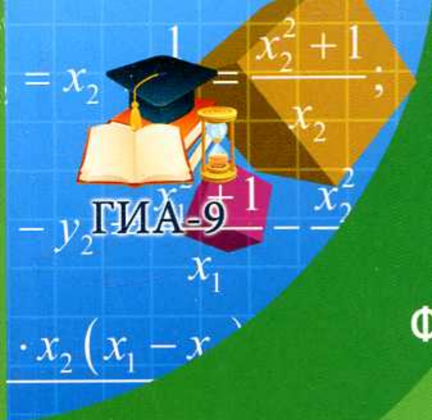
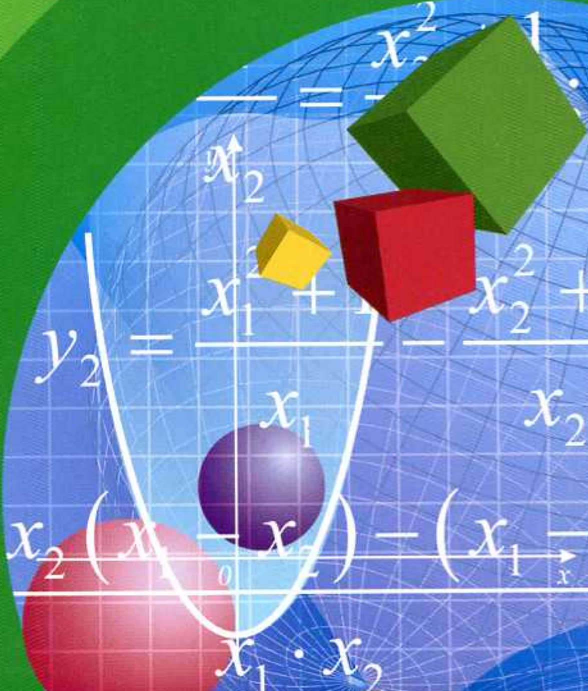


ГИА-9

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА
РЕШЕБНИК
ПОДГОТОВКА К ГИА-2015

9 КЛАСС



УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»

ЛЕГИОН ТМ

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК 9 КЛАСС

ПОДГОТОВКА К ГИА-2015

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2014

ББК 22.14
Р 47

Рецензенты: *Л. Н. Евич* — кандидат физико-математических наук, доцент ДГТУ
Л. Л. Иванова — Заслуженный учитель школ Российской Федерации

Авторский коллектив:
Коннова Е. Г., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

Р 47 **Решебник. Математика. 9 класс. Подготовка к государственной итоговой аттестации-2015**: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 336 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0601-6

Решебник предназначен для самостоятельной или коллективной подготовки учащихся к государственной итоговой аттестации (ГИА-9) по математике в 9-м классе. Он содержит решения **всех тестовых заданий повышенного уровня сложности** и **всех задач из раздела «Задачник»** пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2015» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова, за исключением решений, которые представлены в указанной выше книге.

Предлагаемый материал поможет девятиклассникам отработать навыки выполнения заданий предстоящего экзамена и систематизировать знания в процессе подготовки к ГИА-9. Пособие также адресовано учителям, организующим подготовку учеников к экзамену.

Книга является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ГИА-9»**, в который также включены пособия «Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2015», «Математика. Базовый уровень ГИА-2015» (3 пособия — «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика») и др.

Обсудить издание, оставить отзыв можно на форумах издательства **http://f.legionr.ru**,
http://legion-posobiya.livejournal.com.

ББК 22.14

ISBN 978-5-9966-0601-6

Оглавление

2. Зак. № 12

Глава I. Решения учебно-тренировочных тестов

Решение варианта № 1

21. Решим неравенство $x^2(-x^2-64) \leqslant 64(-x^2-64)$.
$-x^4 - 64x^2 \leqslant -64x^2 - 64 \cdot 64$,
$-x^4 \leqslant -64 \cdot 64$, $x^4 \geqslant 64 \cdot 64$, $x^4 \geqslant 8^4$, $|x| \geqslant 8$,
$x \leqslant -8$ и $x \geqslant 8$.
Ответ: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

22. Пусть x км — расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи, тогда $(75-x)$ км — расстояние от города, из которого выехал первый велосипедист, до места встречи.

$\dfrac{75-x}{20}$ ч — время движения первого велосипедиста до места встречи.

$\dfrac{x}{30}$ ч — время движения второго велосипедиста до места встречи.

$$\frac{x}{30} = \frac{75-x}{20} + \frac{25}{60},$$

$2x = 225 - 3x + 25$, $5x = 250$, $x = 50$.

Расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи равно 50 км.

Ответ: 50 км.

23. Построим график функции $y = \dfrac{4{,}5|x| - 1{,}5}{1{,}5 \cdot |x| - 4{,}5x^2}$.

Упростим выражение $\dfrac{4{,}5|x| - 1{,}5}{1{,}5 \cdot |x| - 4{,}5x^2} = \dfrac{1{,}5(3|x|-1)}{1{,}5|x|(1-3|x|)} = \dfrac{-1}{|x|}$, при условии, что $3|x| - 1 \neq 0$, $x \neq 0$.

То есть $x \neq 0$ и $x \neq \pm\dfrac{1}{3}$.

Итак, $y = -\dfrac{1}{|x|}$ (см. рис. 1). Прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки, когда она проходит через точки $\left(-\dfrac{1}{3}; -3\right)$; $\left(\dfrac{1}{3}; -3\right)$ или совпадает с осью Ox, то есть $k = \pm 9$ и $k = 0$.

Ответ: $\pm 9; 0$.

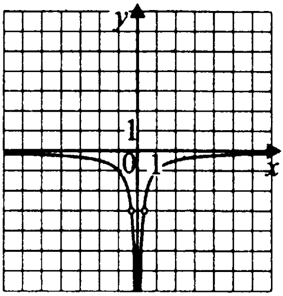


Рис. 1

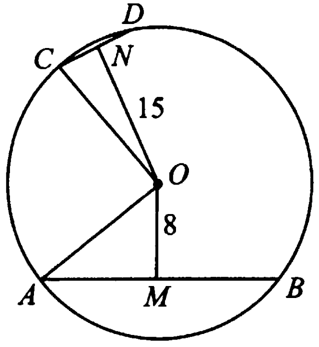


Рис. 2

24. Пусть O — центр окружности, тогда радиусы OA, OB, OC и OD равны. В равнобедренных $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ высоты OM и ON являются медианами, $AM = MB$, $CN = ND$.

В $\triangle AOM$ (см. рис. 2) $\angle AMO = 90°$, $AM = \dfrac{AB}{2} = 15$ (см),

$AO = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$ (см).

В $\triangle CON$ $\angle CNO = 90°$, $CN = \dfrac{CD}{2}$, $CD = 2CN$.

$CN = \sqrt{CO^2 - NO^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$ (см).
$CD = 2CN = 16$ (см).
Ответ: 16 см.

25. В $\triangle BCD$ и $\triangle ABD$ $\angle CBD = \angle BDA$ — как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD (см. рис. 3). Рассмотрим стороны, образующие эти углы, а именно BC и BD, BD и AD, $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{1}{4}$.

Отсюда, на основании второго признака подобия треугольников, треугольники ADB и BCD подобны.

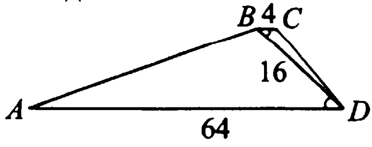


Рис. 3

26. Центры вписанных окружностей лежат на биссектрисе угла (см. рис. 4). Используя свойство касательных, проведённых из одной точки к окружности, имеем $BK = BL$ (обозначим через y).

$AK = AP$, $AP = AN$, следовательно, $AK = AP = AN$, $CL = PC$, $PC = CM$, следовательно, $CL = PC = CM$. $\triangle ABC$ — равнобедренный, значит, BP — не только биссектриса, а и высота, и медиана, то есть $AP = PC$. Отсюда $AP = PC = CM = CL$. Таким образом: $AK = AP = AN = CL = PC = CM$ (обозначим их x). Радиус R описанной около треугольника ABC окружности можно вычислить по теореме синусов $\frac{AC}{\sin B} = 2R$, $R = \frac{AC}{2\sin B}$.

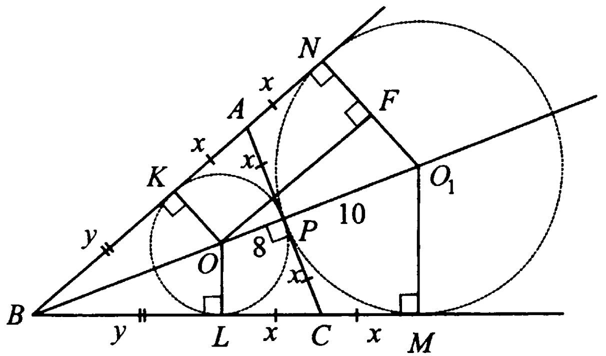


Рис. 4

Найдём BO, треугольник BKO подобен треугольнику BNO_1 (оба прямоугольные, $\angle KBO$ — общий).

Из подобия следует $\frac{BO}{BO_1} = \frac{KO}{NO_1}$, $\frac{BO}{BO+18} = \frac{8}{10}$, $\frac{BO}{BO+18} = \frac{4}{5}$, $BO = 72, BP = 72 + 8 = 80$.

Из $\triangle BKO$ $BK = \sqrt{BO^2 - KO^2} = \sqrt{72^2 - 8^2} = 32\sqrt{5}$, $y = 32\sqrt{5}$.

Найдём AC, для этого рассмотрим прямоугольную трапецию KNO_1O, в ней $OF = 2x$. В треугольнике OFO_1 $OF = \sqrt{OO_1^2 - FO_1^2} = \sqrt{18^2 - 2^2} = 8\sqrt{5}$.

$2x = 8\sqrt{5}$, $AC = 8\sqrt{5}$, $BA = y + x = 36\sqrt{5}$.

Найдём $\sin\angle B$ из площади $\triangle ABC$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin\angle B$,

$\sin\angle B = \frac{AC \cdot BP}{BA \cdot BC} = \frac{8\sqrt{5} \cdot 80}{36\sqrt{5} \cdot 36\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{81}$.

Тогда $R = \dfrac{8\sqrt{5}\cdot 81}{2\cdot 8\sqrt{5}} = \dfrac{81}{2} = 40{,}5$.

Ответ: 40,5.

Решение варианта № 2

21. Решим уравнение $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$,

$x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$,

$x^2(x+5) - (x+5) = 0$,

$(x+5)(x^2-1) = 0$,

$(x+5)(x-1)(x+1) = 0$,

$x = -5$, $x = \pm 1$.

Ответ: -5; -1; 1.

22. Примем всю работу за 1, тогда каменщики Антон и Пётр за 1 час выполнят $\dfrac{1}{8}$ часть работы, Пётр и Дмитрий — $\dfrac{1}{12}$ часть работы, а Антон и Дмитрий — $\dfrac{1}{9{,}6}$ часть работы. Таким образом, они за 2 часа совместной работы выполнят $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{9{,}6} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{5}{48} = \dfrac{5}{16}$ часть работы, за 1 час они выполнят $\dfrac{5}{32}$ работы, и всю работу втроём они выполнят за $\dfrac{32}{5} = 6{,}4$ (ч).

Ответ: 6,4 часа.

23. Построим график функции $y = x^2 - 5|x| - x$.

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ x^2 + 4x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 6x$, при $x \geqslant 0$.

Графиком функции является часть параболы, ветви которой направлены вверх, вершина в точке с координатами $(3; -9)$, $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 6$.

2) $y = x^2 + 4x$, если $x < 0$ (см. рис. 5).

Графиком функции является часть параболы, ветви которой направлены вверх, вершина в точке с координатами $(-2; -4)$; $y = 0$ при $x = 0$ и $x = -4$.

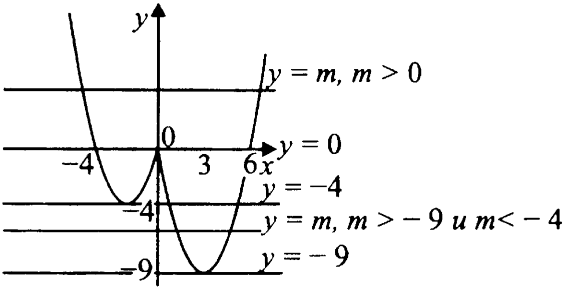


Рис. 5

3) Прямая $y = m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек при $m \in [-9; -4] \cup [0; +\infty)$.

Ответ: $[-9; -4] \cup [0; +\infty)$.

24. Треугольник COD — равнобедренный, OK — расстояние от точки O до хорды CD. OK в треугольнике COD — высота, она является и медианой. $CK = KD = 7$ (см. рис. 6).

В $\triangle COK$ $\quad CO = \sqrt{OK^2 + CK^2} = \sqrt{225 + 49} = \sqrt{274}$.

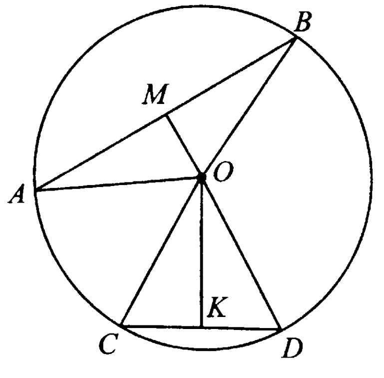


Рис. 6

Треугольник AOB — равнобедренный, MO — расстояние от точки O до хорды AB. MO — высота равнобедренного треугольника, $MO = 7$. MO является медианой в $\triangle AOB$, значит, $AM = MB$.

Из $\triangle AMO$ $\quad AM = \sqrt{AO^2 - MO^2} = \sqrt{274 - 49} = 15$.

$AB = 2AM = 30$.

Ответ: 30.

25. 1) Четырёхугольник $KBPH$ — выпуклый, вокруг него можно описать окружность ($\angle HKB + \angle BPH = 180°$), отсюда BH — диаметр, вписанные углы, опирающиеся на диаметр, — прямые, (по условию) (см. рис. 7).

2) Докажем, что треугольник KBP подобен треугольнику ABC, используя первый признак подобия. $\angle BKP = \angle BHP$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). $\angle BHP + \angle HBP = 90°$ (острые углы прямоугольного $\triangle BHP$). $\angle BCH + \angle HBP = 90°$ (острые углы прямоугольного $\triangle BHC$). Отсюда $\angle BHP = \angle BCH$. Но $\angle BKP = \angle BHP$, значит, $\angle BKP = \angle BCH$.

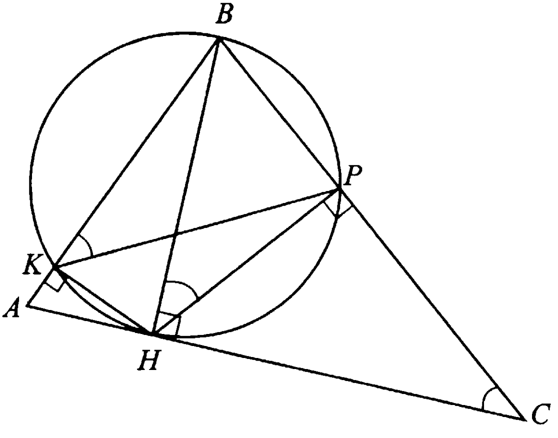


Рис. 7

В $\triangle KBP$ и $\triangle ABC$ — $\angle ABC$ общий, $\angle BKP = \angle ACB$. Следовательно, $\triangle KBP \sim \triangle ABC$ (по двум углам), что и требовалось доказать.

26. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена окружность, пересекающая высоту AH в точке P и сторону AC в точке K (см. рис. 8).

В $\triangle BKC$ $\angle K$ — вписанный, опирающийся на диаметр BC, следовательно, равен $90°$.

По свойству двух секущих, выходящих из одной точки, имеем $AC \cdot AK = AM \cdot AP$.

Учитывая, что $MH = PH = 18$, $AH = 24$ (по условию), имеем $AM = AH + HM = 24 + 18 = 42$, следовательно, $AP = 42 - 18 \cdot 2 = 6$.

Получаем $AC \cdot AK = 42 \cdot 6 = 252$.

Прямоугольные треугольники AKF и AHC подобны ($\angle A$ — общий, $\angle AKF = \angle AHC = 90°$).

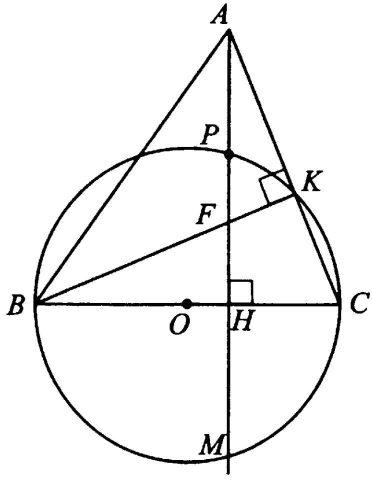


Рис. 8

В подобных треугольниках AKF и AHC сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AK}{AH}.$$

Пусть $AF = x$, тогда $\frac{x}{AC} = \frac{AK}{24}$.

$24x = AC \cdot AK$, $24x = 252$, $x = \frac{252}{24} = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

Решение варианта № 3

21. Решим неравенство $\frac{18}{x^2 - 5x + 4} \leqslant 0$.

$18 > 0$, тогда $x^2 - 5x + 4 < 0$.

$x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

$x^2 - 5x + 4 < 0$, при $1 < x < 4$.

Ответ: $(1; 4)$.

22. Свежие фрукты и высушенные состоят из воды и сухого вещества. В высушенных фруктах — 88% сухого вещества, то есть в 64 кг — $64 \cdot 0{,}88 = 56{,}32$ кг сухого вещества. Эти 56,32 кг сухого вещества должны составлять 11% от массы свежих фруктов. Таким образом, свежих фруктов требуется взять $\frac{56{,}32}{0{,}11} = 512$ (кг).

Ответ: 512 кг.

23. Построим график функции $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, \text{если } x \geqslant 1, \\ 2x, \text{если } x < 1. \end{cases}$

1) $y = x^2 - 4x + 5$, если $x \geqslant 1$, графиком этой функции является часть параболы, ветви которой направлены вверх ($a > 0$), вершина в точке с координатами $(2; 1)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 9).

x	1	2	3	4
$y = x^2 - 4x + 5$	2	1	2	5

2) $y = 2x$, если $x < 1$. Графиком этой функции является часть прямой, расположенной в 1 и 3-й четвертях. Составим таблицу и построим график.

x	1	0
$y = 2x$	2	0

Прямая $y = m$ будет иметь с графиком данной функции ровно две общие точки при $m = 1$, $m = 2$ (см. рис. 9).

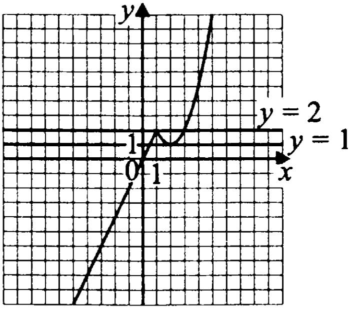


Рис. 9

Ответ: 1; 2.

24. Треугольники LBK и ABC (см. рис. 10) подобны по двум углам: $\angle B$ — общий, $\angle LKB = \angle ACB$ (как соответственные углы при параллельных прямых LK и AC и секущей BC).

Отсюда, их соответствующие стороны пропорциональны, $\frac{BK}{BC} = \frac{LK}{AC}$,

$AC = \frac{LK \cdot BC}{BK} = \frac{9 \cdot 20}{5} = 36$.

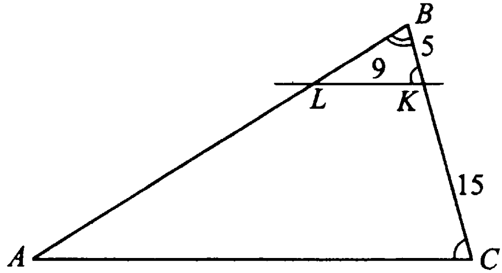


Рис. 10

Ответ: 36.

25. 1) Около треугольника LMK можно описать окружность и $\angle LMK = \frac{\smile LK}{2}$ (см. рис. 11).

2) Допустим, что точка N не принадлежит этой окружности, то есть находится либо вне её, либо внутри неё;

а) если вне её, то величина угла LNK равна полуразности дуг, заключённых между сторонами, то есть $\angle LNK < \angle LMK$, что противоречит условию;

б) если внутри неё, то величина угла LNK равна полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами, то есть получается, что $\angle LNK > \angle LMK$, что также противоречит условию.

Остаётся случай, когда точка N лежит на той же окружности, что и точка M.

3) $\angle MNL = \angle MKL$, так как это вписанные углы, измеряющиеся половиной дуги ML. Что и требовалось доказать.

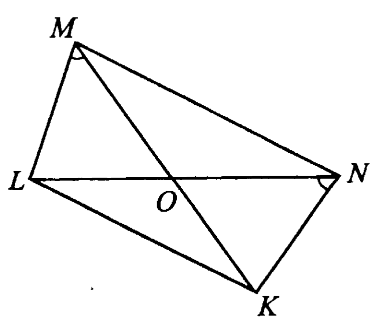


Рис. 11

26. По условию CN — биссектриса треугольника ABC, значит, $\frac{AC}{BC} = \frac{AN}{NB} = \frac{6}{11}$ (см. рис. 12).

$\triangle DAC \sim \triangle DCB$ по первому признаку подобия ($\angle D$ — общий, $\angle DCA = \angle DBC$, так как $\angle DCA = \frac{1}{2}\smile AC$ как угол между касательной и хордой, а $\angle DBC = \frac{1}{2}\smile AC$ как вписанный, опирающийся на дугу AC).

Из подобия треугольников следует $\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC}$, $\frac{AD}{CD} = \frac{6}{11}$, $AD = \frac{6}{11}CD$.

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, $CD^2 = AD \cdot BD$, $CD^2 = \frac{6}{11}CD(AD + 17)$,

$CD = \frac{6}{11}\left(\frac{6}{11}CD + 17\right)$, $CD = \frac{36}{121}CD + \frac{102}{11}$, $\frac{85}{121}CD = \frac{102}{11}$, $CD = 13{,}2$.

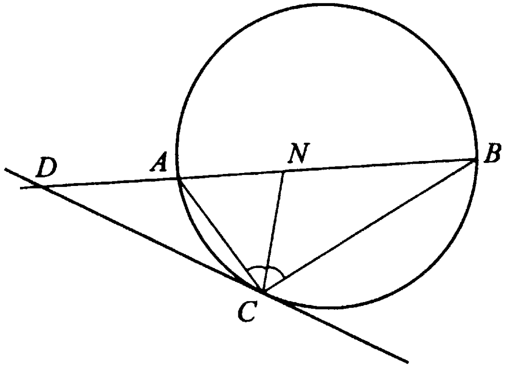


Рис. 12

Ответ: 13,2.

Решение варианта №4

21. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 = 9, \\ 2x^2 + 8x + 2y^2 = 9y. \end{cases}$

$2x^2 + 8x + 2y^2 = 9y$, $2(x^2 + 4x + y^2) = 9y$, $18 = 9y$, $y = 2$.

$x^2 + 4x + 4 = 9$, $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Ответ: $(-5; 2)$; $(1; 2)$.

22. Пусть x км/ч — скорость первого катера, $(x + 10)$ км/ч — скорость второго катера. Составим уравнение и решим его.

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{12}{60}$, $\frac{5}{x} - \frac{5}{x+10} = \frac{1}{60}$, $60 \cdot 50 = x^2 + 10x$, $x^2 + 10x - 3000 = 0$, $x_1 = -60$, $x_2 = 50$.

$x > 0$, $x = 50$. Скорость первого катера равна 50 км/ч.

Ответ: 50.

23. Построим график функции $y = \begin{cases} x+3, \text{ если } x < -1, \\ -2x, \text{ если } -1 \leqslant x < 1, \\ 0{,}5x - 2{,}5, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

1) $y = x + 3$, если $x < -1$. Графиком этой функции является часть прямой $y = x + 3$ при $x < -1$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 13).

x	-2	-1
$y = x + 3$	1	2

2) $y = -2x$, если $-1 \leqslant x < 1$. Графиком этой функции является часть прямой $y = -2x$ при $-1 \leqslant x < 1$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 13).

x	-1	0
$y = -2x$	2	0

3) $y = 0{,}5x - 2{,}5$, если $x \geqslant 1$. Графиком этой функции является часть прямой $y = 0{,}5x - 2{,}5$ при $x \geqslant 1$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 13).

x	1	3
$y = 0{,}5x - 2{,}5$	-2	-1

4) Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = -2$; $m = 2$.

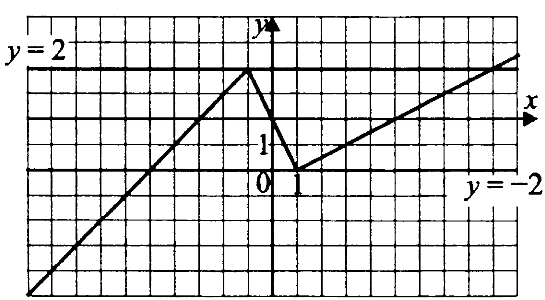


Рис. 13

Ответ: -2; 2.

24. $MB = BK$, $KC = CP$, $AP = AM$ — как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки (см. рис. 14).

$\angle ABC = 180° - 2\angle BMK$,
$\angle BCA = 180° - 2\angle CKP$,
$\angle CAB = 180° - 2\angle APM$,

$\angle BMK = \frac{1}{2}\smile MK = 66°$,

$\angle CKP = \frac{1}{2}\smile KP = 52°$,

$\angle APM = \frac{1}{2}\smile MP = 62°$.

Следовательно, $\angle ABC = 180° - 2 \cdot 66° = 48°$,
$\angle BCA = 180° - 2 \cdot 52° = 76°$,
$\angle CAB = 180° - 2 \cdot 62° = 56°$.

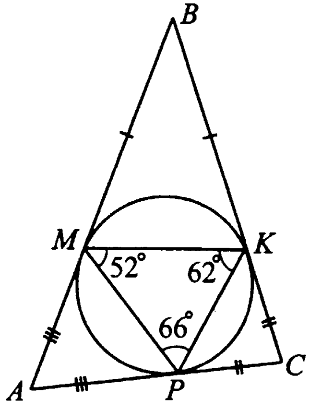


Рис. 14

Ответ: 48°, 56°, 76°.

25. Медиана делит треугольник на равные по площади треугольники: $S_{AEF} = S_{DEF}$, $S_{BFE} = S_{CFE}$. По условию $S_{AED} = S_{BFC}$, тогда $S_{BFE} = S_{AEF}$; в треугольниках BFE и AEF общая часть OFE, тогда $S_{BOE} = S_{AOF}$; $\frac{1}{2}BO \cdot OE \sin\angle BOE = \frac{1}{2}OF \cdot AO \sin\angle AOF$ (см. рис. 15). Учитывая, что $\angle BOE = \angle AOF$ (как вертикальные), получаем $BO \cdot OE = OF \cdot AO$, $\frac{AO}{OE} = \frac{BO}{OF}$, следовательно, треугольники AOB

и EOF подобны, отсюда $\angle ABF = \angle BFE$. То есть AB параллельно FE. Аналогично рассуждая, получим $DC \parallel FE$, следовательно, $AB \parallel DC$, то есть $ABCD$ — трапеция или параллелограмм. Что и требовалось доказать.

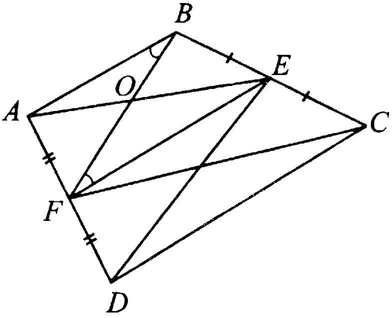


Рис. 15

26. AK — касательная к окружности, AT — секущая, тогда $AK^2 = AT \cdot AS$, $AK^2 = 12 \cdot 6$, $AK^2 = 72$ (см. рис. 16).

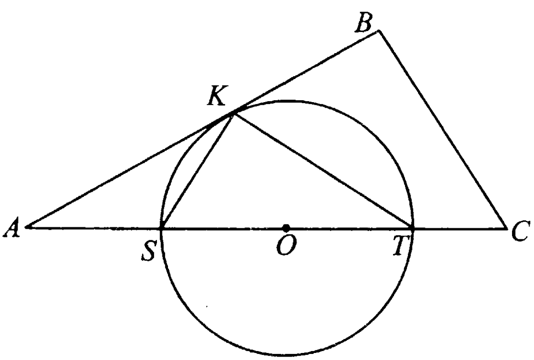


Рис. 16

В треугольнике AKS: $KS^2 = AK^2 + AS^2 - 2 \cdot AK \cdot AS \cdot \cos\angle BAC$.

$KS^2 = 72 + 36 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos\angle BAC = 108 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 12.$

В треугольнике AKT: $KT^2 = AK^2 + AT^2 - 2 \cdot AK \cdot AT \cdot \cos\angle BAC$.

$KT^2 = 72 + 144 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \dfrac{\sqrt{8}}{3} = 216 - 192 = 24.$

$ST = AT - AS = 12 - 6 = 6,\ ST^2 = 36.$

Так как $ST^2 = KS^2 + KT^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle SKT = 90°$.

В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы. $R = \frac{ST}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Ответ: 3.

Решение варианта № 6

21. $\frac{(201^2 - 99^2) \cdot 3^{3n-5}}{27^{n-1}} = \frac{(201-99)(201+99) \cdot 3^{3n}}{3^{3n-3} \cdot 3^5} =$

$= \frac{102 \cdot 300 \cdot 3^{3n}}{3^{3n} \cdot 3^2} = \frac{102 \cdot 300}{9} = 3400.$

Ответ: 3400.

22. Пусть один воланчик стоит y рублей, а одна ракетка — x рублей. Составим пропорции.

1) Ракетка x — 100%

7 воланчиков $7y$ — $(100 - 2)\%$

$$\frac{x}{7y} = \frac{100}{98},\ x = \frac{7y \cdot 100}{98} = \frac{700y}{98} \text{ (р.)}$$

2) Ракетка $\frac{700y}{98}$ — 100%

9 воланчиков $9y$ — $t\%$

$$\frac{700y}{98} : 9y = 100 : t, \quad t = \frac{900y \cdot 98}{700y} = 126\%.$$

3) $126\% - 100\% = 26\%$.

Ответ: 26.

23. $y = \begin{cases} x^2 + 6x - 7, \text{ если } x < 0, \\ \frac{-x^2 + 22x - 57}{x - 19}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Построим график заданной функции.

1) На промежутке $x < 0$ функция задаётся формулой $y = x^2 + 6x - 7$. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке с координатами $(-3; -16)$. $y(0) = -7$.

2) На промежутке $x \geqslant 0$ функция задаётся формулой

$$y = \frac{-x^2 + 22x - 57}{x - 19} = \frac{-(x-19)(x-3)}{(x-19)} = -x + 3,\ x \neq 19.$$

Прямая $y = p$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $p \leqslant -16$ и при $p > 3$ (см. рис. 17).

Ответ: $(-\infty; -16] \cup (3; +\infty)$.

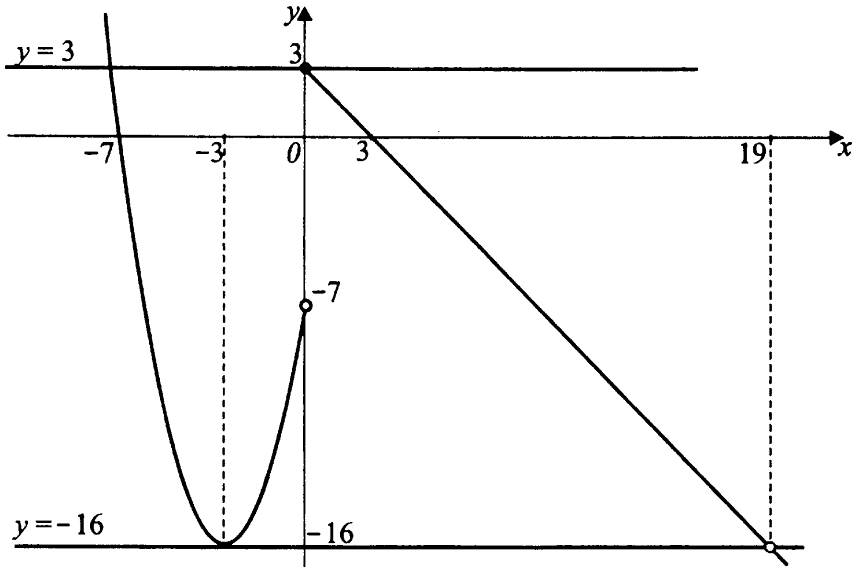


Рис. 17

24. По теореме синусов $\frac{AB}{\sin C} = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$ (см. рис. 18).

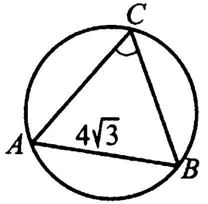


Рис. 18

$$2R = \frac{AB}{\sqrt{1-\cos^2 C}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{6}{9}}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot 3}{\sqrt{3}} = 12, \quad R = 6.$$

Ответ: 6.

25. Около выпуклого четырёхугольника (см. рис. 19) можно описать окружность, если сумма противоположных углов равна 180°. Докажем, что $\angle B + \angle D = 180°$. В треугольниках ABC и ADC:

1) $25^2 = 7^2 + 24^2$; $625 = 49 + 576$; $625 = 625$,

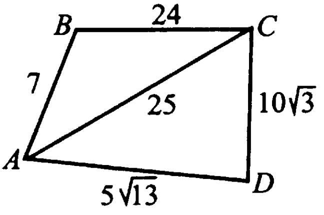


Рис. 19

2) $25^2 = (5\sqrt{13})^2 + (10\sqrt{3})^2$; $625 = 325 + 300$; $625 = 625$.

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольники ABC и ADC — прямоугольные, у которых углы ABC и ADC прямые. Имеем $\angle B + \angle D = 90° + 90° = 180°$, значит, около четырёхугольника можно описать окружность, что и требовалось доказать.

26. 1) В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC с основанием AC (см. рис. 20) $BC = AB = 10$. Проведём высоту BH, тогда $AH = CH = 6$ (в равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, совпадает с медианой).

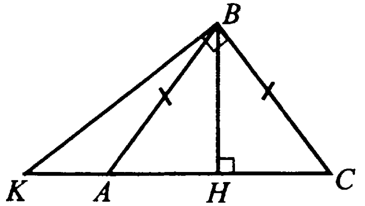


Рис. 20

2) В $\triangle BHC$: $\cos C = \dfrac{HC}{BC} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.

3) В прямоугольном треугольнике $\triangle CBK$:

$$\cos C = \frac{BC}{KC}, \quad KC = \frac{BC}{\cos C} = \frac{10}{0{,}6} = 16\frac{2}{3}.$$

$$AK = KC - AC = 16\frac{2}{3} - 12 = 4\frac{2}{3}.$$

Ответ: $4\frac{2}{3}$.

Решение варианта № 7

21. Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y}{4} = 3, \\ 4x - y = 3. \end{cases}$

Из второго уравнения $y = 4x - 3$ подставим в первое уравнение.

$\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{4x-3}{4} = 3$, $2x + 6 + 4x - 3 = 12$, $6x + 3 = 12$, $x = \dfrac{3}{2}$, $x = 1{,}5$. $y = 4 \cdot 1{,}5 - 3 = 3$.

Ответ: $(1{,}5; 3)$.

22. Пусть x дней бригада реально затратила на посадку деревьев, тогда предполагаемое количество дней $x+2$. Реальное количество деревьев, высаженных за один день, было $\dfrac{240}{x}$, а предполагаемое — $\dfrac{240}{x+2}$. Учитывая, что по условию задачи бригада ежедневно сажала на 4 дерева больше, чем предполагалось, составим и решим уравнение.

$\dfrac{240}{x} = \dfrac{240}{x+2} + 4$, $x > 0$, $240(x+2) = 240x + 4x \cdot (x+2)$, $4x^2 + 8x - 480 = 0$, $x^2 + 2x - 120 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = -12$ — не удовлетворяет условию $x > 0$. Бригада затратила на работу 10 дней.

Ответ: 10.

23. Построим график функции.

$$y = \begin{cases} (x+3)^2, \text{ при } |x+2| < 3; \\ -\dfrac{20}{x}, \text{ при } |x+2| \geqslant 3; \end{cases}$$

1) $y = (x+3)^2$, при $|x+2| < 3$. Решим неравенство $|x+2| < 3$,
$-3 < x + 2 < 3$,
$-5 < x < 1$.

Графиком функции является часть параболы, определённой на множестве $(-5; 1)$ и принимающей значения $[0; 16]$. Ветви направлены вверх, вершина в точке $(-3; 0)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 21).

x	-5	-3	-1	0	1
$y = (x+3)^2$	4	0	4	9	16

2) $y = -\dfrac{20}{x}$, $|x+2| \geqslant 3$.

Решим неравенство $|x+2| \geqslant 3$.

$$\left[\begin{array}{l} x+2 \geqslant 3, \\ x+2 \leqslant -3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -5. \end{array}\right.$$

Графиком этой функции является часть гиперболы, определённая на множестве $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$, ветви находятся во 2-й и 4-й четвертях. Составим таблицу и построим график (см. рис. 21).

x	-10	-8	-5	1	2	4	5
$y = -\dfrac{20}{x}$	2	$2{,}5$	4	-20	-10	-5	-4

3) Прямая $y = c$ пересекает построенный график функции в одной точке, когда $c \in [-20; 0] \cup (4; 16)$.

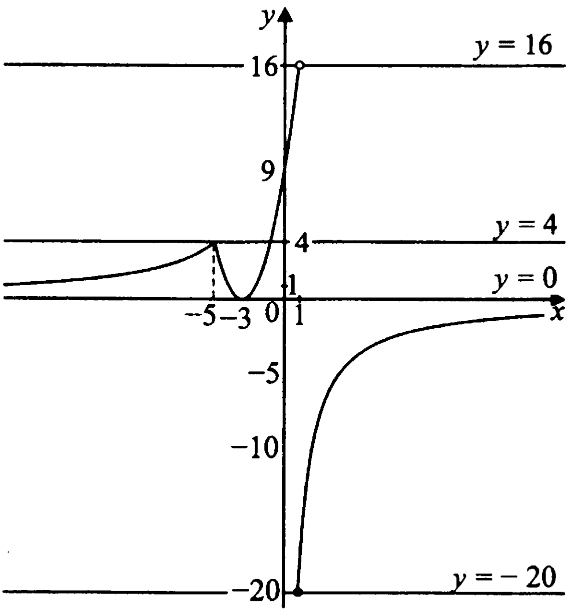


Рис. 21

Ответ: $[-20; 0] \cup (4; 16)$.

24. В треугольнике ABC (см. рис. 22) $AB = 8$, $AC = 5$, $\cos \angle BAC = -\dfrac{11}{80}$, тогда по теореме косинусов получаем

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$,

$$CB^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{11}{80}\right),\ CB^2 = 100,\ CB = 10.$$

$$AB^2 = CB^2 + AC^2 - 2 \cdot CB \cdot AC \cdot \cos\angle BCA,$$

$$\cos\angle BCA = \frac{CB^2 + AC^2 - AB^2}{2CB \cdot AC} = \frac{100 + 25 - 64}{2 \cdot 10 \cdot 5} = 0{,}61.$$

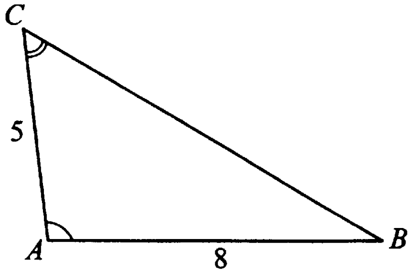


Рис. 22

Ответ: 0,61.

25. Доказательство.

Лучи AB и AC выходят из одной точки и пересекают окружность в точках E, B и F, C соответственно (см. рис. 23).

Обозначим $\angle BAC = \angle 1$, $\angle ABF = \angle 2$, $\angle BFC = \angle 3$.

$\angle 3$ — внешний угол $\triangle BAF$, он равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

$\angle 3 = \angle 2 + \angle 1$, $\angle 1 = \angle 3 - \angle 2$.

$\angle 3 = \frac{1}{2}\smile BC$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile EF$, как вписанные, опирающиеся на дуги BC и EF соответственно.

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\smile BC - \frac{1}{2}\smile EF = \frac{1}{2}(\smile BC - \smile EF).$$

$\angle BAC = \frac{1}{2}(\smile BC - \smile EF)$, что и требовалось доказать.

26. 1. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов ABC и BCD пересекают основание AD в точках L и K (см. рис. 24). Отсюда $\angle ABL = \angle CBL$ и $\angle BCK = \angle DCK$.

2. $\angle LBC = \angle BLA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BL. Отсюда $\triangle ABL$ — равнобедренный, $AB = AL$.

3. $\angle BCK = \angle CKD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей KC. $\triangle KCD$ — равнобедренный, $KD = CD$.

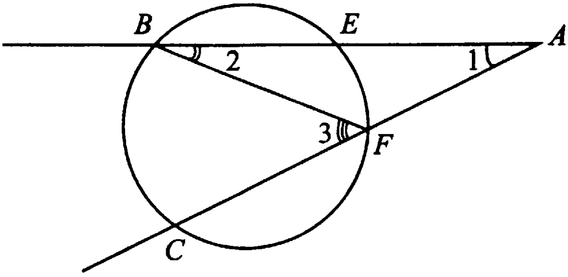


Рис. 23

4. Могут представиться две конфигурации, выберем ту, которая соответствует условию $AD = \frac{3}{2}AB$.

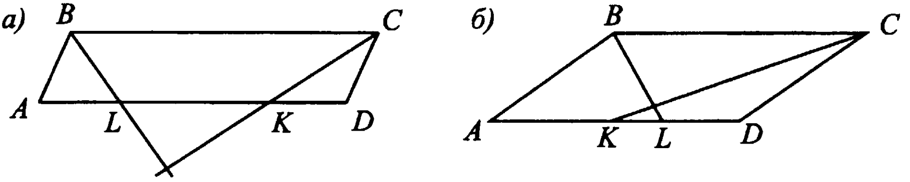


Рис. 24

$AB = CD$ — как противоположные стороны параллелограмма.

$AB = AL, CD = KD$ по доказанному, отсюда
$AB = AL = CD = KD$.

Обозначим $AB = x$, тогда $AD = \frac{3}{2}x$.

Рассмотрим конфигурацию $a)$:

$AD = AL + LK + KD = x + LK + x = 2x + LK > \frac{3}{2}x$, следовательно, условию задачи удовлетворяет конфигурация $б)$.

5. Площадь параллелограмма $S = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD$.

По теореме косинусов в треугольнике ABL получим:

$BL^2 = AB^2 + AL^2 - 2AB \cdot AL \cdot \cos \angle BAD$,

$64 = 2x^2(1 - \cos \angle BAD)$, $32 = x^2(1 - \cos \angle BAD)$,

$x^2 = \dfrac{32}{1 - \cos \angle BAD}$.

Аналогично в треугольнике KCD:

$CK^2 = CD^2 + KD^2 - 2CD \cdot KD \cdot \cos \angle CDK$,

$144 = 2x^2(1 - \cos\angle CDK)$, $72 = x^2(1 - \cos\angle(180^\circ - \angle BAD))$,

$x^2 = \dfrac{72}{1+\cos\angle BAD}$.

Найдём значение $\cos\angle BAD$.

$\dfrac{32}{1-\cos\angle BAD} = \dfrac{72}{1+\cos\angle BAD}$, $32(1+\cos\angle BAD) = 72(1-\cos\angle BAD)$, $4(1+\cos\angle BAD) = 9(1-\cos\angle BAD)$, $13\cos\angle BAD = 5$, $\cos\angle BAD = \dfrac{5}{13}$, $\sin\angle BAD = \dfrac{12}{13}$.

$x = \sqrt{\dfrac{32}{1-\frac{5}{13}}} = \sqrt{\dfrac{32\cdot 13}{8}} = 2\sqrt{13}$, то есть $AB = 2\sqrt{13}$, $AD = \dfrac{3}{2}\cdot 2\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$.

$S = 2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{13}\cdot \dfrac{12}{13} = 72$.

Ответ: 72.

Решение варианта №8

21. Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y+x}{4} = 3, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

Из второго уравнения $y = 2x - 3$ подставим в первое уравнение.

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{2x-3+x}{4} = 3$, $2x + 2x - 3 + x = 12$, $5x = 15$, $x = 3$. $y = 2\cdot 3 - 3$, $y = 3$.

Ответ: $(3; 3)$.

22. Пусть x деталей в час изготавливает молодой рабочий, тогда $x + 4$ деталей в час делает опытный рабочий. $\dfrac{40}{x+4}$ часов — время опытного рабочего, затраченное на изготовление 40 деталей, $\dfrac{30}{x}$ часов — время молодого рабочего, затраченное на изготовление 30 деталей. По условию задачи $\dfrac{30}{x}$ больше $\dfrac{40}{x+4}$ на 1.

Составим и решим уравнение.

$\dfrac{30}{x} - \dfrac{40}{x+4} = 1, x > 0, 30x + 120 - 40x = x(x+4), x^2 + 14x - 120 = 0,$
$x_1 = 6, x_2 = -20$ — не удовлетворяет условию $x > 0$.

Оба рабочих изготавливают $6 + 10 = 16$ деталей в час.

За $\dfrac{224}{16} = 14$ часов, работая вместе, рабочие изготовят 224 детали.

Ответ: 14.

23. Построим график функции

$$y = \begin{cases} (x+2)^2, \text{ при } |x+1| \leqslant 2, \\ -\dfrac{3}{x}, \text{ при } |x+1| > 2. \end{cases}$$

1) $y = (x+2)^2$, при $|x+1| \leqslant 2$.

Решим неравенство $|x+1| \leqslant 2$.

$-2 \leqslant x + 1 \leqslant 2,$

$-3 \leqslant x \leqslant 1.$

Графиком функции является часть параболы, определённой на множестве $[-3; 1]$ и принимающей значения $[0; 9]$. Ветви направлены вверх, вершина в точке $(-2; 0)$. Составим таблицу и построим график (см. рис. 25).

x	-3	-2	-1	0	1
$y = (x+2)^2$	1	0	1	4	9

2) $y = -\dfrac{3}{x}$, при $|x+1| > 2$.

Решим неравенство $|x+1| > 2$.

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 > 2, \\ x + 1 < -2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -3. \end{array}\right.$$

Графиком функции является часть гиперболы, определённой на множестве $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, ветви находятся во 2-й и 4-й четвертях. Составим таблицу и построим график (см. рис. 25).

x	-6	-3	1	3	6
$y = -\dfrac{3}{x}$	0,5	1	-3	-1	$-0{,}5$

3) Прямая $y = c$ пересекает построенный график функции в двух точках, когда $c = 1$.

Ответ: 1.

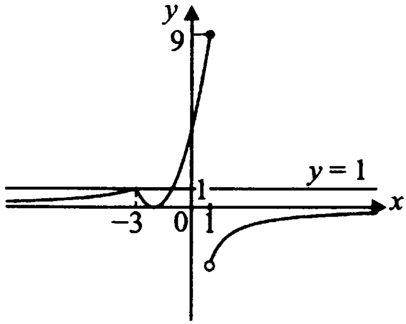


Рис. 25

24. По условию $\triangle KAC \sim \triangle ABC$, значит, их углы соответственно равны. В $\triangle KAC$ $\angle KAC$ — наибольший по условию, а в $\triangle ABC$ $\angle ABC$ — наибольший, так как лежит против большей стороны AC, равной 10, отсюда $\angle KAC = \angle ABC$. $\angle ACK$ составляет часть $\angle ACB$, значит, $\angle ACK \neq \angle ACB$, следовательно, $\angle AKC = \angle ACB$. В $\triangle ABC$ по теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle ACB.$$

$$\cos\angle ACB = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC},$$

$$\cos\angle ACB = \frac{25 + 100 - 81}{2 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{44}{100} = 0{,}44,$$

$$\cos\angle AKC = \cos\angle ACB = 0{,}44.$$

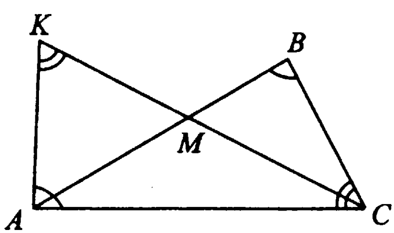


Рис. 26

Ответ: 0,44.

25. Доказательство.

По условию, продолжение хорды AB пересекает касательную к той же окружности в точке D, точка E — точка касания (см. рис. 27). $\triangle EDB \sim \triangle ADE$ по двум углам ($\angle D$ — общий, $\angle DEB = \frac{1}{2}\smile BE$ как угол между касательной и хордой, $\angle EAB = \frac{1}{2}\smile BE$ как вписанный угол, опирающийся на $\smile BE$, значит, $\angle DEB = \angle EAB$).

Из подобия следует $\frac{DB}{DE} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow DE^2 = DB \cdot AD$, что и требовалось доказать.

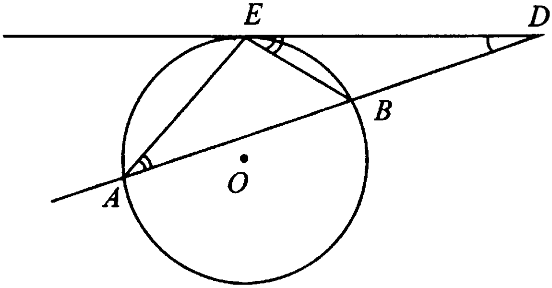


Рис. 27

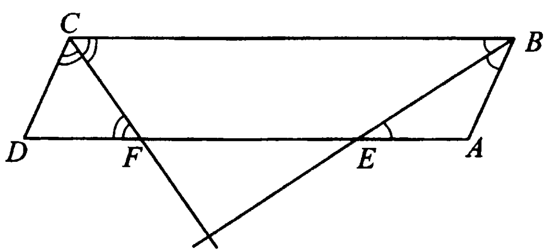


Рис. 28

26. 1) В параллелограмме $ABCD$ BE и CF (см. рис. 28) биссектрисы углов ABC и BCD соответственно, значит, $\angle ABE = \angle CBE$ и $\angle BCF = \angle DCF$.

$\angle BCF = \angle CFD$ — как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей CF, значит, $\triangle CDF$ — равнобедренный, $CD = DF$.

$\angle CBE = \angle BEA$ — как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BE, значит, $\triangle BAE$ — равнобедренный, $AB = AE$.

Выберем конфигурацию аналогично тому, как это было сделано в задаче 26 варианта 7.

2) Обозначим $\angle CDA = \alpha$, тогда $\angle DAB = 180° - \alpha$.

В треугольнике CDF по теореме косинусов
$CF^2 = CD^2 + DF^2 - 2CD \cdot DF \cdot \cos\angle\alpha$, $CF^2 = 2CD^2 - 2CD^2\cos\alpha$,
$CF^2 = 2CD^2(1 - \cos\alpha)$,
$64 = 2CD^2(1 - \cos\alpha)$, $32 = CD^2(1 - \cos\alpha)$.

В треугольнике BAE по теореме косинусов
$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos(180° - \alpha)$,
$BE^2 = 2AB^2 + 2AB^2 \cdot \cos\alpha$, $BE^2 = 2AB^2(1 + \cos\alpha)$,
$144 = 2AB^2(1 + \cos\alpha)$, $72 = AB^2(1 + \cos\alpha)$.

$AB = CD$, $AD = 4AB$, $AD = 4CD$, $1 - \cos\alpha = \dfrac{32}{CD^2}$,

$\cos\alpha = 1 - \dfrac{32}{CD^2}$, $1 + \cos\alpha = \dfrac{72}{CD^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{72}{CD^2} - 1$.

$1 - \dfrac{32}{CD^2} = \dfrac{72}{CD^2} - 1$; $\dfrac{104}{CD^2} = 2$; $52 = CD^2$, $CD = 2\sqrt{13}$.

$AD = 4 \cdot 2\sqrt{13} = 8\sqrt{13}$.

$\cos\alpha = 1 - \dfrac{32}{52} = \dfrac{20}{52} = \dfrac{5}{13}$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{25}{169}} = \dfrac{12}{13}$.

3) $S_{ABCD} = CD \cdot DA \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{13} \cdot 8\sqrt{13} \cdot \dfrac{12}{13} = 192$.

Ответ: 192.

Решение варианта № 9

21. $\dfrac{3^{2n+2} \cdot 5^{n-2}}{45^{n+1}} = \dfrac{3^{3n+2} \cdot 5^{n-2}}{3^{2n+2} \cdot 5^{n+1}} = 5^{n-2-(n+1)} = 5^{-3} = \dfrac{1}{125} = 0{,}008$.

Ответ: 0,008.

22. Пусть x км/ч — собственная скорость катера, а y км/ч — собственная скорость моторной лодки. Тогда время движения катера от пристани до острова будет $\dfrac{21}{x-3}$ ч, а время движения моторной лодки от пристани до острова в 2 раза меньше времени в пути катера, то есть $\dfrac{21}{2(x-3)}$ ч или $\dfrac{21}{y-3}$ ч. Время движения моторной лодки на обратном пути (от острова до пристани) — $\dfrac{21}{y+3}$ ч, и оно равно 35 минутам, или $\dfrac{7}{12}$ часа, то есть $\dfrac{21}{y+3} = \dfrac{7}{12}$.

Составим систему уравнений и решим её.

$$\begin{cases} \dfrac{21}{2(x-3)} = \dfrac{21}{y-3}, \\ \dfrac{21}{y+3} = \dfrac{7}{12}; \end{cases}$$

$\dfrac{21}{y+3} = \dfrac{7}{12}$, $21 \cdot 12 = 7(y+3)$, $y+3 = 36$, $y = 33$.

$\dfrac{21}{2(x-3)} = \dfrac{21}{y-3}$, $\dfrac{1}{2(x-3)} = \dfrac{1}{30}$, $x - 3 = 15$, $x = 18$.

Итак, время в пути катера (от острова до пристани) равно $\dfrac{21}{18+3} = \dfrac{21}{21} = 1$ (час).

Таким образом, на обратном пути катеру нужно выехать на $60 - 35 = 25$ (мин.) раньше моторной лодки.

Ответ: 25.

23. Построим график функции $y = \dfrac{x^4 - 52x^2 + 576}{(x+6)(x-4)}$.

$\dfrac{x^4 - 52x^2 + 576}{(x+6)(x-4)} = \dfrac{(x^2-36)(x^2-16)}{(x+6)(x-4)} =$
$= (x-6)(x+4)$, при $x \neq -6$, $x \neq 4$.

График исходной функции — это парабола $y = x^2 - 2x - 24$ с выколотыми точками $(-6; 24)$ и $(4; -16)$, ветви направлены вверх, вершина в точке $(1; -25)$ (см. рис. 29).

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $c = -25$; $c = -16$; $c = 24$.

Ответ: -25; -16; 24.

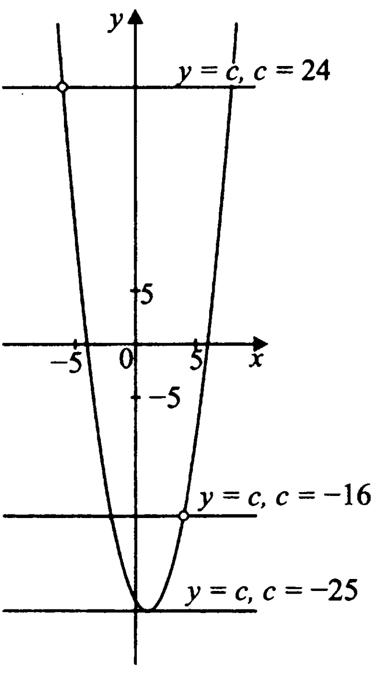


Рис. 29

24. В $\triangle CBH$ (см. рис. 30) $\angle CHB = 90^\circ$, $\operatorname{tg} \angle CBH = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\angle CBH = \angle CBA$. Следовательно, $\operatorname{tg} \angle CBA = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

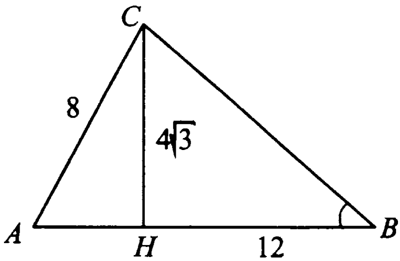


Рис. 30

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

25. В трапеции $MNPK$ точки A, B, C, D — середины сторон (см. рис. 31). Необходимо доказать, что если $ABCD$ — ромб, то трапеция $MNPK$ — равнобедренная.

Пусть сторона ромба $ABCD$ равна a, BC – средняя линия $\triangle KNP$, поэтому $KN = 2BC = 2a$. Аналогично $MP = 2a$. $MP = MK$.

Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная, что и требовалось доказать.

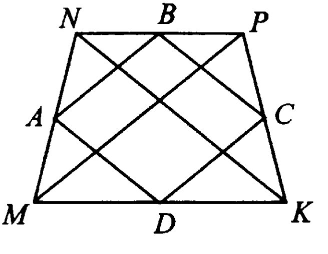


Рис. 31

26. 1) По условию MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 32), значит, $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC = 3{,}5$.

По условию $BC = 5$, $NC = \frac{1}{2}BC = 2{,}5$.

CO — биссектриса $\angle ACB$, $\angle NCO = \angle ACO$ и $\angle NOC = \angle OCA$ — как накрест лежащие углы при параллельных прямых MN и AC, секущей CO. Следовательно, $\triangle ONC$ — равнобедренный и $ON = NC$, $ON = 2{,}5$.

$MO = MN - ON = 3{,}5 - 2{,}5 = 1$.

2) Необходимо найти отношение $MO : ON$, $MO = 1$, $ON = 2{,}5$. $MO : ON = 1 : 2{,}5 = 2 : 5$.

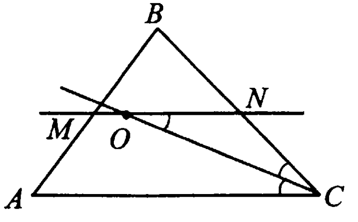


Рис. 32

Ответ: 2 : 5.

Решение варианта № 10

21. Сократим дробь $\dfrac{7^{n+1} \cdot 2^{3n-4}}{56^{n-1}} = \dfrac{7^{n+1} \cdot 2^{3n-4}}{2^{3(n-1)} \cdot 7^{n-1}} =$

$= 7^{n+1-(n-1)} \cdot 2^{3n-4-3(n-1)} = 7^2 \cdot 2^{-1} = \dfrac{49}{2} = 24{,}5$.

Ответ: 24,5.

22. 1) Время поезда, вышедшего из A в B, равно

20 ч 42 мин−15 ч 00 мин = 5 часов 42 мин, то есть $5\dfrac{42}{60} = 5\dfrac{7}{10} = 5{,}7$ (ч), скорость поезда равна $285 : 5{,}7 = 50$ (км/ч).

2) Время поезда, вышедшего из B в A, равно 5 ч 42 мин+38 мин= 6 ч 20 мин= $6\dfrac{1}{3}$ ч, скорость поезда равна $285 : 6\dfrac{1}{3} = 45$ (км/ч).

3) Скорость сближения поездов равна $50 + 45 = 95$ (км/ч), а время, через которое встретятся оба поезда, равно $\dfrac{285}{95} = 3$ (ч) $= 180$ (минут).

Ответ: 180.

23. Построим график функции $y = \dfrac{x^4 - 26x^2 + 25}{(x-5)(x+1)}$.

$\dfrac{x^4-26x^2+25}{(x-5)(x+1)} = \dfrac{(x^2-25)(x^2-1)}{(x-5)(x+1)} = (x+5)(x-1)$ при $x \neq 5$; $x \neq -1$.

График исходной функции — парабола $y = x^2 + 4x - 5$ с выколотыми точками $(-1; -8)$ и $(5; 40)$. Ветви направлены вверх, вершина в точке $(-2; -9)$ (см. рис. 33).

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $c = -9$, $c = -8$, $c = 40$.

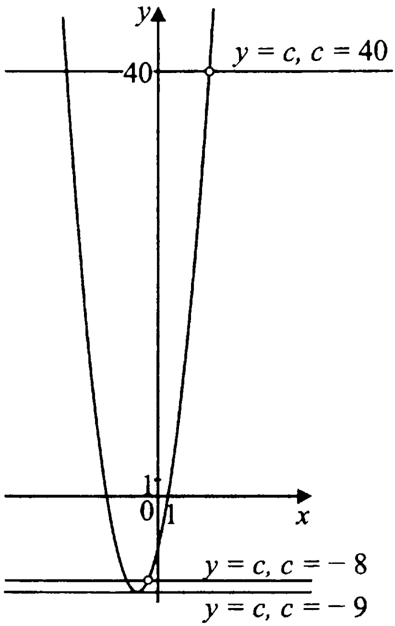


Рис. 33

Ответ: $-9; -8; 40$.

24. В прямоугольном треугольнике ABC (см. рис. 34) высота $AH = \sqrt{CH \cdot HB}$, $AH = \sqrt{2 \cdot 6}$, $AH = 2\sqrt{3}$.

$S = \frac{1}{2}BC \cdot AH$, $S = \frac{1}{2}(2+6) \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}$.

25. Доказательство.

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD (см. рис. 35), O — точка пересечения диагоналей. Заметим, что $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ по первому признаку подобия ($\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, а

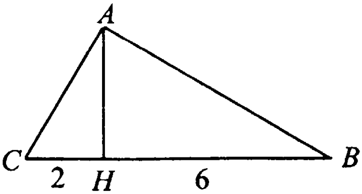


Рис. 34

$\angle OAD = \angle BCO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC).

Из подобия следует $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OD} = k$, где k — коэффициент подобия.

Тогда $S_{AOB} = \frac{1}{2}OB \cdot OA \sin\angle BOA = \frac{1}{2}OA \cdot k \cdot OD \sin\angle BOA$,

$$S_{COD} = \frac{1}{2}OC \cdot OD \sin\angle COD = \frac{1}{2}k \cdot OA \cdot OD \sin\angle COD.$$

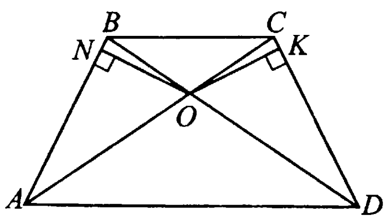


Рис. 35

Однако $\angle BOA = \angle COD$ как вертикальные, значит, $\sin\angle BOA = \sin\angle COD$ и $S_{AOB} = S_{COD}$.

К боковым сторонам AB и CD проведены перпендикуляры ON и OK соответственно.

Тогда $S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot ON$, $S_{COD} = \frac{1}{2}CD \cdot OK$ и потому

$\frac{1}{2}AB \cdot ON = \frac{1}{2}CD \cdot OK$. По условию $ON = OK$, значит, $AB = CD$, следовательно, трапеция $ABCD$ — равнобедренная, что и требовалось доказать.

26. Пусть $AE = 3x$, $EC = 2x$, так как по условию $AE : EC = 3 : 2$.

$\triangle ABE \sim \triangle EDC$ по двум углам ($\angle ABD = \angle ACD$ — вписанные углы, опирающиеся на дугу AD, $\angle AEB = \angle DEC$ — как вертикальные). Из подобия этих треугольников следует пропорциональность отрезков: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AE}{DE}$, $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3x}{DE}$, $DE = x\sqrt{6}$.

$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BE}{EC}$, $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{BE}{2x}$, $BE = \dfrac{6x}{\sqrt{6}} = x\sqrt{6}$.

Найдём отношение $BE : ED = x\sqrt{6} : x\sqrt{6} = 1 : 1$.

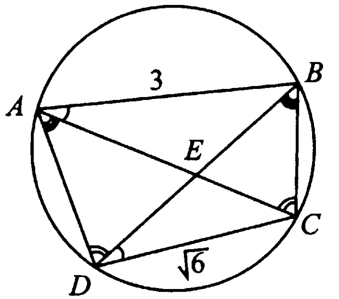


Рис. 36

Ответ: $1 : 1$.

Решение варианта № 11

21. $\dfrac{98^{n+1}}{7^{2n+1} \cdot 2^{n-1}} = \dfrac{(7^2 \cdot 2)^{n+1}}{7^{2n+1} \cdot 2^{n-1}} = \dfrac{7^{2n+2} \cdot 2^{n+1}}{7^{2n+1} \cdot 2^{n-1}} = 7 \cdot 2^2 = 28.$

Ответ: 28.

22. Пусть S км — расстояние, на которое туристы отплыли от пристани. По условию скорость течения реки равна 4 км/ч, собственная скорость катера равна 8 км/ч, поэтому скорость катера против течения реки равна 4 км/ч, а по течению — 12 км/ч. Тогда время, которое катер шёл против течения реки, равно $\dfrac{S}{4}$ ч, а по течению — $\dfrac{S}{12}$ ч.

Так как туристы отправились от пристани в 7 часов утра, а вернулись обратно в 19 часов вечера, то всего они затратили 12 часов. С другой стороны, это время складывается из времени, затраченного на путь от пристани, отдых и путь к пристани.

Составим уравнение и решим его.

$\frac{S}{4} + \frac{S}{12} + 6 = 12$, $\frac{S}{3} = 6$, $S = 18$ (км).

Ответ: 18 км.

23. Преобразуем выражение $\frac{x^4 - 17x^2 + 16}{(x+1)(x-4)}$.

$\frac{x^4 - 17x^2 + 16}{(x+1)(x-4)} = \frac{(x^2 - 16)(x^2 - 1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{(x-4)(x+4)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-4)} =$
$= (x+4)(x-1)$, $x \neq -1$, $x \neq 4$.

Построим график функции $y = (x+4)(x-1)$, $x \neq -1$, $x \neq 4$ (см. рис. 37).

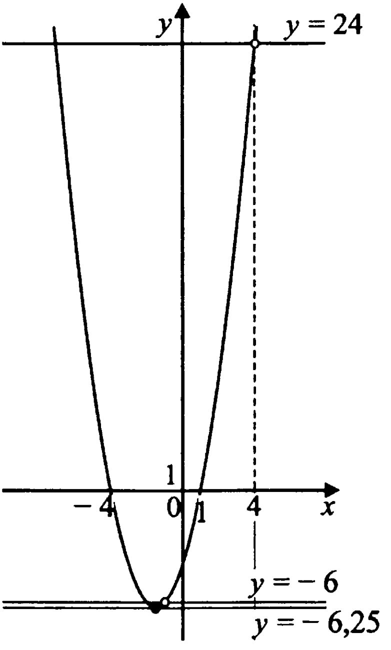


Рис. 37

Графиком функции является парабола с выколотыми точками $(-1; -6)$; $(4; 24)$ и вершиной в точке $(-1{,}5; -6{,}25)$.

Прямая $y = a$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $a = -6{,}25$, $a = -6$, $a = 24$.

Ответ: $-6{,}25$; -6; 24.

24. Пусть K и B — точки пересечения луча LO с окружностью (см. рис. 38). KB — диаметр, поэтому $\smile KMB = 180°$. По условию

$\smile KOM = 130°$, значит, и центральный угол KOM равен $130°$. Тогда $\angle MOL = 50°$. $OM \perp ML$ как радиус, проведённый в точку касания. $\triangle OML$ — прямоугольный, тогда $\angle MLO = 40°$.

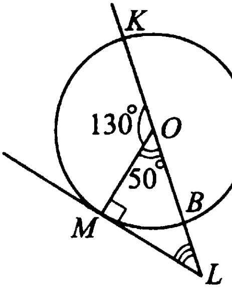


Рис. 38

Ответ: $40°$.

25. Пусть O — центр окружности, K — точка касания окружности и прямой F_1L_1 (см. рис. 39). OK — радиус, проведённый в точку касания. Следовательно, $OK \perp F_1L_1$. По условию $FF_1 \perp F_1L_1$, $LL_1 \perp F_1L_1$, значит, $OK \parallel FF_1 \parallel LL_1$. $OF = OL$ как радиусы окружности. Параллельные прямые отсекают на прямой FL равные отрезки, по теореме Фалеса на прямой F_1L_1 они также отсекают равные отрезки $F_1K = KL_1$, то есть K — середина отрезка F_1L_1.

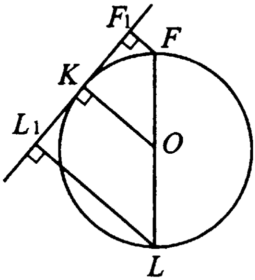


Рис. 39

26. Введём обозначения: $AM = 2t$, $MN = t$, $NB = 2t$, $BT = TP = l$, $PC = 5l$ (см. рис. 40). $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$.

$$140 = \frac{1}{2} \cdot 5t \cdot 7l \cdot \sin\angle ABC.$$

$l \cdot t \cdot \sin \angle ABC = 8.$

Четырёхугольник, площадь которого нужно найти, — параллелограмм со сторонами l, t и углом, равным $\angle ABC$, между ними.

Докажем, например, что $T_2P_2 = l$. TPP_2T_2 — параллелограмм, так как по условию его стороны попарно параллельны, значит, его противоположные стороны равны и $T_2P_2 = TP = l$. Аналогично другая сторона четырёхугольника равна t. $\angle ABC = \angle T_1TC$ как соответственные при $BA \parallel TT_1$, секущая BT. $\angle T_1TC = \angle T_1T_2P_2$ как соответственные при $NP_2 \parallel BC$, секущая TT_1. Значит, $\angle T_1T_2P_2 = \angle ABC$.

Площадь искомого четырёхугольника равна

$l \cdot t \sin \angle T_1T_2P_2 = l \cdot t \sin \angle ABC = 8.$

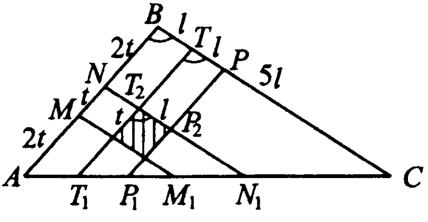


Рис. 40

Ответ: 8.

Решение варианта № 12

21. $\dfrac{75^{n+2}}{5^{2n+3} \cdot 3^{n-1}} = \dfrac{(5^2 \cdot 3)^{n+2}}{5^{2n+3} \cdot 3^{n-1}} = \dfrac{5^{2n+4} \cdot 3^{n+2}}{5^{2n+3} \cdot 3^{n-1}} = 5 \cdot 3^3 = 135.$

Ответ: 135.

22. Пусть S км — расстояние, на которое туристы отплыли от пристани. По условию скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость катера равна 8 км/ч, поэтому скорость катера против течения реки равна 6 км/ч, а по течению — 10 км/ч. Тогда время, которое катер шёл против течения реки, равно $\dfrac{S}{6}$ ч, а по течению — $\dfrac{S}{10}$ ч.

Так как туристы отправились от пристани в 8 часов утра, а вернулись обратно в 18 часов вечера, то всего они затратили 10 часов. С другой стороны, это время складывается из времени, затраченного на путь от пристани, отдых и путь к пристани. Составим уравнение и решим его.

$\frac{S}{6} + \frac{S}{10} + 4 = 10$, $\frac{2S}{15} = 3$, $S = 22{,}5$.

Ответ: 22,5 км.

23. Преобразуем выражение $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x-2)(x+1)}$.

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x^2-4)(x^2-1)}{(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = (x+2)(x-1),\ x \neq -1,\ x \neq 2.$$

Построим график функции $y = (x+2)(x-1)$, $x \neq -1$, $x \neq 2$ (см. рис. 41). Графиком является парабола с выколотыми точками $(-1; -2)$, $(2; 4)$, вершиной с координатами $(-0{,}5; -2{,}25)$

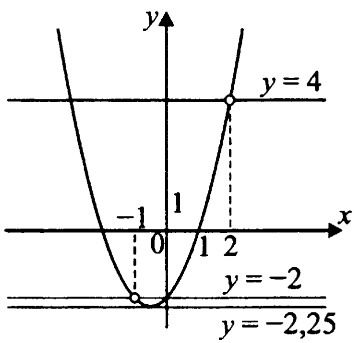


Рис. 41

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $c = -2{,}25$, $c = -2$, $c = 4$.

Ответ: $-2{,}25$; -2; 4.

24. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$NK = \frac{1}{2}LM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{LN^2 + NM^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7{,}5.$$

Ответ: 7,5.

25. По условию точка N симметрична точке O относительно точки M, поэтому $OM = MN$, $OM \perp ML$ как радиус, проведённый в точку касания. $\triangle LMO = \triangle LMN$ (по двум катетам), поэтому $\angle NLM = \angle MLO$

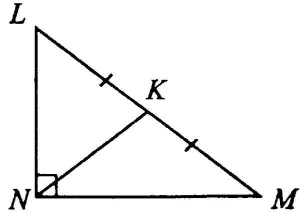


Рис. 42

(см. рис. 43). $\triangle LOM = \triangle LOK$ (по катету и гипотенузе), следовательно, $\angle OLM = \angle OLK$, откуда $\angle KLN = 3\angle MLN$.

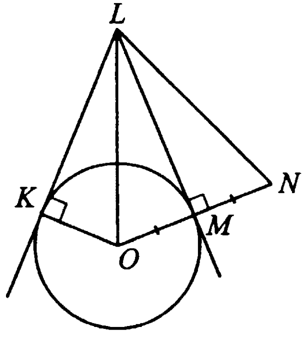


Рис. 43

26. Введём обозначения: $AN = 3t$, $MN = 2t$, $MB = 3t$, $BK = l$, $KL = 2l$, $LC = 6l$ (см. рис. 44). $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$.

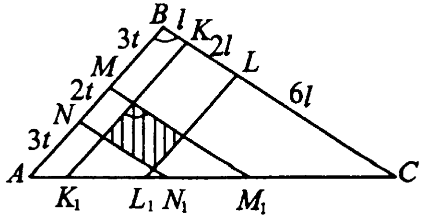


Рис. 44

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8t \cdot 9l \cdot \sin\angle ABC = 36t \cdot l \sin\angle ABC.$$

Четырёхугольник, площадь которого известна, — параллелограмм со сторонами $2l$, $2t$ и углом, равным $\angle ABC$, между ними (докажите это самостоятельно, пользуясь доказательством №26 варианта 11). Так как по условию площадь четырёхугольника равна 18, то $4l \cdot t \cdot \sin \angle ABC = 18$.

Тогда $S_{ABC} = 18 \cdot 9 = 162$.

Ответ: 162.

Решение варианта № 13

21. $\begin{cases} \dfrac{x+5}{3} - \dfrac{y-2}{4} = 1, \\ x^2 - y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 4(x+5) - 3(y-2) = 12, \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + 20 - 3y + 6 = 12, \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 3y = -14, \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 32 = 0, \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -\dfrac{8}{3}, \end{array} \right. \\ y = x^2 - 6; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 10; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{8}{3}, \\ y = \dfrac{10}{9}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Итак, решением системы являются пары $(4; 10)$ и $\left(-\frac{8}{3}; \frac{10}{9}\right)$.

Ответ: $(4; 10)$; $\left(-\frac{8}{3}; \frac{10}{9}\right)$.

22. Обозначим через x литров объём второго раствора, тогда объём первого раствора $-(x+2)$ л, а объём смеси $-(2x+2)$ л.

Внесём данные в таблицу.

Раствор	**Объём раствора (в литрах)**	**Объём кислоты (в литрах)**
Первый раствор	$x+2$	$0{,}1(x+2)$
Второй раствор	x	$0{,}4x$
Смесь	$2x+2$	$0{,}15(2x+2)$

Составим уравнение и решим его.

$0{,}15(2x + 2) = 0{,}1(x + 2) + 0{,}4x,$

$15(2x + 2) = 10(x + 2) + 40x,$

$30x + 30 = 10x + 20 + 40x,$

$20x = 10,$

$2x = 1, 2x + 2 = 3.$

Таким образом, объём полученной смеси равен 3 л.

Ответ: 3 л.

23. Раскроем знак модуля в выражении $x^2 + 2x + \frac{|x|}{x}$. Тогда функция примет вид

$$y = \begin{cases} 2x + 8, \text{ если } x < -3, \\ x^2 + 2x - 1, \text{ если } -3 \leqslant x < 0, \\ x^2 + 2x + 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Построим график функции (см. рис. 45).

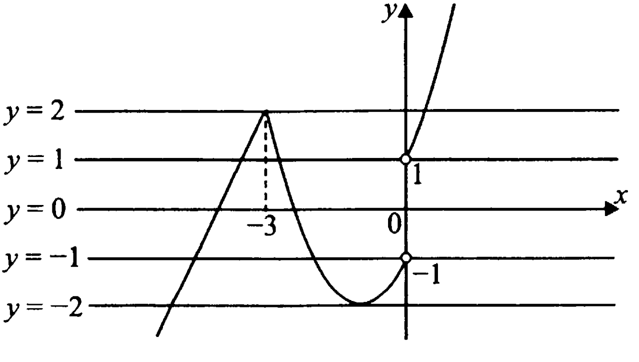


Рис. 45

Прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки при $a = 2$ $-1 \leqslant a \leqslant 1, a = -2.$

Ответ: $[-1; 1] \cup \{-2; 2\}$.

24. $\angle MAB = 90^\circ : 2 = 45^\circ$, так как AM — биссектриса прямого угла A.

Угол между биссектрисой AM и медианой AD равен:

$\angle MAD = 45^\circ - \angle DAB$ (см. рис. 46).

$\triangle DAB$ — равнобедренный, так как медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, следовательно, $\angle DAB = \angle DBA = 28^\circ$.

Значит, $\angle MAD = 45^\circ - 28^\circ = 17^\circ$.

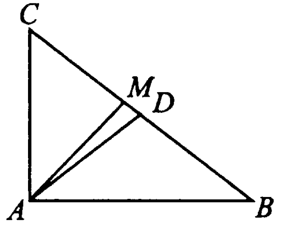


Рис. 46

Ответ: 17°.

25. В прямоугольнике противоположные стороны равны, $BA = CD$, $BC = AD$.

Введём обозначения: $BE = DK = t$, $EA = CK = 4t$, $DP = BF = l$, $AP = FC = 4l$ (см. рис. 47).

$\triangle BEF = \triangle PDK$, $\triangle AEP = \triangle CFK$ по двум катетам, следовательно, $EF = PK$, $EP = FK$.

