\sqrt{108})\cdot 2\sqrt{3}$.

768. Решить уравнение $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{32}{x^2-9}=\frac{8(x+1)}{x+3}$.

Вариант 11

769. Решить уравнение $\frac{2x+7}{x+1}+\frac{15}{x^2-1}=\frac{5x-8}{x-1}$.

770. Вычислить

$$\frac{\left(2{,}4-\frac{3}{4}\right):0{,}6}{\left(\frac{3}{8}+0{,}25\right):0{,}4}+\frac{2{,}8:\left(\frac{1}{5}+0{,}2\right)}{6-5\frac{13}{20}}+1{,}04.$$

771. Решить неравенство $x^2-8x+7>0$.

772. Построить график функции $y=|x^2-4|$. Найти координаты точки пересечения графика с осью ординат.

773. Упростить выражение $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$.

Вариант 12

774. Найти значение выражения

$$\left(1+x+\frac{1}{1-x}\right):\left(1+\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ при } x=-\frac{4}{5}.$$

775. Найти область определения функции $y=\sqrt{\frac{x-3}{2x+1}}$.

776. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+3y=4, \\ 0{,}5x+y=1{,}5. \end{cases}$

777. Найти p и q, если известно, что вершина параболы $y=x^2+px+q$ имеет координаты $(-1; 2)$. Построить график этой функции.

778. Вычислить $(1+\sqrt{7})\cdot(4-\sqrt{7})\cdot 3\sqrt{7}+9\sqrt{7}$.

Вариант 13

779. Упростить выражение

$$\left(\frac{b}{4a-a^3}-\frac{1}{a^2+2a}+\frac{2}{a^2b-4b}\right):\frac{b^2-4b+4}{a^3b-4ab}.$$

780. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{7}{15}<\frac{4}{5}x, \\ \frac{x-19}{2}+\frac{4x+1}{3}>x. \end{cases}$$

781. Решить уравнение

$$\frac{3-x}{2-x}+\frac{2x-6}{x^2-2x}=\frac{3}{x}.$$

782. Найти координаты вершины параболы $y=15+2x-x^2$, точки пересечения параболы с осями координат и выяснить, при каких значениях x парабола расположена выше оси абсцисс.

783. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Вариант 14

784. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=\frac{1}{6}, \\ \frac{x-y}{4}+\frac{x+y}{3}=\frac{13}{12}. \end{cases}$$

785. Сократить дробь $\frac{2a^2-5a-3}{a^2+a-6}$.

786. Найти p и q, если парабола $y=x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в точке $x=2$, а ось ординат в точке $y=-2$. Определить координаты вершины параболы и выяснить, при каких значениях x парабола расположена ниже оси абсцисс.

787. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 6, а разность между первым и третьим членами равна 3,5. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

788. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$ и $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

Вариант 15

789. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{4}+\frac{3x-2}{3}>\frac{1}{12}, \\ \frac{5x+1}{2}-\frac{8x-1}{5}<5. \end{cases}$$

790. Выяснить, проходит ли прямая $y=3x-2$ через точку пересечения прямых $y=2x-1$ и $y=4-3x$.

791. Сократить дробь

$$\frac{2a^2-3a-2}{a^2+3a-10}.$$

792. Из города A выехал автомобиль, и одновременно навстречу ему из города B выехал автобус. Двигаясь без остановки и с постоянными скоростями, они встретились через 1 ч 12 мин после начала движения. Найти скорости автомобиля и автобуса, если автомобиль прибыл в город B на 1 ч раньше, чем автобус в город A.

793. В арифметической прогрессии сумма первого и шестого членов равна 11, а сумма второго и четвертого членов равна 10. Найти сумму первых шести членов этой прогрессии.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ

794. Доказать, что если натуральное число не делится на 3, то остаток от деления квадрата этого числа на 3 равен 1.

795. Доказать, что при любом натуральном n число $3n+2$ не является квадратом целого числа.

796. Доказать, что:
1) число $10^{70}-361$ делится на 27;
2) число $10^{80}-298$ делится на 99;
3) число $91^{50}-19^{75}$ делится на 18;
4) число $(75\cdot 94)^{26}+(39\cdot 56)^{25}$ делится на 19.

797. Доказать, что натуральное число делится на 9, если сумма цифр числа не меняется при умножении этого числа на 5.

798. Пусть m, n — натуральные числа, и пусть число $m-1$ делится на 3^n. Доказать, что число m^3-1 делится на 3^{n+1}.

799. Доказать, что не существует целых чисел x, y, для которых справедливо равенство $x^2-y^2=1982$.

800. Пусть m и n — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что не существует натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$mx+ny=mn.$$

801. Доказать, что число $7n^2+1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

802. Доказать, что не существует целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$15x^2=9+7y^2.$$

803. Доказать, что если m, n, k — натуральные числа и число $m+n+k$ делится на 6, то число $m^3+n^3+k^3$ также делится на 6.

804. Доказать, что если целые числа m и n не делятся на 5, то число m^4-n^4 делится на 5.

805. Доказать, что для любых целых m и n число $m^6n^2-n^6m^2$ делится на 30.

806. Доказать, что дробь $\frac{(n+1)^4+n^4-1}{2}$, где n — натуральное число, можно представить в виде произведения двух натуральных чисел, разность которых равна двум.

807. Доказать, что ни при каких натуральных m и n не может быть верным равенство:
1) $m(m+1)=n(n+2)$;
2) $m^2+(m+1)^2=n^4+(n+1)^4$.

808. Доказать, что ни при каком натуральном n сумма $n^3+6n^2+15n+15$ не делится на $n+2$.

809. Найти все натуральные n, при которых число n^4+n^2+1 является простым.

810. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению

$$x^2=y^2+2y+13.$$

811. Найти четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 5040.

812. Пусть m, n, p, q — натуральные числа, и пусть значение многочлена mx^3+nx^2+px+q при любом целом x есть число, делящееся на 5. Доказать, что каждое из чисел m, n, p, q делится на 5.

813. Доказать, что если a, b, c — натуральные числа, то дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c не может принимать значение, равное 63.

814. Доказать равенство:

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;

2) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

815. Доказать, что если a, b, c — попарно различные числа, то при любых значениях x выполняется равенство:

1) $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$;

2) $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$.

816. Упростить выражение:

1) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$; 2) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

3) $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}$, если $1<x<2$;

4) $\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\frac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\right):(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})-\sqrt[6]{b}$.

817. Доказать равенство:

1) $\frac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=-\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{tg}3\alpha$;

2) $\frac{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{ctg}^4\alpha$;

3) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$;

4) $\sin^8 x+\cos^8 x=\cos^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x$;

5) $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\beta$;

6) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.

818. Доказать, что если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{7}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

819. Доказать, что если $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$ и $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha$.

820. Решить уравнение:

1) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$;

2) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$;

3) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$;

4) $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1$.

821. Найти действительные решения уравнения:

1) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$;

2) $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$.

822. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y), \\ (x+1)(y+1)=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0, \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{xy}{x+2y}+\frac{x+2y}{xy}=2, \\ \frac{xy}{x-2y}+\frac{x-2y}{xy}=4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3y+xy^3=\frac{10}{9}(x+y)^2, \\ x^4y+xy^4=\frac{2}{3}(x+y)^3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\frac{3}{5}, \\ \frac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\frac{4}{5}. \end{cases}$

823. Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} (x^2+y^2)(x-y)=13, \\ xy(x-y)=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x^3+y^3)=9x^2y^2, \\ 4(x^2+y^2)=9x^2y^2-8xy. \end{cases}$

824. Доказать, что система уравнений $\begin{cases} x+y+z=0, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$ не имеет действительных решений.

825. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{5y-x}+x=3, \\ \sqrt{2y-x}+x+y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{y+7x}+\sqrt{y+2x}=5, \\ \sqrt{y+2x}-y+x=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8}, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}. \end{cases}$

826. Найти все значения r, при которых уравнение $x^2+(4+2r)x+5+4r=0$ имеет: 1) равные корни; 2) корни, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

827. Найти все значения a, при которых корни уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ неотрицательны.

828. Найти все значения a, при которых уравнение $x^2+ax+a=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям $x_1<x_2$, $x_1^2x_2=a^2$.

829. Найти все значения a, при которых квадратный трехчлен x^2+ax+a^2+6a принимает отрицательные значения при всех x, таких, что $1<x<2$.

830. Доказать, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни, если $c(a+b+c)\leqslant 0$.

831. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найти p и q, если известно, что числа x_1+1 и x_2+1 являются корнями уравнения $x^2-p^2x+pq=0$.

832. Найти все значения a, при которых неравенство

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

выполняется при всех значениях x.

833. Найти все значения a, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство

$$ax^2+2(a+2)x+2a+4<0.$$

834. Доказать, что для любых чисел x и y справедливо неравенство:

1) $x^2+4y^2-2x-16y+17\geqslant 0$;

2) $5x^2-4xy+y^2-16x+6y+13\geqslant 0$.

835. Доказать, что для любых чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $a^2+b^2+c^2-2a+4b-6c+14\geqslant 0$;

2) $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$;

3) $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2\geqslant ab+bc+ca$.

836. Доказать, что при любом натуральном n справедливо неравенство:

1) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$;

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$.

837. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$;

2) $(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqslant 9abc$;

3) $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$;

4) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc$.

838. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$;

2) $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$.

839. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

840. Пусть a, b, c — положительные числа, такие, что $abc=1$. Доказать, что $(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8$.

841. Доказать, что при всех действительных значениях x справедливо неравенство

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

842. Представить многочлен x^8+x^4+1 в виде произведения трех многочленов с целыми коэффициентами.

843. Сократить дробь:

1) $\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$; 2) $\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

844. Построить график функции:

1) $y=|x-2|+|x+4|$;
2) $y=|x-3|-|x-1|$;
3) $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$;
4) $y=\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{x^2-2x+1}$;
5) $y=\frac{3x-2}{|x-1|}$; 6) $y=\frac{2|x|-1}{|x|-4}$;
7) $y=\frac{1}{x^2-x-2}$; 8) $y=\frac{1}{x^2-|x|}$.

Решить неравенство **(845—846)**.

845. 1) $\frac{17-42x}{5x^2-7x+2}>6$; 2) $\frac{15-4x}{x^2-x-12}<4$;

3) $\frac{x^4-3x^2-4}{x^4+8x^2-9}>0$; 4) $\frac{x^3-5x^2-x+5}{x^3+2x^2-9x-18}<0$;

5) $|x^2-4x|\leqslant 3x-6$; 6) $|x^2-2x-3|<|x+1|$.

846. 1) $\sqrt{1-x^2}+1<\sqrt{3-x^2}$; 2) $x+4>2\sqrt{4-x^2}$;

3) $\sqrt{x^2-6x}<8+2x$; 4) $2-3x<\sqrt{4+9x-9x^2}$;

5) $\frac{2x+3}{\sqrt{6x^2+7x-3}}<2$; 6) $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}>-\frac{1}{3}$.

847. Три числа, сумма которых равна 24, являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если к этим числам прибавить соответственно 2, 2 и 7, то полученные числа будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

848. Три числа, сумма которых равна 28, являются первыми тремя членами геометрической прогрессии. Если из этих чисел вычесть соответственно 1, 3 и 9, то полученные числа будут последовательными членами арифметической прогрессии. Найти сумму первых 10 членов геометрической прогрессии.

849. Найти четыре числа, первые три из которых являются последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних чисел равна 18.

850. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее второй член равен $\frac{1}{4}$, а сумма прогрессии втрое больше суммы квадратов членов этой прогрессии.

851. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, третий член которой, утроенное произведение первого члена на четвертый и второй член являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью, равной $\frac{1}{8}$.

852. Доказать, что если положительные числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

853. Доказать, что если положительные числа a_1, a_2, ..., a_n являются последовательными членами арифметической прогрессии, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

854. Пусть числа a_1, a_2, ..., a_n, ... являются последовательными членами арифметической прогрессии, S_n — сумма n первых членов этой прогрессии. Доказать, что:

1) если $S_m=S_n$, то $S_{m+n}=0$;
2) если $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$, то $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$;
3) $S_{n+3}=3S_{n+2}-3S_{n+1}+S_n$;
4) $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$.

855. Пусть S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии. Доказать, что:

1) $S_{n+k}-S_n=q^nS_k$;

2) $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$.

856. Найти сумму

$$S_n=1+2x+3x^2+4x^3+...+(n+1)x^n.$$

857. Найти сумму

$$6+66+666+...+666...6,$$

где последнее слагаемое есть n-значное число.

858. Последовательность определяется рекуррентной формулой $x_n=ax_{n-1}+b$, где a, b, x_1 — заданные числа. Найти формулу n-го члена x_n и формулу суммы n первых членов S_n.

859. Последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ удовлетворяет при всяком $n>1$ уравнению $x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=1$. Выразить x_n через x_1, x_2 и n.

860. Пусть $a_1=a_2=a_3=1$, $a_4=-1$ и $a_n=a_{n-4}\cdot a_{n-3}$ при $n>4$. Найти a_{2000}.

