ГЕОМЕТРИЯ

НОВЫЙ УМК

Т. М. Мищенко

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

9 класс

К учебникам

Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»

А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»

И. Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9 классы»

Подготовка к ГИА

Новый учебно-методический комплект

Т.М. Мищенко

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
к учебникам
Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»,
А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»,
И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9 классы»

9 КЛАСС

АСТ • Астрель
Москва
ВКТ Владимир

УДК 373:514
ББК 22.15я72
М71

Мищенко, Т.М.

М71 Тематические тесты по геометрии: учебное пособие к учебникам Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы», А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы», И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9 классы»: 9-й кл./Т.М. Мищенко. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2011. – 142, [2] с. – (Новый учебно-методический комплект).

ISBN 978-5-17-074792-4 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-36560-7 (ООО «Издательство Астрель»)
ISBN 978-5-226-04189-1 (ВКТ)

В сборник включены тематические контрольные работы в новой форме для школьников, обучающихся в 9-х классах по учебникам Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Позняка, И.И. Юдиной "Геометрия. 7–9", А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9», И.Ф. Шарыгина "Геометрия. 7–9". Все тесты даны в двух вариантах.

Для каждого из трех учебников даны система тематического тестирования и решения всех заданий, входящих в тесты. В конце пособия приведены правильные ответы и решения.

Сборник можно рекомендовать учителям для проведения контроля по каждой теме, учащимся для подготовки к итоговой аттестации, родителям для организации помощи детям.

УДК 373:514
ББК 22.15я72

Подписано в печать 24.06.2011. Формат 84x108 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 15,12. Тираж 5000 экз. Заказ № 3515и.

ISBN 978-5-17-074792-4 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-36560-7 (ООО «Издательство Астрель»)
ISBN 978-5-226-04189-1 (ВКТ)

Содержание

Система тематического тестирования по геометрии

Тематическое тестирование по геометрии девятого класса основной школы является составной частью создания системы аттестации учащихся в новой форме, направленной на проверку их предметной компетентности в процессе изучения отдельных тем программного материала и обеспечивающей высокую дифференцируемость оценивания.

1. **Целью тематического тестирования по геометрии** является проверка компетентности учащихся девятых классов в рамках проведения тематического контроля.

Кроме того, проведение тематического тестирования преследует и вторую цель, а именно, подготовить учащихся к государственной итоговой аттестации в девятом классе. Форма заданий, уровень требований, предъявляемых к заданиям тестов, содержание заданий каждой темы определяется примерными программами.

2. **Характеристика структуры работы.** Изложенные основные цели изучения геометрии: развитие пространственных представлений и развитие логического мышления — задают структуру итоговой тематической работы. Работа состоит из двух частей.

Содержание, выносимое на итоговую тематическую проверку, одинаково и для первой и для второй частей работы. Принципиально разными являются цели и предъявляемые требования. Если *целью первой части* является проверка уровня сформированности *пространственных представлений*, то целью второй части работы является проверка уровня сформированности *логического мышления* или логической интуиции. Кроме того, если задания первой части соответствуют уровню базовой подготовки, то проверка уровня сформированности логического мышления может быть осуществлена не только и не столько при решении задач уровня базовой подготовки, но в значительной степени при решении задач повышенного и высокого уровня подготовки. Этим определяется форма заданий каждой части. Для первой части используются задания со свободным ответом или задания с выбором ответа, и поскольку авторы концепции ГИА выбрали структуру, которая определяется формой ответа, то первая часть, в свою очередь, делится на две части. Таким образом, вся работа состоит из трех частей: первая содержит задания с выбором ответа, вторая — со свободным ответом, третья — задания с полной записью решения.

В первую и вторую части включено двенадцать заданий, отвечающих базовому уровню сложности (уровню обязательной подготовки), при этом первая часть включает 5 заданий, вторая — 7 заданий. Число включаемых заданий определялось опытным путем. Именно столько заданий успевает выполнить ученик, имеющий среднюю аттестационную оценку (годовые оценки за 7 — 9 классы) «**4**», за один академический час (60 минут).

В первую и вторую части каждой итоговой тематической работы включены все разделы проверяемой темы, причем для решения каждого задания надо применить либо определение, введенное в этой теме, либо доказанную теорему. По сравнению с традиционной практикой в первой и второй частях работы усилена идейно-понятийная составляющая. Здесь используются задания на определение числа решений, определяемое возможными конфигурациями, удовлетворяющими условию задачи, нахождение числа общих точек при рассмотрении конфигураций, состоящих из двух основных планиметрических фигур, определения вида той или иной фигуры и т. д.

Задания первой и второй части каждого из тематических тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы, а именно, распознавать и изображать на чертежах изучаемые фигуры, выделять из данной конфигурации заданные в условии задачи элементы.

Кроме того, задания первой и второй части каждого тематического теста проверяют умение использовать основные теоремы и формулы, отражающие свойства и признаки фигур, вычислять значения длин отрезков, градусную меру углов, площади фигур, применяя соответствующие теоретические знания.

При этом опосредованно проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; читать чертежи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом.

Целью третьей части итоговой аттестационной работы является дифференцированная проверка повышенного уровня владения материалом. Этим определяется форма задания. В нее включены три задания с полной записью решения. Как и для первой части итоговой тематической работы, число включаемых заданий определялось опытным путем.

Задания третьей части — сложнее, их решения требуют более глубокого уровня усвоения изученного материала. Они позволяют проверить владение методами доказательств, способность к интеграции знаний из различных разделов проверяемой темы и ранее изученных тем, владение исследовательскими навыками, а также умение найти и применить нестандартные приемы рассуждений. При выполнении третьей части работы учащиеся должны продемонстрировать умение геометрически грамотно записать условие (что дано) и заключение (что требуется найти или доказать) задачи, ее решение, сопровождая само решение необходимой аргументацией и доказательными рассуждениями. Кроме того, учащиеся должны показать умение геометрически грамотно выполнять чертежи: правильно отмечать равные элементы фигур, проводить: медианы, высоты и биссектрисы треугольников, радиусы, хорды и диаметры окружностей.

Так как концепцией ГИА выбрана структура, которая определяется видом ответа, то сложность заданий в каждом блоке идет по нарастающей.

Эквивалентность вариантов итоговых тематических работ обеспечивается одинаковым распределением заданий по видам требований, их одинаковым соотношением в работе по видам деятельности, уровням трудности, а также по одинаковому расчетному времени выполнения. Параллельность вариантов достигается за счет включения взаимозаменяемых, однотипных, одинаковых по уровню сложности заданий.

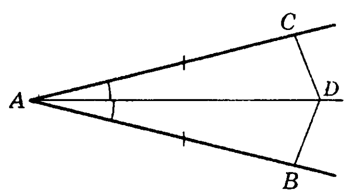
3. Время выполнения работы и условия ее проведения. Работа рассчитана на два урока, но в 9 классе такая нагрузка является для учащихся чрезмерной, поэтому работа может быть проведена в два этапа: задания 1—12 на одном уроке, а 13—15 на другом.

Первая и вторая части работы выполняются непосредственно в бланке с текстами заданий. Первые 5 заданий — это задания с выбором ответа. К каждому из пяти заданий приведены четыре варианта ответа, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4. Только один из этих ответов верный. При выполнении этих заданий необходимо обвести кружком номер выбранного ответа в работе.

Пример.

Луч AD — биссектриса угла BAC. На сторонах угла отложены равные отрезки AB и AC. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники BAD и CAD равны.

1. *По двум сторонам и углу между ними*;
2. *По стороне и прилежащим к ней углам*;
3. *По трем сторонам*;
4. *Треугольники не равны.*



Если была допущена ошибка, при выборе ответа, то надо аккуратно зачеркнуть отмеченную цифру и обвести другую:

1) 26 **2) 20** **~~3)~~ 15** **4) 10**

Следующие семь заданий (6—12) — задания со свободным ответом. В этом случае полученный ответ следует записать в специально отведенном для этого месте.

Ответом для этих заданий может быть отдельное слово, целое число, десятичная дробь, обыкновенная дробь, алгебраическое выражение.

При этом от учащихся не требуются ни подробная запись решения, ни объяснение выбранного решения. В случае записи неверного ответа необходимого зачеркнуть его и записать рядом другой.

И, наконец, три задания (13—15) с записью полного решения.

Учитель может посоветовать учащимся выполнять задания в том порядке, в котором они даны в работе. При этом, если ученик не может быстро решить задачу, не следует задерживаться на ней, а имеет смысл перейти к выполнению следующей задачи. Выполнив все задания, которые ученик смог решить, можно вернуться к пропущенным заданиям.

Следует проинформировать учащихся, что все необходимые для выполнения задания записи и вычисления можно сделать на черновике, который на проверку не сдается.

4. Система оценивания выполнения отдельных заданий и работы в целом. Оценивание работы (оценка по пятибалльной шкале: «2», «3», «4» и «5») осуществляется по принципу сложения, оно зависит от количества заданий, которые ученик верно выполнил.

Задание с выбором ответа считается выполненным верно, если в списке вариантов ответов учеником обведена цифра, которая соответствует правильному ответу. Задание со свободным ответом считается выполненным верно, если правильной ответ вписан в специально отведенное для этого место.

Если к заданию приведен чертеж, то на нем можно проводить необходимые построения.

При этом от ученика не требуется ни подробная запись решения, ни объяснения выбранного решения. Черновик, на котором ученик делает необходимые ему записи, на проверку учителю не сдается и при оценке не может влиять на выставляемую по заданию отметку.

Оценивание при проведении первых двух частей работы на одном уроке.

Согласно авторской концепции ГИА за каждое верно решенное задание первой и второй части учащемуся начисляется 1 балл. Таким образом, максимально за работу в форме теста можно получить 12 баллов. Общий балл формируется путем подсчета общего количества баллов, полученных учащимся за выполнение работы.

Для получения положительной оценки ученик должен набрать не менее восьми баллов. В противном случае за работу ставится отметка «2». Выполнение двенадцати или одиннадцати заданий оценивается отметкой 5.

Задание третьей части считается выполненным верно, если учащийся выбрал правильный ход решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, все логические шаги решения обоснованны. Необходимые для решения чертежи правильно отражают условие и ход решения задачи. Правильно выполнены все преобразования и вычисления, получен верный ответ.

Если при верном ходе решения задачи допущена ошибка, не носящая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения (имеются незначительные неточности в чертежах, негрубые ошибки или описки), то в этом случае учащемуся засчитывается балл, который на один балл меньше указанного.

Оценивание при проведении третьей части работы на одном уроке.

Согласно авторской концепции ГИА верное решение заданий третьей части оценивается по разному: задание 13 оценивается в два балла, а задания 14 и 15 в три балла.

Максимально можно набрать 8 баллов, при этом положительная оценка выставляется, если набрано не менее 4 баллов.

Проведение работы в два этапа позволяет выставить за нее две оценки.

I. ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Учебник «Геометрия. 7—9» Л.С. Атанасяна и др.

Глава X. **Метод координат.**
Глава XI. **Соотношения между сторонами и углами треугольника**

Целью теста, рекомендованного для двух глав, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам “Простейшие задачи в координатах”, “Теорема синусов”, “Теорема косинусов”, “Решение треугольников” и “Скалярное произведение векторов”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении тем:

— находить координаты равных векторов, координаты суммы и разности векторов, координаты произведения вектора на число;
— вычислять *координаты середины отрезка*; *длину* вектора по его координатам и *расстояние* между точками;
— непосредственно применять определения *синуса, косинуса, тангенса для любого угла от* $0°$ *до* $180°$, *основное тригонометрическое тождество, формулы приведения*;
— применять формулу *площади треугольника* $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$; *теоремы синусов* и *косинусов* при решении треугольников;
— вычислять *скалярное произведение векторов*;
— применять необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов при решении задач.

ТЕСТ 1

Вариант 1

Часть 1

1. Упростите выражение: $b \cdot \sin 45° + b \cdot \cos 135° + b \cdot \sin 180°$.

1. 0; 2. b; 3. $b\sqrt{2}$; 4. $b(\sqrt{2} + 1)$.

2. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен $30°$. Найдите площадь параллелограмма.

1. $44\sqrt{3}$; 2. 22; 3. 44; 4. $22\sqrt{3}$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Определите, какая из его сторон AB или BC больше, если $\angle BMA = 80°$.

1. $AB = BC$;
2. $BC < AB$;
3. $BC > AB$;
4. определить невозможно.

4. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 8 см, 14 см и 12 см.

1. Остроугольный; 3. тупоугольный;
2. прямоугольный; 4. такой треугольник не существует.

5. Найдите координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, если $\bar{a}$ (−1; 2) и $\bar{b}$ (14; 7).

1. (0; 3); 2. (−4; 3); 3. (−5; 5); 4. (−4; 5).

Часть 2

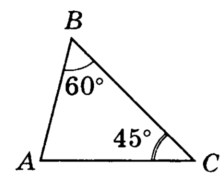
6. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют длину 8 см и образуют угол в 135°. Найдите длину третьей стороны.

____

7. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если его большая сторона равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, а диагонали равны $\sqrt{3}$ см и 1 см.

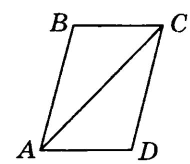
____

8. В треугольнике ABC сторона AC равна 8 см, один из углов, прилежащих к этой стороне, равен 45°, а угол, противолежащий ей, равен 60°. Найдите сторону, противолежащую углу в 45°.



____

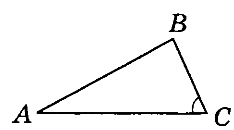
9. Диагональ параллелограмма делит его угол на части, равные 45° и 30°. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к его меньшей стороне.



____

10. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

"*В треугольнике ABC сторона AB равна* 7 *см, сторона BC равна* 21 *см, а угол C равен* 33°. *Найдите угол BAC*".



____

11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

____

12. Определите взаимное расположение ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если справедливо утверждение $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

____

Часть 3

13. В треугольнике со сторонами 4 см, 5 см и 8 см найдите длину медианы, проведенной из вершины большего угла.

14. В треугольнике ABC угол A больше угла B, а угол B больше угла C. К какой из вершин треугольника ближе всего расположен центр вписанной в него окружности?

15. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Вариант 2

Часть 1

1. Упростите выражение: $b \cdot \sin 120° + b \cdot \cos 150° + b \cdot \sin 90°$.

1. 0; 2. b; 3. $b\sqrt{3}$; 4. $b(\sqrt{3}+1)$.

2. Тупой угол ромба равен 150°, а его сторона равна 6 см. Найдите площадь ромба.

1. $18\sqrt{3}$; 2. 9; 3. $9\sqrt{3}$; 4. 18.

3. Диагонали параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *O*. Определите, какая из его сторон — *BC* или *CD* — меньше, если угол *AOB* — острый.

1. $CD = BC$; 3. $BC > CD$;
2. $BC < CD$; 4. определить невозможно.

4. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 0,3 см, 0,4 см и 0,5 см.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. такой треугольник не существует.

5. Найдите координаты вектора $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, если $\bar{a}(-2; 1)$; $\bar{b}(1; 0)$.

1. (2; –0,5); 2. (1,5; 1); 3. (0; 1); 4. (–1; –0,5).

Часть 2

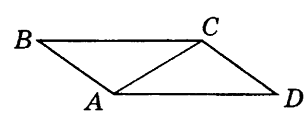
6. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют длину 8 см и образуют угол, равный 135°. Найдите длину третьей стороны.

____

7. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.

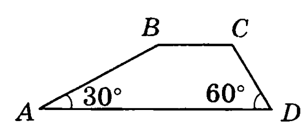
____

8. Диагональ *AC* параллелограмма *ABCD* делит его угол *DAB* на части *BAC* и *CAD*, равные 60° и 45° соответственно. Найдите большую сторону параллелограмма, если его меньшая сторона равна 4 см.



____

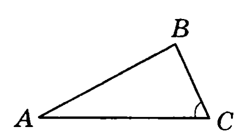
9. Углы при основании *AD* трапеции равны 60° и 30°. Найдите отношение сторон *AB* и *CD*.



____

10. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

“*В треугольнике ABC сторона AB равна* 8 *см, сторона BC равна* 16 *см, а синус угла C равен* 0,4. *Найдите угол BAC*”.



____

11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в одной из вершин ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

____

12. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены и $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$.

____

Часть 3

13. Две стороны треугольника имеют длины 6 см и 12 см, а угол между ними равен 120°. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

14. Две стороны треугольника имеют длины 10 см и 6 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите угол между данными сторонами треугольника.

15. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Глава XII. **Длина окружности и площадь круга**

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам “Правильные многоугольники”, “Окружность, описанная около правильного многоугольника”, “Окружность, вписанная в правильный многоугольник” и “Длина окружности и площадь круга”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— непосредственно применять определение *окружности, описанной около правильного многоугольника*, определение *окружности, вписанной в правильный многоугольник*; формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности с длиной стороны правильного n-угольника; формулы длины окружности, длины дуги окружности; площади круга и формулу площади сектора;

— вычислять длину окружности, длину дуги окружности, площадь круга, площадь кругового сектора, применяя полученные формулы.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;

— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 2

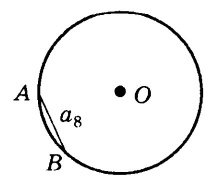
Вариант 1

Часть 1

1. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

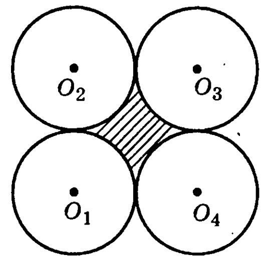
1. 3; 2. 4; 3. 6; 4. 8.

2. В окружности с радиусом 5 см хорда *AB* является стороной правильного восьмиугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.



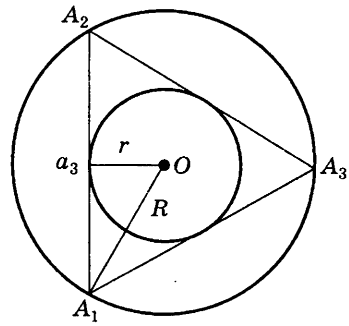
1. $\frac{5\pi}{2}$ см; 2. $\frac{5\pi}{4}$ см; 3. $\frac{10\pi}{\text{[illegible]}}$ см; 4. $\frac{5\pi}{3}$ см.

3. Четыре равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



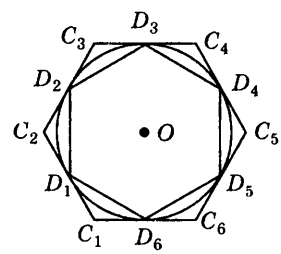
1. 16π см^2;
2. 64π см^2;
3. $(1 - \pi)$ см^2;
4. $16(4 - \pi)$ см^2.

4. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника, если радиус вписанной в него окружности 3 см.



1. $6\sqrt{3}$ см;
2. 1,5 см;
3. 6 см;
4. $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

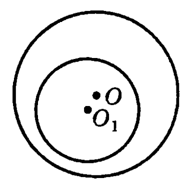
5. Найдите отношение стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного шестиугольника, описанного около нее.



1. $\frac{1}{2}$;
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
3. 2;
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

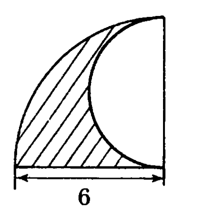
Часть 2

6. Внутри круга радиуса $R = 6$ см проведена окружность, делящая его на две равновеликие фигуры. Найдите ее радиус.



____

7. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.

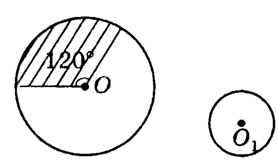


____

8. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 6 см, а радиус вписанной окружности $3\sqrt{3}$ см.

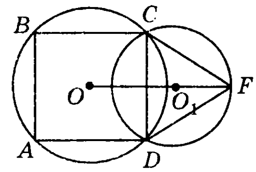
____

9. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному 120°. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите отношение радиусов окружностей.



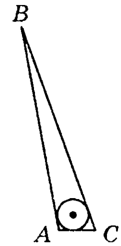
____

10. Отрезок CD является общей хордой двух пересекающихся окружностей таким образом, что их центры лежат по разные стороны от хорды CD. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной вписанного квадрата, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной правильного вписанного треугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона квадрата равна 3 см.



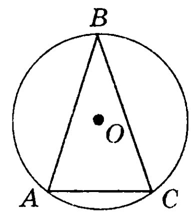
____

11. В треугольнике ABC, стороны которого равны 25 см, 26 см и 3 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности.



____

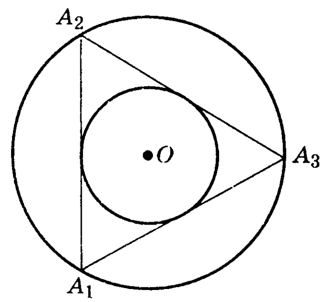
12. Около равнобедренного треугольника ABC, основание которого равно 24 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности, если боковая сторона треугольника равна 13 см.



____

Часть 3

13. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону треугольника.



14. Определите, для каких правильных n-угольников сторона меньше радиуса описанной окружности.

15. В равнобочную трапецию с острым углом 30° вписана окружность. Найдите отношение длины окружности к периметру трапеции.

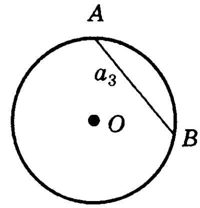
Вариант 2

Часть 1

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внутренних углов равен 165°?

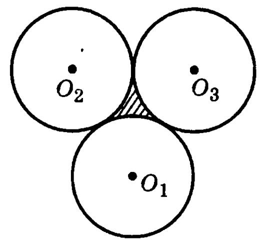
1. 3; 2. 7; 3. 24; 4. 15.

2. В окружности с радиусом 5 см хорда AB является стороной правильного треугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.



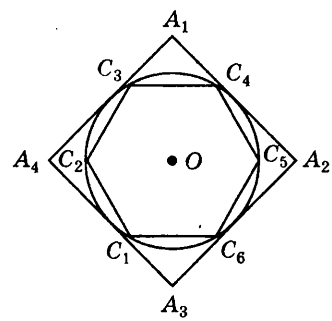
1. $\frac{5\pi}{2}$ см;
2. $\frac{5\pi}{3}$ см;
3. $\frac{10\pi}{3}$ см;
4. $\frac{5\pi}{4}$ см.

3. Три равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



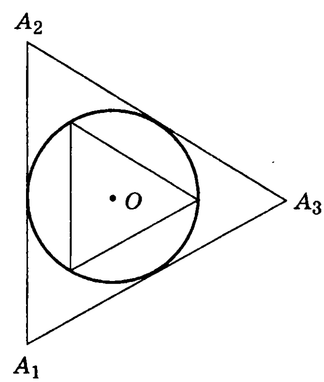
1. $16(2\sqrt{3} - \pi)$ см^2;
2. $\frac{5\pi}{3}$ см^2;
3. $\frac{10\pi}{3}$ см^2;
4. $\frac{5\pi}{4}$ см^2.

4. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности, если сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна 3 см.



1. 4,5 см;
2. 6 см;
3. $3\sqrt{3}$ см;
4. $3\sqrt{2}$ см.

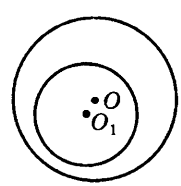
5. Найдите отношение стороны правильного треугольника, описанного около окружности, к стороне правильного треугольника, вписанного в нее.



1. $\frac{1}{2}$;
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
3. 2;
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

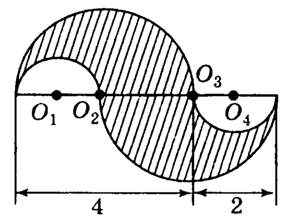
Часть 2

6. Внутри круга радиуса R проведена окружность радиуса r, делящая его на две фигуры. При этом площадь фигуры, ограниченной окружностями радиусов R и r, в три раза больше площади круга радиуса r. Найдите радиус r, если радиус R равен 6 см.



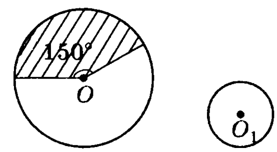
____

7. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.

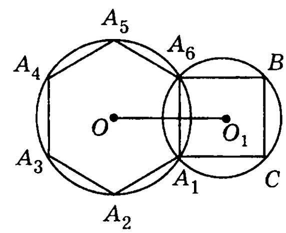


8. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона равна 2 см, а радиус описанной окружности $\sqrt{2}$ см.

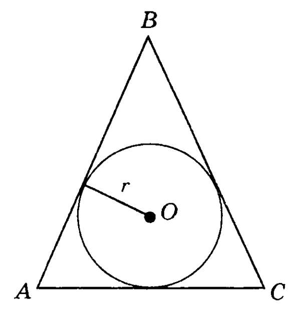
9. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному $150°$. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите радиус окружности с центром в точке O, если радиус окружности с центром в точке O_1 равен 6 см.



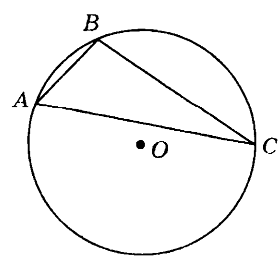
10. Отрезок A_1A_6 является общей хордой двух пересекающихся таким образом окружностей, что их центры лежат по разные стороны от хорды A_1A_6. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной правильного вписанного шестиугольника, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона шестиугольника равна 6 см.



11. В равнобедренный треугольник ABC, основание которого равно 14 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если боковая сторона треугольника равна 25 см.

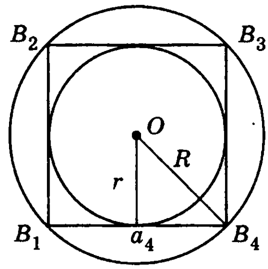


12. Около треугольника ABC, стороны которого равны 15 см, 14 см и 13 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности.



Часть 3

13. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного четырехугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону четырехугольника.



14. Для каких правильных n-угольников половина стороны не меньше, чем радиус вписанной окружности?

15. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

Глава XIII. **Движения**

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по теме “Движения”. Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

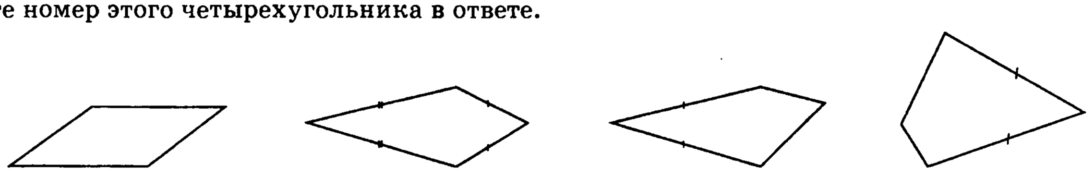
— распознавать на чертежах основные виды движений: центральную симметрию, поворот, осевую симметрию, параллельный перенос;
— применять полученные сведения при решении простейших задач.

ТЕСТ 3

Вариант 1

Часть 1

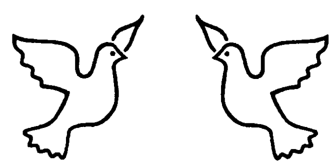
1. Определите, какой из приведенных ниже четырехугольников имеет ось симметрии. Укажите номер этого четырехугольника в ответе.



1) 2) 3) 4)

1. 1); 2. 2); 3. 3); 4. 4).

2. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.