Итак, в четырёхугольнике $EFKP$ противоположные стороны попарно равны, значит, четырёхугольник $EFKP$ — параллелограмм. Что и требовалось доказать.

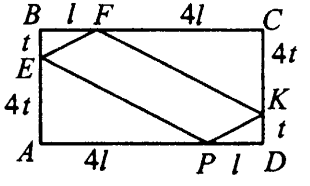


Рис. 47

26. $AT^2 = AC \cdot AL$ (на основании теоремы о касательной и секущей) (см. рис. 48).

Проведём высоту BL треугольника ABC. Точка L лежит на окружности, так как прямой угол BLC опирается на диаметр BC.

$\triangle APQ \sim \triangle ABL$ по двум углам. Тогда $\frac{PQ}{BL} = \frac{AP}{AL}$, $\frac{PQ}{BL} = \frac{10}{AL}$

$PQ = \frac{10BL}{AL}$ (1).

По условию $S_{ABC} = 4S_{APQ}$; $4 \cdot \frac{1}{2}AP \cdot PQ = \frac{1}{2}AC \cdot BL$,

$40QP = AC \cdot BL$, $PQ = \frac{AC \cdot BL}{40}$ (2).

Из (1) и (2) получаем $\frac{10BL}{AL} = \frac{AC \cdot BL}{40}$, $\frac{10}{AL} = \frac{AC}{40}$.

$AL \cdot AC = 400$, значит, $AT^2 = 400$, откуда $AT = 20$.

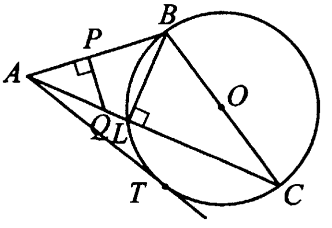


Рис. 48

Ответ: 20

Решение варианта № 14

21. $\begin{cases} \frac{x+3}{4} - \frac{y-5}{3} = 4, \\ y^2 + x = 13. \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 9 - 4y + 20 = 48, \\ x = 13 - y^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 4y = 19, \\ x = 13 - y^2; \end{cases}$

$\begin{cases} 3(13 - y^2) - 4y = 19, \\ x = 13 - y^2;. \end{cases}$ $\begin{cases} 3y^2 + 4y - 20 = 0, \\ x = 13 - y^2; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = -\frac{10}{3}, \end{array} \right. \\ x = 13 - y^2; \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 9, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{17}{9}, \\ y = -\dfrac{10}{3}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Итак, решением системы являются пары $(9; 2)$ и $\left(\frac{17}{9}; -\frac{10}{3}\right)$.

Ответ: $(9; 2)$; $\left(\frac{17}{9}; -\frac{10}{3}\right)$.

22. Обозначим через x кг массу второго слитка, тогда масса первого слитка — $(x + 6)$ кг, а масса сплава — $(2x + 6)$ кг.

Внесём данные в таблицу.

Слитки	**Масса сплава (кг)**	**Масса серебра в сплаве (кг)**
Первый слиток	$x + 6$	$0{,}4(x + 6)$
Второй слиток	x	$0{,}2x$
Сплав	$2x + 6$	$0{,}35(2x + 6)$

Составим уравнение и решим его.

$0{,}35(2x + 6) = 0{,}4(x + 6) + 0{,}2x,$

$35(2x + 6) = 40(x + 6) + 20x,$

$70x + 210 = 40x + 240 + 20x,$

$10x = 30,$

$x = 3,\ x + 6 = 9.$

Таким образом, масса первого слитка равна 9 кг.

Ответ: 9 кг.

23. Раскроем знак модуля в выражении $x^2 - 4x + \dfrac{|3x|}{x}$. Тогда функция примет вид

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 3, \text{ если } -1 < x < 0, \\ x^2 - 4x + 3, \text{ если } x > 0, \\ -x + 1, \text{ если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Построим её график (см. рис. 49).

Прямая $y = p$ имеет с графиком ровно две общие точки при $p \geqslant 3$ $p = -1$.

Ответ: $\{-1\}$, $[3; +\infty)$.

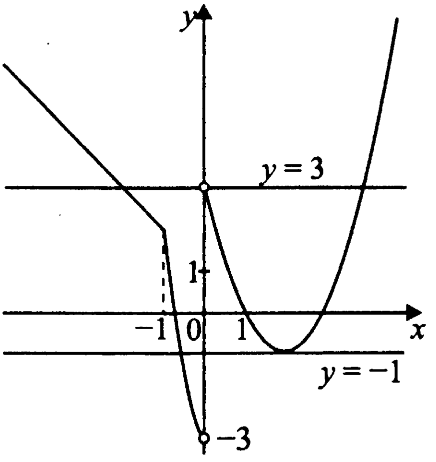


Рис. 49

24. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, следовательно, $AM = MB$ и в равнобедренном треугольнике ABM $\angle MAB = \angle MBA = 38°$ (см. рис. 50).

В прямоугольном треугольнике ABH $\angle ABH = 90° - 38° = 52°$. Тогда $\angle MBH = \angle ABH - \angle ABM = 52° - 38° = 14°$.

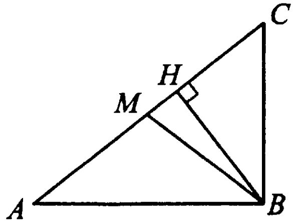


Рис. 50

Ответ: 14°.

25. В параллелограмме $ABCD$ противоположные стороны равны ($BA = CD$, $BC = AD$) и противоположные углы равны ($\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$).

Введём обозначения (см. рис. 51): $BP = DF = t$, $AP = CF = 2t$, $BK = DE = l$, $CK = AE = 2l$.

$\triangle BKP = \triangle DEF$, $\triangle APE = \triangle CFK$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $PK = EF$, $EP = FK$.

Итак, в четырёхугольнике $PKFE$ противоположные стороны попарно равны, значит, четырёхугольник $PKFE$ — параллелограмм. Что и требовалось доказать.

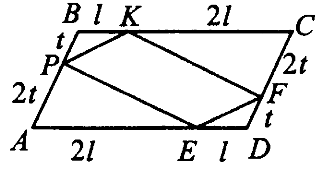


Рис. 51

26. По свойству отрезков касательной и секущих $AD^2 = AC \cdot AL$ (см. рис. 52), поэтому $AL \cdot AC = 225$ (1).

Проведём высоту BL треугольника ABC. Точка L лежит на окружности, так как прямой угол BLC опирается на диаметр BC. $\triangle ABL \sim \triangle ARM$ по двум углам. Тогда $\dfrac{AR}{AL} = \dfrac{RM}{BL}$ или $\dfrac{5}{AL} = \dfrac{RM}{BL}$;

$BL = \dfrac{RM \cdot AL}{5}$.

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{AMR}} = \dfrac{AC \cdot BL}{AR \cdot RM}$ (2).

Из (1) выразим AC: $AC = \dfrac{225}{AL}$.

Тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AMR}} = \dfrac{225 \cdot RM \cdot AL}{AL \cdot AR \cdot 5 \cdot RM} = \dfrac{225}{25} = 9$.

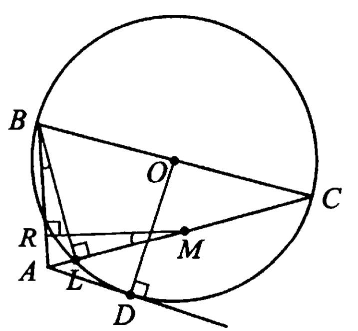


Рис. 52

Ответ: 9.

Решение варианта № 15

21. $\dfrac{x^2-21}{4} \leqslant 2x-7, x^2-21 \leqslant 8x-28, x^2-8x+7 \leqslant 0,$

$(x-1)(x-7) \leqslant 0.$

$(x-1)(x-7) = 0, x = 1, = 7.$

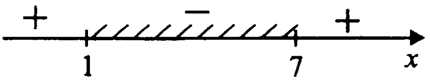


Рис. 53

Значит, $(x-1)(x-7) \leqslant 0$ при $x \in [1;7]$.

Ответ: $[1;7]$.

22. Пусть первоначальная скорость мотоциклиста равна x км/ч, тогда из A в B он доехал за $\dfrac{45}{x}$ часов. После поворота в пункте B он проехал до остановки ещё $54-45=9$ км с той же скоростью за время $\dfrac{9}{x}$ ч. Ему осталось проехать $45-9=36$ км, и он проехал их со скоростью $(x+6)$ км/ч за время $\dfrac{36}{x+6}$ ч. На путь из B в A он затратил на $\dfrac{5}{60}$ ч меньше, чтобы компенсировать время, затраченное на остановку.

$\dfrac{45}{x} = \dfrac{9}{x} + \dfrac{36}{x+6} + \dfrac{5}{60}, \quad \dfrac{36}{x} - \dfrac{36}{x+6} = \dfrac{1}{12},$

$\dfrac{36\cdot 6}{x(x+6)} = \dfrac{1}{12}, \quad x^2+6x = 36\cdot 6\cdot 12, \quad x^2+6x-2592=0;$

$x_1 = 48, x_2 = -54$. Первоначальная скорость велосипедиста равна 48 км/ч.

Ответ: 48 км/ч.

23. Прямая $y = b - x$ и парабола $y = -x^2 - 4x$ имеют столько общих точек, сколько корней в уравнении $b - x = -x^2 - 4x$ (см. рис. 54).

$x^2 + 3x + b = 0$. Квадратное уравнение имеет ровно один корень, если его дискриминант равен нулю.

$D = 3^2 - 4b = 9 - 4b = 0, -4b = -9, b = \dfrac{9}{4}.$

Искомое b равно 2,25. Прямая имеет вид $y = 2{,}25 - x$. Координаты общей точки $x = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$; $y = 3{,}75$.

Построим графики. Парабола $y = -x^2 - 4x$ имеет вершину в точке с координатами $x_0 = \dfrac{4}{-2} = -2$, $y_0 = 4$. Ветви направлены вниз.

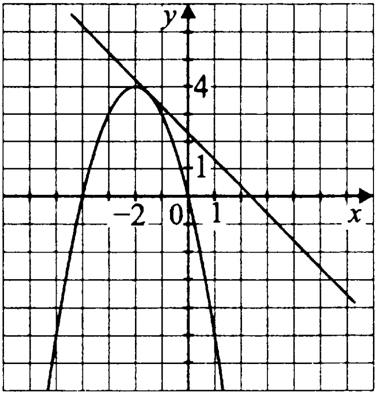


Рис. 54

Ответ: 2,25, (−1,5; 3,75).

24. В $\triangle ABC$ точка $M \in BC$, MK и MP — расстояния от M до катетов AC и AB (см. рис. 55). По условию $BM = 3$, $MC = 4$ см, $MP = MK$. $MP \perp AB$, $AC \perp AB$, значит, $MP \parallel AC$.

Аналогично $AB \parallel MK$, значит, $APMK$ — квадрат.

Пусть $AP = PM = MK = AK = x$.

Треугольники BMP и KMC подобны по двум углам ($\angle BPM = \angle MKC = 90°$, $\angle BMP = \angle MCK$ как соответственные при $PM \parallel KC$, MC — секущая). Получаем $\dfrac{BP}{MK} = \dfrac{PM}{KC} = \dfrac{3}{4}$,

$\dfrac{BP}{x} = \dfrac{x}{KC} = \dfrac{3}{4}$, $BP = \dfrac{3}{4}x$, $KC = \dfrac{4}{3}x$.

Из $\triangle BMP$ по теореме Пифагора $BP^2 + PM^2 = BM^2$, $\left(\dfrac{3}{4}x\right)^2 + x^2 = 3^2$, $\dfrac{25}{16}x^2 = 9$, $x = \dfrac{12}{5}$, откуда $BP = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{9}{5}$, $BA = \dfrac{21}{5}$,

$AC = x + \dfrac{4}{3}x = \dfrac{7}{3} \cdot \dfrac{12}{5} = \dfrac{28}{5}$.

$S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{BC \cdot h}{2}$, где h — высота $\triangle ABC$, проведённая к гипотенузе.

$$h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{\frac{21}{5} \cdot \frac{28}{5}}{7} = \frac{84}{25} = 3{,}36\ (\text{см}).$$

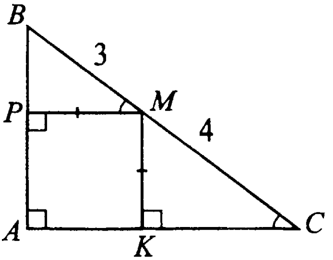


Рис. 55

Ответ: 3,36 см.

25. Рассмотрим $\triangle ABC$ со средней линией MP (см. рис. 56). $MP \parallel AC$ по свойству средней линии треугольника, $AM = MB$, $BP = PC$. $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $BP = PC$. Проведём $BH \perp MP$, $CT \perp MP$.

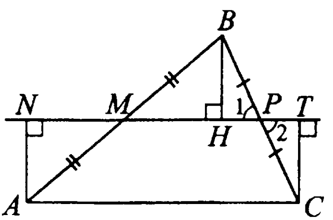


Рис. 56

$\triangle BHP = \triangle PTC$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), следовательно, $BH = TC$. Аналогично $BH = AN$, где $AN \perp MT$. Расстояния AN, BH и CT от вершин треугольника до средней линии равны, что и требовалось доказать.

26. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором $AB = BC, T, M, H$ — точки касания вписанной окружности радиусом $r = 2\sqrt{5}$ (см. рис. 57), $BT : TC = 5 : 2$. Пусть $BT = 5x, TC = 2x$. Отрезки касательных, проведённых из точки к окружности, равны. $MB = BT = 5x, TC = CH = 2x$, $AM = AH$.

Центр O окружности лежит на биссектрисах $\triangle ABC$, в равнобедренном треугольнике BH является биссектрисой, высотой и медианой. Тогда $AH = HC = 2x$.

Периметр $\triangle ABC$ равен $P = (2x + 5x) \cdot 2 + (2x + 2x) = 18x$.

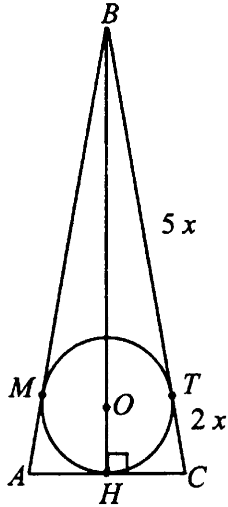


Рис. 57

По теореме Пифагора $BH^2 = BC^2 - CH^2 = (7x)^2 - (2x)^2 = 45x^2$, $BH = x\sqrt{45}$. Площадь $S_{ABC} = \dfrac{r \cdot P}{2} = \dfrac{AC \cdot BH}{2}$,

$$\frac{2\sqrt{5} \cdot 18x}{2} = \frac{4x \cdot x\sqrt{45}}{2}; x = \frac{\sqrt{5} \cdot 9}{\sqrt{45}} = 3,\ AB = 7x = 21.$$

Ответ: 21.

Решение варианта № 16

21. $\dfrac{x^2 - 6{,}5}{5} \leqslant \dfrac{x-3}{2}, 2x^2 - 13 \leqslant 5x - 15, 2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0, 2x^2 - 5x + 2 = 0,$

$x_1 = 2; x_2 = \dfrac{1}{2}$. Значит, $2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0$ при $x \in [0{,}5; 2]$ (см. рис. 58).

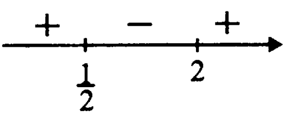


Рис. 58

Ответ: $[0{,}5; 2]$.

22. Пусть первоначальная скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда путь 75 км он преодолел за $\frac{75}{x}$ часов. После увеличения его скорость стала равна $(x+5)$ км/ч, и путь обратно он преодолел за $\frac{75}{x+5}$ часов, что по условию на $\frac{45}{60}$ ч $= \frac{3}{4}$ ч меньше, чем $\frac{75}{x}$ ч.

$\frac{75}{x} - \frac{75}{x+5} = \frac{3}{4}$, $\frac{75 \cdot 5}{x(x+5)} = \frac{3}{4}$, $3x^2 + 15x - 1500 = 0$, $x^2 + 5x - 500 = 0$, $x_1 = -25$; $x_2 = 20$.

Первоначальная скорость равна 20 км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

23. Прямая $y = x - a$ имеет с параболой $y = x^2 + 5x$ столько общих точек, сколько корней имеет уравнение $x^2 + 5x = x - a$.

Квадратное уравнение $x^2 + 4x + a = 0$ имеет ровно один корень, если дискриминант $D = 16 - 4a$ равен нулю.

$16 - 4a = 0$ при $a = 4$. Найдём координаты общей точки: $x^2 + 4x + 4 = 0$, $x = -2$, $y = -6$. Построим в одной системе координат параболу $y = x^2 + 5x$ и прямую $y = x - 4$.

Парабола имеет вершину в точке с координатами $(-2{,}5; -6{,}25)$, ветви направлены вверх, ось Ox парабола пересекает в точках $(-5; 0)$ и $(0; 0)$.

Прямую $y = x - 4$ построим по точкам $(0; -4)$ и $(4; 0)$ (см. рис. 59).

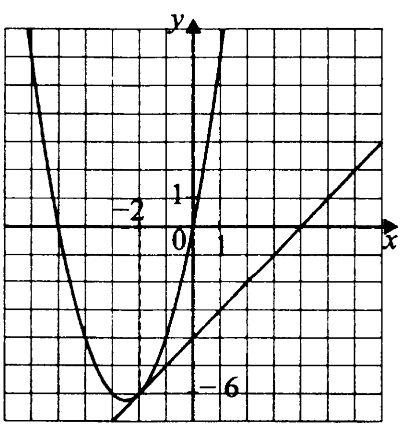


Рис. 59

Ответ: 4, $(-2; -6)$.

24. В $\triangle ABC$ точка M лежит на гипотенузе BC, $BM = 4$, $MC = 6$ (см. рис. 60). Расстояния от M до катетов $MP = MK$. $MP \perp AB$, $MK \perp AC$, $MP \parallel AC$, $APMK$ — квадрат.

Пусть его стороны равны x.

$\triangle BPM \sim \triangle BAC$ ($\angle BPM = \angle MKC = 90°$, $\angle BMP = \angle BCA$).

$\frac{BP}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{PM}{AC}$; $\frac{BP}{x+BP} = \frac{4}{10} = \frac{x}{AC}$, $AC = \frac{10x}{4} = 2{,}5x$.

$10BP = 4x + 4BP$, $6BP = 4x$, $BP = \frac{2}{3}x$, $AB = \frac{2}{3}x + x = \frac{5}{3}x$.

По теореме Пифагора $AB^2 + AC^2 = BC^2$, $\left(\frac{5}{3}x\right)^2 + (2{,}5x)^2 = 10^2$, $\frac{25}{9}x^2 + \frac{25}{4}x^2 = 100$, $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right)x^2 = 4$, $x^2 = \frac{144}{13}$, $x = \frac{12}{\sqrt{13}}$. $AC = \frac{30}{\sqrt{13}}$, $AB = \frac{20}{\sqrt{13}}$.

Пусть h — высота $\triangle ABC$, перпендикулярная BC. Найдём площадь $\triangle ABC$ двумя способами.

$S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot h}{2}$, $h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}$.

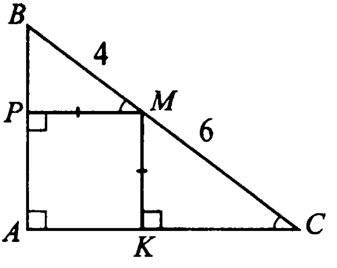


Рис. 60

Ответ: $4\frac{8}{13}$.

25. По условию $AE = BF$, $\angle BAE = \angle ABF$, эти углы накрест лежащие при прямых AE и BF, секущей AB, значит, $AE \parallel BF$. O — точка пересечения AB и EF (см. рис. 61). В четырёхугольнике $AEBF$ противоположные стороны равны и параллельны, значит, это параллелограмм. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, то есть $EO = OF$ и O — середина EF, что и требовалось доказать.

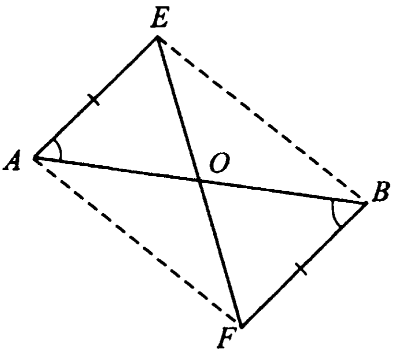


Рис. 61

26. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BM}{AB} = \frac{MC}{AC}$, отсюда $AC = \frac{AB \cdot MC}{BM} = \frac{21\sqrt{2} \cdot 10}{14} = 15\sqrt{2}$ (см. рис. 62).

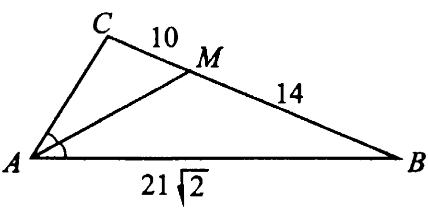


Рис. 62

$BC = 14 + 10 = 24.$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$ получаем

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC,$

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(21\sqrt{2})^2 + (15\sqrt{2})^2 - 24^2}{2 \cdot 21\sqrt{2} \cdot 15\sqrt{2}} = 0{,}6.$$

$\sin^2\angle BAC + \cos^2\angle BAC = 1, \ \sin\angle BAC = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8.$

По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R$, где R — радиус описанной окружности. $R = \frac{24}{2 \cdot 0{,}8} = 15.$

Ответ: 15.

Решение варианта № 17

21. $\begin{cases} x+2y=1, \\ x^2+2xy-y^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-2y, \\ (1-2y)^2+2y(1-2y)-y^2=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=1-2y, \\ 1-4y+4y^2+2y-4y^2-y^2-1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-2y, \\ y^2+2y=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=1-2y, \\ y(y+2)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=0, \\ x_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} y_2=-2, \\ x_2=5. \end{cases}$

Ответ: $(1;0)$, $(5;-2)$.

22. Пусть на дачу Вася ехал со скоростью x км/ч и проехал 15 км за $\frac{15}{x}$ часов. Обратно он ехал со скоростью $(x-4)$ км/ч и затратил на дорогу до дома $\frac{15}{x-4}$ часа. На всю поездку было затрачено 4 часа.

$\frac{15}{x}+\frac{15}{x-4}=4$, $\frac{15(x-4)+15x}{x(x-4)}=4$,

$30x-60=4x(x-4)$, $15x-30=2x^2-8x$, $2x^2-23x+30=0$, $x_1=10$, $x_2=1{,}5$.

Если на дачу Вася ехал бы со скоростью 1,5 км/ч, то обратно он ехал бы с отрицательной скоростью.

Значит, его скорость была 10 км/ч.

Ответ: 10.

23. Прямая $y=3x+a$ касается параболы $y=4x-x^2$, если уравнение $3x+a=4x-x^2$ имеет ровно один корень.

$x^2-x+a=0$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+a=0$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-a$. В этом уравнении один корень при $a=\frac{1}{4}$, он равен $x=\frac{1}{2}$.

Построим в одной системе координат параболу $y=4x-x^2$ и прямую $y=3x+\frac{1}{4}$.

Парабола имеет вершину в точке с координатами $(2;4)$, ветви направлены вниз, ось Ox парабола пересекает в точках $(0;0)$ и $(4;0)$.

Прямую $y=3x+\frac{1}{4}$ построим по точкам $\left(0;\frac{1}{4}\right)$ и $\left(1;3\frac{1}{4}\right)$ (см. рис. 63).

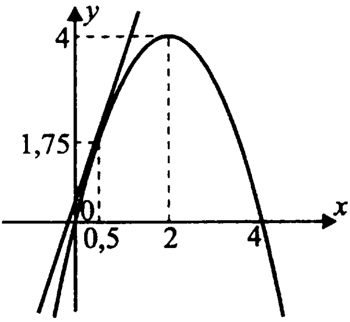


Рис. 63

Координаты точки касания $x = 0{,}5$, $y = 3 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{4} = 1{,}5 + 0{,}25 = 1{,}75$.

Ответ: 0,25, (0,5; 1,75).

24. По условию $AB = BC$, $BK = 6$, периметр $\triangle ABC$ равен 13, то есть $AB + BC + AC = 13$ (см. рис. 64).

Обозначим $KC = y$. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны. Если M, T, K — точки касания, то $MB = BK = 6$, $KC = TC = y$.

$AB = BM + AM$, $AM = AB - BM = BC - BK = y$, $AT = AM = y$.

Тогда $P_{ABC} = 6 + y + 6 + y + y + y = 13$, $4y = 1$, $y = 0{,}25$. $AC = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

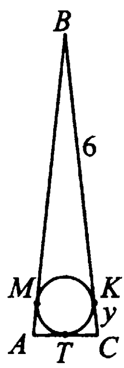


Рис. 64

25. Заметим, что $BC \perp AB$, так как $BC \parallel AD$ (основания трапеции) и $AD \perp AB$ (см. рис. 65). Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. $\angle B = \angle ACD = 90°$ (по условию).

$\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD, секущей AC. Треугольники подобны по двум углам.

$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC}$, $AC^2 = AD \cdot BC$, что и требовалось доказать.

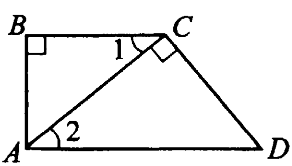


Рис. 65

26. По условию в трапеции $ABCD$ диагонали $BD \perp AC$, $AB = CD$ (см. рис. 66). Центры O_1 и O_2 вписанных окружностей лежат на биссектрисах вертикальных углов BOA и COD, значит, $\angle BOO_1 = \angle COO_2 = 45°$, $\angle O_1OO_2 = 180°$ и $O \in O_1O_2$. По условию $O_1O_2 = 8$. Пусть M и T — точки касания окружностей с диагоналями, тогда $\angle O_1MO = \angle OTO_2 = 90°$. Трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому она симметрична относительно прямой, проходящей через O — точку пересечения диагоналей, и перпендикулярной основаниям. Поэтому $O_1O = O_2O = 4$. В прямоугольном $\triangle O_1MO$ $O_1O = 4$, $OM = O_1O\cos 45° = 2\sqrt{2}$. В $\triangle BOC$ (равнобедренном и прямоугольном) $OB = BC\cos 45° = 5\sqrt{2}$, тогда $BM = 3\sqrt{2}$.

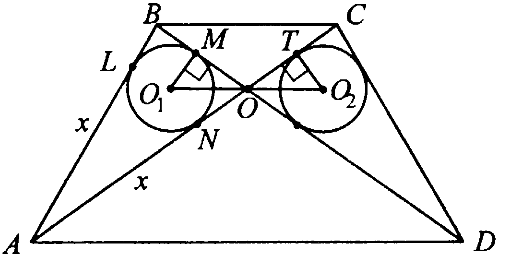


Рис. 66

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABO$. Вписанная окружность касается его сторон в точках L, M и N, поэтому $BM = BL$, $OM = ON$, $AN = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки.

Пусть $AL = x$. По теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + OB^2$, $(x+3\sqrt{2})^2 = (x+2\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2$, $6\sqrt{2}x + 18 + x^2 = x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + 50$, $2\sqrt{2}x = 40$, $x = 10\sqrt{2}$. $AO = x + 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$, $AD = \dfrac{AO}{\cos 45°} = 24$.

Ответ: 24.

Решение варианта № 18

21. $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ 2x^2 - 2xy + 3xy - 3y^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x - 3, \\ 2x(x - y) + 3y(x - y) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ (x - y)(2x + 3y) = 0; \end{cases}$

1) $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ x - y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = y, \\ y = 2y - 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ 2x + 3y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 3 + y, \\ y + 3 + 3y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -0{,}75, \\ x = 1{,}125. \end{cases}$

Ответ: $(3; 3)$, $(1{,}125; -0{,}75)$.

22. Пусть на дачу Петя доехал со скоростью x км/ч за $\dfrac{32{,}5}{x}$ часов. Обратно он ехал со скоростью $(x-3)$ км/ч и доехал до дома за $\dfrac{32{,}5}{x-3}$ часа. Всего на поездку он затратил $5\dfrac{45}{60}$ ч $= 5\dfrac{3}{4}$ ч.

$\dfrac{32{,}5}{x} + \dfrac{32{,}5}{x-3} = 5\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{65x - 97{,}5}{x^2 - 3x} = \dfrac{23}{4}$,

$23x^2 - 69x = 260x - 390$, $23x^2 - 329x + 390 = 0$.

$x_1 = 13$, $x_2 = \dfrac{30}{23}$. По условию $x > 3$, поэтому скорость по пути на дачу равна 13 км/ч.

Ответ: 13.

23. Прямая $y = x + a$ касается параболы $y = -x^2 - 4x - 3$, если уравнение $x + a = -x^2 - 4x - 3$ имеет ровно один корень.

$x^2 + 5x + a + 3 = 0$; $(x + 2{,}5)^2 - 6{,}25 + a + 3 = 0$, $(x + 2{,}5)^2 = 3{,}25 - a$. Это уравнение имеет один корень, если $3{,}25 - a = 0$, $a = 3{,}25$.

При этом $x = -2{,}5$.

Найдём координаты точки касания.

$x = -2{,}5$, $y = -2{,}5 + 3{,}25 = 0{,}75$.

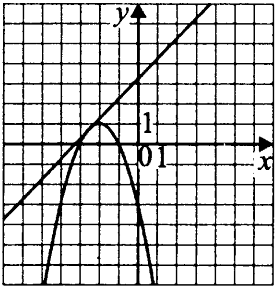


Рис. 67

Построим прямую $y = x + 3{,}25$ и параболу $y = -x^2 - 4x - 3$ (см. рис. 67). Координаты вершины параболы $x_0 = \dfrac{4}{-2} = -2$, $y_0 = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 3 = 1$. Ветви направлены вниз, ось Ox парабола пересекает в точках $(-1; 0)$ и $(-3; 0)$.

Ответ: 3,25, $(-2{,}5,\ 0{,}75)$.

24. По условию $AB = BC$, $KC = 3$, периметр $P_{ABC} = 19$, $AB + BC + AC = 19$ (см. рис. 68).

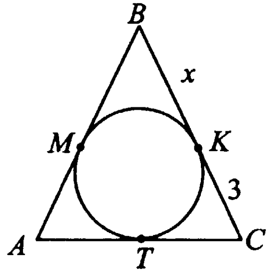


Рис. 68

Обозначим точки касания окружности со сторонами $\triangle ABC$ как M, T и K, $BK = x$. Тогда по свойству отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $BM = BK = x$, $KC = CT = 3$, $AM = AT$. При этом $AM = AB - MB = BC - BK = 3$.

$BC = x + 3 = AB$, $AC = 3 + 3 = 6$. $P_{ABC} = (x + 3) \cdot 2 + 6 = 19$, $x + 3 = 6{,}5$. $AB = 6{,}5$.

Ответ: 6,5.

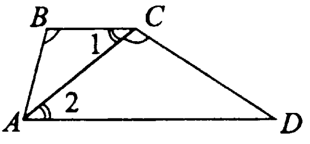


Рис. 69

25. По условию в трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle ABC = \angle ACD$, $AC = 2BC$ (см. рис. 69).

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.

$\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при прямых $BC \parallel AD$ и секущей AC, $\angle B = \angle ACD$ по условию, значит, треугольники подобны по двум углам.

Получаем $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$, тогда $AD = \dfrac{AC^2}{BC} = \dfrac{(2BC)^2}{BC} = 4BC$, что и требовалось доказать.

26. По условию в трапеции $ABCD$ диагонали $BD \perp AC$, $AB = CD$ (см. рис. 70). Центры O_1 и O_2 вписанных окружностей лежат на биссектрисах вертикальных углов BOA и COD, значит,

$\angle BOO_1 = \angle COO_2 = 45°$, $\angle O_1OO_2 = 180°$ и $O \in O_1O_2$. По условию $O_1O_2 = 6$. Пусть M и T — точки касания окружностей с диагоналями, тогда $\angle O_1MO = \angle OTO_2 = 90°$. Трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому она симметрична относительно прямой, проходящей через O — точку пересечения диагоналей, и перпендикулярной основаниям.

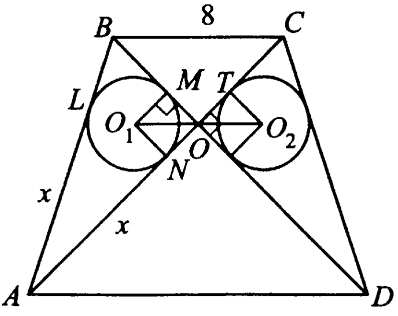


Рис. 70

Поэтому $O_1O = O_2O$. В прямоугольном ΔO_1MO $O_1O = 3$, $OM = O_1O\cos 45° = 1{,}5\sqrt{2}$. В ΔBOC (равнобедренном и прямоугольном) $OB = BC\cos 45° = 4\sqrt{2}$, тогда $BM = 2{,}5\sqrt{2}$.

Рассмотрим прямоугольный ΔABO. Вписанная окружность касается его сторон в точках L, M и N, поэтому $BM = BL$, $OM = ON$, $AN = AL$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки.

Пусть $AL = x$. По теореме Пифагора

$AB^2 = AO^2 + OB^2$, $(x + 2{,}5\sqrt{2})^2 = (x + 1{,}5\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$, $5\sqrt{2}x + 12{,}5 + x^2 = x^2 + 3\sqrt{2}x + 4{,}5 + 32$, $2\sqrt{2}x = 24$, $x = 6\sqrt{2}$. $AB = x + 2{,}5\sqrt{2} = \dfrac{17\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{17\sqrt{2}}{2}$.

Решение варианта № 19

21. $\sqrt{\sqrt{\dfrac{12^k \cdot 27}{3^{k-1} \cdot 4^{k+1}}} + 4{,}5} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3^k \cdot 4^k \cdot 3^3}{3^{k-1} \cdot 4^{k+1}}} + 4{,}5} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3^4}{2^2}} + 4{,}5} =$

$= \sqrt{\dfrac{9}{2} + 4{,}5} = \sqrt{9} = 3.$

Ответ: 3.

22. Пусть x км/ч — скорость первого автомобиля, тогда $(x+20)$ км/ч — второго, $(2x+20)$ км/ч — скорость сближения, $6\cdot(2x+20)$ км — расстояние между городами A и B. С другой стороны, если бы первый выехал на 3 часа позже, то второй за это время проехал бы $3\cdot(x+20)$ км, а при совместном движении они проехали бы расстояние, равное $\frac{17}{4}(2x+20)$ км, $\left(4 \text{ ч } 15 \text{ мин}= 4\frac{15}{60} \text{ ч}= 4\frac{1}{4} \text{ ч}= \frac{17}{4}\right)$, тогда $\left(3(x+20)+\frac{17}{4}(2x+20)\right)$ км — расстояние между городами.

$$6(2x+20)=3(x+20)+\frac{17}{4}(2x+20),$$

$$12x+120=3x+60+\frac{17}{2}x+85.$$

$$0{,}5x=25,$$

$$x=50.$$

50 км/ч — скорость первого автомобиля.

$6(2\cdot 50+20)=720$ (км) — расстояние между городами.

Ответ: 720 км.

23. $y=\begin{cases} |x|, \text{ при } -1\leqslant x\leqslant 2;\\ -x^2+6x-6, \text{ при } x>2 \text{ и при } x<-1.\end{cases}$

Построим график заданной функции.

1) При $-1\leqslant x\leqslant 2$ $y=|x|$, если $-1\leqslant x\leqslant 0$, то $y=-x$, если $0<x\leqslant 2$, то $y=x$.

2) При $x>2$ и $x<-1$ $y=-x^2+6x-6$ — часть параболы, ветви направлены вниз, вершина в точке $(3;3)$ (см. рис. 71).

Прямая $y=c$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при $c\in(-\infty;-13)\cup\{0\}\cup(1;3)$.

Ответ: $(-\infty;-13)\cup\{0\}\cup(1;3)$.

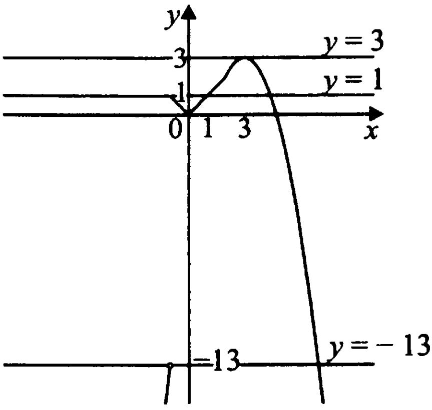


Рис. 71

24. $S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin B$

$$\sin B = \frac{S_{ABCD}}{AB \cdot BC} = \frac{40}{8 \cdot 10} = \frac{1}{2}$$

(см. рис. 72).

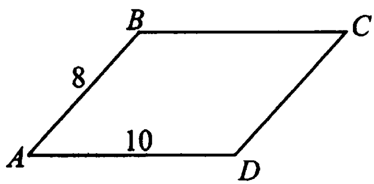


Рис. 72

$\angle B$ — тупой, следовательно, $\angle B = 150°$.

Ответ: $150°$.

25. Диагональ AD разбивает шестиугольник на 2 трапеции, у которых KM и PN — средние линии, значит, $KM \parallel AD$, $KM = \frac{1}{2}(AD + BC)$ и $PN \parallel AD$, $PN = \frac{1}{2}(AD + FE)$, $FE = BC$ (см. рис. 73). Отсюда $KM = PN$ и $KM \parallel PN$, следовательно, $KMNP$ — параллелограмм. По условию шестиугольник $ABCDEF$ правильный. O — точка пересечения диагоналей AD и BE. $OK = OM = ON = OP$ как медианы правильных равных треугольников AOB, COD, DOE, AOF соответственно. В равносторонних треугольниках AOB и EOD медианы OK и ON являются биссектрисами, $\angle KOB = \angle NOD = 30°$, $\angle KON = 30° + 60° + 60° + 30° = 180°$, значит, O лежит на отрезке KN. Аналогично O лежит на отрезке PM. При этом $KN = KO + ON = OM + OP = MP$. В параллелограмме $KMNP$ диагонали KN и MP равны, следовательно, $KMNP$ — прямоугольник, что и требовалось доказать.

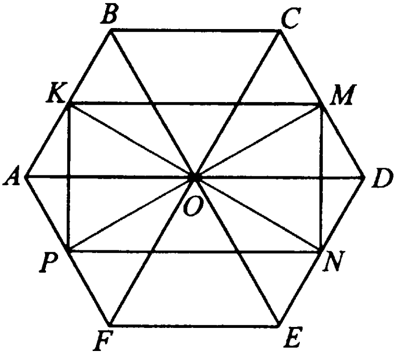


Рис. 73

26. По условию

$$S_{AKB} = S_{BKC} = S_{AKC} = \frac{1}{2}KF \cdot AB = \frac{1}{2}KE \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot KH,$$

где KF, KE и KH — высоты треугольников AKB, BKC, AKC соответственно (см. рис. 74). $AB = BC = AC$, следовательно, $KF = KE = KH$. Это означает, что KF, KE, KH — радиусы вписанной в $\triangle ABC$ окружности. $KF = KE = KH = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6} = 1$, где a — сторона правильного треугольника ABC.

Из $\triangle KHC$ $KC = \sqrt{KH^2 + HC^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

$$S_{AKC} = \frac{1}{2}KH \cdot AC = \frac{1}{2}P_{AKC} \cdot r,$$

$$r = \frac{KH \cdot AC}{P_{AKC}},\ r = \frac{2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

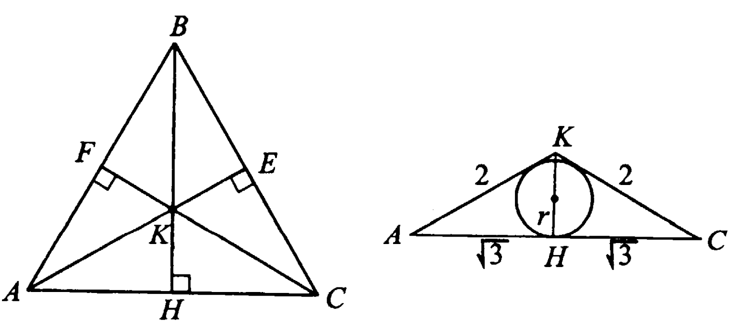


Рис. 74

Ответ: $2\sqrt{3} - 3$.

Решение варианта № 20

21. $\sqrt{3\cdot\sqrt{\dfrac{30^{m+3}\cdot 5}{2^{m-1}\cdot 5^m\cdot 3^{m+1}}}+6}=\sqrt{3\cdot\sqrt{\dfrac{2^{m+3}\cdot 3^{m+3}\cdot 5^{m+3}\cdot 5}{2^{m-1}\cdot 5^m\cdot 3^{m+1}}}+6}=$

$=\sqrt{3\cdot\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^4}}+6=2\cdot 3\cdot 5+6=36.$

Ответ: 36.

22. Пусть x км/ч — скорость второго велосипедиста, S км — расстояние между городами. Тогда $(x+10)$ км/ч — скорость первого велосипедиста.

Задача сводится к решению системы $\begin{cases}\dfrac{S}{x}-\dfrac{S}{x+10}=4, & (1)\\ \dfrac{S}{x+x+10}=4\dfrac{48}{60}, & (2)\\ x>0.\end{cases}$

Из уравнения (1)

$S=\dfrac{4}{\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+10}\right)}=0{,}4x(x+10).$

Подставим $S=0{,}4x(x+10)$ в уравнение (2):

$0{,}4x(x+10)=4{,}8(2x+10),$

$x^2+10x=24x+120,$

$x^2-14x-120=0,$

$x=7\pm\sqrt{49+120}=7\pm 13,$

$x_1=20$, $x_2=-6$ — не удовлетворяет условию $x>0$.

20 км/ч — скорость второго велосипедиста.

$S=0{,}4\cdot 20(20+10)=8\cdot 30=240$ (км) — расстояние между городами.

Ответ: 240 км.

23. $y=\begin{cases}|x-2|, \text{при } 0<x<3;\\ x^2-4x-2, \text{при } x\leqslant 0 \text{ и } x\geqslant 3.\end{cases}$

Построим график заданной функции.

1. При $0<x<3$, $y=|x-2|$.

Если $x\geqslant 2$, то $y=x-2$.

Если $x<2$, то $y=-x+2$.

2. При $x\leqslant 0$ и $x\geqslant 3$ $y=x^2-4x-2$ — часть параболы, ветви которой направлены вверх, вершина не принадлежит заданным промежуткам.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки при $c\in[-2;0)\cup[2;+\infty)$ (см. рис. 75).

Ответ: $[-2;0)\cup[2;+\infty)$.

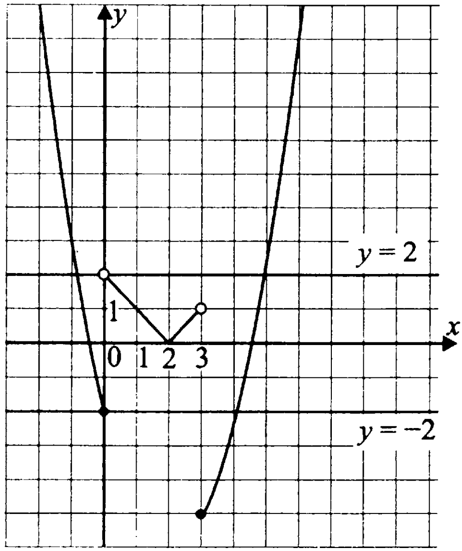


Рис. 75

24. $S_{ABCD} = DC \cdot BK = AD \cdot BH$ (см. рис. 76). Так как меньшая высота проведена к большей стороне, то $BH = 9$, тогда $BK = \dfrac{AD \cdot BH}{DC} = \dfrac{12 \cdot 9}{10} = 10{,}8$.

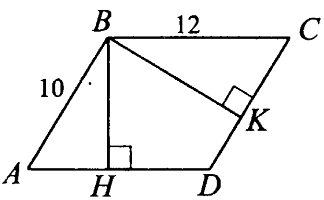


Рис. 76

Ответ: 10,8.

25. Диагональ AC разбивает правильный пятиугольник на треугольник ABC и четырёхугольник $AEDC$ (см. рис. 77). В $\triangle ABC$ KL — средняя линия, значит, $KL \parallel AC$. Четырёхугольник $AEDC$ является трапецией. Действительно, $\angle BAE = 108°$ как угол правильного пятиугольника, $\angle BAC = \angle BCA = 36°$ (как углы при основании равнобедренного треугольника с углом при вершине 108°), следовательно, $\angle CAE = 72°$. $\angle CAE + \angle AED = 180°$, откуда следует, что $AC \parallel ED$. В трапеции

$AEDC$ MN — средняя линия, значит, $MN \parallel AC$, отсюда $KL \parallel MN$. Так как $KL = \frac{1}{2}AC$, а $MN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}ED$, то $MN > KL$, следовательно, $KLMN$ — трапеция.

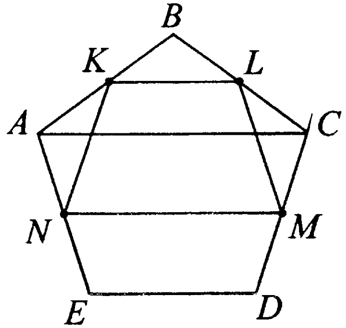


Рис. 77

$\triangle AKN = \triangle LCM$ по первому признаку равенства треугольников ($AK = AN = CL = CM$ как половины равных сторон и $\angle A = \angle C$ (как углы правильного пятиугольника). Из равенства треугольников следует, что $KN = LM$, поэтому трапеция $KLMN$ — равнобедренная, что и требовалось доказать.

26. Пусть $\angle AKB = \alpha$, $\angle BKC = \beta$, $\angle AKC = \gamma$, причём каждый из углов больше $0°$, но меньше $180°$ (см. рис. 78). R — радиус окружностей, описанных около треугольников AKB, BKC и AKC, тогда $\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\gamma} = 2R$.

$\triangle ABC$ — правильный, значит, $AB = BC = AC$, тогда

$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\gamma} = 2R$. Учитывая, что $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$, возможны случаи:

1) $\alpha = \beta = \gamma$, тогда $\alpha + \alpha + \alpha = 360°$, $\alpha = 120°$;

2) $\beta = 180° - \alpha$, $\gamma = \alpha$, тогда $\alpha + 180° - \alpha + \alpha = 360°$, $\alpha = 180°$, что не соответствует условию $0 < \alpha < 180°$;

3) $\beta = 180° - \alpha$, $\gamma = 180° - \alpha$, тогда $\alpha + 180° - \alpha + 180° - \alpha = 360°$, $\alpha = 0$, что не соответствует условию $0 < \alpha < 180°$.

Имеем $\frac{AB}{\sin 120°} = 2R$, $\frac{9 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R$, $R = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

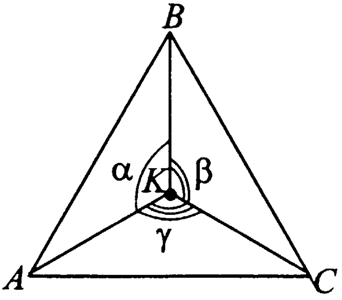


Рис. 78

Решение варианта №21

21. $\dfrac{175^{n+2}}{5^{2n+5}\cdot 7^{n+1}} = \dfrac{5^{2n+4}\cdot 7^{n+2}}{5^{2n+5}\cdot 7^{n+1}} = \dfrac{7}{5} = 1{,}4.$

Ответ: 1,4

22. Пусть x км/ч — собственная скорость лодки.

Направление	$v\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$	t **(ч)**	s **км**
по течению	$x+2$	$\dfrac{24}{x+2}$	24
против течения	$x-2$	$\dfrac{24}{x-2}$	24

$\dfrac{24}{x+2} + \dfrac{24}{x-2} = 16,\ x > 2,$

$24x - 48 + 24x + 48 = 16x^2 - 64,$

$x^2 - 3x - 4 = 0,$

$x_1 = -1$ — не удовлетворяет условию $x > 2$,

$x_2 = 4.$

4 км/ч — собственная скорость лодки.

Ответ: 4.

23. Преобразуем выражение $\dfrac{x^4 - 26x^2 + 25}{(x-1)(x+5)}$.

$$\frac{x^4 - 26x^2 + 25}{(x-1)(x+5)} = \frac{(x^2-25)(x^2-1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-5)(x+5)}{(x-1)(x+5)} =$$
$$= (x+1)(x-5) = x^2 - 4x - 5,\ x \neq 1,\ x \neq -5.$$

Графиком функции $y = (x-2)^2 - 9$, $x \neq 1$, $x \neq -5$ является парабола с выколотыми точками $(1; -8)$ и $(-5; 40)$. Ветви параболы направлены вверх, вершина в точке $(2; -9)$.

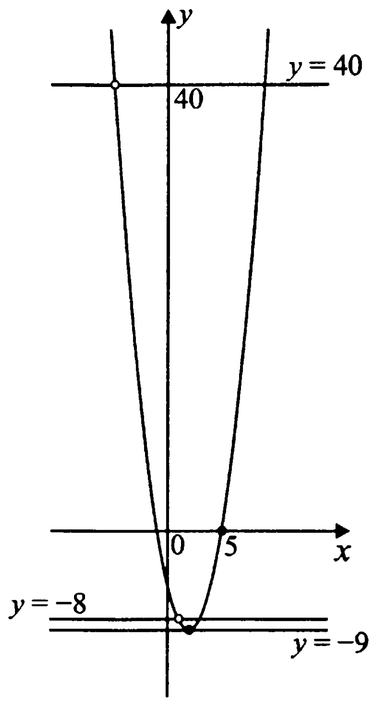


Рис. 79

Прямая $y = a$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $a \in \{-9; -8; 40\}$ (см. рис. 79).

Ответ: $\{-9; -8; 40\}$.

24. 1) Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2$, $AC = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ (см) (см. рис. 80).

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CH$,

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9{,}6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 9,6 см.

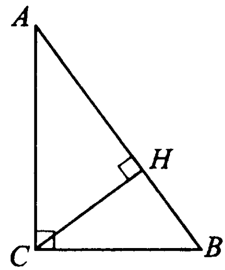


Рис. 80

25. В параллелограмме $OMCK$ $OK \parallel MC$ как противоположные стороны и $\angle OMC = \angle OKC$ как противоположные углы (см. рис. 81).

По условию AM и BK — биссектрисы углов OMC и OKC соответственно, поэтому $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = \angle 5$ как половины равных углов. $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при $OK \parallel MC$ и секущей AM, отсюда $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 3$ и $\angle 4$ — соответственные при прямых AM и KB и секущей OK, $AM \parallel KB$ по признаку параллельности прямых. Имеем $MC \parallel OK$; $AM \parallel BK$, следовательно, $AMBK$ — параллелограмм по признаку параллелограмма, что и требовалось доказать.

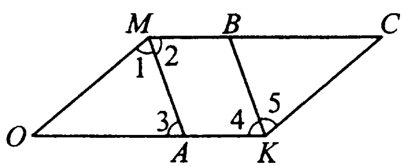


Рис. 81

26. Обозначим $AD = t$, $BK = x$, тогда $DC = 4t$, $KC = 2x$ (см. рис. 82).

$AM = AD$, $BM = BK$ и $CD = CK$ — как отрезки касательных, проведённых из точек A и C соответственно. Имеем $AM = t$, $CK = 2x = 4t$, $x = 2t$. Найдём периметр треугольника ABC. $P_{ABC} = AM + MB + BK + KC + DC + AD = t + 2t + 2t + 4t + 4t + t = 14t$, полупериметр $p = \dfrac{14t}{2} = 7t$.

По формуле Герона $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
$S_{\triangle ABC} = \sqrt{7t(7t-6t)(7t-5t)(7t-3t)} = \sqrt{7t \cdot t \cdot 2t \cdot 4t} = 2t^2\sqrt{14} =$
$= 8\sqrt{14}$, $t > 0$, $t = 2$.

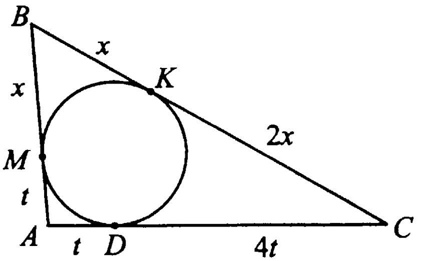


Рис. 82

$AC = t + 4t = 5t$, $AC = 10$.

Ответ: 10.

Решение варианта № 22

21. $\dfrac{54^{n+2}}{3^{3n+4} \cdot 2^{n+1}} = \dfrac{3^{3n+6} \cdot 2^{n+2}}{3^{3n+4} \cdot 2^{n+1}} = 3^2 \cdot 2 = 18.$

Ответ: 18.

22. Составим пропорции.

1) Пусть x рублей — первоначальная цена товара, z рублей — уменьшенная цена.

x р. — 100%

z р. — (100–20)%

$$z = \frac{80 \cdot x}{100} = 0{,}8x.$$

2) $0{,}8x$ р. — 100%

3 120 р. — (100+30)%

$$x = \frac{3\,120 \cdot 100}{0{,}8 \cdot 130} = 3\,000.$$

3 000 рублей — первоначальная цена товара.

Ответ: 3 000 рублей.

23. Преобразуем выражение $\dfrac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x-1)(x+3)}$.

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x^2-9)(x^2-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+3)} =$$
$$= (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3,\ x \neq 1;\ x \neq -3.$$

Графиком функции $y = (x-1)^2 - 4$, $x \neq 1$, $x \neq -3$ является парабола с выколотыми точками $(1; -4)$ и $(-3; 12)$ (см. рис. 83).

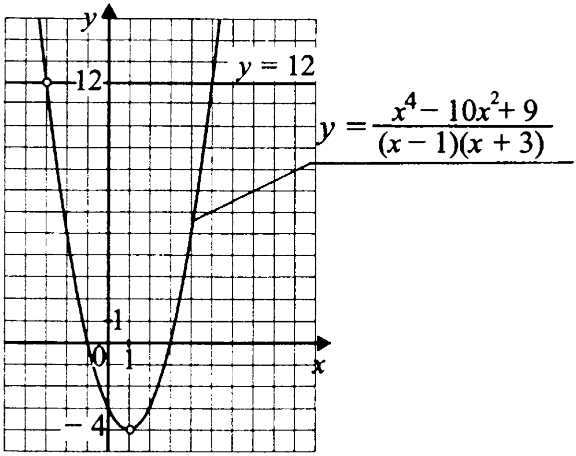


Рис. 83

Прямая $y = a$ имеет с графиком только одну общую точку при $a = 12$.

Ответ: $\{12\}$.

24. Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ (см. рис. 84).

По свойству биссектрисы имеем $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD}{AC}$.

$AD = AB - BD = 20 - BD$, $\dfrac{BD}{12} = \dfrac{20 - BD}{16}$, $16BD = 240 - 12BD$,

$BD = \dfrac{240}{28} = \dfrac{60}{7}$ (см).

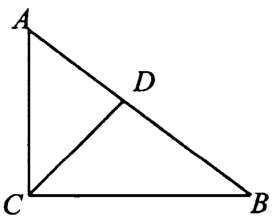


Рис. 84

Ответ: $\dfrac{60}{7}$ см.

25. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD точкой пересечения делятся пополам, значит, $OB = OD$ и $OA = OC$. Возможны две конфигурации: а) $CK < OC$, б) $CK > OC$ (см. рис. 85).

Рассмотрим конфигурацию а). В четырёхугольнике $BKDM$ диагонали BD и MK. $OM = OA - AM$, $OK = OC - KC$. По условию $AM = KC$, значит, $OM = OK$. Имеем: в четырёхугольнике $BKDM$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, $BKDM$ — параллелограмм по признаку параллелограмма, что и требовалось доказать.

Для конфигурации б) доказательство аналогично.

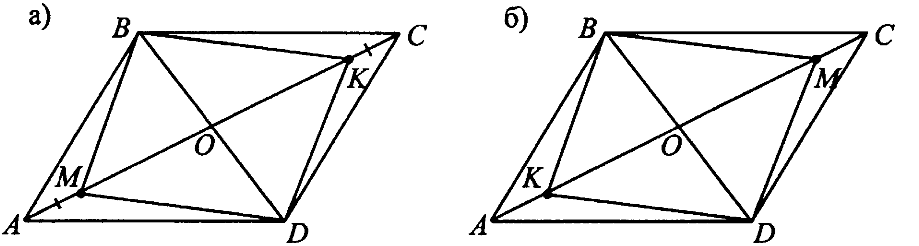


Рис. 85

26. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMC и CMB соответственно, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$.

Докажем, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

В прямоугольном треугольнике ABC высота CM проведена из вершины прямого угла к гипотенузе, значит, $\triangle ACB \sim \triangle AMC$ и $\triangle ACB \sim \triangle CMB$ по двум углам (см. рис. 86). Из подобия следует $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{r_1}{r}$, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{r_1}{r}$, $r_1 = \dfrac{br}{c}$.

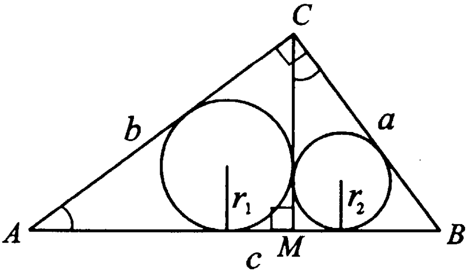


Рис. 86

$\frac{BC}{AB} = \frac{r_2}{r}, \frac{a}{c} = \frac{r_2}{r}, r_2 = \frac{ar}{c}.$

$r_1^2 + r_2^2 = \left(\frac{br}{c}\right)^2 + \left(\frac{ar}{c}\right)^2 = \frac{r^2(b^2+a^2)}{c^2} = r^2$ (так как по теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$), что и требовалось доказать.

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

Решение варианта № 23

21. $\frac{15^{n+2}}{3^{n-1} \cdot 5^{n+1}} = \frac{3^{n+2} \cdot 5^{n+2}}{3^{n-1} \cdot 5^{n+1}} = 3^3 \cdot 5 = 135.$

Ответ: 135.

22. Пусть велосипедист проехал первые 40 км ($67 - 27 = 40$) пути со скоростью x км/ч и затратил $\frac{40}{x}$ часов.

Последние 27 км он двигался со скоростью ($x + 2$) км/ч и затратил $\frac{27}{x+2}$ часа. Зная, что велосипедист проехал 67 км за 4 часа, составим и решим уравнение.

$\frac{40}{x} + \frac{27}{x+2} = 4.$

$\frac{40x + 80 + 27x - 4x^2 - 8x}{x(x+2)} = 0,$

$\frac{-4x^2 + 59x + 80}{x(x+2)} = 0,$

$4x^2 - 59x - 80 = 0.$

$D = (-59)^2 + 16 \cdot 80 = 3481 + 1280 = 4761 = 69^2.$

$x_1 = \frac{59+69}{8} = \frac{128}{8} = 16,$

$x_2 = \frac{59-69}{8} = -\frac{10}{8}$ — не удовлетворяет условию задачи.

Последние 27 км пути велосипедист двигался со скоростью ($16 + 2$) км/ч $= 18$ км/ч и затратил $\frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ часа.

Ответ: 1,5.

23. 1) Построим график функции $y = |x+1|$. Он получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox на 1 единицу влево (см. рис. 87).

2) Для получения графика функции $y = |x + 1| - 2$ надо сдвинуть график функции $y = |x + 1|$ на 2 единицы вниз вдоль оси Oy.

3) Для получения графика функции $y = ||x + 1| - 2|$ необходимо отразить часть графика на отрезке $[-3; 1]$ симметрично относительно оси Ox.

4) Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно 3 общие точки при значении параметра c равном 2.

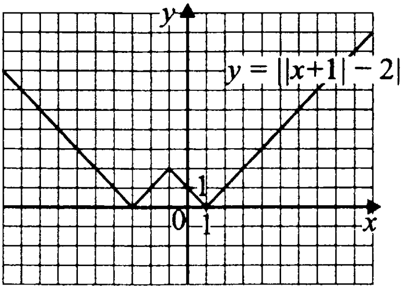


Рис. 87

Ответ: 2.

24. В прямоугольном $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AC = 5$, $BC = 12$, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, $AB = 13$ (см. рис. 88).

Пусть радиус вписанной окружности r. Четырёхугольник $KCLO$ — квадрат ($KO = OL = r$, $OK \perp CA$, $OL \perp CB$, $\angle C = 90°$), значит, $CK = CL = r$.

По свойству отрезков касательных к окружности, проведённых из одной точки, имеем $KC = CL = r$, $KA = AM = 5 - r$, $BL = BM = 12 - r$.

$AB = AM + MB = 5 - r + 12 - r = 17 - 2r$.

Так как $AB = 13$, то получим уравнение $17 - 2r = 13$.

$2r = 17 - 13$, $r = 4 : 2 = 2$.

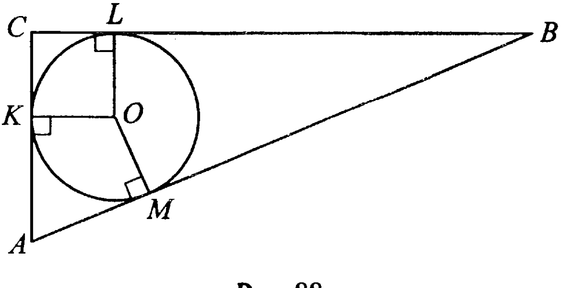


Рис. 88

Ответ: 2.

25. По условию ΔABC — равнобедренный (см. рис. 89), то есть $AB = BC$; так как CM_2 и AM_1 — медианы, то $AM_2 = \frac{1}{2}AB$, $CM_1 = \frac{1}{2}BC$, следовательно, $AM_2 = CM_1$. Рассмотрим ΔAM_2C и ΔAM_1C. В этих треугольниках сторона AC — общая, $AM_2 = CM_1$ по доказанному, $\angle M_2AC = \angle M_1CA$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABC. Следовательно, $\Delta AM_2C = \Delta AM_1C$, а в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны: $AM_1 = CM_2$, что и требовалось доказать.

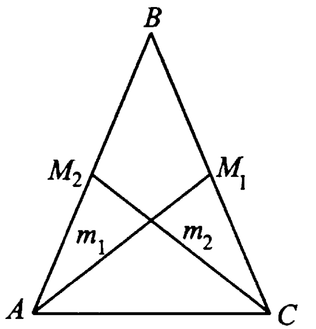


Рис. 89

26. 1) По условию около окружности радиуса 4 см описана равнобедренная трапеция (см. рис. 90). Радиусы окружности, вписанной в трапецию, проведённые в точки касания сторон трапеции с окружностью, перпендикулярны этим сторонам. $OM \perp BC$, $OF \perp AD$, $OL \perp CD$ (по свойству касательной).

2) Так как $BC \parallel AD$, то радиусы OM и OF лежат на одной прямой и отрезок MF ($MF = 8$) является высотой трапеции.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{BC + AD}{2} \cdot 8 = (BC + AD) \cdot 4.$$

3) По условию $S_{ABCD} = 80$ см^2, тогда $(BC + AD) \cdot 4 = 80$, $BC + AD = 20$.

Из условия, что трапеция $ABCD$ равнобедренная, следует $BM = MC = x$, $MC + FD = 10$, $AF = FD = 10 - x$.

4) Так как (по свойству касательных) отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности, то $MC = CL = x$

и $FD = LD = 10 - x$. Следовательно, $CL + LD = 10$, $CD = 10$, $AB = CD = 10$.

5) В $\triangle CDK$ $\angle K = 90°$, $CD = 10$, $CK = 8$,

$KD^2 = CD^2 - CK^2 = 100 - 64 = 36$, $KD = 6$.

$MCKF$ — прямоугольник, $MC = FK = x$.

$LD = 10 - x$, $FD = x + 6 \Rightarrow 10 - x = x + 6$, $2x = 4$, $x = 2$. $BC = 2x = 2 \cdot 2 = 4$, $AD = (x+6) \cdot 2 = (2+6) \cdot 2 = 16$.

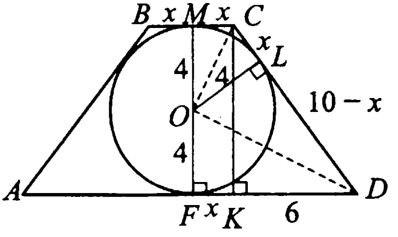


Рис. 90

Ответ: 4 см; 16 см; 10 см; 10 см.

Решение варианта № 24

21. $\dfrac{12^{n+2}}{2^{2n+3} \cdot 3^{n+3}} = \dfrac{2^{2n+4} \cdot 3^{n+2}}{2^{2n+3} \cdot 3^{n+3}} = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

22. Пусть велосипедист ехал из B в A со скоростью x км/ч, $x < 40$ км/ч, а из A в B со скоростью $(x-2)$ км/ч. На путь из A в B он затратил $\dfrac{24}{x-2}$ часа, а на обратный путь по другой дороге — $\dfrac{30}{x}$ часа. Зная, что на обратный путь он затратил на 6 минут $\left(\dfrac{6}{60} = 0{,}1 \text{ часа}\right)$ больше, чем на путь из A в B, составим и решим уравнение:

$$\frac{30}{x} - \frac{24}{x-2} = \frac{1}{10}.$$

$$\frac{300x - 600 - 240x - x^2 + 2x}{10x(x-2)} = 0,$$

$$\frac{-x^2 + 62x - 600}{10x(x-2)} = 0,$$

$$\begin{cases} x^2 - 62x + 600 = 0, \\ x \neq 0,\ x \neq 2. \end{cases}$$

$D = 3844 - 2400 = 1444 = 38^2$.

$x_1 = \dfrac{62+38}{2} = 50$, $x_2 = \dfrac{62-38}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$.

Так как известно, что скорость велосипедиста меньше 40 км/ч, то этому условию удовлетворяет значение $x = 12$ (км/ч).

Ответ: 12 км/ч.

23. 1) Функция $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ — чётная, график функции симметричен относительно оси Oy.

2) Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$ при $x \geqslant 0$. Получим часть параболы с вершиной в точке $(1; -4)$.

3) Для получения графика функции $y = |x^2 - 2x - 3|$ при $x \geqslant 0$ надо отобразить часть графика на отрезке $[0; 3]$ симметрично относительно оси Ox.

4) Для получения графика функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ необходимо отобразить часть графика на интервале $x > 0$ симметрично относительно оси Oy.

5) Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно 4 общие точки при $c \in \{4\} \cup (0; 3)$.

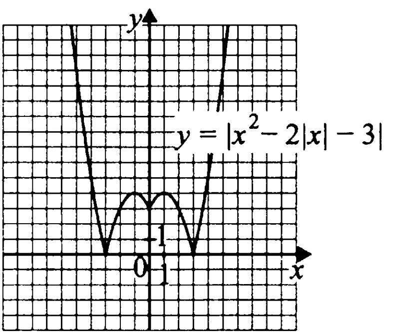


Рис. 91

Ответ: $\{4\} \cup (0; 3)$.

24. 1) В $\triangle ABC$ (см. рис. 92) $AB = BC$, $AC = 15$, $BH = 10$,

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75$.

2) В $\triangle BHC$ $\angle H = 90°$, $CH = \frac{1}{2} AC = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5$, $BH = 10$.

По теореме Пифагора $BC^2 = BH^2 + HC^2$,
$BC^2 = 10^2 + 7{,}5^2 = 100 + 56{,}25 = 156{,}25$, $BC = 12{,}5$.

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AK \cdot BC$, $S_{ABC} = 75$, $\frac{1}{2}AK \cdot 12{,}5 = 75$,

$AK = \dfrac{75 \cdot 2}{12{,}5} = 12$.

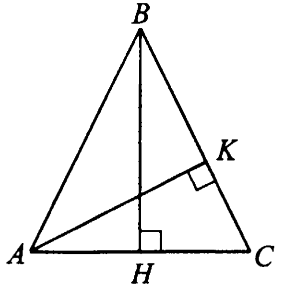


Рис. 92

Ответ: 12.

25. Дано: $ABCD$ — трапеция, $AC = BD$.

Доказать: $AB = CD$.

Доказательство:

1) Из вершин B и C трапеции $ABCD$ (см. рис. 93) опустим перпендикуляры на основание AD. Рассмотрим прямоугольные треугольники BHD и CKA. Гипотенузы AC и BD равны по условию, $BH = CK$ как высоты данной трапеции. Следовательно, $\triangle BHD = \triangle CKA$ по гипотенузе и катету.

В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы: $\angle BDH = \angle CAK$, $\angle 2 = \angle 1$.

2) В $\triangle ACD$ и $\triangle DBA$ сторона AD — общая, $AC = BD$ по условию, $\angle 2 = \angle 1$, следовательно, $\triangle ACD = \triangle DBA$ по двум сторонам и углу между ними. В равных треугольниках против равных углов $\angle D$ и $\angle A$ лежат равные стороны, то есть $AB = CD$, что и требовалось доказать.

26. Так как трапеция равнобедренная, она симметрична относительно высоты FL, проведённой через центр окружности. Поэтому $BF = CF$ и $AL = DL$.

Отрезки касательных (см. рис. 94), проведённых к окружности из одной точки, равны:

$BE = BF = CF = CK = x$,

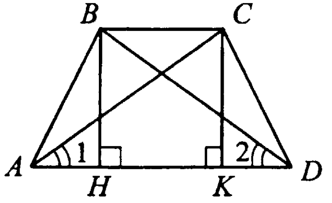


Рис. 93

$AE = AL = DL = DK = y,$

$S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BH.$

$BH = \frac{1}{2}AB = \dfrac{x+y}{2}$ (как катет, лежащий против угла в 30° в прямоугольном треугольнике), $BC = 2x$, $AD = 2y$, $AB = x + y$.

$S_{ABCD} = \dfrac{2x+2y}{2} \cdot \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{(x+y)^2}{2}$. По условию $S_{ABCD} = 72$, составим уравнение: $\dfrac{(x+y)^2}{2} = 72$.

$(x+y)^2 = 144$, $x + y = 12$, $AB = 12$.

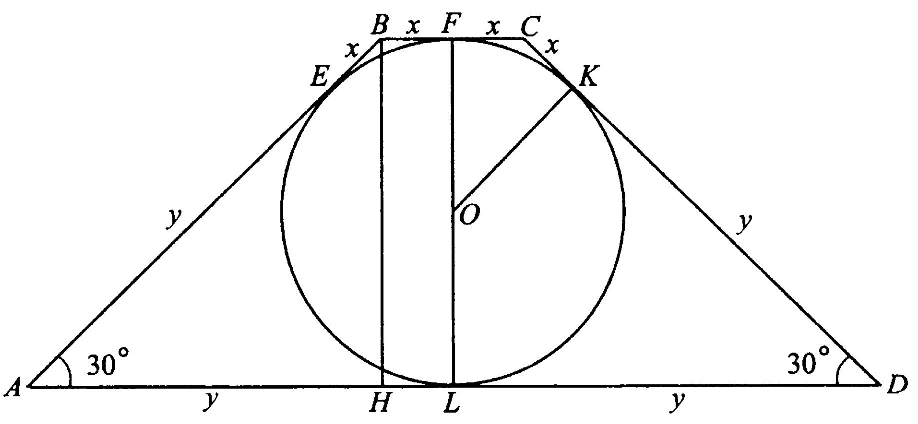


Рис. 94

Ответ: 12.

Решение варианта № 25

21. Чтобы выяснить, какое из чисел — $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-1\right)$ или $\left(-\frac{4}{5}\right)$ — больше, найдём их разность:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}-1-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}-1+\frac{4}{5}=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{5}=\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}.$$

Так как разность $\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}>0$, то $\frac{1}{\sqrt{6}}-1>-\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}-1$.

22. Пусть Петя может решить 20 задач за t часов, тогда Женя может решить за это время 10 задач. Зная, что Петя и Женя могут решить эти 20 задач за 2 часа, составим уравнение:

$$\frac{20+10}{t}=\frac{20}{2}.$$

Таким образом, Петя может решить 20 задач за 3 часа.

Ответ: 3.

23. 1) Построим график функции $\begin{cases} -x-2, \text{если } x\leqslant -1, \\ x, \text{если } |x|<1, \\ -x+2, \text{если } x\geqslant 1 \end{cases}$ (см. рис. 95).

2) Прямая $y=b$ параллельна оси Ox и имеет с графиком единственную общую точку, если $b<-1$, $b>1$.

Ответ: $b<-1$, $b>1$.

24. По условию вписанный угол MAC (см. рис. 96) равен $40°$, следовательно, $\smile MNC=80°$.

Так как AN — высота $\triangle ABC$, то $\angle ANB=\angle ANC=90°$,

$\smile ALC=\smile AMC=180°$,

$\smile AM=180°-\smile MNC=180°-80°=100°$

$\angle ANM=50°$ как вписанный, опирающийся на дугу в $100°$.

Таким образом, $\angle BNM=90°-50°=40°$.

Ответ: $40°$.

25. Так как диагональ AC делит параллелограмм на два равных треугольника ABC и ADC, то высоты BE и DF, проведённые из вершин B и D к диагонали AC, равны (см. рис. 97). $BE \parallel DF$ как два перпендикуляра к AC, поэтому $BFDE$ — параллелограмм. Отсюда $BF \parallel DE$, что и требовалось доказать.

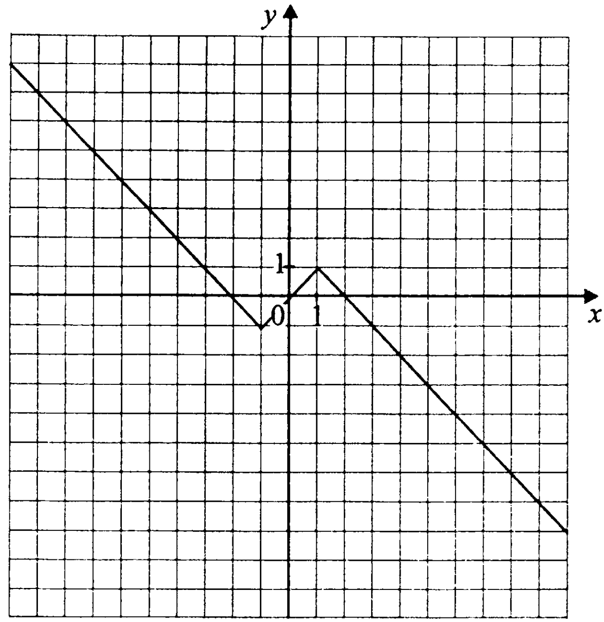


Рис. 95

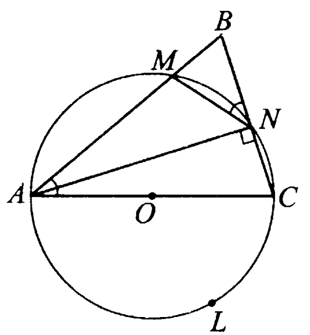


Рис. 96

26. Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием AC (см. рис. 98). Пусть O_1 — центр вписанной в него окружности радиуса r_1, O_2 — центр окружности, касающейся отрезка AC и продолжений сторон BA и BC. Обозначим D — середину AC, которая является точкой касания AC и обеих окружностей. Проведём O_1C и O_2C. Заметим, что они являются биссектрисами $\angle BCD$ и $\angle KCD$, так как соответствующие окружности вписаны в эти углы. Но тогда $\angle O_1CL = \angle O_1CD$,

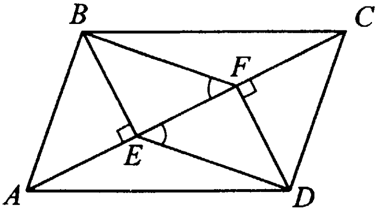


Рис. 97

$\angle O_2CD = \angle O_2CK$, а $\angle O_1CL + \angle O_1CD + \angle O_2CD + \angle O_2CK = 180°$, откуда $\angle O_1CD + \angle O_2CD = 90°$, то есть $\angle O_1CO_2 = 90°$.

Ясно, что $O_1D \perp AC$, $O_2D \perp AC$ как радиусы, проведённые в точку касания. Тогда ΔO_1CO_2 — прямоугольный с высотой CD. $CD^2 = O_1D \cdot O_2D, CD = \dfrac{AC}{2} = 4$. Значит, $16 = r_1 \cdot 6, r_1 = \dfrac{8}{3}$.

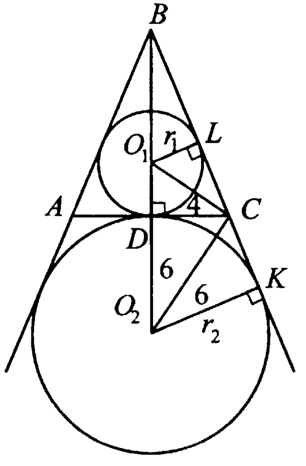


Рис. 98

Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

Решение варианта № 26

21. Так как число $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} > 0$ и число $2 > 0$, сравним их квадраты:

$(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2 = 27 - 12\sqrt{6} + 8 = 35 - 12\sqrt{6}$.

$(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2 - 2^2 = 35 - 12\sqrt{6} - 4 = 31 - 12\sqrt{6}$.

Замечаем, что $2 < \sqrt{6} < 2{,}5$ (так как $4 < 6 < 6{,}25$), поэтому $24 < 12\sqrt{6} < 30$, поэтому $31 - 12\sqrt{6} > 0$.

Делаем вывод, что $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} > 2$.

Ответ: $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.

22. Пусть ученик может оштукатурить всю стену за x часов, тогда мастер может оштукатурить стену за $\frac{x}{2}$ часов. Значит, производительность ученика $\frac{1}{x}$, а мастера $\frac{2}{x}$ стены/час. Их совместная производительность $\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$ и равна $\frac{1}{6}$. Отсюда $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{6}$, $x = 18$. Значит, ученик может оштукатурить стену за 18 часов самостоятельно.

Ответ: 18 ч.

23. 1) Построим график функции $\begin{cases} |x|, \text{если } x \leqslant 0, \\ 2, \text{если } x > 0. \end{cases}$

При $x \leqslant 0$ $y = -x$.

2) По рисунку 99 видно, что горизонтальная прямая $y = a$ будет иметь с графиком единственную общую точку при $0 \leqslant a < 2$ и $a > 2$.