861. Последовательность определяется при $n>2$ рекуррентной формулой $x_n=(\alpha+\beta)x_{n-1}-\alpha\beta x_{n-2}$, где α, β, x_1, x_2 — заданные числа, такие, что $\alpha\beta\neq0$, $\alpha\neq\beta$. Найти формулу n-го члена x_n.

862. Катер затрачивает на путь от A до B по течению реки a часов, а на обратный путь b часов. Сколько часов будут плыть от A до B плоты? Предполагается, что собственная скорость катера на всем пути от A до B и от B до A постоянна.

863. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 ч из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 мин — мотоциклист. Все участники движения перемещались равномерно и без остановок и через некоторое время после выезда мотоциклиста преодолели одинаковую часть пути от A до B. Пешеход прибыл в пункт B на 1 ч позже мотоциклиста. На сколько минут раньше пешехода прибыл в пункт B велосипедист?

864. Сплав меди и цинка содержал меди на 640 г больше, чем цинка. После того как из сплава выделили $\frac{6}{7}$ содержащейся в нем меди и 60% цинка, масса сплава оказалась равной 200 г. Сколько весил сплав первоначально?

865. Из пункта A вышел пешеход, а из пункта B навстречу ему одновременно выехал велосипедист. После их встречи пешеход продолжал идти в B, а велосипедист повернул назад и тоже поехал в B. Известно, что пешеход пришел в B на 2 ч позже велосипедиста, а скорость пешехода в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Сколько времени прошло от начала движения до встречи пешехода и велосипедиста?

866. Пловец плывет против течения реки и встречает плывущую по течению реки пустую лодку. Продолжая плыть против течения еще t минут после момента встречи, он затем поворачивает назад и догоняет лодку в s метрах от места встречи. Найти скорость течения реки.

867. Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км идет сначала в гору, затем по равнине и, наконец, под гору. Пешеход на путь от A до B затратил 2 ч 54 мин, а на обратную дорогу — 3 ч 6 мин. Скорость его ходьбы в гору была 3 км/ч, на равнине — 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Сколько километров составляет та часть дороги, которая идет по равнине?

868. Два пешехода вышли одновременно из пункта A. Первый из них встретился с туристом, идущим в пункт A, через 20 мин после выхода из A, а второй встретил туриста на 5 мин позже, чем первый. Через 10 мин после второй встречи турист пришел в A. Скорости пешеходов и туриста были постоянными. Найти отношение скоростей пешеходов.

869. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу: первый — из пункта A, второй — из пункта B. До встречи первый пешеход прошел на 1 км больше, чем второй. Через 45 мин после встречи первый пешеход пришел в пункт B. Второй пешеход прибыл в пункт A через 1 ч 20 мин после встречи. Найти расстояние от A до B.

870. Дорога из пункта A до пункта B идет на подъем, а от пункта B до пункта C имеет спуск. Пешеход затрачивает t часов на путь от A до C и $\frac{t}{2}$ часов на обратный путь. Найти скорость пешехода на подъеме, если его скорость на спуске на a километров в час больше, чем на подъеме, а расстояние от A до C равно s километрам.

871. Из пункта A выехали три велосипедиста, первый — на 1 ч раньше двух других, стартовавших одновременно. Скорость каждого велосипедиста постоянна. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй догнал первого на 2 ч позже, чем третий. Определить отношение скоростей первого и третьего велосипедистов, если отношение скорости второго к скорости третьего равно $\frac{2}{3}$.

872. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{5}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 3%. Определить исходное процентное содержание соли.

873. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 $м^3$ древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 $м^3$ сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 $м^3$ древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

874. По расписанию поезд должен пройти перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Однако, пройдя половину перегона с этой скоростью, поезд вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Определить скорость поезда по расписанию.

875. Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта A в пункт B и совершают безостановочное движение между A и B. Первая встреча их произошла, когда автобус прошел $\frac{5}{9}$ всего расстояния от A до B, а вторая встреча — когда автобус после первого захода в B проехал $\frac{1}{8}$ всего расстояния от B до A. Первый раз в пункт B автобус прибыл на 16 мин позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте A, если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны?

876. Из пункта A по шоссе в одном направлении одновременно выехали два автомобиля, а спустя некоторое время из того же пункта вслед за ними выехал третий автомобиль. Через час после своего старта третий автомобиль был в 3 раза ближе к первому автомобилю, чем ко второму, а еще через треть часа — на равном расстоянии от них. Определить, через какое время вслед за первыми двумя автомобилями выехал третий, если он догнал первый автомобиль через $\frac{7}{4}$ ч после старта первых двух автомобилей. (Предполагается, что скорость движения каждого автомобиля постоянна.)

877. Дорога проходит через пункты A и B. Велосипедист выехал из A по направлению к B. Одновременно с ним из пункта B вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт A, второй — в противоположном направлении. Велосипедист проехал путь от A до B за 0,5 ч и, продолжая движение, догнал второго пешехода. Это произошло через 1,2 ч после встречи велосипедиста с первым пешеходом. Определить время движения велосипедиста от начала движения до встречи с первым пешеходом. (Скорости велосипедиста и пешеходов постоянны.)

878. Дорога проходит через пункты A и B. Одновременно и в одном направлении выехали: из A — мотоциклист (в направлении к B), из B — велосипедист. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии a километров от B. Если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из A в B, то в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист отставал бы от него на b километров. Определить расстояние между пунктами A и B. (Скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны.)

879. Автобус из пункта A и автомобиль из пункта B отправляются одновременно и осуществляют безостановочное движение с постоянными скоростями между A и B. Первая встреча их произошла через 42 мин после начала движения, а через 2 ч 34 мин после начала движения автомобиль первый раз обогнал автобус. Через какое время после начала движения автобус и автомобиль первый раз окажутся одновременно в пункте A?

880. Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Буксир прошел путь от A до C за 4 ч. На каждом из участков AB и BC собственная скорость буксира (скорость относительно воды) была постоянна, причем на участке BC в $1\frac{2}{3}$ раза больше, чем на участке AB. Обратный путь от C до A буксир прошел также за 4 ч, и на всем пути его собственная скорость была в 2 раза больше, чем при движении из A в B. Если бы на обратном пути собственная скорость буксира была такой же, как и при движении из B в C, то участок от C до B он прошел бы за 3 ч. Сколько времени буксир шел от A до B? (Скорость течения реки постоянна.)

881. Пункт N расположен на берегу реки, ширина которой 1 км, а скорость течения 1 км/ч. Не менее чем на 3 км ниже по течению на другом берегу находится пункт M. Из пункта M выходит рыбак и идет вдоль берега по направлению к N со скоростью 4 км/ч. Одновременно из пункта N отплывает на лодке перевозчик, пересекает реку и, дождавшись рыбака, переправляет его в пункт N. Туда и обратно лодка двигалась по прямой, причем направление движения было выбрано так, что от отплытия до возвращения прошло наименьшее возможное время, равное $\frac{9}{8}$ ч. Скорость лодки в стоячей воде равна 4 км/ч. Найти расстояние (по течению) между пунктами M и N.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ VII—IX КЛАССОВ

ЧИСЛА И ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Число.

Множество *натуральных* чисел: 1; 2; 3; ... .

Множество *целых* чисел: 0; ±1; ±2; ±3; ... .

Множество *рациональных* чисел — числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целые, n — натуральные числа. Например, рациональными являются числа $\frac{3}{5}$; 2; $\frac{2}{7}$.

Рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $\frac{2}{5}=0{,}4$; $-\frac{1}{3}=-0{,}333=-0{,}(3)$.

Множество *иррациональных* чисел — бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, 0,1001000100001...— иррациональное число.

Иррациональными числами являются также числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Множество *действительных* чисел — рациональные и иррациональные числа.

Множество *комплексных* чисел — числа вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, $i^2=-1$.

2. Числовые промежутки — отрезки, интервалы и полуинтервалы, лучи.

Отрезок $[a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$, где $a<b$. Например, отрезок $[2; 5]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $2\leqslant x\leqslant 5$.

Интервал $(a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$, где $a<b$. Например, интервал $(-2; 3)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-2<x<3$.

Полуинтервал $[a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x<b$; полуинтервал $(a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a<x\leqslant b$, где $a<b$. Например, $[3; 8)$ — множество чисел x, таких, что $3\leqslant x<8$; $(-4; 2]$ — множество чисел x, таких, что $-4<x\leqslant 2$.

Луч — множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x>a$, или $x<a$, или $x\geqslant a$, или $x\leqslant a$. Например, луч $x\geqslant 5$ — множество чисел x, не меньших 5.

3. Модуль числа a (обозначается $|a|$) определяется формулой

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Геометрически $|a|$ — расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a; $|a-b|$ — расстояние между точками a и b.

Для любого числа a выполняется неравенство $|a|\geqslant 0$, причем $|a|=0$ только при $a=0$.

Неравенству $|x|\leqslant a$, где $a>0$, удовлетворяют числа x из отрезка $[-a; a]$, т. е. такие числа x, что $-a\leqslant x\leqslant a$.

Неравенству $|x|<a$, где $a>0$, удовлетворяют числа x из интервала $(-a; a)$, т. е. такие числа x, что $-a<x<a$.

Неравенству $|x|\geqslant a$, где $a>0$, удовлетворяют все числа $x\leqslant -a$ и числа $x\geqslant a$.

Неравенству $|x|>a$, где $a>0$, удовлетворяют все числа $x<-a$ и числа $x>a$.

4. Числовое выражение — запись, состоящая из чисел, соединенных знаками действий.

Например, $1{,}2\cdot(-3)-9:0{,}5$ — числовое выражение.

Значение числового выражения — число, полученное в результате выполнения действий, указанных в этом выражении. Например, число $-21{,}6$ — значение выражения $1{,}2\cdot(-3)-9:0{,}5$.

5. Порядок выполнения действий.

Действия первой ступени — сложение и вычитание.

Действия второй ступени — умножение и деление.

Действие третьей ступени — возведение в степень.

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; при этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1.

3) Если вычисляется значение дробного выражения, то выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе и первый результат делится на второй.

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках.

6. Стандартный вид числа — запись числа в виде $a\cdot 10^n$, где $1\leqslant|a|<10$, n — целое число, a — мантисса числа, n — порядок числа. Например, $345{,}4=3{,}454\cdot10^2$, $0{,}003=3\cdot10^{-3}$, $-0{,}12=-1{,}2\cdot10^{-1}$.

7. Погрешность приближения.

Абсолютная погрешность приближения — модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением. Если a — приближенное значение, а x — точное, то абсолютная погрешность равна $|x-a|$.

Запись $x=a\pm h$ означает, что абсолютная погрешность приближения не превосходит h, т. е. $|x-a|\leqslant h$, или $a-h\leqslant x\leqslant a+h$. При этом говорят, что x равно a с точностью до h. Например, запись $\pi=3{,}14\pm0{,}01$ означает, что $|\pi-3{,}14|\leqslant0{,}01$, т. е. число π равно 3,14 с точностью до 0,01.

При округлении числа с недостатком с точностью до 10^{-n} сохраняются n первых знаков после запятой, а последующие отбрасываются. Например, при округлении числа 17,2397 с недостатком до тысячных, т. е. до 10^{-3}, получаем 17,239, до сотых — 17,23, до десятых — 17,2.

При округлении числа с избытком с точностью до 10^{-n} n-й знак после запятой увеличивается на единицу, а все последующие отбрасываются. Например, при округлении числа 2,5143 с избытком до тысячных получаем 2,515, до сотых — 2,52, до десятых — 2,6.

Погрешность округления в обоих случаях не превосходит 10^{-n}.

Округление с наименьшей погрешностью: если первая отбрасываемая цифра данного числа меньше 5, то округляют с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то округляют с избытком. Например, при округлении числа 8,351 до сотых получаем 8,35, а при округлении до десятых — 8,4.

Запись $x\approx a$ означает, что число a является приближенным значением числа x. Например, $\sqrt{2}\approx1{,}41$.

Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближенного значения величины. Если x — точное значение, a — приближенное, то относительная погрешность равна

$$\frac{|x-a|}{|a|}.$$

Относительную погрешность обычно выражают в процентах. Например, если точное значение величины равно 1,95, а приближенное равно 2, то относительная погрешность приближения равна

$$\frac{|2-1{,}95|}{2}=\frac{0{,}05}{2}=0{,}025,\text{ или } 2{,}5\%.$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

8. Алгебраическое выражение — выражение, состоящее из чисел и букв, соединенных знаками действий.

Примеры алгебраических выражений:

$$2(m+n);\ 3a+2ab-1;\ (a-b)^2;\ \frac{2x+y}{z}.$$

Значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами. Например, числовое значение выражения $3a+2ab-1$ при $a=2$ и $b=3$ равно $3\cdot2+2\cdot2\cdot3-1=17$.

9. Алгебраическая сумма — запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «—».

Правила раскрытия скобок.

1) Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы, например:

$$14+(7-23+21)=14+7-23+21.$$
$$a+(b-c-d)=a+b-c-d.$$

2) Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный, например:

$$14-(7-23+21)=14-7+23-21,$$
$$a-(b-c-d)=a-b+c+d.$$

10. Одночлен — алгебраическое выражение, представляющее собой произведение числовых и буквенных множителей.