1. Центральная симметрия (укажите центр);
2. поворот (укажите угол и направление);
3. осевая симметрия (укажите ось);
4. параллельный перенос (укажите вектор).

3. Параллелограмм имеет только одну ось симметрии. Определите его вид.
1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. такой параллелограмм не существует.

4. Треугольник имеет три оси симметрии. Определите вид треугольника.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

5. При центральной симметрии относительно вершины C треугольника ABC его вершина A переходит в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих высоты AM и DN треугольников ABC и FDC.

1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

Часть 2

6. Определите, сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя.

____

7. Угол ABC, равный α ($\alpha < 90°$), при повороте на $60°$ в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол ABC_1.

____

8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C треугольника перешла в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если катет треугольника равен 12 см.

____

9. Внутри угла AOB, равного $45°$, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

____

10. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол $180°$ вокруг середины одной из его сторон вершина A перешла в точку A_1, вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

____

11. При повороте на угол $90°$ вокруг точки пересечения диагоналей параллелограмм перешел сам в себя. Определите его вид.

____

12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. При параллельном переносе вершина A перешла в точку D, а треугольник ABC — в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если боковая сторона треугольника равна 5 см, а его основание 8 см.

____

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

14. Соседние оси симметрии правильного многоугольника пересекаются под углом $15°$. Какое число сторон имеет этот многоугольник?

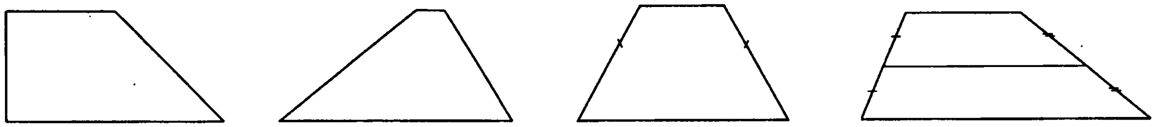
15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы сумма расстояний $AK + KB$ была наименьшей?

Замечание. Шоссе считаются прямой линией.

Вариант 2

Часть 1

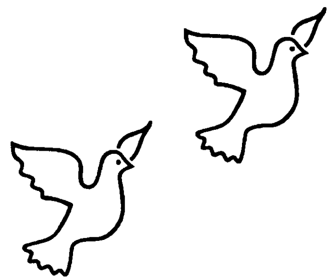
1. По данным рисункам определите, какая среди приведенных ниже трапеций имеет ось симметрии. Укажите номер этой трапеции в ответе.



1) 2) 3) 4)

1. 1); 2. 2); 3. 3); 4. 4).

2. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.



1. Центральная симметрия (укажите центр);
2. поворот (укажите угол и направление);
3. осевая симметрия (укажите ось);
4. параллельный перенос (укажите вектор).

3. Параллелограмм имеет четыре оси симметрии. Определите его вид.
1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. такой параллелограмм не существует.

4. Треугольник имеет только одну ось симметрии. Определите вид треугольника.
1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

5. Дан треугольник ABC. При центральной симметрии относительно вершины C его вершина A перешла в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих биссектрисы CM и CN треугольников ABC и FDC.
1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

Часть 2

6. Определите, сколько существует движений, переводящих ромб сам в себя.

7. Угол ABC, равный $\alpha\,(\alpha < 90^\circ)$, при повороте на 60° в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол CBA_1.

8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его катет AC, вершина B треугольника перешла в точку B_1. Найдите длину отрезка BB_1, если гипотенуза треугольника равна 7 см.

9. Внутри угла AOB, равного 90°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

____

10. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол 180° вокруг вершины A вершина B треугольника перешла в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

____

11. При повороте на угол 120° вокруг центра вписанной окружности треугольник перешел сам в себя. Определите его вид.

____

12. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана BD. При параллельном переносе точка A перешла в точку D, а треугольник ABC — в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если сторона треугольника равна 6 см.

____

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

14. Соседние оси симметрии правильного многоугольника пересекаются под углом 20°. Какое число сторон имеет этот многоугольник?

15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы расстояния от каждой из деревень до остановки были равными.

Замечание. Шоссе считаются прямой линией.

Учебник «Геометрия. 7–9» А.В. Погорелова

§ 11. Подобие фигур

Целью теста, рекомендованного для данного параграфа, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам: "Подобие фигур", "Признаки подобия треугольников", "Подобие прямоугольных треугольников", "Углы, вписанные в окружность", "Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности". Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении тем:

— распознавать на чертежах, используя определения: пропорциональные отрезки и подобные треугольники, центральный угол и дугу окружности, соответствующую данному центральному углу; вписанный угол;
— изображать подобные фигуры, подобные треугольники, центральный угол и дугу окружности, соответствующую данному центральному углу; угол, вписанный в окружность;
— выделять из данной конфигурации подобные фигуры, подобные треугольники, центральный угол и дугу окружности, соответствующую данному центральному углу; угол, вписанный в окружность;
— применять при решении задач определения подобия фигур, коэффициента подобия, центрального угла и дуги окружности, соответствующей данному центральному углу; угла, вписанного в окружность;
— применять при решении задач признаки подобия треугольников, свойство биссектрисы угла треугольника, теоремы о средне пропорциональных отрезках в прямоугольных треугольниках, теорему об угле, вписанном в окружность; теоремы о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности.

ТЕСТ 1

Вариант 1

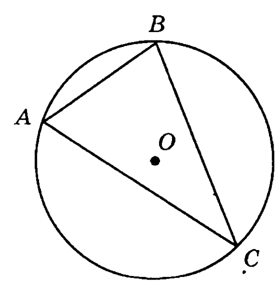
Часть 1

1. Центральный угол на 75° больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Определите, чему равна градусная мера вписанного угла.

1. 75°;
2. 37,5°;
3. 112,5°;
4. 150°.

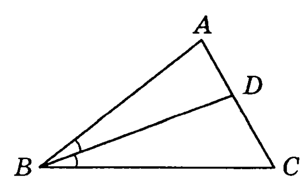
2. Найдите больший угол треугольника, если из центра описанной окружности его стороны видны под углами 100°, 120° и 140°.

1. 50°;
2. 70°;
3. 60°;
4. 140°.



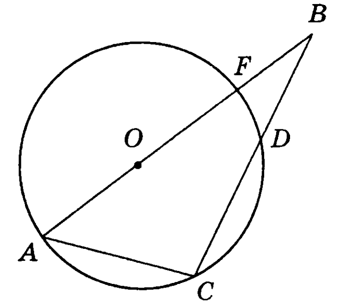
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Точка D делит сторону AC на отрезки AD и DC, соответственно равные 3 см и 5 см. Найдите сторону AB, если сторона BC равна 10 см.

1. 3 см;
2. 5 см;
3. 10 см;
4. 6 см.



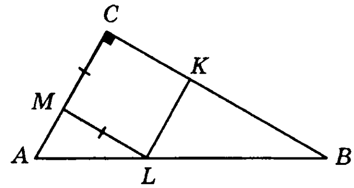
4. Стороны AB и BC треугольника ABC соответственно равны 15 см и 12 см. Центр окружности (точка O), проходящей через вершины A и C треугольника ABC, лежит на стороне AB. Точки F и D являются точками пересечения сторон AB и BC с окружностью. Найдите радиус окружности, если отрезок BD равен 5 см.

1. 5,5 см; 3. 15 см;
2. 12 см; 4. 4 см.



5. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C$ — прямой), вписан квадрат $CKLM$ так, что они имеют общий прямой угол. Найдите катет AC, если катет BC равен 12 см, а сторона квадрата — 4 см.

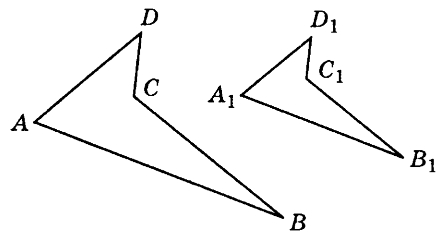
1. 16 см; 3. 6 см;
2. 12 см; 4. 4 см.



Часть 2

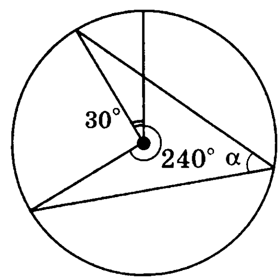
6. Отрезки $AB = 12$ см и $A_1B_1 = 8$ см — соответствующие стороны подобных четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Найдите коэффициент подобия этих четырехугольников.

____



7. По данным рисунка найдите градусную меру угла, обозначенного буквой α.

____

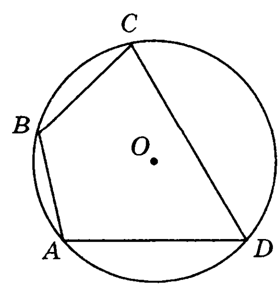


8. Отрезок, параллельный стороне прямоугольника, разбивает его на два подобных прямоугольника. Найдите большую сторону большего из полученных прямоугольников, если стороны данного прямоугольника 15 см и 6 см.

____

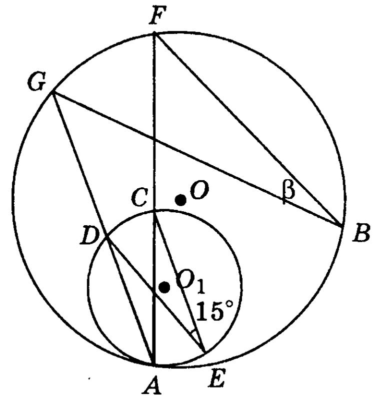
9. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых равны 56°, 74°, 97° и 133°. Найдите градусную меру меньшего угла четырехугольника.

____



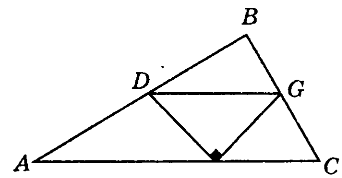
10. Две окружности с центрами в точках O и O_1 касаются внутренним образом в точке A. Угол, образованный хордами CE и DE окружности с центром в точке O_1, равен $15°$. Найдите градусную меру угла, обозначенного буквой β.

____



11. В треугольник ABC вписан равнобедренный прямоугольный треугольник DEF так, что его гипотенуза DF параллельна AC. Найдите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины B, если $AC = 16$ см, $DF = 8$ см.

____

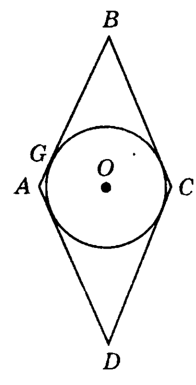


12. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит данный треугольник на два треугольника, один из которых подобен данному. Найдите меньший угол исходного треугольника.

____

Часть 3

13. В ромб $ABCD$ вписана окружность. Точка касания окружности G делит сторону ромба AB на отрезки AG и GB так, что $AG : GB = 1 : 4$. Найдите сторону ромба, если радиус вписанной окружности равен 4 см.



14. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри окружности, равна полусумме градусных мер центральных углов, опирающихся на дуги, одна из которых заключена между его сторонами, а другая между продолжениями сторон.

15. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая DB, параллельная AC. Через точку N, лежащую на стороне BC, проведен луч AN, пересекающий эту прямую DB в точке D, а медиану BH в точке K. Определите, в каком отношении точка K делит отрезок BH, если $AN : ND = 1 : 2$.

Вариант 2

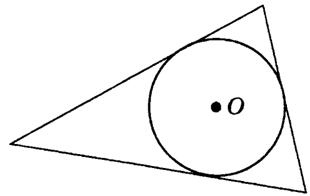
Часть 1

1. Центральный угол на 75° больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Найдите дополнительный плоский угол к данному центральному углу.

1. 75°; 2. 210°; 3. 150°; 4. 285°.

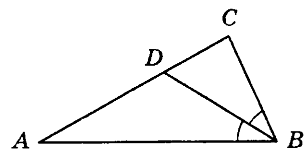
2. Два угла треугольника равны 80° и 70°. Определите, под каким углом видна его большая сторона из центра вписанной в него окружности.

1. 55°;
2. 75°;
3. 130°;
4. 20°.



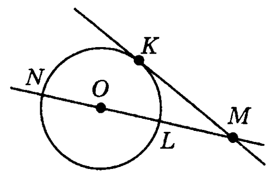
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Точка D делит сторону AC на отрезки AD и DC, соответственно равные 10 см и 6 см. Найдите сторону AB, если сторона BC равна 9 см.

1. 15 см;
2. 10 см;
3. 16 см;
4. 6 см.



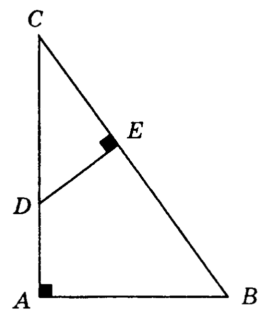
4. Из точки M к окружности радиуса 6 см проведены секущая MN, проходящая через центр O, и касательная MK. Найдите отрезок MK, если $MN = 16$ см.

1. 6 см;
2. 12 см;
3. 16 см;
4. 8 см.



5. Из точки D, лежащей на катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle A$ — прямой), опущен на гипотенузу CB перпендикуляр DE. Найдите отрезок CD, если $CB = 15$ см, $AB = 9$ см и $CE = 4$ см.

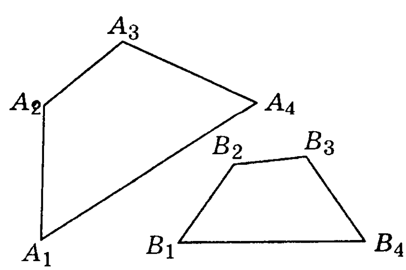
1. 12 см;
2. 45 см;
3. 5 см;
4. 3,2 см.



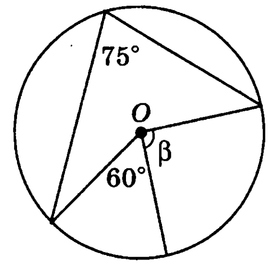
Часть 2

6. Отрезки $A_1A_4 = 12$ см и $B_1B_4 = 6$ см — соответствующие стороны подобных четырехугольников $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Найдите коэффициент подобия этих четырехугольников.

____



7. Дана окружность с центром O. По данным рисунка найдите градусную меру угла, обозначенного буквой β.

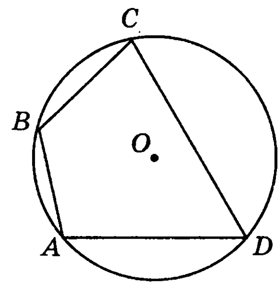


____

8. Отрезок, параллельный стороне прямоугольника, разбивает его на два подобных прямоугольника. Найдите меньшую сторону меньшего из полученных прямоугольников, если стороны данного прямоугольника 10 см и 4 см.

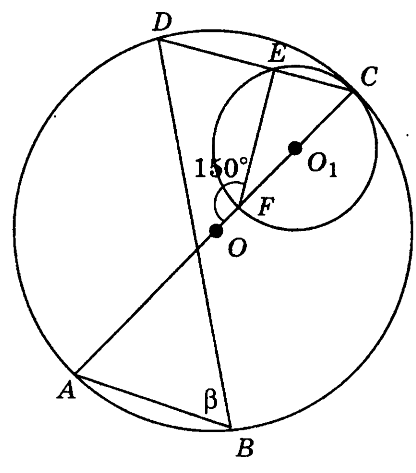
____

9. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 7 : 5 : 3. Найдите больший угол четырехугольника.



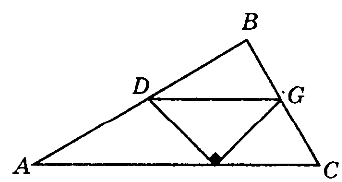
____

10. Две окружности с центрами в точках O и O_1 касаются в точке C внутренним образом. Диаметр AC окружности с центром в точке O проходит через точку O_1 и образует с хордой FE угол, равный 150°. Найдите градусную меру угла β.



____

11. В треугольник ABC вписан равнобедренный прямоугольный треугольник DGF так, что его гипотенуза DG параллельна AC. Основание AC треугольника ABC равно 30 см, а его высота равна 10 см. Найдите гипотенузу DG прямоугольного треугольника DGF.



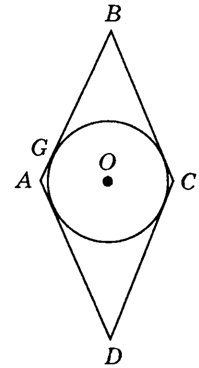
____

12. В произвольном треугольнике один из углов равен 40°. Биссектриса этого угла делит данный треугольник на два треугольника, один из которых подобен данному. Найдите наибольший угол исходного треугольника.

____

Часть 3

13. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$, касается стороны AB в точке G. Найдите сторону ромба, если GB на 9 см больше AG, а $AC = 12$ см.



14. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне окружности, равна полуразности градусных мер центральных углов, опирающихся на дуги, заключенные между его сторонами.

15. Через вершину B равнобедренного треугольника ABC параллельно основанию AC проведена прямая BD. Через точку K — середину высоты BH, проведен луч AK, пересекающий прямую BD в точке D, а сторону BC — в точке N. Определите, в каком отношении точка N делит сторону BC.

§ 12. Решение треугольников

Целью теста, рекомендованного для данного параграфа, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам "Теорема синусов", "Теорема косинусов", "Соотношения между сторонами и углами треугольника", "Решение треугольников". Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении тем:

— применять при решении треугольников теоремы синусов и косинусов;
— находить косинусы углов треугольника по его трем данным сторонам, составлять пропорции для сторон и синусов углов данного треугольника;
— решать треугольники, т. е. по данным длинам или градусным мерам трех элементов треугольника вычислять остальные его элементы.

ТЕСТ 2

Вариант 1

Часть 1

1. Известно, что только два угла треугольника таковы, что каждый из них в два раза меньше внешнего угла, не смежного с ним. Определите вид треугольника.

1. Разносторонний; 3. равнобедренный;
2. равносторонний; 4. определить не возможно.

2. В треугольнике ABC внешний и внутренний углы при вершине C равны. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наболышей.

1. AB; 2. BC; 3. AC; 4. определить невозможно.

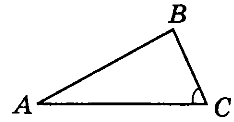
3. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Определите, какая из его сторон AB или BC больше, если $\angle BMA = 80°$.

1. $AB = BC$; 2. $BC < AB$; 3. $BC > AB$; 4. определить невозможно.

4. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 8 см, 14 см и 12 см:

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. такой треугольник не существует.

5. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.



"*В треугольнике ABC сторона AB равна* 7 *см, сторона BC равна* 21 *см, а угол C равен* 33°. *Найдите угол BAC.*"

1. Одно; 3. три;
2. два; 4. решений нет.

Часть 2

6. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют длину 8 см и образуют угол в 45°. Найдите длину третьей стороны.

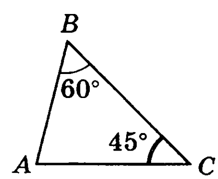
7. Треугольник вписан в окружность радиуса 4 см. Найдите наибольшую сторону треугольника, если центр описанной окружности лежит на стороне треугольника.

8. В равнобедренном треугольнике один из углов тупой, одна из сторон имеет длину 15 см, а другая — 10 см. Определите длину основания этого треугольника.

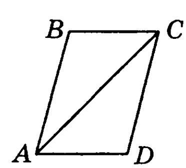
9. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если его большая сторона равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, а диагонали равны $\sqrt{3}$ см и 1 см.

10. Угол, образованный хордой и радиусом окружности, равен 72°. Определите, что больше: хорда или радиус окружности.

11. В треугольнике *ABC* сторона *AC* равна 8 см, угол *BCA*, прилежащий к этой стороне, равен 45°, а угол, противолежащий ей, равен 60°. Найдите сторону, противолежащую углу в 45°.



12. Диагональ параллелограмма делит его угол на части, равные 45° и 30°. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к его меньшей стороне.



Часть 3

13. В треугольнике со сторонами 4 см, 5 см и 8 см найдите длину медианы, проведенной из вершины большего угла.

14. В треугольнике ABC угол A больше угла B, а угол B больше угла C. К какой из вершин треугольника ближе всего расположен центр вписанной в него окружности?

15. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Вариант 2

Часть 1

1. Известно, что каждый угол треугольника в два раза меньше любого внешнего угла. Определите вид треугольника.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. определить невозможно.

2. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и B равны, а внешний угол при вершине C равен его внутреннему углу. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

1. AB; 2. BC; 3. AC; 4. определить невозможно.

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите, какая из его сторон — BC или CD — меньше, если угол AOB — острый.

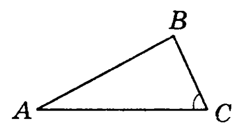
1. $AB = BC$; 2. $BC < AB$; 3. $BC > AB$; 4. определить невозможно.

4. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 0,3 см, 0,4 см и 0,5 см.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. такой треугольник не существует.

5. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

"В треугольнике ABC сторона AB равна 8 *см, сторона BC равна* 16 *см, а синус угла C равен* 0,4. *Найдите угол BAC."*



1. Одно; 2. два; 3. три; 4. решений нет.

Часть 2

6. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют длину 8 см и образуют угол в 135°. Найдите длину третьей стороны.

____

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 22 см, а длина одной из его сторон равна 10 см. Найдите длину боковой стороны, если центр описанной окружности лежит вне треугольника.

____

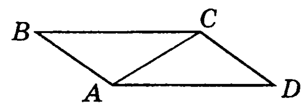
8. Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны соответственно 6 см и 2 см. Определите длину третьей стороны этого треугольника.

____

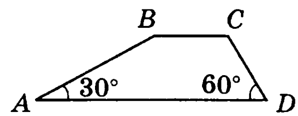
9. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.

10. В окружности проведена хорда AB. Центральный угол, опирающийся на дугу, стягиваемую хордой AB, меньше $60°$. Определите, что больше: хорда AB или радиус окружности.

11. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ делит его угол DAB на части BAC и CAD, равные $60°$ и $45°$ соответственно. Найдите большую сторону параллелограмма, если его меньшая сторона равна 4 см.



12. Углы при основании AD трапеции равны $60°$ и $30°$. Найдите отношение сторон AB и CD.



Часть 3

13. Две стороны треугольника имеют длины 6 см и 12 см, а угол между ними равен $120°$. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

14. Две стороны треугольника имеют длины 10 см и 6 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите угол между данными сторонами треугольника.

15. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

§ 13. Многоугольники

Целью теста, рекомендованного для данного параграфа, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам “Многоугольники”, “Правильные многоугольники”, “Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников”, “ Длина окружности”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— распознавать на чертежах, используя определения: ломаную, многоугольник, выпуклый многоугольник, правильный многоугольник; многоугольник, вписанный в окружность, многоугольник, описанный около окружности;
— изображать ломаную, многоугольник, выпуклый многоугольник, правильный многоугольник, многоугольник, вписанный в окружность, многоугольник, описанный около окружности;
— применять при решении задач определения ломаной, многоугольника, выпуклого многоугольника, правильного многоугольника; многоугольника, вписанного в окружность, многоугольника, описанного около окружности;
— применять при решении задач свойство длины ломаной, теоремы о сумме углов выпуклого многоугольника и сумме его внешних углов, формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников;
— вычислять длину окружности, длину дуги окружности, применяя изученные формулы.

ТЕСТ 3

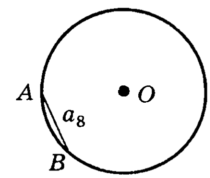
Вариант 1

Часть 1

1. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

1. 3; 2. 4; 3. 6; 4. 8.

2. В окружности с радиусом 5 см хорда AB является стороной правильного восьмиугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.



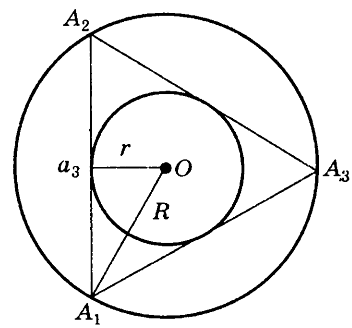
1. $\frac{5\pi}{2}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см;

2. $\frac{5\pi}{4}$ см; 4. $\frac{5\pi}{3}$ см.

3. Сколько вершин имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен 24°?

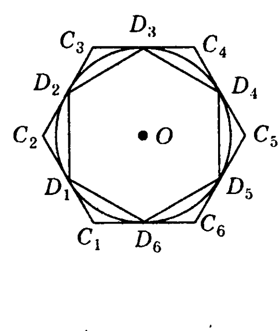
1. 3; 2. 7; 3. 24; 4. 15.

4. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника, если радиус вписанной в него окружности 3 см.



1. $6\sqrt{3}$ см;
2. 1,5 см;
3. 6 см;
4. $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

5. Найдите отношение стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного шестиугольника, описанного около нее.

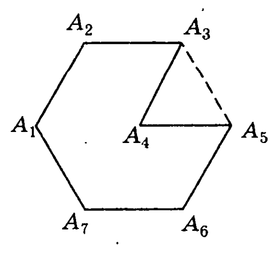


1. $\frac{1}{2}$; 3. 2;

2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

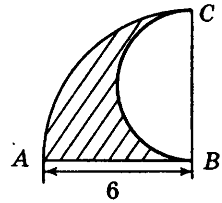
Часть 2

6. Треугольник $A_3A_4A_5$ — равносторонний и его периметр равен 21 см. Найдите периметр многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, если периметр шестиугольника $A_1A_2A_3A_5A_6A_7$ в два раза больше периметра равностороннего треугольника $A_3A_4A_5$.



____

7. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.

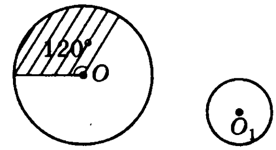


____

8. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона равна 6 см, а радиус вписанной окружности $3\sqrt{3}$ см.

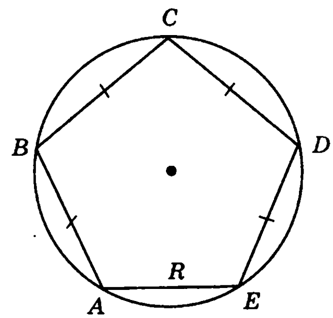
____

9. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному $120°$. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите отношение радиусов окружностей.



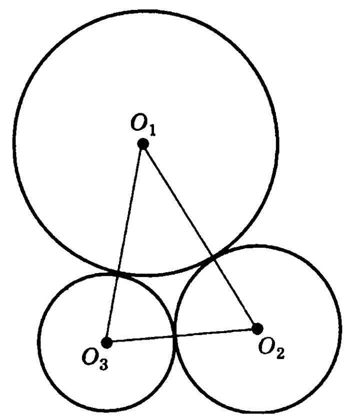
____

10. В окружность диаметром 12 см вписан пятиугольник, одна сторона которого равна 6 см, а все остальные равны между собой. Найдите градусную меру наибольшего угла пятиугольника.



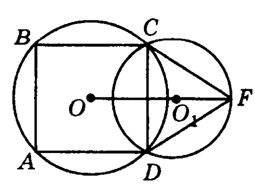
____

11. Три окружности с радиусами 1 см, 2 см и 3 см попарно касаются друг друга так, как показано на рисунке. Найдите длину окружности, проходящей через центры данных окружностей.