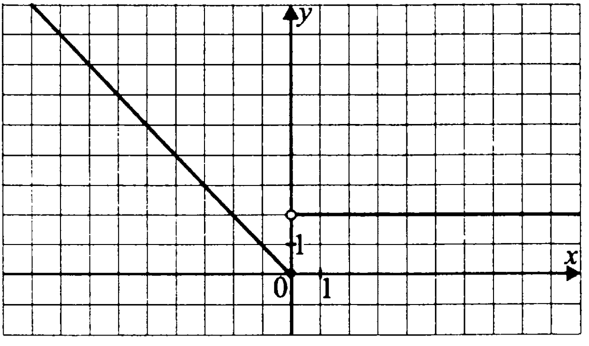


Рис. 99

Ответ: $0 \leqslant a < 2$, $a > 2$.

24. В $\triangle ABC$ AL, CN, BK — медианы, площадь $\triangle ABC$ равна 39 (см. рис. 100).

1) $S_{AMK} = \frac{1}{2}AK \cdot h_2$, $S_{KMC} = \frac{1}{2}KC \cdot h_2$.

Так как BK — медиана, то $AK = KC$ и $S_{AMK} = S_{KMC}$.

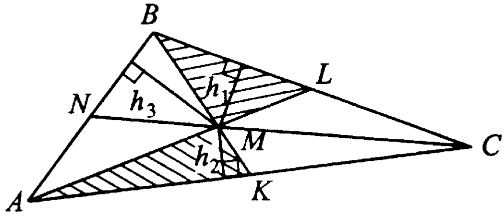


Рис. 100

2) $S_{BML} = \frac{1}{2}BL \cdot h_1$, $S_{CML} = \frac{1}{2}LC \cdot h_1$. Так как AL — медиана, то $BL = LC$, $S_{BML} = S_{CML}$.

3) $S_{AMN} = \frac{1}{2}AN \cdot h_3$, $S_{BMN} = \frac{1}{2}BN \cdot h_3$. Так как CN — медиана, то $AN = BN$, $S_{AMN} = S_{BMN}$.

4) По свойству точки пересечения медиан, $CM = \frac{2}{3}CN$.

Но $S_{CBN} = \frac{1}{2}CN \cdot BC \sin\angle BCN$,

$S_{CBM} = \frac{1}{2}CM \cdot BC \sin\angle BCN = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}CN \cdot BC \sin\angle BCN = \frac{2}{3}S_{CBN}$.

Значит, $S_{BMN} = S_{CBN} - S_{CBM} = \frac{1}{3}S_{CBN}$.

При этом $S_{BML} = S_{CLM} = \frac{1}{2}S_{CBM} = \frac{1}{3}S_{CBN}$, откуда $S_{BMN} = S_{BML}$.

Аналогично $S_{ANM} = S_{AKM}$.

Тогда $S_{CLM} = S_{BLM} = S_{BMN} = S_{MNA} = S_{AKM} = S_{MKC} = \frac{39}{6}$.

Значит, $S_{BML} + A_{AKM} = \frac{39}{3} = 13$.

Ответ: 13.

25. а) Рассмотрим случай, когда $\angle A$ и $\angle C$ — острые (см. рис. 101 а). В $\triangle ABE$ и $\triangle BFC$ $\angle A = \angle C$ как противолежащие углы параллелограмма $ABCD$.

$\angle AEB = \angle BFC = 90°$, так как BE и BF — высоты параллелограмма.

Следовательно, $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ по первому признаку подобия треугольников. Что и требовалось доказать.

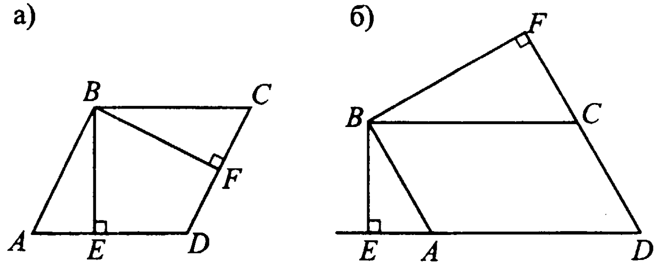


Рис. 101

б) Рассмотрим случай, когда $\angle A$ и $\angle C$ — тупые (см. рис. 101 б). Аналогично предыдущему случаю $\angle BAD = \angle BCD$, а тогда $\angle BAE = \angle BCF$ как смежные им углы, при этом $\angle AEB = \angle BFC = 90°$. Следовательно, $\triangle ABE \sim \triangle CBF$ по первому признаку, что и требовалось доказать.

26. Рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ с основанием AC (см. рис. 102). Пусть O_1 — центр вписанной в него окружности радиуса r, O_2 — центр окружности, касающейся отрезка AC и продолжения сторон AB и BC. Обозначим L середину AC, которая является точкой касания AC и обеих окружностей, так как $\triangle ABC$ — равнобедренный.

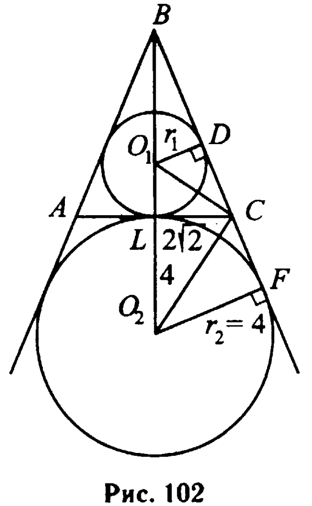


Рис. 102

Проведём O_1C и O_2C. Заметим, что они являются биссектрисами $\angle BCL$ и $\angle LCF$, так как соответствующие окружности вписаны в эти углы. Но тогда $\angle O_1CL = \angle O_1CD$, $\angle O_2CL = \angle O_2CF$, а $\angle O_1CL + \angle O_1CD + \angle O_2CL + \angle O_2CF = 180°$, откуда

$\angle O_1CL + \angle O_2CL = 90°$, то есть $\angle O_1CO_2 = 90°$. Ясно, что $O_1L \perp AC$ и $O_2L \perp AC$ как радиусы, проведённые в точку касания. Тогда $\triangle O_1CO_2$ — прямоугольный с высотой CL, откуда $CL^2 = O_1L \cdot O_2L$, $(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot r$, $r = 2$.

Ответ: 2.

Решение варианта № 27

21. $\dfrac{10^{2n} \cdot 3^2}{25^n \cdot 2^{2(n+1)}} = \dfrac{2^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 3^2}{5^{2n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25.$

Ответ: 2,25.

22. Пусть ежегодно цена телевизора увеличивалась в x раз. Тогда через год его цена стала $40\,000x$ рублей, через два года цена стала $40\,000x^2$ рублей, что составило ровно 22 500 рублей. Составим уравнение:

$40\,000x^2 = 22\,500$; $x^2 = \dfrac{225}{400}$; $x = \dfrac{15}{20} = \dfrac{75}{100}$.

0,75 = 75%, значит, цена уменьшилась на 100% − 75% = 25%. Цена телевизора уменьшалась ежегодно на 25%.

Ответ: 25.

23. Разложим числитель дроби на множители:
$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.
При $x \neq 1$ и $x \neq -2$ исходная функция примет вид
$y = (x + 1)(x - 2)$, её график — парабола, из которой выколоты точки $(1; -2)$ и $(-2; 4)$. Ветви параболы направлены вверх, вершина в точке $(0{,}5; -2{,}25)$ (см. рис. 103).

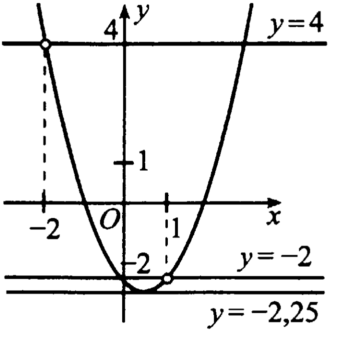


Рис. 103

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколота.

Отсюда $c = -2{,}25$, $c = -2$ или $c = 4$.

Ответ: $-2{,}25$; -2; 4.

24. $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

По условию $P_{ABCD} = 34$, $AB + AD = 17$.

$BD = 13$.

Из $\triangle ABD$ ($\angle A = 90°$), по теореме Пифагора $AB^2 + AD^2 = BD^2$, $AB^2 + AD^2 = 169$ (см. рис. 104).

Получаем $(AB + AD)^2 = 17^2$, $AB^2 + 2AB \cdot AD + AD^2 = 17^2$, $AB \cdot AD = \dfrac{289 - (AB^2 + AD^2)}{2} = \dfrac{289 - 169}{2} = 60$, $S_{ABCD} = 60$.

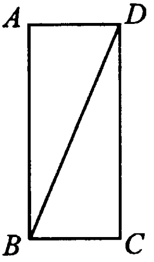


Рис. 104

Ответ: 60.

25. Так как AL — биссектриса угла DAB, DK — биссектриса угла ADC, то $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle DAB$ и $\angle ADO = \frac{1}{2}\angle ADC$ (см. рис. 105).

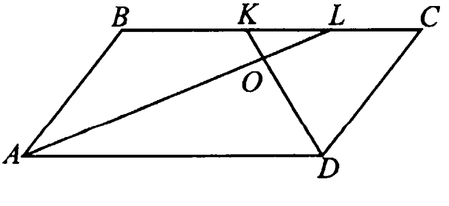


Рис. 105

Зная, что $\angle DAB + \angle ADC = 180°$ как сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых AB и CD и секущей AD, делаем вывод, что $\angle OAD + \angle ADO = 90^\circ$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, найдём угол AOD.

$\angle AOD = 180^\circ - (\angle OAD + \angle ADO) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

26. $S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MD$ (см. рис. 106), где $MD \perp AC$.

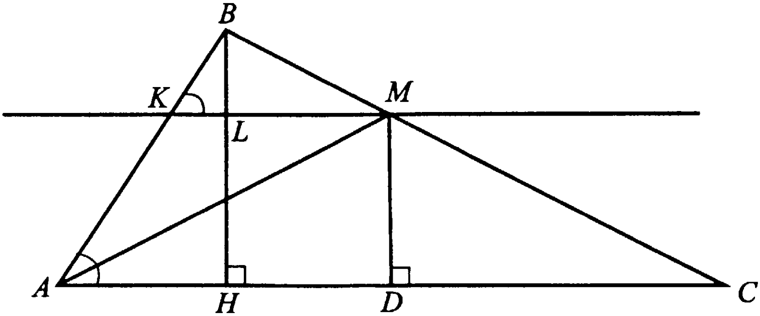


Рис. 106

$\triangle BKM \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle BKM = \angle BAC$ как соответственные при параллельных прямых AC, KM и секущей AB).

$\frac{KM}{AC} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$.

$S_{ABC} = 0{,}8 \cdot 25 = 20$. Проведём $BH \perp AC$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{10}{2} \cdot BH = 5BH$, $BH = 20 : 5 = 4$.

$MD = 4 - BL$. Так как $S_{BMK} = 0{,}8 = \frac{1}{2} BL \cdot KM$, $BL = 0{,}8$.

$MD = 4 - 0{,}8 = 3{,}2$.

$S_{AMC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3{,}2 = 16$.

Ответ: 16.

Решение варианта № 28

21. $\frac{7^n \cdot 3^{2n+3}}{63^n \cdot 6^2} = \frac{7^n \cdot 3^{2n+3}}{7^n \cdot 3^{2n} \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+2} \cdot 2^2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

22. Пусть спортсмен удалился от исходной точки на x км.

$\frac{x}{7-3} + \frac{x}{7+3} = 4{,}5 - 1,$

$\frac{x}{4} + \frac{x}{10} = 3{,}5,$

$5x + 2x = 70,$

$7x = 70,$

$x = 10$. Спортсмен удалился от исходной точки на 10 км.

Ответ: 10.

23. Построим график функции $y = \frac{(x^2 - 9x + 20)(x^2 + 3x + 2)}{x^2 - 3x - 10}$.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители

$x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4),$

$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1),$

$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2).$

При $x \neq 5$ и $x \neq -2$ исходная функция принимает вид $y = (x - 4)(x + 1)$, её график — парабола, из которой выколоты точки (5; 6) и (−2; 6). Ветви направлены вверх, вершина в точке (1,5; −6,25) (см. рис. 107).

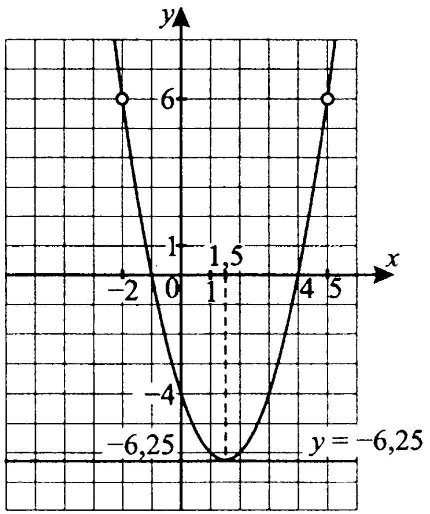


Рис. 107

Прямая $y = a$ имеет с графиком ровно одну общую точку тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколота, либо когда проходит через вершину параболы. В данном случае выколотые точки являются симметричными точками параболы. Поэтому остаётся только одна точка — вершина параболы. Следовательно, $a = -6{,}25$.

Ответ: $-6{,}25$.

24. $S_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin 150° = AB \cdot BC \sin 30° = \frac{1}{2} AB \cdot BC$. Ветви параболы направлены вверх, вершина в точке $(1{,}5; -6{,}25)$ (см. рис. 108).

AM — биссектриса, поэтому $\angle DAM = \angle MAB$.

$AD \| BC$, AM — секущая, тогда $\angle AMB = \angle DAM$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AM).

$\triangle AMB$ — равнобедренный (углы при основании AM равны, $\angle MAB = \angle AMB$). Следовательно, $AB = BM$, $AB = 8$.
$BC = BM + MC = 8 + 6 = 14$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 14 = 56.$

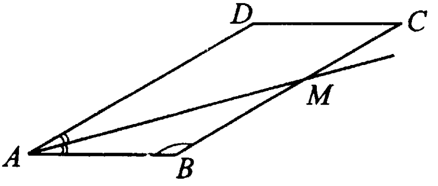


Рис. 108

Ответ: 56.

25. Прямоугольные треугольники с общим углом A $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ по двум углам (см. рис. 109). $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BC}$, $BD = \frac{AB \cdot BC}{AC}$. Что и требовалось доказать.

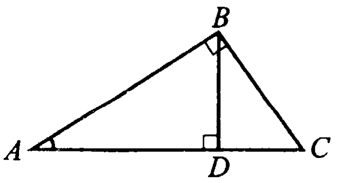


Рис. 109

26. Проведём из точки F касания окружностей отрезок FN так, что $FN \perp AK$ (см. рис. 110). FN — искомое расстояние, L и P — точки касания окружностей со стороной угла AK, O_1L и O_2P — радиусы окружностей. По свойству касательной $O_1L \perp AK$ и $O_2P \perp AK$. Центры вписанных в угол DAK окружностей лежат на биссектрисе угла, следовательно, $\angle O_1AL = \frac{1}{2}\angle DAK = 30^\circ$.

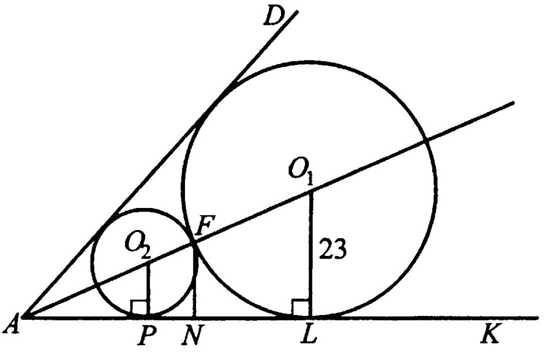


Рис. 110

В $\triangle AO_1L$ $\angle ALO_1 = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $O_1L = 23$, $O_1L = \frac{1}{2}AO_1$ как катет, лежащий против угла 30°.

Таким образом, $AO_1 = 46$, $FO_1 = 23$, тогда $AF = 23$.

В $\triangle AFN$ $\angle N = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, следовательно,

$FN = \frac{1}{2}AF = \frac{23}{2} = 11{,}5.$

Ответ: 11,5.

Решение варианта № 29

21. $a - \frac{a^2-5a}{a+1}\cdot\frac{1}{a-5} - \frac{a^2-2a-2}{a+1} = a - \frac{a\cdot(a-5)}{(a+1)\cdot(a-5)} - \frac{a^2-2a-2}{a+1} =$
$a - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2-2a-2}{a+1} = \frac{a^2+a-a-a^2+2a+2}{a+1} = \frac{2(a+1)}{a+1} = 2.$

Ответ: 2.

22. Пусть смешали x граммов 30%-ного раствора и y граммов 50%-ного раствора кислоты и получили $(x+y)$ г 45%-ного раствора. Тогда масса кислоты в 30%-ном растворе равна $0{,}3x$ граммов, в 50%-ном растворе равна $0{,}5y$ граммов, а в 45%-ном растворе $0{,}45(x+y)$ граммов.

Составим уравнение:

$0{,}3x + 0{,}5y = 0{,}45(x+y),$

$0{,}3x + 0{,}5y = 0{,}45x + 0{,}45y,$
$0{,}3x - 0{,}45x = 0{,}45y - 0{,}5y,$
$-0{,}15x = -0{,}05y;\ 3x = y;\ x = \frac{1}{3}y.$

Отношение массы 30%-ного к массе 50%-ного раствора, взятых первоначально, равно $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 1 : 3.

23. 1) Построим график функции.

$$y = 2x - x|x| + x^2 + |2x| + \frac{x}{|x|},\ x \neq 0.$$

$$y = \begin{cases} 2x - x^2 + x^2 + 2x + 1, & \text{если } x > 0, \\ 2x + x^2 + x^2 - 2x - 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 4x + 1, & \text{если } x > 0, \\ 2x^2 - 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Графиком функции $y = 4x + 1$ является прямая, проходящая через точки с координатами (0,5; 3), (1; 5) (см. рис. 111).

Графиком функции $y = 2x^2 - 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a > 0$, $a = 2$), вершина (0; −1) не принадлежит графику функции.

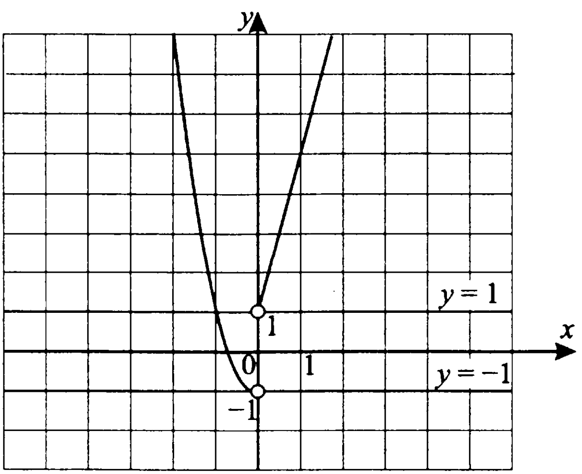


Рис. 111

Прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = 2x - x|x| + x^2 + |2x| + \frac{x}{|x|}$ ровно одну общую точку при $a \in (-1;\ 1]$.

Ответ: $(-1;\ 1]$.

24. $\angle AOB = \frac{1}{2}\angle COA$, так как OB — биссектриса $\angle AOC$ (см. рис. 112).

$\angle AOK = \angle KOD$, так как OK — биссектриса $\angle AOD$.

$\angle AOK = 22°$.

$\angle AOC = 180° - 2 \cdot 22° = 136°$, $\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 136° = 68°$.

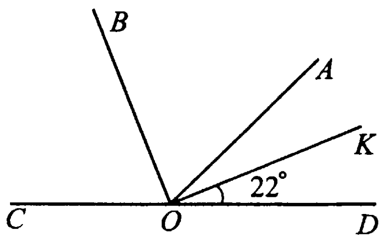


Рис. 112

Ответ: 68°.

25. $MPKT$ — ромб, значит, $MP = PK = KT = TM$, $ABCD$ — четырёхугольник, стороны которого AB, BC, CD и DA (см. рис. 113).

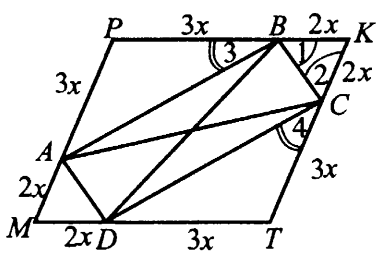


Рис. 113

Обозначим $AM = 2x$, $AP = 3x$. $\triangle APB = \triangle DTC$ по двум сторонам ($AP = PB = CT = TD$) и углу между ними ($\angle APB = \angle CTD$ как противоположные углы ромба).

Из равенства треугольников следует, что $AB = CD$. Аналогично $BC = DA$.

Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

$\triangle BKC$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$, из того, что $\triangle APB = \triangle DTC$, следует, что $\angle 3 = \angle 4$. $\angle ABC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3)$.

$\angle BCD = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 4) \Rightarrow \angle ABC = \angle BCD$. Так как $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$, то $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник, что и требовалось доказать.

26. Треугольники ABC и ABE подобны по I признаку подобия ($\angle B$ — общий, $\angle ACB = \angle BAE$ по условию) (см. рис. 114). Из подобия следует:

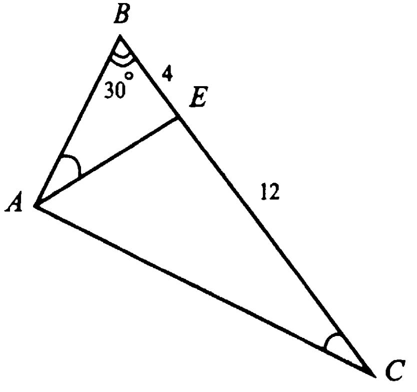


Рис. 114

$\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BE \cdot BC,$

$AB^2 = 4 \cdot 16 = 64,$

$AB = 8.$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 \cdot \dfrac{1}{2} = 32\,(\text{см}^2).$

Ответ: 32 см^2.

Решение варианта № 30

21. $b - \dfrac{b^2 - 4b}{b+2} \cdot \dfrac{1}{b-4} - \dfrac{b^2 - b - 4}{b+2} = b - \dfrac{b(b-4)}{(b+2)(b-4)} - \dfrac{b^2 - b - 4}{b+2} = \dfrac{b(b+2)}{b+2} - \dfrac{b}{b+2} - \dfrac{b^2 - b - 4}{b+2} =$

$= \dfrac{b^2 + 2b - b - (b^2 - b - 4)}{b+2} = \dfrac{b^2 + 2b - b - b^2 + b + 4}{b+2} = \dfrac{2b+4}{b+2} =$

$= \dfrac{2(b+2)}{b+2} = 2.$

Ответ: 2.

22. По условию масса первого сплава 20 кг и в нём содержится 40% серебра, то есть $20 \cdot 0{,}4 = 8$ (кг). Пусть надо добавить x кг второго сплава, в котором содержится 20% серебра, то есть $0{,}2x$ кг. Новый сплав массой $(20+x)$ кг содержит 30% серебра, значит, $\dfrac{8+0{,}2x}{20+x} = 0{,}3$,

$(20+x) \cdot 0{,}3 = 8 + 0{,}2x$,
$6 + 0{,}3x = 8 + 0{,}2x$,
$0{,}1x = 2$,
$x = 20$.

Необходимо добавить 20 кг второго сплава.

Ответ: 20.

23. Построим график функции $y = x^2 - |3x| - x$ (см. рис. 115).

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geqslant 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0. \end{cases}$$

1. Графиком функции $y = x^2 - 4x$, $x \geqslant 0$ является часть параболы, ветви которой направлены вверх ($a = 1,\ a > 0$), вершина в точке с координатами $(2;\ -4)$, $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 4$.
2. Графиком функции $y = x^2 + 2x$, $x < 0$ является часть параболы, ветви которой направлены вверх ($a = 1,\ a > 0$), вершина в точке с координатами $(-1;\ -1)$, $y = 0$ при $x = -2$.
3. При $C = -1$ и $C = 0$ прямая $y = C$ и график функции $y = x^2 - |3x| - x$ имеют ровно три общие точки.

Ответ: $-1; 0$.

24. Известно, что BK — биссектриса угла B (см. рис. 116), значит, $\angle CBK = \angle ABK$. $\angle CBK = \angle AKB$ — как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BK.

$\triangle ABK$ — равнобедренный, так как углы при основании равны ($\angle ABK = \angle AKB$). Следовательно, $AB = AK$.

$P_{ABCD} = 72$, $AB + AD = 36$.

$AK + AK + KD = 36$. Так как по условию $AK : KD = 2 : 5$, то $2 + 2 + 5 = 9$ частей приходится на $AD + AB$, то есть одна часть равна $36 : 9 = 4$. $AB = 4 \cdot 2 = 8$.

Ответ: 8.

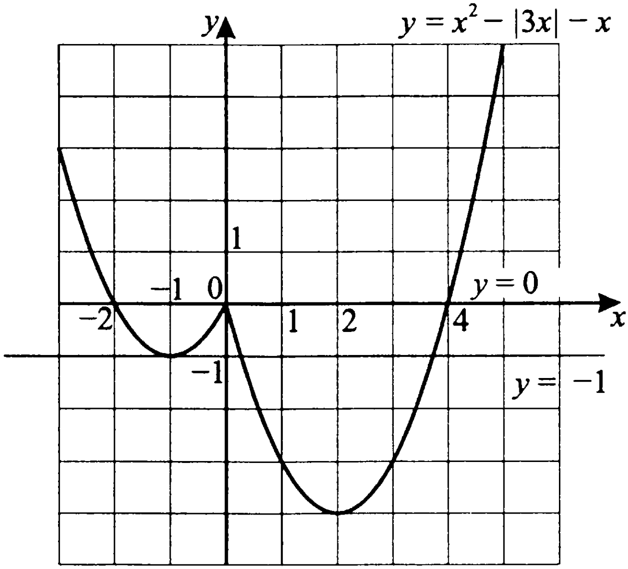


Рис. 115

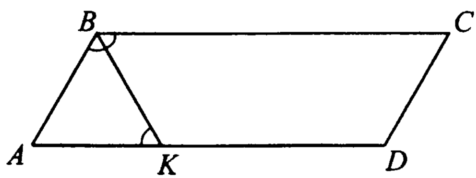


Рис. 116

25. В четырёхугольнике $ABCD$ проведём диагонали AC и BD. Обозначим $BM = x$, $BQ = y$, $DP = t$, $DN = z$ (см. рис. 117). $\triangle BCD \sim \triangle MCN$ по второму признаку подобия $\left(\frac{BC}{MC} = \frac{CD}{CN}, \angle C\right.$ — общий$\left.\right)$. Из подобия следует, что $\angle 1 = \angle 2$, а так как эти углы соответственные при прямых MN, BD и секущей BC, то $MN \parallel BD$, аналогично $\triangle BAD \sim \triangle QAP \Rightarrow QP \parallel BD$.

Имеем $MN \parallel BD$, $QP \parallel BD \Rightarrow MN \parallel QP$.

Аналогично доказываем, что $NP \parallel MQ$. Делаем вывод: четырёхугольник $MNPQ$ — параллелограмм по определению, что и требовалось доказать.

26. AO_1O_2B — прямоугольная трапеция, так как $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$ по свойству касательной, $O_1A \parallel O_2B$.

$S_{O_1CO_2} = S_{AO_1O_2B} - (S_{O_1AC} + S_{O_2BC})$ (см. рис. 118).

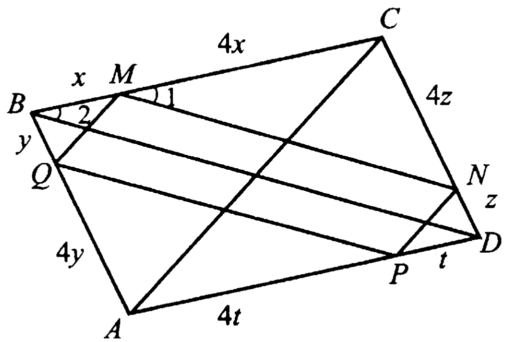


Рис. 117

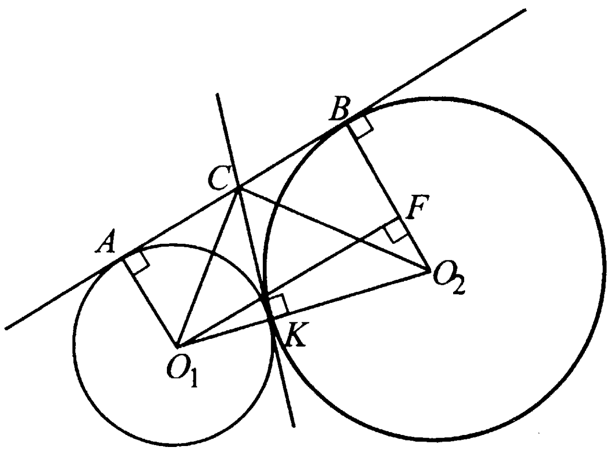


Рис. 118

1) $S_{AO_1O_2B} = \dfrac{O_1A + O_2B}{2} \cdot O_1F$, где $O_1F \perp O_2B$.

$O_2F = O_2B - FB = 6 - 2 = 4$.
Найдём O_1F из $\triangle O_1O_2F$. $O_1F = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2F^2} =$
$= \sqrt{(2+6)^2 - 16} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$.

$S_{AO_1O_2B} = \dfrac{2+6}{2} \cdot \sqrt{48} = 4 \cdot \sqrt{48} = 16\sqrt{3}$.

2) $S_{O_1AC} = \dfrac{1}{2} \cdot O_1A \cdot AC$; $S_{O_2BC} = \dfrac{1}{2} \cdot O_2B \cdot BC$.

$AC = KC = BC$ по свойству отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки.
$AB = O_1F = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$; $AC = BC = 2\sqrt{3}$.

$$S_{O_1AC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$S_{O_2BC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

3) $S_{O_1CO_2} = 16\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) = 16\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$

Ответ: $8\sqrt{3}$.

Глава II. Решения задач из сборника

1. По условию задачи рост Томы больше среднего на 8%, значит, на $150 \cdot 0{,}08 = 12$ (см). Так как средний рост девочек возраста Томы равен 150 см, то рост Томы равен $150 + 12 = 162$ (см).

Ответ: 162.

2. На второй день цена розы снизилась на 15% от цены первого дня, то есть на $80 \cdot 0{,}15 = 12$ (руб.), и составила $80 - 12 = 68$ (руб.). Тогда на третий день цена снизилась на 15% от цены второго дня, то есть на $68 \cdot 0{,}15 = 10{,}2$ (руб.), и составила $68 - 10{,}2 = 57{,}8$ (руб.).

Ответ: 57,8.

3. По условию задачи 1,44 м составляет 75%. Пусть x м — высота прыжка взрослого кенгуру. Тогда x составляет 100%. Следовательно,

$$x = \frac{1{,}44 \cdot 100}{75} = 1{,}92\,(\text{м}) = 192\,(\text{см}).$$

Ответ: 192.

4. По условию в первом магазине число порций мороженого уменьшилось на 50%; это означает, что порций мороженого стало меньше в 2 раза. Таким образом, во втором магазине осталось больше порций мороженого.

Ответ: во втором.

5. Пусть x шт. — первоначальное количество книг в каждой из библиотек. Тогда в первой библиотеке количество книг увеличилось на $x \cdot 0{,}8$ (шт.) и стало равно $x + 0{,}8x = 1{,}8x$. Значит, количество книг в первой библиотеке увеличилось в 1,8 раза. Так как во второй библиотеке количество книг увеличилось в 1,7 раза, то в первой библиотеке книг стало больше.

Ответ: в первой библиотеке.

6. Увеличение количества хомячков во втором аквариуме в 1,6 раза означает, что количество хомячков в нём составило $1{,}6 \cdot 100\% = 160\%$, то есть увеличилось на 60% от первоначального количества. Так как в первом аквариуме количество хомячков увеличилось на столько же процентов, то хомячков осталось поровну.

Ответ: хомячков осталось поровну.

7. Так как через неделю на обоих складах комплектов мебели стало поровну и количество готовой продукции на первом складе не изменилось, то количество комплектов мебели на втором складе увеличилось в 2 раза, то есть составило $2 \cdot 100\% = 200\%$. Следовательно, количество продукции на этом складе увеличилось на 100%.

Ответ: 100.

8. Пусть в маленьком аквариуме было x рыб, тогда в большом аквариуме было $2x$ рыб. Через два года в большом аквариуме количество рыб уменьшилось на 25%, то есть составило $2x - 2x \cdot 0{,}25 = 1{,}5x$, а в маленьком — $1{,}5x$. Следовательно, рыб стало поровну.

Ответ: рыб стало поровну.

9. Пусть во втором спичечном коробке было x спичек. Тогда в первом коробке было $3x$ спичек. Через день в первом коробке число спичек стало $\frac{3x}{4} = 0{,}75x$, во втором — $x - 0{,}3x = 0{,}7x$. Следовательно, в первом коробке спичек осталось больше.

Ответ: в первом коробке.

10. Пусть на складе B было x продукции. Тогда на складе A было $x + x \cdot 0{,}5 = 1{,}5x$ продукции. Через месяц количество продукции на складе A уменьшилось в 1,25 раза, то есть составило $\frac{1{,}5x}{1{,}25} = 1{,}2x$. На складе B через месяц количество продукции увеличилось на 25%, то есть составило $x + x \cdot 0{,}25 = 1{,}25x$. Значит, на складе B продукции стало больше.

Ответ: B.

11. Пусть в 9-х классах обучается x человек. По условию число неуспевающих в 8 раз меньше числа успевающих, значит, отношение числа неуспевающих учащихся к числу успевающих равно $1 : 8$. Следовательно, $\frac{x}{9}$ — неуспевающих учащихся, $\frac{8x}{9}$ — успевающих.

Так как отличники составляют 15% от числа всех учащихся 9-х классов, то их количество $\frac{15x}{100} = \frac{3x}{20}$ человек.

Приведём дроби $\frac{x}{9}, \frac{8x}{9}, \frac{3x}{20}$ к общему знаменателю: $\frac{20x}{180}, \frac{160x}{180}, \frac{27x}{180}$. Следовательно, наименьшее число учащихся 9-х классов, удовлетворяющих условию задачи, равно 180.

Ответ: 180.

12. Пусть в школе x девочек и x мальчиков. Тогда блондинок — $0{,}15 \cdot x$, а блондинов — $\frac{1}{7} \cdot x$ (мальчиков с иным цветом волос $\frac{6}{7} \cdot x$).

$0{,}15x = \frac{15}{100}x = \frac{3}{20}x = \frac{21}{140}x$; $\frac{1}{7}x = \frac{20}{140}x$.

Так как $\frac{21}{140} > \frac{20}{140}$, то $0{,}15x > \frac{1}{7}x$. Следовательно, в школе блондинок больше.

Ответ: блондинок.

13. Переведём десятичную дробь 0,25 в проценты: $0{,}25 \cdot 100\% = 25\%$. Следовательно, спортсмен улучшил свой результат на 25%.

Ответ: 25.

14. Температура воздуха понизилась на 30%, то есть на $20° \cdot 0{,}30 = 6°$. Следовательно, температура составила $20° - 6° = 14°$.

Ответ: 14.

15. Пусть нужно взять x кг воды. Тогда получим $(x + 0{,}2)$ кг раствора, что составляет 100%. По условию 0,2 кг соли в этом растворе должно составлять 5%. Следовательно, $\frac{x + 0{,}2}{0{,}2} = \frac{100}{5}$; $x + 0{,}2 = \frac{0{,}2 \cdot 100}{5}$; $x = 4 - 0{,}2 = 3{,}8$.

Ответ: 3,8.

16. Расстояние S км за 10,5 ч мотоциклист преодолевает со скоростью $\frac{S}{10{,}5}$ км/ч, а это же расстояние за 8 ч 24 мин $= 8\frac{24}{60}$ ч $= 8{,}4$ ч он преодолевает со скоростью $\frac{S}{8{,}4}$ км/ч.

Пусть скорость мотоциклиста повысилась на $x\%$ от первоначальной, то есть на $\frac{S}{10{,}5} + \frac{S}{10{,}5} \cdot \frac{x}{100} = \frac{S}{8{,}4}$; $\left(\frac{x}{100} + 1\right) \cdot \frac{1}{10{,}5} = \frac{1}{8{,}4}$; $\frac{x}{100} = 0{,}25$; $x = 25\%$.

Ответ: 25.

17. Всего в походе участвовало $20 + 60 = 80$ детей, что составляет 100%. Следовательно, 60 мальчиков от общего числа ребят составляет

$$\frac{60 \cdot 100\%}{80} = 75\%.$$

Ответ: 75.

18. Увеличение зарплаты на 20% от 4000 рублей составляет $4000 \cdot 0{,}2 = 800$ (руб.). Следовательно, рабочий стал получать $4000 + 800 = 4800$ (руб.).

Ответ: 4800.

19. Увеличение цены товара на 15% от 600 рублей составляет $600 \cdot 0{,}15 = 90$ (руб.). Следовательно, товар будет стоить $600 + 90 = 690$ (руб.).

Ответ: 690.

20. По расчётам первой группы физиков масса барионной материи составляет $\frac{1}{25}$ массы Вселенной, что составляет $\frac{1}{25} \cdot 100\% = 4\%$ от массы Вселенной. Следовательно, вторая группа физиков отводит массе барионной материи бóльшую долю — 4,5%.

Ответ: вторая.

21. Пусть в прошлом году в каждом филиале было по x клиентов. Тогда в этом году в первом филиале стало $x + x\frac{150\%}{100\%} = 2{,}5x$ клиентов, что совпадает с числом клиентов во втором филиале, которое возросло в этом году в 2,5 раза.

Ответ: количество клиентов в обоих филиалах осталось одинаковым.

22. $$\frac{25x^2-9}{x^2+x-12} \cdot \frac{x+4}{5x+3} + \frac{2x}{3-x} =$$
$$= \frac{(5x-3)(5x+3)(x+4)}{(x-3)(x+4)(5x+3)} + \frac{2x}{3-x} = \frac{5x-3}{x-3} - \frac{2x}{x-3} =$$
$$= \frac{5x-3-2x}{x-3} = \frac{3(x-1)}{x-3}.$$

Ответ: $\frac{3(x-1)}{x-3}$.

23. $$\frac{9x^2-49}{2x^2+15x-8} \cdot \frac{x+8}{3x+7} - \frac{1}{1-2x} =$$
$$= \frac{(3x-7)(3x+7)}{2x^2+16x-x-8} \cdot \frac{x+8}{3x+7} + \frac{1}{2x-1} =$$
$$= \frac{(3x-7)(x+8)}{(x+8)(2x-1)} + \frac{1}{2x-1} = \frac{3x-7}{2x-1} + \frac{1}{2x-1} = \frac{3x-6}{2x-1}.$$

Ответ: $\frac{3(x-2)}{2x-1}$.

24. $\left(\dfrac{(x+3y)^2+3y(x-3y)}{xy(x-3y)(x+3y)}\right)\cdot\dfrac{y(9y^2-x^2)}{(9y+x)^2}=$

$=\dfrac{x^2+6xy+9y^2+3xy-9y^2}{xy(x^2-9y^2)}\cdot\dfrac{y(9y^2-x^2)}{(9y+x)^2}=$

$=-\dfrac{x^2+9xy}{xy}\cdot\dfrac{y}{(9y+x)^2}=-\dfrac{1}{x+9y}.$

Ответ: $-\dfrac{1}{x+9y}$.

25. $\left(\dfrac{2x+y}{2x^2y-xy^2}-\dfrac{2}{y^2+2xy}\right):\dfrac{(6x+y)^2}{4x^3-y^2x}=$

$=\left(\dfrac{2x+y}{xy(2x-y)}-\dfrac{2}{y(2x+y)}\right)\cdot\dfrac{x(2x-y)(2x+y)}{(6x+y)^2}=$

$=\dfrac{(2x+y)x(2x-y)(2x+y)}{xy(2x-y)(6x+y)^2}-\dfrac{2x(2x-y)(2x+y)}{y(2x+y)(6x+y)^2}=$

$=\dfrac{4x^2+4xy+y^2-4x^2+2xy}{y(6x+y)^2}=\dfrac{6xy+y^2}{y(6x+y)^2}=\dfrac{y(6x+y)}{y(6x+y)^2}=\dfrac{1}{6x+y}.$

Ответ: $\dfrac{1}{6x+y}$.

26. $\left(\dfrac{a^2-4b^2}{a^2+ab-6b^2}-\dfrac{a^2-9b^2}{a^2+6ab+9b^2}\right)\cdot\dfrac{a+3b}{b}=$

$=\left(\dfrac{(a-2b)(a+2b)}{(a-2b)(a+3b)}-\dfrac{(a-3b)(a+3b)}{(a+3b)^2}\right)\cdot\dfrac{a+3b}{b}=$

$=\left(\dfrac{a+2b}{a+3b}-\dfrac{a-3b}{a+3b}\right)\cdot\dfrac{a+3b}{b}=\dfrac{a+2b-a+3b}{a+3b}\cdot\dfrac{a+3b}{b}=\dfrac{5b}{b}=5.$

Ответ: 5.

27. $\left(\dfrac{6a+1}{a^2-6a}+\dfrac{6a-1}{a^2+6a}\right)\cdot\dfrac{a^4-35a^2-36}{a^4+2a^2+1}=$

$=\dfrac{6a^2+a+36a+6+6a^2-36a-a+6}{a(a-6)(a+6)}\cdot\dfrac{a^4-36a^2+a^2-36}{(a^2+1)^2}=$

$$= \frac{12a^2+12}{a(a-6)(a+6)} \cdot \frac{(a^2-36)a^2+(a^2-36)}{(a^2+1)^2} =$$

$$= \frac{12(a^2+1)(a^2-36)(a^2+1)}{a(a^2-36)(a^2+1)^2} = \frac{12}{a}.$$

Ответ: $\frac{12}{a}$.

28. $\left(\frac{x+7a}{7ax-x^2}+\frac{x-7a}{7ax+x^2}\right) : \frac{28a}{x^2-49a^2} =$

$$= \left(\frac{x+7a}{x(7a-x)}+\frac{x-7a}{x(7a+x)}\right) \cdot \frac{(x-7a)(x+7a)}{28a} =$$

$$= \frac{(x+7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a-x)\cdot 28a} + \frac{(x-7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a+x)\cdot 28a} =$$

$$= \frac{-x^2-14ax-49a^2+x^2-14ax+49a^2}{28ax} = \frac{-28ax}{28ax} = -1.$$

Ответ: -1.

29. $\left(\frac{x-4a}{4ax-x^2}+\frac{4a+x}{4xa+x^2}\right) : \frac{16a}{x^2-16a^2} =$

$$= \left(\frac{x-4a}{x(4a-x)}+\frac{4a+x}{x(4a+x)}\right) : \frac{16a}{(x-4a)(x+4a)} =$$

$$= \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)\frac{(x-4a)(x+4a)}{16a} = 0 \cdot \frac{(x-4a)(x+4a)}{16a} = 0.$$

Ответ: 0.

30. $\left(\frac{x^2-2ax+4a^2}{x-2a}+\frac{x^2+2ax+4a^2}{2a+x}\right) \cdot \frac{4a^2-x^2}{2x^3} =$

$$= \frac{x^3+8a^3+x^3-8a^3}{(x-2a)(x+2a)} \cdot \frac{(2a-x)(2a+x)}{2x^3} = -\frac{2x^3(2a-x)(2a+x)}{(2a-x)(2a+x)\cdot 2x^3} =$$
$$= -1.$$

Ответ: -1.

31. $\left(\frac{x+4a}{x-a}-\frac{3-ax}{x+a}-\frac{5a-3-a^2}{x^2-a^2} : \frac{1}{x}\right)(x^2-a^2) =$

$$= \left(\frac{x+4a}{x-a}-\frac{3-ax}{x+a}-\frac{(5a-3-a^2)x}{(x-a)(x+a)}\right)(x^2-a^2) =$$

$$= (x+4a)(x+a)-(3-ax)(x-a)-x(5a-3-a^2) =$$

$= x^2 + 4ax + ax + 4a^2 - 3x + 3a + ax^2 - a^2x - 5ax + 3x + a^2x =$
$= x^2 + ax^2 + 4a^2 + 3a.$

Ответ: $x^2 + ax^2 + 4a^2 + 3a.$

32. $\dfrac{b^2}{a-b} : \left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab+b^2} - \dfrac{a^2-ab+b^2}{ab-b^2}\right) =$

$= \dfrac{b^2}{a-b} : \dfrac{a^3-b^3-a^3-b^3}{b(a-b)(a+b)} = \dfrac{b^2 \cdot b(a-b)(a+b)}{(a-b)\left(-2b^3\right)} = -\dfrac{a+b}{2}.$

Ответ: $-\dfrac{a+b}{2}.$

33. $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right) \cdot \dfrac{ab^3-a^4}{b^5-4a^4b} =$

$= \dfrac{(a+b)(a^2+ab+b^2)-(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \cdot \dfrac{a(b^3-a^3)}{b(b^4-4a^4)} =$

$= \dfrac{a^3+a^2b+ab^2+a^2b+ab^2+b^3-(a^3-a^2b+ab^2-a^2b+ab^2-b^3)}{a^3-b^3} \times$

$\times \dfrac{a(a^3-b^3)}{b(4a^4-b^4)} = \dfrac{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3-a^3+2a^2b-2ab^2+b^3}{1} \times$

$\times \dfrac{a}{b(4a^4-b^4)} = \dfrac{2b^3+4a^2b}{1} \cdot \dfrac{a}{b(4a^4-b^4)} = \dfrac{2b(b^2+2a^2)\cdot a}{b(2a^2-b^2)(2a^2+b^2)} =$

$= \dfrac{2a}{2a^2-b^2}.$

Ответ: $\dfrac{2a}{2a^2-b^2}.$

34. $\left(\dfrac{2a-4b}{b^2+4ab} - \dfrac{3a+b}{b^2-4ab}\right)\left(b^2-4ab\right) + \dfrac{21a^2+6b^2-9ab}{4a+b} =$

$= \dfrac{\left(2ab-4b^2-8a^2+16ab-3ab-b^2-12a^2-4ab\right)b(b-4a)}{b(b+4a)(b-4a)} +$

$+ \dfrac{21a^2+6b^2-9ab}{4a+b} = \dfrac{11ab-5b^2-20a^2+21a^2+6b^2-9ab}{4a+b} =$

$= \dfrac{2ab+b^2+a^2}{4a+b} = \dfrac{(a+b)^2}{4a+b}.$

Ответ: $\dfrac{(a+b)^2}{4a+b}.$

35. $\left(\dfrac{a+b}{a^2-b}-\dfrac{a-b}{a^2+b}\right):\dfrac{a+1}{a^2-b}=$

$$=\frac{\left(a^3+ab+a^2b+b^2-a^3+ab+a^2b-b^2\right)\left(a^2-b\right)}{\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)(a+1)}=$$

$$=\frac{2ab+2a^2b}{\left(a^2+b\right)(a+1)}=\frac{2ab(a+1)}{(a^2+b)(a+1)}=\frac{2ab}{a^2+b}.$$

Ответ: $\dfrac{2ab}{a^2+b}$.

36. $\dfrac{16}{a+5}-\dfrac{3-2a}{72a^2+24a+8}\cdot\dfrac{-8+216a^3}{2a^2+7a-15}=$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)}\cdot\frac{-8\left(1-27a^3\right)}{2a^2-3a+10a-15}=$$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)}\cdot\frac{-8(1-3a)\left(1+3a+9a^2\right)}{a(2a-3)+5(2a-3)}=$$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)}\cdot\frac{-8(1-3a)\left(9a^2+3a+1\right)}{(2a-3)(a+5)}=$$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{-(1-3a)}{a+5}=\frac{16-1+3a}{a+5}=\frac{3(a+5)}{a+5}=3.$$

Ответ: 3.

37. $\dfrac{a^2-1}{a+1}=\dfrac{(a-1)(a+1)}{a+1}=a-1;$

$$\frac{1}{a-1}-\frac{a^2-1}{a+1}=\frac{1}{a-1}-(a-1)=\frac{1-(a-1)^2}{a-1}=\frac{-a^2+2a}{a-1}=\frac{a^2-2a}{1-a}.$$

Итак, $\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{a^2-1}{a+1}\right)^{-1}+\dfrac{a^2-a-1}{a^2-2a}=\dfrac{1-a}{a^2-2a}+\dfrac{a^2-a-1}{a^2-2a}=$

$$=\frac{a^2-2a}{a^2-2a}=1.$$

Ответ: 1.

38. $\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}\right)^{-1}+\dfrac{2}{a^2+1}=\left(\dfrac{a^2-a+a+1}{a^2-1}\right)^{-1}+\dfrac{2}{a^2+1}=$

$$=\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{2}{a^2+1}=\frac{a^2+1}{a^2+1}=1.$$

Ответ: 1.

39. $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b+a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b=2(a+b).$$

Ответ: $2(a+b)$.

40. $\dfrac{(a+b)^3}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{a^3+3ab(a+b)+b^3}{a^2-ab+b^2}$,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a+b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)-3ab}{ab(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2}{ab(a+b)},$$

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a+b}\right)^{-1}=\frac{3ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}.$$

$$\frac{(a+b)^3}{a^2-ab+b^2}-3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a+b}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{a^3+3ab(a+b)+b^3}{a^2-ab+b^2}-\frac{3ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=a+b.$$

Ответ: $a+b$.

41. $\left(a+\dfrac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\dfrac{a(b-a)}{1+ab}\right)=\dfrac{\left(a+a^2b+b-a\right)(1+ab)}{(1+ab)\left(1+ab-ab+a^2\right)}=$

$$=\frac{b\left(a^2+1\right)}{a^2+1}=b.$$

Ответ: b.

42. $\left(a-\dfrac{4a-9}{a-2}\right):\left(2a-\dfrac{2a}{a-2}\right)=\dfrac{a^2-2a-4a+9}{a-2}:\dfrac{2a^2-4a-2a}{a-2}=$

$$=\frac{\left(a^2-6a+9\right)(a-2)}{(a-2)\left(2a^2-6a\right)}=\frac{(a-3)^2}{2a(a-3)}=\frac{a-3}{2a}.$$

Ответ: $\dfrac{a-3}{2a}$.

43. $\left(x+1-\dfrac{12x-13}{x+3}\right):\left(x-3-\dfrac{7}{x+3}\right)=$

$=\dfrac{x^2+4x+3-12x+13}{x+3}:\dfrac{x^2-9-7}{x+3}=\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}=$

$=\dfrac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{x-4}{x+4}.$

Ответ: $\dfrac{x-4}{x+4}.$

44. $\dfrac{x}{\dfrac{2}{x+1}-1}-\dfrac{2+\dfrac{4x}{1-x}}{x+1}+3=\dfrac{x(x+1)}{1-x}-\dfrac{2+2x}{(1-x)(1+x)}+3=$

$=\dfrac{x(x+1)^2-2-2x+3\left(1-x^2\right)}{1-x^2}=$

$=\dfrac{x\left(x^2+2x+1\right)-2-2x+3-3x^2}{1-x^2}=$

$=\dfrac{x^3+2x^2+x-2x-3x^2+1}{1-x^2}=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{1-x^2}=$

$=-\dfrac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{(x-1)\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)}=$

$=-\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=1-x.$

Ответ: $1-x.$

45. $\dfrac{18\cdot 12^{3n-1}}{9^{2n+1}\cdot 2^{4n-3}}=\dfrac{3^2\cdot 2\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^{3n-1}}{3^{2\cdot(2n+1)}\cdot 2^{4n-3}}=\dfrac{3^{2+3n-1}\cdot 2^{1+6n-2}}{3^{4n+2}\cdot 2^{4n-3}}=$

$=\dfrac{3^{3n+1}\cdot 2^{6n-1}}{3^{4n+2}\cdot 2^{4n-3}}=\dfrac{2^{2n+2}}{3^{n+1}}=\dfrac{4^{n+1}}{3^{n+1}}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}.$

Ответ: $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}.$

46. $\left(\dfrac{3}{4a-b}-\dfrac{2}{4a+b}-\dfrac{1}{4a-5b}\right):\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}=$

$=\left(\dfrac{12a+3b-8a+2b}{(4a-b)(4a+b)}-\dfrac{1}{4a-5b}\right):\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}=$

$$= \left(\frac{4a+5b}{16a^2-b^2} - \frac{1}{4a-5b}\right) : \frac{b^2}{16a^2-b^2} =$$

$$= \frac{\left(16a^2-25b^2-16a^2+b^2\right)\left(16a^2-b^2\right)}{\left(16a^2-b^2\right)(4a-5b)\cdot b^2} = \frac{-24}{4a-5b} = \frac{24}{5b-4a}.$$

Ответ: $\dfrac{24}{5b-4a}$.

47. $\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2} - \dfrac{1}{x^2+5x+6}\right) : \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right) =$

$$= \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+2)}\right) : \frac{x+3-x-1}{(x+1)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+3-x-1)(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdot 2} = \frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+2}$.

48. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} + \dfrac{13}{4-\sqrt{3}}\right) \cdot \dfrac{1}{3+3\sqrt{3}} =$

$$= \left(\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} - \frac{\sqrt{3}-2}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)} + \frac{13\left(4+\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{3+3\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-2+4+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{3+3\sqrt{3}} = \left(3+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{3+3\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

49. Обозначим заданное выражение через A. Представим выражение под корнем в виде полных квадратов и получим

$$A = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}.$$

При извлечении корня учитываем, что арифметический квадратный корень — величина неотрицательная:

$$A = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

50. $\left(\dfrac{2m}{m-7} + \dfrac{4m}{m^2-14m+49}\right) \cdot \dfrac{m^2-9m+14}{m-5} + \dfrac{10m}{7-m} =$

$$= \left(\frac{2m}{m-7} + \frac{4m}{(m-7)^2}\right) \cdot \frac{(m-7)(m-2)}{m-5} + \frac{10m}{7-m} =$$

$$= \frac{(2m(m-7)+4m)(m-7)(m-2)}{(m-7)^2(m-5)} + \frac{10m}{7-m} =$$

$$= \frac{(2m^2 - 14m + 4m)(m-2)}{(m-7)(m-5)} + \frac{10m}{7-m} = \frac{2m(m-5)(m-2)}{(m-7)(m-5)} - \frac{10m}{m-7} =$$

$$= \frac{2m^2 - 4m - 10m}{m-7} = \frac{2m(m-7)}{m-7} = 2m.$$

Ответ: $2m$.

51. $\left(\frac{m}{m-5} + \frac{3m}{2m^2 - 11m + 5}\right) \cdot \frac{m^2 + m - 30}{m+1} - \frac{4m}{2m-1} =$

$$= \left(\frac{m}{m-5} + \frac{3m}{(m-5)(2m-1)}\right) \cdot \frac{(m+6)(m-5)}{m+1} - \frac{4m}{2m-1} =$$

$$= \frac{(2m^2 - m + 3m)(m+6)(m-5)}{(m-5)(2m-1)(m+1)} - \frac{4m}{2m-1} =$$

$$= \frac{2m(m+1)(m+6)}{(2m-1)(m+1)} - \frac{4m}{2m-1} = \frac{2m(m+6) - 4m}{2m-1} =$$

$$= \frac{2m^2 + 8m}{2m-1} = \frac{2m(m+4)}{2m-1}.$$

Ответ: $\frac{2m(m+4)}{2m-1}$.

52. $A = \sqrt{(2 - \sqrt[3]{20})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt[3]{20})^2} = |2 - \sqrt[3]{20}| + |3 - \sqrt[3]{20}|$.
Так как $2 < \sqrt[3]{20} < 3$, то $A = \sqrt[3]{20} - 2 + 3 - \sqrt[3]{20} = 1$.

Ответ: 1.

53. $A = \sqrt{(\sqrt[5]{240} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt[5]{240} - 3)^2} = |\sqrt[5]{240} - 2| + |\sqrt[5]{240} - 3|$.
Так как $2 < \sqrt[5]{240} < 3$, то получим $A = \sqrt[5]{240} - 2 + 3 - \sqrt[5]{240} = 1$.

Ответ: 1.

54. $\left(\left(\frac{b^2 - 2b + 2}{b^4 + 4}\right)^{-1} - 1\right) \cdot (b+1)^{-1} = \left(\frac{b^4 + 4}{b^2 - 2b + 2} - 1\right) \cdot \frac{1}{b+1} =$

$$= \frac{b^4 + 4 - b^2 + 2b - 2}{(b^2 - 2b + 2)(b+1)} = \frac{b^4 - b^2 + 2b + 2}{(b^2 - 2b + 2)(b+1)} =$$

$$= \frac{b^2(b^2 - 1) + 2(b+1)}{(b^2 - 2b + 2)(b+1)} = \frac{b^2(b-1) + 2}{b^2 - 2b + 2} = \frac{b^3 - b^2 + 2}{b^2 - 2b + 2} =$$

$$= \frac{(b+1)(b^2 - 2b + 2)}{b^2 - 2b + 2} = b + 1.$$

Ответ: $b + 1$.

55. $x^{-8}\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}+(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\right)=$

$$=x^{-8}\cdot\left(\frac{1+\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}{x-1}\right)=x^{-8}\cdot\frac{1+\left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right)}{x-1}=$$

$$=x^{-8}\cdot\frac{1+x^8-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x-1}$.

56. $\dfrac{4\cdot 36^n}{2^{2n+2}\cdot 3^{2n-3}}=\dfrac{4\cdot 6^{2n}}{2^2\cdot 2^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 3^{-3}}=\dfrac{6^{2n}\cdot 3^3}{6^{2n}}=3^3=27.$

Ответ: 27.

57. $\dfrac{8\cdot 100^n}{5^{2n-2}\cdot 2^{2n+1}}=\dfrac{8\cdot 10^{2n}}{5^{2n}\cdot 5^{-2}\cdot 2^{2n}\cdot 2}=\dfrac{4\cdot 10^{2n}\cdot 5^2}{10^{2n}}=4\cdot 5^2=100.$

Ответ: 100.

58. $\dfrac{\left(5^{1-5n}\right)^2\cdot\left(4^{2n+1}\right)^3\cdot(2{,}5)^{11n}}{160}=\dfrac{5^2\cdot 4^{6n}\cdot 4^3\cdot 5^{11n}}{5^{10n}\cdot 160\cdot 2^{11n}}=$

$$=\frac{5^2\cdot 2^{12n}\cdot 4^2\cdot 2^2\cdot 5^n}{4^2\cdot 10\cdot 2^{11n}}=10\cdot 2^n\cdot 5^n=10\cdot 10^n=10^{n+1}.$$

Ответ: 10^{n+1}.

59. $81\cdot\dfrac{\left(3\cdot 3^n\right)^{3n}}{\left(9^n\right)^2}:27^{n^2-n}=\dfrac{3^4\cdot 3^{3n}\cdot 3^{3n^2}}{\left(3^{2n}\right)^2}:3^{3(n^2-n)}=$

$$=\frac{3^{3n^2+3n+4}}{3^{4n}}:3^{3n^2-3n}=3^{3n^2+3n+4-4n-3n^2+3n}=3^{2n+4}=3^{2(n+2)}=$$

$=9^{n+2}.$

Ответ: 9^{n+2}.

62. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}+\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}=$

$=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2-\sqrt{3}\right|+2+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$

Ответ: 4.

64. $\dfrac{1}{\sqrt{4}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{22}}=$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}+\dots+\frac{5-\sqrt{22}}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-2+\sqrt{8}-\sqrt{5}+\dots+\right.$$

$+\sqrt{22}-\sqrt{19}+\sqrt{23}-\sqrt{20}+\sqrt{24}-\sqrt{21}+5-\sqrt{22}\big) =$

$= \frac{1}{3}\cdot\left(-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}+5\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}\right).$

С избытком:

$\frac{1}{3}\cdot\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}\right) \approx \frac{1}{3}\cdot(4-1{,}4-1{,}7+4{,}8+4{,}9) \approx 3{,}53.$

С недостатком:

$\frac{1}{3}\cdot\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}\right) \approx \frac{1}{3}\cdot(4-1{,}5-1{,}8+4{,}7+4{,}8) = \frac{1}{3}\cdot 10{,}2 = 3{,}4.$

Искомое число обозначим A. $3{,}4 < A < 3{,}5$, то есть оно лежит между 3 и 4.

Ответ: 3; 4.

65. $\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)} + \frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{13})} +$

$+ \frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)} + \frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}-\sqrt{13})} =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}\right) +$

$+ \left(\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}\right) +$

$+ \left(\frac{1}{\sqrt{7}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})} + \frac{1}{\sqrt{7}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})}\right) + \dots +$

$+ \left(\frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{13})} + \frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}-\sqrt{13})}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} + \dots +$

$+ \frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}+\sqrt{15}+\sqrt{13}}{2\sqrt{15}} = 1+1+\dots+1 = 7.$

Ответ: 7.

66. Данное выражение имеет смысл при $a < 0$, $b \leqslant 0$. Заметим, что $\sqrt{(-a)^2} = |a| = -a$ при $a < 0$. Поэтому $\frac{\sqrt{ab}-a}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{ab}-\sqrt{(-a)^2}}{\sqrt{-a}} =$

$= \frac{\sqrt{-a}\cdot\left(\sqrt{-b}+\sqrt{-a}\right)}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-a}+\sqrt{-b}.$

Ответ: $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$.

67. Заметим, что при $a < 0$ имеем $\sqrt{(-a)^2} = |a| = -a$. Поэтому

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}}{-\sqrt{(-b)^2}+\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a}\cdot\left(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\right)}{\sqrt{-b}\cdot\left(-\sqrt{-b}+\sqrt{-a}\right)} = -\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\frac{a}{b}}$.

68. $$\frac{2ab-10a+5-b}{2a^2-7a+3} = \frac{2a(b-5)-(b-5)}{2(a-3)\left(a-\frac{1}{2}\right)} = \frac{(b-5)(2a-1)}{(a-3)(2a-1)} = \frac{b-5}{a-3}.$$

Ответ: $\frac{b-5}{a-3}$.

69. $$\frac{6-9n+6mn-4m}{3n^2+n-2} = \frac{3(2-3n)+2m(3n-2)}{3\left(n-\frac{2}{3}\right)(n+1)} =$$

$$= \frac{(3n-2)(2m-3)}{(3n-2)(n+1)} = \frac{2m-3}{n+1}.$$

Ответ: $\frac{2m-3}{n+1}$.

70. $$\frac{3ab+21a+2b+14}{9a^2+9a+2} = \frac{3a(b+7)+2(b+7)}{9a^2+6a+1+3a+1} =$$

$$= \frac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)^2+3a+1} = \frac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)(3a+2)} = \frac{b+7}{3a+1}.$$

Ответ: $\frac{b+7}{3a+1}$.

71. $$\frac{4ab-16a+b-4}{16a^2-8a-3} = \frac{4a(b-4)+b-4}{16a^2-8a+1-4} = \frac{(4a+1)(b-4)}{(4a-1)^2-2^2} =$$

$$= \frac{(4a+1)(b-4)}{(4a-3)(4a+1)} = \frac{b-4}{4a-3}.$$

Ответ: $\frac{b-4}{4a-3}$.

72. $$\left(\frac{n+1}{n^2+4n+4} - \frac{n-1}{n^2-4}\right) : \frac{2n}{(n+2)^2} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{(n+2)^2} - \frac{n-1}{(n-2)(n+2)}\right)\cdot\frac{(n+2)^2}{2n} = \left(n+1-\frac{(n-1)(n+2)}{n-2}\right)\cdot\frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-2)-(n-1)(n+2)}{n-2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\left(n^2-n-2\right)-\left(n^2+n-2\right)}{2n(n-2)} =$$

$$= \frac{-2n}{2n(n-2)} = \frac{-1}{n-2} = \frac{1}{2-n}.$$

Ответ: $\frac{1}{2-n}$.

73. $\left(\frac{x}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x-1}\right) : \frac{5}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{(x-1)^2}{5} =$

$$= \frac{x-(x-1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{5} = \frac{x-x+1}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

74. $\left(\frac{a(1-a)}{2} + \frac{a^2-4a+3}{2a^2-6a}\right) : (a-1)^2 =$

$$= \frac{a(1-a)\cdot a(a-3)+(a-3)(a-1)}{2a(a-3)} \cdot \frac{1}{(a-1)^2} =$$

$$= \frac{(a-1)(a-3)\left(1-a^2\right)}{2a(a-3)(a-1)^2} = \frac{(1-a)(1+a)}{2a(a-1)} = -\frac{1+a}{2a}.$$

Ответ: $-\frac{1+a}{2a}$.

75. $\left(\frac{\left(b^2-3b+2\right)(b-1)}{b^2} - \frac{b^2-4b+3}{b}\right) : (b-1)^2 =$

$$= \frac{\left(b^2-3b+2\right)(b-1)-b\left(b^2-4b+3\right)}{b^2(b-1)^2} =$$

$$= \frac{(b-1)(b-2)(b-1)-b(b-1)(b-3)}{b^2(b-1)^2} =$$

$$= \frac{(b-1)(b-2)-b(b-3)}{b^2(b-1)} = \frac{b^2-3b+2-b^2+3b}{b^2(b-1)} = \frac{2}{b^2(b-1)}.$$

Ответ: $\frac{2}{b^2(b-1)}$.

76. $\left(\frac{k+2}{k^2+3k-4} - \frac{k-8}{k^2+8k+16}\right) : \frac{5}{(k+4)^2} =$

$$= \left(\frac{k+2}{(k+4)(k-1)} - \frac{k-8}{(k+4)^2}\right) \cdot \frac{(k+4)^2}{5} =$$

$$= \frac{(k+2)(k+4)-(k-8)(k-1)}{(k+4)^2(k-1)} \cdot \frac{(k+4)^2}{5} =$$

$$= \frac{\left(k^2+6k+8\right)-\left(k^2-9k+8\right)}{5(k-1)} = \frac{15k}{5(k-1)} = \frac{3k}{k-1}.$$

Ответ: $\frac{3k}{k-1}$.

77. $\left(\frac{1}{t^2-4} - \frac{1}{t^2+t-6}\right) : \frac{1}{t^2+5t+6} =$

$$= \left(\frac{1}{(t-2)(t+2)} - \frac{1}{(t+3)(t-2)}\right) \cdot \frac{(t+3)(t+2)}{1} =$$

$$= \frac{(t+3)-(t+2)}{(t-2)(t+2)(t+3)} \cdot (t+3)(t+2) = \frac{1}{t-2}.$$

Ответ: $\frac{1}{t-2}$.

78. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(a-c)(a-b)(b-c)} = \frac{0}{(a-c)(a-b)(b-c)} = 0.$$

Ответ: 0.

79. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{a^2b-a^2c-b^2a+b^2c+c^2a-c^2b}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{b(a-c)(a+c)-b^2(a-c)-ac(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-c)[b(a+c)-b^2-ac)]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-c)[b(a-b)-c(a-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1.$$

Ответ: 1.

80. $\left(\dfrac{m-3}{m^2-4m+3}-\dfrac{2m}{m^2-1}\right):\dfrac{1}{5m+5}=$

$$=\left(\frac{m-3}{(m-3)(m-1)}-\frac{2m}{(m-1)(m+1)}\right)\cdot 5(m+1)=$$

$$=\frac{m+1-2m}{(m-1)(m+1)}\cdot 5(m+1)=\frac{1-m}{m-1}\cdot 5=-5.$$

Ответ: -5.

81. $\left(\dfrac{m+3}{m^2+4m+4}-\dfrac{2m+6}{m^2+5m+6}\right)\cdot\dfrac{m^2-4}{m+1}=$

$$=\left(\frac{m+3}{(m+2)^2}-\frac{2(m+3)}{(m+2)(m+3)}\right)\cdot\frac{(m-2)(m+2)}{m+1}=$$

$$=\frac{m+3-2(m+2)}{(m+2)^2}\cdot\frac{(m-2)(m+2)}{m+1}=\frac{-m-1}{m+2}\cdot\frac{m-2}{m+1}=\frac{2-m}{m+2}.$$

Ответ: $\dfrac{2-m}{m+2}$.

82. $\left(\dfrac{x-1}{x^2-6x+8}-\dfrac{3}{x^2-16}\right):\dfrac{2x^2+4}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{8-2x}=$

$$=\left(\frac{x-1}{(x-4)(x-2)}-\frac{3}{(x-4)(x+4)}\right):\frac{2x^2+4}{(x+4)(x-2)}+\frac{1}{8-2x}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+4)-3(x-2)}{(x-4)(x-2)(x+4)}\cdot\frac{(x+4)(x-2)}{2(x^2+2)}+\frac{1}{2(4-x)}=$$

$$=\frac{x^2+3x-4-3x+6}{2(x-4)(x^2+2)}+\frac{1}{2(4-x)}=\frac{x^2+2}{2(x-4)(x^2+2)}-\frac{1}{2(x-4)}=0.$$

Ответ: 0.

83. $\left(\dfrac{x+6}{x^2-6x}+\dfrac{x-6}{x^2+6x}\right):\dfrac{x^2+36}{x^2-36}-\dfrac{2}{x}=$

$$=\left(\frac{x+6}{x(x-6)}+\frac{x-6}{x(x+6)}\right)\cdot\frac{x^2-36}{x^2+36}-\frac{2}{x}=$$

$$=\frac{(x+6)^2+(x-6)^2}{x(x-6)(x+6)}\cdot\frac{(x-6)(x+6)}{x^2+36}-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2+36)}{x(x^2+36)}-\frac{2}{x}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x}=0.$$

Ответ: 0.

84. $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}-\dfrac{a^2}{a+b}\right)\cdot\left(\dfrac{-1}{b^2}\right)=$

$=\left(\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}-\dfrac{a^2}{a+b}\right)\cdot\left(\dfrac{-1}{b^2}\right)=$

$=\dfrac{(a^2-b^2)-a^2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{-1}{b^2}\right)=\dfrac{1}{a+b}.$

Ответ: $\dfrac{1}{a+b}$.

85. $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}+\dfrac{b}{a+b}\right)\cdot\dfrac{a+b}{3b}=\left(\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}+\dfrac{b}{a+b}\right)\cdot\dfrac{a+b}{3b}=$

$=\dfrac{(a-b)+b}{a+b}\cdot\dfrac{a+b}{3b}=\dfrac{a}{3b}.$

Ответ: $\dfrac{a}{3b}$.

86. $\left(\dfrac{2a+1}{2a-1}-\dfrac{2a-1}{2a+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{4a^2}\right)=$

$=\dfrac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)}\cdot\dfrac{4a^2-4a+1}{4a^2}=$

$=\dfrac{(4a^2+4a+1-4a^2+4a-1)(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)4a^2}=$

$=\dfrac{8a(2a-1)}{(2a+1)\cdot 4a^2}=\dfrac{2(2a-1)}{a(2a+1)}=\dfrac{4a-2}{2a^2+a}$, что и требовалось доказать.

87. $\left(a-b+\dfrac{4ab}{a-b}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{2ab}{b^2-a^2}\right)=$

$=\dfrac{(a-b)^2+4ab}{a-b}:\dfrac{a(a-b)+2ab}{a^2-b^2}=$

$=\dfrac{a^2-2ab+b^2+4ab}{a-b}:\dfrac{a^2-ab+2ab}{a^2-b^2}=\dfrac{(a+b)^2(a-b)(a+b)}{(a-b)a(a+b)}=$

$=\dfrac{(a+b)^2}{a}.$

Ответ: $\dfrac{(a+b)^2}{a}$.

88. $\dfrac{1}{3b-1}-\dfrac{27b^3-3b}{9b^2+1}\cdot\left(\dfrac{3b}{9b^2-6b+1}-\dfrac{1}{9b^2-1}\right)=$

$=\dfrac{1}{3b-1}-\dfrac{3b(9b^2-1)}{9b^2+1}\cdot\left(\dfrac{3b}{(3b-1)^2}-\dfrac{1}{(3b-1)(3b+1)}\right)=$

$=\dfrac{1}{3b-1}-\dfrac{3b(3b-1)(3b+1)}{9b^2+1}\cdot\dfrac{3b(3b+1)-(3b-1)}{(3b-1)^2(3b+1)}=$

$=\dfrac{1}{3b-1}-\dfrac{3b}{9b^2+1}\cdot\dfrac{9b^2+3b-3b+1}{3b-1}=\dfrac{1}{3b-1}-\dfrac{3b}{3b-1}=\dfrac{1-3b}{3b-1}=-1.$

Ответ: -1.

89. $\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\dfrac{2a}{4a^2-12a+9}-\dfrac{3}{4a^2-9}\right)=$

$=\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{2a(4a^2-9)}{4a^2+9}\cdot\left(\dfrac{2a}{(2a-3)^2}-\dfrac{3}{(2a-3)(2a+3)}\right)=$

$=\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{2a(2a-3)(2a+3)}{4a^2+9}\cdot\dfrac{2a(2a+3)-3(2a-3)}{(2a-3)^2(2a+3)}=$

$=\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{2a(4a^2+6a-6a+9)}{(4a^2+9)(2a-3)}=\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{2a}{2a-3}=\dfrac{3-2a}{2a-3}=-1.$

Ответ: -1.

90. $\left(\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{6-4x}{x^2-3x-4}\right):\dfrac{2x-3}{x}=$

$=\left(\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{6-4x}{(x+1)(x-4)}\right)\cdot\dfrac{x}{2x-3}=$

$=\dfrac{2x(x-4)+3(x+1)-(6-4x)}{(x+1)(x-4)}\cdot\dfrac{x}{2x-3}=\dfrac{2x^2-x-3}{(x+1)(x-4)}\cdot\dfrac{x}{2x-3}=$

$=\dfrac{(x+1)(2x-3)x}{(x+1)(x-4)(2x-3)}=\dfrac{x}{x-4}.$

Ответ: $\dfrac{x}{x-4}$.

91. $\dfrac{2x-5}{x}:\left(\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{21-3x}{(x+3)(x-2)}\right)=$

$=\dfrac{(2x-5)}{x}:\dfrac{\left(2x(x-2)+2(x+3)-(21-3x)\right)}{(x+3)(x-2)}=$

$$= \frac{2x-5}{x} : \frac{2x^2+x-15}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{2x-5}{x} \cdot \frac{(x+3)(x-2)}{(2x-5)(x+3)} = \frac{x-2}{x}.$$

Ответ: $\frac{x-2}{x}$.

92. $\left(\frac{1}{a+2} + \frac{5}{(a+2)(a-3)} + \frac{2a}{a-3}\right) \cdot \frac{a}{2a+1} =$

$$= \frac{a-3+5+2a^2+4a}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{2a+1} = \frac{2a^2+5a+2}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{2a+1} =$$

$$= \frac{(2a+1)(a+2)}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{(2a+1)} = \frac{a}{a-3}.$$

Ответ: $\frac{a}{a-3}$.

93. $\left(\frac{2}{b+1} + \frac{10}{(b+1)(b-4)} + \frac{3b}{b-4}\right) : \frac{3b+2}{3} =$

$$= \frac{2b-8+10+3b^2+3b}{(b-4)(b+1)} \cdot \frac{3}{3b+2} = \frac{3b^2+5b+2}{(b-4)(b+1)} \cdot \frac{3}{3b+2} =$$

$$= \frac{(3b+2)(b+1)}{(b-4)(b+1)} \cdot \frac{3}{3b+2} = \frac{3}{b-4}.$$

Ответ: $\frac{3}{b-4}$.

94. $\left(\frac{m^2+3m}{m^2+3m+2} - \frac{m^2-2m}{m^2-2m-3}\right) : \frac{1}{m^2-m-6} - \frac{5}{m+1} =$

$$= \left(\frac{m(m+3)}{(m+1)(m+2)} - \frac{m(m-2)}{(m-3)(m+1)}\right) \cdot (m-3)(m+2) - \frac{5}{m+1} =$$

$$= \frac{m(m+3)(m-3)(m+2)}{(m+1)(m+2)} - \frac{m(m-2)(m-3)(m+2)}{(m-3)(m+1)} - \frac{5}{m+1} =$$

$$= \frac{m^3-9m-m^3+4m}{m+1} - \frac{5}{m+1} = -\frac{5m}{m+1} - \frac{5}{m+1} = -5.$$

Ответ: -5.

95. $\left(\dfrac{m(m+3)}{(m-1)(m+4)}-\dfrac{m(m-4)}{(m-1)(m-3)}\right)\cdot\dfrac{(m-3)(m+4)}{m}=$

$=\dfrac{m(m+3)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m+4)\cdot m}-\dfrac{m(m-4)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m-3)\cdot m}=$

$=\dfrac{m^2-9}{m-1}-\dfrac{m^2-16}{m-1}=\dfrac{7}{m-1}.$

Ответ: $\dfrac{7}{m-1}.$

97. $\dfrac{3x^2+7x-6}{x^2-9}=\dfrac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{3x-2}{x-3}.$

Ответ: $\dfrac{3x-2}{x-3}.$

98. $\dfrac{1}{xy}\cdot\left(x^3y-2xy^3-x^2y^2\right)=\dfrac{1}{xy}\cdot xy\left(x^2-xy-2y^2\right)=x^2-xy-2y^2=$
$=x^2-2xy+xy-2y^2=x(x-2y)+y(x-2y)=(x+y)(x-2y).$

Ответ: $(x+y)(x-2y).$

100. Так как $(2x^2+3y+x+5)^2\geqslant 0$ и $(y+3-2x)^2\geqslant 0$, то наименьшее значение выражения $(2x+3y+x+5)+(y+3-2x)^2$ будет равно нулю тогда и только тогда, когда $\begin{cases}2x^2+3y+x+5=0,\\ y+3-2x=0.\end{cases}$ Тогда

$\begin{cases}2x^2+3y+x+5=0,\\ y=2x-3;\end{cases}\Leftrightarrow 2x^2+3(2x-3)+x+5=0\Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0.$

$x_1=\dfrac{1}{2}=0{,}5;\ x_2=-4.\ y_1=-2;\ y_2=-11.$

Ответ: $0;\ x_1=0{,}5;\ y_1=-2;\ x_2=-4;\ y_2=-11.$

101. При любых значениях x и y $(7x-3y+11)^2+(2x+6y-14)^2\geqslant 0$. Значит, наименьшее значение выражения $(7x-3y+11)^2+(2x+6y-14)^2-5$ равно -5. Оно достигается только в том случае, когда $7x-3y+11$ и $2x+6y-14$ равны нулю одновременно.

Составим и решим систему уравнений:
$\begin{cases}7x-3y+11=0,\\ 2x+6y-14=0;\end{cases}\Leftrightarrow x=-0{,}5,\ y=2{,}5.$

Таким образом, наименьшее значение выражения равно -5, оно достигается при $x = -0{,}5$ и $y = 2{,}5$.