Примеры одночленов: $3ab$, $-2ab^2c^3$, a^2, a, $0{,}6xy^5y^2$, $-t^4$.

Например, числовыми множителями одночлена

$$3a^2(0{,}4)\cdot b(-5)c^3$$

являются 3; 0,4; —5, а буквенными — a^2, b, c^3.

Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и поставить их произведение на первое место, затем произведения всех одинаковых буквенных множителей записать в виде степеней.

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}abc^2$ равен $\frac{3}{4}$, коэффициент одночлена $-7a^3b$ равен —7, коэффициент одночлена a^2bc равен 1, коэффициент одночлена $-ab^2$ равен —1.

11. Многочлен — алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Примеры многочленов:
$4ab^2c^3$ — одночлен,
$2ab-3bc$ — двучлен,
$4ab+3ac-bc$ — трехчлен.

Члены многочлена — одночлены, из которых состоит многочлен. Например, членами многочлена $2ab^2-3a^2c+7bc-4bc$ являются $2ab^2$, $-3a^2c$, $7bc$, $-4bc$.

7 Заказ 1206

Подобные члены — одночлены, отличающиеся только коэффициентами, или одинаковые одночлены.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, например:

$$2ab-4bc+ac+3ab+bc=5ab-3bc+ac.$$

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Действия над одночленами и многочленами:

1) Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены, например:

$$(2a^2b-3bc)+(a^2b+5bc)-(3a^2b-bc)=$$
$$=2a^2b-3bc+a^2b+5bc-3a^2b+bc=3bc.$$

2) Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить, например:

$$(2ab-3bc)(4ac)=(2ab)(4ac)+(-3bc)(4ac)=$$
$$=8a^2bc-12abc^2.$$

3) Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить, например:

$$(5a-2b)(3a+4b)=(5a)(3a)+(5a)(4b)+$$
$$+(-2b)(3a)+(-2b)(4b)=$$
$$=15a^2+14ab-8b^2.$$

4) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить, например:

$$(4a^3b^2-12a^2b^3):(2ab)=$$
$$=(4a^3b^2):(2ab)+(-12a^2b^3):(2ab)=2a^2b-6ab^2.$$

12. Формулы сокращенного умножения.

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$;
4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
5) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
6) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
7) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

13. Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов, например:

$$4x^2-9y^2=(2x+3y)(2x-3y).$$

При разложении многочлена на множители используются следующие *способы:*

1) *Вынесение общего множителя за скобку,* например:

$$3ax+6ay=3a(x+2y).$$

2) *Способ группировки,* например:

$$a^3-2a^2-2a+4=(a^3-2a^2)-(2a-4)=$$
$$=a^2(a-2)-2(a-2)=(a-2)(a^2-2).$$

3) *Применение формул сокращенного умножения,* например:

$$9x^2-\frac{1}{16}y^2=\left(3x+\frac{1}{4}y\right)\left(3x-\frac{1}{4}y\right);$$
$$27x^3+8y^6=(3x+2y^2)(9x^2-6xy^2+4y^4);$$
$$z^2-14z+49=(z-7)^2.$$

Разложение квадратного трехчлена на множители — представление его в виде $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Например:

$$2x^2+3x-2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2).$$

14. Алгебраическая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой — алгебраические выражения.

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{a^2+b}{c},\quad \frac{3x-2y}{a+1}.$$

Предполагается, что буквы, употребляемые в записи алгебраической дроби, могут принимать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Основное свойство дроби: при умножении числителя и знаменателя на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь. Например:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя. Например:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей.

Для нахождения алгебраической суммы двух или нескольких дробей эти дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{a^2b}$ и $\frac{1}{ab^2}$ равен a^2b^2, поэтому

$$\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{b}{a^2b^2}+\frac{a}{a^2b^2}=\frac{b+a}{a^2b^2}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей, например:

$$\frac{2a}{3b}\cdot\frac{b^2}{4a}=\frac{2ab^2}{3b\cdot 4a}=\frac{1}{6}b,$$

$$\frac{x^2-y^2}{2xy}:\frac{x+y}{4x}=\frac{(x^2-y^2)\cdot 4x}{2xy\,(x+y)}=\frac{2\,(x-y)}{y}.$$

15. Тождество — равенство, справедливое при любых допустимых значениях входящих в него букв. Например, тождествами являются равенства:

$$a^2-b^2=(a-b)\,(a+b),\ \sqrt{a^2}=|a|,$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \frac{a^2-1}{a-1}=a+1.$$

ПРОГРЕССИИ

16. Арифметическая прогрессия — числовая последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$, удовлетворяющая условию $a_{n+1}=a_n+d$, где n — любое натуральное число, а d — заданное число, называемое *разностью* этой прогрессии.

Например, последовательность 1, 5, 9, ..., $4n-3$, ... является арифметической прогрессией с разностью $d=4$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n=a_1+(n-1)\,d.$$

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

17. Геометрическая прогрессия — числовая последовательность $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$, удовлетворяющая условию $b_{n+1}=b_nq$, где n — любое натуральное число, а q — заданное число, называемое *знаменателем* этой прогрессии, причем $b_1\neq 0$, $q\neq 0$.

Например, последовательность 3, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5^2}$, ..., $\frac{3}{5^{n-1}}$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{1}{5}$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n=b_1q^{n-1}.$$

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S=\frac{b_1\,(1-q^n)}{1-q},\ q\neq 1.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — геометрическая прогрессия со знаменателем q, таким, что $|q|<1$. Например, геометрическая прогрессия 4, $-\frac{4}{7}$, $\frac{4}{7^2}$, $-\frac{4}{7^3}$, ..., $4\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$, ... является бесконечно убывающей.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

СТЕПЕНИ И КОРНИ

18. Степень числа a с натуральным показателем n, большим 1,— произведение n множителей, равных a, т. е.

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}.$$

Например, $2^3=2\cdot 2\cdot 2$, $m^5=\underbrace{m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m}_{5\text{ раз}}$.

В записи степени a^n число a — *основание степени*, n — *показатель степени*. Например, в записи степени 2^3 число 2 — основание степени, число 3 — показатель степени.

Первая степень числа — само число: $a^1=a$. Например, $3^1=3$, $\left(\frac{1}{13}\right)^1=\frac{1}{13}$.

Действие возведения в степень — нахождение степени числа.

Основные свойства степени:

1) При умножении степеней с равными основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

2) При делении степеней с равными основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

3) При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются:

$$(a^n)^m=a^{nm}.$$

4) При возведении произведения в степень в эту степень возводится каждый множитель:

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

5) При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

19. Квадратный корень из числа a — такое число, квадрат которого равен a. Например, 6 — квадратный корень из числа 36; число -6 также квадратный корень из числа 36.

Извлечение квадратного корня — действие нахождения квадратного корня. Извлечь квадратный корень можно только из неотрицательного числа.

Арифметический квадратный корень из числа a — неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначается так: $\sqrt{a}$. Например, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{144}=12$.

Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только для $a\geqslant 0$, при этом

$$\sqrt{a}\geqslant 0,\ (\sqrt{a})^2=a.$$

Свойства квадратных корней:

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.
Например, $\sqrt{144\cdot 196}=\sqrt{144}\cdot\sqrt{196}=12\cdot 14=168$.

2) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, если $a\geqslant 0$, $b>0$.

Например, $\sqrt{\frac{169}{225}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}}=\frac{13}{15}$.

3) $\sqrt{a^{2n}}=a^n$, если $a\geqslant 0$, n — натуральное число.
Например, $\sqrt{3^6}=3^3=27$.

Эти свойства используются при преобразовании выражений, содержащих квадратные корни. Основные из этих преобразований — *вынесение множителя из-под знака корня:*

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b},\ \text{если } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,$$

и *внесение множителя под знак корня:*

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b},\ \text{если } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0.$$

20. Степень с рациональным показателем.

Степень с целым отрицательным показателем определяется равенством $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, где $a\neq 0$, n — натуральное число. Например, $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=8$.

Степень с нулевым показателем определяется равенством $a^0=1$, где $a\neq 0$. Например, $4^0=1$, $(-0{,}2)^0=1$.

Корень натуральной степени из числа a — число, n-я степень которого равна a. Например, числа 2 и (-2) — корни четвертой степени из 16, число (-3) — корень третьей степени (корень кубический) из числа -27.

Арифметический корень n-й степени из числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$, $n\geqslant 2$) — неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Например, $\sqrt[4]{16}=2$, $\sqrt[3]{27}=3$.

Если $a\geqslant 0$ и n — натуральное число, $n\geqslant 2$, то

$$\sqrt[n]{a}\geqslant 0\ \text{и}\ (\sqrt[n]{a})^n=a.$$

Свойства арифметического корня (m, n — натуральные числа):

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$;

3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$, $a\geqslant 0$;

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $a\geqslant 0$.

Степень с рациональным показателем определяется равенством $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, где $a>0$, n — натуральное, m — целое число.

Свойства степени с рациональным показателем (p, q — рациональные числа, $a>0$, $b>0$):

1) $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$;
2) $a^p:a^q=a^{p-q}$;
3) $(a^p)^q=a^{pq}$;
4) $(ab)^p=a^pb^p$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$.

Возведение в степень числового неравенства: если обе части неравенства положительны, то при возведении его в положительную степень знак неравенства сохраняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

21. Степень с действительным показателем для иррационального показателя r и положительного основания a определяется как действительное число a^r, к которому стремятся члены последовательности $a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_n}, \ldots$, если $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — последовательные десятичные приближения числа r. Например, $3^{\sqrt{2}}$ — число, к которому стремится последовательность $3^{1,4}, 3^{1,41}, 3^{1,414}, \ldots$.

Свойства степени с действительным показателем такие же, как и свойства степени с рациональным показателем.

УРАВНЕНИЯ

22. Уравнение с одним неизвестным — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Пример уравнения: $2x+3=3x+2$, где x — неизвестное число, которое нужно найти.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 3 является корнем уравнения $x+1=7-x$, так как $3+1=7-3$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Основные свойства уравнений:

1) Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

2) Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

23. Квадратное уравнение — уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c — заданные числа, причем $a\neq 0$, x — неизвестное число.

Коэффициенты квадратного уравнения называют так: a — первый или старший коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Примеры квадратных уравнений:

$$2x^2-x-1=0,\ 3x^2+7x=0.$$

Неполное квадратное уравнение — квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, у которого хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Примеры неполных квадратных уравнений:

$$x^2=0,\ 5x^2+4=0,\ 8x^2+x=0.$$

Формула корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Например, уравнение $3x^2+5x-2=0$ имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6},\ \text{т. е.}\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-2;$$

уравнение $x^2-6x+13=0$ имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm 4i}{2}=3\pm 2i.$$

Приведенное квадратное уравнение — уравнение вида

$$x^2+px+q=0.$$

Формула корней приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Например, корни уравнения $x^2-6x-7=0$ таковы:

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm 4,\ \text{т. е.}$$
$$x_1=7,\ x_2=-1.$$

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, и их произведение равно свободному члену.

Таким образом, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

24. Система двух уравнений с двумя неизвестными — два уравнения с двумя неизвестными x и y, рассматриваемые совместно.

Примеры систем уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}3x-y=5,\\2x+y=7;\end{cases}\quad\begin{cases}x-2y=7,\\x^2-4y^2=-35.\end{cases}$$

Решение системы — пара чисел x, y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Например, решением системы

$$\begin{cases}4x-y=2,\\5x+y=7\end{cases}$$

является пара чисел $x=1$, $y=2$.

Решить систему — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

При решении систем уравнений применяются следующие *способы:*

1) *Способ подстановки.*

Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражают через другое и подставляют в другое уравнение системы.

2) *Способ алгебраического сложения.*

Уравняв модули коэффициентов при одном из неизвестных системы

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$$

почленным сложением или вычитанием уравнений системы исключают это неизвестное.

3) *Графический способ.*

Строят графики уравнений системы и находят координаты точки их пересечения.

НЕРАВЕНСТВА

25. Числовые неравенства.

Неравенство $a>b$ означает, что разность $a-b$ положительна.

Неравенство $a<b$ означает, что разность $a-b$ отрицательна.

Если $a>b$, то $b<a$.

Неравенство — два числовых или алгебраических выражения, соединенные знаком $>$ или $<$.

Примеры неравенств: $4>7-5$; $2a+b<a^2+b^2$.

Для любых двух чисел a и b только одно из следующих трех соотношений является верным: $a>b$, $a=b$, $a<b$.

Основные свойства числовых неравенств:

1) Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

2) Если прибавить к обеим частям неравенства или вычесть из них одно и то же число, то знак неравенства не изменится: если $a>b$, то $a+c>b+c$ и $a-c>b-c$ для любого числа c.

Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак переносимого числа на противоположный.

3) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, тогда, если это число положительно, знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный: если $a>b$, то

$$ac>bc \text{ и } \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \text{ при } c>0,$$

$$ac<bc \text{ и } \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \text{ при } c<0.$$

Сложение неравенств. Неравенства одинакового знака можно складывать, при этом получается неравенство того же знака: если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Например:

$$+\begin{array}{r} 4>3{,}5 \\ -2>-5 \\ \hline 2>-1{,}5 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 2{,}3<3{,}5 \\ -4<-3 \\ \hline -1{,}7<0{,}5 \end{array}$$

Умножение неравенств. Неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно перемножать, при этом получается неравенство того же знака: если $a>b$, $c>d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac>bd$.

Например:

$$\times\begin{array}{r} 2{,}4>2{,}1 \\ 4>3 \\ \hline 9{,}6>6{,}3 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1{,}7<2{,}3 \\ 2<3 \\ \hline 3{,}4<6{,}9 \end{array}$$

Если $a>b$ и a, b — положительные числа, то $a^2>b^2$, $a^3>b^3$ и вообще при любом натуральном n выполняется неравенство $a^n>b^n$.

Например, $6^2>5^2$, $6^3>5^3$, $6^{12}>5^{12}$.

Строгие неравенства — неравенства со знаками $>$ (больше) и $<$ (меньше).

Например, $5>3$, $x<1$.

Нестрогие неравенства — неравенства со знаками $\geqslant$ (больше или равно) и $\leqslant$ (меньше или равно).

Например, $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $x\leqslant 3$.

Нестрогое неравенство $a\geqslant b$ означает, что $a>b$ или $a=b$.

Свойства нестрогих неравенств такие же, как и свойства строгих неравенств. При этом в свойствах строгих неравенств *противоположными* считаются знаки $>$ и $<$, а в свойствах нестрогих неравенств — знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Среднее арифметическое двух чисел a и b — число $\frac{a+b}{2}$.

Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b — число $\sqrt{ab}$.

Если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

26. Неравенство с одним неизвестным — это неравенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Примеры неравенств первой степени с одним неизвестным:

$$3x+4<5x-2;\ \frac{1}{3}x-1\geqslant\frac{3-x}{4}.$$

Решение неравенства с одним неизвестным — значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, число 3 является решением неравенства $x+1>2-x$, так как $3+1>2-3$.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Основные свойства неравенств с одним неизвестным:

1) Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив его знак на противоположный, при этом знак неравенства не меняется.

2) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю; если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

Система неравенств первой степени с одним неизвестным — это несколько неравенств, содержащих одно и то же неизвестное число в первой степени и рассматриваемых совместно.

Примеры систем неравенств первой степени с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 2(x-1)>3, \\ 3x+4>1-x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2\leqslant 5x, \\ 3(x-1)>4, \\ x-4\leqslant 7. \end{cases}$$

Решение системы неравенств — то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Например, число 2 является решением системы

$$\begin{cases} 3x-4<2x, \\ x+2>3, \end{cases}$$

так как $3\cdot2-4<2\cdot2$ и $2+2>3$.

Вообще решениями этой системы являются все числа x, такие, что $1<x<4$; других решений нет.

Решить систему неравенств — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

27. Квадратное неравенство — неравенство, в левой части которого стоит квадратный трехчлен, а в правой — нуль.

Примеры квадратных неравенств:

$$x^2-x+2>0,\ 2x^2-3x-4\leqslant0,$$
$$x^2-4>0.$$

Для решения квадратного неравенства нужно:

1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;

2) найти корни соответствующего квадратного уравнения;

3) построить эскиз графика и по нему определить промежутки, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

Например, решая неравенство $2x^2+3x-2<0$, имеем:

1) ветви параболы направлены вверх, так как $2>0$;

2) корни уравнения $2x^2+3x-2=0$ таковы: $x_1=0{,}5$, $x_2=-2$;

3) по эскизу графика функции $y=2x^2+3x-2$ устанавливаем, что $y<0$ при $-2<x<0{,}5$.

28. Метод интервалов используется для решения неравенств. Рассмотрим, например, неравенство $(x-1)(x-2)(x-3)<0$. Числа 1, 2 и 3 разбивают числовую ось на 4 интервала: $x<1$, $1<x<2$, $2<x<3$, $x>3$. На каждом из интервалов левая часть неравенства сохраняет знак, и при переходе к соседнему интервалу знак левой части меняется на противоположный. Так как при $x>3$ левая часть неравенства положительна, то решениями данного неравенства являются значения x из интервалов $x<1$ и $2<x<3$.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

29. Функция. Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана функция $y(x)$. При этом x называют

независимой переменной (или *аргументом*), а y — *зависимой переменной.*

Область определения функции — множество всех значений, которые может принимать ее аргумент.

Если функция задана формулой, то считают, что ее область определения — множество значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл.

Например, функция $y=\sqrt{x-2}$ определена при $x\geqslant2$.

Функция $y(x)$ называется *возрастающей* на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2, принадлежащих этому промежутку, если $x_2>x_1$, то $y(x_2)>y(x_1)$. Например, функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой; функция $y=x^2$ возрастает на промежутке $x\geqslant0$.

Функция $y(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. для любых x_1, x_2, принадлежащих этому промежутку, если $x_2>x_1$, то $y(x_2)<y(x_1)$. Например, функция $y=-2x$ убывает на всей числовой прямой; функция $y=x^2$ убывает на промежутке $x\leqslant0$, функция $y=\frac{1}{x}$ убывает при всех $x\neq0$.

График функции $y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;\ y(x))$.

Четная функция — функция $y(x)$, обладающая свойством

$$y(-x)=y(x)$$

для каждого x из области ее определения. Например, $y=x^4$ — четная функция.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция — функция $y(x)$, обладающая свойством

$$y(-x)=-y(x)$$

для каждого x из области ее определения. Например, $y=x^3$ — нечетная функция.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

30. Линейная функция — функция вида

$$y=kx+b,$$

где k и b — заданные числа.

График линейной функции $y=kx+b$ — прямая. При $b=0$ функция принимает вид $y=kx$, ее график проходит через начало координат.

31. Прямая пропорциональная зависимость — зависимость, выражаемая формулой $y=kx$, где $k>0$, $x>0$.

Обратная пропорциональная зависимость — зависимость, выражаемая формулой $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$, $x>0$, k — коэффициент пропорциональности.

32. Функция $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ определена при $x\neq 0$, принимает все действительные значения, кроме нуля.

Если $k>0$, то функция $y=\frac{k}{x}$ $\left(\text{например, } y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{2x}\right)$:

а) принимает положительные значения при $x>0$ и отрицательные при $x<0$;

б) убывает на промежутках $x<0$ и $x>0$.

Если $k<0$, то функция $y=\frac{k}{x}$ $\left(\text{например, } y=-\frac{1}{x},\ y=-\frac{2}{x};\ y=-\frac{1}{3x}\right)$:

а) принимает положительные значения при $x<0$ и отрицательные при $x>0$;

б) возрастает на промежутках $x<0$ и $x>0$.

График функции $y=\frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Она имеет две ветви, расположенные симметрично относительно начала координат. При $k>0$ график расположен в первом и третьем квадрантах, а при $k<0$ — во втором и четвертом квадрантах.

33. Квадратичная функция — функция вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — заданные действительные числа, $a\neq 0$, x — действительная переменная.

Графиком квадратичной функции является *парабола*.

В частности, графиком функции $y=x^2$ является парабола с вершиной в точке $(0;\ 0)$; ось симметрии этой параболы — ось ординат.

В общем случае *вершиной параболы*

$$y=ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+y_0$$

является точка $(x_0;\ y_0)$, где $x_0=\frac{-b}{2a}$, $y_0=y(x_0)$.

Ось симметрии параболы — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, при $a<0$ — вниз.

Параболу $y=ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+y_0$ можно получить сдвигом параболы $y=ax^2$ вдоль координатных осей. Например, параболу $y=3(x+2)^2+4$ можно получить сдвигом параболы $y=3x^2$ вдоль оси Ox на две единицы влево и вдоль оси Oy на четыре единицы вверх.

Схема построения графика квадратичной функции

$$y=ax^2+bx+c:$$

1. Построить вершину параболы $(x_0;\ y_0)$, вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=y(x_0)$ или методом выделения полного квадрата.

2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат,— ось симметрии параболы.

3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.

4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно ее оси, например точки с абсциссами $x=0$ и $x=2x_0=-\frac{b}{a}$ и ординатой $y=c$.

5. Провести через построенные точки параболу.

Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции. Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+y_0$:

а) принимает наименьшее значение, равное y_0, при $x=x_0$, если $a>0$;

б) принимает наибольшее значение, равное y_0, при $x=x_0$, если $a<0$.

Например, квадратичная функция $y=2(x-1)^2+3$ принимает при $x=1$ наименьшее значение, равное 3;

квадратичная функция $y=-4(x+2)^2-5$ принимает при $x=-2$ наибольшее значение, равное -5.

34. Степенная функция — функция

$$y=x^p,$$

где $p\in \mathbf{R}$.

Свойства степенной функции.

1. *Область определения:*

1) множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, если p — натуральное число (например, для функции $y=x^3$);

2) множество всех действительных чисел, кроме нуля, если p — неположительное целое число (например, для функции $y=x^{-3}$);

3) множество неотрицательных чисел, если p — положительное не натуральное число (например, для функций $y=x^{\frac{2}{3}}$ и $y=x^{\sqrt{2}}$);

4) множество положительных чисел, если p — отрицательное не целое число (например, для функций $y=x^{-\frac{2}{3}}$ и $y=x^{-\sqrt{2}}$).

2. *Множество значений* функции $y=x^p$ при $x>0$, $p\neq 0$ — все положительные числа.

3. Функция $y=x^p$ *возрастающая* при $x>0$, если $p>0$; *убывающая* при $x>0$, если $p<0$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

35. Радиан — мера центрального угла, опирающегося на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \quad \alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^\circ, \quad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад.}$$

Длина l дуги окружности радиуса R, стягивающей угол в α радиан:

$$l = \alpha R.$$

36. Синус угла α (обозначается $\sin\alpha$) — ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α. Например, $\sin 270^\circ = -1$, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

37. Косинус угла α (обозначается $\cos\alpha$) — абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α. Например, $\cos 270^\circ = 0$, $\cos(-\pi) = -1$.

38. Тангенс и котангенс угла α (обозначаются $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$) определяются равенствами

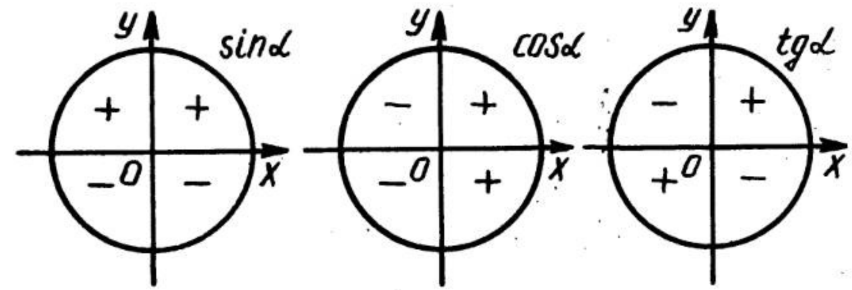
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Например, $\operatorname{tg} 225^\circ = 1$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\operatorname{ctg}(-45^\circ) = -1$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = 1$.

39. Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

40. Знаки синуса, косинуса и тангенса.



41. Тригонометрические формулы.

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Синус, косинус, тангенс углов α и $-\alpha$:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Формулы сложения:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Синус и косинус двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Формулы приведения:

$$\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

БЕСЕДА О «МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ»

Пусть дано... Такими словами явно или неявно обычно начинаются формулировки теорем и условий математических задач. Затем на языке строго определенных математических понятий следует полное изложение исходных предпосылок, которое воспринимается совершенно одинаково любым математиком, являющимся в соответствующей области специалистом.

Иначе обстоит дело с прикладными задачами. В них непосредственно задается реальный «нематематический» объект: явление природы, производственный процесс, конструкция, система управления, экономический план и т. д. Исследование начинается с формализации объекта, с построения соответствующей математической модели: выделяются его наиболее существенные черты и свойства и описываются с помощью математических уравнений. Только после того, как построена математическая модель, т. е. задаче придана математическая форма, мы можем воспользоваться для ее изучения математическими методами.

Вы знакомы с математическими моделями, хотя, может быть, раньше и не встречали этого термина. Представьте себе, что нужно определить площадь комнаты или, если быть более точным, площадь пола комнаты ... . Эта элементарная процедура фактически означает следующее. Реальный объект — пол комнаты — заменяется абстрактной математической моделью — прямоугольником. Прямоугольнику приписываются размеры, полученные в результате измерения, и площадь такого прямоугольника приближенно принимается за искомую площадь пола.

Вспомните задачи по физике. В них обычно задается некоторая физическая система и условия, в которых она находится. Вы сами должны сделать предположения о возможной идеализации этой системы (например, рассматривать некоторое реальное тело как материальную точку), выделить физические законы, которые нужно принять во внимание при ее изучении, и записать их в виде математических уравнений. Это и есть математическая модель рассматриваемой физической системы.