____

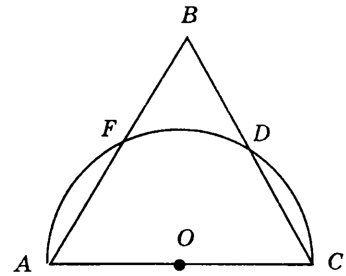
12. Отрезок CD является общей хордой двух пересекающихся таким образом окружностей, что их центры лежат по разные стороны от хорды CD. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной вписанного квадрата, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной правильного вписанного треугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона квадрата равна 3 см.



____

Часть 3

13. На стороне AB правильного треугольника ABC, как на диаметре, построен полукруг радиуса 6 см. Точки F и D являются точками пересечения сторон треугольника с окружностью. Найдите радианную меру дуги FD.



14. Определите, для каких правильных n-угольников сторона меньше радиуса описанной окружности.

15. В равнобочную трапецию с острым углом 30° вписана окружность. Найдите отношение длины окружности к периметру трапеции.

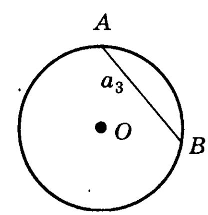
Вариант 2

Часть 1

1. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна сумме его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

1. 3; 2. 4; 3. 6; 4. 8.

2. В окружности с радиусом 5 см хорда AB является стороной правильного треугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.



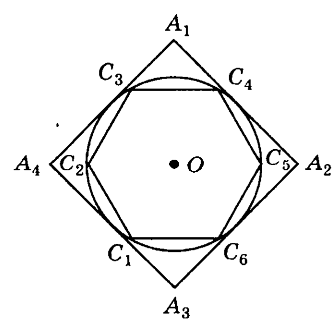
1. $\frac{5\pi}{2}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см;

2. $\frac{5\pi}{3}$ см; 4. $\frac{5\pi}{4}$ см.

3. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внутренних углов равен 165°?

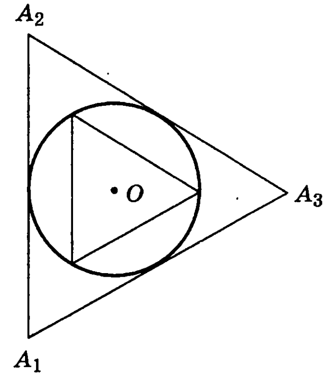
1. 3; 3. 24;
2. 7; 4. 15.

4. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности, если сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна 3 см.



1. 4,5 см;
2. 6 см;
3. $3\sqrt{3}$ см;
4. $3\sqrt{2}$ см.

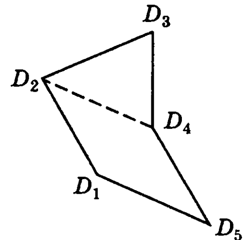
5. Найдите отношение стороны правильного треугольника, описанного около окружности, к стороне правильного треугольника, вписанного в нее.



1. $\frac{1}{2}$;
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
3. 2;
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

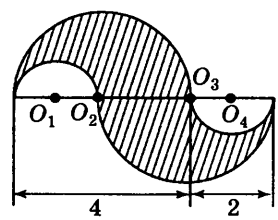
Часть 2

6. Треугольник $D_2D_3D_4$ — равносторонний и его периметр равен 21 см. Найдите периметр пятиугольника $D_1D_2D_3D_4D_5$, если периметр четырехугольника $D_1D_2D_4D_5$ в два раза больше периметра равностороннего треугольника $D_2D_3D_4$.



____

7. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.

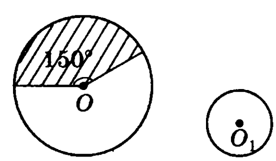


____

8. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 2 см, а радиус вписанной окружности $\sqrt{2}$ см.

____

9. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному 150°. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите радиус окружности с центром в точке O, если радиус окружности с центром в точке O_1 равен 6 см.

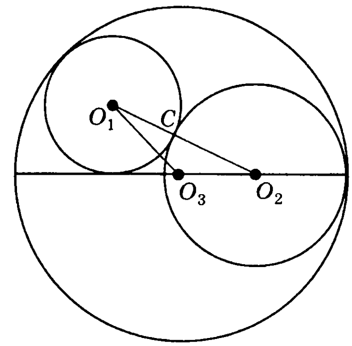


____

10. В окружность радиуса $5\sqrt{2}$ см вписан шестиугольник, одна сторона которого 10 см, а все остальные равны между собой. Найдите градусную меру его меньшего угла.

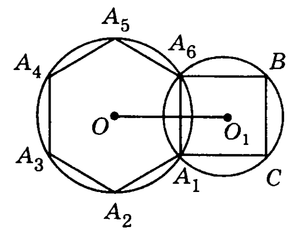
____

11. Три окружности с радиусами 4 см, 6 см и 12 см попарно касаются друг друга так, как показано на рисунке. Найдите длину окружности, проходящей через центры данных окружностей.



____

12. Отрезок A_1A_6 является общей хордой двух пересекающихся таким образом окружностей, что их центры лежат по разные стороны от хорды A_1A_6. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной правильного вписанного шестиугольника, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона шестиугольника равна 6 см.



____

Часть 3

13. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E, F и G — середины сторон AB, BC и AD соответственно, причем $GE \perp AB$, $GF \perp BC$. Найдите угол ACD.

14. Для каких правильных n-угольников половина стороны не меньше, чем радиус вписанной окружности?

15. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

§ 14. Площади фигур

Целью теста, рекомендованного для данного параграфа, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам “Понятие площади”, “Площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции”, “Площадь круга”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— вычислять площади квадрата и прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, площадь круга, площадь кругового сектора, непосредственно применяя соответствующие формулы;

— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, площади фигур, применяя свойства площади, формулы вычисления площадей квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, круга и кругового сектора.

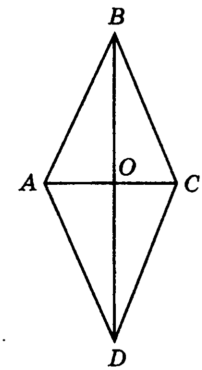
ТЕСТ 4

Вариант 1

Часть 1

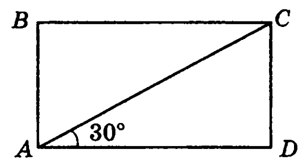
1. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 см и 6 см.

1. 24 см^2;
2. 12 см^2;
3. 6 см^2;
4. 48 см^2.



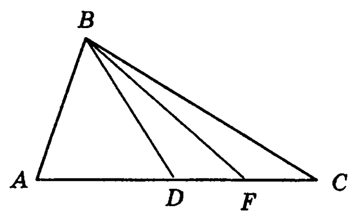
2. Найдите площадь прямоугольника, если его диагональ равна 14 см и образует с большей стороной угол, равный 30°.

1. $7\sqrt{3}$ см^2;
3. $49\frac{\sqrt{3}}{2}$ см^2;
2. 7 см^2;
4. $49\sqrt{3}$ см^2.



3. Треугольники ABC и DBF имеют общую вершину B, а их основания AC и DF лежат на одной прямой. Найдите отношение площадей треугольников ABC и DBF, если DF = 7 см, AC = 21 см.

1. 3 : 2; 2. 2 : 1; 3. 3 : 1; 4. 4 : 1.



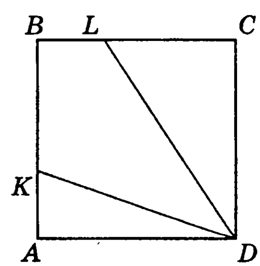
4. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

Стороны параллелограмма 8 см и 6 см, а одна из высот равна 4 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

1. Одно; 2. два; 3. три; 4. ни одного.

5. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AK = \frac{1}{3}AB$ и $BL = \frac{1}{3}BC$. Найдите площадь четырехугольника $KBLD$, если площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2.

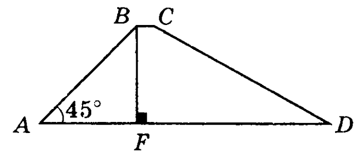
1. $\frac{1}{2}$ см^2;
3. $\frac{3}{4}$ см^2;
2. $\frac{1}{4}$ см^2;
4. $\frac{5}{4}$ см^2.



Часть 2

6. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 см и 8 см. Сторона A_1B_1 равновеликого ему прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ на 2 см больше стороны A_1D_1. Найдите сторону A_1B_1, если она выражается целым числом.

7. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 1 см, боковая сторона AB наклонена к основанию AD под углом 45°. Точка F – основание высоты трапеции — делит сторону AD на отрезки $AF = 6$ см и $FD = 17$ см. Найдите площадь трапеции.

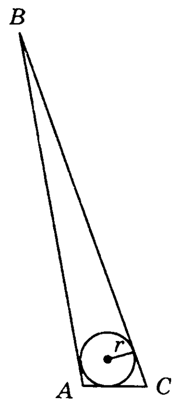


____

8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их периметры относятся, как 2 : 5. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ на 42 см^2 больше площади треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

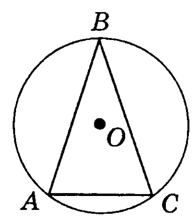
____

9. В треугольнике ABC, стороны которого равны 25 см, 26 см и 3 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности.



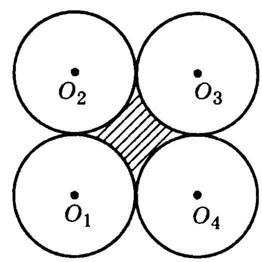
____

10. Около равнобедренного треугольника ABC, основание которого равно 24 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности, если боковая сторона треугольника равна 13 см.



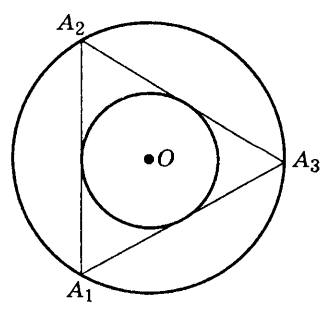
____

11. Четыре равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



____

12. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону треугольника.



____

Часть 3

13. В треугольник вписана окружность радиуса 4 см. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки 6 см и 8 см. Найдите длины сторон треугольника.

14. Найдите площадь трапеции, основания которой 3 см и 7 см, а диагонали — 6 см и 8 см.

15. В треугольнике ABC проведена медиана AD. На прямой, содержащей медиану AD, отмечена точка M. Докажите, что треугольники ABM и ACM равновелики.

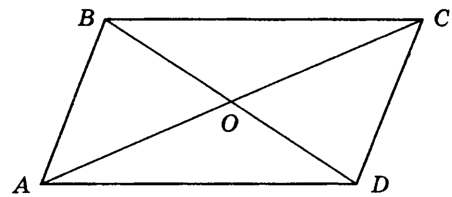
Вариант 2

Часть 1

1. Диагональ квадрата равна 14 см. Найдите его площадь.

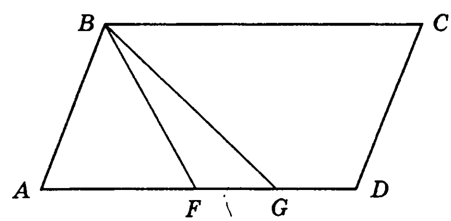
1. 24,5 см^2;
2. 98 см^2;
3. 196 см^2;
4. 49 см^2.

2. Диагонали параллелограмма, равные 6 см и 14 см, пересекаются под углом 60°. Найдите площадь параллелограмма.



1. $42\sqrt{3}$ см^2;
2. $21\sqrt{3}$ см^2;
3. $21\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^2;
4. $84\sqrt{3}$ см^2.

3. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD, равной 16 см, отмечены точки F и G. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника GBF, если отрезок FG равен 4 см.

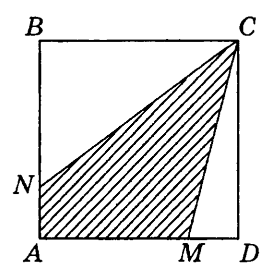


1. 4 : 1;
2. 8 : 1;
3. 5 : 1;
4. 16 : 1.

4. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.
Стороны параллелограмма 8 *см и 6 см, а одна из высот* — 10 *см. Найдите вторую высоту параллелограмма.*

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решений нет.

5. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AN = \frac{1}{4}AB$ и $AM = \frac{3}{4}AD$. Найдите площадь четырехугольника $ANCM$, если площадь $ABCD$ равна 1 см^2.



1. $\frac{1}{2}$ см^2;
2. $\frac{1}{4}$ см^2;
3. $\frac{3}{4}$ см^2;
4. $\frac{5}{4}$ см^2.

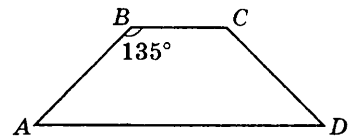
Часть 2

6. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1 : 4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.

____

7. В равнобедренной трапеции основания равны 7 см и 17 см. Тупой угол трапеции равен 135°. Найдите площадь трапеции.

____

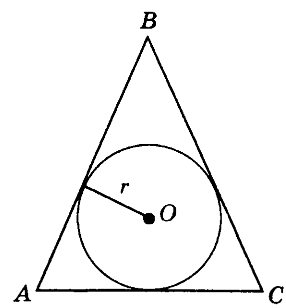


8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и отношение сходственных сторон равно 5 : 3. Площадь треугольника ABC на 16 см^2 больше площади треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC.

____

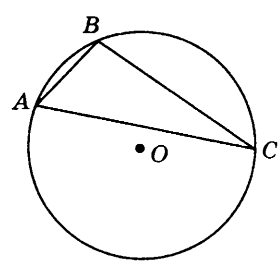
9. В равнобедренный треугольник ABC, основание которого равно 14 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если боковая сторона треугольника равна 25 см.

____



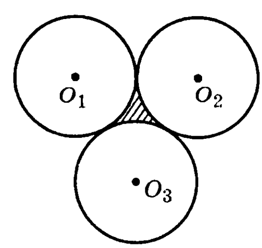
10. Около треугольника ABC, стороны которого равны 15 см, 14 см и 13 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности.

____



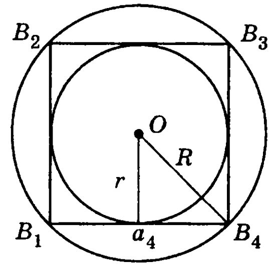
11. Три равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.

____



12. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного четырехугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону четырехугольника.

____



Часть 3

13. Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

14. Найдите площадь трапеции, основания которой 6 см и 26 см, а боковые стороны — 12 см и 16 см.

15. Каждая диагональ четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

Учебник «Геометрия. 7–9» И.Ф. Шарыгина

Глава 9. **Площади многоугольников**

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам: “Основные свойства площади”, “Площади параллелограмма, треугольника и трапеции”, “Площадь многоугольника”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— применять свойства площади;
— вычислять площади квадрата и прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, непосредственно применяя соответствующие формулы;
— устанавливать равенство площадей по равенству соответствующих элементов;
— вычислять значения длин отрезков и градусную меру углов, применяя формулы вычисления площадей квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

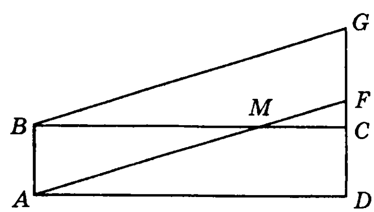
— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;
— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 1

Вариант 1

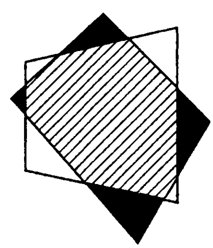
Часть 1

1. Прямоугольник $ABCD$ и параллелограмм $AFGB$ расположены так, как показано на рисунке, при этом их стороны CD и FG лежат на одной прямой. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 11 см^2, а площадь треугольника CMF равна 1 см^2. Найдите площадь параллелограмма $AFGB$.



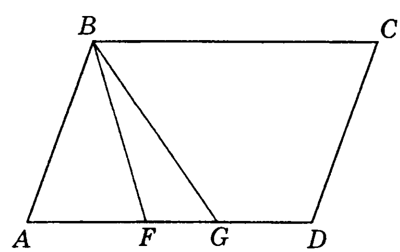
1. 12 см^2; 3. 10 см^2;
2. 11 см^2; 4. определить невозможно.

2. Два равновеликих четырехугольника расположены так, как показано на рисунке. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.



1. $S_1 < S_2$; 3. $S_1 > S_2$;
2. $S_1 = S_2$; 4. сравнить невозможно.

3. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD, равной 16 см, отмечены точки F и G. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника GBF, если отрезок FG равен 4 см.

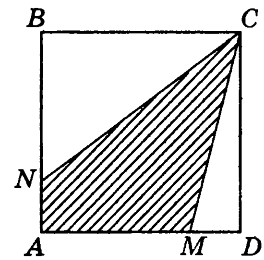


1. 4 : 1; 3. 5 : 1;
2. 8 : 1; 4. 16 : 1.

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и отношение сходственных сторон равно 5 : 3. Площадь треугольника ABC на 16 см^2 больше площади треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC.

1. 16 см^2; 2. 9 см^2; 3. 25 см^2; 4. 34 см^2.

5. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AN = \frac{1}{4}AB$ и $AM = \frac{3}{4}AD$. Найдите площадь четырехугольника $ANCM$, если площадь $ABCD$ равна 1 см^2.



1. $\frac{1}{2}$ см^2; 3. $\frac{3}{4}$ см^2;

2. $\frac{1}{4}$ см^2; 4. $\frac{5}{4}$ см^2.

Часть 2

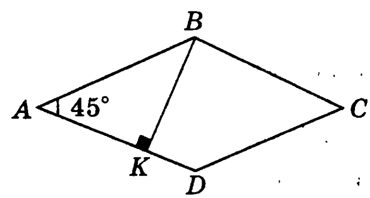
6. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1 : 4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.

____

7. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

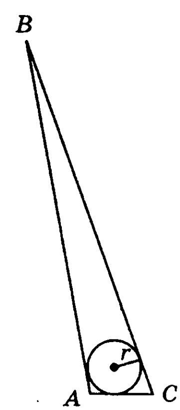
____

8. В ромбе $ABCD$ проведена высота BK, равная $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь ромба, если угол BAD равен 45°.



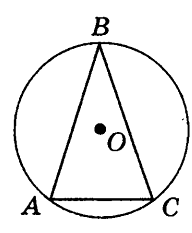
____

9. В треугольнике ABC, стороны которого равны 25 см, 26 см и 3 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности.



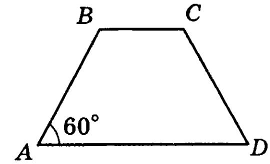
____

10. Около равнобедренного треугольника ABC, основание которого равно 24 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности, если боковая сторона треугольника равна 13 см.



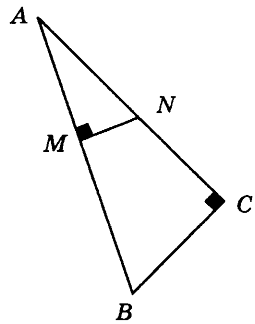
____

11. В равнобедренной трапеции $ABCD$ периметр равен 42 см, боковая сторона равна 10 см. Найдите площадь трапеции, если ее острый угол равен 60°.



____

12. В прямоугольном треугольнике ABC из точки N, лежащей на катете AC, на гипотенузу AB опущен перпендикуляр NM. Гипотенуза AB равна 17 см, катет BC равен 8 см. Найдите отрезок NM, если площадь треугольника ABC в 4 раза больше площади треугольника ANM.



____

Часть 3

13. В треугольник вписана окружность радиуса 4 см. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки 6 см и 8 см. Найдите длины сторон треугольника.

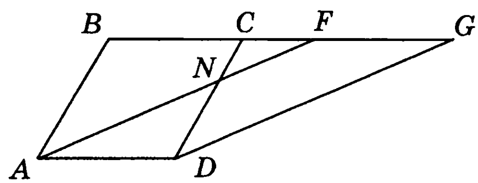
14. Найдите площадь трапеции, основания которой 3 см и 7 см, а диагонали — 6 см и 8 см.

15. В треугольнике ABC проведена медиана AD. На прямой, содержащей медиану AD, отмечена точка M. Докажите, что треугольники ABM и ACM равновелики.

Вариант 2

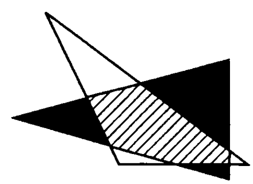
Часть 1

1. Ромб $ABCD$ и параллелограмм $AFGD$ расположены так, как показано на рисунке, при этом их стороны BC и FG лежат на одной прямой. Площадь ромба $ABCD$ равна 11 см^2, а площадь треугольника AND равна 3 см^2. Найдите площадь параллелограмма $AFGD$.



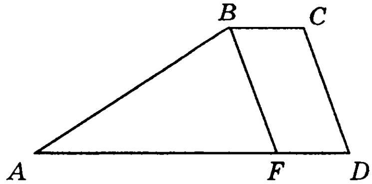
1. 12 см^2;
2. 10 см^2;
3. 11 см^2;
4. определить невозможно.

2. Два равновеликих треугольника расположены так, как показано на рисунке. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.



1. $S_1 < S_2$;
2. $S_1 = S_2$;
3. $S_1 > S_2$;
4. сравнить невозможно.

3. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 4 см и 14 см соответственно. Из вершины B проведена прямая, параллельная стороне CD. Найдите отношение площади трапеции $ABCD$ к площади треугольника ABF.

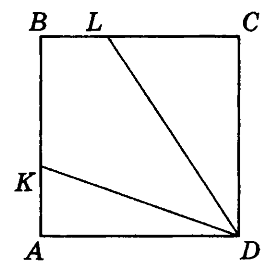


1. 9 : 5;
2. 18 : 5;
3. 1 : 1;
4. 2 : 1.

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их периметры относятся, как 2 : 5. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ на 42 см^2 больше площади треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

1. 36 см^2;
2. 50 см^2;
3. 42 см^2;
4. 8 см^2.

5. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AK = \frac{1}{3}AB$ и $BL = \frac{1}{3}BC$. Найдите площадь четырехугольника $KBLD$, если площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2.



1. $\frac{1}{2}$ см^2;
2. $\frac{1}{4}$ см^2;
3. $\frac{3}{4}$ см^2;
4. $\frac{5}{4}$ см^2.

Часть 2

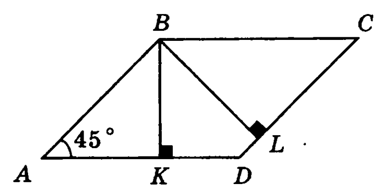
6. В прямоугольнике $ABCD$ стороны равны 3 см и 8 см. Найдите меньшую сторону равновеликого ему прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, периметр которого равен 20 см.

____

7. Тупой угол ромба равен 150°, а его сторона равна 6 см. Найдите площадь ромба.

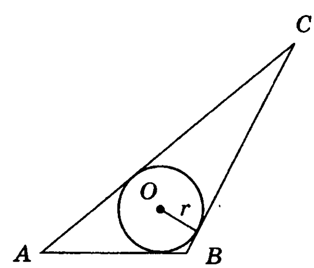
____

8. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BK и BL, равные $3\sqrt{2}$ см и 5 см соответственно. Найдите площадь параллелограмма, если угол BAD равен 45°.



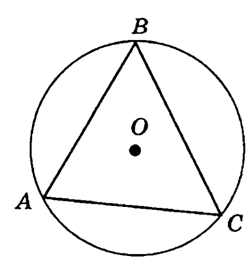
____

9. В треугольник ABC, стороны которого равны 29 см, 30 см и 5 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности.



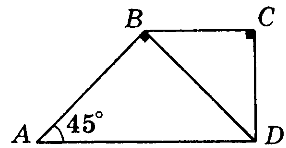
____

10. Около треугольника ABC, стороны которого равны 15 см, 14 см и 13 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности.



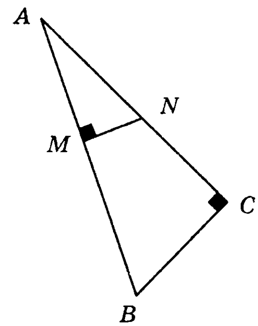
____

11. Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Найдите площадь этой трапеции, если ее боковая сторона, прилежащая к прямому углу, равна 4.



____

12. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 17 см, а катет AC — 15 см. Из точки N, принадлежащей катету AC, на гипотенузу AB опущен перпендикуляр NM. Найдите отрезок AM, если площадь треугольника ABC в 4 раза больше площади треугольника ANM.



____

Часть 3

13. Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

14. Найдите площадь трапеции, основания которой 6 см и 26 см, а боковые стороны — 12 см и 16 см.

15. Каждая диагональ четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

Глава 10. **Длина окружности, площадь круга**

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по темам “Правильные многоугольники”, “Длина окружности”, “Площадь круга и его частей”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— применять определение окружности, описанной около правильного многоугольника, определение окружности, вписанной в правильный многоугольник; выводить и применять формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности с длиной стороны правильного n-угольника;
— вычислять длину окружности, длину дуги окружности, площадь круга, площадь кругового сектора, применяя полученные формулы;
— вычислять значения длин отрезков и градусную меру углов, применяя формулы длины окружности, длины дуги окружности; формулы площади круга и его частей.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;
— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 2

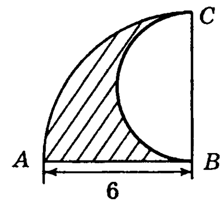
Вариант 1

Часть 1

1. Определите, для каких правильных n-угольников сторона меньше радиуса описанной окружности.

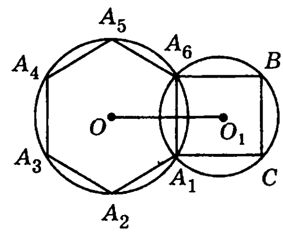
1. $n > 3$; 2. $n < 6$; 3. $n > 6$; 4. определить невозможно.

2. Из вершины прямого угла ABC проведена дуга радиуса 6, а на его стороне BC проведен полукруг диаметра 6. Определите длину границы заштрихованной фигуры.



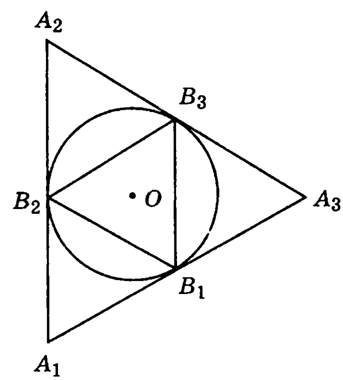
1. $9\pi + 6$; 3. $3\pi + 6$;
2. 12π; 4. $6\pi + 6$.

3. Отрезок A_1A_6 является общей хордой двух пересекающихся таким образом окружностей, что их центры лежат по разные стороны от хорды A_1A_6. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной правильного вписанного шестиугольника, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона шестиугольника равна 6 см.



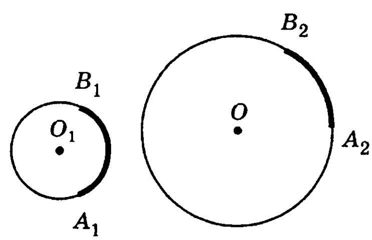
1. $3(1 + \sqrt{3})$ см; 3. $4\sqrt{3}$ см;
2. $3(\sqrt{3} - 1)$ см; 4. $2\sqrt{3}$ см.

4. Найдите отношение стороны правильного треугольника, описанного около окружности, к стороне правильного треугольника, вписанного в нее.