Ответ: -5; $x = -0{,}5$, $y = 2{,}5$.

102. Так как $(17 - 4x - 5y)^2 \geqslant 0$ и $(3x - y - 4{,}2)^2 \geqslant 0$, то наименьшее значение выражения $(17 - 4x - 5y)^2 + (3x - y - 4{,}2)^2 + 3$ будет равно 3 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 17 - 4x - 5y = 0, \\ 3x - y - 4{,}2 = 0. \end{cases}$ Надо найти x и y, удовлетворяющие системе $\begin{cases} 4x + 5y = 17, \\ 3x - y = 4{,}2. \end{cases}$

Умножим второе уравнение этой системы на 5 и прибавим к первому. Получим $19x = 38$; $x = 2$.

Из второго уравнения системы $y = 3x - 4{,}2 = 3 \cdot 2 - 4{,}2 = 1{,}8$.

Ответ: 3; $x = 2$; $y = 1{,}8$.

103. Так как каждое слагаемое суммы — неотрицательное число, то сумма равна нулю только в том случае, когда $3x - 5y - 1$ и $x + 4y - 6$ равны нулю одновременно.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 1 = 0, \\ x + 4y - 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2,\ y = 1.$$

Пара чисел $(2; 1)$ — единственная, удовлетворяющая равенству $\sqrt{3x - 5y - 1} + \sqrt{x + 4y - 6} = 0$.

Ответ: $(2; 1)$.

104. Запишем условие задачи в виде равенства

$2 + \sqrt{2a - 3b - 1} = \sqrt{4 - (a - 2b)^2}$.

Поскольку $\sqrt{2a - 3b - 1} \geqslant 0$ и $(a - 2b)^2 \geqslant 0$, то левая часть этого равенства не меньше двух, а правая — не больше 2. Равенство верно, когда обе его части равны 2, то есть при $\begin{cases} 2a - 3b - 1 = 0, \\ a = 2b; \end{cases} \Leftrightarrow b = 1,\ a = 2.$

Ответ: $(2; 1)$.

106. $\dfrac{3}{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{5}{x^2 - 8x + 7} = \dfrac{2}{x - 1}$,

$$\frac{3}{(x - 1)(x + 5)} - \frac{5}{(x - 1)(x - 7)} = \frac{2}{x - 1}.$$

ОДЗ: $x \neq 1$; $x \neq -5$; $x \neq 7$.

$3x - 21 - 5x - 25 = 2x^2 - 4x - 70$; $2x^2 - 2x - 24 = 0$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $-3; 4$.

107. $\dfrac{3}{x^2+x-6}-\dfrac{2}{2x^2-5x+2}-\dfrac{x}{2x^2+5x-3}=0.$

Разложив знаменатели дробей на множители, запишем уравнение в виде

$$\frac{3}{(x+3)(x-2)}-\frac{2}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\frac{x}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)}=0,$$

$$\frac{6\left(x-\frac{1}{2}\right)-2(x+3)-x(x-2)}{2(x+3)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=0;\ x+3\neq 0;\ x-2\neq 0;\ x-\frac{1}{2}\neq 0.$$

Умножив обе части уравнения на $2(x+3)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, получим

$-x^2+6x-9=0;\ x^2-6x+9=0;\ (x-3)^2=0;\ x=3.$

При $x=3$ знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение, не равны нулю, поэтому $x=3$ — корень данного уравнения.

Ответ: 3.

108. Запишем уравнение в виде $\dfrac{x}{2+3x}+\dfrac{5}{2-3x}=\dfrac{15x+10}{(2-3x)(2+3x)}.$

ОДЗ: $2-3x\neq 0;\ 2+3x\neq 0$, то есть $x\neq\pm\dfrac{2}{3}.$

Умножим обе части уравнения на $(2-3x)(2+3x)\neq 0$:
$x(2-3x)+5(2+3x)=15x+10;\ 2x-3x^2+10+15x=15x+10;$
$3x^2-2x=0;\ x(3x-2)=0;\ x_1=0,\ x_2=\dfrac{2}{3}.$

Так как $x\neq\pm\dfrac{2}{3}$, то $x=\dfrac{2}{3}$ — посторонний корень. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Ответ: 0.

110. $2x^4+3x^3-8x^2-12x=0;\ x\left(2x^3+3x^2-8x-12\right)=0;\ x_1=0;$
$2x^3+3x^2-8x-12=0;\ x^2(2x+3)-4(2x+3)=0;\ \left(x^2-4\right)(2x+3)=0;$
$x^2-4=0;\ x_2=2,\ x_3=-2;\ 2x+3=0;\ 2x=-3;\ x_4=-1{,}5.$

Ответ: 0; 2; -2; $-1{,}5$.

111. $10x^4-45x=30x^2-15x^3;\ 10x^4+15x^3-30x^2-45x=0;$
$5x^3(2x+3)-15x(2x+3)=0;\ (2x+3)\left(5x^2-15x\right)=0;\ 2x+3=0;$
$x_1=-1{,}5;$

$5x^3-15x=0$; $5x\left(x^2-3\right)=0$; $x_2=0$; $x^2-3=0$; $x^2=3$; $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=\sqrt{3}$.

Ответ: $-1{,}5$; 0; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

112. $\left(x^2+3\right)^2+3=7x^3-7x^2+7x$; $x^4+6x^2+9+3-7x^3+7x^2-7x=0$; $x^4-7x^3+13x^2-7x+12=0$; $\left(x^4-7x^3+12x^2\right)+\left(x^2-7x+12\right)=0$; $x^2\left(x^2-7x+12\right)+\left(x^2-7x+12\right)=0$; $\left(x^2+1\right)\left(x^2-7x+12\right)=0$, $x^2+1>0$; $x^2-7x+12=0$.

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1=3$, $x_2=4$.

Ответ: 3; 4.

113. $5x^3+3x^2-5x-3=0$; $\left(5x^3+3x^2\right)-(5x+3)=0$; $x^2(5x+3)-(5x+3)=0$; $(5x+3)\left(x^2-1\right)=0$; $5x+3=0$; $x_1=-0{,}6$; $x^2-1=0$; $(x-1)(x+1)=0$; $x_2=1$, $x_3=-1$.

Ответ: $-0{,}6$; 1; -1.

114. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$; $\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(x^2+2x+1\right)=0$; $x^2\left(x^2+2x+1\right)+\left(x^2+2x+1\right)=0$; $\left(x^2+1\right)(x+1)^2=0$, $x^2+1>0$; $(x+1)^2=0$; $x+1=0$; $x=-1$.

Ответ: -1.

115. $x^4+3x^3+3x^2+3x+2=0$;
$\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(x^3+2x^2+x\right)+(2x+2)=0$;
$x^2\left(x^2+2x+1\right)+x\left(x^2+2x+1\right)+2(x+1)=0$;
$x^2(x+1)^2+x(x+1)^2+2(x+1)=0$; $(x+1)\left(x^2(x+1)+x(x+1)+2\right)=0$;
$x+1=0$, $x_1=-1$;
$x^3+x^2+x^2+x+2=0$; $\left(x^3+2x^2\right)+(x+2)=0$; $x^2(x+2)+(x+2)=0$;
$(x+2)\left(x^2+1\right)=0$, $x^2+1>0$; $x+2=0$; $x_2=-2$.

Ответ: -1; -2.

116. $x^6-2x^4+4x^2-8=0$.
Замена $x^2=t$; $t\geqslant 0$. Получим
$t^3-2t^2+4t-8=0$; $t\left(t^2+4\right)-2\left(t^2+4\right)=0$; $\left(t^2+4\right)(t-2)=0$.
$t^2+4=0$ — действительных корней нет; $t-2=0$; $t=2$.
Вернёмся к замене: $x^2=2$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

117. $x^6-14x^4+56x^2-64=0$. Замена $x^2=t$, $t\geqslant 0$.
$t^3-14t^2+56t-64=0$,
$t^3-64-14t\cdot(t-4)=0$, $(t-4)\cdot\left(t^2+4t+16\right)-14t\cdot(t-4)=0$, $(t-4)\cdot\left(t^2+4t+16-14t\right)=0$, $(t-4)\cdot\left(t^2-10t+16\right)=0$, $(t-4)\cdot(t-8)\cdot(t-2)=0$, $t_1=4$, $t_2=8$, $t_3=2$.

Вернёмся к замене:
$x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$; $x^2 = 8$, $x_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$; $x^2 = 2$, $x_{5,6} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$; ± 2; $\pm 2\sqrt{2}$.

118. $(x^2 + 8x + 17)(x^2 - 4x + 7) = 3$. Рассмотрим
а) $y = x^2 + 8x + 17$; $x^2 + 8x + 17 = 0$; $D = 64 - 68 = -4$; $-4 < 0$.
$x_0 = -\frac{8}{2} = -4$; $y_0 = 16 - 32 + 17 = 1$; $E(y) = [1; +\infty)$.
б) $y = x^2 - 4x + 7$; $x^2 - 4x + 7 = 0$; $D = 16 - 28 = -12$; $-12 < 0$.
$x_0 = \frac{4}{2} = 2$; $y_0 = 4 - 8 + 7 = 3$; $E(y) = [3; +\infty)$.

в) Запишем $x^2 + 8x + 17 = \frac{3}{x^2 - 4x + 7}$; $E(x^2 + 8x + 17) = [1; +\infty)$,

$E\left(\frac{3}{x^2 - 4x + 7}\right) = (0; 1]$.

Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x = -4$, а правая — при $x = 2$, то есть корней уравнение не имеет, следовательно, исходное уравнение корней не имеет, что и требовалось доказать.

119. $(x^2 - 6x + 10)(x^2 - 10x + 32) = 7$.
а) Рассмотрим $y = x^2 - 6x + 10$; $x^2 - 6x + 10 = 0$; $D = 36 - 40 = -4$; $-4 < 0$; $x_0 = 3$; $y_0 = 9 - 18 + 10 = 1$; $E(y) = [1; +\infty)$.
б) $y = x^2 - 10x + 32$; $x^2 - 10x + 32 = 0$; $D = 100 - 128 = -28$; $-28 < 0$; $x_0 = 5$; $y_0 = 25 - 50 + 32 = 7$; $E(y) = [7; +\infty)$.

в) Запишем в виде $x^2 - 6x + 10 = \frac{7}{x^2 - 10x + 32}$;

$E(x^2 - 6x + 10) = [1; +\infty)$; $E\left(\frac{7}{x^2 - 10x + 32}\right) = (0; 1]$.

Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x = 3$, а правая — при $x = 5$. Следовательно, корней нет, что и требовалось доказать.

120. Преобразуем уравнение $\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{x+1}$.

ОДЗ: $x \neq \pm 1$. Умножив обе части уравнения на $(x-1)^2(x+1)$, получим $3(x+1) - 2(x-1) = x^2 - 2x + 1$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Число $x_1 = -1$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: 4.

121. Преобразуем уравнение к виду $\frac{4}{(x+3)^2} - \frac{6}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{x-3}$.
ОДЗ: $x \neq \pm 3$. Умножив обе части уравнения на $(x+3)^2(x-3)$, получим $4(x-3)+6(x+3) = x^2+6x+9$; $x^2-4x+3=0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Число $x_2 = 3$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: 1.

122. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y = 2x-5$. Точка $(x;y)$ является точкой пересечения данных в условии прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 2x - 5$. Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 3 и применив теорему Виета: $x^2 - 6x + 12 = 6x - 15$; $x^2 - 12x + 27 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = 2x-5$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 1$, $y_2 = 13$.

Ответ: $(3;1), (9;13)$.

123. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Точка $(x;y)$ является точкой пересечения данных в условии прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 7 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 2 и применив теорему Виета: $x^2 - 5x - 14 = -3x + 1$; $x^2 - 2x - 15 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 5$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 5$, $y_2 = -7$.

Ответ: $(-3;5)$, $(5;-7)$.

124. Легко видеть, что число 0 не входит в область определения уравнения. Умножив обе части уравнения на x^2, получим уравнение, равносильное данному, при условии $x^2 \neq 0$: $x^4 + 2 = 3x^2$. Обозначив $t = x^2$, получаем уравнение $t^2 - 3t + 2 = 0$, корнями которого являются $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

и его целыми корнями являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Ответ: -1; 1.

125. Уравнение параболы с вершиной в точке $(3;3)$ и старшим коэффициентом 1 может быть записано в виде $y = (x-3)^2 + 3 = x^2 - 6x + 12$.

Чтобы найти абсциссы точек пересечения этой параболы с прямой $y = 2x$, решим уравнение $x^2 - 6x + 12 = 2x$; $x^2 - 8x + 12 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Подставляя полученные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = 2x$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 4$, $y_2 = 12$.

Ответ: $(2; 4)$, $(6; 12)$.

126. Так как выражение x^2+2 не обращается в нуль, то, домножив на него обе части исходного уравнения, получим уравнение, равносильное данному: $x^2 - 10 + (x^2 - 2)(x^2 + 2) = x^2 + 2$; $x^4 - 4 = 12$; $x^4 - 16 = 0$; $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$; $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = 0$; $x^2 + 4 > 0$, $x = \pm 2$.

Ответ: -2; 2.

127. Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, нужно решить систему $\begin{cases} y - x - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Подставив $y = x + 3$ во вторoe уравнение, получаем $x^2 + (x + 3)^2 = 9$, $2x^2 + 6x + 9 = 9$, $2x^2 + 6x = 0$, $x(x + 3) = 0$. То есть абсциссы точек пересечения равны $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, а ординаты равны $y_1 = -3 + 3 = 0$, $y_2 = 0 + 3 = 3$.

Ответ: $(-3; 0)$, $(0; 3)$.

128. Преобразуем исходное уравнение: $(x - 3)^4 + 2(x - 3)^2 = 3$. Пусть $(x - 3)^2 = t \geqslant 0$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$, $t_1 = -3$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = -1, \\ x - 3 = 1, \end{array} \right.$ $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Ответ: $2; 4$.

129. Заметим, что $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Пусть $(x + 2)^2 = t \geqslant 0$, тогда имеем $t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = -4$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x + 2 = -1, \\ x + 2 = 1, \end{array} \right.$ $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.

Ответ: $-3; -1$.

130. Сделаем замену $\dfrac{(x^2 - 5)^2}{4} = t$; $t \geqslant 0$. Тогда $(t - 3)(t + 2) - 6 = 0$, $t^2 - t - 12 = 0$. Решение этого уравнения: $t_1 = 4$; $t_2 = -3$. Второе значение $t = -3$ не подходит, так как $t \geqslant 0$. Поэтому $t = 4$. Возвращаясь к неизвестной x, имеем $\dfrac{(x^2 - 5)^2}{4} = 4$; $(x^2 - 5)^2 = 16$. Отсюда $x^2 - 5 = 4$

или $x^2 - 5 = -4$. Решим первое уравнение: $x^2 = 9$, $x_{1,2} = \pm 3$. Решим второе уравнение: $x^2 = 1$, $x_{3,4} = \pm 1$.

Ответ: ± 1; ± 3.

131. Пусть $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = t$, $t \geqslant 0$. Тогда $\left(t - \frac{21}{8}\right)\left(t+5\right) - 3 = 0$; $8t^2 + 19t - 129 = 0$. Решая это уравнение, получим $t_1 = -\dfrac{43}{8}$, $t_2 = 3$.

Значение $t = -\dfrac{43}{8}$ не подходит, так как $t \geqslant 0$. Подставим значение $t = 3$ в равенство $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = t$. Получим $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = 3$, $(x^2-1)^2 = 9$. Отсюда $x^2 - 1 = \pm 3$.

Значит, $x^2 = 4$ или $x^2 = -2$. Второе уравнение решений не имеет, а первое имеет два решения: $x_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: ± 2.

132. Второе уравнение системы равносильно уравнению $(x-y)(x+y) = 0$. Поэтому исходная система уравнений равносильна двум системам уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 2y + 2 = 0, \\ x = y; \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0, D < 0$

$\Rightarrow$ действительных корней нет $\Rightarrow$ система не имеет решений;

2) $\begin{cases} x^2 + x - 2y + 2 = 0, \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = -2$.

Из второго уравнения системы получим $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

$(-1; 1)$ и $(-2; 2)$ — решения исходной системы.

Ответ: $(-1; 1)$, $(-2; 2)$.

133. Второе уравнение системы равносильно уравнению $(2x-y)(2x+y) = 0$. Поэтому исходная система уравнений равносильна двум системам уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 8 = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ $x^2 - 4x + 2x + 8 = 0$; $x^2 - 2x + 8 = 0$. $D < 0$,

действительных корней нет $\Rightarrow$ система не имеет решений;

2) $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 8 = 0, \\ 2x + y = 0; \end{cases}$ $x^2 - 4x - 2x + 8 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_1 = 2$,

$x_2 = 4$. Из второго уравнения системы получим $y_1 = -4$, $y_2 = -8$. Таким образом, $(2; -4)$ и $(4; -8)$ — решения исходной системы.

Ответ: $(2; -4)$, $(4; -8)$.

134. Запишем уравнение в виде $x^2 + 2(2\sqrt{2} - 1)x + 2 + \sqrt{2} = 0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D = 4(2\sqrt{2} - 1)^2 - 4(2 + \sqrt{2}) = 4(7 - 5\sqrt{2})$. Так как $49 < 50$, то $7 < 5\sqrt{2}$. Поэтому $D = 4(7 - 5\sqrt{2}) < 0$ и уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет корней.

135. Представим данное уравнение в виде $x^2 + 2(1 - 2\sqrt{3})x + 7 = 0$. Определим знак дискриминанта:

$\frac{D}{4} = (1 - 2\sqrt{3})^2 - 7 = 1 - 4\sqrt{3} + 12 - 7 = 6 - 4\sqrt{3}$. Так как $6 - 4\sqrt{3} = \sqrt{36} - \sqrt{48} < 0$, то $D < 0$. Уравнение $4x\sqrt{3} - x^2 = 7 + 2x$ не имеет действительных корней.

Ответ: не имеет.

136. Запишем уравнение в виде $x^2 + (3 + 2\sqrt{2})x + 8{,}4 = 0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D = (3 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 8{,}4 = 17 + 12\sqrt{2} - 33{,}6 = 12\sqrt{2} - 16{,}6$. Так как $144 \cdot 2 > (16{,}6)^2 \Leftrightarrow 12\sqrt{2} > 16{,}6 \Leftrightarrow D = 12\sqrt{2} - 16{,}6 > 0$, то исходное уравнение имеет действительные корни.

Ответ: корни есть.

138. 1) Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}4$ (поскольку $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

2) Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$.

3) Запишем наше уравнение в виде $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Наименьшую сумму корней имеет третье уравнение.

Ответ: 3.

139. $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

Решим систему способом подстановки:

$y = 1 - 2x, x^2 - (1 - 2x)^2 = -5, x^2 - 1 + 4x - 4x^2 + 5 = 0, -3x^2 + 4x + 4 = 0.$

$\frac{D}{4} = 4 + 12 = 16$, $D > 0$.

$x_1 = \frac{-2+4}{-3} = -\frac{2}{3}$, $y_1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$; $x_2 = \frac{-2-4}{-3} = 2$, $y_2 = 1 - 4 = -3$.

Ответ: $(2;-3)$, $\left(-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

140. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ 3x - 7y = -29. \end{cases}$

Выразим из второго уравнения системы x через y и подставим в первое уравнение:

$x = \frac{7y-29}{3}$; $\frac{49y^2 - 406y + 841 + 9y^2}{9} = 29$; $58y^2 - 406y + 841 = 29 \cdot 9$;

$2y^2 - 14y + 29 - 9 = 0$; $y^2 - 7y + 10 = 0$; $y_1 = 5$, $y_2 = 2$; $x_1 = \frac{35-29}{3} =$

$= \frac{6}{3} = 2$, $x_2 = \frac{14-29}{3} = -\frac{15}{3} = -5$.

Ответ: $(-5;2)$, $(2;5)$.

142. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$

Заметим, что если $x = 0$ или $y = 0$, то $xy = 0$, что противоречит условию $xy = 2$, значит, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ y = \frac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3, \\ y = \frac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = 3, \\ y = \frac{2}{x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$.

Обозначим $x^2 = t$, $t > 0$. Уравнение примет вид

$t - \frac{4}{t} = 3$; $t^2 - 3t - 4 = 0$; $t_1 = 4$, $t_2 = -1$. Значение $t = -1$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Вернёмся к исходной переменной: $x^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

Так как $y = \frac{2}{x}$, то $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Ответ: $(2;1)$, $(-2;-1)$.

143. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3, \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=6; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=2; \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x}=5, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $x=\dfrac{2}{5}$, $y=2$.

Ответ: (0,4; 2).

144. Выразим из второго уравнения системы $y = x - 2$ и подставим в первое, получим уравнение

$$\frac{x+3}{x}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{25}{2}.$$

Его ОДЗ: $x \neq 0$ и $x-1 \neq 0$, то есть $x \neq 0$, $x \neq 1$. Умножив обе части полученного уравнения на $2x(x-1)$, будем иметь
$2(x+3)(x-1)-2x(x+2)=25x(x-1)$,
$2x^2+4x-6-2x^2-4x=25x^2-25x$, $25x^2-25x+6=0$,
$x_{1,2}=\dfrac{25\pm\sqrt{625-600}}{50}=\dfrac{25\pm5}{50}$, $x_1=\dfrac{2}{5}=0{,}4$, $x_2=\dfrac{3}{5}=0{,}6$.

Найденные корни удовлетворяют ОДЗ.

Далее находим $y_1 = x_1 - 2 = -1{,}6$ и $y_2 = x_2 - 2 = -1{,}4$. Таким образом, решением исходной системы будут две пары чисел $(0{,}4; -1{,}6)$ и $(0{,}6; -1{,}4)$.

Ответ: $(0{,}4; -1{,}6)$, $(0{,}6; -1{,}4)$.

145. $\begin{cases} y^2-x^2=9, \\ 2x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-x^2=9, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2-x^2=9, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-12x+9-x^2-9=0, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-12x=0, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x\cdot(x-4)=0, \\ y=2x-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4, \end{array}\right. \\ y=2x-3; \end{cases} \quad x_1=0, y_1=-3; x_2=4, y_2=5.$$

Ответ: (0; −3), (4; 5).

146. Сделаем замену в первом уравнении $t = \dfrac{x}{y}$ и получим $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{25}{12}$.

Решаем это уравнение и находим корни $t_1 = \dfrac{3}{4}$; $t_2 = \dfrac{4}{3}$. Выражаем y через x, подставляем во второе уравнение и получаем ответ.

Ответ: $(3;4), (4;3), (-3;-4), (-4;-3)$.

147. $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2,\ y_1 = 4;\ x_2 = -3,$ $y_2 = 9$.

Ответ: $(2;4),\ (-3;9)$.

148. $\begin{cases} x^2 - 6x + y = 2, \\ y - \sqrt{x-3} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 6x - x^2, \\ y = 9 + \sqrt{x-3}; \end{cases}$

$2 + 6x - x^2 = 9 + \sqrt{x-3},\ 6x - x^2 = 7 + \sqrt{x-3}.\qquad (1)$

Очевидно, что $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ 6x - x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leqslant x < 6$. Подбором находим, что $x = 4$ является корнем уравнения (1).

Функция $y = 7 + \sqrt{x-3}$ возрастает при $x \geqslant 3$. $y = 6x - x^2$ — график параболы с вершиной $(3;9)$. При $x \geqslant 3$ $y = 6x - x^2$ убывает. Следовательно, на промежутке $3 \leqslant x < 6$ уравнение (1) имеет только один корень $x = 4$. Подставим $x = 4$ во второе уравнение системы и найдём y: $y = 10$.

Ответ: $(4;10)$.

149. Пусть искомые числа x и y, $x < y$. Тогда $\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ \dfrac{x+y}{2} = y - 24. \end{cases}$ Выразим y из второго уравнения: $y = x + 48$, и подставим его в первое. Получим $\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48. \end{cases}$

1) $\sqrt{x^2 + 48x} = x + 12$. Перейдём к равносильной системе.

$\begin{cases} x + 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 48x = x^2 + 24x + 144; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -12, \\ x = 6; \end{cases} \qquad x = 6.$

2) Находим значение второй переменной системы $y = 6 + 48 = 54$.

Итак, $\begin{cases} x = 6, \\ y = 54. \end{cases}$

Ответ: 6; 54.

150. $\begin{cases} 2x - \dfrac{12x+y}{8} = 3, \\ \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{y}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{12x}{8} - \dfrac{y}{8} = 3, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{1}{16} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{8} + 3, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{5y}{6} + \dfrac{1}{16} = 0. \end{cases}$$

Подставив значение $\frac{x}{2}$ из первого уравнения системы во второе, получим

$$\frac{y}{8} + 3 - \frac{5y}{6} + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow -\frac{17y}{24} + \frac{49}{16} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{49}{16} \cdot \frac{24}{17} = \frac{147}{34}.$$

Найденное значение y подставим в первое уравнение системы $x = \frac{y}{4} + 6$, $x = \frac{147}{34 \cdot 4} + 6 = \frac{963}{136}$.

Ответ: $x = \frac{963}{136}$, $y = \frac{147}{34}$.

151. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5} + 2x = 11, \\ \dfrac{3y}{5} + \dfrac{y-x}{15} = \dfrac{x}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2 + \dfrac{1}{5}\right)x + \dfrac{y}{5} = 11, \\ \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{15}\right)y - \left(\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{5}\right)x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{y}{11} + 5, \\ y = \dfrac{2x}{5}. \end{cases}$$

Подставим значение y из второго уравнения системы в первое: $x = -\frac{2x}{55} + 5$; $x = \frac{275}{57}$. Тогда $y = \frac{2x}{5} = \frac{110}{57}$.

Ответ: $x = \frac{275}{57}$, $y = \frac{110}{57}$.

152. $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{3}+\dfrac{11}{3}=2x, \\ 2+\dfrac{y-x}{4}=\dfrac{y}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3}-2\right)x-\dfrac{2y}{3}=-\dfrac{11}{3}, \\ -\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)y=-2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11-2y}{5}, \\ -\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3y}{28}=-2. \end{cases}$

Подставим полученное значение x из первого уравнения системы во второе: $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2y-11}{5}+\dfrac{3y}{28}=-2 \Leftrightarrow -\dfrac{11}{20}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{3y}{28}=-2 \Leftrightarrow \dfrac{29y}{140}=$

$=-2+\dfrac{11}{20} \Rightarrow y=-7.$

Так как $x=\dfrac{11-2y}{5}$, то $x=\dfrac{11+14}{5}=5.$

Ответ: $x=5, y=-7.$

153. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{4}-\dfrac{15}{2}=-\dfrac{x}{2}, \\ \dfrac{5y}{2}+3=-\dfrac{x+y}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)x+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{15}{2}, \\ \frac{1}{5}x+\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\right)y=-3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4}x=\dfrac{15}{2}-\dfrac{3}{4}y, \\ x+\dfrac{27}{2}y=-15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-y, \\ 10-y+\dfrac{27}{2}y=-15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12, \\ y=-2. \end{cases}$

Ответ: $x=12,\ y=-2.$

154. 1. ОДЗ: $x\neq 0$ и $y\neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений:

$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=7, \\ x+y+5xy=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7xy, \\ 12xy=1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{7}{12}, \\ xy=\dfrac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{7}{12}-x, \\ 12x^2-7x+1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{7}{12}-x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4}, \\ x=\dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}, \\ x = \dfrac{1}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{1}{4}, \\ x = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

155. 1. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = 6, \\ x + y + 10xy = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6xy, \\ 16xy = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4}, \\ xy = \dfrac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{4} - x, \\ 8x^2 - 6x + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5$ и $y_2 = 0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$.

Ответ: $(0{,}25; 0{,}5), (0{,}5; 0{,}25)$.

156. $\begin{cases} 2x - 6 - 4y - 28 = 1, \\ 6 - 3x + 7y - 7 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 35, \\ -3x + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 39, \\ -3x + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -3y + 39, \\ -3x + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -3y + 39, \\ -9y + 117 + 7y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 39, \\ y = \dfrac{113}{2} = 56{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 130{,}5, \\ y = 56{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $(130{,}5; 56{,}5)$.

157. $\begin{cases} 5x + 4y - 2x = 6, \\ x - 2y + 4x = -16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6, \\ 5x - 2y = -16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = -26, \\ 2y = 5x + 16; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 3)$.

158. Выразим y через x из второго уравнения системы и подставим в первое:

1) $2x + y = -2 \Rightarrow y = -2 - 2x$.
2) $x^2 - y = x^2 + 2x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$.
3) Решениями уравнения $x^2 + 2x = 0$ являются $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, которым соответствуют $y_1 = 2$; $y_2 = -2$.

Ответ: $(0; -2), (-2; 2)$.

159. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x = x^2$ и $y = y^2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = x^2, \\ y = y^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0, \\ y(y-1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 1; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$.

160. По теореме, обратной теореме Виета, x и y^2 удовлетворяют квадратному уравнению $z^2 - 7z + 12 = 0$. Откуда $x = 3$, $y^2 = 4$ или $x = 4$, $y^2 = 3$. Значит, решением системы являются пары $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(4; \sqrt{3})$, $(4; -\sqrt{3})$.

Ответ: $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(4; \sqrt{3})$, $(4; -\sqrt{3})$.

161. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x = |x|$ и $y = |y|$. Получаем систему уравнений
$$\begin{cases} x = |x|, \\ y = |y|; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

162. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = b$, $\dfrac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} 9b + 2a = 3, \\ 18b - 5a = -3. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим $-9a = -9$; $a = 1$. Подставляя $a = 1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \dfrac{1}{9}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1, \\ x+y=9. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 5, y = 4$.

Ответ: $(5; 4)$.

163. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = b$, $\dfrac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} 6b + 5a = 7, \\ 3b - 2a = -1. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим $9a = 9$; $a = 1$. Подставляя $a = 1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \dfrac{1}{3}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 2, y = 1$.

Ответ: $(2; 1)$.

164. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = b$, $\dfrac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} 4a + 12b = 3, \\ 8a - 18b = -1. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим $-42b = -7$; $b = \dfrac{1}{6}$. Подставляя $b = \dfrac{1}{6}$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $a = \dfrac{1}{4}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 5, y = 1$.

Ответ: $(5; 1)$.

165. Пусть $\dfrac{1}{x+y}=b$, $\dfrac{1}{x-y}=a\ (x\neq\pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases}6a-8b=-2,\\ 9a+10b=8.\end{cases}$

Умножив первое уравнение на 3 и вычитая из полученного уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим $-44b=-22$; $b=\dfrac{1}{2}$. Подставляя $b=\dfrac{1}{2}$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $a=\dfrac{1}{3}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3,\\ x+y=2.\end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x=2{,}5$, $y=-0{,}5$.

Ответ: $(2{,}5;-0{,}5)$.

166. Из второго уравнения системы выразим y через x: $y=x-7$ (1). Подставив выражение (1) в первое уравнение системы, получим $(3x-7)^2=3x-5$; $9x^2-42x+49=3x-5$; $9x^2-45x+54=0$; $x^2-5x+6=0$; $x_1=2$, $x_2=3$. Из уравнения (1) находим, что значениям $x_1=2$, $x_2=3$ соответствуют значения $y_1=-5$, $y_2=-4$.

Ответ: $(2;-5)$, $(3;-4)$.

167. $\begin{cases}(3x-y)^2=12-3x+y,\\ x+y=5;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3x-5+x)^2=12-3x+5-x,\\ y=5-x;\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(4x-5)^2=17-4x,\\ y=5-x;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16x^2-36x+8=0,\\ y=5-x;\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-9x+2=0\\ y=5-x.\end{cases}$

Решением первого уравнения этой системы являются числа $x_1=0{,}25$; $x_2=2$. Подставляя найденные значения x во второе уравнение системы, получаем $y_1=4{,}75$, $y_2=3$.

Ответ: $(0{,}25;4{,}75)$, $(2;3)$.

168. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+1=\dfrac{6y}{x},\\ x+y=3.\end{cases}$ Обозначим $\dfrac{x}{y}=t\ (x\neq0, y\neq0)$. Тогда $t^2+t-6=0$; $t_1=2$, $t_2=-3$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2y, \\ y = 3 - x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3y, \\ y = 3 - x; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4{,}5, \\ y = -1{,}5. \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(2; 1)$, $(4{,}5; -1{,}5)$.

169. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + 3 = \dfrac{4y}{x}, \\ y - x = 5. \end{cases}$ Обозначим $\dfrac{x}{y} = t\,(x \neq 0, y \neq 0)$.

Тогда $t^2 + 3t - 4 = 0$; $t_1 = -4, t_2 = 1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = -4y, \\ y = 5 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = y, \\ y = 5 + x; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 1)$.

170. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y - x}{xy} = 1, \\ y - x + 11xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = xy, \\ 12xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{1}{12}, \\ xy = \dfrac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{12} + x, \\ 12x^2 + x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{12} + x, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}, \\ x = \dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4}, \\ x = -\dfrac{1}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}, \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

171. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y - x}{xy} = 2, \\ y - x - 10xy = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 2xy, \\ 8xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{1}{4}, \\ xy = \dfrac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{4} + x, \\ 8x^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0{,}25$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0{,}25 - 0{,}5 = -0{,}25$; $y_2 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$.

Ответ: $(-0{,}5; 0{,}25)$, $(0{,}25; 0{,}5)$.

172. Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ 2x + y = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ 2x + y = -5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2x(5 - 2x) = 9, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 + 2x(-5 - 2x) = 9, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 10x + 9 = 0, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9, \\ y = -13, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9, \\ y = 13, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-9; 13)$, $(-1; -3)$, $(1; 3)$, $(9; -13)$.

173. Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y - 5 = 0, \\ x = 6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -5, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 7; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2) \begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y - 5 = 0, \\ x = -6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = -7, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5, \\ x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-7; -1)$, $(-1; 5)$, $(1; -5)$, $(7; 1)$.

174. Пусть $t = \dfrac{x}{y}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$. Тогда первое уравнение исходной системы принимает вид $t + \dfrac{6}{t} - 5 = 0$; $t^2 - 5t + 6 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

Следовательно, $x = 2y$ или $x = 3y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 + 8y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\sqrt{2}, \\ x = -2\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \sqrt{2}, \\ x = 2\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + 12y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-3;-1), (3;1), \left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right), \left(-2\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

175. Пусть $t = \dfrac{x}{y}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$. Тогда первое уравнение исходной системы принимает вид $t - \dfrac{2}{t} - 1 = 0$; $t^2 - t - 2 = 0$; $t_1 = -1, t_2 = 2$.

Следовательно, $x = -y$ или $x = 2y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases} x = -y, \\ y^2 + 5y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2, \\ x = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$2)$ $\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - 10y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = -8. \end{cases}$ Эта система не имеет решений.

Ответ: $(2;-2), (-2;2)$.

176. $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x + y)\left(9x^2 - y^2\right) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x + y)^2(3x - y) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x + y)^2 = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 3x + y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 3x + y = -4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 6x = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 6x = 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6, \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2; -2)$, $\left(\frac{2}{3}; -6\right)$.

177. $\begin{cases} (x^2 - 4y^2)(x - 2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2(x + 2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2 = 64, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10 - 2y - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} 10 - 2y - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}, \\ x = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4\dfrac{1}{2}, \\ x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(9; 0{,}5)$, $(1; 4{,}5)$.

178. $\begin{cases} (x^2 - y^2)(x - y) = 81, \\ x + y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x - y)^2 = 81, \\ x + y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 9, \\ x + y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = -3, \\ x = 9 - y, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 3, \\ x = 9 - y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9 - y - y = -3, \\ x = 9 - y, \end{cases} \\ \begin{cases} 9 - y - y = 3, \\ x = 9 - y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 6, \\ x = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3, \\ x = 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(6; 3)$, $(3; 6)$.

179. $\begin{cases} (y^2 - x^2)(y - x) = 75, \\ x - y = -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - x)^2(y + x) = 75, \\ y - x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y + x = 3, \\ y - x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 4)$.

180. Первое уравнение системы выполняется только в том случае, когда $x-2=0$ или $y+1=0$. Получаем:

$$1)\begin{cases} x-2=0, \\ 6y^2+x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ 6y^2-y-1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{1}{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решением этой системы являются значения $x_1 = 2$; $y_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 2$; $y_2 = -\frac{1}{3}$.

$$2)\begin{cases} y+1=0, \\ 6y^2+x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ 7+x=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=-4. \end{cases}$$

Следовательно, решением исходной системы являются значения $x_1 = 2, y_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2, y_2 = -\frac{1}{3}; x_3 = -4, y_3 = -1$.

Ответ: $\left(2; \frac{1}{2}\right), \left(2; -\frac{1}{3}\right), (-4; -1)$.

181. $\begin{cases} x(x+y)=15, \\ y(x+y)=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10. \end{cases}$

Суммируя уравнения системы, получим $x^2+2xy+y^2=25$, $(x+y)^2=25$. Тогда $x+y=5$ или $x+y=-5$.

1) $x+y=5$, $x=5-y$. Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получим $(5-y)(5-y+y)=15$, $5-y=3$, $y=2$. Тогда $x=5-2=3$.

2) $x+y=-5$, $x=-y-5$. Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получим $(-y-5)(-y-5+y)=15$, $-y-5=-3$, $y=-2$. Тогда $x=-(-2)-5=-3$.

Ответ: $(3; 2), (-3; -2)$.

183. $x-2+\frac{2{,}25}{x+1} \leqslant 0$; $\frac{x^2-2x+x-2+2{,}25}{x+1} \leqslant 0$; $\frac{(x-0{,}5)^2}{x+1} \leqslant 0$;

$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x<-1. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0{,}5\}$.

184. $\frac{\sqrt{x^2+x-20}}{4x+1} \geqslant \frac{\sqrt{x^2+x-20}}{2x+3}$. ОДЗ: $x \neq -\frac{1}{4}$; $x \neq -\frac{3}{2}$.

Рассмотрим два случая:

а) $x^2 + x - 20 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 4$, $x_2 = -5$. Числа -5 и 4 являются решениями данного неравенства.

б) $\begin{cases} x^2 + x - 20 > 0, \\ \dfrac{1}{4x+1} - \dfrac{1}{2x+3} \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x-4) > 0 \text{ (см. рис. 124)}, \\ \dfrac{1-x}{(4x+1)(2x+3)} \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -5, \\ x > 4, \end{array}\right. \\ \dfrac{1-x}{8\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)} \leqslant 0 \text{ (см. рис. 125)}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -5, \\ x > 4, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{3}{2}, \\ -\dfrac{1}{4} < x \leqslant 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x < -5.$

Объединим решения, полученные в а) и б): $x \in (-\infty; -5] \cup \{4\}$.

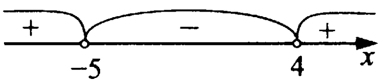


Рис. 124

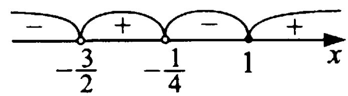


Рис. 125

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{4\}$.

185. $\dfrac{2x-1}{\sqrt{-x^2 - 0{,}5x + 0{,}5}} \geqslant \dfrac{5x+1}{\sqrt{-x^2 - 0{,}5x + 0{,}5}}$.

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 5x + 1, \\ -x^2 - 0{,}5x + 0{,}5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x^2 + 0{,}5x - 0{,}5 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ (x+1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leqslant -\frac{2}{3} \text{ (см. рис. 126)}.$$

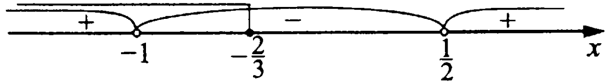


Рис. 126

Ответ: $\left(-1; -\dfrac{2}{3}\right]$.

186. $x^2 + \frac{1}{x^2} > 7$; $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} > 9$; $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 > 9$; $\left|x + \frac{1}{x}\right| > 3$. Получим $x + \frac{1}{x} > 3$ или $x + \frac{1}{x} < -3$.

1) $x + \frac{1}{x} - 3 > 0$; $\frac{x^2 - 3x + 1}{x} > 0$; $\frac{\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{x} > 0$;

$\left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ x > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ (см. рис. 127).

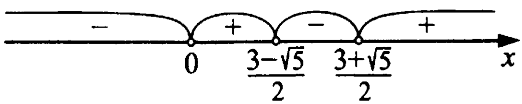


Рис. 127

2) $x + \frac{1}{x} + 3 < 0$; $\frac{x^2 + 3x + 1}{x} < 0$; $\frac{\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)}{x} < 0$;

$\left[\begin{array}{l} x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < x < 0 \end{array}\right.$ (см. рис. 128).

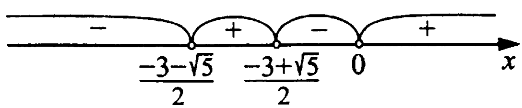


Рис. 128

Объединяя решения 1 и 2, имеем

$$\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

187. Преобразуем данное неравенство: $x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} < 9$; $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 < 3^2$. Рассмотрим отдельно два случая: $x > 0$ и $x < 0$.

1) Так как при $x > 0$ выполняется неравенство $x + \frac{2}{x} > 0$, то

$0 < x + \frac{2}{x} < 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$; $x \in (1; 2)$.

2) При рассмотрении случая $x < 0$ достаточно заметить, что функция $y = x + \frac{2}{x}$ нечётна, и, значит, решением неравенства $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 < 3^2$ на отрицательной полуоси будет множество $(-2; -1)$, симметричное множеству $(1; 2)$ относительно нуля.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

188. $(x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 1 \leqslant 0$; $(x^2 - 2x)^2 \leqslant 1$; $|x^2 - 2x| \leqslant 1$; $\begin{cases} x^2 - 2x \geqslant -1, \\ x^2 - 2x \leqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$ $1 - \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{2}$.

$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 \leqslant 0$, $\left(x^4 - 1\right) - 4x^2(x-1) \leqslant 0$,
$\left(x^2+1\right)(x-1)(x+1) - 4x^2(x-1) \leqslant 0$, $(x-1)\left(\left(x^2+1\right)(x+1) - 4x^2\right) \leqslant 0$,
$(x-1)\left(x^3 + x^2 + x + 1 - 4x^2\right) \leqslant 0$, $(x-1)\left(x^3 - 3x^2 + x + 1\right) \leqslant 0$,
$(x-1)\left(x^3 - x^2 - x^2 + x - x^2 + 1\right) \leqslant 0$,
$(x-1)\left(x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1)(x+1)\right) \leqslant 0$,
$(x-1)(x-1)\left(x^2 - 2x - 1\right) \leqslant 0$, $(x-1)^2\left(x^2 - 2x - 1\right) \leqslant 0$;
$x^2 - 2x - 1 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$;
$(x-1)^2\left(x - \left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right) \leqslant 0$; $1 - \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{2}$
(см. рис. 129).

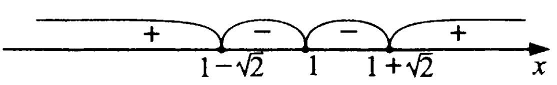


Рис. 129

Ответ: $\left[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right]$.

190. $\begin{cases} \frac{6-x}{x+3} \geqslant 0, \\ \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы.

1) $\frac{6-x}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow -3 < x \leqslant 6$ (см. рис. 130).

2) $\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leqslant 0$; $\frac{x+2}{2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 0$ (см. рис. 131).

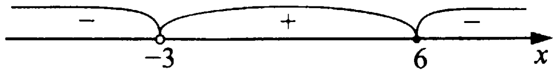


Рис. 130

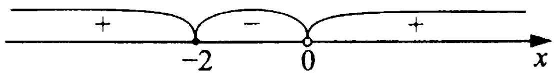


Рис. 131

3) Следовательно, $\begin{cases} -3 < x \leqslant 6, \\ -2 \leqslant x < 0. \end{cases}$ Откуда $-2 \leqslant x < 0$ (см. рис. 132).

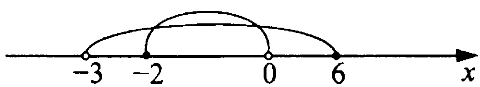


Рис. 132

Ответ: $[-2; 0)$.

191. Решим сначала первое неравенство, потом — втсрое и найдём общее решение.

1) $x^2 - 4x - 5 < 0$; $(x+1)(x-5) < 0$; $-1 < x < 5$.

2) $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{4}$; $\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \geqslant 0$; $\frac{4-x}{4x} \geqslant 0$; $\frac{x-4}{\cdot x} \leqslant 0$; $0 < x \leqslant 4$.

Следовательно, $0 < x \leqslant 4$ (см. рис. 133).

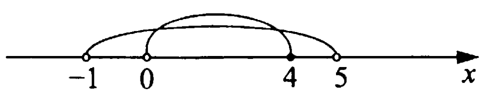


Рис. 133

Ответ: $(0; 4]$.

192. $\begin{cases} 2 - \dfrac{3+2x}{3} > 1 - \dfrac{x+6}{2}, \\ 3 - \dfrac{x}{4} < x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 6 - 4x > 6 - 3x - 18, \\ 12 - x < 4x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 18, \\ x > 2{,}4; \end{cases} \Leftrightarrow 2{,}4 < x < 18.$

Ответ: $(2{,}4; 18)$.

193. $\begin{cases} 1-\dfrac{1-x}{2}<4-\dfrac{5+5x}{3}, \\ 2-\dfrac{x+8}{4}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-3+3x<24-10-10x, \\ 8-x-8>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x<11, \\ x<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{11}{13}, \\ x<0; \end{cases} \Leftrightarrow x<0.$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

195. Найдём область определения данного выражения:

$\begin{cases} 3x^2-20x-7\geqslant 0, \\ 2x^2+5x\neq 0, \\ 3x-21\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-7)\left(x+\frac{1}{3}\right)\geqslant 0, \\ x(2x+5)\neq 0, \\ x\neq 7; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leqslant -\dfrac{1}{3}, \\ x\geqslant 7 \text{ (см. рис. 134)}, \end{array}\right. \\ x\neq 0,\ x\neq -2{,}5, \\ x\neq 7. \end{cases}$

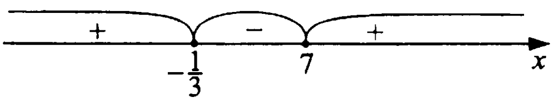


Рис. 134

Таким образом, $x\in(-\infty; -2{,}5)\cup\left(-2{,}5; -\frac{1}{3}\right]\cup(7; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2{,}5)\cup\left(-2{,}5; -\frac{1}{3}\right]\cup(7; +\infty)$.

196. Область определения данного выражения найдём из системы неравенств

$\begin{cases} x^2-4x-21\geqslant 0, \\ x^2-25\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-7)\geqslant 0, \\ x^2\neq 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leqslant -3, \\ x\geqslant 7, \end{array}\right. \\ x\neq 5,\ x\neq -5. \end{cases}$

Таким образом, $x\in(-\infty; -5)\cup(-5; -3]\cup[7; +\infty)$ (см. рис. 135).

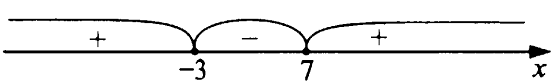


Рис. 135

Ответ: $(-\infty; -5)\cup(-5; -3]\cup[7; +\infty)$.

197. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих условию $x^2 - 3x + 2 > 0$; $(x-1)(x-2) > 0$ (см. рис. 136). Следовательно, $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

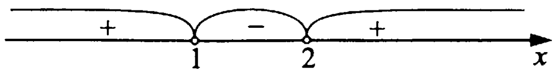


Рис. 136

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

198. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geqslant 0, \\ 14 - 3x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \geqslant 0, \\ x \neq \dfrac{14}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{14}{3}.$$

Таким образом, область определения: $\left(-\infty; \frac{14}{3}\right) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{14}{3}\right) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$.

199. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x + 12 - x^2 \geqslant 0, \\ 4 - x^2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-4) \leqslant 0, \\ x^2 \neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 4, \\ x \neq 2,\ x \neq -2; \end{cases}$$

(см. рис. 137). Таким образом, $x \in [-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4]$.

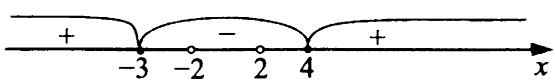


Рис. 137

Ответ: $[-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4]$.

200. Выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} x - 5 \geqslant 0, \\ x^2 - 36 \geqslant 0, \\ x^2 - 49 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -6, \\ x \geqslant 6, \end{array}\right. \\ x \neq 7,\ x \neq -7; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6 \leqslant x < 7, \\ x > 7. \end{array}\right.$$

Ответ: $[6; 7) \cup (7; +\infty)$.

202. Выражение $\sqrt{2x^2 + 9x - 35}$ не имеет смысла, если $2x^2 + 9x - 35 < 0$; $2(x+7)(x-2{,}5) < 0$ (см. рис. 138); $-7 < x < 2{,}5$.

Ответ: $(-7; 2{,}5)$.

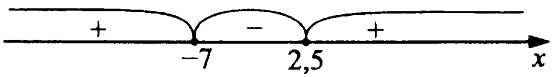


Рис. 138

203. Выражение $\sqrt{16-2x-3x^2}$ имеет смысл, если $16-2x-3x^2 \geqslant 0$; $3x^2+2x-16 \leqslant 0$; $3(x-2)\left(x+2\frac{2}{3}\right) \leqslant 0$; $-2\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2$ (см. рис. 139).

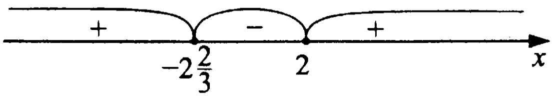


Рис. 139

Ответ: $\left[-2\frac{2}{3}; 2\right]$.

204. Выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих условию

$$\frac{20x-11x^2-3x^3}{x} \geqslant 0;\ \frac{3x\left(x-\frac{4}{3}\right)(x+5)}{x} \leqslant 0;\ x \in [-5;0) \cup \left(0;\frac{4}{3}\right]$$

(см. рис. 140).

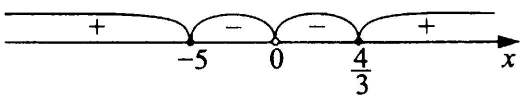


Рис. 140

Ответ: $[-5;0) \cup \left(0;\frac{4}{3}\right]$.

205. Выражение имеет смысл при s, удовлетворяющих условию $11s-6-3s^2 > 0$, $3s^2-11s+6 < 0$.

Найдём корни уравнения

$3s^2-11s+6=0$, $D=121-72=49$, $D>0$, $s_1=\frac{11+7}{6}=3$, $s_2=\frac{11-7}{6}=\frac{2}{3}$, $3\cdot\left(s-\frac{2}{3}\right)\cdot(s-3) < 0$, $\frac{2}{3} < s < 3$ (см. рис. 141).

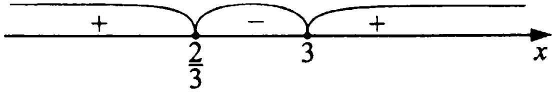


Рис. 141

Ответ: $\left(\frac{2}{3};3\right)$.

206. Выражение не определено, если выполняются условия:
$$\left[\begin{array}{l} x+3=0, \\ 2x^2-11x+12 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ 2(x-4)(x-1{,}5) \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 4; \end{array}\right.$$
(см. рис. 142).

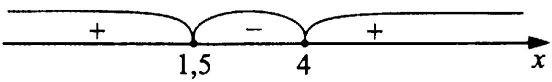


Рис. 142

Ответ: $\{-3\} \cup [1{,}5; 4]$.

207. Множеством значений x, при которых не определено данное в условии выражение, является решение совокупности $\left[\begin{array}{l} 4x^2-11x-3<0, \\ x+1=0, \\ 1-\dfrac{6}{x+1}=0. \end{array}\right.$

$$4x^2-11x-3=0,\ x_{1,2}=\frac{11 \pm \sqrt{121-4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{8}=$$
$$=\frac{11 \pm \sqrt{121+48}}{8}=\frac{11 \pm 13}{8},$$ $x_1=-0{,}25$, $x_2=3$. Таким образом, полученная совокупность записывается в виде
$$\left[\begin{array}{l} (x+0{,}25)(x-3)<0, \\ x=-1, \\ \dfrac{x-5}{x+1}=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \in (-0{,}25; 3), \\ x=-1, \\ x=5; \end{array}\right.$$
$x \in \{-1\} \cup (-0{,}25; 3) \cup \{5\}$.

Ответ: $\{-1\} \cup (-0{,}25; 3) \cup \{5\}$.

208. Умножив третье неравенство системы на 2 и прибавив результат ко второму неравенству, получим $3y>10$, $y>\dfrac{10}{3}$. Поскольку y должно быть целым, то $y \geqslant 4$. Аналогично из 1-го неравенства системы следует условие $y \leqslant 6$. То есть достаточно рассмотреть случаи $y=4, y=5, y=6$.

1) При $y=4$ из неравенства $x+y>5 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x \geqslant 2$. Но тогда $y-2x \leqslant 4-2 \cdot 2=0$, то есть не выполнено второе неравенство системы. Следовательно, решений $(x; y)$ с ординатой $y=4$ не существует.

2) При $y=5$ из неравенства $x+y>5 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x \geqslant 1$. При $x=1$ и $x=2$ неравенство $y-2x>0$ выполнено, то есть точки $(1,5)$, $(2,5)$ являются решениями данной системы. При $x \geqslant 3$ неравенство $y-2x>0$ перестаёт выполняться, решений $(x; y)$ с ординатой $y=5$ и абсциссой $x \geqslant 3$ не существует.

3) Случай $y = 6$ рассматривается аналогично:
$x+y > 5 \Rightarrow x \geqslant 0$, неравенство $y-2x > 0$ выполнено при $x = 0, 1, 2$ и перестаёт выполняться при $x \geqslant 3$. То есть все решения системы с ординатой $y = 6$ — это точки $(0, 6)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$.

Поскольку все возможные случаи были рассмотрены, то других решений, кроме найденных, не существует.

Замечание. Для решения данной задачи можно было воспользоваться графическим методом, а именно, выполнив чертёж, содержащий в одной координатной плоскости прямые $y = 7$, $y-2x = 0$, $x+y = 5$, отметить ту часть плоскости, точки которой удовлетворяют всем трём неравенствам системы (каждое из неравенств задаёт часть плоскости, расположенную по одну сторону от соответствующей прямой). При этом получится ограниченная область (треугольник), и все целочисленные решения (узлы координатной решётки) можно перечислить.

Во всяком случае, геометрические соображения будут полезны для нахождения ограничений на переменные x, y в случае более сложной системы такого типа.

Ответ: $(1, 5)$, $(2, 5)$, $(0, 6)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$.

209. $\begin{cases} y < 1, \\ y > x - 5, \\ y > 3 - 3x. \end{cases}$

Построим графики функций $y = 1$, $y = x-5$, $y = -3x+3$ (см. рис. 143). Решением системы неравенств является внутренняя область $\triangle ABC$. Целочисленные решения отмечены точками. Это $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

Ответ: $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

210. $\begin{cases} \dfrac{6-x}{2} - 4 < \dfrac{2+3x}{5} - 1, \\ x - \dfrac{6-x}{2} < \dfrac{x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 5x - 40 < 4 + 6x - 10, \\ 6x - 18 + 3x < 2x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -11x < 4, \\ 7x < 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{4}{11}, \\ x < \dfrac{18}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{11} < x < 2\dfrac{4}{7}.$

0, 1, 2 —целые числа, удовлетворяющие системе неравенств.

Ответ: $0; 1; 2$.

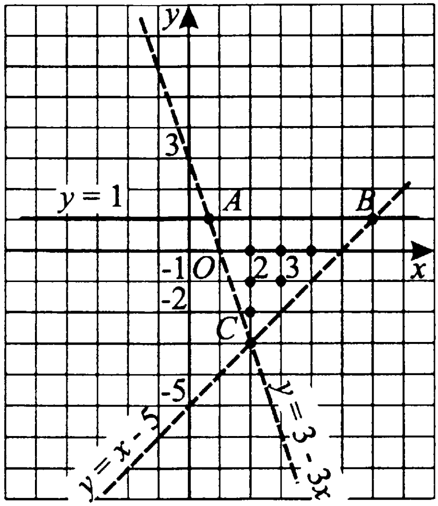


Рис. 143

211. $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{3} - \dfrac{5x-1}{2} \leqslant \dfrac{10-x}{5}, \\ 3 - \dfrac{2x}{3} \geqslant 1 - \dfrac{x}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 60x + 10 - 75x + 15 \leqslant 60 - 6x, \\ 18 - 4x \geqslant 6 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 60x - 75x + 6x \leqslant 60 - 10 - 15, \\ -4x + x \geqslant 6 - 18; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x \leqslant 35, \\ -3x \geqslant -12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{35}{9}, \\ x \leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow -3\dfrac{8}{9} \leqslant x \leqslant 4.$

Целые числа, удовлетворяющие системе неравенств: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

Ответ: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4.

212. $(x^2 - 3x + 2)^4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является, а x_2 является его решением.

Ответ: 2.

213. $(x^2 - 13x + 42)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 42 = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = 7$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является, а x_1 является его решением.

Ответ: 6.

214. $(x^2-16x+63)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2-16x+63=0$; $x_1=7$, $x_2=9$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является, а x_1 является его решением.

Ответ: 7.

215. $(x^2-4x+3)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$; $x_1=1$, $x_2=3$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является, а x_2 является его решением.

Ответ: 3.

216. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению

$$\frac{2}{x^2-2x-1}+2x^2-4x-7=0.$$

Преобразуем уравнение к виду $\dfrac{2}{x^2-2x-1}+2(x^2-2x-1)-5=0$ и сделаем замену $t=x^2-2x-1$, $t\neq 0$. Тогда уравнение примет вид $\dfrac{2}{t}+2t-5=0$; $2t^2-5t+2=0$; $t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=2$.

Если $t=\frac{1}{2}$, то $x^2-2x-1=\frac{1}{2}$; $x_1=1-\frac{1}{2}\sqrt{10}$, $x_2=1+\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

Если $t=2$, то $x^2-2x-1=2$; $x_3=-1$, $x_4=3$.

2) $x^2-2x-3\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -1, \\ x\geqslant 3. \end{array}\right.$

3) Учитывая, что $2<\sqrt{10}<4$, получаем, что $1<\frac{1}{2}\sqrt{10}<2$. Таким образом, $-1<x_1<0$, $2<x_2<3$, следовательно, $x_1=1-\frac{1}{2}\sqrt{10}$, $x_2=1+\frac{1}{2}\sqrt{10}$ не являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы. Очевидно, что $x_3=-1$, $x_4=3$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: -1; 3.

217. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению

$$2x^2-10x+9-\frac{2}{x^2-5x+6}=0.$$

Преобразуем уравнение к виду $2(x^2-5x+6)-\dfrac{2}{x^2-5x+6}-3=0$

и сделаем замену $t = x^2 - 5x + 6$, $t \neq 0$. Тогда уравнение примет вид $2t - \frac{2}{t} - 3 = 0$; $2t^2 - 3t - 2 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 2$.

Если $t = -\frac{1}{2}$, то $x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{2}$, решений нет.

Если $t = 2$, то $x^2 - 5x + 6 = 2$; $x_1 = 1, x_2 = 4$.

2) Решим неравенство $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 5$.

3) Очевидно, что $x_1 = 1$ не является решением второго неравенства, а значит, и решением системы; $x_2 = 4$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 4.

218. $\begin{cases} (x^2+5x)^2 - 12(x^2+5x) + 36 \leqslant 0, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+5x-6)^2 \leqslant 0, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 = 0, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -6, \end{array} \right. \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -6, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

219. $\begin{cases} (x^2+3x-5)^2 - (10x^2+30x-50) + 25 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x-5)^2 - 10(x^2+3x-5) + 25 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x-10)^2 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -5, \end{array} \right. \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

220. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна. Значит, неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда

$(x-2)^2(x^2+2x-1)^2=0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Таким образом, решением первого неравенства системы являются корни уравнений $x-2=0$ и $x^2+2x-1=0$: $x_1=2$, $x_2=-1+\sqrt{2}$, $x_3=-1-\sqrt{2}$. Из них только $x_2=-1+\sqrt{2}$ удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1+\sqrt{2}$.

221. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна, так как $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$. Следовательно, x является решением первого неравенства тогда и только тогда, когда

$$(2x-1)^2(x^2+2x-4)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0, \\ x^2+2x-4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=-1+\sqrt{5}, \\ x=-1-\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Подстановкой убеждаемся, что из чисел 0,5; $-1+\sqrt{5}$; $-1-\sqrt{5}$ лишь последнее удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1-\sqrt{5}$.

222. Проведём следующие преобразования данного неравенства:

$$x^4-4x^3+4x^2\geqslant 4;\ x^2(x^2-4x+4)\geqslant 4;\ x^2(x-2)^2\geqslant 4.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x(x-2)\geqslant 2, \\ x(x-2)\leqslant -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-2\geqslant 0, \\ x^2-2x+2\leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \bigl(x-(1-\sqrt{3})\bigr)\bigl(x-1-\sqrt{3}\bigr)\geqslant 0, \\ (x-1)^2+1\leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 1-\sqrt{3}, \\ x\geqslant 1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\bigl(-\infty;1-\sqrt{3}\bigr]\cup\bigl[1+\sqrt{3};+\infty\bigr)$.

223. Проведём следующие преобразования данного неравенства:

$$x^4-12x^3+36x^2\geqslant 81;\ x^2(x^2-12x+36)\geqslant 81;\ x^2(x-6)^2\geqslant 81.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x(x-6)\geqslant 9, \\ x(x-6)\leqslant -9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x-9\geqslant 0, \\ x^2-6x+9\leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 3-3\sqrt{2}, \\ x\geqslant 3+3\sqrt{2}, \\ (x-3)^2\leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 3-3\sqrt{2}, \\ x\geqslant 3+3\sqrt{2}, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\bigl(-\infty;3-3\sqrt{2}\bigr]\cup\bigl[3+3\sqrt{2};+\infty\bigr)\cup\{3\}$.

224. $(2x^2-x)^2<1 \Leftrightarrow |2x^2-x|<1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x<1, \\ 2x^2-x>-1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1<0, \\ 2x^2-x+1>0; \end{cases} \Leftrightarrow -0{,}5<x<1.$

Ответ: $(-0{,}5;1)$.

225. $|x+1|\geqslant 0$, $|x|\geqslant 0$, поэтому равенство $|x+1|+|x|=0$ невозможно ($|x+1|$ и $|x|$ не обращаются в нуль одновременно). Следовательно, $|x+1|+|x|>0$ при всех x. Умножив обе части исходного неравенства на $|x+1|+|x|$, получим $(|x+1|-|x|)^2(|x+1|+|x|)^2<1$; $\left(|x+1|^2-|x|^2\right)^2<1$; $\left((x+1)^2-x^2\right)^2<1$; $(2x+1)^2<1 \Leftrightarrow |2x+1|<1$; $\begin{cases} 2x+1<1, \\ 2x+1>-1; \end{cases}$

$\begin{cases} x<0, \\ x>-1. \end{cases}$

Ответ: $(-1;0)$.

226. $\begin{cases} \sqrt{x^2+4x+3}\geqslant 0, \\ \sqrt{(x^2-5x+5)^2}\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3\geqslant 0, \\ |x^2-5x+5|\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3\geqslant 0, \\ x^2-5x+5\geqslant -1, \\ x^2-5x+5\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3\geqslant 0, \\ x^2-5x+6\geqslant 0, \\ x^2-5x+4\leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+3)\geqslant 0, \\ (x-2)(x-3)\geqslant 0, \\ (x-1)(x-4)\leqslant 0; \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\leqslant -3, \\ x\geqslant -1, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 3\leqslant x\leqslant 4; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 3\leqslant x\leqslant 4. \end{array} \right.$

Ответ: $[1;2]\cup[3;4]$.

227. $\begin{cases} \sqrt{5x+6-x^2}\geqslant 0, \\ \sqrt{(x^2-8x+11)^2}\leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+6-x^2\geqslant 0, \\ |x^2-8x+11|\leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6\leqslant 0, \\ x^2-8x+11\geqslant -4, \\ x^2-8x+11\leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+1)\leqslant 0, \\ (x-5)(x-3)\geqslant 0, \\ (x-1)(x-7)\leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1\leqslant x\leqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 3, \\ x\geqslant 5, \end{array} \right. \\ 1\leqslant x\leqslant 7; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1\leqslant x\leqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant 3, \\ 5\leqslant x\leqslant 7; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\leqslant x\leqslant 3, \\ 5\leqslant x\leqslant 6. \end{array} \right.$

Ответ: $[1;3]\cup[5;6]$.

228. $\begin{cases} \sqrt{-x^2+3{,}5x+4{,}5} \geqslant 0, \\ \sqrt{(x^2-7x+11)^2} \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2+3{,}5x+4{,}5} \geqslant 0, \\ |x^2-7x+11| \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x-4{,}5)(x+1) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-7x+11 \leqslant -1, \\ x^2-7x+11 \geqslant 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4{,}5)(x+1) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} (x-4)(x-3) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-5) \geqslant 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 4{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant 2, \\ x \geqslant 5; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3 \leqslant x \leqslant 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-1; 2] \cup [3; 4]$.

229. $\begin{cases} \sqrt{-x^2-4{,}5x+5{,}5} \geqslant 0, \\ \sqrt{(x^2+6x+6{,}5)^2} \geqslant 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-4{,}5x+5{,}5 \geqslant 0, \\ |x^2+6x+6{,}5| \geqslant 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+5{,}5)(x-1) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+6x+6{,}5 \leqslant -1{,}5, \\ x^2+6x+6{,}5 \geqslant 1{,}5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5{,}5)(x-1) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} (x+4)(x+2) \leqslant 0, \\ (x+1)(x+5) \geqslant 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5{,}5 \leqslant x \leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} -4 \leqslant x \leqslant -2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -5, \\ x \geqslant -1; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5{,}5 \leqslant x \leqslant -5, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -4 \leqslant x \leqslant -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-5{,}5; -5] \cup [-4; -2] \cup [-1; 1]$.

230. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t = x^2 - 4x - 3$, $t \neq 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 8 + \frac{16}{t^2} \leqslant 0$; $\left(t - \frac{4}{t}\right)^2 \leqslant 0$.

Следовательно, $t - \frac{4}{t} = 0$; $t^2 - 4 = 0$; $t_1 = -2$, $t_2 = 2$.

Если $t = -2$, то $x^2 - 4x - 3 = -2$; $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.
Если $t = 2$, то $x^2 - 4x - 3 = 2$; $x_3 = -1$, $x_4 = 5$.

2) $x^2 - 4x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 5. \end{array}\right.$

3) Учитывая, что $2 < \sqrt{5} < 3$, получаем $-1 < x_1 < x_2 < 5$, следовательно, $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$ не являются решениями системы. Очевидно, что $x_3 = -1$, $x_4 = 5$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: -1; 5.

231. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t = x^2 - 3x + 5$, $t \neq 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 18 + \frac{81}{t^2} \leqslant 0$; $\left(t - \frac{9}{t}\right)^2 \leqslant 0$.

Следовательно, $t - \dfrac{9}{t} = 0$; $t^2 - 9 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = 3$.

Если $t = -3$, то $x^2 - 3x + 5 = -3$; решений нет.
Если $t = 3$, то $x^2 - 3x + 5 = 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

2) $x^2 + x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 1$.

3) Очевидно, что $x_2 = 2$ не является решением второго неравенства, а $x_1 = 1$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 1.

232. 1) При $x^2 - 4 \neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ x^2 + 2x - 15 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0, \\ (x-3)(x+5) \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -5, \\ x \geqslant 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -5, \\ x \geqslant 3. \end{array}\right.$$

2) При $x^2 - 4 = 0$ $x = \pm 2$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{-2; 2\} \cup [3; +\infty)$.

233. 1) При $9 - x^2 \neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x^2 + x - 2 \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(3+x) > 0, \\ (x+2)(x-1) \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3, \\ -2 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 1.$$

2) При $9 - x^2 = 0$ $x = \pm 3$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $[-2; 1] \cup \{-3; 3\}$.

234. $\dfrac{x^2}{16} \leqslant \dfrac{3 - 2x}{3} \Leftrightarrow 3x^2 \leqslant 48 - 32x \Leftrightarrow 3x^2 + 32x - 48 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 12) \leqslant 0 \Leftrightarrow -12 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left[-12; \dfrac{4}{3}\right]$.

235. $\dfrac{x^2}{8} \leqslant \dfrac{2 - x}{3} \Leftrightarrow 3x^2 \leqslant 16 - 8x \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 16 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3(x + 4)\left(x - \frac{4}{3}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left[-4; \dfrac{4}{3}\right]$.

236. $\frac{x^2}{3} \leqslant \frac{5x-3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 \leqslant 15x - 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left(x - \frac{3}{4}\right)(x-3) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 3.$

Ответ: $[0{,}75; 3]$.

237. $\frac{x^2}{3} \geqslant \frac{x+14}{12} \Leftrightarrow 12x^2 \geqslant 3x + 42 \Leftrightarrow 12x^2 - 3x - 42 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 - x - 14 \geqslant 0 \Leftrightarrow 4(x + 1{,}75)(x-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1{,}75, \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; -1{,}75] \cup [2; +\infty)$.

238. Условие, что разность дробей $\frac{58-5x}{3}$ и $\frac{2x+12}{2}$ неотрицательна, означает $\frac{58-5x}{3} - \frac{2x+12}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow 116 - 10x - 6x - 36 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 80 - 16x \geqslant 0 \Leftrightarrow 16x \leqslant 80 \Leftrightarrow x \leqslant 5$. Наибольшее целое значение x, удовлетворяющее исходному условию, равно 5.

Ответ: 5.

239. Условие, что разность дробей $\frac{23-2x}{5}$ и $\frac{3x-11}{4}$ неположительна, означает $\frac{23-2x}{5} - \frac{3x-11}{4} \leqslant 0 \Leftrightarrow 92 - 8x - 15x + 55 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 147 - 23x \leqslant 0 \Leftrightarrow 23x \geqslant 147 \Leftrightarrow x \geqslant 6\frac{9}{23}.$

Наименьшее целое значение x, удовлетворяющее условию, равно 7.

Ответ: 7.

240. Данное выражение определено, когда одновременно определены выражения $\sqrt{-15 + 13x - 2x^2}$ и $\frac{1}{x^2-4}$.

Обозначим $-15 + 13x - 2x^2 = t$. Так как $\sqrt{t}$ имеет смысл при $t \geqslant 0$, то $-15 + 13x - 2x^2 \geqslant 0$; $-2(x - 1{,}5)(x-5) \geqslant 0$; $(x - 1{,}5)(x-5) \leqslant 0$; $x \in [1{,}5; 5]$.

Дробь $\frac{1}{x^2-4}$ определена, если $x^2 - 4 \neq 0$. $x^2 \neq 4$; $x \neq -2$; $x \neq 2$. Следовательно, областью определения исходного выражения являются все значения $x \in [1{,}5; 2) \cup (2; 5]$.

Ответ: $[1{,}5; 2) \cup (2; 5]$.

243. 49,5; 47,7; ... Найти ближайший к нулю положительный член прогрессии.
$a_1 = 49{,}5$, $d = -1,8$.

1) Пусть n — номер искомого члена прогрессии. Тогда
$a_n = a_1 + d(n-1)$; $49{,}5 - 1{,}8 \cdot (n-1) = 0$; $1{,}8 \cdot (n-1) = 49{,}5$; $n - 1 = 27{,}5$; $n = 28{,}5$. Так как $n \in N$, то $n = 28$.

2) $a_{28} = 49{,}5 - 27 \cdot 1{,}8 = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

244. Определим разность прогрессии: $d = -40{,}2 + 41{,}4 = 1{,}2$. Возьмём $a_1 = -41{,}4$. Пусть a_n — наиболее близкий к нулю отрицательный член прогрессии. Тогда $\begin{cases} a_n < 0, \\ a_{n+1} \geqslant 0. \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + d(n-1) < 0, \\ a_1 + dn \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -41{,}4 + 1{,}2n - 1{,}2 < 0, \\ -41{,}4 + 1{,}2n \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1{,}2n < 42{,}6, \\ 1{,}2n \geqslant 41{,}4; \end{cases}$
$\begin{cases} n < 35{,}5, \\ n \geqslant 34{,}5. \end{cases}$

Так как n — натуральное число, то $n = 35$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ находим $a_{35} = -41{,}4 + 1{,}2 \cdot 34 = -0{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$.

245. Определим разность арифметической прогрессии 101,1; 97,2; 93,3;...
$d = 97{,}2 - 101{,}1 = -3{,}9$. Возьмём $a_1 = 101{,}1$.
Пусть a_n — наиболее близкий к нулю отрицательный член прогрессии, тогда, если $a_{n-1} \geqslant 0$, то $a_n < 0$ (учитывая, что арифметическая прогрессия убывающая).
$a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_n = 101{,}1 + 3{,}9 - 3{,}9n = 105 - 3{,}9n$;
$a_{n-1} = a_1 + d(n-2)$; $a_{n-1} = 101{,}1 + 7{,}8 - 3{,}9n = 108{,}9 - 3{,}9n$.
Решим систему неравенств

$$\begin{cases} a_n < 0, \\ a_{n-1} \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105 - 3{,}9n < 0, \\ 108{,}9 - 3{,}9n \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3{,}9n > 105, \\ 3{,}9n \leqslant 108{,}9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 26\dfrac{12}{13}, \\ n \leqslant 27\dfrac{12}{13}. \end{cases}$$

Так как n — натуральное число, то $n = 27$.
$a_{27} = 105 - 3{,}9 \cdot 27 = 105 - 105{,}3 = -0{,}3$.

Ответ: $-0{,}3$.

246. Высо́ты, на которые поднимался турист каждый час, образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 580, и разностью -40. Пусть n — количество часов, через которое он достигнет высоты 2500 м, тогда по формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии получаем $\frac{(2 \cdot 580 - 40(n-1))n}{2} = 2500$. В результате получаем квадратное уравнение $20n^2 - 600n + 2500 = 0$. Решаем уравнение и находим корни $n = 5$ и $n = 25$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как $a_{25} = 580 - 40 \cdot 24 < 0$.

Замечание. Отметим, что эту задачу можно легко решить прикидкой.

Ответ: 5 ч.

247. По условию имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 0{,}75$; $d = 0{,}5$. Пусть n — количество выстрелов, при которых произошло попадание в мишень. Так как стрелок набрал 99,75 баллов, то

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = 99{,}75$; $\frac{2 \cdot 0{,}75 + 0{,}5(n-1)}{2} = 99{,}75$;

$n^2 + 2n - 399 = 0$; $n_1 = 19, n_2 = -21$.

Второй корень очевидно не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, 19 выстрелов увенчались попаданиями. Так как всего было произведено 30 выстрелов, то неудачными оказались $30 - 19 = 11$ из них.

Ответ: 11.

248. По условию $a_n = 6n$, $a_n \leqslant 170$, следовательно, $6n \leqslant 170$; $n \leqslant \frac{170}{6}$;

$n \leqslant 28\frac{1}{3}$.

Найдём сумму натуральных чисел, которые делятся на 6:

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где $a_1 = 6$; $a_{28} = 6 \cdot 28$, $n = 28$.

$$S_{28} = \frac{6 + 6 \cdot 28}{2} \cdot 28 = (3 + 3 \cdot 28) \cdot 28 = 2436.$$

Ответ: 2436.

250. Из условия следует, что за 1 мин скорость увеличивается на 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Следовательно, получаем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 40 + 15 = 55$, $d = 15$. Тогда $a_7 = a_1 + 6d = 55 + 6 \cdot 15 = 145$.

Ответ: 145 км/ч.

251. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 5$, $d = 2$. Найдём n, при котором $S_n = 140$.

$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; $\dfrac{10 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 140$; $n(4+n) = 140$;

$n^2 + 4n - 140 = 0$; $n_1 = 10$, $n_2 = -14$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, следовательно, $n = 10$.

Ответ: 10 дней.

252. Согласно условию, имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 7$, $d = 7$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 370$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $7 + 7(n-1) \leqslant 370$; $7n \leqslant 370$; $n \leqslant \dfrac{370}{7}$; $n \leqslant 52\dfrac{6}{7}$. Так как $n \in N$, то $n = 52$. Тогда сумма искомых чисел

$S_{52} = \dfrac{2a_1 + d(52-1)}{2} \cdot 52 = (2\cdot 7 + 7\cdot 51)\cdot 26 = (14 + 357)\cdot 26 = 371 \cdot 26 = 9646$.

Ответ: 9646.

253. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 9$, $d = 9$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 400$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $9 + 9(n-1) \leqslant 400$; $9n \leqslant 400$; $n \leqslant \dfrac{400}{9}$; $n \leqslant 44\dfrac{4}{9}$. Так как $n \in N$, то $n = 44$. Следовательно, сумма искомых чисел

$S_{44} = \dfrac{2a_1 + d(44-1)}{2} \cdot 44 = (2 \cdot 9 + 9 \cdot 43) \cdot 22 = 9 \cdot 45 \cdot 22 = 8910$.

Ответ: 8910.

254. Числа, делящиеся на 2 и 3, то есть на 6, это 6; 12; 18; 24; ...
Имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 6$; $d = 6$.

Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 170$.

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $6 + 6n - 6 \leqslant 170$; $n \leqslant 28\dfrac{1}{3}$. Так как $n \in N$, то $n = 28$. Тогда сумма искомых чисел

$S_{28} = \dfrac{2a_1 + d(28-1)}{2} \cdot 28 = (2 \cdot 6 + 6 \cdot 27) \cdot 14 = 2436$.

Ответ: 2436.

255. Найдём сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, и вычтем из неё сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые делятся на 7. Так как все натуральные числа от 1 по 160 представляют собой арифметическую прогрессию с разностью 1, то сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 160, равна

$S_1 = \dfrac{1 + 160}{2} \cdot 160 = 12880$. Натуральные числа, делящиеся на 7, образуют арифметическую прогрессию с разностью 7. Первый член этой прогрессии равен 7, а последний, не превосходящий 160, равен 154. Таким образом, среди первых 160 натуральных чисел $\frac{154}{7} = 22$ числа, делящихся на 7. Поэтому сумма таких чисел равна

$S_2 = \frac{7+154}{2} \cdot 22 = 161 \cdot 11 = 1771$. Искомая сумма равна

$S_1 - S_2 = 12880 - 1771 = 11109$.