В прикладных задачах построение математической модели — это один из наиболее сложных и ответственных этапов работы. Опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель — значит решить проблему более чем наполовину. Трудность данного этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний. При решении школьных задач по физике вы выступаете одновременно как физик и математик. Однако для больших проблем, которые рассматриваются в прикладной математике, такое совмещение профессий нетипично. Обычно над математической моделью совместно работают математики и специалисты из той области, к которой относится изучаемый объект. Для успеха их деятельности очень важно взаимопонимание, которое приходит тогда, когда математики обладают специальными знаниями об объекте, а их партнеры — определенной математической культурой, опытом применения математических методов исследования в своей области.

Математическая модель никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей. Основанная на упрощении, идеализации, она является его приближенным отражением. Поэтому результаты, которые получаются при анализе модели, всегда носят для объекта приближенный характер.

Их точность определяется степенью соответствия, адекватности модели и объекта. Вопрос о точности, достоверности результатов — это один из самых тонких вопросов прикладной математики.

Наиболее просто он решается в случае, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта, и имеется большой практический опыт их применения. Тогда можно априори (до опыта, здесь — до начала решения математической задачи) оценить точность результатов, которую обеспечивает рассматриваемая модель.

Например, для расчета траектории советского космического корабля «Луна-1» ... была использована математическая модель, основанная на законах механики и всемирного тяготения.

Более сложная ситуация возникает тогда, когда наши знания об изучаемом объекте недостаточны. В этом случае при построении математической модели приходится делать дополнительные предположения, которые носят характер гипотез. Выводы, полученные в результате исследования такой гипотетической модели, носят для изучаемого объекта условный характер. Они справедливы для него настолько, насколько правильны исходные предположения. Для их проверки необходимо сопоставить результаты исследования модели со всей имеющейся информацией об изучаемом объекте. Степень близости расчетных и экспериментальных данных позволяет судить о качестве гипотетической модели, о справедливости или несправедливости исходных предположений. Таким образом, вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим вопросом и не может быть решен математическими методами. Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова. Критерий практики позволяет сравнить различные гипотетические модели и выбрать из них такую, которая является наиболее простой и в то же время в рамках требуемой точности правильно передает свойства изучаемого объекта.

Академик *А. Н. ТИХОНОВ*
Профессор *Д. П. КОСТОМАРОВ*

ОТВЕТЫ

1. 2) 977,8129; 4) 17239,68. **2.** 2) 15,5; 4) 290,3. **3.** 2) 0,0078125; 4) 0,002257363. **5.** 2) 0,31830989. **6.** 2) 2389,5606; 4) $-561{,}79775$. **7.** 2) 1,667633; 4) $2{,}9137604 \cdot 10^{-4}$. **10.** 2) 136,1; 4) $-16{,}68$. **11.** 2) 12,59643; 4) 2844,369. **12.** 2) 7,551; 4) 6,668. **13.** 2) $4{,}8113 \cdot 10^{12}$; 4) $1{,}3 \cdot 10^{11}$; 6) $9 \cdot 10^{14}$. **14.** 2) 16807; 4) 83521; 6) 11025. **15.** 2) $4{,}0282 \cdot 10^{-18}$; 4) $1{,}69274 \cdot 10^{-11}$. **16.** 2) 9963; 4) 55103. **17.** 2) 501; 4) 267308. **18.** 2) $-0{,}3$. **19.** 2) 810; 4) 200. **20.** 2) 8; 4) 0,4. **21.** 2) 4,56 м. **22.** 2) 20,016. **23.** 2) 6,48. **24.** 90000 км; 112500 км; 8100000 км; 67500000 км. **25.** 2) 33,8; 68; 95; 104; 125,6; 212. **26.** 2) 30,4; 4) 18,2. **27.** 2) 76; 4) 7,4. **28.** 2) 90; 4) 4,3. **29.** 2) 262; 4) -27. **30.** Не хватит, нужно 2 кг 808 г. **31.** 2) 4,3; 4) 65289. **32.** 1) 31,6; 2) 54; 3) 61,3; 4) 13,7. **33.** 75,9; 81,6; 77,5; 63,6; наибольшая высота $\approx 81{,}63$ м через $\approx 4{,}08$ с. **34.** 2) 38,76; 4) ≈ 35. **35.** 2) 0; 4) 0. **36.** 2) 2,47; 4) $\approx 29{,}28$. **37.** 2) $\approx 14{,}93$; 4) -55. **38.** 2) 0; 4) $\approx 1{,}936$. **39.** 1) 20,5 Ом; 2) 67,4 Ом. **40.** 2) $x_1 \approx -14{,}16$, $x_2 \approx 11{,}16$; 4) $x_1 = -5{,}4$, $x_2 = 3{,}4$. **41.** 2) $x_1 = -8{,}6$, $x_2 = 6{,}4$; 4) $x_1 \approx -6{,}94$, $x_2 \approx 13{,}44$. **42.** 82 м, 93 м. **43.** 2) $x_1 \approx -2{,}84$, $x_2 \approx 0{,}6$. **44.** 13,4 см^3, 27,1 см^3. **45.** 40,6 м. **46.** 2) 20545; 4) $\approx 12{,}99$. **47.** 2) 385; 4) $\approx 4{,}79$. **48.** 2) 2025; 4) $\approx 30{,}9$. **49.** 2) $\approx 25{,}44$; 4) $\approx -1{,}244$. **50.** 2) $\approx 247{,}8$; $\approx 2{,}27$; 4) $\approx 99{,}6$; $\approx 0{,}73$. **51.** 2) 28000; 4) 16; 6) $-1{,}4886928 \cdot 10^{10}$. **52.** 2) 132,02; 4) 234. **53.** 2) 440; 4) 710. **54.** 2) 73; 4) 73,484692. **55.** 2) 4; 4) -363. **56.** 1,55 м^2. **57.** 2) ≈ 4291; 4) $\approx 352{,}3$. **58.** 2) $x_1 \approx 0{,}36$, $x_2 \approx 4{,}78$; 4) $x_1 \approx -15{,}46$, $x_2 \approx 11{,}36$. **59.** Нельзя, так как оставшийся объем $\approx 0{,}22$ л. **60.** 2) $\approx 144{,}7$. **61.** а) 260 000 р.; б) 338 000 р.; в) 571 220 р. **62.** 2) 32; 4) 0. **63.** 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^5$; 4) $\left(\frac{c}{d}\right)^2$. **65.** 2) 21^{-3}; 4) a^{-9}. **66.** 2) $\frac{121}{81}$; 4) 32; 6) $-\frac{1}{169}$. **67.** 2) $\frac{53}{16}$; 4) -875. **69.** 2) $\frac{1}{(x+y)^3}$; 4) $\frac{9a^3}{b^4}$; 6) $\frac{a^2}{bc^4}$. **70.** 2) -125; 4) $\frac{1}{17}$. **71.** 2) 0,0016; 4) $\frac{16}{625}$. **72.** 2) b^8; 4) b^{-28}. **73.** 2) a^8b^{-4}; 4) $3^{-4}a^{-12}$. **74.** 2) $m^{12}n^{-15}$; 4) $-64x^{-15}y^3z^{-9}$. **75.** 2) $\frac{97}{9}$. **76.** 2) $2{,}7 \cdot 10^{-11}$; 4) $1{,}25 \cdot 10^8$. **77.** 2) $5{,}086 \cdot 10^{-8}$; 4) $1{,}6 \cdot 10^{-3}$. **78.** 0,003. **79.** 10^{-11}. **80.** 0,0001 мм. **81.** 2) a^5, $\frac{1}{32}$. **82.** 2) 0. **83.** 2) 10,67; 4) 16,78. **84.** 2) $4{,}23 \cdot 10^{-54}$; 4) $1{,}27 \cdot 10^6$. **85.** 2) $3{,}25 \cdot 10^{16}$ км^3. **86.** 2) $b-a$. **88.** 2) 2; 4) 15. **89.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **90.** 2) -1; 4) -4; 6) -8. **91.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x_1=-2$, $x_2=2$. **92.** 2) x — любое число; 4) $\frac{2}{3} \leqslant x < 2$. **93.** 2) 5; 4) -11; 6) $\frac{1}{30}$. **94.** 2) 2; 4) $4\sqrt{6}$. **95.** 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$ при $x \leqslant 3$, $(x-3)^3$ при $x>3$. **96.** 3974. **97.** 2) $36\sqrt[3]{4}$; 4) 20. **98.** 2) 33; 4) 7. **99.** 2) 0,2; 4) 2. **100.** 2) 50; 4) 16. **101.** 2) a^2b^3; 4) a^2b^3. **102.** 2) $3ab$; 4) $\frac{2}{b}$. **103.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$. **104.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) 2; 6) 4. **105.** 2) $3x$; 4) $2\frac{b}{a}$. **106.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$. **107.** 2) $4\sqrt{2}$; 4) 5. **108.** 2) y^2; 4) a^8b^9; 6) $3a$. **109.** 2) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$;

6) 4. **110.** 2) $\frac{2a^2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$; 6) a^2b. **111.** 2) 6; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 4. **112.** 2) ab^2c; 4) $2xy$. **113.** 2) $3x$; 4) 0. **114.** 2) 7,55; 4) 3,59. **115.** 2) 7; 4) 1. **117.** 2) $2\sqrt[4]{b}$; 4) 1. **120.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **121.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **122.** 2) 49; 4) 125. **123.** 2) 121; 4) 150. **124.** 2) 3; 4) 2,7. **125.** 2) b; 4) a; 6) 1. **126.** 2) 3; 4) $\frac{1}{5}$. **127.** 2) a^2b; 4) x^3. **128.** 2) 1; 4) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **129.** 2) 3; 4) 6. **130.** 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b$. **131.** 2) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{c}-1$. **132.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **133.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **134.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **135.** 2) 2,05; 4) 1,49; 6) 36,46. **137.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}} < (0{,}41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}} > \left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$. **138.** 2) $x=3$; 4) $x=2$; 6) $x=\frac{1}{2}$. **139.** 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3} > \sqrt{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **140.** 2) $x=\frac{5}{2}$; 4) $y=5$. **141.** 2) $x=2{,}6$; 4) $x=4$. **142.** 2) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x=1$. **143.** 2) 6; 4) -3. **144.** 2) 2,1; 4) 27,2. **145.** 2) 0,074. **146.** 2) -3; 4) $\frac{25}{16}$. **147.** 2) 51; 4) 0,04; 6) $-0{,}1$. **148.** 2) 1000. **149.** 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **150.** 2) $x=-1$; 4) $x=1$. **151.** 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. **152.** 2) x — любое число; 4) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$; 6) $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$. **153.** 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; 8) $a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}$. **154.** $a \approx 4{,}64$; $R \approx 2{,}88$; $2R > a$. **155.** 0,86 с. **156.** 2) $y=1$ при $x=2$, $y=5$ при $x=0$ и $x=4$, $y=10$ при $x=-1$ и $x=5$, $y=17$ при $x=-2$ и $x=6$. **157.** 1) $y(-2)=-1$, $y(0)=-5$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=-11$, $y(3)=4$; 2) $y=-3$ при $x=-\frac{1}{2}$, $y=-2$ при $x=-1$, $y=13$ при $x=\frac{3}{2}$, $y=19$ при $x=\frac{4}{3}$. **159.** 2) $x \leqslant 2$, $x \geqslant 5$; 4) $-2 \leqslant x < 3$. **160.** 1) $y(-3)=3$, $y(-1)=1$, $y(1)=-1$, $y(3)=-1$; 2) $y=-2$ при $x=2$, $y=0$ при $x=0$ и $x=4$, $y=2$ при $x=-2$ и $x=6$, $y=4$ при $x=-4$ и $x=8$. **161.** 2) $x \neq -1$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x \geqslant 4$; 6) $-5 \leqslant x \leqslant 1$, $x>2$; 8) $x \geqslant 0$. **162.** 2) Да; 4) да. **167.** 2) $x=16$; 4) $x=\frac{1}{16}$; 6) $x=\frac{1}{243}$. **169.** 2) $x=32$; 4) $x=8$. **172.** 2) Нечетная; 4) не является ни четной, ни нечетной. **173.** 2) Нечетная; 4) нечетная; 6) не является четной и не является нечетной. **182.** 2) $x=0$. **183.** 2) $(-1;\ 0)$. **184.** 2) $y=\frac{1}{2}$ при $x=-4$; 4) $y \leqslant 1$ при $x<0$ и при $x \geqslant 2$. **186.** 2) $(-2;\ 4)$ и $(2;\ -4)$; 4) $(-4;\ -2)$ и $(1;\ 3)$. **192.** 2) $x \leqslant 3$; 4) $y<5$; 6) $x<-5$, $x>5$. **193.** 2) Ребро куба больше 7 дм. **196.** 2) $x=10$; 4) $x=5$. **197.** 2) $x=2$; 4) $x=2$, $x=-7$. **198.** 2) $x=4$; 4) $x=0{,}2$. **199.** $x=\frac{7}{3}$. **200.** 2) $x>-3$; 4) $x<2$; 6) $x<1$, $x>7$. **202.** 2) $x=-2$; 4) $x_1=1$,