1. $\frac{1}{2}$; 3. 2;
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Дуги A_1B_1 и A_2B_2 равной длины принадлежат разным окружностям с радиусами 3 см и 9 см. Найдите отношение градусной меры центрального угла, соответствующего дуге A_1B_1, к градусной мере центрального угла, соответствующего дуге A_2B_2.



1. $\frac{1}{3}$; 2. $\frac{2}{3}$; 3. 2; 4. 3.

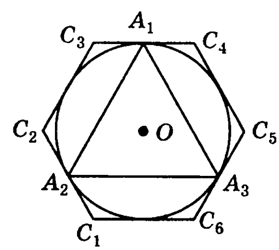
Часть 2

6. Найдите центральный угол правильного n-угольника, если радиус вписанной в него окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности.

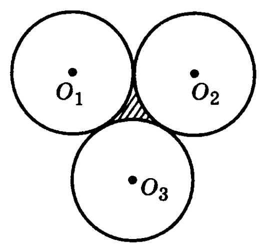
7. Хорда стягивает дугу окружности, градусная мера которой 40°. Найдите радианную меру угла, который образует эта хорда с касательной к окружности, проходящей через ее конец.

8. Площадь сектора круга, радиус которого 6 см, равна 12π см^2. Найдите соответствующий центральный угол.

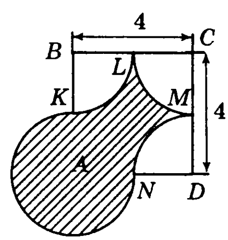
9. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в окружность, если сторона правильного шестиугольника, описанного около этой окружности, равна 2 см.



10. Три равные окружности попарно касаются. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



11. По данным рисунка найдите площадь заштрихованной фигуры, где KL, LM, MN и KN — дуги окружностей с центрами в вершинах B, C, D и A квадрата $ABCD$ соответственно.

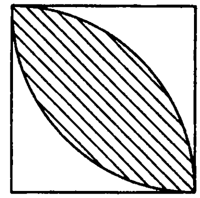


12. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного восьмиугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону восьмиугольника.

Часть 3

13. На стороне AB правильного треугольника ABC, как на диаметре, построен полукруг радиуса 6 см. Точки F и D являются точками пересечения сторон треугольника с окружностью. Найдите площадь части треугольника ABC, лежащей вне полукруга $AFDC$.

14. Найдите площадь общей части двух кругов единичного радиуса с центрами в противоположных вершинах единичного квадрата.



15. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите площадь круга, если меньшая диагональ параллелограмма равна 16.

Вариант 2

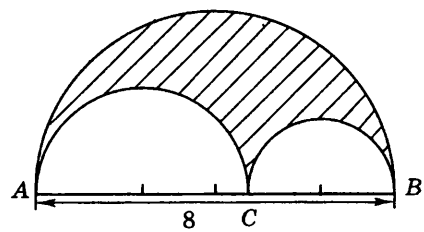
Часть 1

1. Определите, для каких правильных n-угольников половина стороны не меньше, чем радиус вписанной окружности.

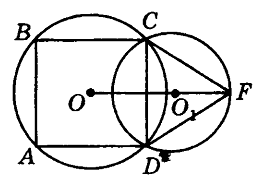
1. $n > 4$;
2. $n \leqslant 4$;
3. $n > 4$;
4. определить невозможно.

2. На отрезке AB, равном 8, отмечена точка C и на отрезках AB, AC и BC, как на диаметрах, построены полуокружности. Определите длину границы заштрихованной фигуры.

1. 8π;
2. 24π;
3. 16π;
4. 4π.



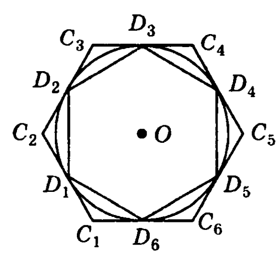
3. Отрезок CD является общей хордой двух пересекающихся таким образом окружностей, что их центры лежат по разные стороны от хорды CD. При этом для окружности с центром в точке O эта хорда является стороной вписанного квадрата, а для окружности с центром в точке O_1 эта хорда является стороной правильного вписанного треугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если сторона квадрата равна 3 см.



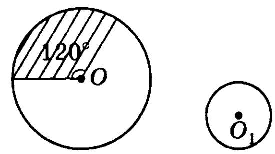
1. $(3 + \sqrt{3})$ см;
2. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ см;
3. $(3 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ см;
4. $(3 - \sqrt{3})$ см.

4. Найдите отношение стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного шестиугольника, описанного около нее.

1. $\frac{1}{2}$;
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
3. 2;
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



5. Дуга окружности с центром в точке O, соответствует центральному углу, равному $120°$. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите отношение радиуса окружности с центром в точке O_1 к радиусу окружности с центром в точке O.



1. $\frac{1}{3}$; 2. $\frac{2}{3}$; 3. 2; 4. 3.

Часть 2

6. Найдите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 2 см, а радиус описанной окружности $\sqrt{2}$ см.

____

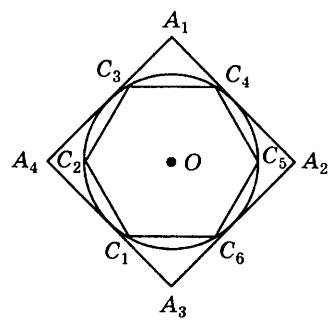
7. Сумма вписанного и центрального углов, опирающихся на одну и ту же дугу, равна $\frac{11\pi}{6}$. Определите градусную меру вписанного угла.

____

8. Площадь сектора круга, центральный угол которого $60°$, равна 24π см^2. Найдите радиус круга.

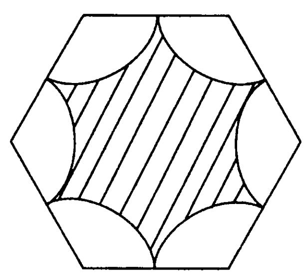
____

9. Найдите сторону квадрата, описанного около окружности, если сторона правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна 3 см.



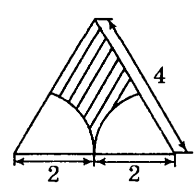
____

10. Из вершин правильного шестиугольника со стороной 6 см проведены дуги радиуса 3 см. Определите длину границы заштрихованной фигуры.



____

11. По данным рисунка найдите площадь заштрихованной фигуры, если данный треугольник — равносторонний, а центры проведенных дуг — вершины треугольника.



____

12. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного n-угольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону n-угольника.

____

Часть 3

13. На стороне AB правильного треугольника ABC, как на диаметре, построен полукруг радиуса 6 см. Точки F и D являются точками пересечения сторон треугольника с окружностью. Найдите площадь части треугольника ABC, лежащей внутри полукруга $AFDC$.

14. Два круга радиусами по 5 см имеют общую хорду длины $5\sqrt{2}$. Найдите площадь общей части этих кругов.

15. В равнобочную трапецию с острым углом 30° вписана окружность. Найдите отношение длины окружности к периметру трапеции.

Глава 11. **Координаты и векторы**

Целью теста, рекомендованного к этой главе, является оперативная проверка предметной компетентности учащихся девятого класса по темам “Вычисление координат середины отрезка и расстояния между двумя точками”, “Векторы”, “Скалярное произведение векторов”. Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— вычислять значения координат середины отрезка по координатам его концов, находить длину отрезка по координатам его концов;
— находить координаты равных векторов, координаты суммы и разности векторов, координаты произведения вектора на число;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя законы сложения векторов; законы произведения вектора на число;
— вычислять скалярное произведение векторов, применять необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов при решении задач.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;
— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 3

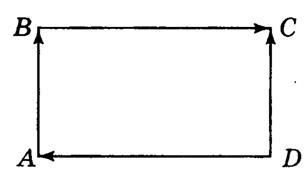
Вариант 1

Часть 1

1. Отрезок AB — диаметр окружности. Определите координаты центра окружности, если $A(1; 5)$, $B(7; -3)$.

1. (4; 1); 2. (4; 4); 3. (−3; −4); 4. (4; −1).

1. Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник. Среди данных векторов укажите одну пару равных векторов.



1. $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$; 3. $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$;

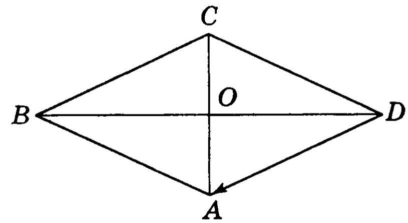
2. $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$; 4. $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$.

3. Найдите координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, если $\bar{a}(-1; 2)$ и $\bar{b}(14; 7)$.

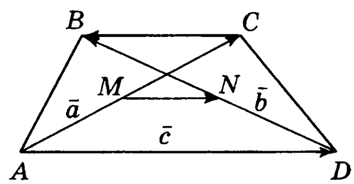
1. (0; 3); 2. (−4; 3); 3. (−5; 5); 4. 1(−4; 5).

4. Диагонали ромба *ABCD AC* и *BD* равны 10 см и 24 см соответственно. Найдите длину вектора $\overline{DA}$.

1. 5 см;
2. 12 см;
3. 13 см;
4. 17 см.



5. В трапеции *ABCD* $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ и $\overline{AD} = \bar{c}$. Точки *M* и *N* — середины диагоналей *AC* и *BD* соответственно. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.



1. $\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$; 3. $\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$;

2. $\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$; 4. $\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

Часть 2

6. В треугольнике *ABC* с вершинами в точках *A*(7; 3), *B*(5; 1), *C*(1; 14) проведена медиана *CD*. Найдите ее длину.

____

7. Вектор $\overline{AB} = \bar{a}$. Длина вектора $\overline{CD}$ в три раза больше длины вектора $\overline{AB}$, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{CD}$ через вектор $\bar{a}$.

____

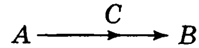
8. Упростите выражение $\overline{MB} + \overline{AM} + \overline{BA}$.

____

9. Даны три коллинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Известно, что $2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$ и $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$. Найдите $|\bar{c}|$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены.

____

10. Точка *C* лежит на отрезке *AB*, при этом *AC* : *CB* = 2 : 1. Найдите координаты вектора $\overline{AC}$, если $\overline{AB}$ (6; 15).



____

11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

____

12. Определите, взаимное расположение ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если справедливо утверждение $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

Часть 3

13. Выразите вектор $\overline{CK}$ через вектор $\overline{KA}$, если $\overline{OK} = \frac{2}{7}\overline{OA} + \frac{5}{7}\overline{OC}$, где O — произвольная точка.

14. Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство

$$|\vec{x} - \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

15. Дан квадрат $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка O является точкой пересечения диагоналей квадрата.

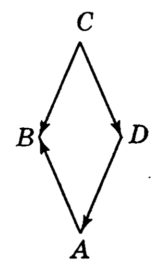
Вариант 2

Часть 1

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(7; 3)$, $B(5; 1)$, $C(1; 14)$ проведена медиана CD. Найдите координаты ее основания.

1. (1; 1); 2. (1; 2); 3. (6; 1); 4. (6; 2).

2. Четырехугольник $ABCD$ — ромб. Среди данных векторов укажите одну пару равных векторов.

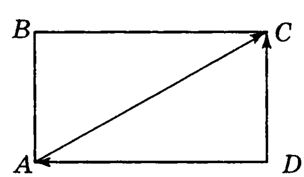


1. $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$;
2. $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$;
3. $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$;
4. $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

3. Найдите координаты вектора $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, если $\bar{a}(-2; 1)$, $\bar{b}(1; 0)$.

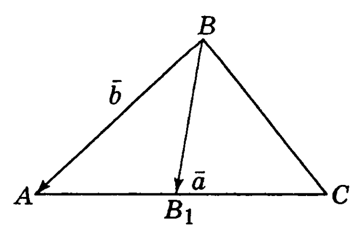
1. (2; 1); 2. (1,5; 1); 3. (0; 1); 4. (−1; −0,5).

4. В прямоугольнике $ABCD$ стороны AB и AD равны 8 см и 15 см соответственно. Найдите длину вектора $\overline{AC}$.



1. 15 см; 3. 8 см;
2. 17 см; 4. 23 см.

5. В треугольнике ABC $\overline{BA} = \bar{b}$ и $\overline{CA} = \bar{a}$. Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC. Выразите вектор $\overline{BB_1}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



1. $\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$; 3. $\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$;
2. $\frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$; 4. $\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

Часть 2

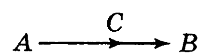
6. Найдите длину средней линии треугольника ABC с вершинами в точках $A(-3; -6)$, $B(-8; 6)$, $C(4; -10)$, параллельной стороне CB.

7. Вектор $\overline{AM} = \overline{m}$. Длина вектора $\overline{MN}$ равна половине длины вектора $\overline{AM}$, векторы $\overline{MN}$ и $\overline{AM}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{MN}$ через вектор $\overline{m}$.

8. Упростите выражение $\overline{AK} - \overline{BC} + \overline{KC}$.

9. Даны три коллинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Известно, что $3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c} = 0$ и $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{c}| = 4$. Найдите $|\bar{b}|$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ сонаправлены.

10. Точка C лежит на отрезке AB и $AC : CB = 2 : 1$. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если $\overline{AC} = \bar{a}(6; 8)$.



11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в одной из вершин ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

12. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены и $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$.

Часть 3

13. Выразите вектор $\overline{AK}$ через вектор $\overline{KC}$, если $\overline{OK} = \frac{3}{5}\overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{OC}$, где O — произвольная точка.

14. Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

15. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка O является точкой пересечения диагоналей прямоугольника.

Глава 12. **Преобразования плоскости**

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися девятого класса обязательного уровня подготовки по теме “Движения”. Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— распознавать на чертежах основные виды движений: центральную симметрию; поворот; осевую симметрию; параллельный перенос;

— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя определения основных видов движений.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;

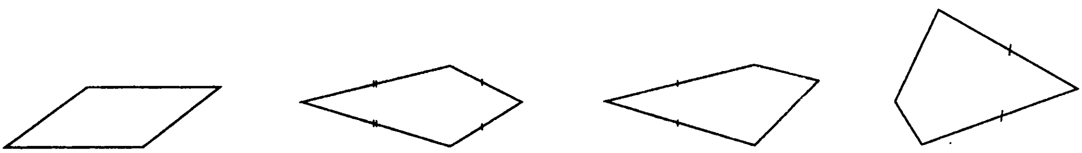
— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 4

Вариант 1

Часть 1

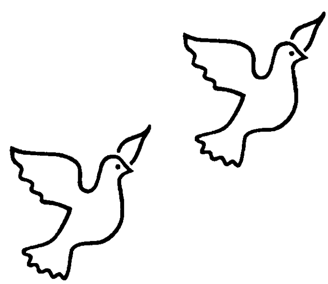
1. Определите, какой из приведенных ниже четырехугольников имеет ось симметрии. Укажите номер этого четырехугольника в ответе.



1) 2) 3) 4)

1. 1); 2. 2); 3. 3); 4. 4).

2. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.



1. Центральная симметрия (укажите центр);
2. поворот (укажите угол и направление);
3. осевая симметрия (укажите ось);
4. параллельный перенос (укажите вектор).

3. Треугольник имеет три оси симметрии. Определите вид треугольника.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

4. При центральной симметрии относительно вершины C треугольника ABC его вершина A переходит в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих высоты AM и DN треугольников ABC и FDC.

1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

5. При повороте на угол 90° вокруг точки пересечения диагоналей параллелограмм перешел сам в себя. Определите его вид.

1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. такой параллелограмм не существует.

Часть 2

6. Определите, сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя.

____

7. Угол ABC, равный $\alpha\,(\alpha < 90°)$, при повороте на 60° в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол ABC_1.

____

8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C треугольника перешла в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если катет треугольника равен 12 см.

____

9. Внутри угла AOB, равного 45°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

____

10. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол 180° вокруг середины одной из его сторон вершина A перешла в точку A_1, вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

____

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. При параллельном переносе вершина A перешла в точку D, а треугольник ABC в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABBD$, если боковая сторона треугольника равна 5 см, а его основание 8 см.

____

12. Правильный многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 15°. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник?

____

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

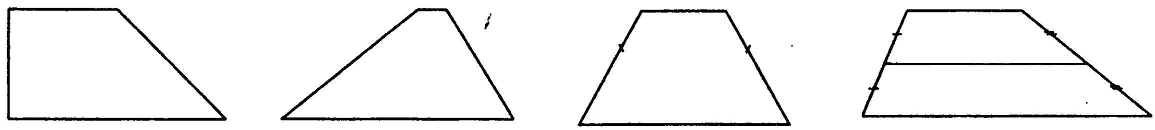
14. Параллелограмм имеет только одну ось симметрии. Определите его вид.

15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы сумма расстояний $AK + KB$ была наименьшей?

Вариант 2

Часть 1

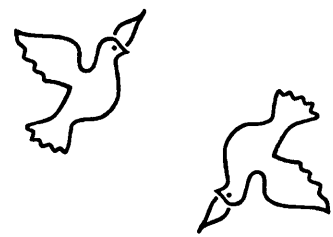
1. По данным рисунка определите, какая среди приведенных ниже трапеций имеет ось симметрии. Укажите номер этой трапеции в ответе.



1\) 2) 3) 4)

1. 1); 2. 2); 3. 3); 4. 4).

2. Определите по рисунку вид движения. Укажите на рисунке, как оно может быть задано.



1. Центральная симметрия (укажите центр);
2. поворот (укажите угол и направление);
3. осевая симметрия (укажите ось);
4. параллельный перенос (укажите вектор).

3. Треугольник имеет только одну ось симметрии. Определите вид треугольника.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

4. Дан треугольник ABC. При центральной симметрии относительно вершины C его вершина A перешла в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих биссектрисы CM и CN треугольников ABC и FDC.

1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

5. При повороте на угол 120° вокруг центра вписанной окружности треугольник перешел сам в себя. Определите его вид.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

Часть 2

6. Определите, сколько существует движений, переводящих ромб сам в себя.

____

7. Угол ABC, равный α ($\alpha < 90°$), при повороте на 60° в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол CBA_1.

____

8. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его катет AC вершина B треугольника перешла в точку B_1. Найдите длину отрезка BB_1, если гипотенуза треугольника равна 7 см.

____

9. Внутри угла AOB, равного $90°$, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

____

10. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол $180°$ вокруг вершины A вершина B треугольника перешла в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

____

11. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана BD. При параллельном переносе точка A перешла в точку D, а треугольник ABC в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если сторона треугольника равна 6 см.

____

12. Правильный многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом $18°$. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник?

____

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

14. Параллелограмм имеет четыре оси симметрии. Определите его вид.

15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы расстояния от каждой из деревень до остановки были равными.

II. РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Учебник «Геометрия. 7–9» Л.С. Атанасяна и др.

ТЕСТ 1

Вариант 1

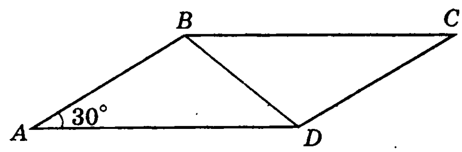
Часть 1

1. О т в е т: 1.

Решение. По определению $\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45°$. Следовательно, $b \cdot \sin 45° + b \cdot \cos 135° + b \cdot \sin 180° = b \cdot \sin 45° + b \cdot (-\cos 45°) + b \cdot \sin 180° = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \cdot 0 = b \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

2. О т в е т: 3.

Решение. По условию стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен $30°$. Отсюда $S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin 30°$, а $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 30° = 8 \cdot 11 \cdot \frac{1}{2} = 44$ (см^2).



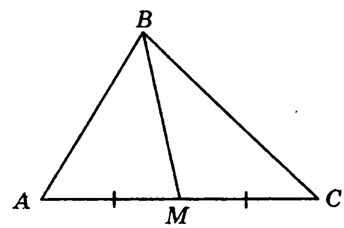
3. О т в е т: 3.

Решение. В треугольниках ABM и BMC сторона BM — общая, $AM = MC$ (BM — медиана). Сторона BC лежит против тупого угла, косинус которого отрицателен. Следовательно, из теоремы косинусов получим, что

$$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2 - 2BM \cdot MC \cdot \cos 100°},$$

$$AB = \sqrt{BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot AM \cdot \cos 80°}.$$

Следовательно, $BC > AB$.



4. О т в е т: 1.

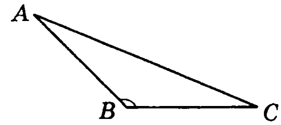
Решение. Вначале проверим, существует ли треугольник с такими сторонами. Стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника $8 + 12 > 14$. Из теоремы косинусов следует, что если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, тупой, если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, острый. Так как $15^2 + 8^2 > 16^2$, то треугольник — остроугольный.

5. О т в е т: 2.

Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1, и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, то $x_1 = 2a_1 - \frac{1}{7}b_1 = -2 - 2 = -4$; $x_2 = 2a_2 - \frac{1}{7}b_2 = 4 - 1 = 3$. Таким образом $\bar{c}(-4; 3)$.

Часть 2

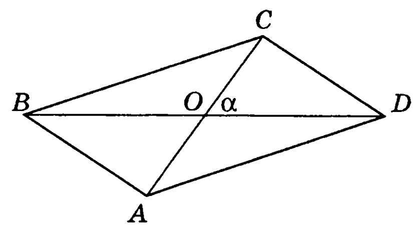
6. Ответ: $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см.



Решение. Так как треугольник ABC — равнобедренный и тупоугольный, то в силу теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника его основание является наибольшей стороной. Обозначим $\angle ABC$ буквой α. В силу теоремы косинусов:

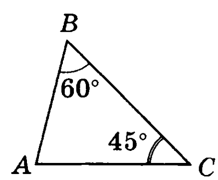
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha =$$
$$= AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos(\pi - \alpha);$$
$$AC^2 = 64 + 64 + 128 \cdot \cos 45^\circ = 128 + 128 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 128 + 64\sqrt{2} = 64(2+\sqrt{2}),\ AC = 8\sqrt{2+\sqrt{2}}\ (\text{см}).$$

7. Ответ: 30°.



Решение. По условию в параллелограмме $ABCD$ $AD = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $BD = \sqrt{3}$ и $AC = 1$. Диагональ параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим треугольник AOD, стороны которого равны $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и $\frac{1}{2}$ см и удовлетворяют неравенству треугольника. Обозначим $\angle AOD = \alpha$. По теореме косинусов $AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos\alpha$; $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, угол, лежащий против стороны AD, — тупой и равен 150°. Значит, острый угол между диагоналями параллелограмма равен 30°.

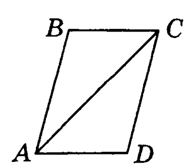
8. Ответ: $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см.



Решение. Для определенности пусть стороной, противолежащей углу в 45°, будет сторона AB, тогда в треугольнике ABC $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$ и сторона AC равна 8 см. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$AB = AC\sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}\ (\text{см}).$$

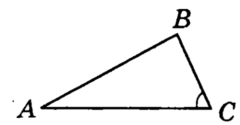
9. Ответ: $\sqrt{2}$.



Решение. Из условия задачи и свойств углов при параллельных прямых следует, что в треугольнике ABC углы, прилежащие к стороне AC, равны 45° и 30°. Из теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника следует, что против угла в 45° лежит большая сторона, пусть это будет сторона AB. По теореме синусов $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{2}$.

10. О т в е т: 1.

Решение. По теореме синусов можно найти синус угла BAC. Так как $BC < AB$, то $\angle BAC$ — острый, т.е. угол B, а значит, и стороны AC, определяются однозначно.



11. О т в е т: 90°.

Решение. Перемножим: $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \frac{\bar{a}^2-\bar{b}^2}{4} = \frac{|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2}{4}$. По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника, значит, модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами равнобедренного треугольника. Следовательно, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен 90°.

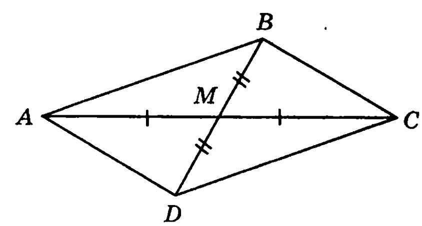
12. О т в е т: 0°.

Решение. Обозначим угол между векторами α. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$. По условию $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, следовательно, $\cos\alpha = 1$. Значит, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен нулю.

Часть 3

13. О т в е т: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

Решение. Пусть для определенности в треугольнике ABC: $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $AC = 8$ см. Тогда угол ABC — наибольший, так как лежит напротив большей стороны AC, равной 8 см. Проведем медиану BM и отложим на ее продолжении отрезок MD, равный BM. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его диагонали AC и BD пересекаются в точке M и делятся ее пополам. В параллелограмме $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Поскольку $BD = 2BM$, получим:

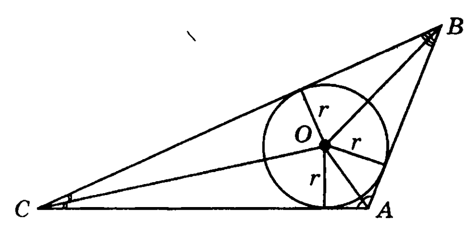


$$BM = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{50 + 32 - 64}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (см).}$$

14. О т в е т: центр вписанной в треугольник окружности ближе к вершине A.

Решение. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, значит, точка O является точкой пересечения биссектрис треугольника.

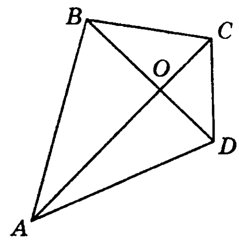
Рассмотрим треугольник AOB. Так как $\angle A > \angle B$, то угол OAB, равный $\frac{1}{2}\angle A$, больше угла OBA, равного $\frac{1}{2}\angle B$.



Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $OB > OA$. Аналогично, из треугольника AOC получим, что $OC > OA$.

Из того, что $OB > OA$ и $OC > OA$ следует, что OA — наименьшее из расстояний от центра вписанной окружности до вершин треугольника.

15. Решение. Так как $AC \perp BD$, то треугольники AOB, AOD, BOC и DOC — прямоугольные. Поэтому по теореме Пифагора:



$AB^2 = AO^2 + BO^2$, $BC^2 = OC^2 + BO^2$,

$CD^2 = OC^2 + OD^2$, $AD^2 = OC^2 + OD^2$.

Отсюда $AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + OC^2 + OD^2$ и

$BC^2 + AD^2 = BO^2 + OC^2 + AO^2 + OD^2$,

т.е. $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Вариант 2

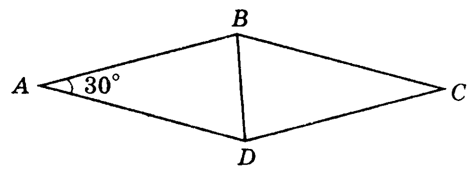
Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. По определению $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°$, $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30°$. Следовательно, $b \cdot \sin 120° + b \cdot \cos 150° + b \cdot \sin 90° = b \cdot \sin 60° + b \cdot (-\cos 30°) + b \cdot \sin 90° = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b = b \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b = b.$

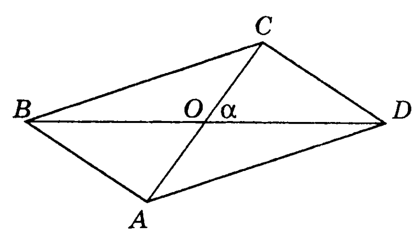
2. Ответ: 4.