Ответ: 11109.

256. Определим разность прогрессии: $d = 78{,}3 - 84{,}1 = -5{,}8$. По условию $a_1 = 84{,}1$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n > 0$:
$a_n = a_1 + d(n-1)$; $84{,}1 - 5{,}8(n-1) > 0$; $84{,}1 - 5{,}8n + 5{,}8 > 0$; $5{,}8n < 89{,}9$; $n < 15{,}5$. Следовательно, искомое количество равно 15.

Ответ: 15.

257. Пусть a — первое из чисел, образующих данную арифметическую прогрессию. Тогда $a + d$, $a + 2d$ — второе и третье из этих чисел. По условию, числа a^2, $(a+d)^2$, $(a+2d)^2$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, знаменатель этой прогрессии $q = \frac{(a+d)^2}{a^2} = \frac{(a+2d)^2}{(a+d)^2}$;
$\left((a+d)^2\right)^2 = a^2(a+2d)^2$; $(a+d)^2 = |a \cdot (a+2d)|$. Учитывая, что $a > 0$, $a + 2d > 0$, имеем
$a^2 + 2ad + d^2 = a(a+2d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2ad$; $d^2 = 0$; $d = 0$.

Ответ: 0.

258. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 27$. Так как $a_1 - 1$; $a_2 - 3$, $a_3 - 2$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 3)^2 = (a_1 - 1)(a_3 - 2)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда числа $a_2 = a_1 + d$ и $a_3 = a_1 + 2d$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27, \\ (a_1 + d - 3)^2 = (a_1 - 1) \cdot (a_1 + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ (9 - d + d - 3)^2 = (8 - d)(9 - d + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 9-d, \\ 36 = (8-d)(d+7); \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 9-d, \\ d^2-d-20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 9-d, \\ \left[\begin{array}{l} d=-4, \\ d=5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 13, \\ d=-4, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 4, \\ d=5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 13, 9, 5 и 2) 4, 9, 14.

Ответ: $\{4,9,14\}$; $\{13,9,5\}$.

259. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1+a_2+a_3 = 12$. Так как a_1+1; a_2+2; a_3+11 — геометрическая прогрессия, то её знаменатель $q = \dfrac{a_2+2}{a_1+1} = \dfrac{a_3+11}{a_2+2}$; $(a_2+2)^2 = (a_1+1)(a_3+11)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1+d$, $a_3 = a_1+2d$. Значения d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d = 12, \\ (a_1+d+2)^2 = (a_1+1)\cdot(a_1+2d+11); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 4-d, \\ (4-d+d+2)^2 = (4-d+1)(4-d+2d+11); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 4-d, \\ 36 = (5-d)(15+d); \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 4-d, \\ d^2+10d-39 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 4-d, \\ \left[\begin{array}{l} d=-13, \\ d=3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 17, \\ d=-13, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 1, \\ d=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 17, 4, -9 и 2) 1, 4, 7.

Ответ: $\{1,4,7\}$; $\{17,4,-9\}$.

260. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1+a_2+a_3 = 15$. Так как a_1+1, a_2+1, a_3+4 — геометрическая прогрессия, то $(a_2+1)^2 = (a_1+1)(a_3+4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1+d$, $a_3 = a_1+2d$. Значения a_1 и d найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d = 15, \\ (a_1+d+1)^2 = (a_1+1)(a_1+2d+4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = 5-d, \\ (5-d+d+1)^2 = (5-d+1)(5-d+2d+4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ 36 = (6-d)(9+d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ d^2 + 3d - 18 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -6, \\ d = 3; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 11, \\ d = -6, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) $11, 5, -1$ и 2) $2, 5, 8$.

Ответ: $\{11, 5, -1\}$ и $\{2, 5, 8\}$.

261. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 30$. Так как a_1, $a_2 - 4$, $a_3 - 5$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 4)^2 = a_1(a_3 - 5)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения d и a_1 найдём из системы

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 30, \\ (a_1 + d - 4)^2 = a_1(a_1 + 2d - 5); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ (10 - d + d - 4)^2 = (10-d)(10 - d + 2d - 5); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ 36 = (10-d)(d+5); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ d^2 - 5d - 14 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -2, \\ d = 7; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 7. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) $3, 10, 17$ и 2) $12, 10, 8$.

Ответ: $\{3, 10, 17\}$ и $\{12, 10, 8\}$.

262. Пусть a_1, a_2, a_3 – члены данной арифметической прогрессии, d – её разность, b – первый член геометрической прогрессии. Так как по условию знаменатель геометрической прогрессии совпадает с её первым членом, то она имеет вид b, b^2, b^3.

Из условия имеем $a_1 = b$, $a_2 = b^2 + 1$, $a_3 = b^3$. Поскольку $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$; $a_1 + a_3 = 2a_2$, то $b + b^3 = 2(b^2 + 1)$; $b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0$; $(b-2)(b^2+1) = 0$; $b = 2$. Итак, $b = 2$, $a_1 = b = 2$, $a_2 = b^2 + 1 = 5$. Следовательно, $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$.

Ответ: 3.

263. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии, b — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда согласно условию числа a_1, $a_2 - 1{,}5$, a_3 образуют геометрическую прогрессию, и $a_1 = 1{,}5b$; $a_2 = 1{,}5b^2 + 1{,}5$; $a_3 = 1{,}5b^3$. По свойству арифметической прогрессии $2a_2 = a_1 + a_3$, то есть $2(1{,}5b^2 + 1{,}5) = 1{,}5b^3 + 1{,}5b$; $b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0$; $(b-2)\left(b^2+1\right) = 0$; $b = 2$. Итак, $a_1 = 1{,}5b = 3$; $a_2 = 1{,}5b^2 + 1{,}5 = 7{,}5$; $d = a_2 - a_1 = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

264. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_5$ — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда $a_1 = b$; $a_2 = bq$; $a_5 = bq^2$. Так как $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_5 - a_1 = 4(a_2 - a_1)$, то есть $bq^2 - b = 4(bq - b)$, $b(q-1)(q+1) = 4b(q-1)$; $b(q-1)(q-3) = 0$. Заметим, что $b \neq 0$; $q \neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q = 3$. Итак, $a_1 = b$; $a_2 = bq = 3b = 3a_1$; $d = a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1$; $a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 6a_1 = 7a_1$; $\dfrac{a_4}{a_1} = \dfrac{7a_1}{a_1} = 7$.

Ответ: 7.

265. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда $a_1 = b$; $a_2 = bq$; $a_7 = bq^2$. Так как $a_2 = a_1 + d$; $a_7 = a_1 + 6d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_7 - a_1 = 6(a_2 - a_1)$, то есть $bq^2 - b = 6(bq - b)$; $b(q-1)(q+1) = 6b(q-1)$; $b(q-1)(q-5) = 0$. Заметим, что $b \neq 0$, $q \neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q = 5$. Итак, $q = 5$; $a_2 = bq = 5b = 5a_1$; $d = a_2 - a_1 = 5a_1 - a_1 = 4a_1$; $a_5 = a_1 + 4d = a_1 + 16a_1 = 17a_1$; $\dfrac{a_5}{a_1} = \dfrac{17a_1}{a_1} = 17$.

Ответ: 17.

266. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3 = 2d + a_1$; $a_6 = 5d + a_1$. Так как по условию $a_3 = 7$; $a_6 = 13$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d + a_1 = 7, \\ 5d + a_1 = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3d = 6, \\ a_1 = 7 - 2d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Тогда $a_8 = 7d + a_1 = 7 \cdot 2 + 3 = 17$, что соответствует условию. Следовательно, указанная в условии прогрессия существует.

Ответ: да.

267. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_4 = 3d + a_1$; $a_9 = 8d + a_1$. Так как по условию $a_4 = 8$; $a_9 = -7$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 3d + a_1 = 8, \\ 8d + a_1 = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = -15, \\ a_1 = 8 - 3d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3, \\ a_1 = 17. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{12} = 11d + a_1 = 11 \cdot (-3) + 17 = -16$. По условию $a_{12} = -17$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

268. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3 = 2d + a_1$; $a_8 = 7d + a_1$. Так как по условию $a_3 = -5$; $a_8 = 5$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d + a_1 = -5, \\ 7d + a_1 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = 10, \\ a_1 = 5 - 7d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = -9. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{11} = 10d + a_1 = 10 \cdot 2 - 9 = 11$. По условию $a_{11} = 12$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

269. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 24$. Так как a_1, $a_2 - 2$, $a_3 + 4$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2-2)^2 = a_1(a_3+4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24, \\ (a_1 + d - 2)^2 = a_1(a_1 + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ (8 - d + d - 2)^2 = (8 - d)(8 - d + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ 36 = (8 - d)(12 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ d^2 + 4d - 60 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -10, \\ d = 6; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 18, \\ d = -10, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как по условию $a_1 > 3$, то искомые числа: 18, 8, -2.

Ответ: $18; 8; -2$.

270. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 18$. Так как $a_1 + 2$, a_2, $a_3 + 1$ — геометрическая прогрессия, то $a_2^2 = (a_1+2)(a_3+1)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 18, \\ (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2)(a_1 + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ (6 - d + d)^2 = (6 - d + 2)(6 - d + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ 36 = (8-d)(7+d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ d^2 - d - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -4, \\ d = 5; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 10, \\ d = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как по условию $a_3 < 3$, то искомые числа: 10; 6; 2.

Ответ: 10; 6; 2.

271. Предположим, что числа $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{8}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{8}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d > 0$), либо в обратном порядке (при $d < 0$). Ограничимся первым случаем (второй аналогичен).

Не нарушая общности, можем считать, что $a_1 = \sqrt{3}$; $a_n = 2$; $a_m = \sqrt{8}$ $(n, m \in N;\ n < m;\ n, m \neq 1)$.

Тогда $2 = a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{3} + (n-1)d$; $d = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{n-1}$;

$\sqrt{8} = a_m = a_1 + (m-1)d = \sqrt{3} + (m-1)d$; $d = \dfrac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{m-1}$.

Следовательно,

$$\frac{2-\sqrt{3}}{n-1} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{m-1} \Leftrightarrow \frac{m-1}{n-1} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3.$$

Так как $m, n \in N$; $m, n > 1$, то дробь $\dfrac{m-1}{n-1} \in Q$, и, значит, число $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 \in Q$. Покажем, что это неверно.

Если $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 \in Q$, то $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 = \dfrac{p_1}{q_1}$, где $p_1 \in Z$, $q_1 \in N$. Следовательно, $2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1}{q_1} + 3\right) \in Q$.

Обозначим $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1}{q_1} + 3\right) = \dfrac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$. Тогда $2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} = \dfrac{p}{q}$;

$2\sqrt{2} + \sqrt{6} = \dfrac{p}{q} + \sqrt{3}$; $\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{q} + \sqrt{3}\right)^2$; $8 + 4\sqrt{12} + 6 =$

$= \frac{p^2}{q^2} + 2\frac{p}{q} \cdot \sqrt{3} + 3$; $8\sqrt{3} + 11 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p}{q}\sqrt{3}$; $\sqrt{3}\left(8 - \frac{2p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2} - 11$;

$\sqrt{3} = \dfrac{\frac{p^2}{q^2} - 11}{8 - \frac{2p}{q}} \in Q$. Пусть $\sqrt{3} = \frac{r}{t}$, $r \in Z$, $t \in N$ и $\frac{r}{t}$ — несократимая дробь, тогда $\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{r}{t}\right)^2$; $3t^2 = r^2$. Следовательно, $r^2 \vdots 3 \Rightarrow r \vdots 3 \Rightarrow r^2 \vdots 9 \Rightarrow t^2 \vdots 3 \Rightarrow t \vdots 3 \Rightarrow \frac{r}{t}$ — сократимая дробь. Пришли к противоречию.

Следовательно, число $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 \notin Q$, а значит, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

272. Предположим, что числа $\sqrt{2}$, 3, $\sqrt{12}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{2} < 3 < \sqrt{12}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d > 0$), либо в обратном порядке (при $d < 0$). Не нарушая общности, можем считать, что $a_1 = \sqrt{2}$; $a_n = 3$; $a_m = \sqrt{12}$ $(n, m \in N;\ n < m;\ n,\ m \neq 1)$. Тогда

$3 = a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{2} + (n-1)d$; $d = \dfrac{3-\sqrt{2}}{n-1}$.

$\sqrt{12} = a_m = a_1 + (m-1)d = \sqrt{2} + (m-1)d$; $d = \dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{m-1}$.

Следовательно,

$$\frac{3-\sqrt{2}}{n-1} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{m-1} \Leftrightarrow \frac{m-1}{n-1} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{12}-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)} =$$
$$= \frac{3\sqrt{12} - 3\sqrt{2} + \sqrt{12\cdot 2} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{9 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 2}{7}.$$

Так как $m, n \in N$; $m, n > 1$, то дробь $\dfrac{m-1}{n-1} \in Q$, значит, число $\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 2}{7} \in Q$. Однако это неверно (докажите самостоятельно). Следовательно, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

273. Пусть a_n $(n \in N)$ — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 7, \\ a_1 + 4d = 13. \end{cases}$$
Отсюда $d = 3$, $a_1 = 1$. Следовательно, $a_2 = 4$; $a_6 = 16$. Легко увидеть, что числа 1, 4 и 16 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 4$.

Ответ: да.

274. Пусть a_n $(n \in N)$ — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений:
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 8, \\ a_1 + 7d = 33. \end{cases}$$

Отсюда $5d = 25$; $d = 5$; $a_1 = -2$. Следовательно, $a_2 = 3$; $a_4 = 13$; $a_6 = 23$. Предположим, что эти числа образуют геометрическую прогрессию. Обозначим $b_1 = a_3 = 3$; $b_2 = a_4 = 13$; $b_3 = a_6 = 23$ — члены этой прогрессии. Тогда должно выполняться равенство $\dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{b_2}{b_1}$. Однако $\dfrac{23}{13} \neq \dfrac{13}{3}$. Следовательно, предположение о том, что второй, четвёртый и шестой члены заданной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию, неверно.

Ответ: нет.

275. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_6$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_2 + a_4 + a_6 = 18$; $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = 120$. Тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_6 = a_1 + 5d$. Значение чисел a_1 и d найдём из системы уравнений
$$\begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 18, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d)(a_1 + 5d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (6 - 3d + d)(6 - 3d + 3d)(6 - 3d + 5d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (6 - 2d)(6 + 2d) = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ 36 - 4d^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ \left[\begin{array}{l} d = 2, \\ d = -2. \end{array}\right. \end{cases}$$
Следовательно, $a_1 = 0$ или $a_1 = 12$.

Ответ: 0; 12.

276. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — члены заданной арифметической прогрессии. По условию $a_1 = -8$, $a_2 = -5$. Следовательно, разность этой прогрессии $d = a_2 - a_1 = -5 + 8 = 3$.

Пусть найдётся такое натуральное число n, что $a_n = 4$ есть n-й член данной прогрессии. Так как $a_n = (n-1)d + a_1$, то должно выполняться $4 = (n-1)\cdot 3 - 8$; $(n-1)\cdot 3 = 12$; $n-1=4$; $n=5$. Следовательно, число 4 является пятым членом заданной прогрессии.

Ответ: да.

277. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $3\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) = a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$.
Пусть d — разность данной прогрессии, тогда
$3(a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d) = a_1+5d+a_1+6d+a_1+7d+a_1+8d+$ $+a_1+9d$; $3(5a_1+10d) = 35d+5a_1$; $d=2a_1$. Так как по условию $a_7=26$, то $a_1+6d = 6(2a_1)+a_1 = 13a_1 = 26$; $a_1=2$; $d=2a_1=4$.
Следовательно, $a_3 = 2d+a_1 = 2\cdot 4+2 = 10$.

Ответ: 10.

278. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $2(a_1+a_2+a_3+a_4) = a_5+a_6+a_7$.
Пусть d — разность данной прогрессии, тогда
$2(a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1) = 4d+a_1+5d+a_1+6d+a_1$; $2(6d+4a_1) =$
$= 15d+3a_1$; $d = \frac{5}{3}a_1$. Так как по условию $a_8 = 38$, то $7d+a_1 =$

$= 7\cdot\frac{5}{3}a_1 + a_1 = \frac{38}{3}a_1 = 38$; $a_1 = 3$; $d = \frac{5}{3}a_1 = 5$.
Следовательно, $a_2 = d+a_1 = 5+3 = 8$.

Ответ: 8.

279. Для решения задачи найдём сумму натуральных чисел от 100 до 150 включительно, затем сумму чисел в этом же диапазоне, делящихся на 6. Затем из первой суммы вычтем вторую.

Натуральные числа из диапазона от 100 до 150 включительно представляют собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 100$; $d=1$. Число членов этой прогрессии равно $150-100+1 = 51$. Сумма первых 51 членов этой прогрессии $S_1 = \dfrac{(100+150)\cdot 51}{2} = 6375$.

Натуральные числа из диапазона от 100 до 150 включительно, которые делятся на 6, представляют собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 102$; $d=6$, $a_n = 150$. Определим число членов этой прогрессии: $n-1 = \dfrac{150-102}{6} = 8$; $n=9$. Сумма первых 9 членов рассматриваемой прогрессии $S_2 = \dfrac{(102+150)\cdot 9}{2} = 1134$. Разность сумм прогрессий равна $6375 - 1134 = 5241$.

Ответ: 5241.

282. Это задача на арифметическую прогрессию. По условию число отжиманий в первый день $a_1 = 10$, разность прогрессии $d = 2$. Наша задача найти сумму членов этой прогрессии с 19-го по 31-й, то есть $S_{31} - S_{18}$. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. Имеем

$$S_{31} = \frac{(2\cdot 10 + 2(31-1))\cdot 31}{2} = 1240; \; S_{18} = \frac{(20+2\cdot 17)\cdot 18}{2} = 486.$$

Искомая величина $S_{31} - S_{18} = 1240 - 486 = 754$.

Ответ: 754.

283. Это задача на арифметическую прогрессию. По условию количество единиц продукции, произведённой в первом году, $a_1 = 50$, разность прогрессии $d = 15$. Необходимо найти сумму членов прогрессии с 8-го по 20-й включительно, то есть $S_{20} - S_7$. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. Имеем $S_{20} = \dfrac{(2\cdot 50 + 15(20-1))\cdot 20}{2} = 3850$;

$$S_7 = \frac{(2\cdot 50 + 15\cdot 6)\cdot 7}{2} = 665.$$

Искомая величина $S_{20} - S_7 = 3850 - 665 = 3185$.

Ответ: 3185.

284. По условию имеем арифметическую прогрессию $a_n = 3n + 2$; $a_1 = 5$, $d = 3$.

Составим новую арифметическую прогрессию из членов прогрессии a_n с нечётными номерами. Для новой прогрессии получим: $b_1 = a_1 = 5$, $d_b = 6$. Сумма членов исходной прогрессии с нечётными номерами, меньшими 50, равна сумме первых 25 членов полученной прогрессии.

Сумма 25 членов новой прогрессии

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25})\cdot 25}{2} = \frac{(5+5+6\cdot 24)\cdot 25}{2} = 1925.$$

Ответ: 1925.

286. Пусть a_1 — количество сантиметров, которое проползла гусеница за первую минуту, a_2 — за вторую и т. д. Тогда числа $a_1, a_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 39$ и $d = -2$.

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ — количество сантиметров, которое проползла гусеница за первые n минут. Требуется найти число n, при котором

$S_n = 400$ см. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. Получим $400 = \dfrac{(2\cdot 39 - 2(n-1))n}{2}$; $n^2 - 40n + 400 = 0$;
$(n-20)^2 = 0$; $n = 20$.

Ответ: 20.

287. Пусть a_1 — количество очков, которое начислили стрелку за первое попадание, a_2 — за второе и т. д. Числа $a_1, a_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 4$ и $d = 2$. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ — количество начисленных очков за n попаданий. По условию $S_n = 180$, $n \leqslant 20$. Требуется найти $20 - n$.

Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. Получим

$180 = \dfrac{(2\cdot 4 + 2(n-1))n}{2}$; $n^2 + 3n - 180 = 0$; $n_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 27}{2}$, $n \in N$, $n = 12$; $20 - n = 20 - 12 = 8$.

Ответ: 8.

288. Запишем сначала сумму первых 17 членов нашей арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью $3d$:

$$S_{17} = \frac{(2a_1 + 3d(17-1))\cdot 17}{2} = 17\cdot(a_1 + 24d) = 17a_1 + 408d.$$

Затем запишем сумму первых 23 членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d:

$$S_{23} = \frac{(2a_1 + d(23-1))\cdot 23}{2} = 23\cdot(a_1 + 11d) = 23a_1 + 253d.$$

Запишем сумму первых 6 членов:

$$S_6 = \frac{(2a_1 + d(6-1))\cdot 6}{2} = 6\cdot\left(a_1 + \frac{5}{2}d\right) = 6a_1 + 15d.$$

Запишем их разность, то есть сумму членов с 7 по 23:
$S_{7-23} = S_{23} - S_6 = 17a_1 + 238d$.

По условию задачи $S_{17} - S_{7-23} = 153$. То есть $17a_1 + 408d - 17a_1 - 238d = 153$; $170d = 153$; $d = \dfrac{153}{170} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

289. Пусть S — искомая сумма, S_1 — сумма всех чётных натуральных чисел, которые не превосходят 241, S_2 — сумма всех чётных натуральных чисел, которые делятся на 10 и не превосходят 241, тогда $S = S_1 - S_2$.

Найдём S_1: $S_1 = \dfrac{2+240}{2}\cdot 120 = 14520$. Последовательность чисел, кратных 10 и не превосходящих 241, представляет арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 10$, $a_n = 240$. Найдём число членов этой прогрессии. Так как она задаётся формулой $a_n = 10n$, то $10n = 240$, $n = 24$.

Итак, $S_2 = \dfrac{10+240}{2}\cdot 24 = 3000$.

Получаем $S = 14520 - 3000 = 11520$.

Ответ: 11520.

290. Найдём количество натуральных чисел, не превосходящих 130, которые делятся на 17: $\dfrac{130}{17} = 7{,}64$. Значит, таких чисел 7. Нечётными из них будут $17\cdot 1$, $17\cdot 3$, $17\cdot 5$, $17\cdot 7$, то есть 4 числа. Найдём их сумму: $17\cdot(1+3+5+7) = 17\cdot 16 = 272$.

Найдём количество нечётных чисел, не превосходящих 130: $\dfrac{130}{2} = 65$. Это числа $1, 3, 5, \ldots, 129$. Найдём их сумму: $S = \dfrac{(2+2\cdot(65-1))\cdot 65}{2} = 65^2 = 4225$.

Осталось отнять сумму тех нечётных чисел, которые делятся на 17: $4225 - 272 = 3953$.

Ответ: 3953.

292. После вычёркивания всех членов последовательности $b_n = 16\cdot(-0{,}5)^n$, имеющих чётные номера, получилась бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $b_{2n-1} = 16(-0{,}5)^{2n-1}$. Её знаменатель $q = \dfrac{b_{2(n+1)-1}}{b_{2n-1}} = \dfrac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}} = \dfrac{16(-0{,}5)^{2n+1}}{16(-0{,}5)^{2n-1}} = (-0{,}5)^2 = \dfrac{1}{4}$,

а сумма $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{16(-0{,}5)}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{-8}{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{-32}{3} = -10\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $-10\dfrac{2}{3}$.

293. $\begin{cases} b_1+b_3+b_4=279, \\ b_3+b_5+b_6=31, \\ q>0; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1+b_1\cdot q^2+b_1\cdot q^3=279, \\ b_1\cdot q^2+b_1\cdot q^4+b_1\cdot q^5=31, \\ q>0; \end{cases}$

$\begin{cases} b_1\cdot\left(1+q^2+q^3\right)=279, \\ b_1\cdot q^2\left(1+q^2+q^3\right)=31, \\ q>0; \end{cases}$ $\begin{cases} q^2=\dfrac{1}{9}, \\ q>0; \end{cases}$ $q=\dfrac{1}{3}$.

$b_1=\dfrac{279}{1+q^2+q^3}$, $b_1=\dfrac{279\cdot 27}{31}$, $b_1=3^5$. $b_8=b_1\cdot q^7$, $b_8=3^5\cdot\dfrac{1}{3^7}=\dfrac{1}{9}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

294. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_6$ — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_1+b_2+b_3=9$; $b_4+b_5+b_6=-72$.
Найдём b_1 и q из системы уравнений

$$\begin{cases} b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=9, \\ b_1\cdot q^3+b_1\cdot q^4+b_1\cdot q^5=-72; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\cdot(1+q+q^2)=9, \\ b_1\cdot q^3\cdot(1+q+q^2)=-72; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1=\dfrac{9}{1+q+q^2}, \\ q^3=-8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=3, \\ q=-2. \end{cases}$$

Следовательно, $b_8=b_1\cdot q^7=3\cdot(-2)^7=3\cdot(-128)=-384$.

Ответ: -384.

295. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_5$ — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_3=b_2+6$, $b_5=b_3+36$, $q>1$.

Найдём значения b_1 и q из системы

$$\begin{cases} b_1\cdot q^2=b_1\cdot q+6, \\ b_1\cdot q^4=b_1\cdot q^2+36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\cdot q\cdot(q-1)=6, \\ b_1\cdot q^2\cdot\left(q^2-1\right)=36. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое ($q\neq 0$, $b_1\neq 0$, $q\neq\pm 1$), получим $q\cdot(q+1)=6$, $q^2+q-6=0$, $q_1=2$, $q_2=-3$ — не удовлетворяет условию $q>1$. Таким образом, $q=2$.
$b_1q(q-1)=6$; $2b_1=6$; $b_1=3$.

$$S_{10}=\frac{b_1\cdot\left(q^{10}-1\right)}{q-1}=\frac{3\cdot\left(2^{10}-1\right)}{2-1}=3\cdot 1023=3069.$$

Ответ: 3069.

296. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_9$ — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_5=b_3+8$; $b_9=b_3+728$.
Найдём значения b_1 и q из системы уравнений

$$\begin{cases} b_1\cdot q^4=b_1\cdot q^2+8, \\ b_1\cdot q^8=b_1\cdot q^2+728; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\cdot q^2\cdot\left(q^2-1\right)=8, \\ b_1\cdot q^2\cdot\left(q^6-1\right)=728; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{8}{q^2\left(q^2-1\right)}, \\ \dfrac{q^6-1}{q^2-1} = 91; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{8}{q^2\left(q^2-1\right)}, \\ \dfrac{\left(q^2-1\right)\left(q^4+q^2+1\right)}{q^2-1} = 91; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{8}{q^2\left(q^2-1\right)}, \\ q \neq \pm 1, \\ q^4+q^2-90=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{9}, \\ \left[\begin{array}{l} q=3, \\ q=-3. \end{array} \right. \end{cases}$$

Следовательно, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \dfrac{1}{9} \cdot 3^6 = 3^4 = 81.$

Ответ: 81.

297. Так как по условию x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 12x + a = 0$, то по теореме, обратной теореме Виета, имеем
$x_1 + x_2 = 12, x_1 \cdot x_2 = a.$
Так как по условию x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 3x + b = 0$, то по теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_3 + x_4 = 3, x_3 \cdot x_4 = b.$
Решим систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12, \\ x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$
Учитывая условие, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 положительные и образуют геометрическую прогрессию ($x_1 > 0$; $q > 0$), получим

$$\begin{cases} x_1 + x_1 \cdot q = 12, \\ x_1 \cdot q^2 + x_1 \cdot q^3 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot (1+q) = 12, \\ x_1 \cdot q^2 \cdot (1+q) = 3. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое, получим
$q^2 = \dfrac{1}{4}$, $q_1 = \dfrac{1}{2}$, $q_2 = -\dfrac{1}{2}$ — не удовлетворяет условию $q > 0$, значит,
$q = \dfrac{1}{2}$, тогда из 1-го уравнения системы получим

$$x_1 = \frac{12}{1+\frac{1}{2}} = 8, x_2 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, a = x_1 \cdot x_2 = 8 \cdot 4 = 32,$$

$$b = x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot q^2 \cdot x_1 \cdot q^3 = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} = 2.$$

Ответ: $a = 32$, $b = 2$.

298. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии $x, 2qx, 3q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x+b=2qx, \\ x+2b=3q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=(2q-1)x, \\ b=\frac{1}{2}\cdot(3q^2-1)x; \end{cases} \Rightarrow 2q-1=\frac{1}{2}\cdot(3q^2-1);$$

$3q^2-4q+1=0$; $q_1=\frac{1}{3}$, $q_2=1$. Поскольку заданная геометрическая прогрессия убывает, то $0<q<1 \Rightarrow q=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

299. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x\neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии x, $5qx$, $2q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x+b=5qx, \\ x+2b=2q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=(5q-1)x, \\ b=\frac{1}{2}\cdot(2q^2-1)x; \end{cases} \Rightarrow 5q-1=\frac{1}{2}\cdot(2q^2-1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2q^2-10q+1=0 \Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{23}}{2}$. Поскольку заданная геометрическая прогрессия убывает, то $0<q<1$ — этому условию удовлетворяет лишь значение $q=\frac{5-\sqrt{23}}{2}$.

Ответ: $\frac{5-\sqrt{23}}{2}$.

300. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x\neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии x, qx, $\frac{q^2x}{3}$. Тогда

$$\begin{cases} x+b=qx, \\ x+2b=\frac{q^2x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=(q-1)x, \\ b=\left(\frac{q^2}{6}-\frac{1}{2}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q-1=\frac{q^2}{6}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow q^2-6q+3=0 \Rightarrow q_{1,2}=3\pm\sqrt{6}$.

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q>1 \Rightarrow q=3+\sqrt{6}$.

Ответ: $3+\sqrt{6}$.

301. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x\neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии $\frac{x}{3}$, qx, $\frac{q^2x}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + b = qx, \\ \dfrac{x}{3} + 2b = \dfrac{q^2x}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \left(q - \dfrac{1}{3}\right)x, \\ b = \left(\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{1}{6}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q - \dfrac{1}{3} = \dfrac{q^2}{4} - \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3q^2 - 12q + 2 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q > 1 \Rightarrow q = 2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Ответ: $2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$.

302. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x + y + z = 18$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x + z = 2y$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1$, $y + 2$, $z + 7$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, $(x + 1)(z + 7) = (y + 2)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 18, \\ x + z = 2y, \\ (x + 1)(z + 7) = (y + 2)^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y = 18 - 2y$, откуда $y = 6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнение, получим систему

$$\begin{cases} y = 6, \\ x + z = 12, \\ (x + 1)(z + 7) = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ z = 12 - x, \\ (x + 1)(19 - x) = 64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $(x + 1)(19 - x) = 64$, $x^2 - 18x + 45 = 0$, находим $x_1 = 3$, $x_2 = 15$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 12 - 3 = 9$, $z_2 = 12 - 15 = -3$. Итак, имеем два набора чисел:

1) $x = 3, y = 6, z = 9$; 2) $x = 15, y = 6, z = -3$.

Второй набор не удовлетворяет условию задачи, так как образует убывающую прогрессию.

Ответ: $3; 6; 9$.

303. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x + y + z = 33$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x + z = 2y$.

Из второго условия следует, что числа x, $y - 3$, $z - 2$ образуют геометрическую прогрессию, следовательно, $x(z - 2) = (y - 3)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x+y+z=33, \\ x+z=2y, \\ x(z-2)=(y-3)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = 33 - 2y$, откуда $y = 11$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y=11, \\ x+z=22, \\ x(z-2)=64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=11, \\ z=22-x, \\ x(20-x)=64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x(20 - x) = 64$, $x^2 - 20x + 64 = 0$, находим $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 22 - 4 = 18$, $z_2 = 22 - 16 = 6$.

Итак, имеем два набора чисел: 1) $x = 4, y = 11, z = 18$;
2) $x = 16, y = 11, z = 6$.

Первый набор не удовлетворяет условию, так как образует возрастающую прогрессию.

Ответ: 16; 11; 6.

304. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия ($a \neq 0$), тогда $\frac{2}{3}a$, aq, aq^2 — арифметическая прогрессия, то есть существует число d, такое, что $\frac{2}{3}a + d = aq$ и $\frac{2}{3}a + 2d = aq^2$. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a+d=aq, \\ \frac{2}{3}a+2d=aq^2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $-\frac{2}{3}a = -2aq + aq^2$; $q^2 - 2q + \frac{2}{3} = 0$; $q = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как по условию геометрическая прогрессия должна убывать, то $0 < q < 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

305. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия, тогда a, $\frac{3}{2}aq$, aq^2 — арифметическая прогрессия, то есть существует число d, такое, что $\frac{3}{2}aq = a + d$ и $aq^2 = a + 2d$. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{3}{2}aq = a + d, \\ aq^2 = a + 2d. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $aq^2 - 3aq = -a$; $q^2 - 3q + 1 = 0$; $q = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как по условию геометрическая прогрессия должна возрастать, то $q > 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

306. Отличные от нуля числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Поэтому если x удовлетворяет условию задачи, то $x(5x - 2) = (x + 2)^2$; $5x^2 - 2x = x^2 + 4x + 4$; $4x^2 - 6x - 4 = 0$; $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Последнее уравнение имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 2.

307. Так как числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, то $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Следовательно, искомое значение x удовлетворяет уравнению
$-x(x - 5) = (x + 1)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 5x = x^2 + 2x + 1$, $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Последнее уравнение имеет корни $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$.

Значение x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 1.

308. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$;
$a + b + d = b + c$; $b + c + d = c + a \Rightarrow a + d = c$; $b + d = a$. Имеем систему из двух уравнений $\begin{cases} a + d = aq^2, \\ aq + d = a. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим $a - aq = aq^2 - a$. Поскольку числа a, b, c различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $q^2 + q - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -2$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a, b, c должны быть различны. Следовательно, $q = -2$.

Ответ: -2.

309. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$; $c + a + d = a + b$; $a + b + d = b + c \Rightarrow c + d = b$; $a + d = c$.

Имеем систему из двух уравнений $\begin{cases} aq^2 + d = aq, \\ a + d = aq^2. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим $aq^2 - a = aq - aq^2$. Поскольку числа a, b, c различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $2q^2 - q - 1 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -0{,}5$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a, b, c должны быть различны. Следовательно, $q = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

310. Пусть b — первое из чисел, образующих данную геометрическую прогрессию. Тогда bq, bq^2 — второе и третье из этих чисел. По условию, числа b^2, $(bq)^2$, $(bq^2)^2$ образуют арифметическую прогрессию, а значит, $2(bq)^2 = b^2 + (bq^2)^2$. Сокращая на b^2 (из условия положительности b следует, что $b \neq 0$), получаем уравнение $2q^2 = 1 + q^4$; $(q^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 - 1 = 0$; $q_1 = -1$, $q_2 = 1$. Так как по условию все члены прогрессии положительны, то $q > 0$, поэтому $q = 1$ — единственное значение знаменателя прогрессии, удовлетворяющее всем требуемым условиям.

Ответ: 1.

311. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a, $a + d$, $a + 3d$ образуют геометрическую прогрессию. По свойству геометрической прогрессии имеем $(a + d)^2 = a(a + 3d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 3ad$; $d^2 = ad$. Сократив на d $(d \neq 0)$, получим $d = a$.

То есть числа a, $a + d$ и $a + 3d$ равны соответственно числам a, $2a$ и $4a$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Ответ: 2.

312. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a^2, $(a + d)^2$ и $(a + 4d)^2$ образуют геометрическую прогрессию. Согласно свойству геометрической прогрессии имеем
$(a + d)^4 = a^2(a + 4d)^2$; $(a + d)^2 = |a(a + 4d)|$. Так как $a > 0$, $d > 0$, то $(a + d)^2 = a(a + 4d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$; $d^2 = 2ad$ (сокращаем на $d \neq 0$), $d = 2a$. То есть числа a^2, $(a + d)^2$ и $(a + 4d)^2$ равны соответ-

ственно числам a^2, $9a^2$ и $81a^2$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 9.

Ответ: 9.

313. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию $x + y + z = 28$. Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $xz = y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1$, $y + 2$, $z - 1$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x+1)+(z-1) = 2(y+2)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 28, \\ x + z = 2y + 4, \\ xz = y^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y = 24-2y$, откуда $y = 8$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y = 8, \\ x + z = 20, \\ xz = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8, \\ z = 20 - x, \\ x(20 - x) = 64. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(20 - x) = 64$, находим $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 20 - 4 = 16$, $z_2 = 20 - 16 = 4$.

Получаем два набора чисел: 1) $x = 4, y = 8, z = 16$; 2) $x = 16, y = 8, z = 4$.

Первый набор удовлетворяет условию, а второй — нет, так как числа $16 + 1 = 17$; $8 + 2 = 10$; $4 - 1 = 3$ образуют убывающую прогрессию.

Ответ: $4; 8; 16$.

314. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x + y + z = 21$. Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $xz = y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1$, $y + 1$, $z - 2$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x+1)+(z-2) = 2(y+1)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 21, \\ x + z = 2y + 3, \\ xz = y^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = 18 - 2y$, откуда $y = 6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y = 6, \\ x + z = 15, \\ xz = 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ z = 15 - x, \\ x(15 - x) = 36. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(15 - x) = 36$, находим $x_1 = 3$, $x_2 = 12$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 15 - 3 = 12$, $z_2 = 15 - 12 = 3$.

Получаем два набора чисел: 1) $x = 3, y = 6, z = 12$; 2) $x = 12, y = 6, z = 3$.

Второй набор удовлетворяет условию, а первый — нет, так как числа $3+1 = 4; 6+1 = 7; 12-2 = 10$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Ответ: 12; 6; 3.

315. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1 q$; $b_3 = b_1 q^2$. По условию числа b_1, b_2, $\frac{b_3}{5}$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $2b_2 = b_1 + \frac{b_3}{5}$; $2b_1 q = b_1 + \frac{1}{5} b_1 q^2$. Заметим, что $b_1 \neq 0$, $q > 1$, иначе прогрессия b_1, b_2, b_3 не является возрастающей. Следовательно, $2q = 1 + \frac{1}{5} q^2$; $q^2 - 10q + 5 = 0$; $q_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$. Значение $q = 5 - 2\sqrt{5}$ не удовлетворяет условию $q > 1$, а значение $q = 5 + 2\sqrt{5}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $5 + 2\sqrt{5}$.

316. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$. По условию, числа $b_1, b_2, 0{,}8b_3$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $2b_2 = b_1 + 0{,}8b_3$; $2b_1 q = b_1 + 0{,}8 b_1 q^2$. Заметим, что $b_1 \neq 0$, $0 < q < 1$. Следовательно, $2q = 1 + 0{,}8q^2$; $4q^2 - 10q + 5 = 0$; $q_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Значение $q = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{4}$ не удовлетворяет условию $0 < q < 1$, а значение $q = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{4}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $\dfrac{5 - \sqrt{5}}{4}$.

317. Предположим, что такая прогрессия существует. Обозначим её знаменатель через q. Тогда $\frac{b_m}{b_n} = q^{m-n}$ $(m, n \in N, m > n)$. То есть $\frac{b_5}{b_2} = \frac{12}{4} = 3 = q^3$; $\frac{b_8}{b_5} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} = q^3$. Отсюда $3 = \frac{8}{3}$. Противоречие. Значит, наше предположение было неверно и геометрической прогрессии с указанными членами не существует.

Ответ: нет.

318. Покажем, что данная прогрессия существует. По данным задачи находим

1) $\frac{b_6}{b_1} = \frac{8-4\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} = \frac{4(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = -4\sqrt{2} =$
$= (-\sqrt{2})^5$;

2) $\frac{b_4}{b_1} = \frac{4-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^3$;

3) $\frac{b_6}{b_4} = \frac{8-4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{2(4-2\sqrt{2})}{4-2\sqrt{2}} = 2 = (-\sqrt{2})^2$.

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{2}$.

Ответ: да.

319. Покажем, что указанная прогрессия существует. По данным задачи находим

1) $\frac{b_6}{b_1} = \frac{63\sqrt{3}}{-7} = -9\sqrt{3} = (-\sqrt{3})^5$;

2) $\frac{b_4}{b_1} = \frac{21\sqrt{3}}{-7} = -3\sqrt{3} = (-\sqrt{3})^3$;

3) $\frac{b_6}{b_4} = \frac{63\sqrt{3}}{21\sqrt{3}} = 3 = (-\sqrt{3})^2$.

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{3}$.

Ответ: да.

320. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию
$\begin{cases} b_2 - b_4 = 3, \\ b_1 - b_3 = 6, \end{cases}$ то $\begin{cases} b_1 q - b_1 q^3 = 3, \\ b_1 - b_1 q^2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q(1-q^2) = 3; \\ b_1(1-q^2) = 6. \end{cases}$

Разделим первое равенство на второе ($b_1 \neq 0$, $q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{2}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 8$. Сумма данной прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$; $S = \frac{8}{1-0{,}5} = 16$.

Ответ: 16.

321. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию задачи

$$\begin{cases} b_2 + b_4 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_3 = 20, \end{cases} \text{ то } \begin{cases} b_1 q + b_1 q^3 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_1 q^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q(1+q^2) = \frac{20}{3}, \\ b_1(1+q^2) = 20. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе ($b_1 \neq 0$, $q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{3}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 18$. Сумма данной прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$.

Ответ: 27.

322. Пусть b_1 — первый член прогрессии, q — её знаменатель. Согласно условию $q \neq 0$ и $\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = -18, \\ b_1 \cdot q^5 = 486; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = -27, \\ b_1 = -\frac{18}{q^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3, \\ b_1 = -2. \end{cases}$

Следовательно, сумма первых трёх членов данной прогрессии

$$S_3 = \frac{b_1(q^3-1)}{q-1} = \frac{-2 \cdot (-28)}{-4} = -14.$$

Ответ: -14.

323. Пусть b_1 — первый член данной прогрессии, q — её знаменатель. Согласно условию, $q \neq 0$ и $\begin{cases} b_1 q^3 = -32, \\ b_1 q^8 = 1024; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^5 = -32, \\ b_1 = -\frac{32}{q^3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2, \\ b_1 = 4. \end{cases}$

Следовательно, сумма первых четырёх членов данной прогрессии

$$S_4 = \frac{b_1(q^4-1)}{q-1} = \frac{4 \cdot 15}{-3} = -20.$$

Ответ: -20.

324. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 3$; $q = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{1}{81} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = b_1 q^5$, то число $\frac{1}{81}$ является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

325. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 0{,}5$; $q = \frac{1}{0{,}5} = 2$. Так как $64 = 0{,}5 \cdot 2^7 = b_1 q^7$, то число 64 является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

326. Согласно условию, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_3} = \dfrac{7}{12}, \end{cases} \quad \text{где } b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ b_3 > 0.$$

Так как числа b_1, b_2 и b_3 образуют геометрическую прогрессию, то $b_2 = qb_1$; $b_1 = \frac{b_2}{q}$; $b_3 = qb_2$, где $q \neq 0$. Подставляя значения b_1 и b_3 в систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{b_2}{q} + b_2 + b_2 q = 21, \\ \dfrac{q}{b_2} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_2 q} = \dfrac{7}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2(1 + q + q^2) = 21q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{7b_2^2 q}{12} = 21q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{12}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $b_2^2 = 36$; $b_2 = -6$ или $b_2 = 6$. Так как $b_2 > 0$, то $b_2 = 6$.

Ответ: 6.

327. Согласно условию, имеем систему уравнений $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_3} = \dfrac{7}{8}; \end{cases}$

где $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$.

Так как числа b_1, b_2 и b_3 образуют геометрическую прогрессию, то $b_2 = qb_1$; $b_1 = \frac{b_2}{q}$, $b_3 = qb_2$, где $q \neq 0$. Подставляя значения b_1 и b_3 в систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{b_2}{q} + b_2 + b_2 q = 14, \\ \dfrac{q}{b_2} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_2 q} = \dfrac{7}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2(1 + q + q^2) = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7b_2^2 q}{8} = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{8}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $b_2^2 = 16$; $b_2 = -4$ или $b_2 = 4$. Так как $b_2 > 0$, то $b_2 = 4$.

Тогда $b_1 b_2 b_3 = \dfrac{b_2}{q} \cdot b_2 \cdot q b_2 = b_2^3 = 64$.

Ответ: 64.

328. $y = -\dfrac{9x + x^3}{3x}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На $D(y)$ имеем $-\dfrac{x \cdot (9 + x^2)}{3x} = -\dfrac{9 + x^2}{3} = -\dfrac{1}{3}x^2 - 3$.

Графиком функции $y = -\dfrac{1}{3}x^2 - 3$ при $x \neq 0$ является парабола с вершиной $(0; -3)$, не принадлежащей ей, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-3	-1	1	3
y	-6	$-3\frac{1}{3}$	$-3\frac{1}{3}$	-6

График функции изображён на рисунке 144.

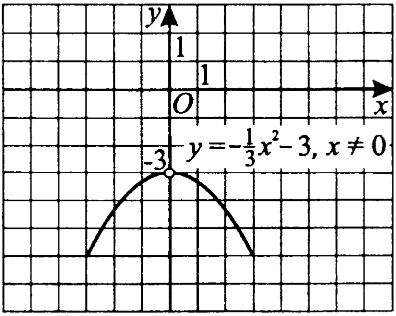


Рис. 144

329. $y = \dfrac{8x - x^3}{4x}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На $D(y)$ имеем $\dfrac{8x - x^3}{4x} = \dfrac{x \cdot (8 - x^2)}{4x} = \dfrac{8 - x^2}{4} = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2$.

Графиком функции $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2$ при $x \neq 0$ является парабола с вершиной $(0; 2)$, не принадлежащей графику, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	1	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{4}$	1

.

График заданной функции изображён на рисунке 145.

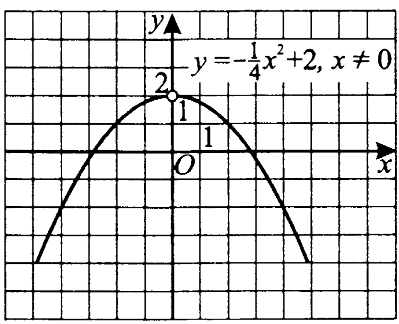


Рис. 145

330. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{2x + 6}$. Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля:
$D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$. На $D(y)$ имеем
$y = \dfrac{x^2 \cdot (x + 3) - 4 \cdot (x + 3)}{2 \cdot (x + 3)} = \dfrac{(x^2 - 4) \cdot (x + 3)}{2 \cdot (x + 3)} = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$.

Графиком функции $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$ при $x \neq -3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(0; -2)$.

Так как $x \neq -3$, то точка с координатами $(-3; 2{,}5)$ не принадлежит графику.

Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	0	$-1{,}5$	$-1{,}5$	0

.

График заданной функции изображён на рисунке 146.

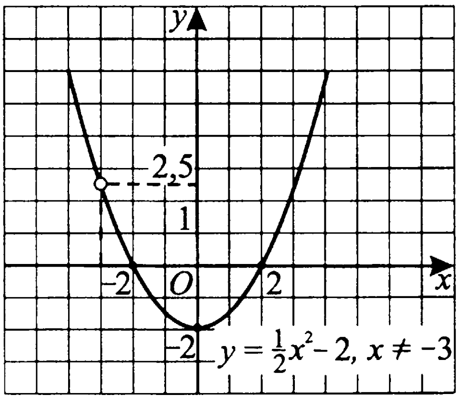


Рис. 146

331. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1, \\ -(x-1)^2 + 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

1) $y = \dfrac{1}{x}$, если $x \geqslant 1$. Составим таблицу:

x	1	2	4
y	1	$0{,}5$	$0{,}25$

.

2) $y = -(x-1)^2 + 1$, если $x < 1$. График есть ветвь параболы (ветви направлены вниз, вершина $(1; 1)$).

Составим таблицу:

x	0	-1
y	0	-3

.

График заданной функции изображён на рисунке. 147.

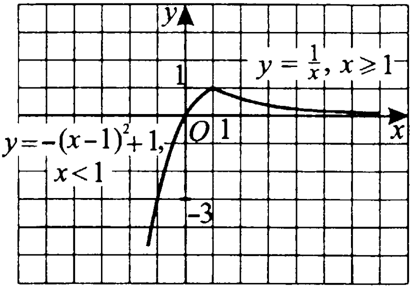


Рис. 147

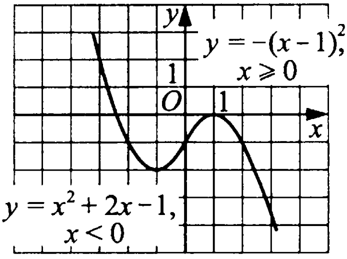


Рис. 148

332. График функции состоит из двух частей:
1) для неотрицательных x — это график функции $y = -(x-1)^2$ — парабола, ветви направлены вниз, вершина $(1; 0)$;
2) для отрицательных x — это график функции $y = x^2 + 2x - 1$ — парабола, ветви направлены вверх, вершина $(-1; -2)$.

График заданной функции изображён на рис. 148.

333. 1) Графиком функции $y = (x-3)^2 - 2$, $x \geqslant 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $(3; -2)$.

Дополнительные точки:

x	1	2	3	4	5
y	2	-1	-2	-1	2

.

2) Графиком функции $y = -2x^2 + 4$, $x < 1$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(0; 4)$.

Дополнительные точки:

x	-1	-2
y	2	-4

(см. рис. 149).

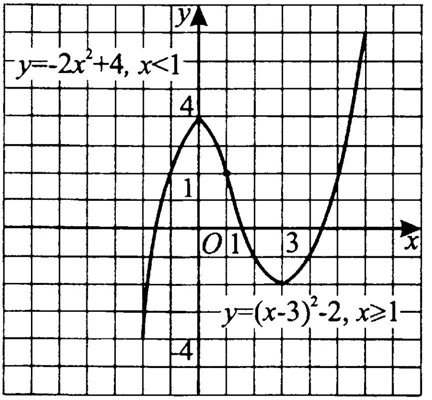


Рис. 149

334. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.

Разложим на множители числитель дроби: $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = x - 1$. Графиком функции является прямая без точки $(3; 2)$.

Составим таблицу:

x	0	1
y	-1	0

График заданной функции изображён на рисунке 150.

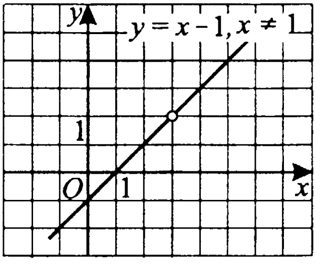


Рис. 150

335. $y = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4x}$.

Разложим на множители знаменатель дроби: $y = \dfrac{x-4}{x(x-4)}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель не равен нулю.

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = \dfrac{1}{x}$. Так как $x \neq 4$, то $y \neq \dfrac{1}{4}$.

Графиком функции является гипербола без точки $\left(4; \dfrac{1}{4}\right)$.

Составим таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$

График заданной функции изображён на рисунке 151.

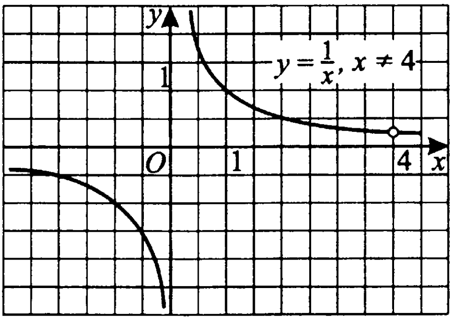


Рис. 151

336. $y = x + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{9 - 12x + 4x^2}$,
$y = x + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2x-3)^2}$, $y = x + |x - 3| + |2x - 3|$.
1) Найдём, при каких значениях x выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю.
$x - 3 = 0$, $x = 3$; $2x - 3 = 0$, $x = 1{,}5$.
2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 152):

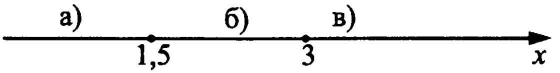


Рис. 152

а) $x < 1{,}5$. $y = x + 3 - x + 3 - 2x$, $y = -2x + 6$.

x	0	1
y	6	4

б) $1{,}5 \leqslant x < 3$. $y = x + 3 - x + 2x - 3$, $y = 2x$.

x	1,5	2
y	3	4

в) $x \geqslant 3$. $x + x - 3 + 2x - 3$, $y = 4x - 6$.

x	3	4
y	6	10

Итак, $y = \begin{cases} -2x + 6, \text{ если } x < 1{,}5, \\ 2x, \text{ если } 1{,}5 \leqslant x < 3, \\ 4x - 6, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$

График заданной функции изображён на рисунке 153.

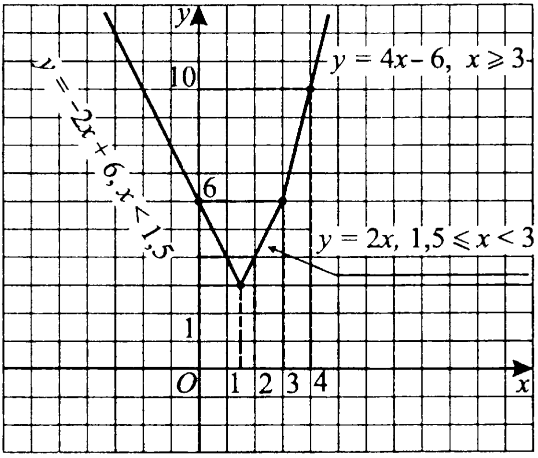


Рис. 153

337. $y = \sqrt{16x^2 + 56x + 49} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 5x$,
$y = \sqrt{(4x + 7)^2} + \sqrt{(x - 2)^2} - 5x$, $y = |4x + 7| + |x - 2| - 5x$.
1) Найдём нули выражений, стоящих в модульных скобках:
$4x + 7 = 0$, $x = -1{,}75$; $x - 2 = 0$, $x = 2$.
2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 154):

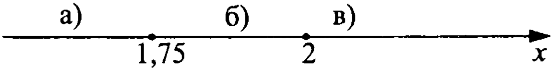


Рис. 154

а) $x < -1{,}75$. $y = -4x - 7 + 2 - x - 5x$, $y = -10x - 5$.

x	-2	$-2{,}5$
y	15	20

б) $-1{,}75 \leqslant x < 2$. $y = 4x + 7 + 2 - x - 5x$, $y = -2x + 9$.

x	0	1
y	9	7

в) $x \geqslant 2$. $y = 4x + 7 + x - 2 - 5x$, $y = 5$.

$$\text{Итак, } y = \begin{cases} -10x - 5, & \text{если } x < -1{,}75, \\ -2x + 9, & \text{если } -1{,}75 \leqslant x < 2, \\ 5, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

График заданной функции изображён на рисунке 155.

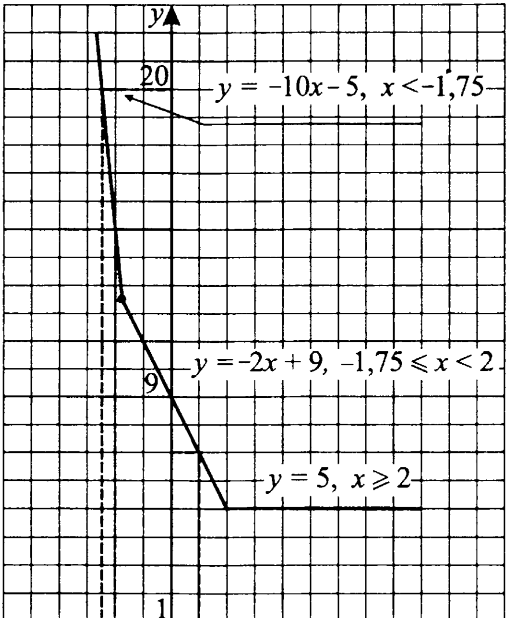


Рис. 155

338. $y = \dfrac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4)}{(x-4)(2-x)}$.

Разложим на множители квадратные трёхчлены, стоящие в числителе:

$$y = -\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x-2)}.$$

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид
$y = -(x-3)\cdot(x-1)$ или $y = -x^2 + 4x - 3$.

Графиком функции является парабола с вершиной (2; 1), ветви которой направлены вниз. Точки (2; 1) и (4; −3) не принадлежат параболе.

Дополнительные точки:

x	0	1	3
y	−3	0	0

График заданной функции изображён на рисунке 156.

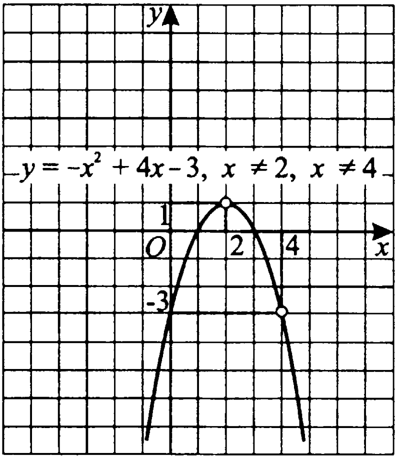


Рис. 156

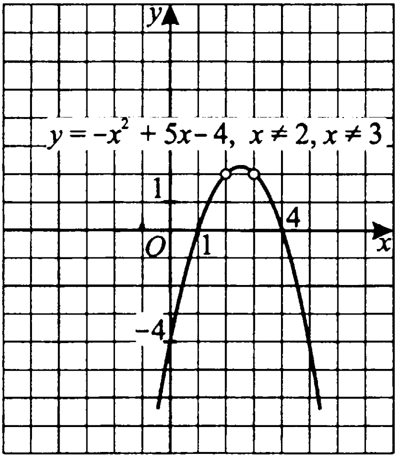


Рис. 157

339. Область определения $D(y)$: $x \neq 2$, $x \neq 3$.

$$y = -\frac{(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-2)} = -(x-1)(x-4).$$

$y = -(x^2 - 5x + 4) = -x^2 + 5x - 4$. Графиком функции является парабола, ветви направлены вверх, вершина в точке с координатами (2,5; 2,25). Точки (2; 2) и (3; 2) не принадлежат параболе.

График заданной функции изображён на рисунке 157.

341. По условию $a > 0$, поэтому данную функцию можно представить в виде $y = a\left|x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right|$. Из рисунка 158 следует, что квадратный трёхчлен $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Отсюда, согласно теореме Виета, получаем $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -4$, $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = -5$, то есть $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - 4x - 5$. Вершина параболы $y = x^2 - 4x - 5$ имеет абс-

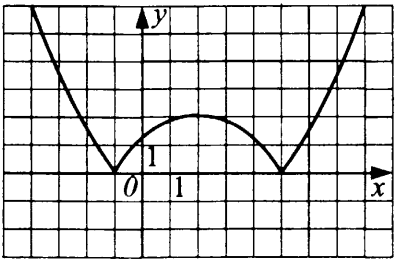


Рис. 158

циссу $x=\dfrac{-(-4)}{2}=2$ и ординату $y = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$. С другой стороны, из рисунка 158 следует, что вершина параболы $y = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$ имеет ординату, равную -2. Следовательно, $a \cdot (-9) = -2$, $a = \dfrac{2}{9} \Rightarrow$ $b = \dfrac{b}{a} \cdot a = (-4) \cdot \dfrac{2}{9} = -\dfrac{8}{9}$, $c = \dfrac{c}{a} \cdot a = (-5) \cdot \dfrac{2}{9} = -\dfrac{10}{9}$.

Ответ: $a = \dfrac{2}{9}, b = -\dfrac{8}{9}, c = -\dfrac{10}{9}$.

342. Угловые коэффициенты k_1 и k_2, отличные от нуля, перпендикулярных прямых удовлетворяют соотношению $k_1 \cdot k_2 = -1$. Поэтому множество прямых, перпендикулярных прямой $y = 0{,}125x$, имеет вид $y = -8x + b$, где b — произвольное действительное число. Для того чтобы прямая $y = -8x + b$ касалась параболы $y = x^2 - 1$, уравнение $x^2 - 1 = -8x + b$ должно иметь единственное решение. Тогда трёхчлен $x^2+8x-1-b$ должен быть полным квадратом. Следовательно, абсцисса точки касания $x = -4$, тогда ордината $y = (-4)^2 - 1 = 15$.

Ответ: $(-4; 15)$.

343. Так как по условию прямая $y = 0{,}25x$ перпендикулярна прямой $y = kx + b$, то $k = -\dfrac{1}{0{,}25} = -4$, значит, $y = -4x + b$. Найдём b из условия, что эта прямая касается параболы $y = 4x^2 + 8x + 7$, то есть уравнение $4x^2 + 8x + 7 = -4x + b$ имеет один корень (два равных).

Имеем $4x^2 + 12x + 7 - b = 0$, $D = 0$. $D = 144 - 112 + 16b = 0$, $b = -2$.

Уравнение прямой примет вид $y = -4x - 2$.

Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = 4x^2 + 8x + 7, \\ y = -4x - 2, \end{cases}$ $4x^2 + 8x + 7 = -4x - 2$, $4x^2 + 12x + 9 = 0$, $(2x+3)^2 = 0$, $x = -\frac{3}{2}$, $y = 4$.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$.

344. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 3x - 2$, имеет вид $y = 3x + b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 3x + b$ касается параболы $y = 2x^2 - 3x + 5$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2 - 3x + 5 = 3x + b$ имело один корень (два равных).

$2x^2 - 6x + 5 - b = 0$, $D = 0$, $D = 36 - 8 \cdot 5 + 8b = 8b - 4$, $8b - 4 = 0$, $b = \frac{1}{2}$.

$y = 3x + \frac{1}{2}$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = 3x + \frac{1}{2}, \\ y = 2x^2 - 3x + 5, \end{cases}$ $2x^2 - 3x + 5 = 3x + \frac{1}{2}$, $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$,

$4x^2 - 12x + 9 = 0$, $(2x-3)^2 = 0$, $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $y = 3 \cdot 1{,}5 + 0{,}5 = 5$.

$(1{,}5; 5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1{,}5; 5)$.

345. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = x+3$, имеет вид $y = x + b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y = x + b$ касается параболы $y = 2x^2 - 3x + 6$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2 - 3x + 6 = x + b$ имело один корень (два равных).
$2x^2 - 4x + 6 - b = 0$, $D = 0$, $D = 16 - 48 + 8b = -32 + 8b$, $-32 + 8b = 0$, $b = 4$.

$y = x + 4$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x + 4, \\ y = 2x^2 - 3x + 6; \end{cases}$ $2x^2 - 3x + 6 = x + 4$, $2x^2 - 4x + 2 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$,
$(x-1)^2 = 0$, $x = 1$, $y = 5$.
$(1; 5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1; 5)$.

346. По условию прямая $y = 6x$ параллельна прямой $y = kx + b$. Тогда $k = 6$ и прямая имеет вид $y = 6x + b$. Она касается параболы $y = x^2 + 5$. Значит, уравнение $x^2 + 5 = 6x + b$ имеет один корень (два равных).
$x^2 - 6x + 5 - b = 0$, $D = 0$, $D = 36 - 4 \cdot (5 - b)$, $36 - 20 + 4b = 0$, $4b = -16$, $b = -4$.

Уравнение касательной — $y = 6x - 4$.

Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x^2 + 5, \\ y = 6x - 4. \end{cases}$ $x^2 + 5 = 6x - 4$, $x^2 - 6x + 9 = 0$, $(x - 3)^2 = 0$,

$x = 3$, $y = 14$.

Ответ: $(3; 14)$.

347. 1) Так как касательная параллельна прямой $y = 14x$, то её уравнение $y = 14x + b$.
Вычислим b, зная, что прямая $y = 14x + b$ касается параболы $y = x^2 + 9$, то есть уравнение $x^2 - 14x + 9 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 196 - 4 \cdot (9 - b)$, $196 - 36 + 4b = 0$, $4b = -160$, $b = -40$.

Уравнение касательной — $y = 14x - 40$.

2) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x^2 + 9, \\ y = 14x - 40. \end{cases}$ $x^2 + 9 = 14x - 40$, $x^2 - 14x + 49 = 0$, $(x - 7)^2 = 0$,

$x = 7$, $y = 58$.

Ответ: $(7; 58)$.

348. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 4x$, имеет вид $y = 4x + b$.
б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 4x + b$ касается параболы $y = x^2 + 3$, то есть уравнение $x^2 - 4x + 3 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 16 - 4 \cdot (3 - b)$, $16 - 12 + 4b = 0$, $4 + 4b = 0$, $b = -1$.

Уравнение касательной — $y = 4x - 1$.

в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений
$\begin{cases} y = x^2 + 3, \\ y = 4x - 1. \end{cases}$ $x^2 + 3 = 4x - 1$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x - 2)^2 = 0$, $x = 2$, $y = 7$.

Ответ: $(2; 7)$.

349. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 2x$, имеет вид $y = 2x + b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 2x + b$ касается параболы $y = x^2 - 14$, то есть уравнение $x^2 - 2x - 14 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 4 + 4 \cdot (14 + b) = 60 + 4b$, $60 + 4b = 0$, $b = -15$.

Уравнение касательной — $y = 2x - 15$.

в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 14, \\ y = 2x - 15. \end{cases}$ $x^2 - 14 = 2x - 15, x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0,$

$x = 1, y = -13$.

Ответ: $(1; -13)$.

350. Запишем уравнение параболы со старшим коэффициентом, равным 1: $y = x^2 + bx + c$.

По условию парабола касается прямых $y = x$ и $y = 1 - x$, тогда уравнения $x^2 + bx + c = x$ и $x^2 + bx + c = 1 - x$ имеют по одному решению:
$\begin{cases} x^2 + (b-1)x + c = 0, \\ x^2 + (b+1)x + c = 1. \end{cases}$
Значит, дискриминант каждого квадратного уравнения равен 0.
1) $D = (b-1)^2 - 4c = 0$; 2) $D = (b+1)^2 - 4(c-1) = 0$;
$\begin{cases} (b-1)^2 = 4c, \\ (b+1)^2 + 4 = 4c, \end{cases}$ $(b-1)^2 = (b+1)^2 + 4, b^2 - 2b + 1 = b^2 + 2b + 1 + 4,$

$b = -1$, тогда $c = 1$.
Таким образом, $y = x^2 - x + 1$.

Ответ: $y = x^2 - x + 1$.

351. Найдём b и c, используя данные задачи. Так как парабола касается прямых $y = x + 1, y = 5 - 3x$, то каждое из уравнений $-x^2 + bx + c = x + 1$ и $-x^2 + bx + c = 5 - 3x$ имеет единственный корень (два равных). Следовательно, дискриминанты уравнений $x^2 + (1-b)x + 1 - c = 0$, $x^2 - (3+b)x + 5 - c = 0$ равны нулю. Таким образом, получаем систему уравнений $\begin{cases} (1-b)^2 - 4(1-c) = 0, \\ (3+b)^2 - 4(5-c) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2b + b^2 - 4 + 4c = 0, \\ 9 + 6b + b^2 - 20 + 4c = 0; \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 4c = 3, \\ b^2 + 6b + 4c = 11. \end{cases}$ Вычитая из нижнего уравнения верхнее, приходим к уравнению $8b = 8 \Rightarrow b = 1$. Подставляя найденное значение b в первое уравнение последней системы, находим $1 - 2 + 4c = 3 \Rightarrow c = 1$. Поэтому искомое уравнение параболы — $y = -x^2 + x + 1$.

Ответ: $y = -x^2 + x + 1$.

352. 1. Найдём координаты концов отрезка, решив систему уравнений
$\begin{cases} y = 2|x| + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1. \end{cases}$

1) $x \geqslant 0$; $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1; \end{cases}$ $2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1$; $4x^2 - 2 = 0$;

$x^2 - \frac{1}{2} = 0$; $\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяет $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$,

$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2} + 1\right)$.

2) $x < 0$, $\begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1, \end{cases}$ $-2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1$, $2x^2 + 2x - 1 = 0$,

$D = 4 + 8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$,

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ (не удовлетворяет условию $x < 0$),

$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ (удовлетворяет условию $x < 0$), $y_3 = 1 + \sqrt{3} + 1 = 2 + \sqrt{3}$,

$B\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; 2 + \sqrt{3}\right)$.

2. Найдём координаты середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{-1 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4},$$

$$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 2 + \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}; \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right)$.

353. 1. Найдём координаты концов отрезка, решив систему уравнений
$\begin{cases} y = 1 - |x|, \\ y = 2x^2 + x - 1. \end{cases}$

1) $x \geqslant 0$, $\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = 2x^2 + x - 1, \end{cases}$ $2x^2 + x - 1 = 1 - x$, $2x^2 + 2x - 2 = 0$,

$x^2 + x - 1 = 0$, $D = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$;

$y_1 = \frac{2 + 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $A\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

2) $x < 0$, $\begin{cases} y = 1 + x, \\ y = 2x^2 + x - 1, \end{cases}$ $2x^2 + x - 1 = 1 + x$, $2x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $(x-1)\cdot(x+1) = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ не удовлетворяет условию $x < 0$; $y_3 = 1 - 1 = 0$, $B(-1; 0)$.

2. Найдём координаты середины отрезка:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} - 2}{4} = \frac{\sqrt{5} - 3}{4},\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}; \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$.

354. Запишем уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные числа и $a \neq 0$.

По условию известно, что точки с координатами $(-1; -5)$, $(0; -4)$ и $(1; 1)$ лежат на этой параболе, значит, $y(-1) = -5$, $y(0) = -4$, $y(1) = 1$.

Найдём числа a, b, c, решив систему уравнений

$$\begin{cases} a - b + c = -5, \\ c = -4, \\ a + b + c = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 4 = -5, \\ c = -4, \\ a + b - 4 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -1, \\ c = -4, \\ a + b = 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \\ c = -4. \end{cases}$$

Уравнение параболы примет вид $y = 2x^2 + 3x - 4$.

Найдём координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ x_0 = -\frac{3}{2\cdot 2} = -\frac{3}{4},$$

$$y_0 = 2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 4 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 4 = \frac{9 - 18 - 32}{8} = -\frac{41}{8}.$$

$\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right)$ — искомые координаты вершины параболы.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right)$.

356. $y = -x^3 - 2x^2 + x + 2$.

1) С осью Ox:

$-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$; $-x^2(x+2) + (x+2) = 0$; $(x+2)\left(1 - x^2\right) = 0$; $x + 2 = 0$, $x_1 = -2$; $1 - x^2 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Таким образом, $(-2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ с осью Ox.

2) С осью Oy: $y(0) = 2$, поэтому $(0; 2)$ — координаты точки пересечения графика данной функции с осью Oy.

Ответ: $(-2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 2)$.

357. Пусть точка с координатами $(x; y)$ лежит на параболе $y = 16x^2 + 12x - 2$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Ox, имеет координаты $(x; -y)$ и лежит на прямой $y = 2x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = y, \\ 2x + 5 = -y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = -2x - 5, \\ y = -2x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 16x^2 + 14x + 3 = 0, \\ y = -2x - 5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$16x^2 + 14x + 3 = 0, \ \frac{D}{4} = 49 - 48 = 1;$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8} = -0{,}375, \ x_2 = \frac{-7-1}{16} = -0{,}5;$$

$y_1 = -2 \cdot (-0{,}375) - 5 = -4{,}25$, $y_2 = -2 \cdot (-0{,}5) - 5 = -4$.

$(-0{,}375; -4{,}25)$ и $(-0{,}375; 4{,}25)$, $(-0{,}5; -4)$ и $(-0{,}5; 4)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $(-0{,}375; -4{,}25)$, $(-0{,}375; 4{,}25)$; 2) $(-0{,}5; -4)$, $(-0{,}5; 4)$.

358. Пусть точка с координатами $(x; y)$ лежит на параболе $y = 18x^2 - 33x$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Oy, имеет координаты $(-x; y)$ и лежит на прямой $y = 6x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 18x^2 - 33x = y, \\ -6x + 5 = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 33x = -6x + 5, \\ y = -6x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 27x - 5 = 0, \\ y = -6x + 5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$18x^2 - 27x - 5 = 0; \ x_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 + 360}}{36}; \ x_{1,2} = \frac{27 \pm 33}{36}; \ x_1 = \frac{5}{3},$$

$$x_2 = -\frac{1}{6}; \ y_1 = -6 \cdot \frac{5}{3} + 5 = -5, \ y_2 = -6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 5 = 6.$$

$\left(\frac{5}{3}; -5\right)$ и $\left(-\frac{5}{3}; -5\right)$; $\left(-\frac{1}{6}; 6\right)$ и $\left(\frac{1}{6}; 6\right)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $\left(\frac{5}{3}; -5\right)$, $\left(-\frac{5}{3}; -5\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{6}; 6\right)$, $\left(\frac{1}{6}; 6\right)$.

359. Обозначим $f(x) = -4x^4 + 10x^2 - 3$. Точка B является одной из точек пересечения графика функции $y = f(x)$ и оси Ox. Значит, $y_B = 0$. Для нахождения x_B решим уравнение $f(x) = 0$. Сделаем замену $t = x^2 \geqslant 0$, тогда уравнение $f(x) = 0$ примет вид

$$-4t^2 + 10t - 3 = 0,\ 4t^2 - 10t + 3 = 0,\ t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{4},$$

$$t_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{4} \geqslant 0,\ t_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{4} \geqslant 0.$$

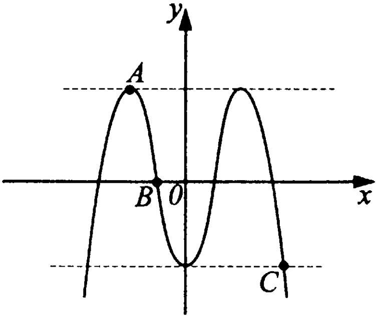


Рис. 159

Поэтому $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{2}$, $x_{3,4} = \pm\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}$. В силу расположения точки B следует, что x_B — наибольшее отрицательное число среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4. Значит, $x_B = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}$ (см. рис. 159).

Заметим, что y_A соответствует наибольшему значению функции $y = f(x)$. Для нахождения этого значения выделим полный квадрат в представлении функции:

$$-4x^4 + 10x^2 - 3 = -4\left(x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{5}{4}\right) - 3 =$$

$$-4\left(x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\right) + 4 \cdot \frac{25}{16} - 3 =$$

$$= -4\left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{13}{4}.$$

Следовательно, $f(x) = -4\left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{13}{4}$. Из полученного представления вытекает, что наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно $\frac{13}{4}$, так как для всех действительных x справедливо неравенство
$-4\left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 \leqslant 0$. Причём это наибольшее значение достигается в том случае, когда $x^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда из расположения точки A в левой полуплоскости следует, что $x_A = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ и соответственно $y_A = \frac{13}{4}$.

Определим координаты точки C. Из рисунка 159 следует, что $y_C = f(0) = -3$. Тогда опять же из рисунка 159 вытекает, что x_C равняется положительному корню уравнения $f(x) = -3$. Решим его.

$-4x^4 + 10x^2 - 3 = -3,\ -4x^4 + 10x^2 = 0,\ x^2(4x^2 - 10) = 0,\ x_1 = 0,$

$x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$. Значит, $x_C = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ответ: $A\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{13}{4}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{10}}{2}; -3\right)$.

360. Построим график функции $y = \big||x+1| - 2\big|$ в несколько этапов.

1. Графиком функции $y = x + 1$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 1)$ и $(-1; 0)$.

2. График функции $y = |x+1|$ получается из графика функции $y = x+1$ симметричным отражением части прямой, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.

3. График функции $y = |x + 1| - 2$ может быть получен из графика функции $y = |x + 1|$ сдвигом оси абсцисс на две единицы вверх.

4. График функции $y = \big||x + 1| - 2\big|$ получается из графика функции $y = |x + 1| - 2$ симметричным отражением части графика, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.

График заданной функции изображён на рис. 160.

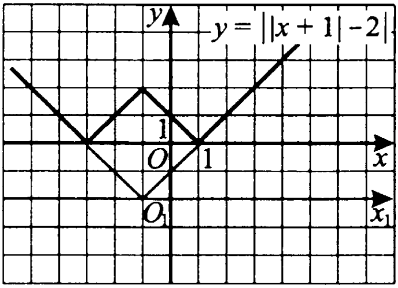


Рис. 160

361. Так как координаты вершины параболы $x_0=0$, $y_0=4$, то $x_0=-\dfrac{b}{2a}=0$, $b=0$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y=ax^2+c$. Подставив координаты известных точек, через которые проходит парабола, получим систему $\begin{cases} c=4, \\ 9a+c=-14; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=4, \\ 9a=-14-c; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} c=4, \\ a=-2. \end{cases}$

Следовательно, $y=-2x^2+4$. Найдём теперь абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $-2x^2+4=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.

362. Так как координаты вершины параболы $x_0=0$, $y_0=-12$, то $x_0=-\dfrac{b}{2a}=0$, следовательно, $b=0$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y=ax^2+c$. Подставив координаты известных точек $(0;-12)$ и $(-1;-9)$, через которые проходит парабола, получим систему
$\begin{cases} c=-12, \\ a+c=-9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-12, \\ a=3; \end{cases}$ следовательно, $y=3x^2-12$.
Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $3x^2-12=0$ $\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 2$.

Ответ: $(2;0)$, $(-2;0)$.

363. Так как координаты вершины параболы $x_0=4$, $y_0=-28$, то $x_0=-\dfrac{b}{2a}=4$; $b=-8a$. Итак, уравнение параболы имеет вид
$y=ax^2-8ax+c$. Подставив координаты точек $(0;4)$ и $(4;-28)$, через которые проходит парабола, получим $c=4$; $16a-32a+c=-28$;

$a = \dfrac{28+c}{16} = 2$, следовательно, $y = 2x^2 - 16x + 4$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $2x^2 - 16x + 4 = 0$, $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{14}$.

Ответ: $\left(4+\sqrt{14}; 0\right)$, $\left(4-\sqrt{14}; 0\right)$.

364. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 6$, $y_0 = 33$, то $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 6$; $b = -12a$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 - 12ax + c$. Подставив координаты точек $(0; -3)$ и $(6; 3)$, через которые проходит парабола, получим $c = -3$; $36a - 72a + c = 33$; $a = \dfrac{c-33}{36} = -1$, следовательно, $y = -x^2 + 12x - 3$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $-x^2+12x-3 = 0$, $x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{33}$.

Ответ: $\left(6+\sqrt{33}; 0\right)$, $\left(6-\sqrt{33}; 0\right)$.

365. *Ключевые идеи решения.* 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2, является графиком функции $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$. 2. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox, касается этой параболы в её вершине.