$x_2=3$. **203.** 2) $x=2{,}25$. **204.** 2) $x=1$; 4) $x=5$. **205.** 2) $x=4$. **206.** 2) $2\leqslant x\leqslant 3$; 4) $1<x\leqslant 2$; 6) $x\geqslant 1$. **207.** Не меньше 6,24 м. **208.** 2) $x\neq\frac{3}{2}$; 4) x — любое число. **213.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right)$; 4) $(-1;\ -1)$, $(1;\ 1)$. **214.** 2) $x>2$; 4) $x\leqslant -2$. **215.** 2) $x=16$; 4) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $x=-1$. **216.** 2) x — любое число; 4) $2\leqslant x\leqslant 11$; 6) $x<-7$, $-3\leqslant x<-1$, $x\geqslant 3$. **217.** 2) Убывает; 4) убывает. **218.** 2) Нечетная; 4) не является четной и не является нечетной. **220.** 2) $-2\leqslant x\leqslant \frac{1}{3}$. **221.** 2) $x_1=-1$, $x_2=7$; 4) $x=81$; 6) $x_1=3$, $x_2=7$. **222.** 1) $x<-1$, $x>9$; 2) $-1<x\leqslant 0$, $3\leqslant x<4$; 3) $\frac{2}{3}\leqslant x<6$; 4) $x\geqslant 4$. **223.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$. **224.** 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{\circ}$; 8) $\left(\frac{324}{5\pi}\right)^{\circ}$. **225.** 2) 4,71; 4) 2,09. **226.** 2) $2\pi<6{,}7$; 4) $\frac{3}{2}\pi<4{,}8$; 6) $-\frac{3}{2}\pi<-\sqrt{10}$. **228.** 0,4 м. **229.** 2 рад. **230.** $\frac{3\pi}{8}$ см^2. **231.** 2 рад. **232.** 2) 0,82; 4) 3,3; 6) 7. **233.** 2) 7,8°; 4) 1584°; 6) 594°. **234.** 2) $(-1;\ 0)$; 4) $(0;\ -1)$; 6) $(1;\ 0)$. **236.** 2) Вторая; 4) четвертая; 6) вторая. **237.** 2) $(0;\ 1)$; 4) $(-1;\ 0)$; 6) $(0;\ 1)$. **238.** 2) $2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **239.** 2) Вторая; 4) четвертая. **240.** 2) $x=1{,}8\pi$, $k=4$; 4) $x=\frac{4}{3}\pi$, $k=3$; 6) $x=\frac{5}{3}\pi$, $k=2$. **242.** 2) $(0;\ 1)$; 4) $(0;\ -1)$. **243.** 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k=0, \pm 1; \pm 2; \dots$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **244.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) -1; 6) -1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **246.** 2) -1; 4) -1; 6) 1. **247.** 2) 0; 4) -1. **248.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **249.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **251.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **252.** 2) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 6) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **253.** 2) 0,62; 4) 0,64; 6) $-0{,}23$; 8) 0,9. **254.** 2) Вторая; 4) вторая; 6) вторая. **255.** 2) Плюс; 4) плюс; 6) плюс. **256.** 2) Минус; 4) плюс; 6) минус. **257.** 2) Плюс, плюс; 4) минус, минус; 6) минус, минус; 8) плюс, плюс. **258.** 2) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$; 4) $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$. **259.** 2) $\sin 3>0$, $\cos 3<0$, $\operatorname{tg} 3<0$; 4) $\sin(-1{,}3)<0$, $\cos(-1{,}3)>0$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)<0$. **260.** 2) Минус; 4) плюс; 6) плюс; 8) минус. **261.** Знаки чисел $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ совпадают, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ или $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$; числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ или $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$. **262.** 2) Минус; 4) плюс. **263.** 2) $\cos 1{,}3>\cos 2{,}3$. **264.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\pi+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **265.** 2) Во второй.

266. 2) 1,311236; 4) $-0{,}54119612$; 6) 1,1584559; 8) 1,3371652. **267.** 2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$. **268.** 2) Могут; 4) не могут. **269.** 2) Не могут. **270.** $\cos\alpha=\frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{9}$. **271.** $\frac{1}{3}$. **272.** $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **273.** $\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. **274.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **275.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$. **276.** 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 3) $x=2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **278.** 2) 0; 4) $1+\sin\alpha$. **279.** 2) 3; 4) 4. **283.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **284.** $\frac{8}{25}$. **285.** $\frac{37}{125}$. **286.** 1) $x=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **287.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) -3. **288.** 2) $2\cos\alpha$; 4) 2. **290.** 2) 2. **291.** 2) $-2\cos\alpha$. **292.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **293.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **295.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **296.** 2) $\cos 3\beta$; 2) -1. **297.** $-\sin\alpha\sin\beta$. **298.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **299.** 2) $\frac{-2+\sqrt{14}}{6}$. **300.** 2) $-\cos\beta\sin\alpha$; 4) $\sin\alpha\cos\beta$. **301.** $\cos(\alpha+\beta)=\frac{84}{85}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{36}{85}$. **302.** $-\frac{63}{65}$. **303.** 2) 0; 4) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. **305.** 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=4\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **306.** 2) 1. **308.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) -1. **310.** 2) $\frac{24}{25}$. **311.** 2) $\frac{7}{25}$. **312.** 2) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; 4) 1. **313.** 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **315.** 2) $\frac{8}{9}$. **317.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **318.** 2) $\cos 6\alpha$; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$. **320.** 2) $x=\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **321.** $\frac{15}{8}$. **322.** $\sqrt{3}$. **323.** 2) 0; 4) 0; 6) -1. **324.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **325.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **326.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **327.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) -1. **328.** 2) $\cos 2\alpha$. **329.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$. **330.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **333.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 4) $x=\pi+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. **336.** 2) Третья; 4) вторая; 6) вторая. **337.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1. **338.** 2) 2; 4) -1. **339.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$. **341.** 2) 3; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **342.** 2) $-\frac{1}{3}$.

343. 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **344.** 2) $\sin 2\alpha$; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$. **345.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **346.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **347.** 2) $\cos 0>\sin 5$. **348.** 2) Плюс; 4) плюс. **349.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **350.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **351.** $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2\alpha=-\frac{1}{9}$. **352.** 2) $\operatorname{tg}\alpha$. **353.** 2) $\frac{1}{\sin 4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **354.** 2) 1; 4) 1. **355.** 2) $2\operatorname{ctg} 2\alpha$, -2; 4) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$, 2. **357.** 2) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k=0, \pm1, \pm2, \dots$; **358.** 2) -1. **359.** 2) $\cos 4\alpha$; 4) $\sin 2\alpha$. **360.** 2) $x=\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \dots$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \dots$. **362.** 2) $a_1=4$, $a_2=7$, $a_3=10$; 4) $a_1=-\frac{1}{3}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{3}$; 6) $a_1=-1$, $a_2=-4$, $a_3=-27$. **364.** 2) Да; 4) да. **365.** 2) 2, 1, 3, -1. **366.** 2) 9. **367.** 256, 16, 4, 2. **368.** 1, -1, -1, -1, -1, -1. **369.** $a_5=-7$. **370.** 2) $2(n-9)$, $2(n-11)$, $2(n-5)$; 4) $7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, $7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+7}$. **372.** 2) -3, -1, 1, 3, 5. **374.** 2) 79; 4) -42. **375.** 2) $a_n=29-4n$; 4) $a_n=6-5n$. **376.** 12. **377.** Да, $n=11$. **378.** $n=11$, нет. **379.** 2) 0,5. **380.** 2) -13. **381.** 2) -100. **382.** 2) $a_n=5n-17$. **383.** $n\geqslant 9$. **384.** $n<25$. **385.** 2) $a_9=-57$, $d=7$; 4) $a_9=-1$, $d=-1{,}5$. **386.** 44,1 м. **387.** 10 дней. **388.** 30. **389.** 60. **390.** 2) 10050; 4) 2550. **391.** 4850. **392.** 4489. **393.** 2) -192. **394.** 2) 204. **395.** 2) 240. **396.** 4905, 494550. **397.** 2) 2900. **398.** -45. **399.** 10. **400.** 2) $a_{10}=15\frac{5}{6}$, $d=\frac{3}{2}$. **401.** 2) $a_1=-88$, $d=18$. **402.** 78 бревен. **403.** 44. **404.** $a_1=5$, $d=4$. **407.** 2) -3, 12, -48, 192, -768. **409.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **410.** 2) $b_n=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **411.** 2) 5; 4) 8. **412.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{5}$. **413.** $b_8=2374$, $n=5$. **414.** $b_7=3\sqrt{3}$, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **415.** $b_5=6$, $b_1=30\frac{3}{8}$ или $b_5=-6$, $b_1=-30\frac{3}{8}$. **416.** 1 млн. 452 тыс. р. **417.** 0,25 см². **418.** 5. **420.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) -400. **421.** 2) 2186. **422.** $b_1=-1$, $b_8=128$. **423.** 2) $n=7$; 4) $n=5$. **424.** 2) $n=9$, $b_9=2048$; 4) $n=4$, $q=7$. **425.** 2) 364; 4) 305. **426.** 2) $b_5=4802$, $S_4=800$. **427.** $-1\frac{31}{32}$. **429.** 2) $q=5$, $b_3=300$ или $q=-6$, $b_3=432$. **430.** 2) $q=2$ или $q=-2$; 4) $S_5=781$ или $S_5=521$. **432.** 2) Да; 4) да. **433.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$. **434.** 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **435.** 2) Нет; 4) да. **436.** $90\frac{10}{11}$. **437.** 2) $6+4\sqrt{3}$. **438.** 2) $\frac{1}{2}$. **439.** $2a$. **440.** $R_n=\frac{1}{3^{n-1}}R_1$. **441.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **446.** 2) 4, 16, 64; 4) 0, 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **447.** 2) $a_{10}=1$, $a_{30}=\frac{39}{59}$; 4) $a_{10}=0$, $a_{30}=0$. **448.** $\frac{11}{16}$. **449.** 2) $d=-\frac{1}{2}$, $a_4=2$,

$a_5=1\frac{1}{2}$; 4) $d=-3$, $a_4=\sqrt{2}-9$, $a_5=\sqrt{2}-12$. **451.** $-5\frac{1}{3}$. **452.** 2) -1080. **453.** 143. **454.** 2) -22. **455.** 2) $q=-\frac{1}{2}$, $b_4=-\frac{1}{32}$, $b_5=\frac{1}{64}$; 4) $q=-\sqrt{2}$, $b_4=-10\sqrt{2}$, $b_5=20$. **456.** 2) $b_n=-0{,}5(-2)^{n-1}$. **457.** 2) $b_4=\frac{125}{8}$. **458.** 2) $S_{10}=1\frac{85}{256}$; 4) $S_9=5$. **459.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **460.** $-\frac{4}{5}$. **461.** $\frac{3}{2}$. **462.** $24\frac{41}{74}$. **463.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **464.** $-\frac{5}{2}$. **465.** 2) $a_{19}=0$, $a_1=-108$. **466.** 2) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$. **468.** 14. **469.** 2) $a_{16}=-1\frac{2}{3}$, $d=-\frac{2}{15}$. **470.** 2) 27. **471.** 2) -27; 4) $\pm\frac{1}{25}$. **472.** 6. **473.** 2) Нет; 4) да. **475.** В среду. **476.** $a_1=8$, $d=-3$ или $a_1=2$, $d=3$. **477.** $a_1=5$, $d=-5$ или $a_1=-5$, $d=5$. **478.** 180 раз. **480.** 72. **481.** $1024a$. **482.** 3 ч. **484.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **485.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **486.** 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}<(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$. **487.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **488.** 2) $5ab\sqrt{b}$; 4) $11ab\sqrt{ab}$. **489.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **490.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **491.** 2) $-1\frac{5}{6}$. **492.** 2) $x=\frac{1}{9}$; 4) $x=0$. **493.** 2) Нет. **494.** 2) Нет. **495.** 2) $1{,}5<x\leqslant 7$; 4) $x\geqslant -7{,}5$; 6) $0\leqslant x<2$, $x>2$. **498.** -1. **499.** 2) Отрицательно. **500.** 2) $-0{,}8$. **501.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha)$. **502.** $\sin\alpha=\frac{240}{289}$, $\cos\alpha=-\frac{161}{289}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{240}{161}$. **503.** Нет. **504.** 2) $a_n=3^n$. **505.** 1, 4, 28, 280. **506.** 2) $a_{12}=47{,}5$, $S_{12}=537$; 4) $a_{18}=11\frac{2}{3}$, $S_{18}=108$. **507.** 1220. **509.** 2) $b_1=5$. **510.** 2) $b_4=125$, $S_4=156$; 4) $b_5=81$, $S_5=61$. **511.** $15\frac{3}{4}$. **512.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1+\sqrt{5})$. **513.** 1679 м/с. **514.** 1,68 м. **515.** 2) $2ab\sqrt[3]{b}$; 4) $a+3$. **516.** 2) -1; 4) $-\frac{1}{x}$. **517.** Первое. **518.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})}{a^2-b}$; 4) $0{,}1(5-\sqrt{5})\sqrt{5+\sqrt{5}}$. **519.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **520.** Убывает. **521.** 2) $x\leqslant 0$, $x\geqslant 6$; 4) $x\neq\sqrt{3}$; 6) $x\leqslant -3$, $0<x<2$, $x\geqslant 3$. **523.** 2) $x=61$; 4) $x=0{,}5$; 6) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=2$. **524.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 4) 4. **525.** 2) $\cos^2 x$. **526.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **529.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. **530.** 8 ч. **531.** $39\frac{2}{3}$. **532.** 7, -28, 112, -448 или $-11\frac{2}{3}$, $-46\frac{2}{3}$, $-186\frac{2}{3}$, $-746\frac{2}{3}$. **533.** $b_1=5$, $b_5=405$. **534.** $\frac{1}{8}$. **535.** 8, 13, 18 или 20, 13, 6. **536.** 6,40 Ом. **538.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **539.** 1) $1-\sqrt{a}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **541.** $\sin\alpha=-\frac{120}{169}$, $\cos\alpha=-\frac{119}{169}$. **543.** 10, 4, -2, 1 или $-\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{49}{4}$.