Решение. По условию в ромбе $ABCD$ $\angle ABC = 150°$, значит, $\angle BAD = 30°$. В ромбе все стороны равны, т. е. $AB = AD$. Отсюда $S_{ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD\sin 30°$, а $S_{ABCD} = AB \cdot AD\sin 30° = 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 18$ (см^2).



3. Ответ: 3.

Решение. В треугольниках BOC и COD: $BO = OD$, OC — общая, а углы BOC и COD дополняют друг друга до 180°. Сторона BC лежит против тупого угла BOC, косинус которого отрицателен. Пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда из теоремы косинусов следует, что $BC = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos\alpha}$; $CD = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos(180 - \alpha)}$. Следовательно, $BC > CD$.



4. Ответ: 2.

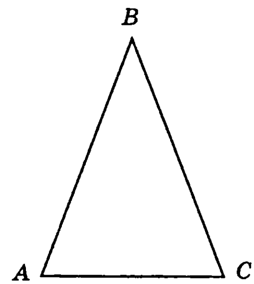
Решение. Вначале проверим, существует ли треугольник с такими сторонами. Стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника $0{,}3 + 0{,}4 > 0{,}5$. Из теоремы косинусов следует, что если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, тупой, если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, острый. Так как $0{,}3^2 + 0{,}4^2 = 0{,}5^2$, то здесь применима теорема, обратная теореме Пифагора, т.е. треугольник — прямоугольный.

5. О т в е т: 1.

Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1 и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, то $x_1 = b_1 - \frac{1}{2}a_1 = 1 + 1 = 2$; $x_2 = b_2 - \frac{1}{2}a_2 = -0{,}5$. Таким образом $\bar{c}(2; -0{,}5)$.

Часть 2

6. О т в е т: $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (см).



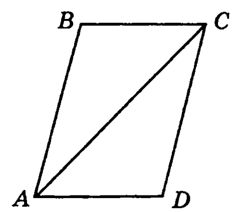
Решение. В силу теоремы косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$. Так как $135° = 180° - 45°$, то

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(180° - 45°)$;

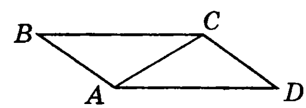
$AC^2 = 64 + 64 + 2 \cdot 64 \cdot \cos 45° = 128 + 2 \cdot 64 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 128 + 64\sqrt{2} = 64(2 + \sqrt{2})$, $AC = 8\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (см).

7. О т в е т: $30°$.



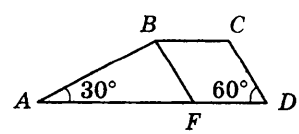
Решение. Данная диагональ и две стороны параллелограмма удовлетворяют неравенству треугольника. В силу теоремы косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$; $7 = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos\alpha$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, угол, лежащий против данной диагонали, — тупой и равен $150°$. Значит, меньший угол параллелограмма равен $30°$.

8. О т в е т: $4\sqrt{\frac{3}{2}}$ (см).



Решение. По условию $\angle BAC = 60°$ и $\angle CAD = 45°$. Так как в параллелограмме $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, то $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Таким образом, в треугольнике BAC $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$ и сторона AB равна на 4 см, как лежащая против меньшего угла. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$ (см).

9. О т в е т: $\sqrt{3}$.

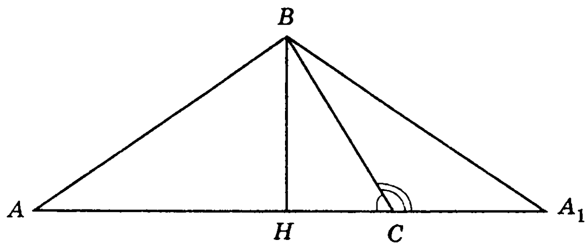


Решение. В трапеции $ABCD$ проведем прямую BF, параллельную CD. Углы BFA и CDA равны как накрест лежащие при параллельных прямых BF и CD и секущей AD. Треугольник ABF — прямоугольный, так как $\angle BAC = 30°$, а $\angle BFA = 60°$. По теореме синусов $\frac{AB}{BF} = \frac{AB}{CD} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

10. О т в е т: два решения.

Решение. Применим теорему синусов $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, $\frac{8}{0{,}4} = \frac{16}{\sin A}$, $\sin A = 0{,}8$. Существуют два угла с таким синусом, острый и тупой.

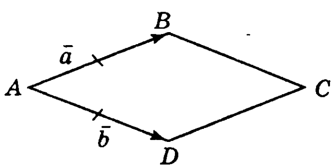
Соответствующий тупоугольный треугольник получается из остроугольного, данного на чертеже, если отразить сторону AB относительно высоты BH.

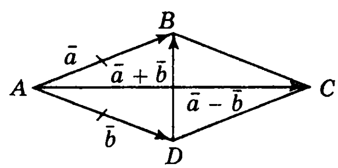


11. О т в е т: 90°.

Решение. Перемножим: $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \frac{\bar{a}^2-\bar{b}^2}{4} = \frac{|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2}{4}$.

По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба, то модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами ромба. Значит, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов следует, что если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен 90°.



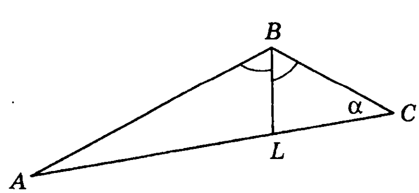


12. О т в е т: 3.

Решение. По условию векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, т. е. угол между ними равен 0°. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$, $\cos 0° = 1$, Значит, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = 3 \cdot 1 = 3$.

Часть 3

13. О т в е т: 4 см.



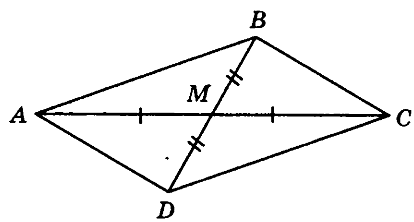
Решение. Пусть для определенности в треугольнике ABC: $AB = 6$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$. Сторона AC — наибольшая, так как она лежит против тупого угла. По теореме косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120° = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot (-0{,}5) = 252$; $AC = 6\sqrt{7}$ (см).

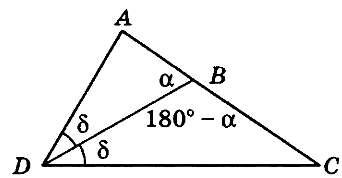
Проведем к стороне AC биссектрису BL. По свойству биссектрисы угла треугольника: $\frac{AL}{CL} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, поэтому $CL = 2AL$. Точка L принадлежит стороне AC, значит, $AC = AL + CL = 3CL$, $CL = 2\sqrt{7}$ (см). Обозначим угол BAC буквой α. По теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{36 + 252 - 144}{2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. Из треугольника ABL по теореме косинусов находим:

$$BL^2 = AB^2 + AL^2 - 2 \cdot AB \cdot AL \cdot \cos\alpha = 36 + 28 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} = 16;\ BL = 4 \text{ (см)}.$$

14. Ответ: 60°.



Решение. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 10 см и 6 см соответственно, точка M — середина стороны AC, медиана BM равна 7 см. Продолжим медиану BM на ее длину и соединим получившуюся точку D с вершинами A и C. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его диагонали AC и BD пересекаются в точке M и делятся ее пополам. Рассмотрим треугольник ABD: $AD = BC = 6$ см, $AB = 10$ см и $BD = 14$ см, Из треугольника ABD, используя теорему косинусов, находим: $\cos\angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{100 + 36 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 6} = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle BAD = 120°$, тогда $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 60°$, так как эти углы прилегают к одной стороне параллелограмма.



15. Решение Обозначим $\angle ADC = 2\delta$, а $\angle ABD = \alpha$. Тогда $\angle ADB = \angle BDC$, так как DB — биссектриса ADC; а $\angle CBD = 180° - \alpha$. Теперь применим теорему синусов к треугольникам ADB и BDC: $\frac{AB}{\sin\delta} = \frac{AD}{\sin\alpha}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$; $\frac{BC}{\sin\delta} = \frac{BD}{\sin(180° - \alpha)}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$; отсюда $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

ТЕСТ 2

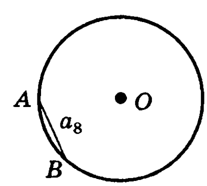
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 1.

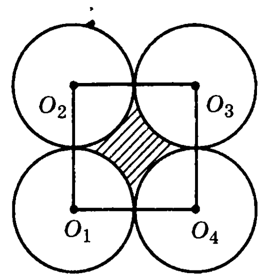
Решение. Так как многоугольник — выпуклый, то по теореме о сумме углов выпуклого многоугольника сумма его внутренних углов равна $180°(n - 2)$, а сумма его внешних углов равна 360°, то по условию: $180° \cdot (n - 2) = 180°$; $180° \cdot n - 360° = 180°$; $180° \cdot n = 540°$; $n = 3$.

2. Ответ: 2.



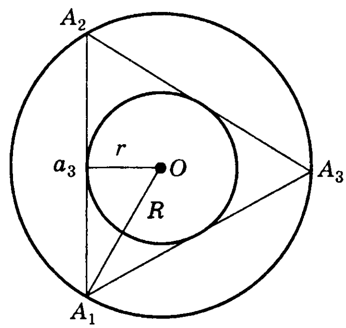
Решение. Так как хорда AB является стороной правильного восьмиугольника, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен 45°. Используем формулу $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot 45°$, получаем $l = \frac{5\pi}{4}$ (см).

3. Ответ: 4.



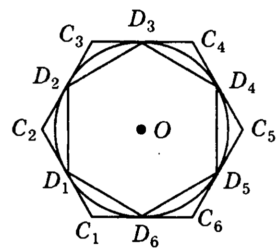
Решение. Соединим центры окружностей и получим квадрат $O_1O_2O_3O_4$, сторона которого равна 8 см, так как равные окружности попарно касаются внешним образом, и значит, расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади квадрата и четырех круговых секторов, каждый из которых соответствует центральному углу, равному $90°$. Значит, в сумме они составляют круг радиуса 4 (см). Площадь квадрата $S_{\text{квадрат}} = a^2$, равна площадь круга $S_{\text{круг}} = \pi R^2$. Таким образом, $S = S_{\text{квадрат}} - S_{\text{круг}} = a^2 - \pi R^2 = 8^2 - 4^2\pi = 16\,(4 - \pi)$.

4. Ответ: 3.



Решение. Сторона правильного треугольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_3 = 2r\sqrt{3}$. Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_3 = R\sqrt{3}$. Отсюда $2r\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, $R = 2r = 6$ (см).

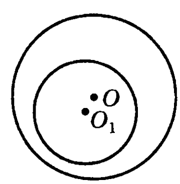
5. Ответ: 4.



Решение. Сторона шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{\text{впис}} = R$; а сторона шестиугольника, описанного около этой окружности, равна $a_{\text{опис}} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Следовательно, отношение сторон вписанного и описанного шестиугольников $\dfrac{a_{\text{впис}}}{a_{\text{опис}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

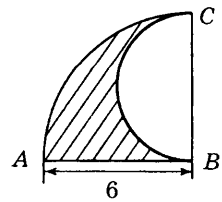
Часть 2

6. Ответ: $3\sqrt{2}$ см.



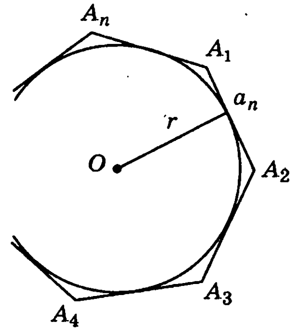
Решение. Площадь круга, ограниченного окружностью радиуса r, равна $S = r^2$, а площадь фигуры, ограниченной окружностями радиусов R и r, равна разности площади круга, ограниченного окружностью радиуса R, и площади круга, ограниченного окружностью радиуса r, т. е. $S = \pi R^2 - \pi r^2$. По условию $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi r^2$. Отсюда, $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см).

7. Ответ: $6\,(\pi + 1)$.



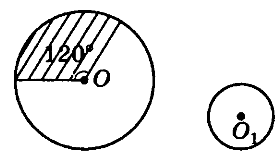
Решение. Длина границы заштрихованной фигуры равна сумме длин полуокружности BC радиуса $r = 3$, дуги четверти окружности AC радиуса $R = 6$, градусная мера которой равно $90°$, и радиуса окружности AB, равного 6. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна $L = \dfrac{1}{2}(2r) + \dfrac{1}{4}(2R) + AB = 3\pi + 3\pi + 6 = 6\pi + 6 = 6\,(\pi + 1)$.

8. Ответ: $60°$.



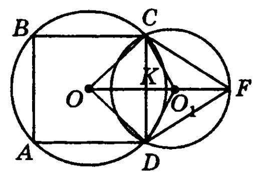
Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. Отсюда, $6 = 6\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, $\mathrm{tg}\frac{180°}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{180°}{n} = 30°$. Следовательно, центральный угол правильного n-угольника равен $60°$.

9. Ответ: $1 : 3$.



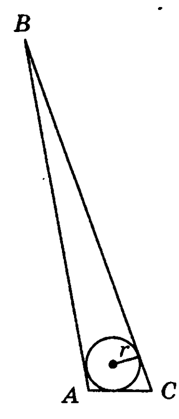
Решение. Длина дуги окружности с центром в точке O, соответствующая $120°$, равна $l = \frac{\pi R}{180°}n = \frac{\pi R}{180°}120° = \frac{2\pi R}{3}$. Длина окружности с центром в точке O_1 равна $2\pi r$. Отсюда $2\pi r = \frac{2\pi R}{3}$. Следовательно, $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$, т.е. $r : R = 1 : 3$.

10. Ответ: $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ (см).



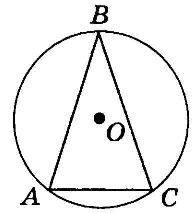
Решение. Соединим точки C и D с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OCO_1 и ODO_1 (OC и OD равны, как радиусы окружности с центром в точке O, CO_1 и DO_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде CD и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров OO_1 и хорды CD буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда CD является стороной вписанного квадрата и одновременно является стороной вписанного равностороннего треугольника CFD для окружности с центром в точке O_1, значит, $CD = 3$ (см). Треугольник COD — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $OK = CK = \frac{3}{2}$ (см). В равностороннем треугольнике CFD высота FK (одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $FK = CF \cdot \cos 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения медиан, следовательно, $O_1K = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ (см).

11. Ответ: $\frac{4}{3}$ см.



Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона:
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, полупериметр треугольника $p = 27$ (см). $S = \sqrt{27 \cdot (27-25) \cdot (27-26) \cdot (27-3)} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24} = 36$ (см^2).
С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в него окружности. Значит, $27r = 36$, отсюда $r = \frac{4}{3}$ (см).

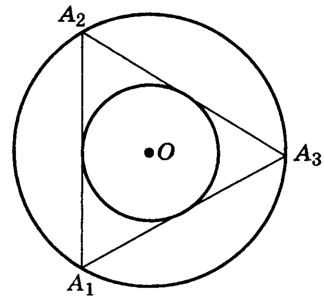
12. О т в е т: 16,9 см.



Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 25$ (см). $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{25\cdot(25-13)\cdot(25-13)\cdot(25-24)} = \sqrt{25\cdot 12\cdot 12\cdot 1} = 60$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$, отсюда $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13\cdot 13\cdot 24}{4\cdot 60} = 16{,}9$ (см).

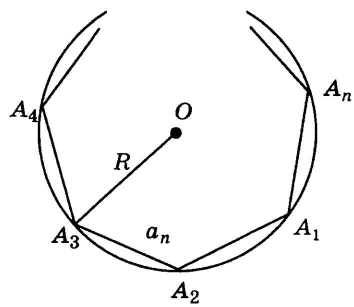
Часть 3

13. О т в е т: 2.



Решение. Площадь кольца, ограниченного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна разности площади круга, ограниченного окружностью, описанной около треугольника, и площади круга, ограниченного окружностью, вписанной в треугольник: $S = S_{\text{опис}} - S_{\text{впис}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi$. Сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса R равна $a_3 = R\sqrt{3}$; а сторона треугольника, описанного около окружности радиуса r, равна $a_3 = 2r\sqrt{3}$. Отсюда $R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$, $R = 2r$. Из полученной формулы для площади кольца $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi$ получаем $R^2 - r^2 = 1$, отсюда $4r^2 - r^2 = 1$, $3r^2 = 1$, $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $a_3 = 2r\sqrt{3} = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 2$.

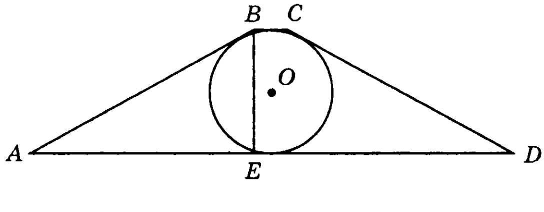
14. О т в е т: $n > 6$.



Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, где $\frac{180^\circ}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. По условию $a_n < R$, т.е. $2R\sin\frac{180^\circ}{n} < R$, следовательно, $\sin\frac{180^\circ}{n} < \frac{1}{2}$. С увеличением острого угла его синус возрастает, поэтому $\frac{180^\circ}{n} < 30^\circ$, т.е. $n > 6$.

15. О т в е т: $\frac{\pi}{8}$.

Решение. В равнобочной трапеции $ABCD$, проведем из вершины B высоту BE, тогда треугольник BAE — прямоугольный, у которого угол BAD равен 30°. Следовательно, по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен 30°, $BE = \frac{1}{2}AB$. С другой стороны, так



как в трапецию $ABCD$ вписана окружность, то $BE = 2R$, значит, $AB = 4R$. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$. Так как трапеция $ABCD$ — равнобочная, то $AB = CD$, следовательно, периметр трапеции $P_{\text{трап}} = 4AB = 16R$. Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$. Следовательно, $\frac{C}{P} = \frac{2\pi R}{16R} = \frac{\pi}{8}$.

Вариант 2

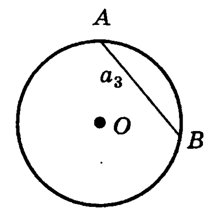
Часть 1

1. Ответ: 3.

Решение. Так как сумма внешнего и внутреннего углов при одной вершине равна 180°, то каждый из его внешних углов равен 15°. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°, тогда многоугольник имеет 360 : 15 = 24 вершины.

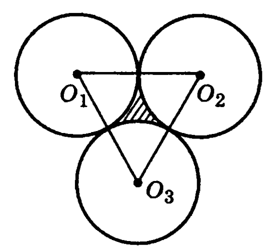
2. Ответ: 3.

Решение. Так как хорда AB является стороной правильного треугольника, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен 120°. Используем формулу $l = \frac{\pi R}{180°}120°$, получаем $l = \frac{10\pi}{3}$ (см).



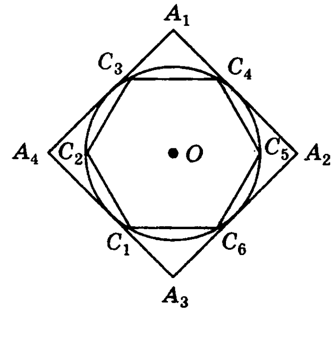
3. Ответ: 1.

Решение. Соединим центры окружностей и получим равносторонний треугольник $O_1O_2O_3$, сторона которого равна 8 см, так как равные окружности попарно касаются внешним образом, и значит, расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади треугольника и трех круговых секторов, каждый из которых соответствует центральному углу, равному 60°. Значит, в сумме они составляют полукруг радиуса 4 см. Площадь равностороннего треугольника равна $S_{\text{треугольник}} = \frac{1}{2}a^2\sin 60°$, площадь полукруга $S_{\text{полукруг}} = \frac{1}{2}\pi R^2$. Таким образом, $S = S_{\text{треугольник}} - S_{\text{полукруг}} =$
$= \frac{1}{2}a^2\sin 60° - \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}64\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}16\pi = 16\sqrt{3} - 8\pi = 8(2\sqrt{3} - \pi)$ (см^2).

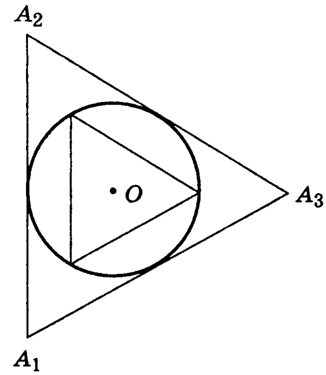


4. Ответ: 2.

Решение. Сторона квадрата (правильного четырехугольника) выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_4 = 2r$. Сторона правильного шестиугольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_6 = R$. Так как окружность одновременно является вписанной в правильный четырехугольник и описанной около правильного шестиугольника, то $R = r$. Отсюда $a_4 = 2r = 2R = 6$ (см).



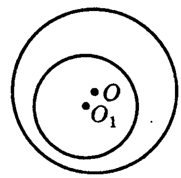
5. Ответ: 3.



Решение. Сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{\text{впис}} = R$, а сторона треугольника, описанного около этой окружности, равна $a_{\text{опис}} = 2r$. Так как окружность одновременно является вписанной в правильный четырехугольник и описанной около правильного шестиугольника, то $R = r$. Следовательно, отношение сторон описанного и вписанного треугольника $\frac{a_{\text{опис}}}{a_{\text{впис}}} = \frac{2R\sqrt{3}}{R\sqrt{3}} = 2$.

Часть 2

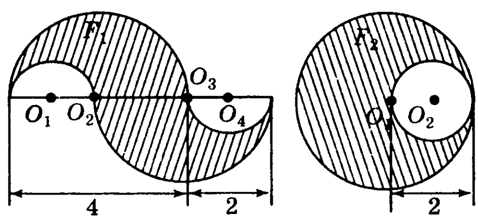
6. Ответ: 3 см.



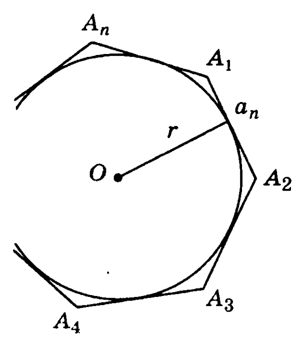
Решение. Площадь круга, ограниченного окружностью радиуса r, равна $S = r^2$, а площадь фигуры, ограниченной окружностями радиусов R и r, равна разности площади круга, ограниченного окружностью радиуса R, и площади круга, ограниченного окружностью радиуса r, т.е. $S = \pi R^2 - \pi r^2$. По условию $\pi R^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$. Отсюда, $\pi R^2 = 4\pi r^2$, $r = \frac{R}{2} = 3$ (см).

7. Ответ: 6π.

Решение. Заметим, что фигура F_2 может быть получена из фигуры F_1, если фигуру F_1 разрезать по прямой O_1O_4 и сложить из полученных частей фигуру F_2. Длина границы заштрихованной фигуры F_2 равна сумме длин окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами $R = 2$ и $r = 1$. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна $L = 2r + + 2R = 2\pi + 4\pi = 6\pi$.

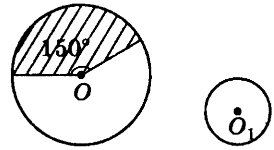


8. Ответ: 90°.



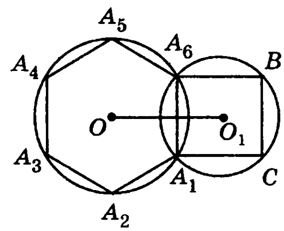
Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_n = = 2R\sin\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. Отсюда, $2 = 2\sqrt{2}\sin\frac{180°}{n}$, $\sin\frac{180°}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{180°}{n} = 45°$. Следовательно, центральный угол правильного n-угольника равен 90°.

9. Ответ: 2,5 см.



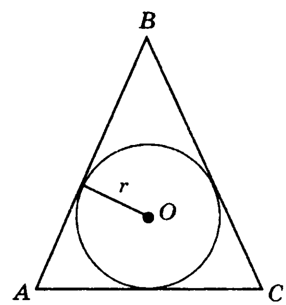
Решение. Длина дуги окружности с центром в точке O, соответствующей центральному углу, равному 150°, равна $L = \frac{\pi R}{180°}n = \frac{\pi 6}{180°}150° = 5\pi$. Длина окружности с центром в точке O_1 равна $l = 2\pi r = 5\pi$. Следовательно, $r = 2{,}5$ (см).

10. Ответ: $3(1 + \sqrt{3})$ см.



Решение. Соединим точки A_1 и A_6 с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OA_1O_1 и OA_6O_1 (OA_1 и OA_6 равны, как радиусы окружности с центром в точке O, A_1O_1 и A_6O_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде A_1A_6 и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров и хорды A_1A_6 буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда A_1A_6 является стороной вписанного правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и одновременно является стороной вписанного квадрата для окружности с центром в точке O_1, значит, сторона квадрата равна 6 см. Треугольник $A_1O_1A_6$ — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $O_1K = 3$ см. В равностороннем треугольнике A_1OA_6 высота OK (одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $OK = OA_6 \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = 3(1 + \sqrt{3})$ (см).

11. Ответ: 5,25 см.

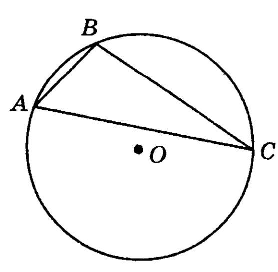


Решение. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то в треугольнике известны три стороны, и площадь треугольника ABC можно найти по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где полупериметр треугольника $p = 32$ (см).

$S = \sqrt{32 \cdot (32-25) \cdot (32-25) \cdot (32-14)} = \sqrt{32 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 18} = 168$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Значит, $32r = 168$, отсюда $r = 5{,}25$ (см).

12. Ответ: 8,125.

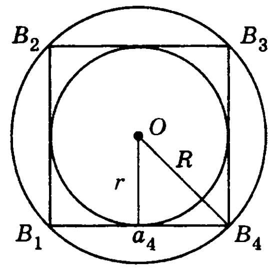


Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 21$ (см).

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$, отсюда $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125$ (см).

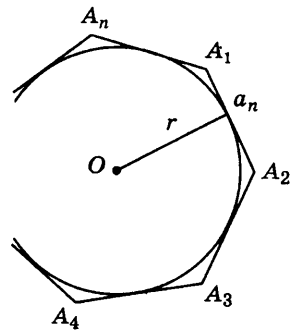
Часть 3

13. Ответ: 2.



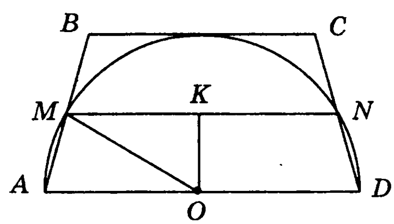
Решение. Площадь кольца, ограниченного окружностью, описанной около правильного четырехугольника, и окружностью, вписанной в него, равна разности площади круга, ограниченного окружностью, описанной около квадрата, и площади круга, ограниченного окружностью, вписанной в квадрат $S = S_{\text{опис}} - S_{\text{впис}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi$. Сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_4 = R\sqrt{2}$; а сторона квадрата, описанного около окружности радиуса r, равна $a_4 = 2r$. Отсюда $R\sqrt{2} = 2r$, $R = r\sqrt{2}$. Из полученной формулы для площади кольца $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi$ получаем $R^2 - r^2 = 1$, $2r^2 - r^2 = r^2 = 1$, $r = 1$. Отсюда $a_3 = 2r = 2$.