1. Парабола, указанная в условии, является графиком функции $y = a(x-2)(x+6)$, где $a \neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3 = 0$, то ордината этой точки $y_3 = -12a$. По условию, $y_3 = 24$, таким образом, $a = -2$, и уравнение параболы имеет вид $y = -2x^2 - 8x + 24$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \dfrac{8}{-4} = -2$ и ординатой $y_0 = y(-2) = 32$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси x, является прямая $y = 32$.

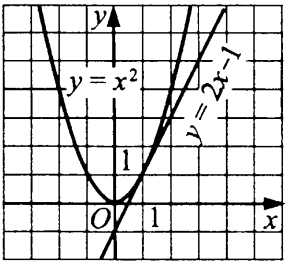
Ответ: $y = 32$.

366. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 6$, является графиком функции $y = a(x+2)(x-6)$, где $a \neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3 = 0$, то ордината этой точки $y_3 = -12a$. По условию, $y_3 = -9$, таким образом, $a = 0{,}75$, и уравнение параболы имеет вид $y = 0{,}75x^2 - 3x - 9$.

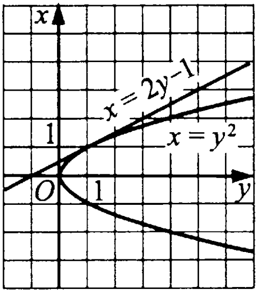
2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \dfrac{3}{1{,}5} = 2$ и ординатой $y_0 = y(2) = -12$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси x, является прямая $y = -12$.

Ответ: $y = -12$.

367. По условию прямая $y = 2x - 1$ касается параболы $y = x^2$ (см. рис. 161 а). Заметим, что если в уравнениях, задающих эти функции, поменять местами переменные (что соответствует симметричному отражению исходного графика относительно прямой $y = x$), то получим искомую касательную к кривой $x = y^2$ в точке с координатами $(1; 1)$ (см. рис. 161 б). Значит, она задаётся уравнением $x = 2y - 1$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.



а)



б)

Рис. 161

Ответ: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

368. Пусть прямая $x = ky + b$ касается параболы $x = y^2$ в точке с координатами $x = 1, y = -1$. Это означает, что $-k+b = 1$ и уравнение $y^2 = ky+b$ имеет ровно одно решение, то есть $D = 0$; $D = k^2 + 4b = 0$. Учитывая равенство $-k+b = 1$, получим $D = k^2+4(1+k) = k^2+4k+4 = (k+2)^2 = 0$. Отсюда $k = -2, b = -1$, то есть $x = -2y - 1$ является искомой прямой. Запишем уравнение этой прямой — $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}(x + 1)$.

369. По формуле расстояния между двумя точками имеем
$OA = \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен 5, и она определяется уравнением
$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox: $(x-4)^2 + 9 = 25$. Решим последнее уравнение: $(x-4)^2 = 16$, $\left[\begin{array}{l} x-4=-4, \\ x-4=4; \end{array}\right.$ $x_1 = 0, x_2 = 8$.

Аналогично ординаты точек пересечения окружности с осью Oy удовлетворяют уравнению $16 + (y-3)^2 = 25$ (в уравнении окружности полагаем $x = 0$). Имеем $(y-3)^2 = 9$, $\left[\begin{array}{l} y-3=-3, \\ y-3=3; \end{array}\right.$ $y_1 = 0, y_2 = 6$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(0;0)$ и $(8;0)$, а ось Oy в точках $(0;0)$ и $(0;6)$.

Ответ: $(0;0), (8;0), (0;6)$.

370. По формуле расстояния между двумя точками имеем
$OA = \sqrt{(3-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен $\sqrt{5}$, и она определяется уравнением
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$. Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox: $(x-2)^2 + 4 = 5$. Решим последнее уравнение: $(x-2)^2 = 1$, $\left[\begin{array}{l} x-2=-1, \\ x-2=1; \end{array}\right.$ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(1;0)$ и $(3;0)$. Поскольку уравнение данной окружности симметрично относительно x и y, то точками пересечения этой окружности с осью Oy являются точки $(0;1)$ и $(0;3)$.

Ответ: $(1;0), (3;0), (0;1), (0;3)$.

371. $y = \dfrac{x^2-25}{10-2x}$. Областью определения данной функции являются все x, при которых $10 - 2x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. При $x \neq 5$ имеем $\dfrac{x^2-25}{10-2x} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{2(5-x)} = -0{,}5 \cdot (x+5)$.

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x+5)$ с учётом того, что
$y \neq -0{,}5(5+5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством
$(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

372. $y = \dfrac{25-x^2}{2x-10}$. Областью определения данной функции являются все x, при которых $2x - 10 \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. При $x \neq 5$ имеем $\dfrac{25-x^2}{2x-10} = \dfrac{(5-x)(5+x)}{2(x-5)} = -0{,}5 \cdot (x+5)$. Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x+5)$ с учётом того, что $y \neq -0{,}5 \cdot (5+5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

373. *Ключевые идеи решения.*

1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2, является графиком функции $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox, касается этой параболы в её вершине.

2. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$, является графиком функции $y = a(x+2)(x-4) = ax^2 - 2ax - 8a$, где $a \neq 0$.

3. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_В = \dfrac{2a}{2a} = 1$ и ординатой $y_В = y(1) = -9a$. Значит, касательной к параболе, параллельной оси Ox, является прямая $y = -9a$. По условию, парабола касается прямой $y = -18$, следовательно, $-9a = -18$, $a = 2$, и уравнение параболы имеет вид $y = 2x^2 - 4x - 16$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = -16$.

Ответ: $(0; -16)$.

374. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$, является графиком функции $y = a(x+5)(x-3) = ax^2 + 2ax - 15a$, где $a \neq 0$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \dfrac{-2a}{2a} = -1$ и ординатой $y_0 = y(-1) = -16a$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси Ox, является прямая $y = -16a$. По условию, парабола касается прямой $y = 32$, значит, $a = -2$, и уравнение параболы имеет вид $y = -2x^2 - 4x + 30$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = 30$.

Ответ: $(0; 30)$.

375. Графиком функции $y = 6 - 3x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	0	2
y	6	0

.

Построим прямую (см. рис. 162).

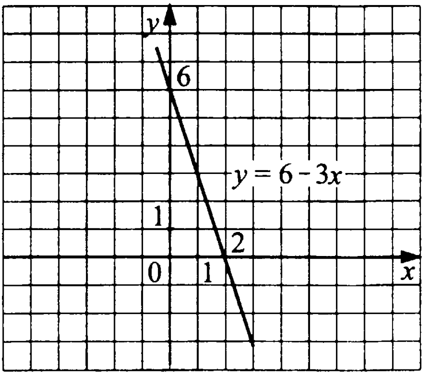


Рис. 162

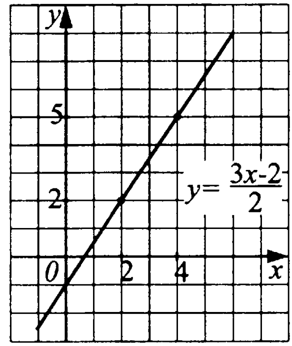


Рис. 163

Решим неравенство: $1{,}5 \leqslant y \leqslant 9 \Leftrightarrow 1{,}5 \leqslant 6 - 3x \leqslant 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -4{,}5 \leqslant -3x \leqslant 3 \Leftrightarrow 1{,}5 \geqslant x \geqslant -1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

376. Графиком функции $y = \dfrac{3x-2}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	2	4
y	2	5

.

Построим прямую (см. рис. 163).

Решим неравенство: $-1 \leqslant y \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \dfrac{3x-2}{2} \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 2$.

377. Для построения графика функции $y = \left|\dfrac{2-x}{4}\right|$ рассмотрим отдельно случаи, когда $2 - x \geqslant 0$ и $2 - x < 0$.

1) Если $2 - x \geqslant 0$ ($x \leqslant 2$), то $y = \dfrac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 0{,}5)$ и $(2; 0)$.

2) Если $2 - x < 0$ ($x > 2$), то $y = -\dfrac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами $(2; 0)$ и $(4; 0{,}5)$.

График заданной функции изображён на рисунке 164.

Решим неравенство $0 \leqslant y < 1$. Получаем $0 \leqslant \left|\dfrac{2-x}{4}\right| < 1$;
$0 \leqslant |2-x| < 4$. Так как неравенство $|2-x| \geqslant 0$ выполняется для всех x, то

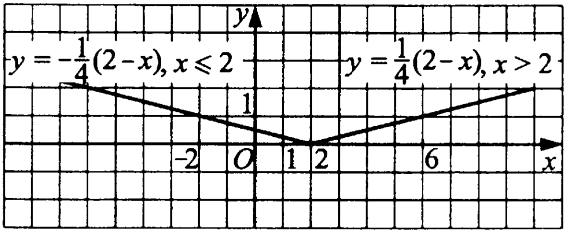


Рис. 164

остаётся решить неравенство $|2-x|<4$; $-4<2-x<4$; $-6<-x<2$; $-2<x<6$.

Ответ: $-2<x<6$.

378. Построим график функции $y = \left|\frac{3+x}{6}\right|$. Отдельно рассмотрим случаи:

1) $3+x \geqslant 0$, тогда $y=\frac{1}{6}(3+x)$. Графиком функции является луч прямой, проходящий через точки с координатами (0; 0,5), (9; 2) (рис. 165).

2) $3+x<0$, тогда $y=-\frac{1}{6}(3+x)$. Графиком функции является луч прямой, проходящий через точки с координатами (−3; 0), (−6; 0,5).

Решим неравенство $-1 \leqslant y \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \left|\frac{3+x}{6}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow -6 \leqslant |3+x| \leqslant 12$.

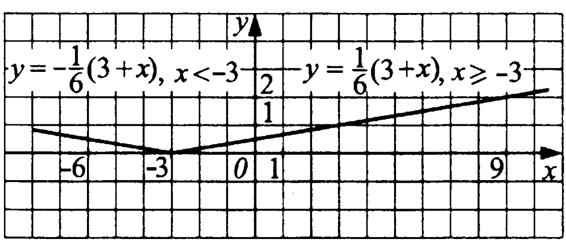


Рис. 165

Так как неравенство $|3+x| \geqslant -6$ выполняется для всех x, то остаётся неравенство $|3+x| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant 3+x \leqslant 12 \Leftrightarrow -15 \leqslant x \leqslant 9$.

Ответ: $-15 \leqslant x \leqslant 9$.

379. Графиком функции $y=3-2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	1	−1

.

Построим прямую (см. рис. 166).

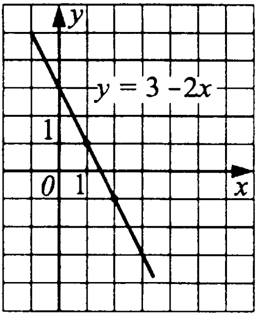


Рис. 166

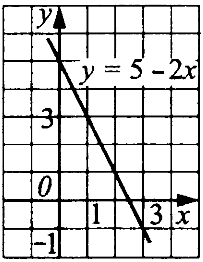


Рис. 167

Так как функция $y = 3 - 2x$ — непрерывная и убывающая, то $y(5) < y < y(-2) \Leftrightarrow -7 < y < 7$.

Ответ: $-7 < y < 7$.

380. Графиком функции $y = 5 - 2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	3
y	3	-1

Построим прямую (см. рис. 167).

Так как $y(x)$ — непрерывная и убывающая функция, то из $-1 < x < 3$ следует $y(3) < y(x) < y(-1)$. Значит, $-1 < y < 7$.

Ответ: $-1 < y < 7$.

381. Графиком функции $y = \frac{5-x}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	5	0
y	0	1,25

Построим прямую (см. рис. 168).

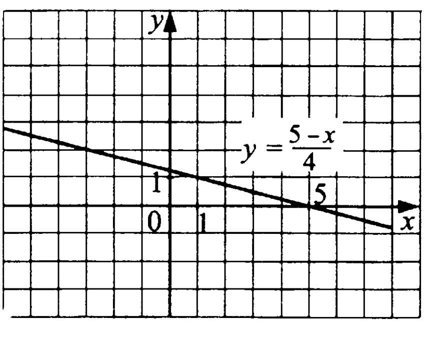


Рис. 168

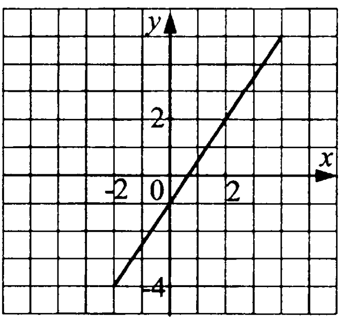


Рис. 169

Так как $0 \leqslant y \leqslant 0{,}25 = \frac{1}{4}$, то $0 \leqslant \frac{5-x}{4} \leqslant \frac{1}{4}$, $0 \leqslant 5-x \leqslant 1$, $-5 \leqslant -x \leqslant -4$; $4 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ: $4 \leqslant x \leqslant 5$.

382. Графиком функции $y = \frac{3x-2}{2}$ является прямая, изображённая на рисунке 169. По графику определяем, что неравенство $-1 < y < 2$ выполняется при $0 < x < 2$.

Ответ: $0 < x < 2$.

383. Графиком функции $y = \frac{x+2}{2}$ является прямая (см. рис. 170). По графику определяем, что неравенство $1{,}5 \leqslant y \leqslant 3$ выполняется при $1 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant 4$.

384. Графиком функции $y = \frac{x+5}{2}$ является прямая (см. рис. 171).

Решим неравенство $-4 < y < -1{,}5$. Получаем $-4 < \frac{x+5}{2} < -1{,}5$; $-8 < x+5 < -3$; $-13 < x < -8$.

Ответ: $-13 < x < -8$.

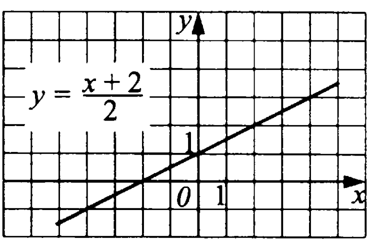


Рис. 170

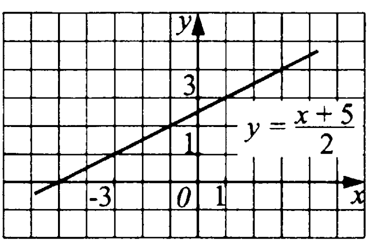


Рис. 171

385. Графиком функции $y = 2x + 3 - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(1; 4)$ (см. рис. 172). По графику определяем, что $3 \leqslant y \leqslant 4$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$.

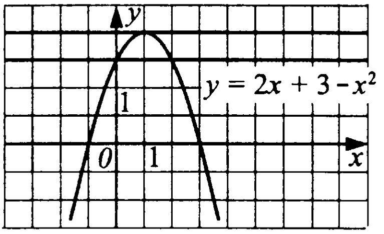


Рис. 172

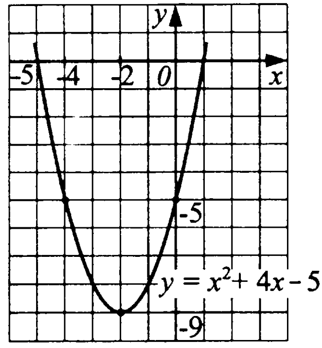


Рис. 173

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 2$.

386. Чтобы построить параболу $y = ax^2 + bx + c$, найдём координаты вершины:

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2} = -2$; $y_0 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = -9$. Так как $a = 1$, то ветви параболы направлены вверх и не подвержены сжатию или растяжению (рис. 173). По графику функции определяем, что $-9 \leqslant y \leqslant -5$ при $-4 \leqslant x \leqslant 0$.

Ответ: $-4 \leqslant x \leqslant 0$.

387. 1. Функцию $y = \dfrac{5 - 2x}{3}$ запишем в виде $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$. Графиком функции $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(1; 1)$ и $\left(\dfrac{5}{2}; 0\right)$ (см. рис. 174).

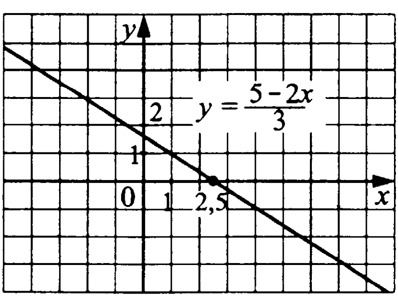


Рис. 174

2. Найдём аналитически, при каких значениях y выполняется неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$.

В силу того, что заданная функция непрерывная и убывающая на всей числовой прямой, неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$ выполняется при

$y\left(3\frac{2}{3}\right) \leqslant y < y(2)$, то есть $-\frac{7}{9} \leqslant y < \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{9} \leqslant y < \frac{1}{3}$.

388. 1. Функцию $y = 3x^{-1}$ запишем в виде $y = \frac{3}{x}$. $D(y)$: $x \neq 0$. Графиком функции $y = \frac{3}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях.

x	$-0{,}5$	1	1,5	2	3	6
y	-6	3	2	1,5	1	0,5

График функции изображён на рисунке 175.

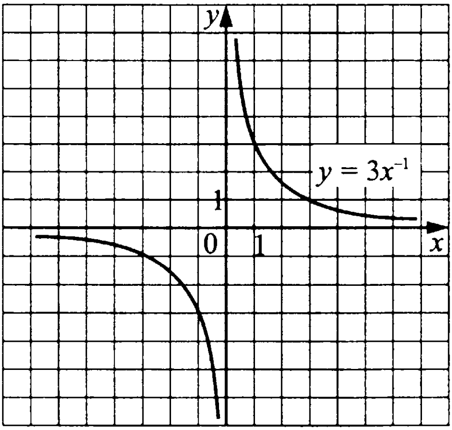


Рис. 175

2. Найдём, при каких значениях x выполняется неравенство $y \geqslant 3{,}3$, решив неравенство $\frac{3}{x} \geqslant 3{,}3$, $\frac{3{,}3x - 3}{x} \leqslant 0$, $\frac{x - \frac{10}{11}}{x} \leqslant 0$, $0 < x \leqslant \frac{10}{11}$ (см. рис. 176).

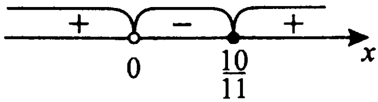


Рис. 176

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{10}{11}$.

389. Графиком функции $y = 7x - 5$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	2	9

Построим прямую (см. рис. 177).

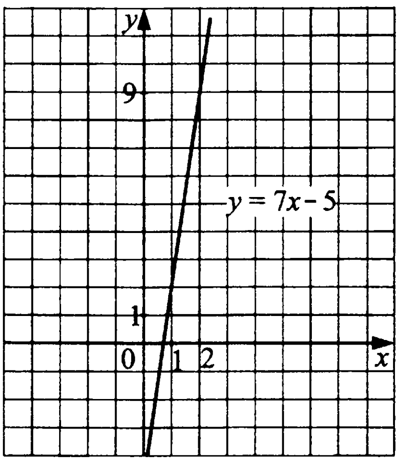


Рис. 177

Так как по условию $y \geqslant -40$, то $7x - 5 \geqslant -40$; $x \geqslant -5$.

Ответ: $x \geqslant -5$.

390. Графиком функции $y = 6x - 7$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	−1	5

Построим прямую (см. рис. 178).

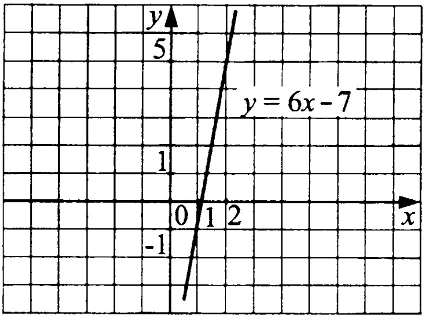


Рис. 178

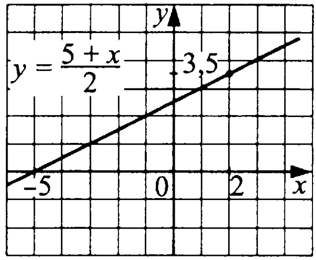


Рис. 179

Так как по условию $y \geqslant -49$, то $6x - 7 \geqslant -49$, $x \geqslant -7$.

Ответ: $x \geqslant -7$.

391. Графиком функции $y = \dfrac{5+x}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	-1
y	3	2

. Построим прямую (см. рис. 179). По графику определяем, что неравенство $0 \leqslant y \leqslant 3{,}5$ выполняется при $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

392. Функцию $y = \dfrac{6-2x}{3}$ запишем в виде $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$. Графиком функции $y = 2 - \dfrac{2}{3}x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2)$ и $(3; 0)$ (см. рис. 180). По графику видно, что $-2 \leqslant y \leqslant 4$ при $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

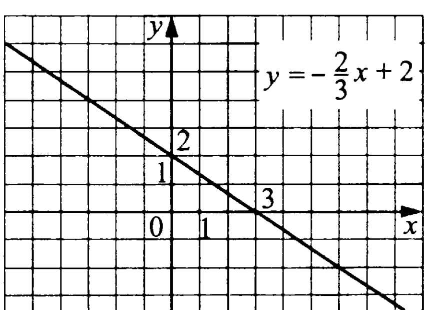


Рис. 180

Ответ: $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

393. Графиком функции $y = 3{,}5 - 0{,}5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 3{,}5)$ и $(7; 0)$ (см. рис. 181). По графику видно, что $0 \leqslant y \leqslant 3{,}5$ при $0 \leqslant x \leqslant 7$.

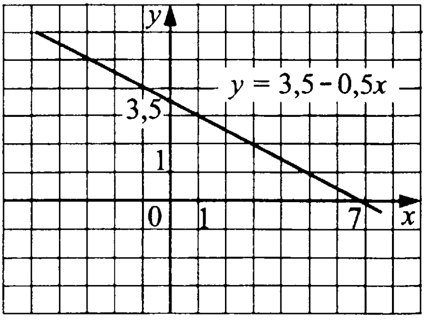


Рис. 181

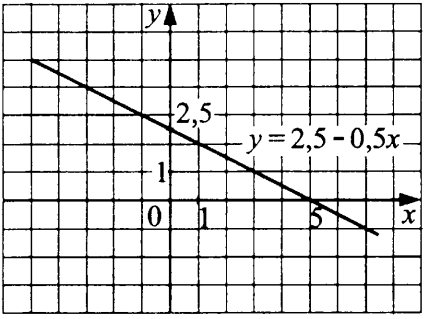


Рис. 182

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 7$.

394. Графиком функции $y = 2{,}5 - 0{,}5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2{,}5)$ и $(5; 0)$ (см. рис. 182). По графику видно, что $0 \leqslant y \leqslant 2{,}5$ при $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 5$.

395. $y = -\frac{x+3}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$; $-5 \leqslant x \leqslant 4$ (см. рис. 183). Функция

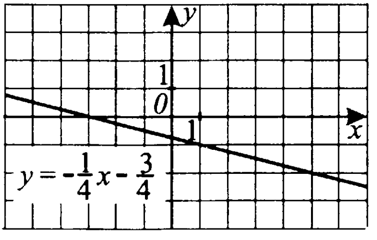


Рис. 183

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ — непрерывная и убывающая. $y(-5) = -\frac{1}{4}(-5) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $y(4) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$. Если $-5 \leqslant x \leqslant 4$, то $-\frac{7}{4} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

Функция $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ принимает на отрезке $[-5; 4]$ два целых значения: $y = -1$ и $y = 0$.

Ответ: 2.

396. Графиком функции $y = \frac{7-x}{3}$; $y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2\frac{1}{3})$ и $(7; 0)$ (см. рис. 184). По графику видно, что на промежутке $-4 \leqslant x \leqslant 6$ функция принимает три целых значения: $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$.

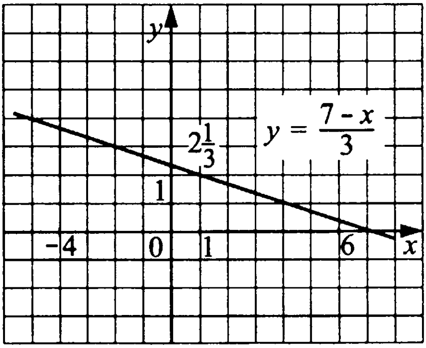


Рис. 184

Ответ: 3.

397. Функция $y = \frac{\sqrt{2x - x^3}}{x^4 - 3x^2 + 1}$ определена при x, удовлетворяющих условию $\begin{cases} 2x - x^3 \geqslant 0, \\ x^4 - 3x^2 + 1 \neq 0. \end{cases}$

1) $x(x^2 - 2) \leqslant 0$; $x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \leqslant 0$; $x \leqslant -\sqrt{2}$; $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ (см. рис. 185).

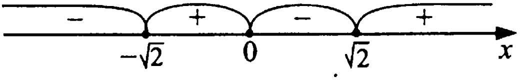


Рис. 185

2) $x^4 - 3x^2 + 1 \neq 0$. Обозначим $x^2 = t$; $t \geqslant 0$, тогда $t^2 - 3t + 1 \neq 0$; $t_1 \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $t_2 \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $x^2 \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, $x^2 \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2} = $

$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$; $x_1 \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

$x_4 \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3) Имеем (см. рис. 186)

$$\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right].$$

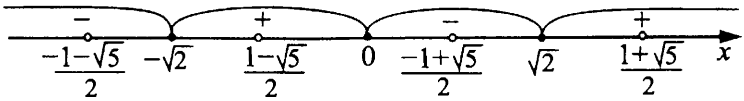


Рис. 186

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{2}\right] \cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup$
$\cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right].$

398. Функция $y = \frac{\sqrt{x^3-7x}}{x^4-5x^2+4}$ определена при x, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} x^3 - 7x \geqslant 0, \\ x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right) \geqslant 0, \\ \left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right) \geqslant 0, \\ (x-2)(x+2)(x-1)(x+1) \neq 0. \end{cases}$$

$\left[-\sqrt{7}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0] \cup \left[\sqrt{7}; +\infty\right)$ (см. рис. 187).

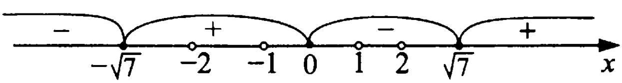


Рис. 187

Ответ: $\left[-\sqrt{7}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0] \cup \left[\sqrt{7}; +\infty\right)$.

399. $y = \sqrt{x^2 - 9x - 22} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Найдём область определения функции, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9x - 22 \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-11)(x+2) \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 11, \end{array}\right. \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \geqslant 11.$

Ответ: $[11; +\infty)$.

400. Функция $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{x}$ определена при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4) \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 4, \end{array} \right. \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \geqslant 4$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

401. Функция $y = \sqrt{7x - x^2 - 10} + \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 - 20x + 25}}$ определена при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 7x - x^2 - 10 \geqslant 0, \\ 4x^2 - 20x + 25 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) \leqslant 0, \\ (2x-5)^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 5, \\ x \neq 2{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $[2; 2{,}5) \cup (2{,}5; 5]$.

402. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Обозначим $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$, тогда $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$.

Графиком функции $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $\left(-\frac{1}{5}; 1\frac{3}{5}\right)$. При $t \geqslant -\frac{1}{5}$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим.}} = y(0) = 2$.

Ответ: 2.

403. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = t^2 + 2t + 1$; $y(t) = (t+1)^2$.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y(t) = (t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$.

При $t \geqslant -1$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим.}} = y(0) = 1$.

Ответ: 1.

404. Функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ определена при $x \leqslant 0$.

Функция $y = 3x + 5$ — монотонно возрастающая, функция $-3\sqrt[4]{-x}$ также монотонно возрастающая, поэтому функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ —

монотонно возрастающая. Наибольшее значение функция примет при $x = 0$, то есть $y = 5$ — наибольшее значение.

Ответ: 5.

405. Функция $y = x - 2\sqrt{-x} - 1$ определена при $x \leqslant 0$.
Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = -t^2 - 2t - 1$; $y(t) = -(t+1)^2$.
Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y = -(t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$. При $t \geqslant -1$ функция убывает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наибольшее значение функции $y_{\text{наиб.}} = y(0) = -1$.

Ответ: -1.

406. Областью определения данной функции являются все x, при которых $6 - 2x \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем
$\dfrac{x^2 - 9}{6 - 2x} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(3-x)} = -0{,}5 \cdot (x+3)$.

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x+3)$, за исключением значения
$y(3) = -0{,}5 \cdot (3+3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup$ $\cup\, (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

407. Областью определения данной функции являются все x, при которых $2x - 6 \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем
$\dfrac{9 - x^2}{2x - 6} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{2(x-3)} = -0{,}5 \cdot (x+3)$. Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x+3)$, за исключением значения $y(3) = -0{,}5 \cdot (3+3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

408. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции $x_0 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

$y_0 = (1{,}5)^2 - 3 \cdot 1{,}5 - 10 = 2{,}25 - 4{,}5 - 10 = -12{,}25$.
Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	-1	-2
y	-10	-6	0

Построим график (см. рис. 188).

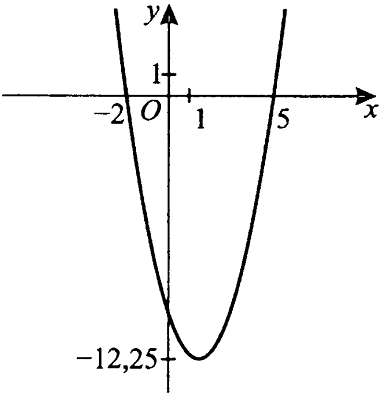


Рис. 188

Ответ: $-12{,}25$.

409. $y = \dfrac{4x - 2x^2}{3} + 2;\ y = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 2.$

График функции $y = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 2$ — парабола, ветви которой направлены вниз.

Найдём координаты вершины:

$x_0 = -\dfrac{b}{2a}, x_0 = -\dfrac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot (-2)} = 1, y_0 = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} + 2 = 2\dfrac{2}{3}.$

$\left(1; 2\dfrac{2}{3}\right)$ — координаты вершины параболы.

Найдём нули функции, решив уравнение $-\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$. $(-1; 0)$ и $(3; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции с осью Ox.

Дополнительные точки:

x	0	2	4	-2
y	2	2	$-\dfrac{10}{3}$	$-\dfrac{10}{3}$

Наибольшее значение функции $y = \dfrac{4x - 2x^2}{3} + 2$ достигается в вершине параболы и равно $2\dfrac{2}{3}$ (см. рис. 189).

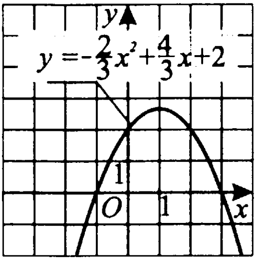


Рис. 189

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

410. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции:

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

$$y_0 = \frac{4}{9}(0{,}75)^2 - \frac{2}{3}\cdot 0{,}75 + 1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Так как $D = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{4}{9}\cdot 1 = \frac{4-16}{9} < 0$, то график лежит всюду выше оси Ox. Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	-1	-2
y	1	$2\frac{1}{9}$	$4\frac{1}{9}$

.

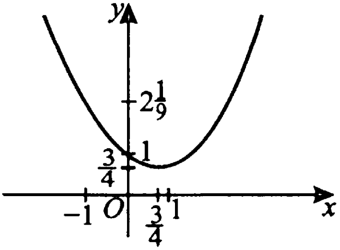


Рис. 190

Построим график (см. рис. 190).

Ответ: $\frac{3}{4}$.

411. График функции $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ — парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 191). Найдём координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$, $y_0 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = -3$. $(3; -3)$ — координаты вершины параболы. Нули функции: $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, следовательно, $(0; 0)$ и $(6; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции с осью Ox.

Дополнительные точки:

x	1	5	-1	7
y	$-1\frac{2}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$

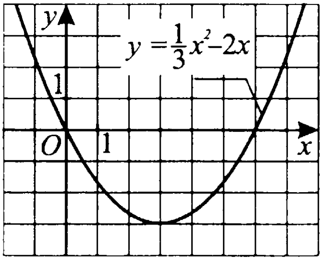


Рис. 191

Функция возрастает на промежутке $[3; +\infty)$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

412. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём нули этой функции, то есть точки, где $-0{,}5x^2 - x + 4 = 0$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 2$. То есть у нас есть ответ на второй вопрос задачи: $-4 \leqslant x \leqslant 2$. Для построения графика найдём наибольшее значение этой функции: $x_0 = \frac{+1}{-1} = -1$, $y_0 = -0{,}5 + 1 + 4 = 4{,}5$.

Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	1	2	4
y	4	2,5	0	-8

Построим график (см. рис. 192).

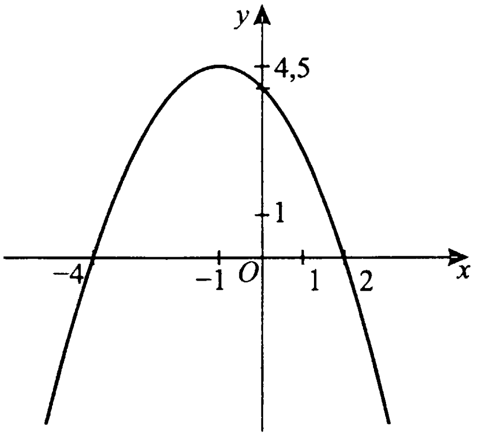


Рис. 192

Ответ: $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

413. Пусть x — длина всего забора, тогда $0{,}3(x-2)$ — длина части забора, которую покрасил мальчик, красивший сразу за Томом, а из следующих трёх мальчиков первый и второй покрасили $\frac{1}{5}x$ и $\frac{1}{6}x$ метров. Пусть y — длина части забора, оставшейся неокрашенной после этого. Из условия следует, что 1 метр (который в конце красил Том) составляет $100\% - 85\% = 15\%$ от y. То есть $0{,}15y = 1$, $y = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$. Так как сумма всех окрашенных частей равна длине всего забора, получаем уравнение:

$2 + 0{,}3(x-2) + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + y = x$; $2 + \frac{3}{10}x - 0{,}6 + \frac{11}{30}x + \frac{20}{3} = x$;

$\frac{20}{30}x + 1{,}4 + \frac{20}{3} = x$; $\frac{24{,}2}{3} = \frac{1}{3}x$; $x = 24{,}2$ (м).

Ответ: 24,2.

414. Пусть первоначально у Кролика было x кг мёда. Винни-Пух за первые 3 часа съел $0{,}4x$ кг, а Пятачок и Кролик съели 300 г мёда. У Кролика осталось $x - 0{,}4x - 0{,}3 = 0{,}6x - 0{,}3$ (кг).

За следующие 3 часа Винни-Пух съел $\frac{2}{3} \cdot (0{,}6x - 0{,}3) = 0{,}4x - 0{,}2$ (кг), а Пятачок и Кролик —100 г. У Кролика осталось

$0{,}6x - 0{,}3 - 0{,}4x + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}2x - 0{,}2$ (кг).

Зная, что осталось 1,6 кг, составим уравнение: $0{,}2x - 0{,}2 = 1{,}6$; $x - 1 = 8$; $x = 9$ (кг). Первоначально у Кролика было 9 кг мёда.

Ответ: 9 кг.

416. Пусть скорость автомобиля II — x км/ч, тогда скорость I — $(x + 10)$ км/ч.

Первый случай: первый автомобиль прошёл $4(x + 10)$ км до встречи, а второй — $3x$ км. Весь путь — $(4(x + 10) + 3x)$ км.

Второй случай: первый до встречи шёл $4{,}5 - 1\frac{5}{6} = 2\frac{2}{3}$ (ч) и прошёл $2\frac{2}{3}(x+10)$ км. Второй прошёл $4\frac{1}{2}x$ км. Весь путь — $\left(2\frac{2}{3}(x+10)+4\frac{1}{2}x\right)$ км.

Зная, что в обоих случаях автомобили проехали один и тот же путь, составим уравнение:

$4(x + 10) + 3x = \frac{8}{3}(x + 10) + 4\frac{1}{2}x$; $4x + 40 + 3x = \frac{8}{3}x + \frac{80}{3} + 4\frac{1}{2}x$;

$7x - \frac{8}{3}x - 4\frac{1}{2}x = \frac{80}{3} - 40$; $-\frac{1}{6}x = -\frac{40}{3}$; $x = 80$.

Скорость автомобиля II — 80 км/ч. Расстояние между пунктами $4(80 + 10) + 3 \cdot 80 = 600$ (км).

Ответ: 600 км.

417. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста I, а y км/ч — скорость велосипедиста II.

Если велосипедист I выедет на 5 ч раньше второго и они встретятся через 5 ч после выезда второго, то к моменту встречи велосипедист I проедет $10x$ км, а второй — $5y$ км.

Если велосипедист II выедет на 2 ч раньше первого и они встретятся через 6 ч после выезда первого, то к моменту встречи велосипедист I проедет $6x$ км, а второй — $8y$ км.

Зная, что расстояние между пунктами 400 км, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x + 5y = 400, \\ 6x + 8y = 400, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 80, & (1) \\ 3x + 4y = 200. & (2) \end{cases}$$

Выразим из уравнения (1) y и подставим его во второе уравнение. Получим $y = 80 - 2x$, $3x + 4(80 - 2x) = 200$, $3x + 320 - 8x = 200$, $-5x = -120$, $x = 24$, $y = 80 - 2 \cdot 24 = 32$.

Таким образом, скорость велосипедиста I — 24 км/ч, скорость велосипедиста II — 32 км/ч.

Ответ: 24 км/ч; 32 км/ч.

418. Пусть скорость движения первой черепахи x м/ч, а второй — y м/ч.

Если бы первая ползла на 40 м/ч быстрее, то через t_1 часов они бы встретились на полпути.

Получаем: $(x+40)\cdot t_1 = y\cdot t_1$ или $x+40=y$.

Если бы вторая ползла на 50 м/ч быстрее, то она проползла бы до встречи за t_2 часов в два раза большее расстояние, чем первая.

Получаем: $2xt_2 = (y+50)\cdot t_2$ или $2x = y+50$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+40=y, \\ 2x=y+50; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+40, \\ 2x=x+40+50; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+40, \\ x=90; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=90, \\ y=130. \end{cases}$$

Итак, 90 м/ч — скорость первой черепахи, 130 м/ч — скорость второй черепахи.

Ответ: 90; 130.

419. Пусть производительность третьего токаря — x деталей в час, а догоняет он второго по числу деталей через y часов. Тогда второй работал $(1+y)$ часов и сделал $5\cdot(1+y)$ деталей, а третий сделал xy деталей. Первое уравнение — $5\cdot(1+y)=xy$.

Третий токарь, чтобы догнать первого, работал $(2+y)$ часов и сделал $x(2+y)$ деталей, а первый работал $(4+y)$ часов и сделал $6\cdot(4+y)$ деталей.

Второе уравнение — $6\cdot(4+y) = x\cdot(2+y)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5\cdot(1+y)=xy, \\ 6\cdot(4+y)=x\cdot(2+y); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+5y=xy, \\ 24+6y-2x=xy; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(1+y)=xy, \\ 5+5y=24+6y-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(1+y)=xy, \\ y=2x-19. \end{cases}$$

Подставим $y=2x-19$ в первое уравнение системы:

$5\cdot(1+2x-19)=x(2x-19)$; $2x^2-29x+90=0$;

$$x_{1,2} = \frac{29\pm\sqrt{841-720}}{4} = \frac{29\pm 11}{4};\ x_1=10,\ x_2=4{,}5.$$

Так как производительность третьего токаря больше, чем первого и второго, производительность третьего токаря равна 10 деталей в час.

Ответ: 10 деталей в час.

420. Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а t ч — время после выезда первого велосипедиста до встречи второго велосипедиста с мотоциклистом. Расстояние, которое проехал второй велосипедист до встречи с мотоциклистом, равно $20(t-2)$ км, а мотоциклист проехал $x(t-4)$ км.

К моменту встречи мотоциклиста с первым велосипедистом мотоциклист проехал $x(t-1)$ км, а первый велосипедист — $30(t+3)$ км. По условию $20(t-2)=x(t-4)$ и $x(t-1)=30(t+3)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 20(t-2)=x(t-4), \\ x(t-1)=30(t+3); \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{20(t-2)}{t-4}, \\ x=\dfrac{30(t+3)}{t-1}; \end{cases}$$

$$\frac{20(t-2)}{t-4}=\frac{30(t+3)}{t-1},\ \ 2(t-2)(t-1)=3(t+3)(t-4),$$

$$2(t^2-3t+2)=3(t^2-t-12),\ \ 2t^2-6t+4=3t^2-3t-36,$$

$t^2+3t-40=0,\ t=-8$ или $t=5$.

Время не может быть отрицательно, поэтому подходит только $t=5$. Отсюда $x=\dfrac{20\cdot(5-2)}{5-4}=20\cdot3=60$; скорость мотоциклиста равна 60 км/ч.

Ответ: 60 км/ч.

422. Пусть выпуск продукции составлял x, отпускная цена — y. Себестоимость — $\frac{3}{4}y$. Прибыль составляла $y-\frac{3}{4}y=\frac{1}{4}y$ (на отпускной цене). Вся прибыль была $\frac{xy}{4}$.

После изменений выпуск продукции составил $1{,}5x$, отпускная цена — $1{,}1y$, себестоимость — $\frac{3}{4}\cdot1{,}2y=0{,}9y$. Прибыль на отпускной цене — $1{,}1y-0{,}9y=0{,}2y$. Вся прибыль составила $1{,}5x\cdot0{,}2y=0{,}3xy$.

Прибыль увеличилась на $0{,}3xy-0{,}25xy=0{,}05xy$, что в процентах составило $\dfrac{0{,}05xy\cdot4}{xy}\cdot100\%=20\%$.

Ответ: 20.

423. Пусть v — первоначальный ежесуточный объём переработки, c_1, c_2 — себестоимость продукции и её отпускная цена до повышения цен, а $\widetilde{v}$, $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$ — те же величины после произошедших изменений. Тогда первоначально прибыль завода составляла $s=v(c_2-c_1)$ у.е./сут., а прибыль завода после произошедших изменений равна $\widetilde{s}=\widetilde{v}\cdot(\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1)$ у.е./сут.

По условию $\widetilde{v}=1{,}3v$; $\widetilde{c}_2=1{,}25c_2$; $\widetilde{c}_1=c_1+\frac{1}{3}c_1=\frac{4}{3}c_1$; $\widetilde{c}_1=0{,}8\widetilde{c}_2$.

Отсюда имеем $\widetilde{c}_1=0{,}8\widetilde{c}_2=0{,}8(1{,}25c_2)=c_2\Rightarrow\widetilde{s}=1{,}3v(1{,}25c_2-c_2)=$

$= \dfrac{1{,}3v \cdot c_2}{4}$. Далее, $c_1 = \dfrac{3}{4}\widetilde{c}_1 = \dfrac{3}{4}c_2 \Rightarrow s = v\left(c_2 - \dfrac{3}{4}c_2\right) = \dfrac{v \cdot c_2}{4}$.

Следовательно, $\dfrac{\widetilde{s}}{s} = \dfrac{(1{,}3v \cdot c_2)/4}{(v \cdot c_2)/4} = 1{,}3$, то есть прибыль завода увеличилась на 30%.

Ответ: 30.

424. Примем весь объём работ за 1. Пусть v_1, v_2, v_3 и v_4 — объём работы, выполняемой за час первой, второй, третьей и четвёртой бригадой соответственно. Тогда из первого условия задачи получаем $v_1 + v_2 + v_3 = \dfrac{1}{8}$, из второго — $v_2 + v_3 + v_4 = \dfrac{3}{20}$, из третьего — $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \dfrac{1}{5}$. Умножим обе части третьего уравнения на 2 и вычтем из него первое и второе уравнения. В результате получим $v_1 + v_4 = \dfrac{1}{8}$, следовательно, первая и четвёртая бригады вместе справятся с работой за 8 часов.

Ответ: 8 ч.

425. Пусть производительность бригады I — x, бригады II — y, бригады III — z, бригады IV — t. Найти $\dfrac{1}{z+t}$.

По условию $\begin{cases} y + z + t = 4x, \\ x + z + t = 3y, \\ x + y = \dfrac{1}{11}. \end{cases}$

Найдём $z + t$ — производительность бригад III и IV —

$\begin{cases} z + t = 4x - y, \\ z + t = 3y - x, \\ x + y = \dfrac{1}{11}; \end{cases}$ $4x - y = 3y - x$; $5x = 4y$; $x = \dfrac{4}{5}y$. Подставим в третье уравнение: $\dfrac{4}{5}y + y = \dfrac{1}{11}$, $\dfrac{9}{5}y = \dfrac{1}{11}$, $y = \dfrac{5}{99}$, $x = \dfrac{4}{99}$. Тогда $z+t = 4 \cdot \dfrac{4}{99} - \dfrac{5}{99}$, $z + t = \dfrac{1}{9}$. Тогда бригадам III и IV понадобится $1 : \dfrac{1}{9} = 9$ (дней).

Ответ: 9 дней.

426. Пусть производительность классов следующая: А — a, Б — b, В — c, Г — d.

Необходимо найти время, за которое могут покрасить забор все четыре класса, то есть $\dfrac{1}{a+b+c+d}$.

По условию $b+c+d=\dfrac{1}{3}$, $a+c+d=\dfrac{1}{2}$, $a+b=\dfrac{1}{5}$;

сложим $2a+2b+2c+2d=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}$, $a+b+c+d=\dfrac{31}{60}$, $\dfrac{1}{a+b+c+d}=\dfrac{60}{31}$.

Все четыре класса могут покрасить забор за $1\dfrac{29}{31}$ часа.

Ответ: $1\dfrac{29}{31}$ ч.

427. Примем весь объём работ за 1. Пусть производительность комбайнов следующая: $I - a$, $II - b$, $III - c$, $IV - d$.

Необходимо найти, за какое время будет выполнена работа, если будут работать все четыре комбайна, то есть $\dfrac{1}{a+b+c+d}$.

По условию $a+b+c=\dfrac{1}{1\frac{1}{3}}$; $a+b+d=\dfrac{1}{2}$; $c+d=\dfrac{1}{1\frac{1}{3}}$.

Получаем $2a+2b+2c+2d=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}$; $a+b+c+d=1$; $\dfrac{1}{a+b+c+d}=1$.

Ответ: 1 ч.

428. Пусть производительность первого студента — x, производительность второго студента — y, производительность первого школьника — z, производительность второго школьника — t.

Необходимо найти $\dfrac{10}{x+y+z+t}$.

По условию $\begin{cases} x+z+t=\dfrac{10}{7}, \\ y+z+t=\dfrac{10}{10}, \\ x+y=\dfrac{10}{12}. \end{cases}$

Тогда $2(x+y)+2(z+t)=\dfrac{10}{7}+\dfrac{10}{10}+\dfrac{10}{12}$, $x+y+z+t=\dfrac{1370}{840}$;

$\dfrac{10}{x+y+z+t}=\dfrac{840}{137}$.

Тогда все вместе они решат 10 задач за $\dfrac{840}{137}$ минут.

Ответ: $\dfrac{840}{137}$ мин.

429. Пусть производительность 1-го садовника — x, производительность 2-го садовника — y, производительность 3-го садовника — z, производительность 4-го садовника — t.

По условию $\begin{cases} x+y=\dfrac{7}{120}, \\ y+z+t=\dfrac{9}{200}, \\ z+x+t=\dfrac{4}{75}. \end{cases}$

Найти $\dfrac{1}{x+y+z+t}$.

Сложим уравнения системы: $2x+2y+2z+2t=\dfrac{7}{120}+\dfrac{9}{200}+\dfrac{4}{75}$, $2(x+y+z+t)=\dfrac{94}{600}$, $x+y+z+t=\dfrac{47}{600}$, $\dfrac{1}{x+y+z+t}=\dfrac{600}{47}$ часа.

Ответ: $\dfrac{600}{47}$ часа.

430. Пусть первоначальная скорость такси x $\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда на путь из A в B было потрачено $\dfrac{200}{x}$ часов, а обратный путь водитель прошёл за $1+\dfrac{200-x}{x-20}$ часов. Зная, что обратный путь занял на $\dfrac{1}{4}$ часа больше, составим уравнение:

$1+\dfrac{200-x}{x-20}=\dfrac{200}{x}+\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{200-x}{x-20}-\dfrac{200}{x}=-\dfrac{3}{4}$;

$\dfrac{200x-x^2-200x+4000}{x(x-20)}=-\dfrac{3}{4}$; $x\neq 0, x\neq 20$.

$4(-x^2+4000)=-3(x^2-20x)$, $-4x^2+16000=-3x^2+60x$,
$x^2+60x-16000=0$, по теореме, обратной теореме Виета, $x_1=100$, $x_2=-160$ (не удовлетворяет условию задачи).

Ответ: 100 км/ч.

431. Пусть расстояние AB равно x км, тогда на этот путь затрачено $\frac{x}{80}$ часов, а на обратный — $\frac{30}{40} + \frac{x-30}{90} = \frac{3}{4} + \frac{x-30}{90}$ часа. Зная, что на обратный путь водитель затратил на $\frac{5}{18}$ часа меньше, составим уравнение:

$\frac{x}{80} - \frac{3}{4} - \frac{x-30}{90} = \frac{5}{18}$; $\frac{x}{80} - \frac{x-30}{90} = \frac{5}{18} + \frac{3}{4}$; $\frac{x}{80} - \frac{x-30}{90} = \frac{37}{36}$;

$\frac{9x - 8x + 240}{720} = \frac{37}{36}$; $x + 240 = 37 \cdot 20$; $x = 500$.

Расстояние между пунктами — 500 км.

Ответ: 500 км.

432. Обозначим через D место встречи поездов. Пусть расстояние $AD = x$ км, а $BD = y$ км (см. рис. 193), тогда $v_I = \frac{y}{50}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а $v_{II} = \frac{x}{8}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Первый поезд прошёл путь AD за $\frac{50x}{y}$ часов, второй поезд прошёл путь BD за $\frac{8y}{x}$ часов. Зная, что до встречи они шли одно и то же время, составим уравнение: $\frac{50x}{y} = \frac{8y}{x}$.

Обозначим $\frac{x}{y} = u$; $50u = \frac{8}{u}$; $50u^2 = 8$; $u^2 = \frac{8}{50}$, $u > 0$; $u = \frac{2}{5}$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ или $\frac{y}{x} = 2{,}5$.

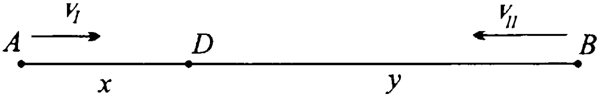


Рис. 193

Первый поезд прошёл до встречи в 2,5 раза меньший путь, чем ему осталось пройти, значит, он потратил на него в 2,5 раза меньше времени, то есть $50 : 2{,}5 = 20$ часов.

Ответ: 20.

433. Пусть C — место встречи двух велосипедистов. Тогда первый велосипедист проехал расстояние $S_2 = CB$ за 48 минут, а второй проехал расстояние $S_1 = AC$ за 27 минут. Так как скорости велосипедистов постоянны, то скорость первого велосипедиста $v_1 = \frac{S_2}{48}$, а скорость второго — $v_2 = \frac{S_1}{27}$. Тогда первый затратил на дорогу до встречи $\frac{S_1}{v_1}$ минут, а второй — $\frac{S_2}{v_2}$ минут. Однако каждый из велосипедистов доехал до места встречи от пункта своего отправления за одно и то же время. Поэтому $\frac{S_1}{v_1} = \frac{S_2}{v_2}$, откуда $\frac{S_1}{\frac{S_2}{48}} = \frac{S_2}{\frac{S_1}{27}} \Rightarrow \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \frac{27}{48}$, $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \frac{9}{16}$, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{4}$.

Следовательно, время от начала движения велосипедистов до их встречи равно $\frac{S_1}{v_1} = 48 \cdot \frac{S_1}{S_2} = 48 \cdot \frac{3}{4} = 36$ минут.

Ответ: 36.

434. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда согласно условию следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x; $x + 8 - 2 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 4 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 6 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 8 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 10 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 12 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 14 = x$; $x + 8 - 16 = x - 8$. Так как по условию на последней остановке было 25 человек, то $x - 8 = 25$; $x = 33$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 12 = 33 + 12 = 45$ (чел.).

Ответ: 45.

435. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда согласно условию следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x; $x + 10 - 6 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 8 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 10 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 12 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 14 = x$; $x + 10 - 16 = x - 6$; $x - 6 + 10 - 18 = x - 14$; $x - 14 + 10 - 20 = x - 24$. Так как по условию на последней остановке было 10 человек, то $x - 24 = 10$; $x = 34$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 6 = 34 + 6 = 40$ (чел.).

Ответ: 40.

436. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 1:

1) 10 раз, обозначая десятки часов; 2 раза, обозначая единицы часов; всего в течение 12 часов;
2) 10 раз, обозначая десятки минут; 5 раз, обозначая единицы минут; в течение 15 минут каждые 12 часов:
15 мин $\cdot$ 12 = 180 мин = 3 часа.
Итого: 12ч + 3ч = 15 ч.

Ответ: 15.

437. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 3:
1) 3 раза, обозначая единицы часов в течение трёх часов;
2) 9 раз, обозначая десятки минут;
3) 6 раз, обозначая единицы минут, в течение 15 минут каждые 21 час:
15 мин $\cdot$ 21 = 315 мин = 5,25 часа.
Итого: 3ч + 5,25 ч = 8,25 ч.

Ответ: 8,25.

438. Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, по условию $x > 3$.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
по течению	$x+3$	$\dfrac{39}{x+3}$	39
против течения	$x-3$	$\dfrac{28}{x-3}$	28
в озере	x	$\dfrac{70}{x}$	70

Зная, что моторная лодка прошла путь по течению реки и против течения реки за то же время, за которое она могла пройти путь по озеру, составим и решим уравнение:

$\dfrac{39}{x+3} + \dfrac{28}{x-3} = \dfrac{70}{x}$, $39x \cdot (x-3) + 28x \cdot (x+3) = 70 \cdot \left(x^2 - 9\right)$,
$39x^2 - 117x + 28x^2 + 84x = 70x^2 - 630$, $3x^2 + 33x - 630 = 0$,
$x^2 + 11x - 210 = 0$.

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 10$, $x_2 = -21$ не удовлетворяет условию $x > 3$. 10 км/ч — скорость лодки в стоячей воде.

Ответ: 10 км/ч.

439. Пусть x км/ч — скорость байдарки в стоячей воде, тогда $(x+2)$ км/ч составит скорость байдарки по течению, а $(x-2)$ км/ч — скорость против течения реки. $\dfrac{25}{x}$ ч — время, которое затратил турист, плывя по озеру,

$\frac{9}{x-2}$ ч — время движения против течения реки, $\frac{56}{x+2}$ ч — время движения по течению. По условию задачи турист плыл по озеру и против течения реки столько же времени, сколько плыл по течению. Составим и решим уравнение:

$\frac{25}{x} + \frac{9}{x-2} = \frac{56}{x+2}$, $x > 2$, $25(x^2 - 4) + 9x(x+2) = 56x(x-2)$,
$25x^2 - 100 + 9x^2 + 18x = 56x^2 - 112x$, $22x^2 - 130x + 100 = 0$,
$11x^2 - 65x + 50 = 0$, $D = 65^2 - 44 \cdot 50 = 4225 - 2200 = 2025$, $x_{1,2} = \frac{65 \pm 45}{22}$,

$x_1 = \frac{110}{22} = 5$, $x_2 = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$ не удовлетворяет условию $x > 2$.

5 км/ч — скорость байдарки в стоячей воде.

Ответ: 5 км/ч.

440. Пусть x кг — масса меди в сплаве, тогда $(x+5)$ кг — первоначальная масса сплава; $\frac{x}{x+5} \cdot 100\%$ — процентное содержание меди в первоначальном сплаве; $(x+20)$ кг — масса нового сплава; $\frac{x}{x+20} \cdot 100\%$ — процентное содержание меди в новом сплаве.
По условию содержание меди понизилось на 30%. Составим и решим уравнение:

$\frac{x}{x+5} \cdot 100 - \frac{x}{x+20} \cdot 100 = 30$, $x > 0$; $\frac{10x}{x+5} - \frac{10x}{x+20} = 3$;
$10x^2 + 200x - 10x^2 - 50x = 3(x+5)(x+20)$; $150x = 3(x+5)(x+20)$;
$x^2 + 25x - 50x + 100 = 0$; $x^2 - 25x + 100 = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = 20$. Оба числа удовлетворяют условию $x > 0$. Первоначальная масса сплава могла быть либо 10 кг, либо 25 кг.

Ответ: 10 кг, 25 кг.

441. Пусть x г — масса серебра в сплаве, тогда $(x+80)$ г — первоначальная масса сплава, $\frac{80}{x+80} \cdot 100\%$ — процентное содержание золота в первоначальном сплаве, $(x+180)$ г — масса сплава после добавления 100 г золота, тогда $\frac{180}{x+180} \cdot 100\%$ — процентное содержание золота в новом сплаве. По условию содержание золота в сплаве по сравнению с первоначальным повысилось на 20%. Составим и решим уравнение:

$\frac{180}{x+180}\cdot 100 - \frac{80}{x+80}\cdot 100 = 20$, $\frac{900}{x+180} - \frac{400}{x+80} = 1$,
$900x + 72000 - 400x - 72000 = x^2 + 260x + 14400$, $x^2 - 240x + 14400 = 0$, $(x-120)^2 = 0$, $x = 120$. 120 г серебра было в сплаве.

Ответ: 120.

443. Пусть до начала матча x часов.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
пешком	5	$x+1$	$5(x+1)$
на велосипеде	10	$x-\frac{1}{2}$	$10\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Зная, что путь от дома болельщика до стадиона один и тот же, составим и решим уравнение:

$5(x+1) = 10\left(x-\frac{1}{2}\right)$; $x+1 = 2x-1$; $x = 2$.

2 часа до начала матча.

Ответ: 2.

444. Пусть x км/ч — скорость пешехода, y км/ч — скорость велосипедиста.

1. Велосипедист отправился в путь на 1 час раньше пешехода, и они встретятся через 2 часа после выезда велосипедиста. Отсюда следует, что пешеход прошёл x км, а велосипедист проехал $2y$ км, значит, $x + 2y = 28$.
2. Пешеход выйдет на 1 час раньше велосипедиста, и через 2 часа после выхода пешехода расстояние между ними сократится в 3,5 раза. Отсюда следует, что пешеход прошёл $2x$ км, а велосипедист проехал y км, значит, $2x + y = 28 - \frac{28}{3{,}5}$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 28, & \big| -2 \\ 2x + y = 20. \end{cases}$$

Сложим $-2x - 4y = -56$ и $2x + y = 20$. Получим $-3y = -36$; $y = 12$.
Подставим $y = 12$ во второе уравнение системы и найдём x:
$2x + 12 = 20$; $2x = 8$; $x = 4$.
4 км/ч — скорость пешехода, 12 км/ч — скорость велосипедиста.

Ответ: 12 км/ч; 4 км/ч.

445. Пусть x г — масса первого раствора, y г — масса второго раствора, тогда $0{,}3x$ г — масса кислоты в первом растворе, $0{,}5y$ г — масса кислоты во втором растворе, $(0{,}3x + 0{,}5y)$ г — масса кислоты в смеси, что по условию задачи составляет 45% массы раствора. Составим уравнение:

$0{,}3x + 0{,}5y = 0{,}45(x + y)$; $0{,}5y - 0{,}45y = 0{,}45x - 0{,}3x$; $0{,}05y = 0{,}15x$; $y = 3x$; $x : y = 1 : 3$.

Ответ: 1 : 3.

446. Пусть x г — масса первого сплава, y г — масса второго сплава, тогда $0{,}4x$ г — масса меди в первом сплаве, $0{,}6y$ г — масса меди во втором сплаве, $(0{,}4x+0{,}6y)$ г — масса меди после того, как соединили два сплава, что по условию задачи составляет 45% массы вновь полученного сплава: $0{,}4x + 0{,}6y = 0{,}45 \cdot (x + y)$; $0{,}6y - 0{,}45y = 0{,}45x - 0{,}4x$; $0{,}15y = 0{,}05x$; $3y = x$; $x : y = 3 : 1$.

Ответ: 3 : 1.

447. Пусть первоначальная скорость катера — x км/ч. Тогда за 3 часа катер прошёл $3x$ км. Оставшееся расстояние $(87{,}5 - 3x)$ км он прошёл за $\frac{87{,}5 - 3x}{x + 2}$ часа. Так как 87,5 км катер должен был проплыть за $\frac{87{,}5}{x}$ часа, то получаем уравнение: $3 + \frac{1}{3} + \frac{87{,}5 - 3x}{x + 2} = \frac{87{,}5}{x}$; $x > 0$;
$\frac{87{,}5 - 3x}{x + 2} = \frac{87{,}5 \cdot 3 - 10x}{3x}$; $(87{,}5 - 3x) \cdot 3x = (87{,}5 \cdot 3 - 10x)(x + 2)$;
$87{,}5 \cdot 3x - 9x^2 = 87{,}5 \cdot 3x - 10x^2 + 2 \cdot 87{,}5 \cdot 3 - 20x$; $x^2 + 20x - 525 = 0$;
$x_1 = 15$; $x_2 = -35$.
Так как $x > 0$, то первоначальная скорость катера 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

448. Пусть t минут — время до встречи пешеходов; v_A, v_B — скорости пешеходов, вышедших из пунктов A и B соответственно (см. рис. 194), тогда

$$\begin{cases} v_A \cdot t = 12v_B, \\ v_B \cdot t = 27v_A; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{12}{t}, \\ \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{t}{27}; \end{cases}$$

$t^2 = 27 \cdot 12$; $t > 0$; $t = \sqrt{27 \cdot 12} = \sqrt{3^4 \cdot 4} = 2 \cdot 9 = 18$.
Через 18 минут после выхода пешеходы встретились.
1) $18 + 12 = 30$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта B.
2) $18 + 27 = 45$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта A.

Ответ: 30 мин, 45 мин.

449. Пусть x г меди и y г цинка находятся в первоначальном куске сплава, тогда $(x+y)$ г — масса сплава. После увеличения количества меди на 40% масса меди в новом сплаве составила $1{,}4x$ г, а после уменьшения количе-

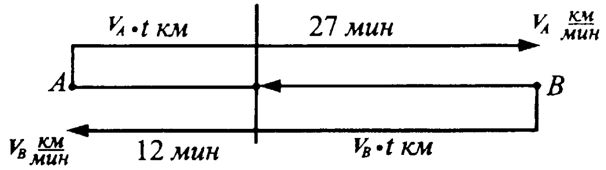


Рис. 194

ства цинка в новом сплаве масса цинка составила $0{,}6y$ г; $(1{,}4x + 0{,}6y)$ г — масса нового сплава.

По условию масса куска сплава увеличилась на 20%, значит, составила $1{,}2(x + y)$ г. Получаем уравнение:
$1{,}2(x+y) = 1{,}4x + 0{,}6y$; $1{,}2y - 0{,}6y = 1{,}4x - 1{,}2x$; $0{,}6y = 0{,}2x$; $3y = x$.

Отсюда следует, что $\frac{x}{y} = 3 : 1$, значит, меди было 75%, а цинка — 25% в первоначальном куске сплава.

Ответ: медь — 75%, цинк — 25%.

450. Пусть в прошлом сезоне продали n абонементов, выручка составила $8000n$ рублей. В настоящем сезоне продали $0{,}75n$ абонементов, стоимость одного абонемента увеличили на x рублей, значит, $(8000 + x) \cdot 0{,}75n$ рублей — выручка в настоящем сезоне. По условию выручка уменьшилась на $2,5\%$ по сравнению с прошлым сезоном, значит, она составила $8000n \cdot 0{,}975$ рублей. Составим и решим уравнение:
$(8000 + x) \cdot 0{,}75n = 8000n \cdot 0{,}975$, $0{,}75x = 8000 \cdot 0{,}225$, $x = 2400$.

На 2400 рублей увеличили стоимость абонемента.

Ответ: 2400.

451. Обозначим через $S_{\text{неч.}}$ сумму членов, стоящих на нечётных местах среди первых 12 членов арифметической прогрессии, а через $S_{\text{чёт.}}$ сумму членов, стоящих на чётных местах среди первых 12 членов арифметической прогрессии. Тогда условие задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} S_{\text{неч.}} + S_{\text{чёт.}} = 354, \\ \dfrac{S_{\text{чёт.}}}{S_{\text{неч.}}} = \dfrac{32}{27}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{\text{чёт.}} = \dfrac{32}{27} S_{\text{неч.}}, \\ S_{\text{неч.}} + \dfrac{32}{27} S_{\text{неч.}} = 354 \end{cases} \Rightarrow$$

$\frac{59}{27} S_{\text{неч.}} = 354 \Rightarrow S_{\text{неч.}} = \frac{354 \cdot 27}{59} = 162$. Тогда $S_{\text{чёт.}} = 354 - S_{\text{неч.}} =$ $= 354 - 162 = 192$.

Если a_k — k-й член арифметической прогрессии, а d — её разность, то $S_{\text{неч.}} = \dfrac{a_1 + a_1 + 2d \cdot 5}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 30d$, так как числа, стоящие на нечётных местах арифметической прогрессии $\{a_k\}$, также составляют арифметическую прогрессию, но с разностью $2d$. Аналогично получим, что
$S_{\text{чёт.}} = \dfrac{a_2 + a_2 + 2d \cdot 5}{2} \cdot 6 = 6a_2 + 30d.$

Поэтому $S_{\text{чёт.}} - S_{\text{неч.}} = (6a_2 + 30d) - (6a_1 + 30d) = 6(a_2 - a_1) = 6d$. Так как $S_{\text{чёт.}} - S_{\text{неч.}} = 30$, то $6d = 30 \Rightarrow d = 5$.

Ответ: 5.

452. Пусть v_A км/ч ($v_A > 0$) и v_B км/ч ($v_B > 0$) — скорости поездов, которые одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно (см. рис. 195).

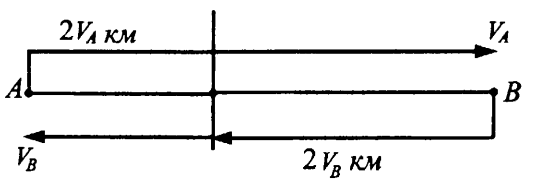


Рис. 195

1) $(v_A + v_B)$ км/ч — скорость сближения, $2(v_A + v_B)$ км — расстояние между пунктами. По условию расстояние составляет 180 км.
$2(v_A + v_B) = 180$.

2) $\dfrac{2v_A}{v_B}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта B.

$\dfrac{2v_B}{v_A}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта A.

По условию второй поезд прибыл в пункт A на 54 мин раньше, чем первый в пункт B.

$\dfrac{2v_B}{v_A} - \dfrac{2v_A}{v_B} = \dfrac{54}{60}$.

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \dfrac{2v_B}{v_A} - \dfrac{2v_A}{v_B} = \dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы найдём отношение $\dfrac{v_B}{v_A}$.

Обозначим $\dfrac{v_B}{v_A} = t, t > 0$.

$2t - \dfrac{2}{t} = \dfrac{9}{10}$; $2t^2 - \dfrac{9}{10}t - 2 = 0$; $20t^2 - 9t - 20 = 0$; $t_1 = \dfrac{5}{4}$; $t_2 = -\dfrac{4}{5}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$, значит, $\dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{5}{4}$.

Вернёмся к исходной системе:

$$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{5}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ v_A = 0{,}8v_B; \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}8v_B + v_B = 90, \\ v_A = 0{,}8v_B, \end{cases}$$

$v_B = 50$, $v_A = 40$. 40 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта A, 50 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта B.

Ответ: 40 км/ч; 50 км/ч.

453. v_A км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта A (первый); v_B км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта B (второй).

3 часа 45 минут $= 3\dfrac{45}{60}$ часа $= 3\dfrac{3}{4}$ часа $= 3{,}75$ часа — время до встречи пешеходов. Пусть t часов $(t > 0)$ — время в пути второго пешехода; $(t + 4)$ — время в пути первого пешехода (см. рис. 196), тогда

$$\begin{cases} 3{,}75v_A = v_B(t - 3{,}75), \\ 3{,}75v_B = v_A(t + 4 - 3{,}75); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{t - 3{,}75}{3{,}75}, \\ \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{3{,}75}{t + 0{,}25}; \end{cases}$$

$\dfrac{t - 3{,}75}{3{,}75} = \dfrac{3{,}75}{t + 0{,}25}$, $t > 0$. $t^2 + 0{,}25t - 3{,}75t - 0{,}9375 = 14{,}0625$;

$t^2 - 3{,}5t - 15 = 0$; $2t^2 - 7t - 30 = 0$; $t_1 = 6$, $t_2 = -\dfrac{5}{2}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

6 часов был в пути второй пешеход, 10 часов был в пути первый пешеход.

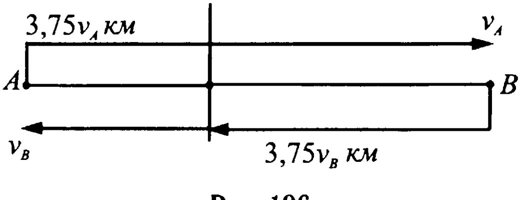


Рис. 196

Ответ: 10 ч; 6 ч.

454. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда после остановки, тогда ($x - 10$) км/ч — скорость поезда до остановки. Так как 420 км составляют 60% всего пути, то весь путь AB равен $\frac{420}{0{,}6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\frac{280}{x - 10}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал его за $\frac{280}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение $\frac{280}{x - 10} - \frac{280}{x} = 0{,}5$; $x_1 = -70$ и $x_2 = 80$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 80 км/ч.

455. Пусть первая швея может выполнить всю работу за x дней ($x > 0$), а вторая — за y дней ($y > 0$). Тогда их производительность — $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ всей работы в день. Можно составить следующие уравнения, приняв всю работу за 1:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{10}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{6}{x} + \frac{6}{y} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$\frac{4}{y} - \frac{1}{10} = 0$; $\frac{4}{y} = \frac{1}{10}$; $y = 40$.

Подставим это значение в первое уравнение системы:

$\frac{6}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{6}{x} = \frac{1}{4}$; $x = 24$.

Итак, первая швея может сделать всю работу за 24 дня, а вторая — за 40 дней.

Ответ: 24, 40.

456. Примем объём работы за 1.

Пусть первая машинистка сможет перепечатать рукопись за x дней ($x > 0$), вторая машинистка — за y дней ($y > 0$), $\frac{1}{x}$ — производительность первой машинистки, а $\frac{1}{y}$ — производительность второй. По условию задачи, работая вместе, они могут перепечатать рукопись за 6 часов; $6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$.

Если машинистки будут работать вместе 5 часов, то они напечатают $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть работы, а если вторая машинистка будет работать 3 часа, она напечатает $\frac{3}{y}$ часть работы. По условию задачи работа при этом будет завершена.

$5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{y}=1.$

Учитывая, что $x>0$, $y>0$, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1, \\ 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{3}{y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ \frac{5}{6}+\frac{3}{y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{y}, \\ \frac{3}{y}=\frac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}, \\ y=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9, \\ y=18. \end{cases}$$

За 9 часов первая машинистка может перепечатать рукопись, за 18 часов перепечатает рукопись вторая машинистка.

Ответ: 9 ч; 18 ч.

457. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого мотоциклиста. Второй мотоциклист был в пути на 6 минут меньше, поэтому $\left(t-\frac{1}{10}\right)$ часов — время поездки второго мотоциклиста. Скорость второго мотоциклиста — 1,25 v км/ч. Учитывая, что $t>0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt=30, \\ 1{,}25v\left(t-\frac{1}{10}\right)=30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{30}{t}, \\ 1{,}25\cdot\frac{30}{t}\cdot\left(t-\frac{1}{10}\right)=30. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы имеем:

$1{,}25-\frac{0{,}125}{t}=1$; $\frac{0{,}125}{t}=0{,}25$; $t=\frac{0{,}125}{0{,}25}=\frac{1}{2}\Rightarrow v=60$ км/ч. Таким образом, 60 км/ч — скорость первого мотоциклиста, а скорость второго равна $v\cdot 1{,}25=75$ км/ч.

Ответ: 60 км/ч; 75 км/ч.

458. Пусть v км/мин — скорость первого пешехода, а t мин — потраченное им на дорогу время. Тогда для второго пешехода время, потраченное им на дорогу, составляет $(t-20)$ мин, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/мин. Учитывая, что $t>0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt=40, \\ \frac{6}{5}v(t-20)=40; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{40}{t}, \\ \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{t}\cdot(t-20)=1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5}-1\right)t=24 \Rightarrow$$

$t=120$.

Ответ: 120.

459. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого грузовика соответственно. Тогда время поездки второго грузовика $\left(t-\frac{1}{2}\right)$ ч, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/ч. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} vt=150, \\ \frac{6}{5}v(t-0{,}5)=150; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{150}{t}, \\ \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{t}\cdot(t-0{,}5)=1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5}-1\right)t=\frac{3}{5} \Rightarrow$$

$t=3$.

Ответ: 3.

460. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки второго автомобиля соответственно. Тогда время поездки первого автомобиля $\left(t-\frac{5}{6}\right)$ ч, а его скорость — 1,5 v км/ч. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} vt=250, \\ 1{,}5v\left(t-\frac{5}{6}\right)=250; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{250}{t}, \\ 1{,}5\cdot\frac{1}{t}\cdot\left(t-\frac{5}{6}\right)=1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1{,}5-1)t=\frac{5}{6}\cdot 1{,}5 \Rightarrow t=\frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

461. Пусть x км/ч $(x>12)$ — скорость мотоциклиста после остановки, тогда $(x-12)$ км/ч — скорость мотоциклиста до остановки. После остановки мотоциклисту осталось проехать 36% пути, то есть $0{,}36\cdot 300 = 108$ км. Следовательно, остаток пути мотоциклист должен был проехать за $\frac{108}{x-12}$ ч, но, потеряв 18 мин (= 0,3 ч), он проехал его за $\frac{108}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение

$\dfrac{108}{x-12} - \dfrac{108}{x} = 0{,}3$; $\dfrac{36}{x-12} - \dfrac{36}{x} = 0{,}1$; $\dfrac{432}{x^2-12x} = 0{,}1$;

$x^2 - 12x - 4320 = 0$; $x_1 = -60$ и $x_2 = 72$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 12$.

Ответ: 72 км/ч.

462. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда до остановки, тогда ($x + 10$) км/ч — скорость поезда после остановки. Так как 420 км составляет 60% всего пути, то весь путь AB равен $\dfrac{420}{0{,}6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\dfrac{280}{x}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал его за $\dfrac{280}{x+10}$ ч. Таким образом, получаем уравнение $\dfrac{280}{x} - \dfrac{280}{x+10} = 0{,}5$; $\dfrac{560}{x} - \dfrac{560}{x+10} = 1$; $\dfrac{5600}{x^2+10x} = 1$; $x_1 = -80$ и $x_2 = 70$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 70 км/ч.

463. 1) Автомобиль двигался на $30 + 25 + 25 = 80$ (мин) $= 1\dfrac{1}{3}$ часа меньше, чем автобус. Пусть t — время движения автомобиля, тогда автобус двигался $t + 1\dfrac{1}{3}$ часов.

2) Если скорость автомобиля v км/ч, то скорость автобуса 0,6 v км/ч. Так как автомобиль и автобус проехали одно и то же расстояние, то получаем уравнение $\left(t + \dfrac{4}{3}\right) \cdot 0{,}6v = vt$.

Сокращая на v ($v \neq 0$), получаем $(3t + 4) \cdot 0{,}2 = t$; $3t + 4 = 5t$; $t = 2$.

3) Теперь найдём скорость автомобиля и автобуса:

$v_{\text{автом.}} = \dfrac{200}{2} = 100$ км/ч, $v_{\text{автоб.}} = \dfrac{200}{2 + \dfrac{4}{3}} = 60$ км/ч.

Ответ: 100; 60.

464. 1) Автомобиль двигался на $25 + 26 - 3 = 48$ (мин) $= \dfrac{4}{5}$ часа меньше, чем велосипедист. Пусть t — время движения автомобиля, тогда велосипедист двигался $t + \dfrac{4}{5}$ часов.

2) Если скорость велосипедиста v км/ч, то скорость автомобиля $2{,}5v$ км/ч. Так как автомобиль и велосипедист проехали одно и то же расстояние, то получаем уравнение $\left(t+\frac{4}{5}\right)\cdot v = 2{,}5vt$. Сокращая на v $(v \neq 0)$, получаем: $t + \frac{4}{5} = 2{,}5t$; $t = \frac{8}{15}$.

3) Теперь найдём скорость автомобиля и велосипедиста:
$v_{\text{автом.}} = \dfrac{64}{\frac{8}{15}} = 120$ (км/ч), $v_{\text{вел.}} = \dfrac{64}{\frac{8}{15}+\frac{4}{5}} = 48$ (км/ч).

Ответ: 120; 48.

465. Пусть x — расстояние между городами A и B, а v $(v > 0)$ — скорость велосипедиста. Тогда скорость мотоциклиста — $3v$. Время, которое затратит велосипедист на преодоление половины пути, будет равно $\frac{x}{2v}$, а время, которое затратит мотоциклист на преодоление того же расстояния, соответственно равно $\frac{x}{2\cdot 3v}$. Имеем первое уравнение системы: $\frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3$. Во втором случае время велосипедиста, затраченное на преодоление расстояния $\left(\frac{x}{2} - 15\right)$, равно $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v}$, а время мотоциклиста, затраченное на преодоление расстояния $\frac{x}{2} + 15$ км, равно $\frac{x}{2\cdot 3v} + \frac{15}{3v}$. Составляем второе уравнение системы: $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2$.

Учитывая, что $v > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2v} = \dfrac{x}{6v} + 3, \\ \dfrac{x}{2v} - \dfrac{15}{v} = \dfrac{x}{6v} + \dfrac{15}{3v} + 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2v} = \dfrac{x}{6v} + 3, \\ \dfrac{x}{2v} - \dfrac{15}{v} = \dfrac{x}{6v} + \dfrac{15}{3v} + 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 18v, \\ 3x - 90 = x + 30 + 12v; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 18v, \\ 2x = 12v + 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ x = 6v + 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 9v = 6v + 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 3v = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 180, \\ v = 20. \end{cases}$$

Ответ: 180 км.