Упражнения для повторения курса алгебры VII—IX классов

546. 2) 4; 4) $4\frac{3}{4}$. **547.** 2) 5,8; 4) $-\frac{1}{11}$. **548.** 2) $x=7$; 4) $x=0,5$; 6) $x=2,25$. **549.** 2) 3; 4) 0,1125. **550.** 2) 300; 4) 3600. **551.** 2) 5%; 4) $16\frac{2}{3}$%. **552.** 2) $5a^4b$; 4) $4a^8b^7$. **553.** 2) $35-2x-2x^3-x^5$; 4) $8a^2+4b^2+36a+36$. **554.** 2) 4,9; 4) 2. **555.** 2) $b^2-7a^2b^3$. **556.** 2) $\left(\frac{b}{3}-1\right)\left(\frac{b}{3}+1\right)$; 4) $(b-\sqrt{3})(b+\sqrt{3})(b^2+3)$. **557.** 2) $\left(\frac{b}{2}+1\right)^2$; 4) $(1+9b)^2$. **558.** 2) $(a+1)(a-x)$; 4) $(a-x)(5a-7)$. **559.** 2) $2a^3b(a-1)^2$; 4) $(a-b)^2(a+b)^2$. **560.** 2) $2(x-3)^2$; 4) $(x-1)(x+2)$. **561.** 2) $\frac{b+3}{3b}$; 4) $\frac{9y}{4x}$; 6) $\frac{x+4}{x+5}$; 8) $\frac{x-1}{x+2}$. **562.** 2) $\frac{3}{2}m^2$; 4) $\frac{3c^2}{k^3}$; 6) $\frac{15a}{4c}$; 8) $(x+1)(x-2)$. **563.** 2) $\frac{6-5a}{a^2-4}$; 4) $\frac{3b-a^2}{a(b^2-a^2)}$. **564.** 2) $\frac{1}{2a+3}$; 4) $b+a-1$. **565.** 2) $\frac{2}{a(a+2)}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **566.** 2) $\frac{x}{y}$; 4) $\frac{10}{2a+1}$. **567.** 2) $-0,25$; 4) $1\frac{9}{16}$. **568.** 2) 3. **569.** 2) $\frac{1}{x+\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. **570.** 2) 4; 4) 8. **571.** 2) -2; 4) 0; 6) 7. **572.** 2) 2; 4) 14. **573.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{11}$; 4) $6\sqrt{2}$. **574.** 2) $2\cdot10^{-3}$; 4) $1,2\cdot10^{-3}$. **575.** 2) 1,25. **576.** 2) 3,5. **577.** 2) $-x^2y^9$; 4) xy^2. **578.** 2) -1; 4) $1+\sqrt{m}$. **579.** 100 кг. **580.** 10%. **581.** 340 кг. **582.** 4,4 р. **583.** 2) $-6m^4+27m^3-47m^2+41m-7$; 4) $a^4b^2-6a^2b^3+9b^4$. **584.** 2) $(4a^3-5b^4)\times(4a^3+5b^4)$; 4) $(m-n+k)(m+n-k)$; 6) $\left(\frac{1}{5}a^3b-\frac{2}{7}c^4\right)\left(\frac{1}{5}a^3b+\frac{2}{7}c^4\right)$; 8) $(a+b+2)^2$. **585.** 2) $(2a-3b^2)^2$; 4) $(5b^2+4a)^2$. **586.** 2) $(5x-3y)(x\sqrt{5}+2y)\times(x\sqrt{5}-2y)$; 4) $(xy-3)(8y^2-7a)$. **587.** 2) m^2; 3) $-\frac{b}{3a}$. **588.** 2) $-0,6$. **589.** 2) 3; 4) 1; 6) $-0,25$; 8) 6. **590.** 2) $\frac{1}{x^2+xy+y^2}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{m}+1}$. **591.** 2) -1; 4) $-0,5$. **592.** 2) $-0,2x^6y$. **593.** 2) $33\frac{1}{3}$; 4) 4,8. **594.** 2) $\sqrt{a}-1$; 4) $\frac{a}{16-a^2}$. **595.** 2) $1-\sqrt{b}$; 4) $1+m\sqrt{m}$. **596.** 2) $x=1$; 4) $x=-0,5$. **597.** 2) $x=12\frac{1}{14}$; 4) $x=-13,5$. **598.** 2) $x=3$; 4) $x=-9$. **599.** 2) $x_1=-2$, $x_2=3$; 4) $x_1=5$, $x_2=-1$. **600.** 2) $x_1=0$, $x_2=5$; 4) $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{6}$; 6) $x_{1,2}=\pm2$; 8) $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$. **601.** 2) $x_1=-1$, $x_2=1,5$; 4) $x_1=5$, $x_2=-\frac{3}{4}$. **602.** 2) $z_{1,2}=4\pm i\sqrt{2}$; 4) $z_{1,2}=\frac{2\pm i}{5}$. **603.** 2) $x_1=1$, $x_2=4,5$; 4) $x_1=-5$, $x_2=0,5$. **604.** 2) $x_1=-3$, $x_2=5$; 4) $x=-1$; 6) $x_1=4,3$, $x_2=-11,7$. **605.** 2) $x=3$; 4) $x=-4$. **606.** 2) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm6$; 4) $x_{1,2}=\pm2$, $x_{3,4}=\pm i$. **607.** 2) $x=33$; 4) $x=9$; 6) $x_1=1$, $x_2=4$. **608.** 2) $x=-2$; 4) $x=1,5$. **609.** 2) $x=-1$; 4) $x_1=1$, $x_2=-0,5$; 6) $x=4$. **610.** 2) (3; 7); 4) (2; 3); 6) (−2; −3). **611.** 2) (14; 10); 4) (2; 2). **612.** 2) (5; 3), (−3; −5); 4) (4; −9), (−9; 4);

6) (4; 5), (−4; −5), (5; 4), (−5; −4). **613.** 2) $x=6$; 4) $x=0,5$. **614.** 2) $3(1+\sqrt{5})$; 4) $x=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **615.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x\leqslant1$. **616.** 2) $x=2$; 4) $x=-1$. **617.** 2) $x=4$; 4) $x=3$; 6) $x=0$. **618.** 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$; 4) $x=2\frac{1}{3}$. **619.** 2) $x=2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **620.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **621.** 1) $x_1=-a$, $x_2=6a$; 2) $x_1=2a$, $x_2=5a$; 3) $x_{1,2}=-3a\pm b$; 4) $x_{1,2}=2a\pm b$. **622.** 1) $x_1=0$, $x_2=a$; 2) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{a}$; 3) $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$; 4) $x_1=0$, $x_2=-\frac{a}{b}$; 5) $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$; 6) $x_1=0$, $x_2=\frac{b}{a^2}$. **623.** 2) (5; 4); 4) (1; 1). **624.** 1) (2; −1), (−2; 1), (0,5; −0,5), (−0,5; 0,5); 2) (2; 8), (−2; −8), (8,5; −5), (−8,5; 5); 3) (1; 2), (2; 1); 4) $\left(\frac{6}{13};\ -\frac{6}{11}\right)$. **626.** 2) $x\leqslant\frac{22}{27}$; 4) $x>1$. **627.** 2) $x\leqslant1$; 4) $x<3\frac{1}{6}$; 6) $x<2$. **628.** 2) $x\geqslant1,5$; 4) $x\geqslant3$. **629.** 2) 1; 2; 3; 4. **630.** 2) −1; 0; 1; 2; 4) −1; 0; 1; 2; 3. **631.** −4; −3; −2; −1. **632.** 2) $-1\leqslant x\leqslant3$; 4) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 6) решений нет; 8) $x<-1\frac{1}{3}$, $x>1$. **633.** 2) $-1\frac{1}{3}<x<3\frac{1}{3}$; 4) $-1\leqslant x\leqslant3$. **634.** 2) $-4<x<2$; 4) $0<x<7$, $x>8$; 6) $x\leqslant-3$, $-0,5\leqslant x\leqslant0,5$. **635.** 2) $9>4\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{6}<6\sqrt{5}$; 6) $2\sqrt[6]{3}<\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}$. **636.** −9. **637.** $x=10$. **638.** 2) $x\leqslant-2\frac{2}{3}$, $x\geqslant4$; 4) $x=-0,4$. **639.** 2) $x<-1$, $x>1$; 4) $x<0$, $x>2$. **640.** 2) $x<2$; 4) $-2<x<2$; 6) $-1<x<0$; 8) $x<-1$, $x>1$. **641.** 2) $-5<x<-1$, $x>4$; 4) $x<1$, $3<x<4$; 6) $-7<x<-6$, $1<x<3$, $x>8$. **643.** 62,5 и 57,5. **644.** 5 км/ч. **645.** 4 км/ч. **646.** 12,5 км/ч, 2,5 км/ч. **647.** 26 см, 2 см. **648.** 48 мин. **649.** 20 мин. **650.** 35 ц, 40 ц. **651.** 5 ч, 7 ч. **652.** 32 и 8 лет. **653.** 40 м/мин². **654.** 2,5 км. **655.** ≈5 с. **656.** 4 км/ч, 16 км/ч. **657.** 75 км/ч. **658.** $16\frac{2}{3}$ м/с, 100 м. **660.** 2) Да; (0; −4), (8; 0), $y(-2)=-5$; 4) нет; (0; 6), (4; 0), $y(-2)=9$. **663.** 2) (5; −10); 4) $\left(\frac{5}{4};\ -\frac{1}{8}\right)$. **664.** 2) 23; 4) $6\frac{1}{4}$. **665.** 2) $x_1=-2$, $x_2=-5$; 4) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$. **667.** $\sqrt[5]{-\frac{2}{9}}<\sqrt[5]{-\frac{1}{7}}$. **669.** $a=8$, $b=3$. **670.** $a=0,3$, $b=-0,5$, $c=0,2$. **675.** 2) Не является четной и не является нечетной; 4) нечетная. **676.** 2) $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $7\pi+2\pi n$, $n\in Z$. **677.** 2) 2. **679.** 2) $2\cos^2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 2\alpha$. **680.** 2) $-\operatorname{tg}2\alpha$. **682.** 2) $\frac{7}{9}$. **683.** 2) −0,5. **684.** 2) $\frac{3}{8}$. **685.** 7. **686.** 1) 0; 2) 0. **687.** 1) $-\sin\alpha-\cos\alpha$; 2) $-\sin\alpha-\cos\alpha$; 3) $-\cos\alpha$; 4) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **689.** 1) $-\frac{3}{\cos2x}$; 2) $\frac{1}{\cos2x}$. **690.** 1) −10; 2) $-\frac{1}{2}$. **691.** 2) Да. **692.** 2) −1; 4) −1. **693.** −2. **694.** −0,5. **695.** 2) $a_1=201$, $S_{17}=2737$. **696.** $n=39$. **697.** 682. **698.** 2) 0,5; 4) 1. **699.** 189. **700.** 2) $a_1=1$, $d=3$; 4) $a_1=2$,