14. Ответ: $n \leqslant 4$.



Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. По условию $\frac{1}{2}a_n \geqslant r$, т. е. $r\operatorname{tg}\frac{180°}{n} \geqslant r$, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{180°}{n} \geqslant 1$. С увеличением острого угла его тангенс возрастает, поэтому $\frac{180°}{n} \geqslant 45°$, т.е. $n \leqslant 4$.

15. Ответ: 75° и 105°.



Решение. В трапеции $ABCD$ точки O, M, N и K являются серединами отрезков AD, AB, CD и MN соответственно. Тогда трапеция $AMND$ вписана в данную окружность, следовательно, эта трапеция — равнобокая. Так как отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то и трапеция $ABCD$ — равнобокая. $\angle OKM = 90°$ так как точка K принадлежит радиусу, проведенному в точку касания, следовательно, треугольник OMK является прямоугольным. $OK = \frac{1}{2}r$ так как точка K принадлежит средней линии трапеции, отсюда $OK = \frac{1}{2}OM$. Значит, $\angle KMO = 30°$; $\angle KMO = \angle AOM = 30°$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и MN и секущей OM. А так как $OA = OM$, то $\angle MAO = 75°$. Отсюда получим, что $\angle A = \angle D = 75°$; $\angle B = \angle C = 105°$.

ТЕСТ 3

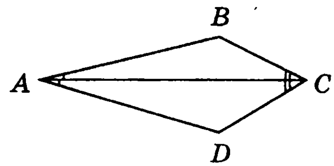
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 2.

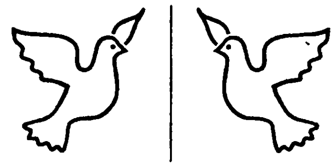
Решение. На рисунке — это четырехугольник 2). Рассмотрим этот четырехугольник и обозначим его вершины $ABCD$. Если провести диагональ AC, то получаем два равных треугольника ABC и ADC по трем сторонам $AB = AD$ и BC и DC (по данным чертежа) и AC (общая).

Значит, $\angle CAB = \angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса $\angle BAD$ и является его осью симметрии, аналогично CA — биссектриса $\angle BCD$ и является его осью симметрии, значит, диагональ AC является осью симметрии четырехугольника $ABCD$.



2. О т в е т: 3.

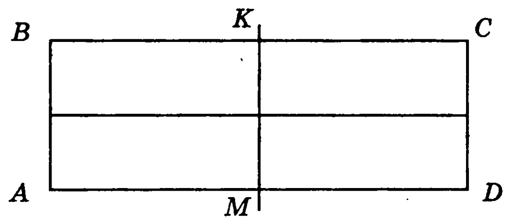
Задание направлено на проверку сформированности пространственного представления. Необходимо по рисунку определить вид движения.



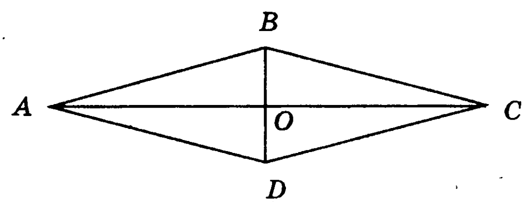
Решение. На рисунке представлена осевая симметрия. Примерное расположение оси указано на рисунке.

3. О т в е т: 4.

Решение. У параллелограмма $ABCD$ при осевой симметрии ось симметрии может походить через середину стороны BC. Это прямая KM. При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC параллелограмма $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В параллелограмме противолежащие стороны равны и параллельны, значит, и $AM = MD$. Следовательно, в параллелограмме $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольник $MKCD$ — прямоугольник, отсюда параллелограмм $ABCD$ также прямоугольник.



а)



б)

Однако, если данный параллелограмм — прямоугольник, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через середины сторон AB и CD, но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является диагональю параллелограмма. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

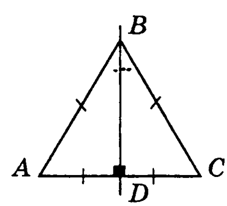
Однако, если данный параллелограмм — ромб, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через вершины A и C, т.е. диагональ AC, но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

Так как по определению квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны, то квадрат имеет четыре оси симметрии. Пришли к противоречию с условием задачи.

Следовательно, такой параллелограмм не существует.

4. О т в е т: 2.

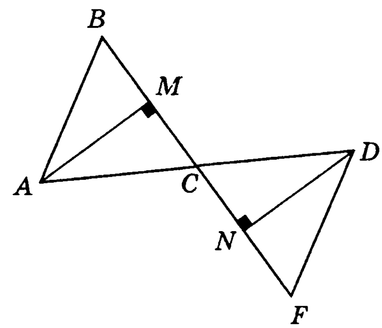
Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т.е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то



вершина A переходит в вершину C, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, $AB = BC$. Аналогично, при рассмотрении симметрии относительно прямой, проходящей через вершину A, доказывается, что стороны AC и AB равны. Значит, в треугольнике ABC все три стороны равны: $AB = BC = AC$ и треугольник ABC — равносторонний. Рассмотрение симметрии относительно прямой, проходящей через вершину C, позволяет проверить доказанное утверждение, т.е. подтвердить, что стороны $AC = BC$. Следовательно, треугольник — равносторонний.

5. О т в е т: 3.

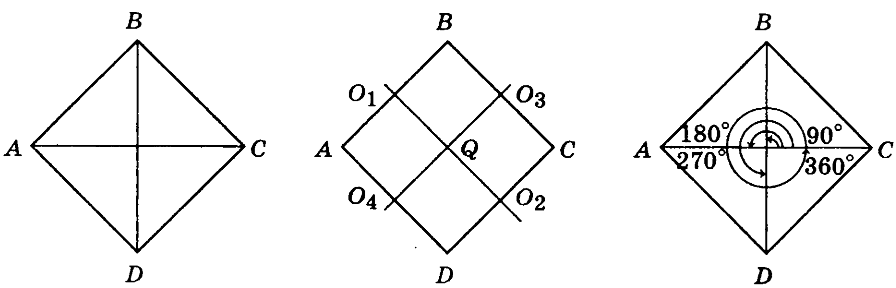
<ins>Решение</ins>. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. В треугольнике ABC проведена высота AM из вершины A к стороне BC, а в треугольнике FDC проведена высота DN из вершины D к стороне FC. Таким образом, к прямой BF проведены два перпендикуляра AM и DN, следовательно, прямые, содержащие высоты AM и DN, параллельны.



Часть 2

6. О т в е т: 6.

<ins>Решение</ins>. Квадрат $ABCD$ переходит сам в себя при симметрии: 1) относительно прямых AC и BD, 2) относительно прямых O_1O_2 и O_3O_4, 3) точки Q пересечения диагоналей, 4) при повороте на $90°\,n$, где n — целое число, относительно центра Q. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра квадрата совпадает с поворотом на $180°$.

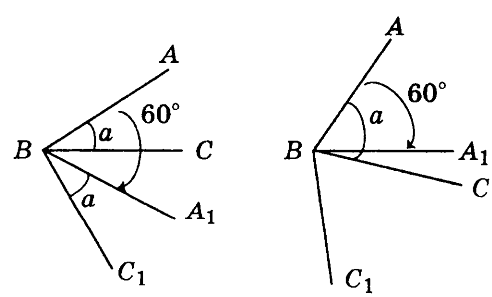


7. О т в е т: $60° + \alpha$.

<ins>Решение</ins>. Возможны два случая: 1) $\alpha < 60°$ и 2) $\alpha > 60°$.

При повороте угла ABC на $60°$ каждый луч, выходящий из точки B поворачивается на угол в $60°$, т.е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

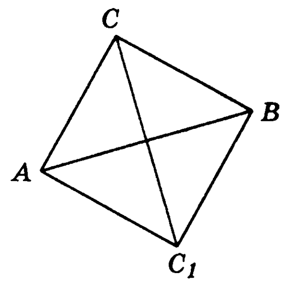
В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$ и $\angle CBA_1 < 60°$. Отсюда следует, что луч BA_1 проходит между сторонами угла $\angle CBC_1$, равного $60°$. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABC + \angle CBA_1 + \angle A_1B_1C_1 = \alpha + 60° - \alpha + \alpha = 60° + \alpha$.



Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC =$

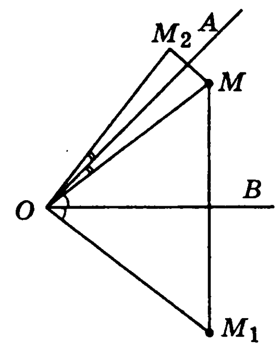
$= \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$ и $\angle A_1BC < \alpha$. Отсюда следует, что луч BC проходит между сторонами угла $\angle A_1BC_1$, равного α. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABA_1 + \angle A_1BC + \angle CBC_1 = 60° + 60° + \alpha - 60° = 60° + \alpha$.

8. Ответ: $12\sqrt{2}$ см.



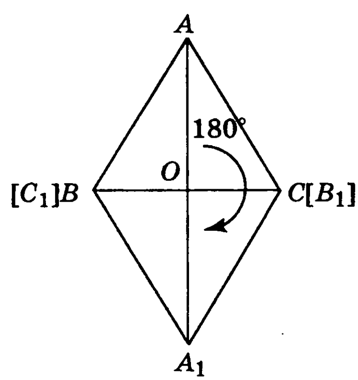
Решение. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки. Так как при симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника ABC относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C перешла в точку C_1, катет AC перешел в равный ему отрезок AC_1, а катет BC — в отрезок BC_1. Таким образом, у четырехугольника $ABCC_1$ все стороны равны и угол ACB равен $90°$, то четырехугольник $ABCC_1$ — квадрат, в котором CC_1 является диагональю. У квадрата диагонали равны, значит $AB = CC_1$. По теореме Пифагора найдем AB как гипотенузу прямоугольного треугольника ABC; $AB = 12\sqrt{2}$ (см), следовательно, $CC_1 = 12\sqrt{2}$ (см).

9. Ответ: $90°$.



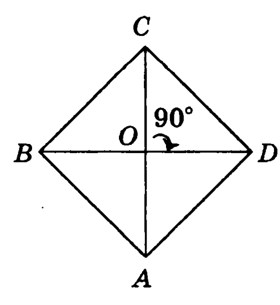
Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла — точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 45° + (\angle AOM + \angle BOM) = 90°$.

10. Ответ: 12 см.



Решение. Пусть точка O — середина стороны BC. При повороте на угол $180°$ около точки O луч OB переходит в луч OB_1, а луч OC переходит в луч OC_1, который дополняет луч OB_1 до прямой, при этом точка O принадлежит это прямой. По свойству поворота отрезок переходит в равный ему отрезок, значит, отрезок OB переходит в равный отрезок OB_1. Поскольку точка O — середина стороны BC, значит, точка B_1 совпадает с точкой C и аналогично точка C_1 совпадает с точкой B. Следовательно, отрезок CC_1 равен отрезку $BC = 12$ (см) как сторона равностороннего треугольника.

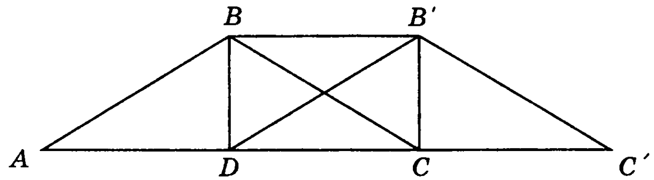
11. Ответ: квадрат.



Решение. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. При повороте около точки O на угол $90°$ луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OD, луч OD — в луч OA и луч OA — в луч OB. Значит, диагонали AC и BD параллелограмма перпендикулярны, $AC \perp BD$. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб. При повороте вершина C должна перейти в вершину D так, что $OC = OD$, т. е. диагонали ромба равны. Следовательно, ромб — квадрат.

12. Ответ: 18 см.

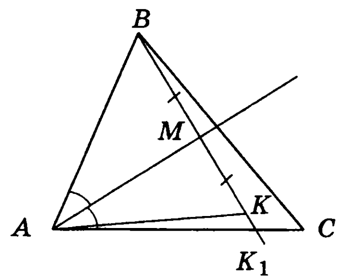
Решение. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а поскольку параллельный перенос — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, вершина B перешла в точку B' и $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того, $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$. Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ — параллелограмм. Точка D — основание медианы BD, значит, $AD = \frac{1}{2}AC = 4$ (см). $P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB = 2(4 + 5) = 18$ (см).

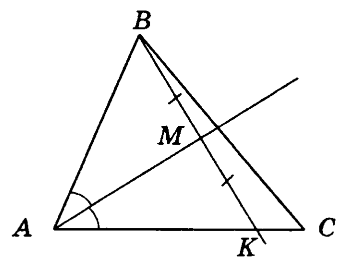


Часть 3

13. Ответ: 2 см.

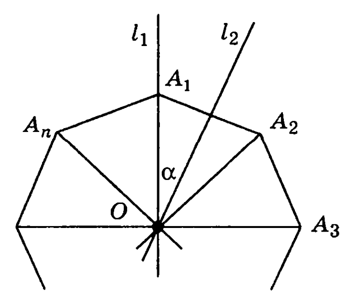
Решение. По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит, отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle KAM = \angle BAM$. Обозначим точку пересечения прямой BK со стороной AC буквой K_1. По условию $\angle BAM = \angle K_1AM$ так как AM — биссектриса $\angle BAC$. Следовательно, $\angle KAM = \angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывания углов. Значит, точки K и K_1 совпадают. Отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC - AB = 5 - 3 = 2$ (см).





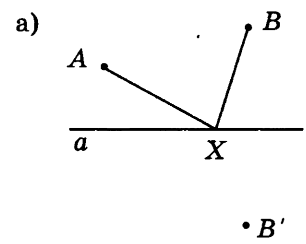
14. Ответ: 12.

Решение. Если число сторон правильного многоугольника n — нечетное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии, которые проходят через одну из вершин и середину противолежащей стороны. Если число сторон правильного многоугольника равно n — четное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии. При этом $\frac{1}{2}n$ осей проходят через противолежащие вершины и $\frac{1}{2}n$ осей проходят через середины противолежащих сторон.

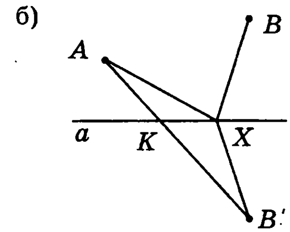


В обоих случаях l_1 — первая из соседних осей, которая проходит через вершину A_1, и l_2 — вторая из соседних осей, которая проходит через середину стороны A_1A_2. Треугольник A_1OA_2 — равнобедренный, так как данный многоугольник — правильный. Прямая l_2 — проходит через середину стороны A_1A_2 и перпендикулярна ей, значит, луч l_2 является биссектрисой угла A_1OA_2 равнобедренного треугольника A_1OA_2. По условию $\angle l_1 l_2 = 15°$, следовательно, $\angle A_1OA_2 = 30°$ и имеет 12 сторон ($n = 360° : 30° = 12$).

15.



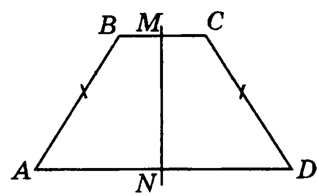
Решение. Предположим, что задача решена и остановка находится в некоторой точке X (рис. а). Значит, надо минимизировать сумму $AX + XB$. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. б). По определению осевой симметрии $BX = B'X$. Поэтому $AX + XB = AX + XB'$. Сумма $AX + XB'$ будет наименьшей в том случае, когда точка X является точкой пересечения отрезка AB' с прямой a. Соединим точки A и B'. Отрезок AB' пересекает прямую a в точке K (рис. б). Точка K и дает решение задачи.



Вариант 2

Часть 1

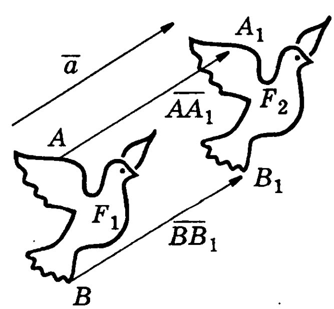
1. Ответ: 3.



Решение. На рисунке — это трапеция 3). Рассмотрим эту трапецию и обозначим ее вершины $ABCD$. Проведем прямую NM, проходящую через середину стороны BC и перпендикулярную ей. Тогда прямая NM перпендикулярна и стороне AD, так как по данным чертежа BC и AD — основания трапеции, значит, $BC \parallel AD$. Рассмотрим симметрию относительно этой прямой.

Так как $BM = MC$, то вершина B переходит в вершину C, по данным чертежа $AB = CD$, значит, отрезок AB переходит в отрезок CD, следовательно, вершина A переходит в вершину D. Значит, трапеция $ABCD$ при симметрии относительно прямой NM переходит сама в себя и прямая NM — ее ось симметрии.

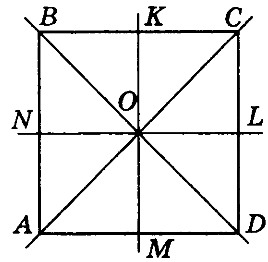
2. Ответ: 4.



Решение этой задачи опирается на рисунок. Точка A фигуры F_1 отображается в точку A_1 фигуры F_2, а точка B фигуры F_1 отображается в точку B_1 фигуры F_2 так, что $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Таким образом, каждая точка фигуры F_1 отображается в точку фигуры F_2, передвигаясь по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Следовательно, движение, данное на рисунке, является параллельным переносом на вектор $\bar{a}$.

3. Ответ: 3.

Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина параллелограмма должна перейти в другую его вершину. Так как у параллелограмма четыре вершины, то две вершины параллелограмма должны перейти в две другие вершины параллелограмма. Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является диагональю параллелограмма. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.



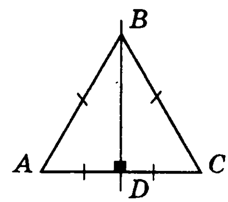
При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC ромба $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В ромбе все стороны равны, а противолежащие стороны параллельны, значит, $KM \perp AD$ и $AM = MD$. Следовательно, в ромбе $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. Отсюда отрезок AB переходит в равный ему отрезок CD. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольник $MKCD$ — прямоугольник, отсюда ромб $ABCD$ — квадрат.

Рассмотрение симметрии ромба $ABCD$ относительно прямой NL, проходящей через середину стороны AD приводит к тому же результату, а именно ромб $ABCD$ — квадрат.

Следовательно, если параллелограмм имеет четыре оси симметрии, то он — квадрат.

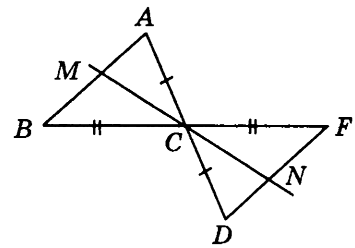
4. Ответ: 3.

Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т. е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то вершина A переходит в вершину C, при этом, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.



5. Ответ: 4.

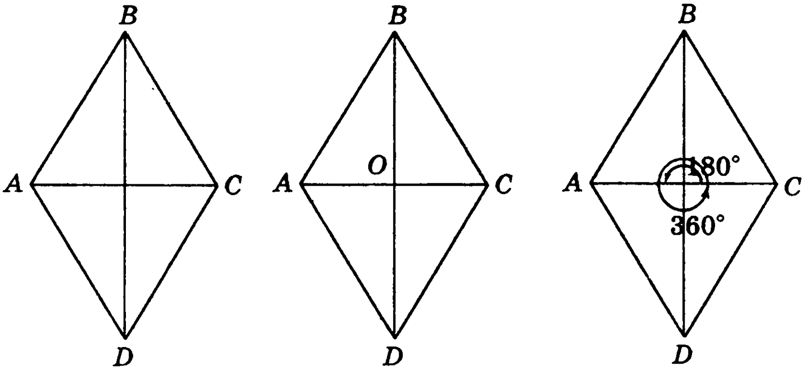
Решение. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. Так как точка C принадлежит и прямой AD и прямой BF, значит, прямые AD и BF пересекаются в точке C. Следовательно, углы ACB и FCD — вертикальные. В треугольнике ABC отрезок CM является биссектрисой угла ACB, а в треугольнике FDC отрезок CN является биссектрисой угла FCD. Известно, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, значит, прямые, содержащие биссектрисы CM и CN, совпадают.



Часть 2

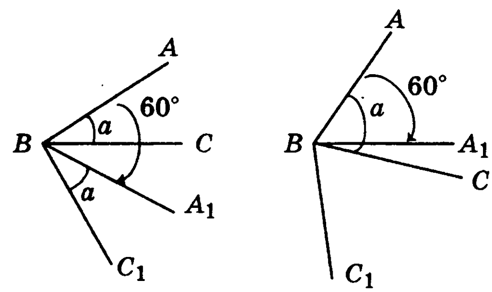
6. Ответ: 4.

Решение. Ромб $ABCD$ переходит сам в себя при осевой симметрии относительно прямых AC и BD, при центральной симметрии относительно точки O, при повороте на $180° n$, где n — целое число, относительно центра O. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра ромба совпадает с поворотом на $180°$.



7. Ответ: $60° + \alpha$.

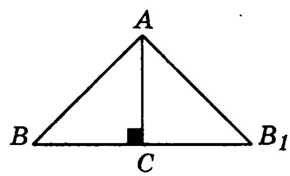
Решение. Возможны два случая: 1) $\alpha < 60°$ и 2) $\alpha > 60°$.



При повороте угла ABC на $60°$ каждый луч, выходящий из точки B поворачивается на угол в $60°$, т.е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

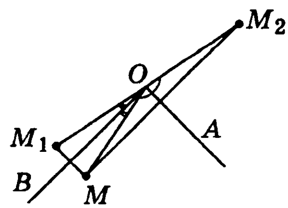
В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$. Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC = \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$.

8. Ответ: $7\sqrt{2}$ см.



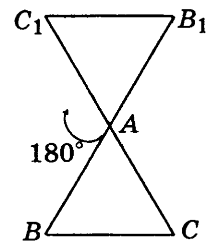
Решение. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки, а углы — в равные им углы. При симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника AC относительно прямой, содержащей его катет AC, вершина B перешла в точку B_1, значит, катет BC перешел в равный ему отрезок CB_1, а угол BAC — в равный ему угол B_1AC, катет AC перешел сам в себя. Таким образом, у треугольника BAB_1 угол BAB_1 — прямой, стороны AB и AB_1 равны, значит треугольник BAB_1 — прямоугольный и равнобедренный. По теореме Пифагора найдем BB_1 как гипотенузу прямоугольного треугольника BAB_1; $BB_1 = \sqrt{2AB^2} = 7\sqrt{2}$ (см).

9. Ответ: $180°$.



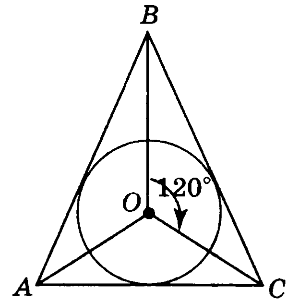
Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла — точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 90° + (\angle AOM + \angle BOM) = 90° + 90° = 180°$.

10. Ответ: 180°.



Решение. При повороте около вершины A вершина A переходит сама в себя, а вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1, при этом расстояния между точками сохраняются. Значит, $AB = AB_1$, $AC = AC_1$. При повороте на угол 180° вокруг вершины A, луч AC переходит в луч AC_1, который дополняет луч AC до прямой, при этом точка A принадлежит отрезку CC_1. Таким образом, $CC_1 = AC + AC_1 = 2\,AC = 24$ (см).

11. Ответ: равносторонний.

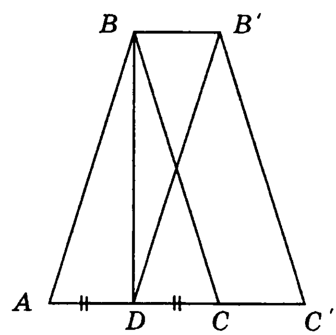


Решение. При повороте около точки O на угол 120° луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OA и луч OA — в луч OB. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника. Обозначим углы треугольника ABC: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Тогда в треугольнике BOC в силу теоремы о сумме углов треугольника $120° + \beta + \gamma = 180°$, отсюда, $\beta + \gamma = 60°$. Из треугольника AOC получим $\alpha + \gamma = 60°$, а из треугольника AOB получим $\alpha + \beta = 60°$. Значит:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 60°, \\ \beta + \gamma = 60°, \\ \alpha + \gamma = 60°, \end{cases} \quad \alpha = 60° - \beta,\ 60° - \beta + \gamma = 60°,\ \beta = \gamma.$$

Аналогично, получаем $\alpha = \beta$ и $\alpha = \gamma$. Таким образом в треугольнике ABC все углы равны, следовательно, треугольник — равносторонний.

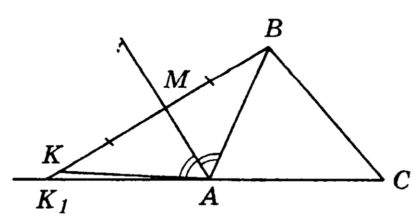
12. Ответ: 18 см.



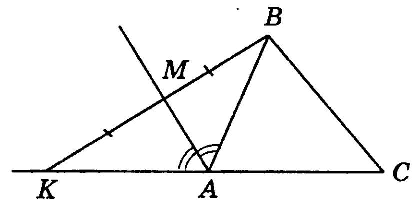
Решение. Точка D — середина стороны AC, так как отрезок DB — медиана треугольника ABC. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а поскольку параллельный перенос — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, вершина B перешла в точку B' и при этом $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того, $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$. Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ параллелограмм. Треугольник ABC — равносторонний, точка D — середина стороны AC, значит, $AD = AC = 3$ (см). $P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB = 2(3 + 6) = 18$ (см).

Часть 3

13. Ответ: 8 см.

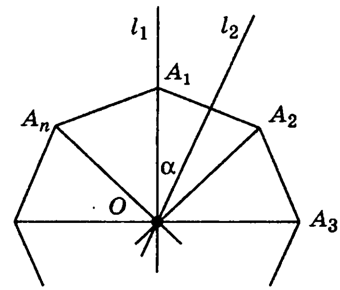


Решение. По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит, отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Обозначим точку пересечения прямой BK с прямой, содержащей сторону AC, как K_1. По



условию $\angle BAM = \angle K_1AM$, так как AM — биссектриса угла, смежного с углом BAC. Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывая углов. Значит, точки K и K_1 совпадают. Отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC + AB = 5 + 3 = 8$ (см).

14. Ответ: 9.

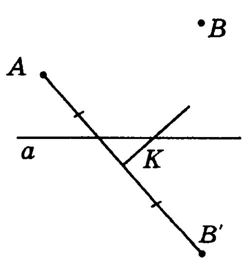


Решение. Если число сторон правильного многоугольника n — нечетное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии, которые проходят через одну из вершин и середину противолежащей стороны. Если число сторон правильного многоугольника равно n — четное, то такой многоугольник имеет n осей симметрии. При этом $\frac{1}{2}n$ осей проходят через противолежащие вершины и $\frac{1}{2}n$ осей проходят через середины противолежащих сторон.