466. Обозначим скорость первого поезда через v_1 км/ч, скорость второго — через v_2 км/ч. Первый поезд проходит расстояние между станциями за $\frac{96}{v_1}$ часов, второй — за $\frac{96}{v_2}$ часов. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{v_1} + \frac{2}{3} = \frac{96}{v_2}, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(96 + \frac{2v_1}{3}\right) \cdot v_2 = 96v_1, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48v_2 + \frac{1}{3}(v_2 + 12)v_2 = 48(v_2 + 12), \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}v_2^2 + 4v_2 - 576 = 0, \\ v_1 = v_2 + 12. \end{cases}$$

Корнями уравнения $v_2^2 + 12v_2 - 1728 = 0$ являются числа 36 и -48. Второе из них не подходит по смыслу задачи. Итак, $v_2 = 36$ км/ч, $v_1 = 48$ км/ч.

Ответ: 36 км/ч; 48 км/ч.

467. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго равна v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 720 км, составляет $\frac{720}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{720}{v_2}$ ч. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{720}{v_2} - 2, \\ \frac{60}{v_1} = \frac{50}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{720}{v_2} - 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{720}{v_1} = \frac{864}{v_1} - 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{144}{v_1} = 2, \\ v_2 = \frac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 72, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 72 км/ч; 60 км/ч.

468. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго — v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 450 км, составляет $\frac{450}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{450}{v_2}$ ч.

Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{450}{v_2} - 1{,}5, \\ \dfrac{250}{v_1} = \dfrac{200}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{450}{v_2} - 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{562{,}5}{v_1} - 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{112{,}5}{v_1} = 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 75, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 75 км/ч; 60 км/ч.

469. Пусть x кг — количество варенья, которое было у Малыша первоначально, а y кг — количество варенья, которое Малыш с Карлсоном взяли с собой на крышу. Тогда в доме Малыша Карлсон съел $0{,}3x$ кг варенья, и из условия задачи имеем уравнение $0{,}3x + 0{,}2 + y + 1{,}7 = x$, (1). Поскольку из взятого на крышу варенья Малыш съел 0,3 кг, то Карлсон съел $(y - 0{,}3)$ кг варенья. Тогда $0{,}3x + y - 0{,}3$ (кг) — общее количество съеденного Карлсоном варенья, и по условию $y - 0{,}3 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}3x + y - 0{,}3)$ (2). Из уравнения (2) выразим y через x: $y - 0{,}3 = 0{,}1x + \frac{1}{3}y - 0{,}1$; $\frac{2}{3}y = 0{,}1x + 0{,}2$; $y = \frac{3}{2} \cdot (0{,}1x + 0{,}2) = 0{,}15x + 0{,}3$. Подставим найденное для y выражение в уравнение (1) и решим полученное уравнение: $0{,}3x + 0{,}2 + 0{,}15x + 0{,}3 + 1{,}7 = x$; $0{,}45x + 2{,}2 = x$; $0{,}55x = 2{,}2$; $x = 4$. Таким образом, у Малыша первоначально было 4 кг варенья.

Ответ: 4 кг.

470. Пусть x км — протяжённость всего выбранного туристами маршрута, а y км — протяжённость части маршрута, оставшейся после четырёх дней похода. Тогда из условия задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 20 + 0{,}3(x - 20) + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{5}x + y = x, \\ y = 0{,}8y + 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $0{,}2y = 2$, $y = 10$. Подставив найденное значение y в первое уравнение, получаем

$20 + \dfrac{3x}{10} - 6 + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5} + 10 = x$; $\dfrac{12x + 10x + 8x}{40} + 24 = x$; $x - \dfrac{3}{4}x = 24$; $x = 96$.

Итак, протяжённость всего выбранного туристами маршрута составляет 96 км.

Ответ: 96 км.

471. Пусть x литров — объём первого ведра, а y литров — объём второго. Время, необходимое для того, чтобы набрать оба ведра из первого крана, равно $\frac{x+y}{5}$ минут. А время, необходимое для того, чтобы набрать первое ведро из второго крана, равно $\frac{x}{7}$ минут. Отсюда получаем $\frac{x+y}{5} = 2 \cdot \frac{x}{7}$; $7(x+y) = 10x$; $7y = 3x$.

Таким образом, $\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$.

Ответ: $\frac{7}{3}$.

472. Пусть скорость лодки x км/ч ($x > 0$), тогда скорость катера $4x$ км/ч. Тогда время, затрачиваемое катером на прохождение 16 километров, равно $\frac{16}{4x}$ часов, а время, затрачиваемое лодкой, — $\frac{16}{x}$ часов. Отсюда получаем $\frac{16}{4x} + 3 = \frac{16}{x}$; $\frac{12}{x} = 3$; $x = 4$.

Ответ: 4 км/ч.

473. Пусть первый рабочий может наклеить обои в комнате за x часов ($x > 0$), тогда второй рабочий наклеит обои за $x+5$ часов. Всю работу примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого рабочего, $\frac{1}{x+5}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они наклеят обои за 6 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{6}$. Таким образом, имеем $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$; $\frac{2x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{6}$; $x(x+5) = 6(2x+5)$; $x^2 - 7x - 30 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 10$. $x_1 = -3$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 10$. Таким образом, первый рабочий может выполнить работу за 10 ч, второй — за 15 ч.

Ответ: 10 ч, 15 ч.

474. Пусть первая бригада может вспахать поле за x часов ($x > 0$), тогда вторая бригада может вспахать поле за $x + 12$ часов. Примем всю работу за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первой бригады, а $\frac{1}{x+12}$ — производительность второй. Так как, работая вместе, они вспахали поле за 8 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{8}$. Таким образом, имеем $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}=\frac{1}{8}$; $\frac{2x+12}{x(x+12)}=\frac{1}{8}$; $x(x+12)=8(2x+12)$; $x^2-4x-96=0$; $x_1=-8$, $x_2=12$. $x_1=-8$ не удовлетворяет условию $x>0$, то есть $x=12$; первая бригада может вспахать поле за 12 ч, вторая — за 24 ч.

Ответ: 12 ч; 24 ч.

475. Пусть первый токарь может выполнить задание за x часов ($x>0$), тогда второй токарь может выполнить задание за $x+7$ часов. Всю работу примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого токаря, $\frac{1}{x+7}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они выполнили задание за 12 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{12}$. Таким образом, имеем

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{12}$; $\frac{2x+7}{x(x+7)}=\frac{1}{12}$; $x(x+7)=12(2x+7)$; $x^2-17x-84=0$; $x_1=-4$, $x_2=21$. $x_1=-4$ не удовлетворяет условию $x>0$, то есть $x=21$; первый токарь может выполнить задание за 21 ч, второй — за 28 ч.

Ответ: 21 ч; 28 ч.

476. Пусть x страниц в час печатала первая машинистка, тогда вторая в час печатала $(x-2)$ страницы. Так как вторая машинистка работала на 1 час дольше, то получаем уравнение $\frac{60}{x-2}-\frac{60}{x}=1$, $(x>2)$. Отсюда имеем $\frac{60x-60(x-2)}{(x-2)x}=1$; $120=(x-2)x$; $x^2-2x-120=0$; $x_1=-10$, $x_2=12$. $x_1=-10$ не удовлетворяет условию $x>2$, значит, первая машинистка печатала $x=12$ страниц в час.

Ответ: 12.

477. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Петя до того момента, когда его догонит Вася. Тогда Вася, до того как догонит Петю, будет находиться в пути $\left(t-\frac{1}{3}\right)$ часов. Всего Петя пройдёт $4{,}5t$ км, а Вася проедет $12\left(t-\frac{1}{3}\right)$ км. Решим уравнение:

$4{,}5t = 12\left(t-\frac{1}{3}\right)$; $4{,}5t = 12t - 4$; $7{,}5t = 4$; $t = \frac{8}{15}$. Следовательно, Вася догонит Петю на расстоянии $\frac{4{,}5 \cdot 8}{15} = 0{,}3 \cdot 8 = 2{,}4$ км от школы.

Ответ: 2,4 км.

478. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Нина до того момента, когда её догонит брат. Тогда брат, до того как догонит Нину, будет находиться в пути $(t - 0{,}1)$ часов. Следовательно, Нина проедет $15t$ км, а брат проедет $40(t - 0{,}1)$ км. Решим уравнение: $15t = 40(t - 0{,}1)$; $15t = 40t - 4$; $25t = 4$; $t = \frac{4}{25}$. Итак, брат догонит Нину на расстоянии $15t = 15 \cdot \frac{4}{25} = 2{,}4$ км от дома.

Ответ: 2,4.

479. Пусть x км/ч — первоначальная скорость автобуса, а S км — расстояние между городами, тогда $S = 8x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 10)$ км/ч (через 5 ч после начала движения) автобус проехал оставшуюся часть пути за $\left(3+\frac{1}{3}\right)$ часа. Таким образом, имеем

$S = 5x + \frac{10}{3}(x - 10)$; $5x + \frac{10}{3}x - \frac{100}{3} = 8x$; $\frac{x}{3} = \frac{100}{3}$; $x = 100$; то есть первоначальная скорость автобуса равна 100 км/ч.

Ответ: 100.

480. Пусть x км/ч — первоначальная скорость велосипедиста, а S км — расстояние, проезжаемое велосипедистом, тогда $S = 2x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 3)$ км/ч (через 1,5 ч после начала движения) велосипедист проехал оставшуюся часть пути за 40 мин $= \frac{2}{3}$ часа. Таким образом, имеем

$S = 1{,}5x + \frac{2}{3}(x - 3)$; $1{,}5x + \frac{2}{3}x - 2 = 2x$; $\frac{x}{6} = 2$; $x = 12$, то есть первоначальная скорость велосипедиста равна 12 км/ч.

Ответ: 12.

481. Пусть x км/ч ($x > 0$) — первоначальная скорость поезда, тогда $x+6$ км/ч — скорость поезда после задержки. Так как весь путь AB равен 78 км, а до задержки поезд проехал на 12 км больше, чем после задержки, то длина пути, пройденного до задержки, равна $\frac{78+12}{2} = 45$ км. Тогда после задержки поезду осталось проехать $78-45 = 33$ км. Следовательно, первую часть пути поезд проехал за $\frac{45}{x}$ ч, а вторую часть — за $\frac{33}{x+6}$ ч. По условию первый отрезок времени больше второго на 15 мин (= 0,25 ч). Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{45}{x} - \frac{33}{x+6} = 0{,}25;\ \frac{180}{x} - \frac{132}{x+6} = 1;\ \frac{48x+1080}{x^2+6x} = 1;\ x^2-42x-1080 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x, и получаем корни $x_1 = -18$ и $x_2 = 60$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 60 км/ч.

482. Пусть x км/ч ($x > 75$) — скорость третьего мотоциклиста, тогда его скорость сближения с первым мотоциклистом равна $(x-75)$ км/ч, а со вторым — $(x-60)$ км/ч. За 20 мин (= $\frac{1}{3}$ ч), к моменту, когда третий мотоциклист выехал из пункта A, первый мотоциклист проехал $\frac{1}{3}\cdot 75 = 25$ (км), а второй — $\frac{1}{3}\cdot 60 = 20$ (км). Следовательно, третий мотоциклист догонит первого за $\frac{25}{x-75}$ ч, а второго за $\frac{20}{x-60}$ ч. По условию первый отрезок времени больше второго на 1 ч. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{25}{x-75} - \frac{20}{x-60} = 1;\ \frac{5x}{(x-75)(x-60)} = 1;\ x^2 - 140x + 4500 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x, и получаем корни $x_1 = 50$ и $x_2 = 90$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 75$.

Ответ: 90 км/ч.

483. Пусть s — расстояние между A и B. Тогда $\frac{s}{5}$ — скорость движения парохода по течению (собственная скорость парохода плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{7}$ — скорость движения парохода против течения (собственная скорость парохода минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{5} - \frac{s}{7}\right) : 2 = \frac{s}{35}$. Следовательно, плоты от A до B плывут $s : \frac{s}{35} = 35$ суток.

Ответ: 35.

484. Пусть s — расстояние между A и B. Тогда $\frac{s}{4}$ — скорость движения моторной лодки по течению (собственная скорость моторной лодки плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{5}$ — скорость движения моторной лодки против течения (собственная скорость моторной лодки минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{4} - \frac{s}{5}\right) : 2 = \frac{s}{40}$. Следовательно, скорость движения моторной лодки по течению больше скорости течения в $\frac{s}{4} : \frac{s}{40} = 10$ раз.

Ответ: 10.

485. Пусть второй насос перекачивает ежечасно x м^3 ($x > 10$), тогда он работал $\frac{480}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает $(x - 10)$ м^3 в час, и, значит, он работал $\frac{360}{x-10}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос работал дольше, чем второй, на 2 часа, то есть имеем уравнение $\frac{360}{x-10} - \frac{480}{x} = 2$; $\frac{360x - 480(x-10)}{(x-10)x} = 2$; $2x^2 - 20x = 4800 - 120x$; $x^2 + 50x - 2400 = 0$; $x_1 = -80$, $x_2 = 30$. $x_1 = -80$ не удовлетворяет условию $x > 10$, то есть второй насос перекачивает за час $x = 30$ м^3; при этом первый насос перекачивает 20 м^3.

Ответ: 20 и 30.

486. Пусть второй насос перекачивает ежечасно x м^3 ($x > 0$), тогда 100 м^3 он перекачивает за $\frac{100}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает $(x + 5)$ м^3/ч, значит, 90 м^3 он перекачивает за $\frac{90}{x+5}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос перекачивает 90 м^3 на 1 час быстрее, чем второй 100 м^3, значит, имеем уравнение $\frac{90}{x+5} + 1 = \frac{100}{x}$;

$\dfrac{100(x+5)-90x}{x(x+5)}=1$; $x^2+5x=10x+500$; $x^2-5x-500=0$; $x_1=-20$, $x=25$. $x_1=-20$ не удовлетворяет условию $x>0$, то есть второй насос перекачивает $x=25$ м^3/ч; при этом первый насос перекачивает 30 м^3.

Ответ: 30 и 25.

487. Обозначим через x и y количество первого и второго растворов соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда из условия следует уравнение

$\dfrac{0{,}4x+0{,}7y}{x+y}=0{,}6$; $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 1 : 2.

488. Обозначим через x и y количество первого и второго сплавов соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда из условия следует уравнение

$\dfrac{0{,}25x+0{,}45y}{x+y}=0{,}3$; $\dfrac{x}{y}=3$.

Ответ: 3 : 1.

489. Пусть x и y — количество первого и второго сплава соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда концентрация железа в новом сплаве составит

$\dfrac{0{,}75x+0{,}25y}{x+y}=0{,}4\Leftrightarrow 0{,}35x=0{,}15y$; $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{7}$.

Ответ: 3 : 7.

490. Пусть x и y — количество первого и второго растворов соли соответственно ($x>0$, $y>0$). Тогда концентрация соли в новом растворе составит $\dfrac{0{,}64x+0{,}36y}{x+y}=0{,}48\Leftrightarrow 0{,}16x=0{,}12y$; $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$.

Ответ: 3 : 4.

491. Пусть x — скорость парохода по течению, y — скорость против течения. В задаче требуется найти $k=\dfrac{x}{y}$, ($k>1$) (см. рис. 197).

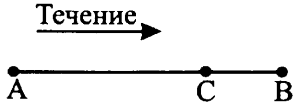


Рис. 197

По условию задачи имеем $\dfrac{AB}{x}=2$; $\dfrac{BC}{y}=2$. Кроме того,

$\dfrac{BC}{x}+\dfrac{AB}{y}=5$. Отсюда $AB=2x$, $BC=2y$, $\dfrac{2y}{x}+\dfrac{2x}{y}=5$. Составим уравнение: $\frac{2}{k} + 2k = 5$; $2k^2 - 5k + 2 = 0$. Корни: $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Так как $k > 1$, то $k = 2$. Значит, скорость парохода по течению в два раза больше скорости парохода против течения.

Ответ: 2.

492. Пусть x — скорость грузовика при движении с горы, y — скорость при движении в гору. В задаче требуется найти $k = \frac{x}{y}$ $(k > 1)$. Обозначим, согласно условию задачи: A и B — конечные точки движения и C — нижняя точка (см. рис. 198).

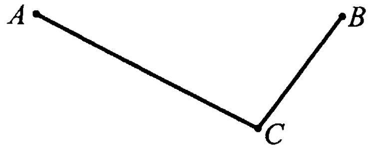


Рис. 198

Тогда имеем $\frac{AC}{x} = 3$; $\frac{CB}{y} = 7$; $\frac{BC}{x} + \frac{CA}{y} = 22$. Откуда $\frac{7y}{x} + \frac{3x}{y} = 22$; $\frac{7}{k} + 3k = 22$; $3k^2 - 22k + 7 = 0$. Корни: $k_1 = 7$, $k_2 = \frac{1}{3}$. Так как $k > 1$, то $k = 7$. Значит, скорость грузовика при движении с горы в семь раз больше скорости грузовика при движении в гору.

Ответ: 7.

493. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса; C — место их встречи. Тогда $\frac{AC}{x}$ (ч) и $\frac{CB}{y}$ (ч) — время, проведённое в пути до встречи автомобилем и автобусом соответственно; $\frac{AC}{y}$ (ч) и $\frac{CB}{x}$ (ч) — время, проведённое в пути после встречи автомобилем и автобусом соответственно. По условию $\frac{AC}{y} = 9$; $\frac{CB}{x} = 4$; $\frac{AC}{x} = \frac{CB}{y}$; $x > 0$;

$y > 0$. Отсюда $\dfrac{9y}{x} = \dfrac{4x}{y}$; $4x^2 = 9y^2$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$. Так как $x > 0$; $y > 0$, то $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

494. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса, C — место их встречи (см. рис. 199).

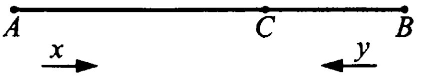


Рис. 199

Требуется найти $\dfrac{AB}{y}$ — время в пути автобуса. Так как они выехали из пунктов A и B одновременно, то до места встречи в пути они были одинаковое время: $\dfrac{AC}{x} = \dfrac{BC}{y}$. Из условия задачи следует, что $\dfrac{AC}{y} = 16$ и $\dfrac{BC}{x} = 4$, отсюда $AC = 16y$; $BC = 4x$. Следовательно, $\dfrac{16y}{x} = \dfrac{4x}{y}$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 4, (x > 0, y > 0)$; $\dfrac{x}{y} = 2$. Так как $AB = AC + BC$, то

$$\frac{AB}{y} = \frac{AC+BC}{y} = \frac{16y+4x}{y} = 16 + 4\cdot\frac{x}{y} = 16 + 4\cdot 2 = 24 \text{ (часа)}.$$

Ответ: 24.

495. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего рабочих (объём работ/день) соответственно ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Весь объём работ примем за 1. Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 3, \\ \dfrac{1}{x+z} = 3, \\ \dfrac{1}{y+z} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3}, \\ x + z = \dfrac{1}{3}, \\ y + z = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения системы:

$2(x+y+z)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$; $x+y+z=\frac{5}{12}$. Поэтому, работая втроём, рабочие выполнят всю работу за $\frac{1}{x+y+z}=\frac{12}{5}=2{,}4$ ч.

Ответ: 2,4.

496. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего рабочих соответственно. Весь объём работ примем за 1. Тогда из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=18, \\ \frac{1}{x+z}=12, \\ \frac{1}{y+z}=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{18}, \\ x+z=\frac{1}{12}, \\ y+z=\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Требуется найти $\frac{1}{x+y+z}$. Сложим все три уравнения полученной системы: $2(x+y+z)=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$. Значит, $x+y+z=\frac{1}{8}$. А искомое значение $\frac{1}{x+y+z}=8$ (ч).

Ответ: 8.

497. Обозначим через x и y стоимость 1 кг первого и второго продуктов соответственно. Тогда из условия задачи $x+10y=200$. Первый продукт подорожал на 15%, то есть его стоимость составила $x+\frac{15}{100}x=1{,}15x$. Второй продукт подешевел на 25%, то есть его стоимость составила $y-\frac{25}{100}y=0{,}75y$. Поэтому $1{,}15x+10\cdot 0{,}75y=182$. Эти два условия должны выполняться одновременно: $\begin{cases} x+10y=200, \\ 1{,}15x+7{,}5y=182; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=200-10y, \\ 1{,}15(200-10y)+7{,}5y=182. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $230-11{,}5y+7{,}5y=182$; $y=12$. Тогда из первого уравнения $x=200-120=80$. Итак, $x=80$, $y=12$.

Ответ: 80 и 12.

498. Пусть в 100 г первого раствора было x г соли (x%-ный раствор), а в 100 г второго раствора — y г соли (y%-ный раствор). Тогда до испарения в 1000 г первого раствора содержалось $10x$ г соли, а в 1000 г второго раствора — $10y$ г соли. После испарения такое же количество соли стало содержаться соответственно в 800 г каждого раствора, то есть концентрация соли в каждом растворе увеличилась в $\dfrac{1000}{800} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ раза. Пусть также до испарения мы брали a г второго раствора (и $2a$ г первого), а после испарения b г второго раствора (и $4b$ г первого). Составим и решим систему уравнений, учитывая, что концентрация соли в смеси будет 10%:

$$\begin{cases} \dfrac{2a\cdot(x/100)+a\cdot(y/100)}{3a}=0{,}1, \\ \dfrac{4b\cdot(1{,}25x/100)+b\cdot(1{,}25y/100)}{5b}=0{,}1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=30, \\ 5x+1{,}25y=50; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=5, \\ y=20. \end{cases}$$

Ответ: 5 и 20.

499. Пусть первый поезд проходит путь от A до B за t_1 ч ($t_1 > 0$), а второй поезд путь от B до A — за t_2 ч ($t_2 > 0$). Если обозначить расстояние от A до B (или от B до A) через s км, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{t_1}{2}-2=\dfrac{t_2}{2}, \\ \left(\dfrac{s}{t_1}+\dfrac{s}{t_2}\right)\cdot 2 = s-\dfrac{s}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=t_2+4, \\ 8(t_1+t_2)=3t_1t_2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1=t_2+4, \\ 3t_2^2-4t_2-32=0. \end{cases}$$

Корнями последнего уравнения являются $t_2 = 4$ и $t_2 = -\dfrac{8}{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Значит, $t_2 = 4$ ч. Отсюда $t_1 = 8$ ч.

Ответ: 8 и 4.

500. Пусть скорость велосипедиста равна v_1 км/ч, а скорость мотоциклиста — v_2 км/ч. По условию велосипедист проезжает каждую минуту на 500 м меньше, чем мотоциклист. Это соответствует тому, что его скорость на $\dfrac{\frac{1}{2}\text{ км}}{\frac{1}{60}\text{ ч}} = 30$ км/ч меньше скорости мотоциклиста. Тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} v_1 + 30 = v_2, \\ \dfrac{120}{v_1} - 2 = \dfrac{120}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 + 30, \\ v_1^2 + 30v_1 - 1800 = 0. \end{cases}$

Корнями последнего уравнения являются $v_1 = 30$ и $v_1 = -60$. Второй корень очевидно не удовлетворяет условию задачи. Значит, $v_1 = 30$. Из первого уравнения $v_2 = 60$.

Ответ: 30 и 60.

501. Имеется 200 граммов 30%-го раствора. Значит, кислоты в них $\dfrac{200 \cdot 30}{100} = 60$ (г). Обозначим через x количество воды (в граммах), которое нужно долить, чтобы получился 6%-ный раствор. Тогда $\dfrac{60}{200 + x} = \dfrac{6}{100}$. Отсюда $x = 800$ (г).

Ответ: 800.

502. Имеется 300 граммов 20%-го раствора кислоты с водой. Значит, кислоты в этом растворе $300 \cdot \dfrac{20}{100} = 60$ (г). Обозначим через x количество воды (в граммах), которое нужно добавить в имеющийся раствор, чтобы получился 16%-ный раствор. Тогда $\dfrac{60}{300 + x} = \dfrac{16}{100}$. Отсюда $x = 75$ (г).

Ответ: 75.

503. Пусть первый экскаватор, работая один, вырыл яму за x часов, тогда второй вырыл бы её за $3x$ часов. $\dfrac{49}{x}$м^3/ч — производительность первого экскаватора, а $\dfrac{49}{3x}$м^3/ч — производительность второго экскаватора. Так как их совместная производительность равна $49 : 1{,}5 = \dfrac{98}{3}$(м^3/ч), получим уравнение $\dfrac{49}{x} + \dfrac{49}{3x} = \dfrac{98}{3}$; $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x} = \dfrac{2}{3}$; $x = 2$.

Первый экскаватор вырыл бы яму за 2 часа, а половину ямы за 1 час, тогда второй вырыл бы яму за 6 часов, а половину — за 3 часа. Если бы каждый по очереди вырыл бы половину ямы, то они вырыли бы яму за $1 + 3 = 4$(ч).

Ответ: 4.

504. Пусть скорость перевозки зерна второго грузовика — x (т/ч), тогда скорость первого — $2{,}5x$ (т/ч). Имеем $(2{,}5x + x) \cdot 3 = 31{,}5$, откуда $x = 3$. Первый грузовик привёз бы 21 т зерна за $\frac{21}{7{,}5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ (ч), а второй — 10,5 т за $\frac{10{,}5}{3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ (ч). Общее время равно $3\frac{1}{2} + 2\frac{4}{5} = 6\frac{3}{10} = 6{,}3$ (ч).

Ответ: 6,3.

505. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость первого поезда, а y км/ч ($y > 0$) — скорость второго поезда. За $\frac{840}{x}$ часов пройдёт 840 км первый поезд, а за $\frac{840}{y}$ часов пройдёт это же расстояние второй поезд.

По условию задачи первый поезд затратит времени на 2 часа меньше, чем второй, значит, $\frac{840}{y} - \frac{840}{x} = 2$. За $\frac{63}{x}$ часов пройдёт 63 км первый поезд, за $\frac{54}{y}$ часов пройдёт 54 км второй поезд.

По условию время, затраченное поездами, одинаково, значит, $\frac{63}{x} = \frac{54}{y}$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 63 \cdot \frac{1}{x} = 54 \cdot \frac{1}{y}, \\ 840 \cdot \frac{1}{y} - 840 \cdot \frac{1}{x} = 2. \end{cases}$$

Замена $\frac{1}{x} = a$; $\frac{1}{y} = b$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 7a = 6b, \\ 420b - 420a = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{7}b, \\ 60b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{70}, \\ b = \frac{1}{60}. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем $x = 70$; $y = 60$.

Тогда 70 км/ч — скорость первого поезда; 60 км/ч — скорость второго поезда, $70 - 60 = 10$ (км/ч).

Ответ: 10.

506. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость лодки по течению, y км/ч ($y > 0$) — скорость лодки против течения. Так как 12 мин $= \frac{1}{5}$ ч, 40 мин $= \frac{2}{3}$ ч, 52 мин $= \frac{13}{15}$ ч, то $\frac{1}{5} \cdot x$ км — путь, пройденный одной лодкой по течению; $\frac{2}{3} \cdot y$ км — путь, пройденный другой лодкой против течения; $\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y}$ ч — время, затраченное одной лодкой на обратный путь против течения; $\frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x}$ ч — время, затраченное другой лодкой на обратный путь по течению.

Зная, что время, затраченное лодками на обратный путь, в сумме равно $\frac{13}{15}$ часа, составим и решим уравнение: $\frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x} = \frac{13}{15}$. Обозначим искомое отношение скорости лодки по течению к скорости лодки против течения через t, имеем $\frac{x}{y} = t, t > 1$. Тогда уравнение примет вид $\frac{1}{5}t + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{13}{15}$; $3t^2 - 13t + 10 = 0$; $t_1 = \frac{10}{3}$, $t_2 = 1$ — не удовлетворяет условию $t > 1$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

507. Пусть x — концентрация первого раствора в процентах, y — второго. Из условия задачи следует

$$\begin{cases} 2\frac{x}{100} + 6\frac{y}{100} = \frac{36}{100} \cdot (2+6), \\ \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = \frac{32}{100} \cdot (1+1). \end{cases}$$

Во втором уравнении считаем (не нарушая общности), что первого и второго раствора берут по одному килограмму.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 36 \cdot 8, \\ x + y = 32 \cdot 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6(64 - x) = 288, \\ y = 64 - x. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = 24$. Зная x, из второго уравнения получаем $y = 40$.

Ответ: 24 и 40.

508. Пусть для получения 30%-го раствора нужно взять x кг 28%-го раствора и y кг 36%-го раствора. Тогда $0{,}28x + 0{,}36y = 0{,}3(x + y)$; $0{,}02x = 0{,}06y$; $\frac{x}{y} = 3$. То есть для получения раствора нужной концентрации нужно взять три части 28%-го раствора и одну часть 36%-го раствора. Так как первого раствора имеется всего 2 кг, то, чтобы получить наибольший объём 30%-го раствора, нужно взять 2 кг 28%-го раствора и $y = \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$ (кг) 36%-го раствора. Тогда общее количество раствора будет равно $x + y = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$ (кг).

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

509. Пусть К — красный грузовик, а С — синий, x ч — время, за которое синий грузовик вывозит груз с первого склада ($x > 0$). Составим таблицу:

	1-й склад	2-й склад
К	3	$x - 7$
С	x	6

Имеем теперь пропорцию:

$\frac{3}{x} = \frac{x-7}{6}$; $x^2 - 7x - 18 = 0$; $x_1 = 9$, $x_2 = -2$. Так как по условию задачи x — число положительное, то $x = 9$. Таким образом, синий грузовик может вывезти груз с первого склада быстрее, чем это сделает красный, в $\frac{9}{3} = 3$ раза.

Ответ: 3.

510. Пусть x — время, за которое второй кран разгрузит баржу ($x > 0$). Рассмотрим таблицу:

	баржа	сухогруз
I кран	3	$x - 10$
II кран	x	8

Составим пропорцию: $\frac{3}{x} = \frac{x-10}{8}$; $x^2 - 10x - 24 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 12$. Так как x не может быть меньше нуля, то $x = 12$.

Примем всю работу по разгрузке баржи за единицу. Тогда $p_1 = \frac{1}{3}$ — производительность крана I, $p_2 = \frac{1}{12}$ — производительность крана II. Искомая величина $\frac{p_1}{p_2} = 4$.

Ответ: 4.

511. Пусть V — собственная скорость лодки, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{6}{V+V_T}+\dfrac{6}{V-V_T}=\dfrac{35}{60}, \\ \dfrac{18}{V-V_T}-\dfrac{18}{V+V_T}=\dfrac{15}{60}. \end{cases}$$ Обозначим $\dfrac{1}{V+V_T}=a$ и $\dfrac{1}{V-V_T}=b$.

Тогда $\begin{cases} a+b=\dfrac{7}{72}, \\ b-a=\dfrac{1}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{72}, \\ b=\dfrac{4}{72}. \end{cases}$

Возвращаясь к переменным V и V_T, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V+V_T}=\dfrac{3}{72}, \\ \dfrac{1}{V-V_T}=\dfrac{4}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V+V_T=24, \\ V-V_T=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2V_T=6, \\ V=18+V_T; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_T=3, \\ V=21. \end{cases}$$

Ответ: 21.

512. Пусть V — собственная скорость катера, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{36}{V-V_T}+\dfrac{36}{V+V_T}=3\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{12}{V-V_T}-\dfrac{12}{V+V_T}=\dfrac{10}{60}. \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{1}{V-V_T}=a$ и $\dfrac{1}{V+V_T}=b$.

Тогда $\begin{cases} 36a+36b=\dfrac{7}{2}, \\ 12a-12b=\dfrac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{18}, \\ b=\dfrac{1}{24}. \end{cases}$

Возвращаясь к переменным V и V_T, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V-V_T}=\dfrac{1}{18}, \\ \dfrac{1}{V+V_T}=\dfrac{1}{24}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V-V_T=18, \\ V+V_T=24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_T=V-18, \\ 2V=42; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} V_T = 3, \\ V = 21. \end{cases}$

Ответ: 21.

513. Пусть x км/ч — скорость первого туриста, y км/ч — скорость второго туриста. Расстояние, пройденное первым туристом до встречи, равно $3x$ км, а расстояние, пройденное вторым туристом до встречи, равно $2y$ км, $(AC = 3x; BC = 2y)$ (см. рис. 200).

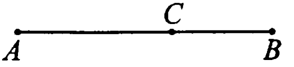


Рис. 200

$\frac{2y}{x}$ ч —время движения первого туриста на участке BC.

$\frac{3x}{y}$ ч —время движения второго туриста на участке AC.

Так как первый турист пришёл в пункт B на 5 часов раньше, чем второй пришёл в пункт A, получим уравнение $\frac{3x}{y} - \frac{2y}{x} = 5$. Пусть $\frac{x}{y} = t,\ t > 0$, тогда $3t - \frac{2}{t} = 5;\ 3t^2 - 5t - 2 = 0;\ t_1 = 2,\ t_2 = -\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Скорость первого туриста в два раза больше скорости второго туриста.

Ответ: 2.

514. Пусть x — время, которое затратил автомобиль на путь от места встречи до пункта А. Этот же участок пути велосипедист проехал за 6 часов. Кроме того, участок пути от места встречи до пункта B автомобиль проехал за 2 часа, а велосипедист — за $(x + 11)$ часов. Получим уравнение $\frac{x}{6} = \frac{2}{x+11}$; $x^2 + 11x - 12 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -12$, которое имеет положительный корень $x = 1$. Значит, скорость автомобиля в 6 раз больше скорости велосипедиста.

Ответ: 6.

515. Пусть p_i — производительность i -ой группы программистов, $i = 1, 2, 3$. Тогда из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4(p_1 + p_2 + p_3) = 1, \\ p_2 = 3p_3, \\ \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2 + p_3} = 6. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $p_1 = \dfrac{1 - 4p_2 - 4p_3}{4}$. Подставляя в третье уравнение системы выражения для p_1 и p_2, получим уравнение $\dfrac{4}{1-16p_3} - \dfrac{1}{4p_3} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{384p_3^2 + 8p_3 - 1}{4p_3(1-16p_3)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 384p_3^2 + 8p_3 - 1 = 0, \\ p_3 \neq 0, \\ p_3 \neq \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что по смыслу задачи $p_3 > 0$, получим $p_3 = \dfrac{1}{24}$. Тогда

$$p_2 = 3 \cdot p_3 = \frac{1}{8}, p_1 = \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{24}}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: 12, 8 и 24 месяца.

516. Пусть p_i — производительность i-ой группы программистов, $i = 1$, 2, 3. Тогда из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(p_1 + p_2 + p_3) = 1, \\ p_1 = 3p_3, \\ p_1 = p_2 + p_3. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы следует, что $4p_1 = 1, p_1 = \dfrac{1}{4}$.

Подставляя во второе уравнение системы p_1, получаем $p_3 = \dfrac{1}{12}$. Тогда, подставляя p_1 и p_3 в третье уравнение, найдём $p_2 = p_1 - p_3 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: 4, 6 и 12 месяцев.

517. Пусть v_1, l_1 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) поезда; v_2, l_2 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) электрички. Согласно условию задачи, $v_2 = \dfrac{1}{2}v_1$; $l_2 = \dfrac{1}{3}l_1$. Зная, что поезд проходит мимо столба за 5 секунд, имеем $\dfrac{l_1}{v_1} = 5$. Чтобы определить время, за которое мимо друг друга пройдут поезд и электричка, нужно их общую длину разделить на суммарную скорость (из условия задачи ясно, что поезд и электричка движутся навстречу друг другу), то есть это время равно

$$\frac{l_1+l_2}{v_1+v_2}=\frac{l_1+\frac{1}{3}l_1}{v_1+\frac{1}{2}v_1}=\frac{8l_1}{9v_1}=\frac{8\cdot 5}{9}=\frac{40}{9}\ (\text{с}).$$

Ответ: $\frac{40}{9}$.

518. Пусть v_1, l_1 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) поезда, v_2, l_2 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) электрички. Согласно условию задачи, $v_1 = v_2$; $l_1 = 1{,}5l_2$. Зная, что электричка проходит мимо столба за 8 секунд, имеем $\frac{l_2}{v_2} = 8$. Чтобы определить время, за которое мимо друг друга пройдут поезд и электричка, нужно их общую длину разделить на суммарную скорость (из условия задачи ясно, что поезд и электричка движутся навстречу друг другу), то есть это время равно

$$\frac{l_1+l_2}{v_1+v_2}=\frac{1{,}5l_2+l_2}{v_2+v_2}=\frac{2{,}5l_2}{2v_2}=\frac{2{,}5\cdot 8}{2}=10\ (\text{с}).$$

Ответ: 10.

520. Пусть x — количество шоколада с содержанием 25% какао-бобов, y — количество шоколада с содержанием 70% какао-бобов, которые нужно взять, чтобы получить шоколад, содержащий 45% какао-бобов. Из условия задачи следует, что $\frac{0{,}25x+0{,}7y}{x+y} = 0{,}45$; $0{,}25x + 0{,}7y =$ $= 0{,}45x + 0{,}45y$; $0{,}2x = 0{,}25y$; $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Ответ: 5 : 4.

521. Пусть за x дней может вспахать всё поле первый трактор. Тогда за $(x+2)$ дня может вспахать всё поле второй трактор; $\frac{1}{x}$ — производительность первого трактора (часть поля, которую он вспахивает за один день), $\frac{1}{x+2}$ — производительность второго трактора.

По условию за 4 дня совместной работы было вспахано 0,9 поля. Следовательно, $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right) = 0{,}9$, где $x > 0$;

$\frac{2x+2}{x(x+2)} = \frac{9}{40}$; $(2x+2)40 = 9\left(x^2+2x\right)$; $9x^2 - 62x - 80 = 0$. Решением этого уравнения являются $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{10}{9}$. $x_2 = -\frac{10}{9}$ — не удовлетворяет условию $x > 0$. Следовательно, первый трактор вспашет поле за 8 дней, второй — за 10 дней.

Ответ: 8 и 10 дней.

522. Пусть за x дней может перевезти весь груз первый грузовик. Тогда за $(x-3)$ дня может перевезти весь груз второй грузовик; $\frac{1}{x}$ — производительность первого грузовика, $\frac{1}{x-3}$ — производительность второго грузовика (часть груза, которую он перевозит за один день).
По условию за 5 дней совместной работы грузовики перевезли 0,75 всего груза. Следовательно, $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}\right) = 0{,}75$, где $x > 3$; $\frac{x-3+x}{x(x-3)} = 0{,}15$; $0{,}15x^2 - 2{,}45x + 3 = 0$. Решением этого уравнения являются $x_1 = 15$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Так как должно выполняться неравенство $x > 3$, то $x_2 = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию задачи. Получаем: первый грузовик весь груз может перевезти за 15 дней, второй — за 12 дней.

Ответ: 15 и 12 дней.

523. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y = a\,(a > 0)$ и график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x - 3$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_в = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$, а ордината равна $y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = -7$. Отражая часть графика $y = x^2 - 4x - 3$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$, эскиз которого изображён на рисунке 201. Таким образом, при $0 < a < 7$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x - 3|$ в четырёх точках, при $a = 7$ — в трёх точках и при $a > 7$ — в двух.

Ответ: 4 при $0 < a < 7$; 3 при $a = 7$; 2 при $a > 7$.

524. Построим графики функций $y = \left|2x^2+4x-7\right|$; $y = a\,(a > 0)$ и найдём количество точек их пересечения.

1) Построим график $y = 2x^2 + 4x - 7$ (см. рис. 202).

а) Вершина: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$, $y_0 = 2 - 4 - 7 = -9$. $(-1; -9)$ —

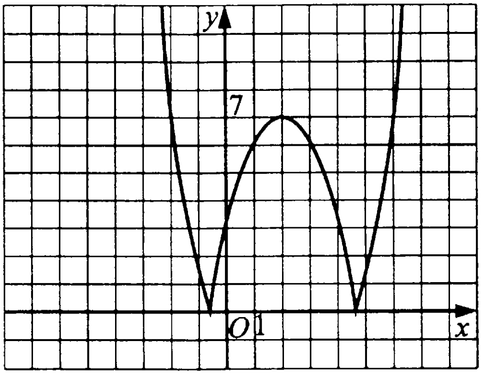


Рис. 201

координаты вершины параболы.

б) Дополнительные точки:

x	-4	-3	-2	0	1	2
y	9	-1	-7	-7	-1	9

2) Построим график $y = \left|2x^2 + 4x - 7\right|$ (см. рис. 202).

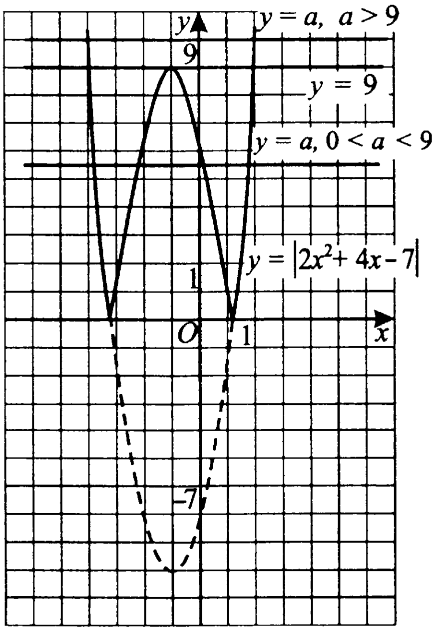


Рис. 202

Получаем, что графики данных функций пересекаются в четырёх точках при $0 < a < 9$, в трёх точках при $a = 9$, в двух точках при $a > 9$.

Ответ: 4 при $0 < a < 9$; 3 при $a = 9$; 2 при $a > 9$.

525. Построим ломаную, заданную условием

$$y = \begin{cases} -3x - 4, \text{ если } x < -2, \\ 2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - 4, \text{ если } x > 2. \end{cases} \quad \text{(см. рис. 203)}$$

Проводим прямую MB, проходящую через точки с координатами $(0; 1)$ и $(2; 2)$. Эта прямая задаётся уравнением $y = \frac{1}{2}x + 1$ и имеет угловой коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Проведём прямую ME, проходящую через точку с координатами $(0; 1)$ параллельно прямой $y = 3x - 4$. Очевидно, угловой коэффициент этой прямой $k_2 = 3$. При положительном k прямая $y = kx + 1$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла BME. Следовательно, $k_1 < k < k_2$; $\frac{1}{2} < k < 3$.

Ответ: $(0{,}5; 3)$.

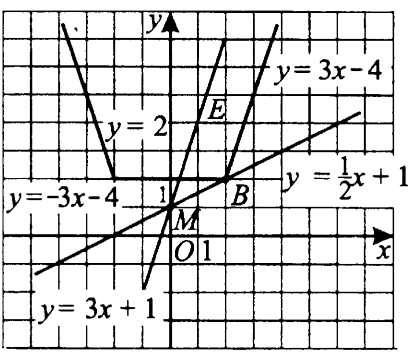


Рис. 203

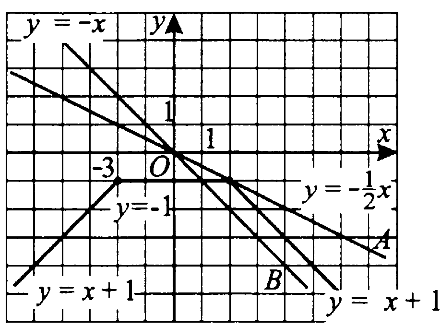


Рис. 204

526. Построим ломаную, заданную условием

$$y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x < -2, \\ -1, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x + 1, \text{ если } x > 2. \end{cases} \quad \text{(см. рис. 204).}$$

Проводим прямую OA, проходящую через начало координат и точку с координатами $(2; -1)$. Эта прямая задаётся уравнением $y = -\frac{1}{2}x$ и имеет угловой коэффициент $k_1 = -\frac{1}{2}$. Проведём прямую OB, проходящую через начало координат параллельно прямой $y = -x + 1$. Угловой коэффициент этой прямой $k_2 = -1$. При отрицательном значении k прямая $y = kx$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла AOB. Следовательно, $k_2 < k < k_1$; $-1 < k < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(-1; -0{,}5)$.

527. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 0{,}3x + p$ с осями координат.

1) С осью Ox: $y = 0$; $0{,}3x + p = 0$; $x = -\frac{10p}{3}$; $\left(-\frac{10p}{3}; 0\right)$.

2) С осью Oy: $x = 0$; $y = p$; $(0; p)$.

3) Прямая $y = 0{,}3x + p$ образует с осями координат прямоугольный треугольник (см. рис. 205) с катетами $\left|-\frac{10p}{3}\right|$ и $|p|$. По условию площадь треугольника равна 60; $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}|p| \cdot |p| = \frac{5}{3}p^2$. Из уравнения $\frac{5}{3}p^2 = 60$ находим $p = \pm 6$.

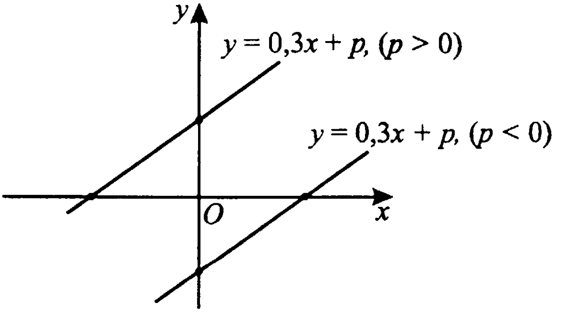


Рис. 205

Ответ: ± 6.

528. $y = -2x + p$, $S_{\triangle AOB} = 49$, $S_{\triangle AOB} = \frac{|AO| \cdot |BO|}{2}$ (см. рис. 206).

Найдём координаты точек:

а) A: $A(0; y)$. $y = -2x + p$, $x = 0$, $y = p$, $A(0; p)$;

б) B: $B(x; 0)$. $y = -2x + p$, $-2x + p = 0$, $x = \frac{1}{2}p$, $B\left(\frac{1}{2}p; 0\right)$.

$$S_{OAB} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{2},\ S_{OAB} = \frac{|p| \cdot \frac{1}{2} \cdot |p|}{2},\ \frac{1}{4}p^2 = 49,\ p^2 = 4 \cdot 49,\ p = \pm 14.$$

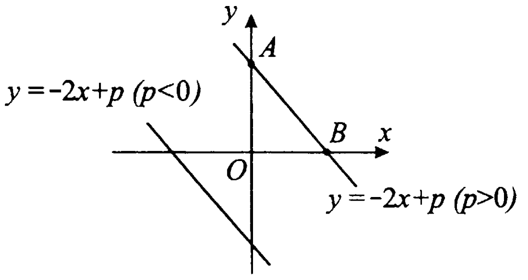


Рис. 206

Ответ: -14; 14.

529. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = -1{,}5x + n$ с осями координат.

С осью Ox: $\left(\frac{2}{3}n; 0\right)$, с осью Oy: $(0; n)$.

Прямая $y = -1{,}5 + n$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{3}n\right|$ и $|n|$.

По условию площадь треугольника равна 75.

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot |n| \cdot |n| = \frac{1}{3} \cdot n^2$. Решим уравнение $\frac{1}{3}n^2 = 75$, $n^2 = 225$, $n_{1,2} = \pm 15$.

Ответ: ± 15.

530. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 7x - 2m$ с осями координат.

С осью Ox: $\left(\frac{2}{7}m; 0\right)$, с осью Oy: $(0; -2m)$.

Прямая $y = 7x - 2m$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{7}m\right|$ и $|-2m|$.

По условию площадь треугольника равна 14.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot|m|\cdot 2\cdot|m| = 14$; $m^2 = \frac{14\cdot 7}{2}$; $m^2 = 49$; $m_{1,2} = \pm 7$.

Ответ: ± 7.

531. $2x^2 - \frac{1}{2}x + (k-3)(k+5) = 0$. $x_1 < 2 < x_2$, где x_1 и x_2 — корни.

1) Найдём корни уравнения

$4x^2 - x + 2(k-3)(k+5) = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8}$.

2) Тогда по условию

$$\frac{1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8} < 2 < \frac{1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} < 16 < 1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} < 16, \\ 1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 16; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{1-32(k-3)-(k+5)} < 15, \\ \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 15; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > -15, \\ \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 15; \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-32(k-3)(k+5) > 225 \Leftrightarrow 32(k-3)(k+5) < -224 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2+2k-15 < -7 \Leftrightarrow k^2+2k-8 < 0 \Leftrightarrow -4 < k < 2.$$

Ответ: $(-4; 2)$.

533. $9x^2 - 6x - (l-2)(l+2) - 3 = 0$.

Введём обозначение: $f(x) = 9x^2 - 6x - (l-2)(l+2) - 3$, $f(x) = 9x^2 - 6x - l^2 + 1$. Учитывая, что старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ положителен, можно сделать вывод, что число 2 находится между корнями уравнения $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(2) < 0$ (см. рис. 207). Решим неравенство $f(2) < 0$. $9\cdot 4 - 6\cdot 2 - l^2 + 1 < 0$; $25 - l^2 < 0$; $(l-5)(l+5) > 0$; $l < -5$, $l > 5$ (см. рис. 208).

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

534. Обозначим $y = kx^2 - (k-3)x + k$ (1) и

$y = (2k-1)\cdot x^2 - 2kx + k + \frac{9}{4}$ (2).

1) Так как по условию прямая $y = kx + 1$ и парабола (1) имеют ровно две общие точки, то уравнение $kx^2 - (k-3)x + k = kx + 1$ имеет 2 различных действительных корня, значит, $D > 0$.

$kx^2 - 2kx + 3x + k - 1 = 0$; $kx^2 + (3-2k)x + (k-1) = 0$.

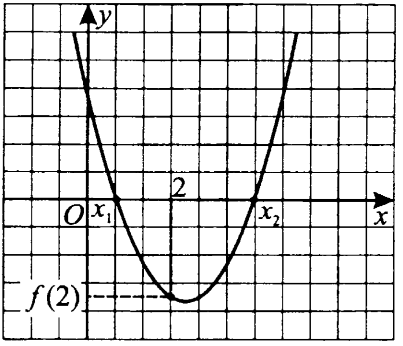


Рис. 207

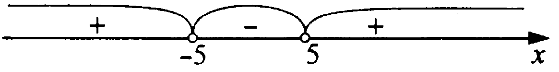


Рис. 208

$D = (3 - 2k)^2 - 4k(k - 1)$; $9 - 12k + 4k^2 - 4k^2 + 4k > 0$; $-8k + 9 > 0$; $k < \frac{9}{8}$.

2) Так как прямая $y = kx + 1$ не пересекает параболу (2), уравнение $(2k-1)x^2 - 2kx + k + \frac{9}{4} = kx + 1$ не имеет действительных корней, значит, $D < 0$.

$(2k - 1)x^2 - 3kx + k + \frac{5}{4} = 0$.

$D = 9k^2 - 4(2k - 1)\left(k + \frac{5}{4}\right) = 9k^2 - 8k^2 - 10k + 4k + 5 = k^2 - 6k + 5$.

Решим неравенство $k^2 - 6k + 5 < 0$; $(k - 5)(k - 1) < 0$; $1 < k < 5$ (см. рис. 209).

3) Таким образом, $\begin{cases} k < \frac{9}{8}, \\ 1 < k < 5; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < k < \frac{9}{8}$.

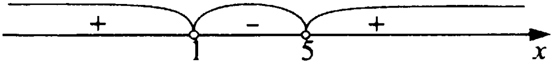


Рис. 209

Ответ: $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

535. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:
$3\big(4x^2-12x+9+2\big)\big(x^2+22x+121+4\big)=24-a^2;$
$3\big((2x-3)^2+2\big)\big((x+11)^2+4\big)=24-a^2;$
$3\big((2x-3)^2(x+11)^2+4(2x-3)^2+2(x+11)^2+8\big)=24-a^2;$
$3(2x-3)^2(x+11)^2+12(2x-3)^2+6(x+11)^2+24=24-a^2;$
$3(2x-3)^2(x+11)^2+12(2x-3)^2+6(x+11)^2=-a^2.$
Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x, правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней ни при каких значениях параметра a.

536. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:
$\big(49x^2-112x+64+1\big)\big(x^2+26x+169+2\big)=2-x^2;$
$\big((7x-8)^2+1\big)\big((x+13)^2+2\big)=2-x^2;$
$(7x-8)^2(x+13)^2+2(7x-8)^2+(x+13)^2+2=2-x^2;$
$(7x-8)^2(x+13)^2+2(7x-8)^2+(x+13)^2=-x^2.$
Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x, правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

537. Касание прямой и параболы означает, что они имеют лишь одну общую точку (для графиков других функций, отличных от квадратичной, это может быть и не так). То есть нужно определить, при каких значениях параметров k и a уравнение $ax^2=k(x-a)$ имеет единственный корень. $ax^2-kx+ka=0$, $D=k^2-4ka^2$, квадратное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $D=0$, то есть $k(k-4a^2)=0$. В случае $k=0$ прямой, данной в условии, является прямая $y=0$, ордината точки касания никак не может быть равна 4, то есть $k\neq 0$. Тогда из уравнения $k(k-4a^2)=0$ получаем, что $k=4a^2$. Пусть $(x_0;y_0)$ — точка касания. Абсцисса x_0 точки касания является корнем уравнения $ax^2-kx+ka=0$, и так как $D=0$, то $x_0=\dfrac{k}{2a}=\dfrac{4a^2}{2a}=2a$.
Подставляя x_0 в уравнение прямой, получаем ординату точки касания $y_0=k(x_0-a)=4a^2(2a-a)=4a^3$. По условию $y_0=4$, то есть $4a^3=4$; $a=1$; $k=4a^2=4$.

Ответ: $k=4$; $a=1$.

538. По условию прямая $y=kx+b$ касается параболы $y=x^2+bx$, абсцисса точки касания $x=2$.

а) Выразим b через k из уравнения $x^2 + bx = kx + b$, зная, что $x = 2$: $4 + 2b = 2k + b, b = 2k - 4$.

б) Уравнение $x^2 + bx = kx + b$, $x^2 + (b - k)x - b = 0$ имеет 1 корень, тогда $D = 0$. $D = (b - k)^2 + 4b$, $b^2 - 2bk + k^2 + 4b = 0$.

в) Найдём b и k из условий а) и б):

$$\begin{cases} b = 2k - 4, \\ b^2 - 2bk + k^2 + 4b = 0, \end{cases}$$

$(2k - 4)^2 - 2k \cdot (2k - 4) + k^2 + 4 \cdot (2k - 4) = 0$,

$4k^2 - 16k + 16 - 4k^2 + 8k + k^2 + 8k - 16 = 0$, $k = 0$, тогда $b = 2 \cdot 0 - 4 = -4$.

Ответ: $k = 0$; $b = -4$.

539. $x^2 - (a + 4)x + 2a + 5 = 0$, так как уравнение имеет два корня, то $D > 0$, $D = (a + 4)^2 - 4(2a + 5)$; $a^2 + 8a + 16 - 8a - 20 > 0$; $a^2 - 4 > 0$, кроме того

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} \geqslant -2$; $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \geqslant -2$; $\dfrac{a + 4}{2a + 5} \geqslant -2$; $\dfrac{a + 4 + 4a + 10}{2a + 5} \geqslant 0$;

$\dfrac{5a + 14}{2a + 5} \geqslant 0$, таким образом,

$$\begin{cases} a^2 - 4 > 0, \\ \dfrac{5a + 14}{2a + 5} \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (a - 2)(a + 2) > 0, \\ \dfrac{5a + 14}{2a + 5} \geqslant 0. \end{cases}$$

$(-\infty; -2{,}8] \cup (-2{,}5; -2) \cup (2; +\infty)$ (см. рис. 210).

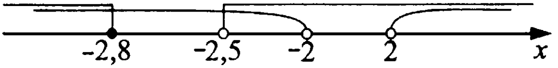


Рис. 210

Ответ: $(-\infty; -2{,}8] \cup (-2{,}5; -2) \cup (2; +\infty)$.

540. Данное уравнение может иметь два различных корня лишь тогда, когда оно квадратное (то есть $a \neq 0$) и его дискриминант положителен.

$D = (2a + 3)^2 - 4a(a + 2) = 4a + 9 > 0 \Rightarrow$ при $a > -\dfrac{9}{4}$, $a \neq 0$

данное уравнение имеет два различных корня — x_1, x_2. По условию, нужно выбрать те значения параметра a, при которых $x_1^2 + x_2^2 > 3$. Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через коэффициенты данного уравнения, воспользовавшись теоремой Виета и тождеством $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Имеем $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{(2a + 3)^2}{a^2} - \dfrac{2(a + 2)}{a} = \dfrac{2a^2 + 8a + 9}{a^2}$. Решим неравенство

$\dfrac{2a^2 + 8a + 9}{a^2} > 3$. С учётом условия $a \neq 0$ оно равносильно неравенству

$2a^2+8a+9>3a^2 \Leftrightarrow a^2-8a-9<0$; $a\in(-1;9)$. Остаётся вспомнить, что условие $a>-\dfrac{9}{4}$ при $a\in(-1;9)$ выполнено. Учитывая, что $a\neq 0$, получаем $a\in(-1;0)\cup(0;9)$.

Ответ: $(-1;0)\cup(0;9)$.

542. Наименьшее трёхзначное число, кратное 15, — это 105, наибольшее — 990. Задача сводится к нахождению суммы членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=105$, $a_n=990$, $d=15$. Найдём число членов этой прогрессии, применив формулу общего члена.
$a_n=a_1+d\cdot(n-1)$, $105+15\cdot(n-1)=990$, $7+n-1=66$, $n=60$.
Сумму членов найдём по формуле

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n,\ S_{60}=\frac{105+990}{2}\cdot 60=32\,850.$$

Ответ: 32 850.

543. Наименьшее трёхзначное число, кратное 14, — это 112, наибольшее — 994. Задача сводится к нахождению суммы членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=112$, $a_n=994$, $d=14$.

Найдём число элементов этой прогрессии, применив формулу общего члена. $a_n=a_1+d(n-1)$; $112+14(n-1)=994$; $8+n-1=71$; $n=64$.

Сумму членов найдём по формуле $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

$$S_{64}=\frac{112+994}{2}\cdot 64=35\,392.$$

Ответ: 35 392.

544. Пусть t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 — заданные числа.
По условию $\sqrt{t_1\cdot t_2}=243$, тогда $t_1\cdot t_2=243^2=3^{10}$, а $\sqrt[3]{t_3\cdot t_4\cdot t_5}=32$, тогда $t_3\cdot t_4\cdot t_5=32^3=2^{15}$. Имеем $t_1\cdot t_2\cdot t_3\cdot t_4\cdot t_5=3^{10}\cdot 2^{15}$, среднее геометрическое всех пяти чисел равно:
$\sqrt[5]{t_1\cdot t_2\cdot t_3\cdot t_4\cdot t_5}=\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}=3^2\cdot 2^3=9\cdot 8=72$.

Ответ: 72.

545. Графиком функции $y=x^2-(2a-1)x+3a$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдём координаты вершины параболы:

$$x_0=\frac{2a-1}{2}=a-0{,}5,$$

$y_0=(a-0{,}5)^2-(2a-1)(a-0{,}5)+3a=a^2-a+0{,}25-2a^2+2a-0{,}5+3a=$
$=-a^2+4a-0{,}25$.
$(a-0{,}5; -a^2+4a-0{,}25)$ — искомые координаты. $E(y)=[y_0;+\infty)$.

По условию задачи необходимо, чтобы $E(y) = [1{,}5; +\infty)$, значит, $y_0 = 1{,}5$.

$-a^2 + 4a - 0{,}25 = 1{,}5$; $a^2 - 4a + 1{,}75 = 0$; $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = 3{,}5$.

Ответ: 0,5; 3,5.

546. По условию задачи окружность $x^2 + y^2 = 10$ не имеет общих точек с прямой $mx + y = 10$, значит, система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ mx + y = 10 \end{cases}$ должна быть несовместной.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y = 10 - mx; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + (10 - mx)^2 = 10, \\ y = 10 - mx. \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение этой системы:

$x^2 + 100 - 20mx + m^2x^2 - 10 = 0$, $(1 + m^2)x^2 - 20mx + 90 = 0$. $1 + m^2 \neq 0$, поэтому уравнение квадратное. Оно не должно иметь действительных корней, следовательно, $D < 0$.

$(20m)^2 - 4 \cdot 90 \cdot (1 + m^2) < 0$, $400m^2 - 360m^2 < 360$, $40m^2 < 360$, $m^2 < 9$, $|m| < 3$.

Ответ: $(-3; 3)$.

547. Найдём координаты вершины параболы $y = 2x^2 + ax + 1$.

$x_0 = -\frac{a}{2 \cdot 2} = -\frac{a}{4}$;

$y_0 = 2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) + 1 = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} + 1 = \frac{a^2 - 2a^2 + 8}{8} = \frac{8 - a^2}{8}$;

$\left(-\frac{a}{4}; \frac{8 - a^2}{8}\right)$ — координаты вершины.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y = x$, $y_1 = -\frac{a}{4}$.

Поскольку вершина параболы лежит выше прямой, ордината y должна быть больше ординаты y_1. Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству

$\frac{8 - a^2}{8} > -\frac{a}{4}$; $\frac{8 - a^2}{8} > -\frac{2a}{8}$; $8 - a^2 > -2a$; $a^2 - 2a - 8 < 0$;

$(a + 2)(a - 4) < 0$; $-2 < a < 4$.

Целые искомые значения параметра a: $-1; 0; 1; 2; 3$.

Ответ: -1; 0; 1; 2; 3.

548. Найдём координаты вершины параболы $y = x^2 + ax - 2$.

$x_0 = -\frac{a}{2}$; $y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) - 2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2 = -\frac{a^2}{4} - 2$.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y = 2x$: $y_1 = 2\left(-\frac{a}{2}\right) = -a$.

Поскольку вершина параболы лежит ниже прямой, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0. Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству

$-\frac{a^2}{4} - 2 < -a$; $a^2 - 4a + 8 > 0$; $(a-2)^2 + 4 > 0$. Это неравенство верно при любом действительном значении a. В задаче необходимо найти все целые значения a, следовательно, $a \in Z$.

Ответ: $a \in Z$.

549. $y = x^2 - x + 1, x + my - 1 = 0$.

По условию задачи парабола $y = x^2 - x + 1$ имеет с прямой $x + my - 1 = 0$ единственную общую точку, значит, система уравнений

$\begin{cases} y = x^2 - x + 1, \ (1) \\ x + my - 1 = 0 \ (2) \end{cases}$ должна иметь единственное решение.

Из второго уравнения системы выразим x через y и подставим в первое уравнение:

$x = 1 - my, y = (1-my)^2 - (1-my) + 1, 1 - 2my + m^2y^2 - 1 + my - y + 1 = 0,$
$m^2y^2 - (m+1) \cdot y + 1 = 0.$

1) $m = 0, -y + 1 = 0, y = 1$, уравнение имеет единственный корень, значит, система имеет единственное решение, что удовлетворяет условию задачи.

2) $m \neq 0$, уравнение квадратное, оно должно иметь единственный корень, следовательно, $D = 0$.

$(m+1)^2 - 4m^2 = 0, m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0, 3m^2 - 2m - 1 = 0, m_1 = 1,$
$m_2 = -\frac{1}{3}$.

При $m_1 = 1$ и $m_2 = -\frac{1}{3}$ система имеет единственное решение.

Ответ: $0, 1, -\frac{1}{3}$.

550. 1. Отметим, что если $m = 0$, то прямая $-x - 1 = 0$ имеет с параболой единственную общую точку.

2. $m \neq 0$. Система

$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ my - x - 1 = 0; \end{cases}$

должна иметь единственное решение.

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ x = my - 1. \end{cases}$$

Подставив значение x из второго уравнения системы в первое уравнение, получим $y = (my-1)^2 + (my-1) + 1$; $y = m^2y^2 - my + 1$; $m^2y^2 - (m+1)y + 1 = 0$.

Уравнение должно иметь один корень, следовательно, $D = 0$. $(m+1)^2 - 4m^2 = 0$; $m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0$; $3m^2 - 2m - 1 = 0$; $m_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$; $m_1 = 1$, $m_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 0; 1; $-\dfrac{1}{3}$.

551. Найдём абсциссу вершины параболы $y = x^2 - 2ax + 43$:

$x_0 = \dfrac{2a}{2} = a$.

1) Пусть $x_0 < -2$, тогда $a < -2$. Так как ветви параболы направлены вверх, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция возрастает (см. рис. 211).
$y_{\text{наим.}} = y(-2) = 4 - 2a \cdot (-2) + 43 = 7$; $4a = -40$; $a = -10$. $a = -10$ удовлетворяет условию $a < -2$.

2) Пусть $x_0 \geqslant -2$, тогда $a \geqslant -2$. Наименьшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 212).
$y_{\text{наим.}} = y(x_0) = y(a) = a^2 - 2a^2 + 43 = 7$; $a^2 = 36$; $a_1 = 6$; $a_2 = -6$ — не удовлетворяет условию $a \geqslant -2$.

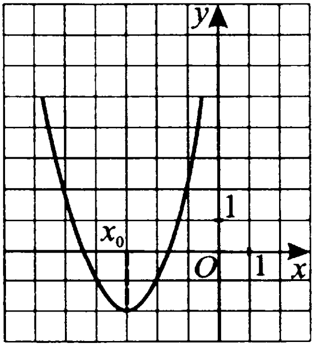


Рис. 211

Ответ: -10; 6.

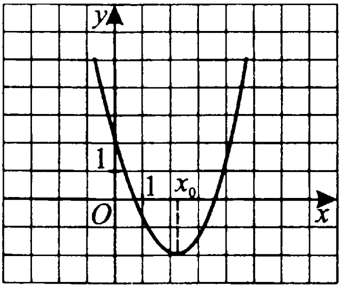


Рис. 212

552. Найдём абсциссу вершины параболы $y = -x^2 + 2ax - 71$ на $[-3; +\infty)$:

$x_0 = \dfrac{-2a}{-2} = a.$

1) Пусть $x_0 < -3$, тогда $a < -3$. Так как ветви параболы направлены вниз, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция убывает (см. рис. 213).
$y_{\text{наиб.}} = y(-3) = -9 + 2a \cdot (-3) - 71 = 10$; $-6a = 90$; $a = -15$ — удовлетворяет условию $a < -3$.

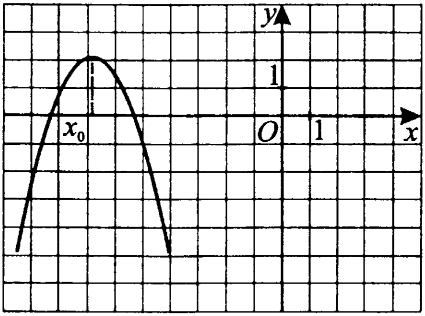


Рис. 213

2) Пусть $x_0 \geqslant -3$, тогда $a \geqslant -3$. Наибольшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 214).
$y_{\text{наиб.}} = y(x_0) = y(a) = -a^2 + 2a^2 - 71 = 10$; $a^2 = 81$; $a_1 = 9$, $a_2 = -9$ — не удовлетворяет условию $a \geqslant -3$.

Ответ: -15; 9.

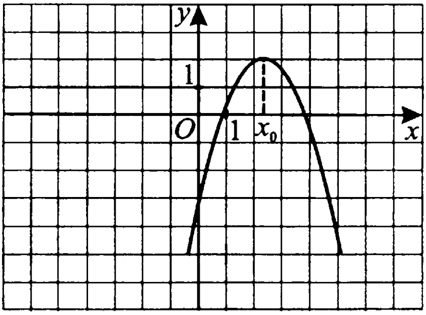


Рис. 214

553. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$

$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + 1}$; $x_1 = a - 1, x_2 = a + 1.$

По условию задачи число 3 заключено между корнями уравнения, то есть $a - 1 < 3 < a + 1$; $\begin{cases} a - 1 < 3, \\ a + 1 > 3; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 4, \\ a > 2; \end{cases}$ $2 < a < 4.$

Ответ: $2 < a < 4.$

554. $x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0.$

1) Найдём допустимые значения параметра a. Уравнение имеет действительные корни, если $D \geqslant 0$.

$D = (6a)^2 - 4(9a^2 - 2a + 2) = 36a^2 - 36a^2 + 8a - 8 = 8a - 8$; $8a - 8 \geqslant 0$;

$a \geqslant 1$. Абсцисса вершины параболы $x_0 = \dfrac{6a}{2} = 3a \geqslant 3.$

2) Рассмотрим функцию $y = x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, значит, на промежутках $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, где $x_2 \geqslant x_1$, функция принимает положительные значения. Из условия следует: $3 \in (-\infty; x_1)$ (см. рис. 215), значит, $y(3) > 0$.

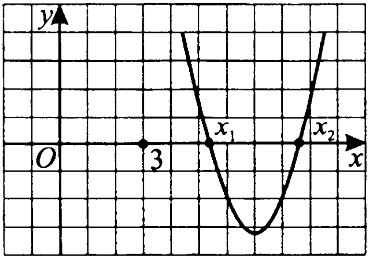


Рис. 215

3) Найдём значения параметра a, решив систему неравенств

$\begin{cases} 3^2 - 6a \cdot 3 + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 9 - 18a + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$

$\begin{cases} 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 9(a-1)\left(a - \dfrac{11}{9}\right) > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > \dfrac{11}{9}, \end{array}\right. \\ a \geqslant 1; \end{cases}$ $a > \dfrac{11}{9}$ (см. рис. 216).

Так как $x_0 \geqslant 3$, то случай, при котором оба корня меньше 3, невозможен.

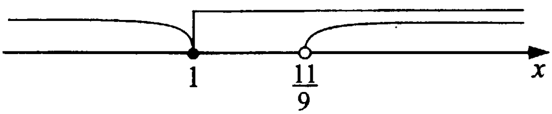


Рис. 216

Ответ: $a > \dfrac{11}{9}$.

555. Пусть (x_0, y_0) — координаты вершины данной параболы, тогда $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, где $b = -7$, $a = m$, то есть $x_0 = \dfrac{7}{2m}$ $(m \neq 0)$.

Так как вершина параболы должна лежать во II четверти, то $x_0 < 0$; $\dfrac{7}{2m} < 0$; $m < 0$. Ветви параболы направлены вниз. Так как вершина находится во II четверти, то квадратный трёхчлен имеет 2 различных действительных корня.

$D > 0$; $49 - 16m^2 > 0$; $-\dfrac{7}{4} < m < \dfrac{7}{4}$; учитывая, что $m < 0$, получаем $-\dfrac{7}{4} < m < 0$.

Ответ: $(-1{,}75;\ 0)$.

556. ОДЗ: $x \in [2; 7]$.

Левая часть уравнения $\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} = c$ есть сумма двух неотрицательных чисел, следовательно, $c \geqslant 0$.

Тогда $\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x}\right)^2 = c^2$; $x - 2 + 7 - x + 2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2$; $2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2 - 5$. Отсюда $c^2 \geqslant 5$. Так как $c \geqslant 0$, то $c \geqslant \sqrt{5}$.

$4\left(7x-x^2+2x-14\right)=c^4-10c^2+25$; $4x^2-36x+c^4-10c^2+81=0$. Так как заданное уравнение должно иметь хотя бы один корень, то и полученное квадратное уравнение относительно x должно иметь хотя бы один корень. Следовательно, $D=36^2-4\cdot4\left(c^4-10c^2+81\right)\geqslant0$; $c^4-10c^2\leqslant0$; $c^2\left(c^2-10\right)\leqslant0$. Учитывая, что $c\geqslant\sqrt{5}$, получаем $c^2-10\leqslant0$, $c\leqslant\sqrt{10}$.

Таким образом, $\sqrt{5}\leqslant c\leqslant\sqrt{10}$. Отрезок $\left[\sqrt{5};\sqrt{10}\right]$ содержит единственное целое число 3.

Подставляя $c=3$ в заданное уравнение, получаем два корня: $x_1=3$ и $x_2=6$. Следовательно, $c=3$ — искомое значение.

Ответ: 3.

557. $2\sqrt{x+3}+\sqrt{11-4x}=c$. (1)

Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных чисел, значит, $c\geqslant0$. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+3\geqslant0,\\ 11-4x\geqslant0,\\ c\geqslant0,\\ \left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{11-4x}\right)^2=c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geqslant-3,\\ x\leqslant\dfrac{11}{4},\\ c\geqslant0,\\ 4x+12+4\sqrt{(x+3)(11-4x)}+11-4x=c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant\dfrac{11}{4},\\ c\geqslant0,\\ 4\sqrt{11x-4x^2+33-12x}=c^2-23; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant\dfrac{11}{4},\\ c\geqslant0,\\ c^2-23\geqslant0,\\ 16\left(33-x-4x^2\right)=\left(c^2-23\right)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant\dfrac{11}{4},\\ c\geqslant0,\\ |c|\geqslant\sqrt{23},\\ 64x^2+16x-528+\left(c^2-23\right)^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \frac{11}{4}, \\ c \geqslant \sqrt{23}, \\ 64x^2 + 16x - 528 + \left(c^2 - 23\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $64x^2 + 16x - \left(528 - \left(c^2 - 23\right)^2\right) = 0.$ (2)

По условию уравнение (1) должно иметь хотя бы один корень, значит, дискриминант уравнения (2) должен быть неотрицательным числом.
$D \geqslant 0$; $16^2 + 4 \cdot 64 \cdot \left(528 - \left(c^2 - 23\right)^2\right) \geqslant 0$; $529 - \left(c^2 - 23\right)^2 \geqslant 0$; $\left(c^2 - 23\right)^2 \leqslant 529$; $|c^2 - 23| \leqslant 23$; $-23 \leqslant c^2 - 23 \leqslant 23$; $0 \leqslant c^2 \leqslant 46$; $|c| \leqslant \sqrt{46}$.

Учитывая, что $c \geqslant \sqrt{23}$, имеем

$$\begin{cases} c \geqslant \sqrt{23}, \\ -\sqrt{46} \leqslant c \leqslant \sqrt{46}; \end{cases} \quad \sqrt{23} \leqslant c \leqslant \sqrt{46}.$$

Отрезок $\left[\sqrt{23}; \sqrt{46}\right]$ содержит два целых числа: 5 и 6.
Проверка показала, что при $c = 5$ уравнение (1) имеет один корень, при $c = 6$ два корня (выполните самостоятельно).

Ответ: 5; 6.

558. Найдём координаты точки пересечения прямых $3x + ay + 1 = 0$ и $2x - 3y - 4 = 0$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + ay = -1, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на (-3), а затем сложим полученные уравнения: $(2a + 9)y = -14$; $y = -\frac{14}{2a + 9}$; $a \neq -4{,}5$.

б) Умножим первое уравнение системы на 3, второе — на a, получим $9x + 3ay = -3$ и $2ax - 3ay = 4a$, сложим полученные уравнения

$(9 + 2a)x = 4a - 3$, $x = \frac{4a - 3}{9 + 2a}$, $a \neq -4{,}5$.

$\left(\frac{4a - 3}{9 + 2a}; -\frac{14}{2a + 9}\right)$ — искомые координаты. При $a = -4{,}5$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи точка находится в третьей координатной четверти, значит, и абсцисса, и ордината — отрицательные числа. Найдём значения параметра a ($a \neq -4{,}5$), решив систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{4a-3}{9+2a} < 0, \\ -\dfrac{14}{2a+9} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{4a-3}{2a+9} < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a-3 < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < \dfrac{3}{4}, \\ a > -\dfrac{9}{2}; \end{cases}$$

$-4{,}5 < a < 0{,}75$.

Ответ: $(-4{,}5; 0{,}75)$.

559. Найдём координаты точки пересечения прямых $x + 5y - 3 = 0$ и $ax - 2y - 1 = 0$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + 5y = 3, \\ ax - 2y = 1. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на $-a$ и сложим со вторым уравнением; получим $(-5a-2)y = -3a+1$; $y = \dfrac{3a-1}{5a+2}$; $a \neq -0{,}4$.

б) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на 5 и сложим полученные уравнения; получим $(2+5a)x = 11$; $x = \dfrac{11}{5a+2}$; $a \neq -0{,}4$.

$\left(\dfrac{11}{5a+2}; \dfrac{3a-1}{5a+2}\right)$ — координаты точки пересечения заданных прямых.

При $a = -0{,}4$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи, точка находится в четвёртой координатной четверти, значит, её абсцисса положительная, а ордината отрицательная.

Найдём значения параметра a ($a \neq -0{,}4$), решив систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{11}{5a+2} > 0, \\ \dfrac{3a-1}{5a+2} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a+2 > 0, \\ a - \dfrac{1}{3} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -0{,}4, \\ a < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

$-0{,}4 < a < \dfrac{1}{3}$ — решение системы неравенств.

Ответ: $\left(-0{,}4; \dfrac{1}{3}\right)$.

560. По определению корнем уравнения является число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство. Так как число $2 + \sqrt{5}$ является корнем уравнения $x^3 - 5x^2 + 3x + b = 0$, то $(2+\sqrt{5})^3 - 5(2+\sqrt{5})^2 + 3(2+\sqrt{5}) + b = 0$ — верное числовое равенство, из которого находим, что

$b = -(2+\sqrt{5})^3 + 5(2+\sqrt{5})^2 - 3(2+\sqrt{5}) =$
$= -8 - 12\sqrt{5} - 30 - 5\sqrt{5} + 20 + 20\sqrt{5} + 25 - 6 - 3\sqrt{5} = 1.$

Итак, $b = 1$.

Ответ: $b = 1$.

561. Точка $M(3; 1)$ лежит вне заданной окружности, следовательно, через неё можно провести две касательные к этой окружности. Подставляя координаты этой точки в общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, получим $1 = 3k + b$; $b = 1 - 3k$. Следовательно, уравнения прямых, проходящих через точку M, имеют вид $y = kx + 1 - 3k$.

Каждая из прямых должна иметь с данной окружностью одну общую точку. Следовательно, система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = kx + 1 - 3k \end{cases}$ должна иметь относительно x и y единственное решение. Подставляя значение y из второго уравнения системы в первое, получим
$x^2 + (kx + 1 - 3k)^2 = 5$; $(1 + k^2)x^2 + 2(k - 3k^2)x + 9k^2 - 6k - 4 = 0$.
Это уравнение имеет один корень, если
$D = 4(k-3k^2)^2 - 4(1+k^2)(9k^2-6k-4) = 0$; $2k^2-3k-2 = 0$; $k_1 = -0{,}5$, $k_2 = 2$. Тогда $b_1 = 1 - 3k_1 = 2{,}5$, $b_2 = 1 - 3k_2 = -5$.