$d=3$ или $a_1=14$, $d=-3$; б) $a_1=2$, $d=3$ или $a_1=8$, $d=-3$. **701.** 2) -5. **702.** $a_1=1$, $d=-2$. **703.** 2) Да; 4) да. **704.** 2) 12 или -13; 4) 12 или $-\frac{12}{13}$. **705.** $b_n=3\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ или $b_n=-3\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. **706.** $b_4=12$, $q=-2$ или $b_4=-12$, $q=2$. **707.** $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27 или $\frac{1}{3}$; -1; 3; -9; 27. **708.** 2) $b_1=0,384$, $q=0,25$ или $b_1=0,6$, $q=-0,2$. **709.** 2) $b_1=37,5$, $q=0,6$ или $b_1=48$, $q=0,25$. **710.** 2) 11; 4) 341 или 121. **711.** 2) $\frac{4}{9}$; 4) $\frac{3}{11}$; 6) $2\frac{5}{99}$; 8) $-4\frac{3}{11}$. **712.** 18; 5; 2 или 2; 5; 18. **713.** $x=1$. **714.** 13 шахматистов. **716.** 2) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 6,4$; 4) $x_{1,2}=\pm 1,4$. **717.** 2) 8,28; 4) 14,38. **718.** 2) 5,163; 4,686; 6,256; 2,117; 5,498; 1,304; 4) 0,223; $-0,326$; 2,46; $-2,185$; $-2,586$; 0,707. **719.** $\frac{a+4}{a-a^2-1}$. **720.** $x=1$. **721.** 4. **722.** $m=-1$, $y<0$ при $x>\frac{1}{3}$. **723.** $(-3;\ 4)$. **724.** $\frac{2a-4b}{a-b}$. **725.** 7. **726.** $x=5$. **727.** $y<0$ при $-0,5<x<1$. **728.** $-\frac{24}{25}$. **729.** 32. **730.** Корней нет. **731.** $1<x<1\frac{1}{3}$. **733.** $x<-1$, $x>5\frac{2}{3}$. **734.** $14\frac{6}{7}$. **735.** $\frac{x+5}{x+3}$. **736.** $\left(13\frac{1}{16};\ -3,7\right)$. **738.** 960. **739.** $x=4$. **740.** $x\leqslant -1$. **741.** 2. **742.** $170\frac{2}{3}$. **743.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{3}$. **744.** 0. **745.** $x_1=0$, $x_2=45$. **746.** 60 км/ч, 80 км/ч. **747.** $x=1$. **748.** В третьем. **749.** $x>2,5$. **750.** 1. **751.** 110. **753.** $x_1=7$, $x_2=12$. **754.** $-\frac{7}{24}$. **755.** $2\sqrt{ab}$. **756.** $x_1=0$, $x_2=-1\frac{2}{3}$. **758.** 20 км/ч. **759.** $(y-2)(5y-z)$. **760.** $\frac{a^3}{a-b}$. **761.** $x_1=3$, $x_2=-3$. **762.** $\frac{1}{8}$. **763.** 25. **764.** $x<-2$, $1<x<3$. **766.** $2a^{\frac{1}{5}}$. **767.** 48. **768.** $x_1=0,2$, $x_2=5$. **769.** $x_1=4$, $x_2=-1\frac{1}{3}$. **770.** 32,04. **771.** $x<1$, $x>7$. **773.** $2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **774.** 0,2. **775.** $x<0,5$, $x\geqslant 3$. **776.** (1; 1). **777.** $p=2$, $q=3$. **778.** 63. **779.** $\frac{a+b}{2-b}$. **780.** $x>11$. **781.** $x=4$. **782.** (1; 16), $(-3;\ 0)$, (5; 0), (0; 15), $-3<x<5$. **783.** $-\frac{24}{25}$. **784.** (2; 1). **785.** $\frac{2a-1}{a-2}$. **786.** $p=-1$, $q=-2$, $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{9}{4}\right)$, $-1<x<2$. **787.** $\frac{63}{8}$. **788.** $\frac{24}{7}$. **789.** $x=2$, $x=3$, $x=4$. **790.** Да. **791.** $\frac{2a+1}{a+5}$. **792.** 60 км/ч, 40 км/ч. **793.** 33. **809.** $n=1$. **810.** (4; 1), $(4;\ -3)$, $(-4;\ 1)$, $(-4;\ -3)$. **811.** 7, 8, 9, 10. **816.** 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{2}{2-x}$; 4) $\sqrt[6]{a}$. **820.** 1) $x_1=-2$, $x_2=6$, $x_3=3-\sqrt{21}$, $x_4=3+\sqrt{21}$; 2) $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=3$, $x_4=\frac{1}{3}$; 3) $x=15$; 4) $x_1=0$, $x_2=2$. **821.** 1) $x_1=-4$, $x_2=1$; 2) $x=3$. **822.** 1) $(-4;\ -5)$, $(-5;\ -4)$, $(-1+2\sqrt{3};\ -1+2\sqrt{3})$, $(-1-2\sqrt{3};\ -1-2\sqrt{3})$, $(4+\sqrt{13};\ 4-\sqrt{13})$, $(4-\sqrt{13};\ 4+\sqrt{13})$; 2) (6; 6), $\left(\frac{3\sqrt{5}-3}{2};\ -\frac{3\sqrt{5}+3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{5}+3}{2};\ \frac{3\sqrt{5}-3}{2}\right)$; 3) (1; 2), $(-1;\ -2)$, $\left(\frac{9}{\sqrt{67}};\ \sqrt{67}\right)$, $\left(-\frac{9}{\sqrt{67}};\ -\sqrt{67}\right)$; 4) $\left(2+2\sqrt{3};\ 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(2-2\sqrt{3};\ 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) (0; 0), (2; 1), $(-2;\ -1)$, (1; 2), $(-1;\ -2)$; 6) (3; 1), $\left(\frac{1}{3};\ -1\right)$. **823.** 1) (3; 2), $(-2;\ -3)$; 2) (0; 0), (1; 2), (2; 1). **825.** 1) (0,5; 5,5), (1,5; 5,5); 2) (1; 1); 3) (1; 2); 4) $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3};\ -2\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}-\sqrt{3};\ 2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\left(\frac{5}{\sqrt{2}};\ -\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}};\ \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$. **826.** 1) $r=1$, $r=-1$; 2) $r=-2$. **827.** $-2,25\leqslant a\leqslant -2$. **828.** $a=-\frac{1}{2}$. **829.** $-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}<a<2\sqrt{3}-4$. **831.** $p=-2$, $q=-1$ или $p=1$, q — любое. **832.** $-1<a<2$. **833.** $a<-2$. **842.** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$. **843.** 1) $\frac{a+2}{a-1}$; 2) $\frac{a^2+1}{a-1}$. **845.** 1) $-\frac{1}{\sqrt{6}}<x<\frac{2}{5}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}<x<1$; 2) $x<-\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $-3<x<\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $x>4$; 3) $x<-2$, $-1<x<1$, $x>2$; 4) $-3<x<-2$, $-1<x<1$, $3<x<5$; 5) $3\leqslant x\leqslant 6$; 6) $2<x<4$. **846.** $-1\leqslant x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}<x\leqslant 1$; 2) $-2\leqslant x<-\frac{8}{5}$, $0<x\leqslant 2$; 3) $-2<x\leqslant 0$, $x\geqslant 6$; 4) $0<x\leqslant\frac{4}{3}$; 5) $x<-\frac{3}{2}$, $x>\frac{7}{10}$; 6) $-2<x<1$, $x>1$. **847.** 3, 8, 13 или 18, 8, -2. **848.** 4092 или $\frac{1023}{2}$. **849.** 3, 6, 12, 18 или $\frac{75}{4}$, $\frac{45}{4}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{9}{4}$. **850.** $u_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$. **851.** 2. **856.** $S_n=\frac{1-(n-2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$, если $x\neq 1$; $S_n=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, если $x=1$. **857.** $\frac{2}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$. **858.** 1) $x_n=a^{n-1}x_1+b\frac{a^{n-1}-1}{a-1}$ при $a\neq 1$, $x_n=x_1+(n-1)b$ при $a=1$; 2) $S_n=\frac{(n-1)b}{1-a}+\frac{ab(a^{n-1}-1)}{(1-a)^2}+\frac{1-a^n}{1-a}$ при $a\neq 1$, $S_n=\left(x_1+\frac{(n-1)b}{2}\right)n$ при $a=1$. **859.** $x_n=(n-1)x_2-(n-2)x_1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$. **860.** 1. **861.** $x_n=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}x_2-\alpha\beta x_1\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$. **862.** $\frac{2ab}{b-a}$ ч. **863.** 48 мин. **864.** 1040 ч. **865.** 1 ч. **866.** $\frac{s}{2t}$ мин. **867.** 48 мин. **868.** $\frac{15}{8}$. **869.** 7 км. **870.** $\frac{1}{6t}(4s-3at+\sqrt{9a^2t^2+16s^2})$. **871.** $\frac{4}{3}$. **872.** 27%. **873.** 24 м^3. **874.** 80 км/ч. **875.** 4 ч. **876.** 1 ч, $\frac{\sqrt{457}-7}{4}$ ч. **877.** 0,3 ч. **878.** $\frac{b+\sqrt{b^2+4ab}}{2}$ км. **879.** 4 ч 42 мин. **880.** 2 ч. **881.** $\frac{15}{4}$ км.

Ответы к заданиям «Проверь себя»

Глава I. **1.** 1) 447,32; 2) 339,60; 3) 31,01; 4) 0,21; 5) 78125; 6) 0,48; 7) 58557,71; 8) 32,37. **2.** 1) 65,65; 2) 49,08. **3.** 8,89; $-25{,}99$.

Глава II. **1.** 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16; 3) $1\frac{1}{5}$. **2.** $8{,}6\cdot10^3$; $7{,}8\cdot10^{-3}$; $6{,}708\cdot10^1$; $1{,}1\cdot10^6$. **3.** 1) 6; 2) $(y+x)\,xy$. **4.** $a^{\frac{3}{4}}$; 27. **5.** $(0{,}78)^{\frac{2}{3}}>(0{,}67)^{\frac{2}{3}}$; $(3{,}09)^{-\frac{1}{3}}<(3{,}08)^{-\frac{1}{3}}$.

Глава III. **1.** 1) $x\neq1$; 2) $-3\leqslant x\leqslant3$. **2.** а) 1) $y\approx1{,}4$; 2) $y=3$; 3) $y=-2{,}5$; 4) $y=8$; б) 1) $x=9$; 2) $x=2$; 3) $x=-\frac{5}{3}$; 4) $x=\sqrt[3]{3}$; в) $y(x)>0$ при: 1) $x>0$; 2) $x>0$; 3) $x<0$; 4) $x>0$; $y(x)<0$ при: 1) нет таких промежутков; 2) $x<0$; 3) $x>0$. 4) $x<0$; г) функция возрастает при: 1) $x\geqslant0$; 2) нет таких промежутков; 3) $x>0$, $x<0$; 4) $x\in\boldsymbol{R}$; функция убывает при: 1) нет таких промежутков; 2) $x>0$, $x<0$; 3) нет промежутков; 4) нет промежутков. **3.** 1) Четная; 2) нечетная. **4.** 1) $x=28$; 2) $x=1$.

Глава IV. **1.** $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\sin2\alpha=-\frac{24}{25}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** 1) 0,602; 2) 0,901; 3) 0,871. **5.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$.

Глава V. **1.** 0, 1, 3. **2.** $a_{10}=-25$, $S_{10}=-115$. **3.** $b_6=\frac{1}{8}$, $S_6=7\frac{7}{8}$. **4.** $q=\frac{1}{3}$, $S=1{,}5$.

Ответы к занимательным задачам

1. 22 раза. **2.** 1) $376\cdot45=16920$; 2) $239\cdot54=12906$; 3) $117\cdot319=37323$. **3.** 9^{9^9}. **4.** $x=\sqrt[3]{3}$. **5.** 13 юношей. **6.** $1089708:12=90809$. **7.** На рисунке 4. **8.** 6 мин. **9.** 16.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СВЕДЕНИЯ О ПОЛЬЗОВАНИИ УЧЕБНИКОМ

№	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

Учебное издание

Алимов Шавкат Арифджанович
Колягин Юрий Михайлович
Сидоров Юрий Викторович
Федорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. М. Котова*
Младший редактор *Т. Ю. Федорова*
Художники *Б. Л. Николаев, Е. П. Титков*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технические редакторы *С. С. Якушкина, М. М. Широкова*
Корректор *Г. И. Мосякина*

ИБ № 15 987

Лицензия ЛР № 010001 от 10.10.91. Подписано в печать с диапозитивов 23.01.95. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 2. Гарнит. литер. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14+0,25 форзац. Усл. кр.-отт. 14,69. Уч.-изд. л. 12,82+0,42 форзац. Тираж 150 000 экз. Заказ № 1206.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

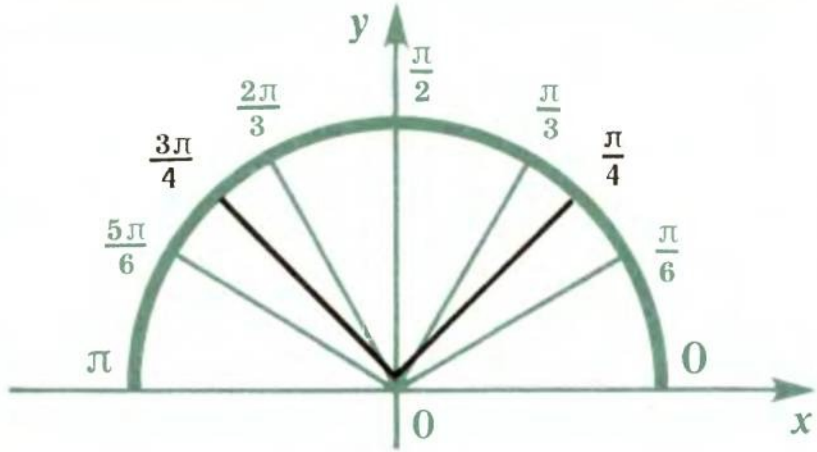
$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$



ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не определен	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0