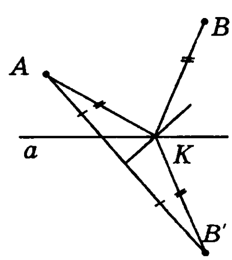
В обоих случаях l_1 — первая из соседних осей, которая проходит через вершину A_1, и l_2 — вторая из соседних осей, которая проходит через середину стороны A_1A_2. Треугольник A_1OA_2 — равнобедренный, так как данный многоугольник — правильный. Прямая l_2 — проходит через середину стороны A_1A_2 и перпендикулярна ей, значит луч l_2 является биссектрисой угла A_1OA_2 равнобедренного треугольника A_1OA_2. По условию $\angle l_1l_2 = 20°$, следовательно, $\angle A_1OA_2 = 40°$ и имеет 12 сторон ($n = 360° : 40 = 9$).

15.

Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. а). Соединим точки A и B' (рис. б). Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB', который пересекает прямую a в точке K (рис. б). Соединим точку K с точками A и B' (рис. б). По свойству серединного перпендикуляра $AK = KB'$, а по свойству осевой симметрии $KB' = BK$, следовательно, $AK = BK$. Точка K и дает решение задачи.



а)



б)

Учебник «Геометрия. 7–9» А.В. Погорелова

ТЕСТ 1

Вариант 1

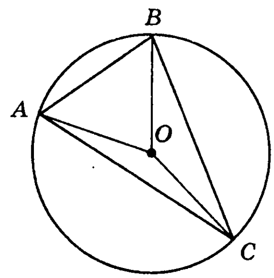
Часть 1

1. Ответ: 1.

Решение. По теореме о вписанном угле центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Значит, центральный угол равен $150°$, а вписанной угол, опирающийся на ту же дугу, равен $75°$.

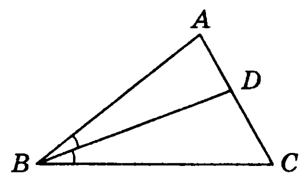
2. Ответ: 2.

Решение. Если сторона треугольника видна из центра описанной окружности под углом α, то противолежащий ей угол равен $\frac{\alpha}{2}$, так как эти центральный и вписанный углы опираются на одну и ту же дугу. Наибольший центральный угол равен $140°$, значит наибольший вписанный угол равен $70°$.



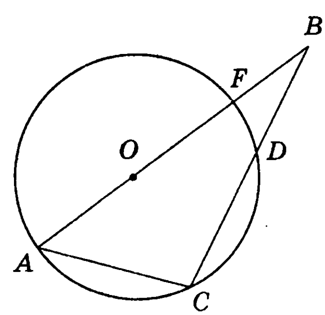
3. Ответ: 4.

Решение. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$; $\frac{3}{AB} = \frac{5}{10}$; $5 \cdot AB = 3 \cdot 10$; $AB = 6$ (см).



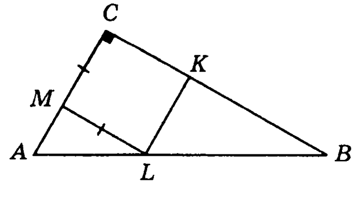
4. Ответ: 1.

Решение. По теореме о пропорциональности отрезков секущих к окружности $BF \cdot BA = BD \cdot BC$. Обозначим BF буквой x, $x \cdot 15 = 5 \cdot 12$, $x = 4$, $BF = 4$ (см). Отрезок AB равен сумме отрезков AF и BF, где AF — диаметр, отсюда $AF = AB - BF = 11$ (см). Значит, радиус окружности равен 5,5 (см).



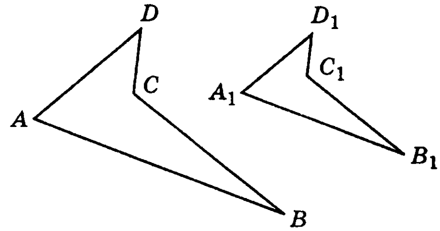
5. Ответ: 3.

Решение. Прямоугольные треугольники ABC и LBK ($CMLK$ — квадрат) подобны ($\angle B$ — общий, $LK \parallel AC$). Отсюда $\frac{AC}{LK} = \frac{BC}{BK}$; $\frac{AC}{4} = \frac{12}{8}$; $AC = \frac{12 \cdot 4}{8} = 6$ (см); $AC = 6$ см.



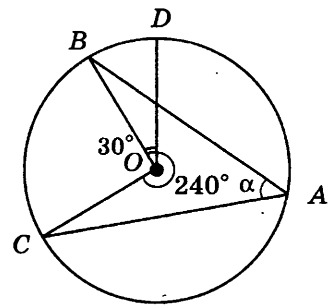
Часть 2

6. Ответ: 1,5.



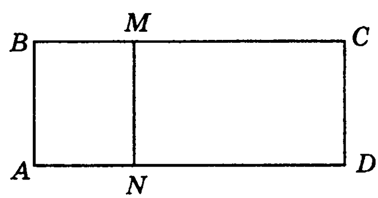
Решение. Так как четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подобны, то $AB = kA_1B_1$, где k — коэффициент подобия. Отсюда $k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{12}{8} = 1{,}5$.

7. Ответ: 45°.



Решение. Угол BOC является центральным по отношению к вписанному углу α. Угол, опирающийся на дугу CBD, является дополнительным углу, опирающемуся на дугу DAC, значит, его градусная мера равна $\angle COD = 360° - 240° = 120°$. Угол COD равен сумме углов COB и BOD, отсюда $\angle COB = \angle COD - \angle BOD = 120° - 30° = 90°$. Следовательно, $\alpha = 45°$.

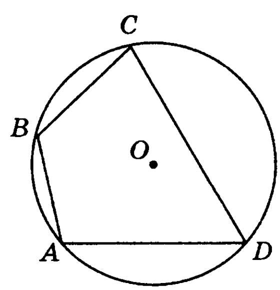
8. Ответ: 12 см.



Решение. Отрезок, который разбивает прямоугольник на два подобных прямоугольника, может быть параллелен только меньшей стороне исходного прямоугольника, иначе у двух подобных прямоугольников большие стороны были бы равны, что невозможно. Так как четырехугольники $ABMN$ и $NMCD$ подобны по условию, то $\frac{AB}{AN} = \frac{ND}{NM}$.

Обозначим, $AN = x$, $\frac{6}{x} = \frac{15 - x}{6}$, $x^2 - 15x + 36 = 0$. Отсюда $x = 3$, $AN = 3$ (см). Точка принадлежит отрезку AD, значит, $AD = AN + ND$; $ND = AD - AN = 15 - 3 = 12$ (см).

9. Ответ: 65°.

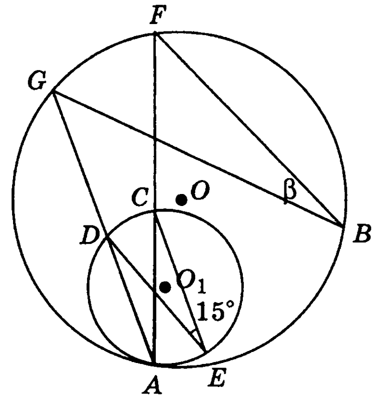


Решение. Так как вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, то все его углы вписанные. Угол BCD опирается на дугу DAB, равную сумме дуг DA и AB, $\smile DAB = \smile DA + \smile AB = 97° + 74° = 171°$. Угол DAB опирается на дугу, дополняющую дугу BAD до 360°, т. е. дугу BCD, равную 189°.

Угол ADC опирается на дугу ABC, равную сумме дуг AB и BC, $\smile ABC = \smile AB + \smile BC = 56° + 74° = 130°$. Угол ABC опирается на дугу, дополняющую дугу ABC до 360°, т.е. дугу ADC, равную 230°. Таким образом, на наименьшую дугу ADC, равную 130°, опирается $\angle ADC$, следовательно, в силу теоремы о вписанном угле треугольника $\angle ADC = 65°$.

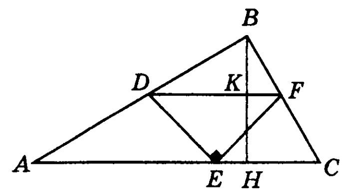
10. Ответ: 15°.

Решение. Углы CAD и CED, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на одну и ту же дугу. Значит, $\angle CAD = 15°$. Углы GAF и GBF, вписанные в окружность с центром O, также опираются на одну дугу. Значит, $\beta = \angle GBF = \angle GAF = 15°$.



11. Ответ: 8 см.

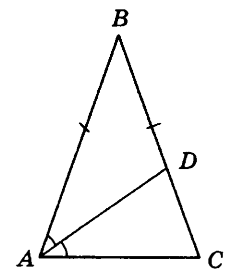
Решение. Треугольники ABC и DBF подобны, так как по условию прямые DF и AC параллельны. Гипотенуза DF треугольника DEF равна 8 (см), а гипотенуза AC треугольника ABC равна 16 (см), значит, коэффициент подобия равен 2. Следовательно, DF — средняя линия треугольника ABC.



По теореме Фалеса $BK = KH$, значит, $BH = 2KH$. Отрезок KH равен высоте треугольника DEF. Так как треугольник DEF — равнобедренный прямоугольный, то высота, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, т.е. 4 (см). Отсюда высота, проведенная из вершины B, равна 8 (см).

12. Ответ: 36°.

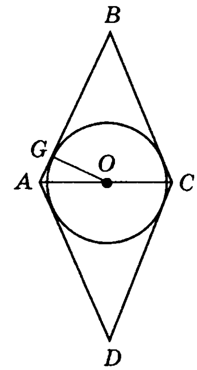
Решение. В подобных треугольниках соответствующие углы равны. Предположим, что треугольник ABD подобен треугольнику ABC, тогда $\angle BAD = \angle CAD$, так как AD — биссектриса угла BAC, $\angle ABC$ — общий, следовательно, угол BDA должен быть равен углу BCA. Пришли к противоречию, так как в силу теоремы о внешнем угле треугольника угол BDA больше угла BCA. Значит, треугольник ABD не подобен треугольнику ABC. Поскольку по условию один из полученных треугольников подобен данному, то $\triangle ADC \sim \triangle ABC$. По условию треугольник ABC — равнобедренный, значит, и треугольник ADC — равнобедренный и $\angle ACD = \angle CDA = 2\alpha$, а $\angle CAD = \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ACD + \angle CDA + \angle CAD = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$, $\alpha = 36°$. Угол CAD в треугольнике ADC — наименьший, в треугольнике ABC ему соответствует угол ABC. Следовательно, наименьший угол треугольника ABC равен 36°.



Часть 3

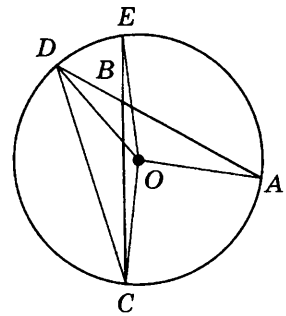
13. Ответ: 10 см.

Решение. Проведем диагонали ромба и соединим точку пересечения диагоналей — точку O — с точкой касания окружности G. Треугольник ABO прямоугольный, так как диагонали ромба перпендикулярны. Отрезок OG является высотой треугольника ABO по построению. Из теоремы о признаке подобия прямоугольных треугольников следует, что в прямоугольном треугольнике высота, проведенная из прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Отсюда $OG^2 = AG \cdot GB$. Обозначим AG буквой x. По условию $AG : GB = 1 : 4$, отсюда $GB = 4x$, значит, $x \cdot 4x = 16$, $x^2 = 4$, т.е. $AG = 2$ (см), $GB = 8$ (см). Точка G лежит между точками A и B, поэтому $AB = AG + GB = 2 + 8 = 10$ (см).



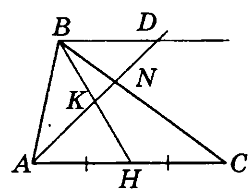
14.

Решение. Проведем хорду DC и рассмотрим $\triangle DBC$. Угол ABC является внешним углом $\triangle DBC$ при вершине B. В силу теоремы о внешнем угле треугольника: $\angle ABC = \angle BDC + \angle BCD$. Углы $\angle BDC$ и $\angle BCD$, как вписанные, равны половинам соответствующих центральных углов, т.е. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle DOE$. Центральный угол AOC опирается на дугу, заключенную между сторонами BA и BC угла ABC, а угол DOE опирается на дугу, заключенную между продолжениями сторон BA и BC угла ABC.



15. Ответ: 1 : 1 (считая от вершины B).

Решение. Треугольники ANC и DNB подобны по двум углам: $\angle KAH = \angle KDB$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей AD, $\angle BND = \angle ANC$ как вертикальные углы с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, поскольку $BN = \frac{1}{2}NC$. Следовательно, $BD = \frac{1}{2}AC$, т. е. $BD = AH$. Треугольники KAH и KDB равны по стороне и прилежащим к ней углам: $BD = AH$ и $\angle KAH = \angle KDB$, по доказанному, $\angle AHK = \angle DBK$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей BH. Следовательно, $BK = HK$. Значит, $BK : HK = 1 : 1$.



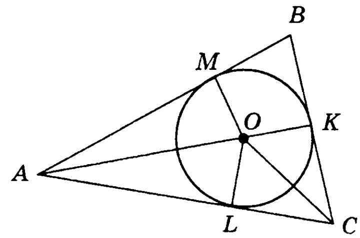
Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 2.

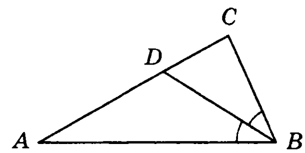
Решение. По теореме о вписанном угле центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Значит, центральный угол равен 150°. По определению, дополнительные углы — это углы с общими сторонами. Так как дополнительный угол к данному центральному углу содержит полуплоскость, то его градусная мера равна $360° - 150° = 210°$.

2. О т в е т: 3.



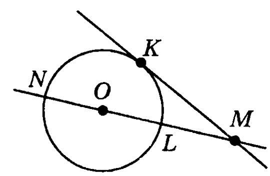
Решение. В треугольнике ABC для определенности обозначим $\angle ABC = 80°$, $\angle BCA = 70°$. Третий угол треугольника BCA равен $30°$ по теореме о сумме углов треугольника. Значит, наибольшая сторона лежит против угла, равного $80°$, это сторона AC. Прямоугольные треугольники AMO и ALO равны по гипотенузе AO — общая, катетам $OM = OL$, как радиусы одной окружности. Из равенства треугольников AMO и ALO следует равенство углов $\angle AOM$ и $\angle AOL$. Значит, $\angle AOL = 180° - 90° - 15° = 75°$ в силу теоремы о сумме углов треугольника. Аналогично находим $\angle COL = 55°$. Луч OL проходит между сторонами угла AOC. Отсюда $\angle AOC = \angle AOL + \angle LOC = 75° + 55° = 130°$.

3. О т в е т: 1.



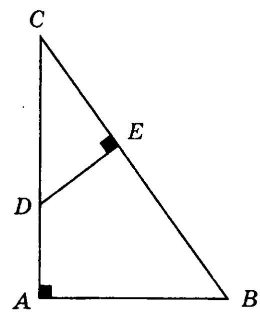
Решение. По свойству биссектрисы угла треугольника $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$; $\frac{10}{AB} = \frac{6}{9}$; $6 \cdot AB = 9 \cdot 10$; $AB = \frac{9 \cdot 10}{6} = 15$ (см).

4. О т в е т: 4.



Решение. По теореме о пропорциональности отрезков секущих к окружности $MK \cdot MK = MN \cdot ML$. Отрезок MN равен сумме отрезков NL и ML, где NL — диаметр, равный 12 см. Отсюда $ML = MN - NL = 16 - 12 = 4$ (см). Обозначим MK буквой x, значит, $x^2 = 4 \cdot 16$, $x = 8$, $MK = 8$ (см).

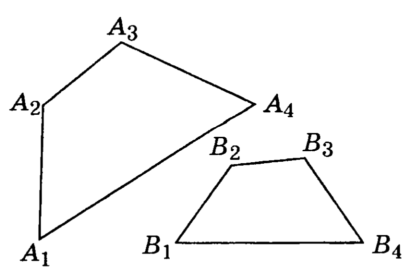
5. О т в е т: 3.



Решение. В прямоугольном треугольнике ABC сторона BC — гипотенуза, а AC — катет. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см). В треугольниках ABC и EDC $\angle BAC = \angle DEC$ как прямые, $\angle C$ — общий, следовательно, $\triangle EDC \sim \triangle ABC$. Поэтому $\frac{CB}{CD} = \frac{AC}{EC}$, $\frac{15}{x} = \frac{12}{4}$; $CD = \frac{15 \cdot 4}{12} = 5$; $CD = 5$ см.

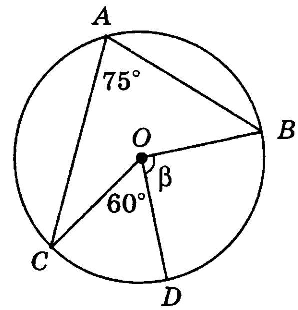
Часть 2

6. О т в е т: 2.



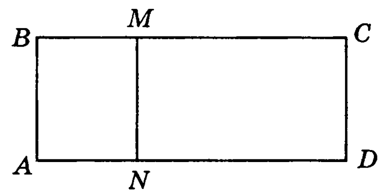
Решение. Так как четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ подобны, то $A_1A_4 = k\ B_1B_4$, где k — коэффициент подобия. Отсюда $k = \frac{A_1A_4}{B_1B_4} = \frac{12}{6} = 2$.

7. О т в е т: 90°.



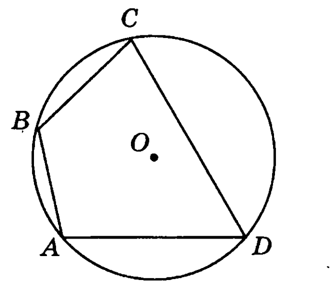
Решение. Угол BOC является центральным по отношению к вписанному углу CAB, равному 75°. Значит, $\angle BOC = 150°$. Угол COB равен сумме углов COD и BOD, отсюда $\angle BOD = \angle COB - \angle COD = 150° - 60° = 90°$. Следовательно, $\beta = 90°$.

8. О т в е т: 2 см.



Решение. Отрезок, который разбивает прямоугольник на два подобных прямоугольника, может быть параллелен только меньшей стороне исходного прямоугольника, иначе у двух подобных прямоугольников большие стороны были бы равны, что невозможно. Так как четырехугольники $ABMN$ и $NMCD$ подобны, то $\frac{AB}{AN} = \frac{ND}{NM}$. Обозначим, $AN = x$, $\frac{4}{x} = \frac{10-x}{4}$, $x^2 - 10x + 16 = 0$. Отсюда $x = 2$, $AN = 2$ (см).

9. О т в е т: 120°.

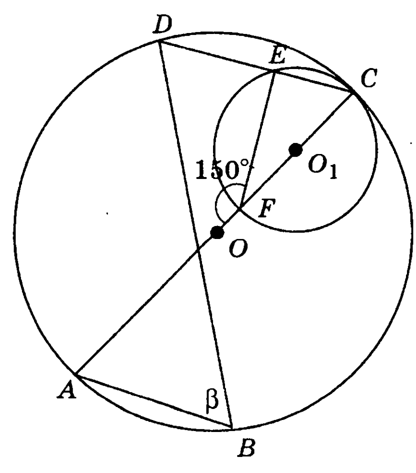


Решение. Пусть для определенности $\cup BC : \cup CD : \cup DA : \cup AB = 3 : 7 : 5 : 3$. Таким образом, вся окружность разбивается на 18 частей, градусная мера каждой равна 20°. Значит $\cup BC = 60°$, $\cup CD = 140°$, $\cup DA = 100°$, $\cup AB = 60°$. Так как вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, то все его углы вписанные. Угол BCD опирается на дугу DAB, равную сумме дуг DA и AB, $\cup BAD = \cup DA + \cup AB = 100° + 60° = 160°$. Угол DAB опирается на дугу, дополняющую дугу BAD до 360°, т. е. дугу BCD, равную 200°.

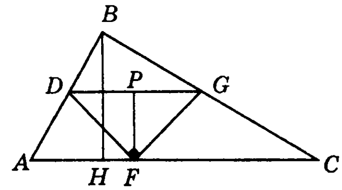
Угол ADC опирается на дугу ABC, равную сумме дуг AB и BC, $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 60° + 60° = 120°$. Угол ABC опирается на дугу, дополняющую дугу ABC до 360°, т.е. дугу ADC, равную 240°. Таким образом, на наибольшую дугу ADC, равную 240°, опирается $\angle ABC$, следовательно, в силу теоремы о вписанном угле треугольника $\angle ABC = 120°$.

10. О т в е т: 60°.

Решение. Треугольник FEC — прямоугольный (центр окружности O_1 лежит на линии центров), отсюда $\angle EFC = 30°$, а $\angle FCE = 60°$. Точка C — общая для обеих окружностей, $\angle ACD$ и $\angle ABD$, вписанные в окружность с центром в точке O опираются на одну дугу. Значит, $\beta = \angle ABD = \angle ACD = 60°$.



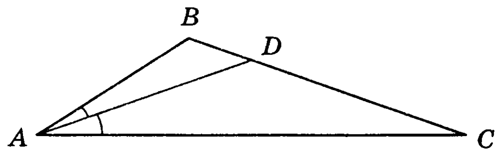
11. О т в е т: 12 см.



Решение. Треугольники ABC и DBG подобны, так как по условию прямые DF и AC параллельны. Отсюда следует: $\frac{AC}{DG} = \frac{BH}{BH - FP}$. Так как треугольник DGF — равнобедренный прямоугольный, то высота, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы: $DG = 2FP$. Обозначим $FP = x$, тогда $DG = 2x$; $\frac{30}{2x} = \frac{10}{10 - x}$; $30 \cdot (10 - x) = 10 \cdot 2x$; отсюда $x = 6$. Значит, $DG = 2x = 12$ (см).

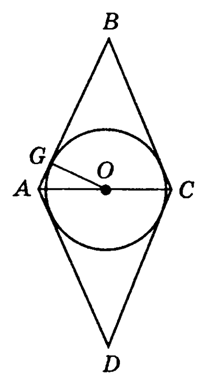
12. О т в е т: 120.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол BAC равен 40°. По условию треугольник ABD, подобный треугольнику ABC, отсекается от данного треугольника биссектрисой, значит, один из углов треугольника ABC равен 20°. Таким образом, третий угол треугольника равен 120°.



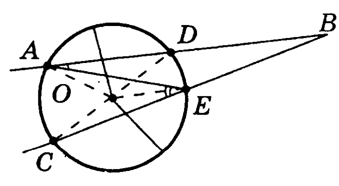
Часть 3

13. О т в е т: 15 см.



Решение. Проведем диагонали ромба и соединим точку пересечения диагоналей — точку O — с точкой касания окружности G. Треугольник ABO прямоугольный, так как диагонали ромба перпендикулярны. Из теоремы о признаке подобия прямоугольных треугольников следует, что в прямоугольном треугольнике катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу. Отсюда $AO^2 = AG \cdot AB$. Обозначим AG буквой x По условию $GB = AG + 9$, отсюда $GB = x + 9$. В ромбе диагонали, пересекаясь, делятся пополам, т. е. $AO = 6$ (см), значит, $36 = x \cdot (x + 9)$, $x^2 + 9x = 36$, $x = 3$, т.е. $AG = 3$ (см), $GB = 12$ (см). Точка G лежит между точками A и B, поэтому $AB = AG + GB = 3 + 12 = 15$ (см).

14.

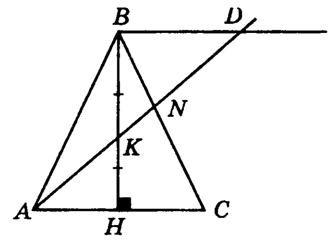


Решение. Проведем хорду $AEDC$ и рассмотрим $\triangle DBC$. Угол AEC является внешним углом $\triangle AEB$ при вершине E. В силу теоремы о внешнем угле треугольника $\angle AEC = \angle EAB + \angle EBA$, тогда $\angle EBA = \angle AEC - \angle EAB$. Углы AEC и EAB, как вписанные, равны половинам соответствующих центральных углов, отсюда

$\angle EBA = \frac{1}{2}\angle AOC - \frac{1}{2}\angle DOE.$

Центральные углы AOC и DOE опираются на дуги AC и DE, заключенные между сторонами угла ABC.

15. Ответ: 1 : 2 (считая от вершины B).



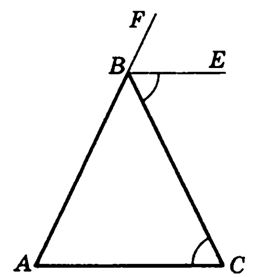
Решение. Так как $AC \parallel BD$, то $\angle KAH = \angle KDB$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей AD. Треугольники KAH и KDB — прямоугольные, по условию BH — высота треугольника, $BK = KH$ так как K — середина высоты BH. Поэтому, $\triangle KAH = \triangle KDB$ равны (по катету и острому углу), следовательно, $BD = AH$. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то его высота BH является и медианой, значит, $BD = AH = \frac{1}{2}AC$. Треугольники ANC и DNB подобны по двум углам: $\angle KAH = \angle KDB$ по доказанному, $\angle BND = \angle ANC$, как вертикальные углы, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, поскольку $BD = \frac{1}{2}AC$. Следовательно, $BN = \frac{1}{2}NC$; $BN : NC = 1 : 2$.

ТЕСТ 2

Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 3.

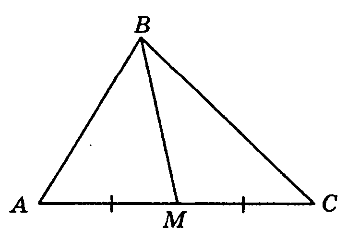


Решение. По теореме о внешнем угле треугольника внешний угол при вершине B равен сумме двух углов при основании $\angle FBC = \angle BAC + \angle BCA$, причем $\angle FBC = 2\angle BCA$ и $\angle FBC = 2\angle BAC$. Отсюда $\angle BCA = \angle BAC$, значит, в данном треугольнике равны два угла и, следовательно, треугольник — равнобедренный.

2. Ответ: 1.

Решение. Внешний и внутренний углы при одной вершине являются смежными углами и по теореме о смежных углах треугольника в сумме равны $180°$. По условию задачи внешний и внутренний углы при вершине C равны. Значит, внутренний угол при вершине C треугольника равен $90°$. Следовательно, данный треугольник — прямоугольный, а в прямоугольном треугольнике наибольшей стороной является гипотенуза треугольника, т.е. сторона AB.

3. Ответ: 3.



Решение. В треугольниках ABM и BMC сторона BM — общая, $AM = MC$ (BM — медиана). Сторона BC лежит против тупого угла, косинус которого отрицателен. Следовательно, из теоремы косинусов получим, что

$$BC = \sqrt{BM^2 + MC^2 - 2BM \cdot MC \cdot \cos 100°},$$

$$AB = \sqrt{BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot AM \cdot \cos 80°}.$$

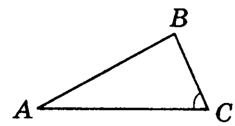
Следовательно, $BC > AB$.

4. Ответ: 1.

Решение. Вначале проверим, существует ли треугольник с такими сторонами. Стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника $8 + 12 > 14$. Из теоремы косинусов следует, что если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, тупой, если сумма квадратов двух сторона треугольника меньше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, острый. Так как $12^2 + 8^2 > 14^2$, то треугольник — остроугольный.

5. Ответ: 1.