Таким образом, искомые уравнения касательных имеют вид
$y = -0{,}5x + 2{,}5$ и $y = 2x - 5$.

Ответ: $y = -0{,}5x + 2{,}5$; $y = 2x - 5$.

562. 1) Пусть $a = 0$, тогда $y = 2x + 2$; графиком этой функции является прямая, пересекающая ось Ox в одной точке, что удовлетворяет условию задачи.
2) Пусть $a \neq 0$, тогда графиком функции $y = ax^2 + 2x - a + 2$ является парабола.
Для того чтобы она пересекала ось Ox только в одной точке, необходимо равенство нулю дискриминанта уравнения $ax^2 + 2x - a + 2 = 0$.
$D = 4 - 4a(2 - a) = 0$; $4a^2 - 8a + 4 = 0$; $a^2 - 2a + 1 = 0$; $(a - 1)^2 = 0$; $a = 1$.

Ответ: 0; 1.

563. Найдём координаты точки пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = 2a - 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 2a - 3x, \\ y = 2x + 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a - 3}{5}, \\ y = \dfrac{4a + 9}{5}. \end{cases}$$

$\left(\dfrac{2a-3}{5}; \dfrac{4a+9}{5}\right)$ — искомые координаты.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой $x = \dfrac{2a-3}{5}$, лежащей на прямой $y = x$: $y_1 = \dfrac{2a-3}{5}$.

Поскольку точка пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$ лежит выше прямой $y = x$, то ордината $y_1 = \dfrac{2a-3}{5} < \dfrac{4a+9}{5}$.

Найдём значения параметра a, решив неравенство:

$\dfrac{4a+9}{5} > \dfrac{2a-3}{5}$; $4a + 9 > 2a - 3$; $2a > -12$; $a > -6$.

Ответ: $a \in (-6; +\infty)$.

564. Запишем уравнение прямой $y = kx + b$.
Точки $A(1;2)$, $B(3; a+1)$, $C(a;4)$ лежат на прямой, значит, $y(1) = 2$, $y(3) = a + 1$, $y(a) = 4$ и имеет место система уравнений

$$\begin{cases} k + b = 2, \\ 3k + b = a + 1, \\ ak + b = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ 3k + 2 - k = a + 1, \\ ak + 2 - k = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ \dfrac{(a-1)^2}{2} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ |a-1| = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a - 1 = 2, \\ a - 1 = -2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a = 3, \\ a = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

При $a = -1$, $k = -1$, $b = 3$, $y = -x + 3$,
при $a = 3$, $k = 1$, $b = 1$, $y = x + 1$.

Ответ: -1, 3.

565. Найдём абсциссу x_0 точки пересечения прямых
$y = 5x - 3$ и $y = a + 1 - 2x$, приравняв ординаты y. Получаем
$5x_0 - 3 = a + 1 - 2x_0$, откуда $x_0 = \dfrac{a+4}{7}$. Тогда ордината точки пересечения прямых $y_0 = \dfrac{5a-1}{7}$. Далее находим ординату y_1 точки с абсциссой x_0,

лежащей на прямой $y = -x$: $y_1 = -\frac{a+4}{7}$. Поскольку точка пересечения прямых $y = 5x - 3$ и $y = a + 1 - 2x$ лежит ниже прямой $y = -x$, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0. Следовательно, условие задачи выполняется при всех значениях параметра, удовлетворяющих неравенству $-\frac{a+4}{7} > \frac{5a-1}{7}$; $a < -0{,}5$.

Ответ: $a \in (-\infty; -0{,}5)$.

566. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ и график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$. Графиком функции $y = x^2 - 6x + 4$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_0 = \frac{-(-6)}{2} = 3$, а ордината равна $y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5$. Отражая часть графика $y = x^2 - 6x + 4$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$, эскиз которого изображён на рисунке 217.

Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 6x + 4|$ в двух точках, при $0 < a < 5$ — в четырёх точках, при $a = 5$ — в трёх точках и при $a > 5$ — в двух точках.

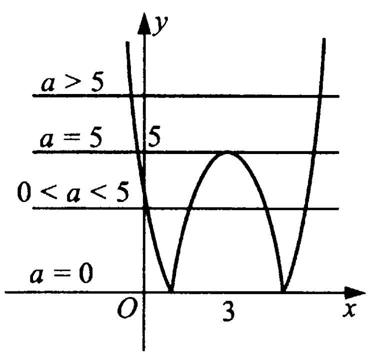


Рис. 217

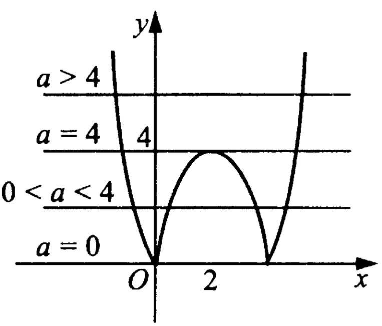


Рис. 218

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 5$; 3 при $a = 5$; 2 при $a > 5$.

567. Определим, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ и график функции $y = |x^2 - 4x|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x$ является парабола, абсцисса вершины которой $x_0 = \frac{-(-4)}{2} = 2$, ордината $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$.

Отражая часть графика $y = x^2 - 4x$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 4x|$, эскиз которого изображён на рисунке 218. Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x|$ в двух точках, при $0 < a < 4$ — в четырёх точках, при $a = 4$ — в трёх точках и при $a > 4$ — в двух точках.

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 4$; 3 при $a = 4$; 2 при $a > 4$.

568. Выразим y из первого уравнения системы $y = nx - 5$ и подставим во второе: $2x + 3n(nx - 5) = 7$. Выразим теперь x через n:

$2x + 3n(nx - 5) = 7 \Leftrightarrow (3n^2 + 2)x - 15n = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{15n+7}{3n^2+2}$. Тогда

$y = nx - 5 = \dfrac{n(15n+7)}{3n^2+2} - 5 = \dfrac{7n-10}{3n^2+2}$. Итак, система имеет решение, зависящее от параметра n: $x = \dfrac{15n+7}{3n^2+2}$, $y = \dfrac{7n-10}{3n^2+2}$. Так как $3n^2+2 > 0$, то, для того чтобы выполнялось условие $x > 0$, $y < 0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств $\begin{cases} 15n + 7 > 0, \\ 7n - 10 < 0. \end{cases}$

Решением системы является интервал $-\dfrac{7}{15} < n < \dfrac{10}{7}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0;\ 1$.

Ответ: 0; 1.

569. Выразим y из первого уравнения системы $y = 4 - 2nx$ и подставим во второе: $3x - 2n(4 - 2nx) = 5$. Выразим из этого уравнения x:

$3x - 2n(4 - 2nx) = 5 \Leftrightarrow (4n^2 + 3)x - 8n = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{8n+5}{4n^2+3}$. Тогда

$y = 4 - 2nx = 4 - \dfrac{2n(8n+5)}{4n^2+3} = \dfrac{12-10n}{4n^2+3}$. Итак, система имеет решение, зависящее от параметра n: $x = \dfrac{8n+5}{4n^2+3}$, $y = \dfrac{12-10n}{4n^2+3}$. Так как $4n^2 + 3 > 0$, то, для того чтобы $x > 0$, $y > 0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств $\begin{cases} 8n + 5 > 0, \\ 12 - 10n > 0. \end{cases}$ Решением системы является интервал $-\dfrac{5}{8} < n < \dfrac{6}{5}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0;\ 1$.

Ответ: 0; 1.

570. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения следующих условий для соответствующего квадратного уравнения: $D < 0$,

$a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 6x + a = 0$ имеем $D = 36 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a < 0, \\ 36 - 4a^2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ 9 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -3)$ (см. рис. 219).

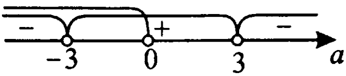


Рис. 219

Ответ: $(-\infty; -3)$.

571. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно для соответствующего квадратного уравнения выполнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 2ax + 3 = 0$ имеем $D = 4a^2 - 12a$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ 4a^2 - 12a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4a(a-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 3)$.

572. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 4x + a = 0$ имеем $D = 16 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ 16 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4(2-a)(2+a) < 0. \end{cases}$$

Решая второе неравенство последней системы методом интервалов и учитывая, что $a > 0$, получим $a \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

573. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 8x + a = 0$ имеем $D = 64 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a < 0, \\ 64 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 16 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -4)$ (см. рис. 220).

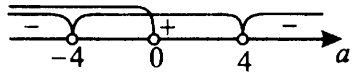


Рис. 220

Ответ: $(-\infty; -4)$.

574. Так как первая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 2$, то $x = 2$ является корнем уравнения $y_1(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_1(x) = 0$, тогда $y_1 = (x - a)(x - 2) = x^2 - x(a + 2) + 2a$; значит, $b = -(a + 2)$, $c = 2a$.

Поскольку $A(1; 2)$ — точка пересечения данных парабол, то справедлива система

$$\begin{cases} y_1(1) = 2, \\ y_2(1) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - (a + 2) + 2a = 2, \\ -1 + k + l = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3, \\ k + l = 3. \end{cases}$$

Проекция вершины второй параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = \frac{k}{2}$. Аналогично проекция вершины первой параболы — точка $x = \frac{a+2}{2}$. Из условия следует, что $\frac{k}{2} = \frac{a+2}{2} + 1$. Так как $a = 3$, то $\frac{k}{2} = \frac{5}{2} + 1 = 3{,}5$; $k = 7$. Подставив $k = 7$ во второе уравнение последней системы, получим $l = 3 - k = -4$. Таким образом, $k = 7$, $l = -4$.

Ответ: $k = 7$, $l = -4$.

575. Так как вторая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 3$, то $x = 3$ является корнем уравнения $y_2(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_2(x) = 0$, тогда $y_2 = -(x - a)(x - 3) = -x^2 + x(a + 3) - 3a$; значит, $d = a+3$; $f = -3a$. Поскольку $A(2; 3)$ – точка пересечения данных парабол, то справедлива система

$$\begin{cases} y_1(2) = 3, \\ y_2(2) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 + 2b + c = 3, \\ -4 + 2(a + 3) - 3a = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b + c = -1, \quad (1) \\ a = -1. \end{cases}$$

Проекция вершины первой параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = -\frac{b}{2}$. Аналогично проекция вершины второй параболы на ось Ox — точка $x = \frac{a+3}{2}$. Из условия следует, что $\frac{a+3}{2} = -\frac{b}{2} + 2$.

Так как $a = -1$, то $\frac{b}{2} = 2 - \frac{a+3}{2} = 1$; $b = 2$. Подставив $b = 2$ в уравнение (1), получим $c = -1 - 4 = -5$. Таким образом, $b = 2$, $c = -5$.

Ответ: $b = 2$, $c = -5$.

576. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = -2$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = -2$; $b = 4$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x + 3$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x + 3$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b - 2)x + c - 3 = 0$ равен нулю: $D = (b-2)^2 - 4(c-3) = 0$; $(b-2)^2 = 4(c-3)$. Подставив $b = 4$, получим: $4 = 4(c - 3)$; $c = 4$.

Ответ: $b = 4$; $c = 4$.

577. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = 3$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = 3$; $b = -6$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x - 5$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x - 5$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b - 2)x + c + 5 = 0$ равен нулю: $D = (b - 2)^2 - 4(c + 5) = 0$; $(b - 2)^2 = 4(c + 5)$. Подставив $b = -6$, получим $64 = 4(c + 5)$; $c + 5 = 16$; $c = 11$.

Ответ: $b = -6$; $c = 11$.

578. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geqslant 0$; $4(b-3)(b+2) \geqslant 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 отрицательны, то, согласно теореме Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b < 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow -6 < b < 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in (-6; -2]$.

Ответ: $(-6; -2]$.

579. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geqslant 0$; $4(b-3)(b+2) \geqslant 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 положительны, то, согласно теореме Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow b > 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in [3, +\infty)$.

Ответ: $[3, +\infty)$.

580. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 221), совпадающая при $x < -2$ с графиком гиперболы $y = \frac{4}{x}$, при $-2 \leqslant x \leqslant 2$ с графиком прямой $y = \frac{x}{2} - 1$ и при $x > 2$ с графиком параболы $y = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Вершина параболы находится в точке $(3; -1)$, ветви направлены вверх. По графику определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ две общие точки при $-2 < m < -1$ и при $m = 0$.

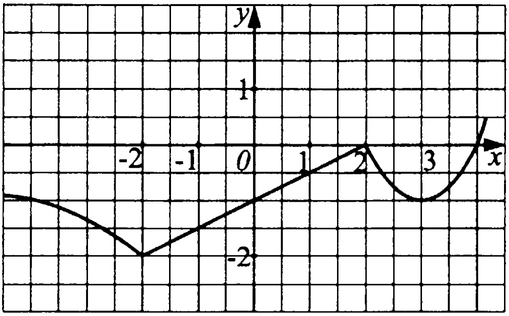


Рис. 221

Ответ: $m \in (-2; -1) \cup \{0\}$.

581. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 222), совпадающая при $x < -1$ с графиком параболы $y = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$, вершина которой находится в точке $(-2; 0)$, а ветви направлены вверх; при $-1 \leqslant x < 0$ с графиком прямой $y = -x + 1$; при $0 \leqslant x \leqslant 3$ с графиком прямой $y = x + 1$; при $x > 3$ с графиком гиперболы $y = \frac{12}{x}$. По графику определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $0 < m < 1$ и при $2 < m < 4$.

Ответ: $m \in (0; 1) \cup (2; 4)$.

582. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 223), совпадающая при $x \leqslant -3$ с графиком гиперболы $y = \frac{6}{x}$, при

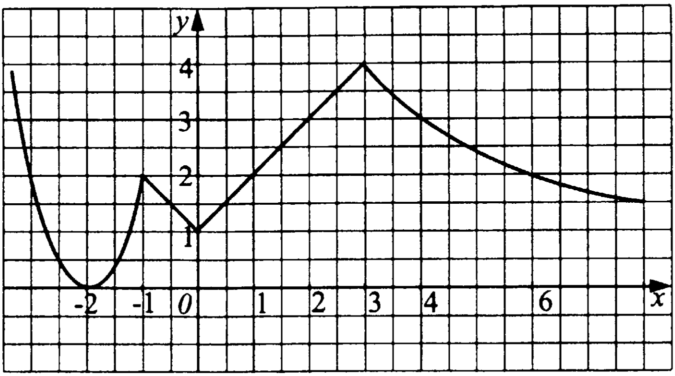


Рис. 222

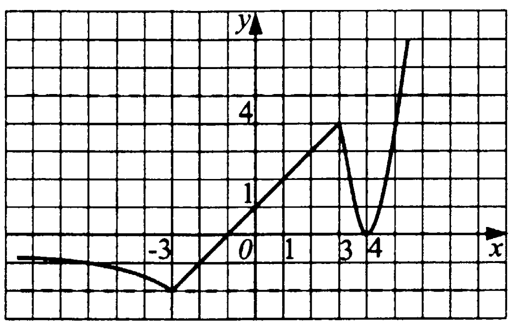


Рис. 223

$-3 < x \leqslant 3$ с графиком прямой $y = x + 1$ и при $x > 3$ с графиком параболы $y = 4x^2 - 32x + 64 = (2x - 8)^2$.

Вершина параболы находится в точке $(4; 0)$, ветви направлены вверх. По рисунку определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ только одну общую точку при $m = -2$ и при $m > 4$.

Ответ: $\{-2\} \cup (4; +\infty)$.

583. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 224), совпадающая при $x \leqslant -1$ с графиком гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$, при $-1 < x \leqslant 1$ с графиком прямой $y = -x$ и при $x > 1$ с графиком параболы $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$. Вершина параболы находится в точке $(2; 0)$, ветви направлены вниз. По рисунку определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $-1 < m < 0$.

Ответ: $(-1; 0)$.

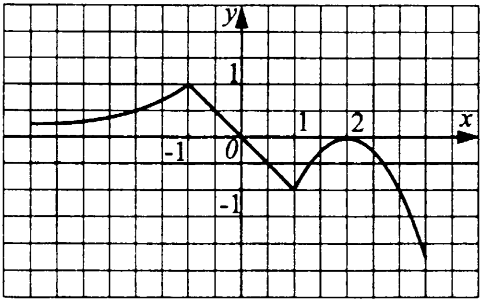


Рис. 224

584. Прямая $y = kx + 4$ не пересекает параболу $y = 3 - 2x - x^2$ тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $3 - 2x - x^2 = kx + 4$ отрицателен.
То есть $D = (k+2)^2 - 4 = k^2 + 4k + 4 - 4 = k^2 + 4k = k(k+4) < 0$.

Последнее неравенство имеет решение $-4 < k < 0$. Наибольшее целое значение из этого промежутка $k = -1$.

Ответ: -1.

585. Прямая $y = kx - 3$ имеет с параболой $y = x^2 - 2x + 1$ одну общую точку тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 - 2x + 1 = kx - 3$; $x^2 - (2+k)x + 4 = 0$ равен нулю.
То есть $D = (k+2)^2 - 4 \cdot 4 = k^2 + 4k - 12 = 0$. Корни: $k_1 = -6$; $k_2 = 2$.
При этих значениях k прямая $y = kx - 3$ и парабола $y = x^2 - 2x + 1$ имеют одну общую точку.

Ответ: $-6; 2$.

586. Прямая $y = kx - 2$ не пересекает параболу $y = x^2 - x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x - 1 = kx - 2$; $x^2 - (1+k)x + 1 = 0$ не имеет решений.
То есть $D = (k+1)^2 - 4 < 0$; $k^2 + 2k - 3 < 0$; $-3 < k < 1$.
Так как по условию $k \geqslant 0$, то получаем $0 \leqslant k < 1$.

Ответ: $0 \leqslant k < 1$.

587. Прямая $y = kx - \frac{41}{4}$ и парабола $y = x^2 + 3x - 4$ имеют не более одной точки пересечения тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 3x - 4 = kx - \frac{41}{4}$; $x^2 + (3-k)x + 6{,}25$ меньше либо равен нулю. $D = (3-k)^2 - 25 = k^2 - 6k - 16 \leqslant 0$.

Решениями этого неравенства будут $-2 \leqslant k \leqslant 8$. Но так как k — число отрицательное, то $-2 \leqslant k < 0$.

Ответ: $-2 \leqslant k < 0$.

588. Прямая $y = kx + 5$ имеет с параболой $y = x^2 - 4x + 14$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 4x + 14 = kx + 5$ имеет один корень.
То есть $D = (k+4)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 + 8k - 20 = 0$. Корни: $k_1 = -10$, $k_2 = 2$. Но так как по условию k — число отрицательное, то $k = -10$.

Ответ: -10.

589. Прямая $y = kx - 1$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x + 3$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 2x + 3 = kx - 1$; $x^2 + (2 - k) + 4 = 0$ имеет один корень.
То есть $D = (2-k)^2 - 4 \cdot 4 = k^2 - 4k - 12 = 0$. Решая полученное уравнение, найдём $k_1 = 6$, $k_2 = -2$. Но так как по условию $k < 0$, то выбираем ответ $k = -2$.

Ответ: -2.

590. Прямая $y = kx - 13$ пересекает параболу $y = x^2 + 3x - 4$ в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 4 = kx - 13$; $x^2 + (3 - k)x + 9 = 0$ имеет два различных решения.
То есть $D = (3-k)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 - 6k - 27 > 0$. Это неравенство имеет решения: $k < -3$ или $k > 9$. Так как по условию $k > 0$, то получаем ответ $k > 9$.

Ответ: $k > 9$.

591. Графики функций $y = kx - 5$ и $y = x^2 - 2x - 1$ пересекаются в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 2x - 1 = kx - 5$; $x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ имеет два различных корня.
То есть $D = (k+2)^2 - 16 > 0$; $k^2 + 4k - 12 > 0$; $(k+6)(k-2) > 0$; $k \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$. Так как по условию $k > 0$, то искомые значения $k \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

592. Графики функций $y = kx - 8$ и $y = x^2 + 5x + 1$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 8 = x^2 + 5x + 1$; $x^2 + (5 - k)x + 9 = 0$ не имеет действительных корней.
То есть $D = (5-k)^2 - 36 = k^2 - 10k - 11 = (k+1)(k-11) < 0$. Решением последнего неравенства является интервал $-1 < k < 11$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 11$.

Ответ: $0 < k < 11$.

593. Графики функций $y = kx - 11$ и $y = x^2 + 6x + 25$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 11 = x^2 + 6x + 25$; $x^2 + (6 - k)x + 36 = 0$ не имеет действительных корней.

То есть $D = (6 - k)^2 - 144 = k^2 - 12k - 108 = (k + 6)(k - 18) < 0$.

Решением последнего неравенства является интервал $-6 < k < 18$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 18$.

Ответ: $0 < k < 18$.

594. $\begin{cases} 8 - 6x > 4x - 12, \\ 3x + 16 < 5x + 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x < 20, \\ 2x > 16 - 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 8 - 2a. \end{cases}$

Отметим на числовых осях области, на которых выполняется каждое из неравенств (см. рис. 225).

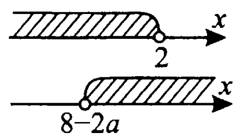


Рис. 225

Так как по условию задачи система имеет только одно целое решение, то $x = 1$, следовательно, $0 \leqslant 8 - 2a < 1$; $-8 \leqslant -2a < -7$; $4 \geqslant a > \frac{7}{2}$; $3{,}5 < a \leqslant 4$.

Ответ: $3{,}5 < a \leqslant 4$.

595. $\begin{cases} 12 + 7x < 9x - 6, \\ x - 9 < 6a - 2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 < 2x, \\ 3x < 6a + 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9, \\ x < 2a + 3. \end{cases}$

Так как по условию задачи система имеет ровно два целых решения, то $11 < 2a + 3 \leqslant 12$ (см. рис. 226).

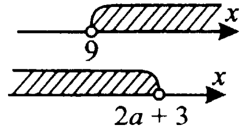


Рис. 226

Из этого неравенства получим $8 < 2a \leqslant 9$; $4 < a \leqslant \frac{9}{2}$; $4 < a \leqslant 4{,}5$.

Ответ: $4 < a \leqslant 4{,}5$.

596. Заданная парабола имеет с осью Ox не менее одной общей точки тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 + 3x - 2c = 0$ неотрицателен. Учитывая, что $c < 0$, получим систему неравенств

$$\begin{cases} 9 + 8c \geqslant 0, \\ c < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geqslant -\dfrac{9}{8}, \\ c < 0. \end{cases}$$

Ответ: $-\dfrac{9}{8} \leqslant c < 0$.

597. Для того чтобы парабола $y = px^2 - 4x + 3 = 0$ не имела с осью Ox ни одной общей точки, дискриминант уравнения $px^2 - 4x + 3 = 0$ должен быть меньше нуля.

$D = 16 - 12p < 0$; $p > \dfrac{4}{3}$.

Ответ: $p > \dfrac{4}{3}$.

598. Графики функций $y = px^2 - 24x + 1$ и $y = 12x^2 - 2px - 1$ пересекаются в двух точках, если уравнение $px^2 - 24x + 1 = 12x^2 - 2px - 1$ имеет два различных действительных корня. Выполнив преобразования, получаем $(12 - p)x^2 - 2(p - 12)x - 2 = 0$. Уравнение $ax^2 + 2mx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $\begin{cases} a \neq 0; \\ \dfrac{D}{4} > 0. \end{cases}$

В данном случае имеем

$$\begin{cases} 12 - p \neq 0, \\ (p - 12)^2 + 2(12 - p) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 12, \\ (p - 12)(p - 14) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p < 12, \\ p > 14. \end{array} \right.$$

Ответ: $p \in (-\infty; 12) \cup (14; +\infty)$.

599. Прямая $y = kx + 10$ и парабола $y = -x^2 - 3x + 6$ не имеют общих точек, если уравнение $kx + 10 = -x^2 - 3x + 6$ не имеет действительных корней, то есть $D < 0$. Получим $x^2 + (3 + k)x + 4 = 0$; $D = (3 + k)^2 - 16 < 0$; $9 + 6k + k^2 - 16 < 0$; $k^2 + 6k - 7 < 0$; $(k - 1)(k + 7) < 0$; $-7 < k < 1$. По условию $k < 0$, следовательно, $-7 < k < 0$.

Ответ: $-7 < k < 0$.

600. Если уравнение $ax^2 - 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня, то $a \neq 0$ и дискриминант $D > 0$. По теореме Виета произведение корней x_1x_2 приведённого квадратного уравнения есть его свободный член. Обозначим корни уравнения $x^2 - \dfrac{4}{a}x + \dfrac{2}{a} = 0$ через x_1 и x_2. Тогда $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{a}$, и так как корни имеют разные знаки, то $\frac{2}{a} < 0$, $a < 0$. В этом случае

$D = \frac{16}{a^2} - \frac{8}{a} > 0.$

Наибольшее целое значение a, удовлетворяющее неравенству $a < 0$, есть $a = -1$.

Ответ: -1.

601. По условию абсцисса вершины данной параболы $x_0 = -\frac{b}{2} = -4$. Отсюда $b = 8$. Итак, уравнение параболы $y = x^2 + 8x + c$. Так как вершина параболы находится в точке $K(-4; 7)$, то $7 = (-4)^2 + 8(-4) + c$; $7 = 16 - 32 + c$. Отсюда $c = 23$.

Ответ: $b = 8$; $c = 23$.

602. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 2, \\ y = kx + 2. \end{cases}$
Подставив значение y из второго уравнения системы в первое, получим $x^2 + (kx-2)^2 = 2$; $(k^2+1)x^2 - 4kx + 2 = 0$. Для того чтобы прямая пересекла окружность в двух точках, дискриминант последнего уравнения должен быть больше нуля: $D = 16k^2 - 8k^2 - 8 > 0$; $k^2 > 1$; $|k| > 1$. Так как k — число отрицательное, то $k < -1$.

Ответ: $k < -1$.

603. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений $\begin{cases} y = x + k + 1, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2. \end{cases}$
Подставив значение y из первого уравнения системы во второе, получим $(x+1)^2 + (x+k+1-1)^2 = 2$; $2x^2 + 2(1+k)x - 1 + k^2 = 0$.

Прямая пересечёт окружность в двух точках, если дискриминант полученного уравнения будет больше нуля: $\frac{D}{4} = (1+k)^2 + 2 - 2k^2 > 0$; $k^2 - 2k - 3 < 0$; $-1 < k < 3$. Нам нужны неположительные значения k, значит, $-1 < k \leqslant 0$.

Ответ: $-1 < k \leqslant 0$.

604. Данные прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $3x^2 - 2ax + 4 = a - 2$ не имеет решений. В этом случае дискриминант

квадратного уравнения $3x^2 - 2ax + 6 - a = 0$ должен быть меньше нуля.
$\frac{D}{4} = a^2 - 18 + 3a$; $a^2 + 3a - 18 < 0$; $-6 < a < 3$.

Ответ: $-6 < a < 3$.

605. Данные прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $2x^2 + 2kx + 6 = -k - 6$ не имеет решений. В этом случае дискриминант квадратного уравнения $2x^2 + 2kx + 12 + k = 0$ должен быть меньше нуля.
$\frac{D}{4} = k^2 - 24 - 2k$; $k^2 - 2k - 24 < 0$; $-4 < k < 6$.

Ответ: $-4 < k < 6$.

606. Прямая $y = kx - 2$ не имеет общих точек с параболой $y = x^2 + 3x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 1 = kx - 2$;
$x^2 + (3 - k)x + 1 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (3 - k)^2 - 4 < 0$.
Прямая не имеет общих точек с параболой $y = x^2 - x + 2$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x + 2 = kx - 2$; $x^2 - (1 + k)x + 4 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (1 + k)^2 - 16 < 0$. Следовательно, данная прямая не имеет общих точек с обеими параболами, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (3-k)^2 - 4 < 0, \\ (1+k)^2 - 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 6k + 5 < 0, \\ k^2 + 2k - 15 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < k < 5, \\ -5 < k < 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 < k < 3.$$

Ответ: $1 < k < 3$.

607. Прямая $y = kx + 5$ не имеет общих точек с параболами, если уравнения $kx + 5 = -2x^2 - 2x + 3$ и $kx + 5 = x^2 + 5x + 21$ не имеют решений. В этом случае их дискриминанты отрицательны:

$$\begin{cases} (k+2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0, \\ (5-k)^2 - 4 \cdot 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 4k - 12 < 0, \\ k^2 - 10k - 39 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < k < 2, \\ -3 < k < 13; \end{cases} \Leftrightarrow -3 < k < 2.$$

Ответ: $-3 < k < 2$.

608. Построим график данной функции (см.рис. 227).

Проведём прямую OA, проходящую через начало координат и точку с координатами $(-4; -4)$, и прямую OB, проходящую через начало координат и параллельную прямым $y = 2x + 4$ и $y = 2x - 12$. Прямая $y = ax$ имеет три общие точки с графиком данной функции тогда и только тогда, когда она лежит внутри угла AOB, следовательно, $1 < a < 2$.

Ответ: $1 < a < 2$.

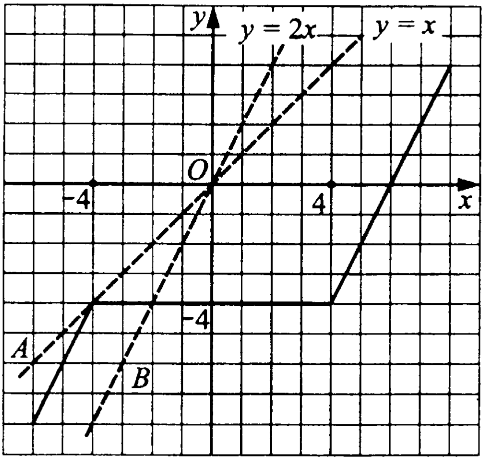


Рис. 227

609. Рассмотрим функцию $y(x) = 2x^2+2(a+2)x+a+6$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Значения параметра a, при которых все решения неравенства $y(x) < 0$ являются положительными числами, можно найти из условий

$$\left[\begin{array}{l} D < 0, \\ \begin{cases} D \geqslant 0, \\ y(0) \geqslant 0, \\ x_0 \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

где D — дискриминант уравнения $y(x) = 0$, x_0 — абсцисса вершины параболы $y(x)$.

Решаем полученную совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 4a^2+8a-32 < 0, \\ \begin{cases} 4a^2+8a-32 \geqslant 0, \\ a+6 \geqslant 0, \\ -\dfrac{2(a+2)}{4} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < a < 2, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leqslant -4, \\ a \geqslant 2, \end{array}\right. \\ a \geqslant -6, \\ a \leqslant -2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < a < 2, \\ -6 \leqslant a \leqslant -4; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -6 \leqslant a < 2$.

Ответ: $-6 \leqslant a < 2$.

Замечание. При $D < 0$ неравенство $y(x) < 0$ не имеет решений. Это означает, что множество решений неравенства не содержит неположительных чисел, то есть выполняется условие задачи.

610. Рассмотрим функцию $y(x) = 2x^2+2(a-2)x+6-a$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Значения параметра a, при которых все решения неравенства $y(x) < 0$ являются отрицательными числами, можно найти из условий $\left[\begin{array}{l} D<0, \\ \left\{\begin{array}{l} D \geqslant 0, \\ y(0) \geqslant 0, \\ x_0 \leqslant 0, \end{array}\right. \end{array}\right.$

где D — дискриминант уравнения $y(x)=0$, x_0 — абсцисса вершины параболы $y(x)$. Решаем полученную совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 4a^2-8a-32<0, \\ \left\{\begin{array}{l} 4a^2-8a-32 \geqslant 0, \\ 6-a \geqslant 0, \\ -\dfrac{2(a-2)}{4} \leqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<a<4, \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \geqslant 4, \\ a \leqslant -2, \end{array}\right. \\ a \leqslant 6, \\ a \geqslant 2; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<a<4, \\ 4 \leqslant a \leqslant 6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2<a \leqslant 6.$

Ответ: $-2<a \leqslant 6$.

Замечание. При $D<0$ неравенство $y(x)<0$ не имеет решений. Это означает, что множество решений неравенства не содержит неотрицательных чисел, то есть выполняется условие задачи.

612. Данное неравенство эквивалентно неравенству $x^2+(4a-3)x+1{,}75-3a \leqslant 0$. Это неравенство не имеет решений, когда дискриминант D соответствующего квадратного уравнения меньше нуля. Вычислим
$D=(4a-3)^2-4(1{,}75-3a)=16a^2-12a+2=2(8a^2-6a+1)$. Решим неравенство $8a^2-6a+1<0$. Для этого решим уравнение $8a^2-6a+1=0$. Его корни $a_1=\dfrac{1}{4}$ и $a_2=\dfrac{1}{2}$, а решение неравенства есть $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$.

613. Неравенство $ax^2+(a-3)x+a>0$ выполняется при любых x, если $a>0$ и дискриминант уравнения $ax^2+(a-3)x+a=0$
$D=(a-3)^2-4a\cdot a<0$. Получаем

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-6a+9-4a^2<0, \\ a>0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+2a-3>0, \\ a>0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a-1)(a+3)>0, \\ a>0. \end{array}\right.$$

Решая методом интервалов последнюю систему (см. рис. 228), получим $a>1$.

Ответ: $a>1$.

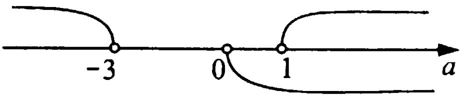


Рис. 228

615. Построим график функции $y = \big||4x-5|-1\big|$ (см. рис. 229).

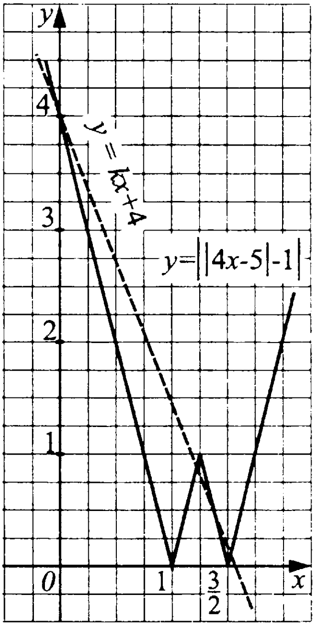


Рис. 229

Прямая $y = kx + 4$ проходит через точку $(0; 4)$ при любом значении параметра k. При $k = -4$ прямая $y = kx + 4$ имеет бесконечное множество общих точек с графиком данной функции. При $k \neq -4$ для выполнения условия задачи необходимо, чтобы прямая $y = kx + 4$ лежала «не выше» точки $\left(\frac{5}{4}; 1\right)$ и «не ниже» точки $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Запишем уравнения прямых, проходящих через точки $(0; 4)$, $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ и $(0; 4)$, $\left(\frac{5}{4}; 1\right)$:

$$1)\ \begin{cases} 4 = 0 \cdot k + b, \\ 0 = \frac{3}{2}k + b; \end{cases} \qquad k = -\frac{8}{3},\ b = 4;\ y = -\frac{8}{3}x + 4;$$

2) $\begin{cases} 4 = 0 \cdot k + b, \\ 1 = \frac{5}{4}k + b; \end{cases}$ $k = -\frac{12}{5}, b = 4; y = -\frac{12}{5}x + 4.$

Из вышесказанного следует, что условие задачи выполняется при $-\frac{12}{5} \leqslant k \leqslant -\frac{8}{3}$ и $k = -4$.

Ответ: $k = -4$, $-\frac{12}{5} \leqslant k \leqslant -\frac{8}{3}$.

616. Построим график функции $y = \big||3x-2|-4\big|$ (см. рис. 230).

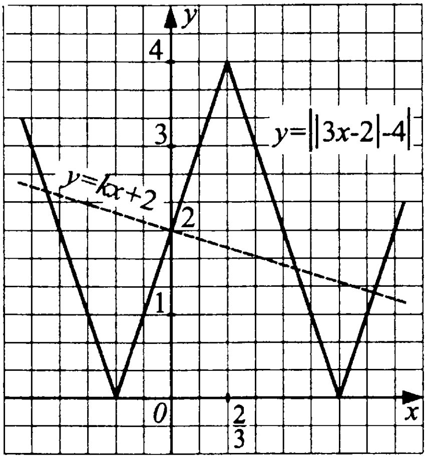


Рис. 230

Прямая $y = kx + 2$ проходит через точку $(0; 2)$ при любом значении параметра k. При $k = 3$ прямая $y = kx + 2$ имеет бесконечное множество общих точек с графиком данной функции. При $k > 3$ $y = kx + 2$ имеет единственную общую точку с графиком данной функции, значит, $k \leqslant 3$. При $k = -1$ $y = kx+2$ имеет три общие точки с графиком данной функции, а при $k < -1$ графики функций $y = kx + 2$ и $y = \big||3x-2|-4\big|$ имеют менее трёх общих точек, значит, $k \geqslant -1$. При $-1 \leqslant k \leqslant 3$ условие задачи выполняется.

Ответ: $-1 \leqslant k \leqslant 3$.

617. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = y(x)$, имея в виду, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат, а параметр k есть угловой коэффициент этой прямой. При различных значений k прямая

$y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения (см. рис. 231).

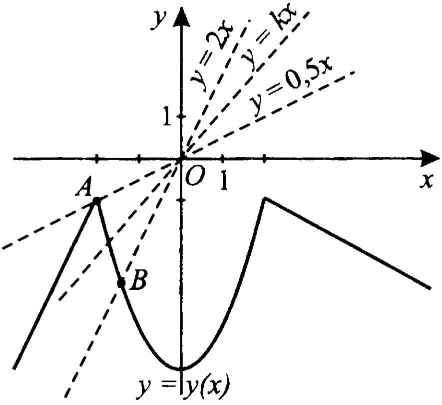


Рис. 231

Прямая $y = kx$ и кривая $y = y(x)$ пересекаются в двух различных точках тогда и только тогда, когда прямая $y = kx$ будет проходить внутри угла AOB, где прямая OB задана уравнением $y = 2x$, а прямая OA — уравнением $y = 0{,}5x$.

При любом другом k прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = y(x)$ либо не более, чем в одной точке, либо в бесконечном числе точек при $k = -0{,}5$.

Таким образом, $0{,}5 < k < 2$.

Ответ: $0{,}5 < k < 2$.

618. Построим график данной функции

$$y = \begin{cases} 3x + 5, \text{ если } x < -2, \\ -x + 2, \text{ если } -2 < x \leqslant 2, \\ x - 2, \quad \text{если } x > 2 \end{cases}$$

(см. рис. 232).

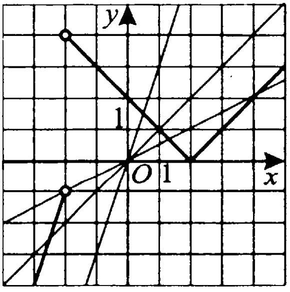


Рис. 232

Прямая $y = kx$ пересекает график функции в двух различных точках, если:

1) угловой коэффициент прямой больше углового коэффициента прямой $y = 0$ и меньше либо равен угловому коэффициенту прямой, проходящей через точку с координатами $(-2; -1)$;

2) угловой коэффициент прямой больше либо равен угловому коэффициенту прямой, параллельной прямой $y = x - 2$, и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямой $y = 3x + 5$.

1. Найдём угловой коэффициент прямой, проходящей через точку с координатами $(-2; -1)$: $-1 = -2k$, $k = 0{,}5$.

Угловой коэффициент прямой $y = 0$ равен 0. Получаем $0 < k \leqslant 0{,}5$.

2. Угловой коэффициент прямой, параллельной прямой $y = x - 2$, равен 1, а прямой, параллельной прямой $y = 3x + 5$, равен 3. Получаем $1 \leqslant k < 3$. Прямая $y = kx$ имеет две общие точки с графиком заданной функции, если $0 < k \leqslant 0{,}5$ и $1 \leqslant k < 3$.

Ответ: $(0; 0{,}5] \cup [1; 3)$.

619. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = \begin{cases} 3x + 3, & x < 0, \\ x - 2, & 0 \leqslant x < 1, \\ -2x + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

Для различных значений k прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения.

Из рисунка 233 следует, что $k \in (-\infty; -2]$ или $k = -1$, так как для всех других k прямая $y = kx$ будет иметь с кривой или одну общую точку, или три общие точки, или не будет иметь ни одной.

Ответ: $k \in (-\infty; -2] \cup \{-1\}$.

621. Построим в одной системе координат данный прямоугольник (с его диагоналями) и прямую $y = kx$ (см. рис. 234).

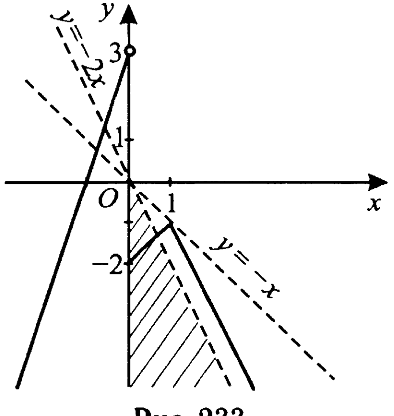


Рис. 233

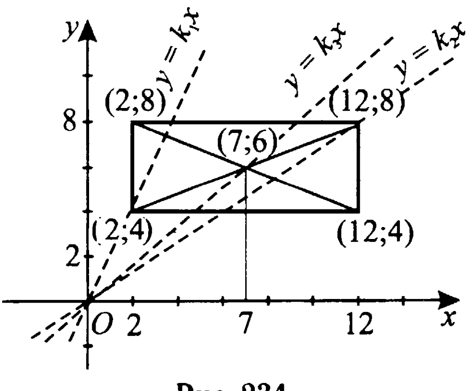


Рис. 234

Пусть $y = k_1x$ — прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(2;4)$; $y = k_2x$ — прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(12;8)$; $y = k_3x$ — прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(7;6)$. Тогда прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с множеством точек, принадлежащих диагоналям этого прямоугольника, тогда и только тогда, когда $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ и $k \neq k_3$. Легко видеть, что $k_1 = 2$, $k_2 = \dfrac{2}{3}$, $k_3 = \dfrac{6}{7}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3} \leqslant k < \dfrac{6}{7}$; $\dfrac{6}{7} < k \leqslant 2$.

622. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$.

$AB = CD$ как диаметры одной окружности; $\angle BDA = \angle CAD = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры; $\angle ABD = \angle DCA$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AD.

Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по гипотенузе и острому углу.

623. Пусть $AC = a$, тогда $R = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot a}{4S} = \dfrac{6a}{4 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{2a}{\sqrt{15}}$; $R\sqrt{15} = 2a$ (см. рис. 235). По формуле Герона

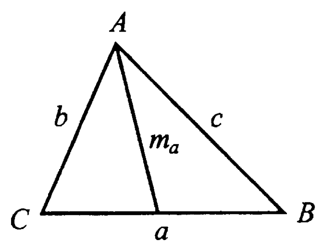


Рис. 235

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+2+3}{2} = \dfrac{5+a}{2}$ — полупериметр $\triangle ABC$, $b = 2$, $c = 3$ — стороны $\triangle ABC$.

Тогда $S = \sqrt{\dfrac{5+a}{2} \cdot \dfrac{5-a}{2} \cdot \dfrac{a+1}{2} \cdot \dfrac{a-1}{2}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(25-a^2)(a^2-1)}$;

$\dfrac{3\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(25-a^2)(a^2-1)}$; $9 \cdot 15 = -a^4 + 26a^2 - 25$; $a^4 - 26a^2 + 160 = 0$; $a_1 = 4$, $a_2 = \sqrt{10}$.

Учитывая формулу для вычисления медианы $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26 - a^2}$ и условие $m_a < \frac{a}{2}$, то есть $\sqrt{26 - a^2} < a$, получаем верное неравенство при $a = 4$ и неверное неравенство при $a = \sqrt{10}$.

Таким образом, $R\sqrt{15} = 2a = 8$.

Ответ: 8.

624. 1. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 36 = 864$. С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$, где $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60$. Тогда $CD = \frac{2S_{ABC}}{AB} = 28{,}8$ (см. рис. 236).

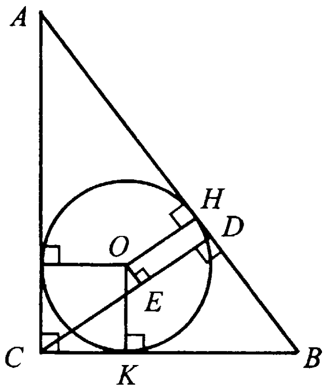


Рис. 236

2. $S_{ABC} = \frac{Pr}{2}$, $r = \frac{2S_{ABC}}{P}$, где $P = 36 + 48 + 60 = 144$ — периметр, $r = OH$ — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$. Тогда $r = \frac{2 \cdot 864}{144} = 12$.

3. Так как $OEDH$ — прямоугольник, то $OE = HD = BH - BD$. Но $BD = \sqrt{CB^2 - CD^2} = \sqrt{36^2 - 28{,}8^2} = 21{,}6$; $BH = BK = CB - r = 36 - 12 = 24$. Следовательно, $OE = 24 - 21{,}6 = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

625. Треугольники ABC и CBH — прямоугольные, $\angle ACB = \angle CHB = 90°$, $\angle ABC = \angle CBH$. Следовательно, треугольники ABC и CBH подобны по первому признаку подобия треугольников.

627. Треугольники ABC и MNP подобны по третьему признаку подобия треугольников, так как стороны треугольника ABC пропорциональны сторонам треугольника MNP: $\frac{AB}{PN} = \frac{BC}{MP} = \frac{AC}{MN} = 2$ (MN, MP, PN — средние линии треугольника ABC).

628. Из формулы длины медианы $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ найдём сторону b.

$2 = \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{15})^2 + 2 \cdot 1^2 - b^2}$, $16 = 30 + 2 - b^2$, $b^2 = 16$, $|b| = 4$. Так как $b > 0$, то $b = 4$.

Тогда периметр треугольника $p = 1 + \sqrt{15} + 4 = 5 + \sqrt{15}$. Следовательно, $(5 - \sqrt{15})p = (5 - \sqrt{15})(5 + \sqrt{15}) = 25 - 15 = 10$.

Ответ: 10.

629. 1) Точки M и N — середины сторон AB и BC, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, $AC = 6 \cdot 2 = 12$ (см. рис. 237).

$$AB = BC = \frac{P_{ABC} - AC}{2} = \frac{32 - 12}{2} = 10,$$

$$MB = NB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5, BK = 4.$$

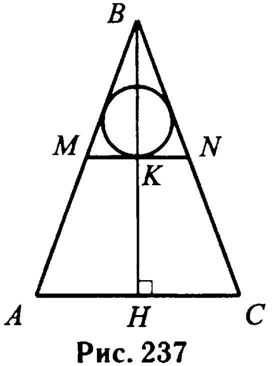


Рис. 237

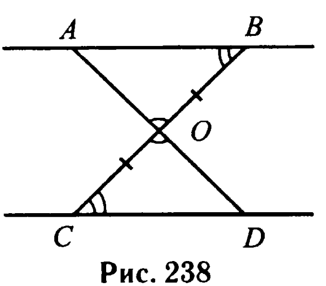


Рис. 238

2) $P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$.

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$,

$$S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12.$$

$S_{MBN} = \frac{1}{2}rP_{MBN}$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle\ MBN$,

$$r = \frac{2S_{MBN}}{P_{MBN}} = \frac{2 \cdot 12}{16} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

630. Доказательство:

1) $\angle AOB = \angle COD$ как противолежащие (см. рис. 238).

2) $\angle ABC = \angle BCD$ как накрест лежащие.

3) $\triangle AOB = \triangle COD$ по второму признаку равенства треугольников ($OB = OC$, $\angle DOC = \angle BOA$, $\angle ABO = \angle OCD$).

631. Так как AD — медиана треугольника ABC, то $BD = CD = 2$ и $BC = 2CD = 4$ (см. рис. 239).

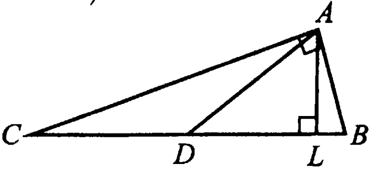


Рис. 239

Так как $AC^2 + AB^2 = BC^2$, то треугольник ABC — прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора. Следовательно, его площадь $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = \frac{\sqrt{15}}{2}$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AL$. Тогда $AL = \frac{2S}{BC} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Так как ABC — прямоугольный треугольник и AD — его медиана, то $AD = \frac{BC}{2} = 2$. Тогда $DL = \sqrt{AD^2 - AL^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{7}{4}$.

Таким образом, $BL = BD - DL = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

Ответ: 0,25.

632. Радиус вписанной окружности треугольника MBN $r = \frac{2S}{P}$, где S и P — площадь и периметр этого треугольника соответственно (см. рис. 240).

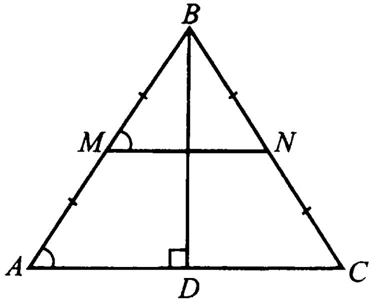


Рис. 240

Так как $\cos\angle BAC = \frac{AD}{AB}$, то $AB = \frac{AD}{\cos\angle BAC} = \frac{AD}{\sqrt{1-\sin^2\angle BAC}} =$

$= \frac{5}{3}AD = \frac{5}{3}MN = 10$. Значит, $P = 2MB + MN = AB + MN = 16$.

Так как $MN \parallel AC$, то $\angle BAC = \angle BMN$. Тогда

$S = \frac{1}{2}\cdot MB\cdot MN\cdot\sin\angle BMN = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{4}{5} = 12$.

Таким образом, $r = \frac{2\cdot 12}{16} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

633. Доказательство:

$\triangle ABN = \triangle CBM$ по первому признаку равенства треугольников ($BN = BM$, $BC = BA$, $\angle B$ — общий), значит, $AN = CM$ (см. рис. 241).

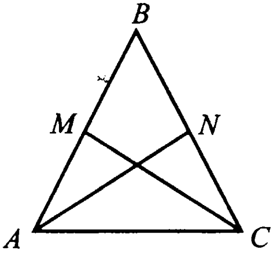


Рис. 241

634. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $AB = 2CD = 5$ (см. рис. 242). Тогда $AC = AB - 1 = 4$ и $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3$. Значит, $P_{ABC} = 3 + 4 + 5 = 12$.

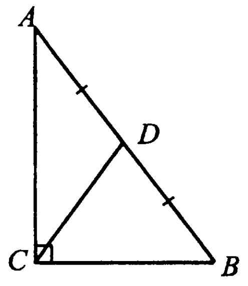


Рис. 242

Ответ: 12.

635. Так как центр описанной окружности точка O является также серединой гипотенузы треугольника ABC и $\angle ADO$ — прямой, то OD — средняя линия этого треугольника (см. рис. 243).

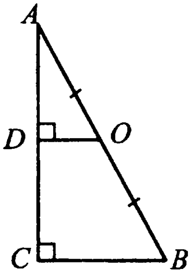


Рис. 243

Тогда $BC = 2OD = 2 \cdot 2{,}5 = 5$; $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$; $P_{ABC} = 13 + 12 + 5 = 30$. Итак, $r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot 30}{30} = 2$ — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: 2.

637. Так как центр описанной окружности точка O является также серединой гипотенузы треугольника ABC и $\angle ADO$ — прямой, то OD — средняя линия этого треугольника (см. рис. 244). Значит, $BC = 2OD = 5$.

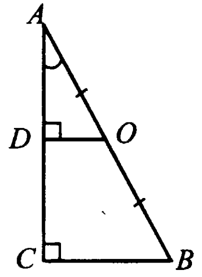


Рис. 244

Так как $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{12}$, то $AC = \dfrac{12 \cdot 5}{5} = 12$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$

$P_{ABC} = AB + BC + AC = 13 + 5 + 12 = 30.$

Ответ: 30.

638. По условию $AB = 29$, $AC = 27$, $AD = 26$ (см. рис. 245). Используя формулу для нахождения медианы, получим

$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$; $2 \cdot 26 = \sqrt{2 \cdot 29^2 + 2 \cdot 27^2 - BC^2}$;

$BC = 2\sqrt{109}.$

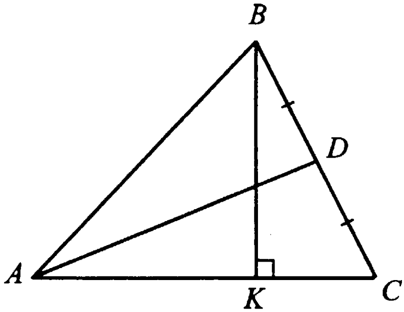


Рис. 245

По теореме косинусов для треугольника ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$; $436 = 29^2 + 27^2 - 2 \cdot 29 \cdot 27 \cdot \cos A$;

$\cos A = \dfrac{21}{29}$. Отсюда $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \dfrac{20}{29}$. Так как $\sin A = \dfrac{BK}{AB}$, то

$BK = AB \sin A = 29 \cdot \dfrac{20}{29} = 20.$

Ответ: 20.

639. Пусть $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{13}$, $BD = AC = x$, $AD = y$ (см. рис. 246).

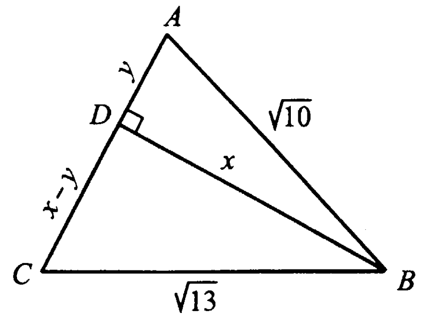


Рис. 246

Используя теорему Пифагора для треугольников ABD и BDC, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (x-y)^2 = 13, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 3$, $y = 1$, удовлетворяющее условиям $x > 0$, $y > 0$, $x > y$.

Ответ: 3.

640. Заметим, что $\triangle BMK \sim \triangle BAC$, так как $\angle B$ — общий, а $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BK}{BC}$, значит, $\angle MKB = \angle ACB$ и прямые MK и AC параллельны.

641. Пусть $AB = BC = 4$, $AD = 3$, $AC = x$ (см. рис. 247). Тогда медиану треугольника можно найти по формуле $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$.

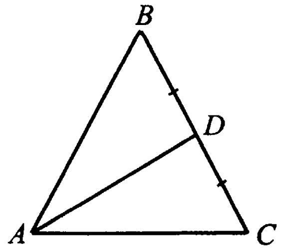


Рис. 247

Отсюда, $3 = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 4^2 + 2x^2 - 4^2}$; $x^2 = 10$.

Ответ: 10.

642. $\triangle MNK \sim \triangle ABC$, так как все его стороны пропорциональны сторонам треугольника ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ как средние линии. Значит, все углы равны.

644. Доказательство:

$\angle BCM = \angle ACM = 45°$ (см. рис. 248). $\triangle BMC$ — равнобедренный, поэтому возможны три варианта:

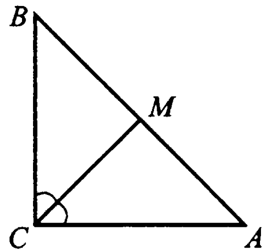


Рис. 248

1) $\angle BMC = \angle BCM = 45° \Rightarrow \angle B = 90°$, а это невозможно.

2) $\angle MBC = \angle BMC = \dfrac{180° - 45°}{2} = 67{,}5 \Rightarrow \angle AMC = 112{,}5° \Rightarrow$ $\angle MAC = 180° - 112{,}5° - 45° = 22{,}5°$, и $\triangle CMA$ не равнобедренный.

3) Значит, $\angle MBC = \angle BCM = 45° \Rightarrow \angle BMC = 90° \Rightarrow$ $\angle AMC = 90° \Rightarrow \angle MAC = 45°$. Таким образом, треугольник ABC — равнобедренный.

646. По условию $ON = 5$, $MN = 6$ (см. рис. 249).

$\triangle KNO \sim NBO$, так как они оба прямоугольные и $\angle NOK = \angle NOB$. Следовательно, $\dfrac{BN}{KN} = \dfrac{ON}{OK}$; $BN = \dfrac{KN \cdot ON}{OK} = \dfrac{3 \cdot 5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \dfrac{15}{4}$.

$BK = \sqrt{BN^2 - KN^2} = \dfrac{9}{4}$.

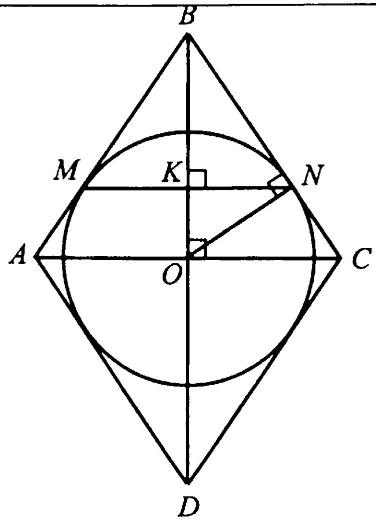


Рис. 249

$\triangle BKN \sim BOC$, так как они оба прямоугольные и $\angle OBC = \angle KBN$.

Следовательно, $\dfrac{BN}{BC} = \dfrac{BK}{BO}$; $BC = \dfrac{BN \cdot BO}{BK} = \dfrac{\frac{15}{4}\left(\frac{9}{4}+4\right)}{\frac{9}{4}} = \dfrac{125}{12}$.

Ответ: $\dfrac{125}{12}$.

648. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $BO = OD$. Следовательно, $\triangle BCO = \triangle DOC$ по первому признаку равенства треугольников (OC — общая, $BO = OD$, $\angle BOC = \angle DOC = 90°$). Значит, $BC = CD$ и, так как противоположные стороны параллелограмма попарно равны, то все стороны $ABCD$ равны, то есть $ABCD$ — ромб.

649. $\angle MAD = \angle AMB$ как накрест лежащие, и, так как $\angle BAM = \angle MAD$, то треугольник ABM — равнобедренный, то есть $BM = AB = 4$ (см. рис. 250).

$\angle NMC = \angle AMB$ как вертикальные, и $\angle BAM = \angle MNC$ как накрест лежащие. Следовательно, треугольник MCN — равнобедренный и $MC = CN = 2$. Значит, $AD = BC = BM + MC = 4 + 2 = 6$.

Так как треугольник ABK прямоугольный, то $BK = AB \cdot \sin \angle BAK = 4 \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3}$, $AK = \dfrac{AB}{2} = 2$ (катет, лежащий против угла в $30°$).

Итак, $KD = AD - AK = 6 - 2 = 4$; $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 2\sqrt{7}$.
Ответ: $2\sqrt{7}$.

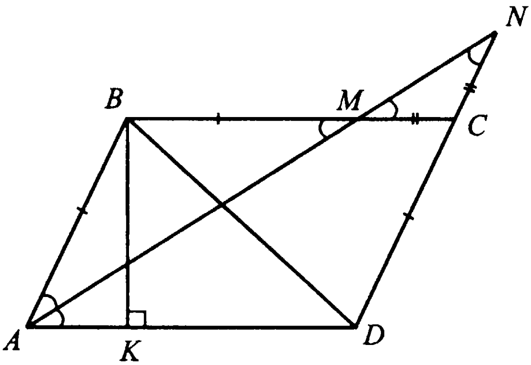


Рис. 250

650. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK — биссектриса угла A (см. рис. 251). $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\triangle ABK$ — равнобедренный, $BK = AB = 4$.

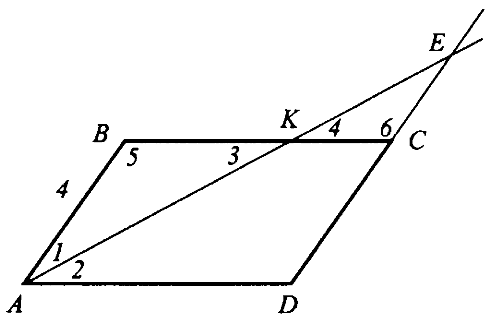


Рис. 251

2) $\triangle ABK \sim \triangle ECK$ по первому признаку подобия ($\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 6$ как накрест лежащие при параллельных сторонах AB и CD и секущей BC).

Из подобия треугольников следует $\dfrac{AB}{EC} = \dfrac{BK}{KC}$.

Отсюда $KC = \dfrac{EC \cdot BK}{AB} = \dfrac{1 \cdot 4}{4} = 1$.

Ответ: 1.

651. Пусть $AB = 3$, $AC = \sqrt{37}$, $\angle BAK = 60°$ (см. рис. 252). Тогда $AK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}$ как катет, лежащий против угла в $30°$, и $BK =$
$= AB \cdot \cos A = 3 \cdot \cos 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

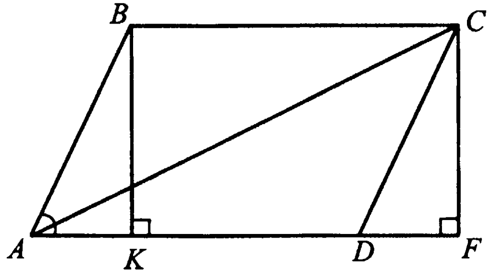


Рис. 252

Пусть $KD = x$. Так как $AK = DF$ ($\triangle ABK = \triangle DCF$ по второму признаку), то $AF = AK + KD + DF = x + 3$. Тогда $AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} =$
$= \sqrt{AC^2 - BK^2} = \sqrt{37 - \dfrac{27}{2}} = \dfrac{11}{2}$; $x + 3 = \dfrac{11}{2}$; $x = \dfrac{5}{2}$. Следовательно,

$AD = AK + KD = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 4$.

Таким образом, $P_{ABCD} = 2AB + 2AD = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

652. Доказательство:

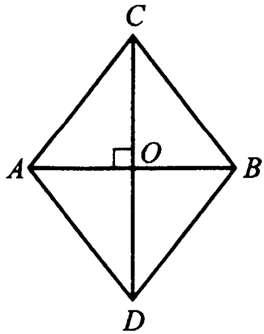


Рис. 253

Известно, что $AB \perp CD$, $AO = OB$, $CO = OD$ (см. рис. 253).
$\triangle AOC = \triangle BOD$ по первому признаку равенства треугольников ($AO = OB, CO = OD, \angle COA = \angle BOD$). Аналогично $\triangle COB = \triangle AOD$.

$\triangle AOC = \triangle COB$ по первому признаку равенства треугольников ($\angle AOC = \angle COB$, OC — общая сторона, $AO = OB$).

Значит, $\triangle AOC = \triangle OCB = \triangle AOD = \triangle BOD$, а потому $AC = BC = AD = BD$, то есть $ABCD$ — ромб.

653. Пусть $AC = 3x$, $BD = 4x$ (см. рис. 254). По теореме Пифагора для треугольника AOB получим $AB^2 = AO^2 + BO^2$; $25 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2$; $x = 2$. Тогда $BD = 8$, $AC = 6$ и $BD + AC = 14$.

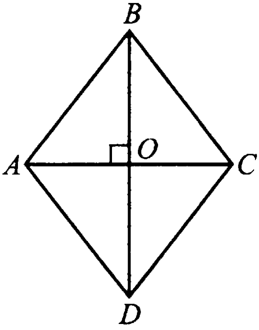


Рис. 254

Ответ: 14.

654. Доказательство:

$\triangle ABM = \triangle MCD$ по первому признаку равенства треугольников ($BM = MC, CD = AB, \angle ABM = \angle MCD$), значит, $AM = MD$.

655. По условию $3\angle CBD = \angle ABD$ (см. рис. 255). При этом $\angle ABC =$ $= 180° - \angle BAD = 120°$. Тогда $\angle ABC = 3\angle CBD + \angle CBD$;
$120° = 4\angle CBD$; $\angle CBD = 30°$; $\angle ABD = 90°$.

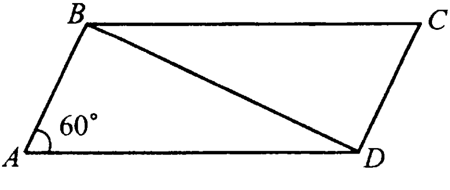


Рис. 255

Пусть $AD = x$. Тогда по условию $2x + 2AB = 90$; $AB = 45 - x$. Кроме того, треугольник ABD — прямоугольный и $\angle ADB = 30°$. Значит, $AB = \frac{1}{2}AD = \frac{x}{2}$ (катет, лежащий против угла в $30°$).

Итак, $\frac{x}{2} = 45 - x$; $x = 30$.

Ответ: 30.

656. Так как $\angle CBF = \angle BFA$ как накрест лежащие, то треугольник ABF — равнобедренный, то есть $AF = AB = 12$ (см. рис. 256).

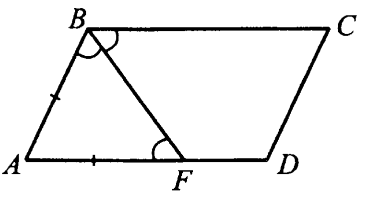


Рис. 256

Пусть $AF = 4x$, тогда $FD = 3x$. Так как $4x = 12$, то $x = 3$ и $AD = AF + FD = 7x = 21$. Следовательно, $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(12 + 21) = 66$.

Ответ: 66.

657. Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то $MN \parallel AC$. Так как PL — средняя линия $\triangle ADC$, то $PL \parallel AC$. Следовательно, $MN \parallel PL$ (см. рис. 257). Аналогично $MP \parallel NL$. Значит, $MNLP$ — параллелограмм.

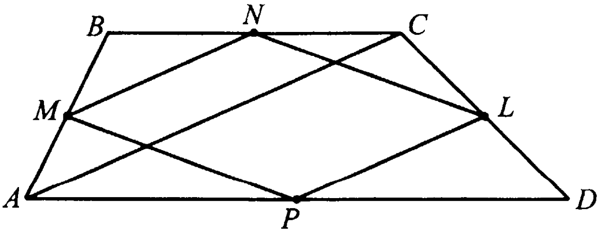


Рис. 257

658. Из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следуют равенства: $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$ (см. рис. 258). Отсюда $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$.

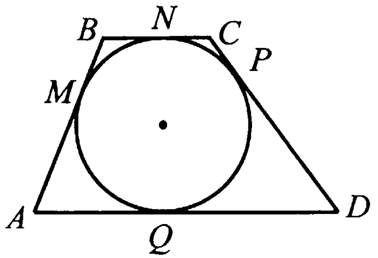


Рис. 258

660. $\angle BCA = \angle BDA$ как опирающиеся на одну и ту же дугу (см. рис. 259). $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и

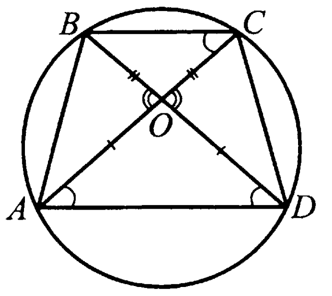


Рис. 259

AD и секущей AC. Значит, $\angle CAD = \angle BDA$, то есть $\triangle AOD$ — равнобедренный и $AO = OD$. Аналогично доказывается, что $BO = OC$. Так как, кроме того, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, то $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $AB = CD$, то есть трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

661. Так как $BO = OD$, $\angle ADO = \angle OBK$ как накрест лежащие, $\angle AOD = \angle BOK$ как вертикальные, то $\triangle AOD = \triangle BOK$ (см. рис. 260). Тогда $CK = BK - BC = 10 - 5 = 5$.

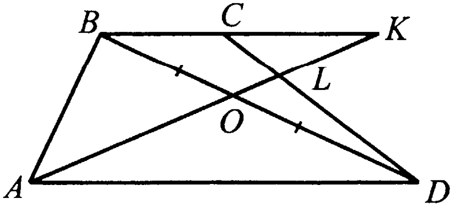


Рис. 260

$\triangle CLK \sim \triangle DLA$ ($\angle ALD = \angle CLK$ как вертикальные и $\angle DCK = \angle CDA$ как накрест лежащие). При этом $\frac{CK}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\frac{CL}{LD} = \frac{1}{2}$, $\frac{LD}{CD} = \frac{2}{3}$, $LD = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$.

Ответ: 6.

663. В треугольнике ABM: $BM = 2r = 2 \cdot 2 = 4$, где r — радиус вписанной окружности; $BM = \frac{1}{2}AB$, $AB = 8$ (см. рис. 261).

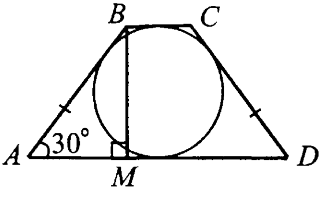


Рис. 261

Так как в $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD = 8 + 8 = 16$. Тогда средняя линия трапеции равна $\frac{1}{2}(AD + BC) = 8$.

Ответ: 8.

664. Так как трапеция описана около окружности, то $AB+CD=BC+AD$ (см. рис. 262). Тогда $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2(BC + AD) = 4MN = 4 \cdot 10 = 40$, где MN — средняя линия трапеции.

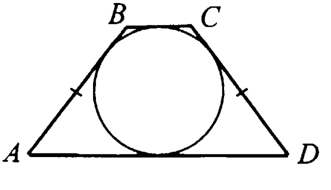


Рис. 262

Ответ: 40.

665. Так как трапеция описана около окружности, то $AB+CD=BC+AD$ (см. рис. 263). Средняя линия трапеции $MN = \frac{1}{2}(BC + AD) =$

$= \frac{1}{2}(AB + CD) = AB = 5.$

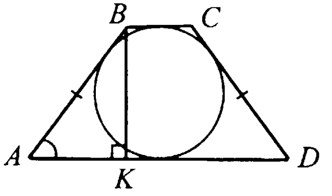


Рис. 263

Так как $\sin\angle BAK = \frac{BK}{AB}$, то $BK = AB\sin\angle BAK = 5 \cdot \frac{4}{5} = 4$. Тогда $S_{ABCD} = MN \cdot BK = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

666. Так как трапеция равнобочная, то вокруг неё можно описать окружность (см. рис. 264). Тогда $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, $\triangle AOD$ — равнобедренный ($\angle OAD = \angle ODA$, так как углы при основании равнобочной трапеции равны, и $\angle BAC = \angle BDC$) и, так как он прямоугольный, то $\angle OAD = 45°$. Но треугольник AOK также прямоугольный с острым углом в $45°$, следовательно, он равнобедренный и $AK = OK$.

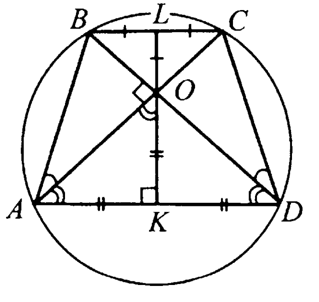


Рис. 264

Аналогично можно доказать, что $OL = BL$. Значит, $KL=KO+OL =$ $= AK + BL = \frac{1}{2}(AD + BC) = MN$, где MN — средняя линия трапеции.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot KL = MN\cdot KL = KL^2;\ KL^2 = 4;\ KL = 2.$$

Ответ: 2.

667. Пусть R, r и a — радиусы описанной и вписанной окружностей и сторона правильного шестиугольника соответственно (см. рис. 265). Тогда по теореме Пифагора $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2$. Так как в правильном шестиугольнике $R = a$ и $r = R-1$ по условию, то получим уравнение $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-1)^2$; $a = 4 \pm 2\sqrt{3}$. Так как из условия следует, что $r = a - 1 > 0$, то есть $a > 1$, то $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

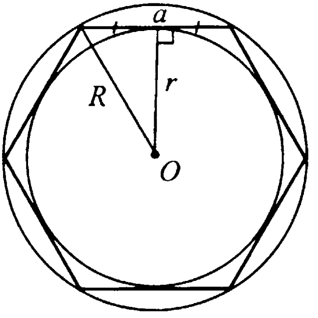


Рис. 265

Ответ: $4 + 2\sqrt{3}$.

668. $\angle AKB = \angle CKD$ как вертикальные, $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ABK и CDK подобны по первому признаку подобия треугольников.

669. Треугольники AOB и OBC равны по третьему признаку равенства треугольников: $AO = CO$ как радиусы окружности; BO — общая сторона; $AB = CB$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки.

671. Точки M и N — середины хорд AB и AC, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 266).

$$MN = \frac{1}{2}BC,\ BC = 2MN = 2\cdot 5 = 10.$$

Периметр $P_{ABC} = 17 + 9 + 10 = 36$,

полупериметр $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 36 = 18.$

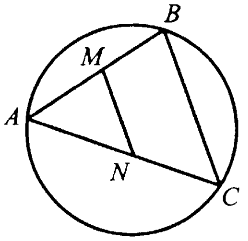


Рис. 266

Следовательно, $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$
$= \sqrt{18(18-10)(18-17)(18-9)} = 36$. Тогда радиус окружности $R = \frac{abc}{4S}$, а диаметр $2R = \frac{abc}{2S} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{2 \cdot 36} = 21{,}25$.

Ответ: 21,25.

672. Так как $AOEB$ — прямоугольник, то $AB = OE$ (см. рис. 267).

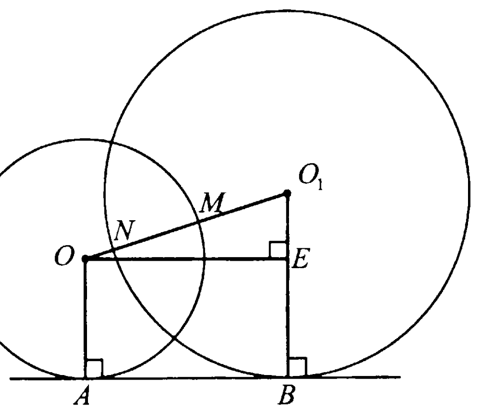


Рис. 267

По теореме Пифагора для треугольника OO_1E получим $OE = \sqrt{OO_1^2 - O_1E^2} = \sqrt{OO_1^2 - (O_1B - EB)^2} =$
$= \sqrt{80 - (8-4)^2} = 8$.

Ответ: 8.

673. По теореме о касательной и секущей $AD \cdot AC = AB^2$, $AD = \frac{AB^2}{AC} = 3$ (см. рис. 268).

Ответ: 3.

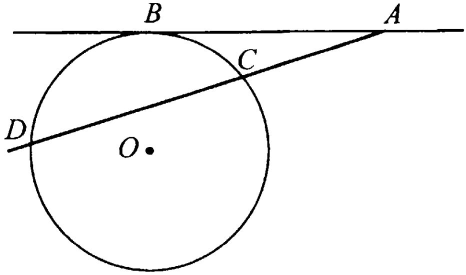


Рис. 268

674. По теореме о касательной и секущей $AN \cdot AM = AB^2$, $AN = \dfrac{AB^2}{AM} = 3$ (см. рис. 269). Тогда $MN = AN - AM = 3 - 1 = 2$; $OM = ON = 1$ — радиус окружности; $AO = AM + OM = 2$.

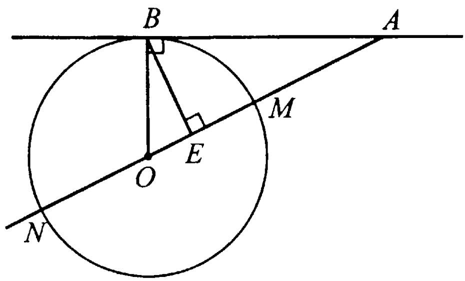


Рис. 269

$$S_{OBA} = \frac{1}{2}BO \cdot AB = \frac{1}{2}AO \cdot BE;\ BE = \frac{BO \cdot AB}{AO} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ BE^2 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75.

675. $\triangle ACB \sim \triangle ADC$, так как они прямоугольные и имеют общий острый угол при вершине A (см. рис. 270). Тогда $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{CB}{CD}$; $CB = AB \cdot \dfrac{CD}{AC}$ и $AB = 2 \cdot 17{,}5 = 35$.

Пусть $AC = 5x$, $AD = 3x$. Тогда по теореме Пифагора $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 4x$, то есть $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{4}{5}$.

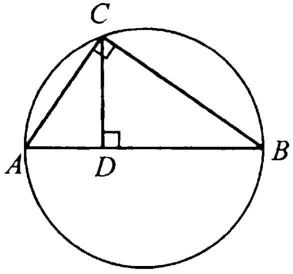


Рис. 270

Таким образом, $CB = 35 \cdot \frac{4}{5} = 28$ и $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$. Итак, $AC + CB = 21 + 28 = 49$.

Ответ: 49.

676. Так как $\angle ACD = 90°$, то AD — диаметр окружности (см. рис. 271). FE — средняя линия треугольника ACD. Следовательно, $AD = 2FE = 12$ и искомый радиус окружности равен 6.

Ответ: 6.

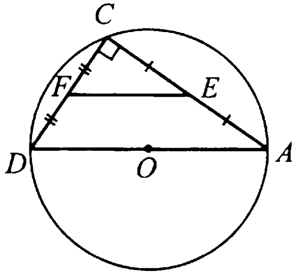


Рис. 271

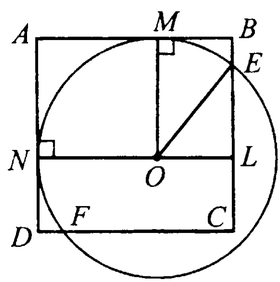


Рис. 272

677. Так как по условию $BE = DF = 2$ и $EC = FC = 23$, то сторона квадрата $ABCD$ равна 25 (см. рис. 272).

Пусть r — радиус окружности. Тогда $OE = r$, $EL = BL - BE = OM - BE = r - 2$, $OL = NL - NO = 25 - r$. Так как EOL — прямоугольный треугольник, то по теореме Пифагора $EL^2 + OL^2 = OE^2$; $(r-2)^2 + (25-r)^2 = r^2$; $r^2 - 54r + 629 = 0$; $r = 37$ или $r = 17$, причём значение $r = 37$ не удовлетворяет условию $OL = 25 - r > 0$.

Ответ: 17.

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ №1897 от 17.12.2010.

2. Демонстрационный вариант экзаменационной работы для проведения в 2014 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по математике обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы основного общего образования [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

3. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2014 году государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по математике обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы основного общего образования [Электронный ресурс]. — Москва: ФИПИ, 2013. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

4. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2015: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 320 с.

ГИА-9

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна
Нужа Галина Леонтьевна
Ольховая Людмила Сергеевна
Резникова Нина Михайловна
Фридман Елена Михайловна
Ханин Дмитрий Игоревич

**МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК.
9 КЛАСС. ПОДГОТОВКА К ГИА-2015**

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 23.07.2014.
Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,5.
Тираж 15 000 экз. Заказ № **12.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru   e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.