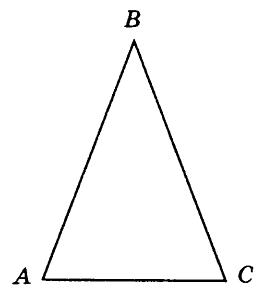
Решение. По теореме синусов можно найти синус угла BAC. Так как $BC < AB$, то $\angle BAC$ — острый и определяются однозначно.



Часть 2

6. Ответ: $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см.

Решение. В силу теоремы косинусов:



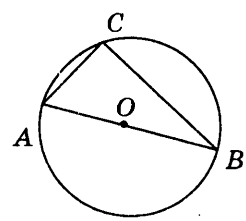
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135°;$$

$$AC^2 = 64 + 64 - 128 \cdot \cos 135° = 128 - 128 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 128 - 64\sqrt{2} =$$

$$= 64(2 - \sqrt{2}),\ AC = 8\sqrt{2-\sqrt{2}}\ (\text{см}).$$

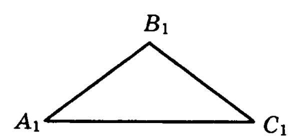
7. Ответ: 8 см.

Решение. Так как центр описанной окружности лежит на стороне треугольника, то эта сторона является диаметром, а угол, опирающийся на диаметр, — прямой. Следовательно, треугольник — прямоугольный и его наибольшая сторона — гипотенуза. Значит, наибольшая сторона равна 8 см.



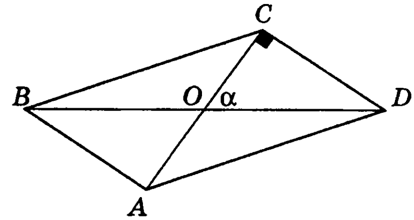
8. Ответ: 15 см.

Решение. По условию данный треугольник — равнобедренный, значит, неравенству треугольника удовлетворяют два треугольника: $\triangle ABC$ со сторонами 15 см, 15 см и 10 см и $\triangle A_1B_1C_1$ со сторонами 10 см, 10 см и 15 см. По условию данный треугольник — тупоугольный, а в равнобедренном треугольнике тупой угол может быть только противолежащим основанию, поэтому основание — большая сторона треугольника и равна 15 см.



9. Ответ: 30°.

Решение. По условию в параллелограмме $ABCD$ $AD = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $BD = \sqrt{3}$ и $AC = 1$. Диагональ параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим треугольник AOD, стороны

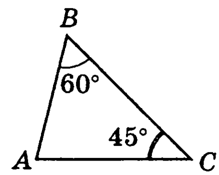


которого равны $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см и $\frac{1}{2}$ см и удовлетворяют неравенству треугольника. Обозначим $\angle AOD = \alpha$. По теореме косинусов $AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cdot \cos\alpha$; $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, угол, лежащий против стороны AD, — тупой и равен $150°$. Значит, острый угол между диагоналями параллелограмма равен $30°$.

10. Ответ: радиус.

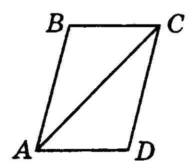
Решение. По условию в равнобедренном треугольнике, образованном двумя радиусами и данной хордой, углы при основании равны по $72°$, значит, угол при вершине (между радиусами) равен $36°$. По теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника большей стороной против большей стороны лежит больший угол, Следовательно, радиус больше хорды.

11. Ответ: $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см.



Решение. В треугольнике ABC $\angle ABC = 60°$, $\angle BCA = 45°$ и сторона AC равна 8 см. По теореме синусов $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 45°}{\sin 60°} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB = AC\sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ (см).

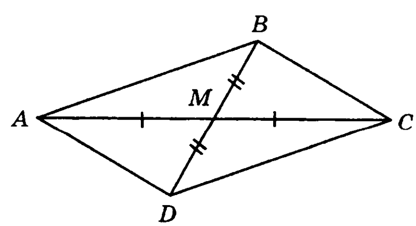
12. Ответ: $\sqrt{2}$.



Решение. Из условия задачи и свойств углов при параллельных прямых следует, что в треугольнике ABC углы, прилежащие к стороне AC, равны $45°$ и $30°$. Из теоремы о соотношении между сторонами и углами треугольника следует, что против угла в $45°$ лежит большая сторона, пусть это будет сторона AB. По теореме синусов $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 45°}{\sin 60°} = \sqrt{2}$.

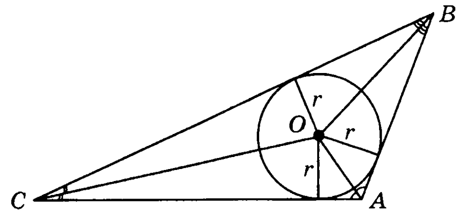
Часть 3

13. Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см.



Решение. Пусть для определенности в треугольнике ABC: $AB = 5$ см; $BC = 4$ см; $AC = 8$ см. Тогда угол ABC — наибольший, так как лежит напротив большей стороны AC. Проведем медиану BM и отложим на ее продолжении отрезок MD, равный BM. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его диагонали AC и BD пересекаются в точке M и делят ее пополам. В параллелограмме: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Поскольку $BD = 2BM$, получим:

$$BM = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{50 + 32 - 64}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (см)}.$$

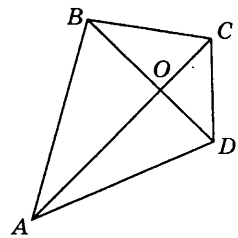


14. Ответ: центр вписанной в треугольник окружности ближе к вершине A.

Решение. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, значит, точка O является точкой пересечения биссектрис треугольника.

Рассмотрим треугольник AOB. Так как $\angle A > \angle B$, то угол OAB, равный $\frac{1}{2}\angle A$, больше угла OBA, равного $\angle B$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $OB > OA$. Аналогично, из треугольника AOC получим, что $OC > OA$.

Из того, что $OB > OA$ и $OC > OA$ следует, что OA — наименьшее из расстояний от центра вписанной окружности до вершин треугольника.



15. Решение. Так как $AC \perp BD$, то треугольники AOB, AOD, BOC и DOC — прямоугольные. Поэтому по теореме Пифагора:

$AB^2 = AO^2 + BO^2$, $BC^2 = OC^2 + BO^2$,

$CD^2 = OC^2 + OD^2$, $AD^2 = OC^2 + OD^2$.

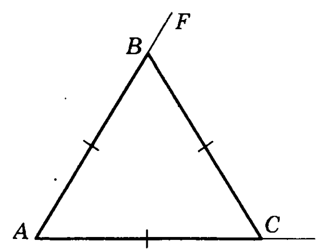
Отсюда, $AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + OC^2 + OD^2$ и

$BC^2 + AD^2 = BO^2 + OC^2 + AO^2 + OD^2$,

т.е. $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Вариант 2

Часть 1

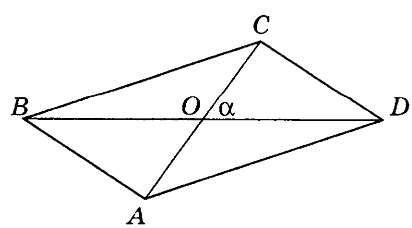


1. Ответ: 2.

Решение. По теореме о внешнем угле треугольника внешний угол при вершине B равен сумме двух углов, не смежных с ним. $\angle FBC = \angle BAC + \angle BCA$, причем $\angle FBC = 2\angle BCA$ и $\angle FBC = 2\angle BAC$. Отсюда $\angle BCA = \angle BAC$, значит, в данном треугольнике равны два угла. Аналогично доказывается, что $\angle BCA = \angle ABC$. Следовательно, треугольник — равносторонний.

2. Ответ: 1.

Решение. Внешний и внутренний углы при одной вершине являются смежными углами и по теореме о смежных углах треугольника в сумме равны 180°. По условию задачи внешний и внутренний углы при вершине C равны. Значит, внутренний углы при вершине C треугольника равен 90°. Следовательно, данный треугольник — прямоугольный, а в прямоугольном треугольнике наибольшей стороной является гипотенуза треугольника, т. е. сторона AB.



3. Ответ: 3.

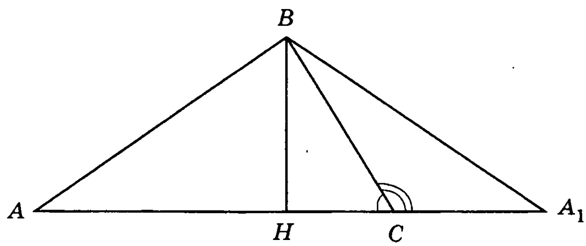
Решение. В треугольниках BOC и COD: $BO = OD$, OC — общая, а углы BOC и COD дополняют друг друга до 180°. Сторона BC лежит против тупого угла BOC, косинус которого отрицателен. Пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда из теоремы косинусов следует, что $BC = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos\alpha}$; $CD = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos(180 - \alpha)}$. Следовательно, $BC > CD$, так как $CD = AB$, то $BC > AB$.

4. О т в е т: 2.

Решение. Вначале проверим, существует ли треугольник с такими сторонами. Стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника $0{,}3 + 0{,}4 > 0{,}5$. Из теоремы косинусов следует, что если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, тупой, если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то угол, противолежащий третьей стороне, острый. Так как $0{,}3^2 + 0{,}4^2 = 0{,}5^2$, то здесь применима теорема, обратная теореме Пифагора, т.е. треугольник — прямоугольный.

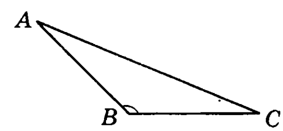
5. О т в е т: 2.

Решение. Применим теорему синусов $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, $\frac{8}{0{,}4} = \frac{16}{\sin A}$, $\sin A = 0{,}8$. Существуют два угла с таким синусом, острый и тупой. Соответствующий тупоугольный треугольник получается из остроугольного, данного на чертеже, если отразить сторону AB относительно высоты BH.



Часть 2

6. О т в е т: $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см.



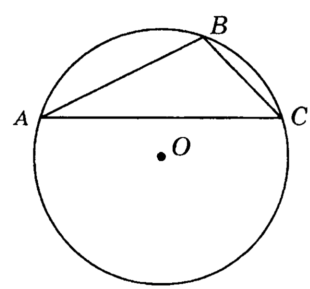
Решение. Так как треугольник ABC — равнобедренный и тупоугольный, то по теореме о соотношении между сторонами и углами треугольника его основание является наибольшей стороной. Обозначим $\angle ABC$ буквой α. В силу теоремы косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot (180° - \alpha);$$

$$AC^2 = 64 + 64 + 128 \cdot \cos 45° = 128 + 128 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 128 + 64\sqrt{2} =$$

$$= 64(2 + \sqrt{2}),\ AC = 8\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ (см)}.$$

7. О т в е т: 6 см.

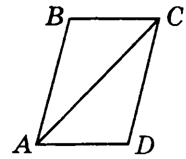


Решение. По условию данный треугольник — равнобедренный и его периметр равен 22 см, одна из сторон равна 10 см. Поэтому возможны два варианта: треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 2 см и треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 10 см, причем оба удовлетворяют неравенству треугольника. Так как центр описанной окружности лежит вне треугольника, то этот треугольник — тупоугольный и его наибольшая сторона лежит против тупого угла треугольника, значит, наибольшей стороной является основание. Следовательно, данным задачи соответствует треугольник со сторонами, 6 см, 6 см и 10 см. Следовательно, боковая сторона равны 6 см.

8. О т в е т: 6 см.

Решение. По условию данный треугольник — равнобедренный, поэтому третья сторона может быть равна 2 см или 6 см. Треугольник со сторонами 2 см, 2 см и 6 см не существует, а треугольник со сторонами 2 см, 6 см и 6 см существует. Следовательно, третья сторона треугольника равна 6 см.

9. О т в е т: 30°.

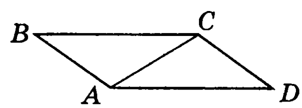


Решение. Данная диагональ и две стороны параллелограмма удовлетворяют неравенству треугольника. В силу теоремы косинусов $7 = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos\alpha$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, угол, лежащий против данной диагонали — тупой и равен 150°. Значит, меньший угол параллелограмма равен 30°.

10. О т в е т: радиус.

Решение. По условию в равнобедренном треугольнике, образованном двумя радиусами и данной хордой угол между радиусами меньше 60°, значит, угол при основании (хорда) больше 60°. Следовательно, по теореме о соотношении между сторонами и углами треугольника большей стороной является радиус.

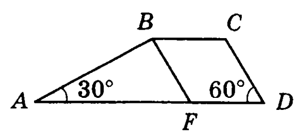
11. О т в е т: $4\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.



Решение. По условию $\angle BAC = 60°$ и $\angle CAD = 45°$, так как в параллелограмме $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Значит, $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Таким образом, в треугольнике BAC $\angle BAC = 60°$, $BCA = 45°$ и сторона AB равна 4 см, как лежащая против меньшего угла. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} =$

$$= \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \text{ (см)}.$$

12. О т в е т: $\sqrt{3}$.

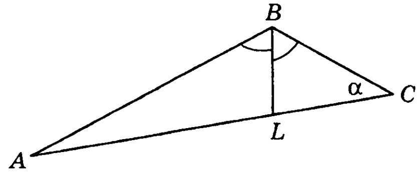


Решение. В трапеции $ABCD$ проведем прямую BF, параллельную CD. Углы BFA и CDA равны как соответственные при параллельных прямых BF и CD и секущей AD. Четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм по определению, значит, $FB = CD$. Треугольник ABF — прямоугольный, так как $\angle BAC = 30°$, а $\angle BFA = 60°$. По теореме синусов $\frac{AB}{BF} =$

$$= \frac{\sin 60°}{\sin 30°} \text{ или } \frac{AB}{CD} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \sqrt{3}.$$

Часть 3

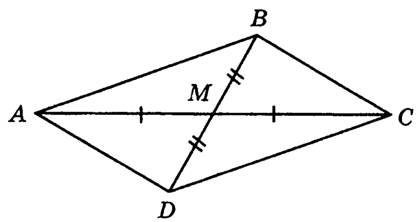
13. О т в е т: 2 см.



Решение. Пусть для определенности в треугольнике ABC: $AB = 12$ см; $BC = 6$ см; $\angle ABC = 120°$. Сторона AC — наибольшая, так как она лежит против тупого угла. По теореме косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120° =$ $= 144 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot (-0{,}5) = 252$; $AC = 6\sqrt{7}$ (см).

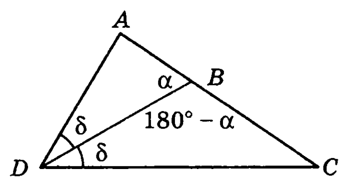
Проведем к стороне AC биссектрису BL, точка L принадлежит стороне AC. По свойству биссектрисы угла треугольника: $\frac{AL}{CL} = \frac{AB}{BC} = 2$, отсюда, $AL = 2CL$, значит, $AC = AL + CL = 3CL$, $CL = 2$ (см), $AL = 4$ (см). Обозначим угол ACB буквой α. По теореме косинусов: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos\alpha$, отсюда $\cos\alpha = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{144 + 252 - 36}{2 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$. Из треугольника BCL по теореме косинусов находим: $BL^2 = BC^2 + CL^2 - 2 \cdot BC \cdot CL \cdot \cos\alpha = 36 + 28 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} = 4$; $BL = 2$ (см).

14. О т в е т: 60°.



Решение. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 10 см и 6 см соответственно, точка M — середина стороны AC, медиана BM равна 7 см. Продолжим медиану BM на ее длину и соединим получившуюся точку D с вершинами A и C. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его диагонали AC и BD пересекаются в точке M и делятся ею пополам. Рассмотрим треугольник ABD: $AD = BC = 6$ см, $AB = 10$ см и $BD = 14$ см, Из треугольника ABD, используя теорему косинусов, находим: $\cos\angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{100 + 36 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 6} = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle BAD = 120°$, тогда $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 60°$, так как эти углы прилегают к одной стороне параллелограмма.

15.



Решение. Обозначим $\angle ADC = 2\delta$, а $ABD = \alpha$. Тогда $\angle ADB = \angle BDC$, так как DB — биссектриса $\angle ADC$; а $\angle CBD = 180° - \alpha$. Теперь применим теорему синусов к треугольникам ADB и BDC $\frac{AB}{\sin\delta} = \frac{AD}{\sin\alpha}$; $\frac{BC}{\sin\delta} = \frac{BD}{\sin(180° - \alpha)}$, отсюда $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

ТЕСТ 3

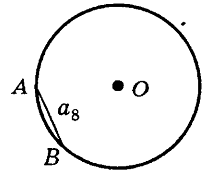
Вариант 1

Часть 1

1. О т в е т: 1.

Решение. Так как многоугольник — выпуклый, то по теореме о сумме углов выпуклого многоугольника, сумма его внутренних углов равна $180°(n - 2)$, а сумма его внешних углов равна 360°, то по условию: $180° \cdot (n - 2) = 180°$; $180° \cdot n - 360° = 180°$; $180° \cdot n = 540° \cdot n = 3$.

2. О т в е т: 2.



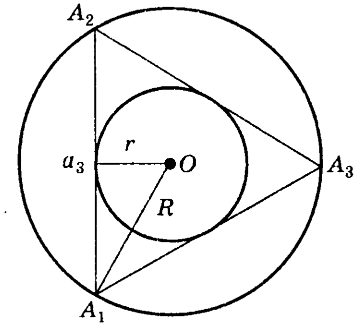
Решение. Так как хорда AB является стороной правильного восьмиугольника, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен 45°. Используем формулу $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot 45°$, получаем $l = \frac{5\pi}{4}$ (см).

3. О т в е т: 4.

Решение. Так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°, то многоугольник имеет 360 : 24 = 15 вершин.

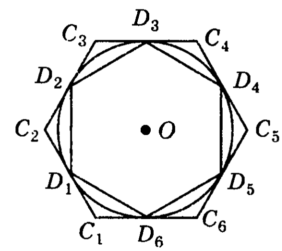
4. О т в е т: 3.

Решение. Сторона правильного треугольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_3 = 2r\sqrt{3}$. Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_3 = R\sqrt{3}$. Отсюда $2r\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, $R = 2r = 6$ (см).



5. О т в е т: 4.

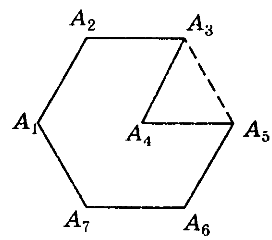
Решение. Сторона шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{\text{впис}} = R$; а сторона шестиугольника, описанного около этой окружности равна $a_{\text{опис}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Следовательно, отношение сторон вписанного и описанного шестиугольников $\frac{a_{\text{впис}}}{a_{\text{опис}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Часть 2

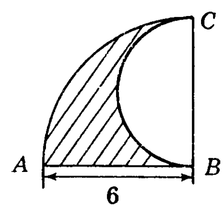
6. О т в е т: 49.

Решение. Периметр многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ равен $P_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7} = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 + A_6A_7 + A_7A_1 = (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_5 + A_5A_6 + A_6A_7 + A_7A_1) + A_3A_4 + A_4A_5 - A_3A_5 = P_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7} + A_3A_4 + A_4A_5 - A_3A_5 = 2P_{A_3A_4A_5} + (A_3A_4 + A_4A_5 - A_3A_5)$. Стороны A_3A_4, A_4A_5 и A_3A_5 являются сторонами равностороннего треугольника $A_3A_4A_5$ и, значит, каждая равна 7 см. Следовательно, $P_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7} = 2 \cdot 21 + 7 + 7 - 7 = 49$ (см).



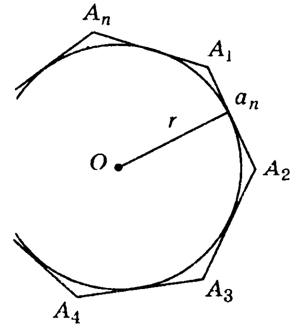
7. О т в е т: $6\pi + 6$.

Решение. Длина границы заштрихованной фигуры равна сумме длин полуокружности BC радиуса $r = 3$, дуги окружности AC радиуса $R = 6$, градусная мера которой равно 90°, и радиуса окружности AB равного 6. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна $L = \frac{1}{2}(2\pi r) + \frac{1}{4}(2\pi R) + AB = 3\pi + 3\pi + 6 = 6\pi + 6$.

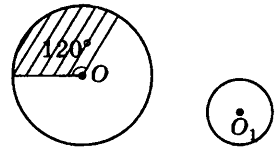


8. О т в е т: 60°.

Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, где $\frac{180^\circ}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. Отсюда, $6 = 6\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, $\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{180^\circ}{n} = 30^\circ$. Следовательно, центральный угол правильного n-угольника равен 60°.

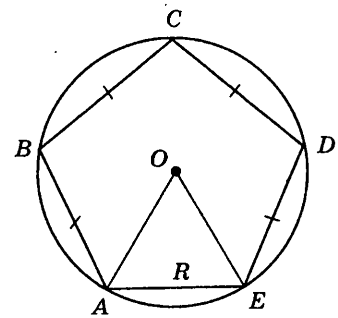


9. Ответ: 1 : 3.



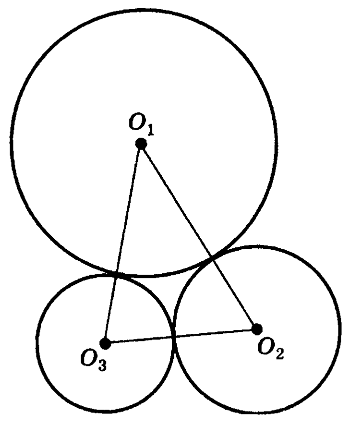
Решение. Длина дуги окружности с центром в точке O, соответствующая $120°$, равна $l = \frac{\pi R}{180°}n = \frac{\pi R}{180°}120° = \frac{2\pi R}{3}$. Длина окружности с центром в точке O_1 равна $2\pi r$. Отсюда $2\pi r = \frac{2\pi R}{3}$. Следовательно, $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$, т. е. $r : R = 1 : 3$.

10. Ответ: 112,5°.



Решение. Соединим точки A и F с центром окружности точкой O. Треугольник AOF — равносторонний, так как радиус окружности равен 6 см и сторона пятиугольника AF равна 6 см. Следовательно, угол AOF равен $60°$ и соответствующая ему дуга AF также равна $60°$. Значит, сумма дуг $\cup AB + \cup BC + \cup CD + \cup DF = 300°$. Отсюда, градусная мера каждой из этих дуг равна $75°$. Вписанные углы ABC, BCD и CDF опираются на две дуги, которые равны $75°$, и одну дугу, равную $60°$, т.е. $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDF = 105°$. Каждый из вписанных углов BAF и DFA опираются на три дуги, которые равны $75°$, т.е. $\angle BAF = \angle DFA = 112{,}5°$. Следовательно, градусная мера большего угла равна $112{,}5°$.

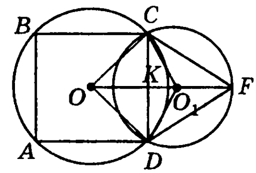
11. Ответ: 5π см.



Решение. Пусть точки O_1, O_2 и O_3 — центры данных окружностей. Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме радиусов окружностей, поэтому $O_2O_3 = 3$ см; $O_1O_3 = 4$ см; $O_1O_2 = 5$ см.

Окружность, проходящая через центры данных окружностей, является окружностью, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Так как длины сторон этого треугольника составляют пифагорову тройку, то диаметром искомой окружности является гипотенуза O_1O_2 треугольника $O_1O_2O_3$, равная 5 см. Значит, радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, равен 2,5 см. Длина этой окружности равна: $l = 2\pi R = 5\pi$ (см).

12. Ответ: $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ см.



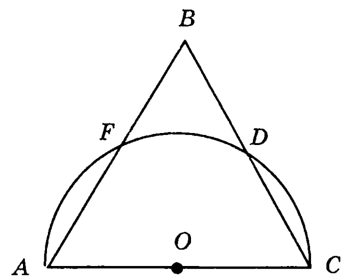
Решение. Соединим точки C и D с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OCO_1 и ODO_1 (OC и OD равны, как радиусы окружности с центром в точке O, CO_1 и DO_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде CD и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров OO_1 и хорды CD буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда CD является стороной вписанного квадрата и одновременно является стороной вписанного равностороннего треугольника CFD для окружности с центром в точке O_1, значит, $CD = 3$ (см). Треугольник COD — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $OK = CK = \frac{3}{2}$ (см). В равностороннем треугольнике CFD высота FK

(одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $FK = CF \cdot \cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения медиан, следовательно, $O_1K = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ (см).

Часть 3

13. Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

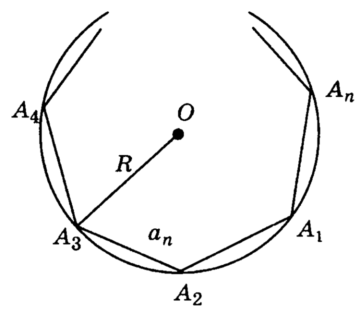
Решение. Соединим точки A и D. Треугольник ADC — прямоугольный, так как вписанный угол ADC опирается на диаметр окружности. Так как треугольник ABC — равносторонний, то $\angle DCA = 60^\circ$, значит, $\angle DAC = 30^\circ$. Аналогично, доказывается, что $\angle FCA = 30^\circ$. Отсюда, градусные меры каждой из дуг AF и DC равны 60°. Таким образом, градусная мера дуги DF также равна 60° или $\frac{\pi}{3}$.



14. Ответ: $n > 6$.

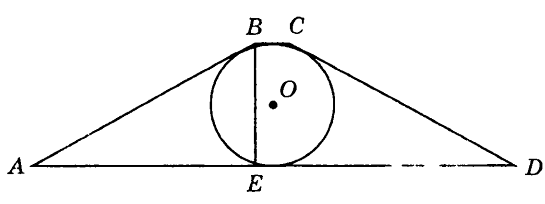
Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$, где $\frac{180^\circ}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. По условию $a_n < R$, т.е. $2R\sin\frac{180^\circ}{n} < R$, следовательно, $\sin\frac{180^\circ}{n} < \frac{1}{2}$.

С увеличением острого угла его синус возрастает, поэтому $\frac{180^\circ}{n} < 30^\circ$, т.е. $n > 6$.



15. Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

Решение. В равнобочной трапеции $ABCD$, проведем из вершины B высоту BE, тогда треугольник BAE — прямоугольный, у которого угол BAD равен 30°. Следовательно, по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен 30°, $BE = \frac{1}{2}AB$. С другой стороны, так как в трапецию $ABCD$ вписана окружность, то $BE = 2R$, а $AB = 4R$. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$. Так как трапеция $ABCD$ — равнобочная, то $AB = CD$, следовательно, периметр трапеции: $P = 4AB = 16R$. Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$. Следовательно, $\frac{C}{P} = \frac{2\pi R}{16R} = \frac{\pi}{8}$.



Вариант 2

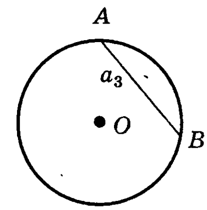
Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. Так как многоугольник — выпуклый, то по теореме о сумме углов выпуклого многоугольника сумма его внутренних углов равна $180°(n-2)$, а сумма его внешних углов равна $360°$, то по условию: $180° \cdot (n-2) = 360°$; $180° \cdot n - 360° = 360°$; $180° \cdot n = 720°$; $n = 4$.

2. Ответ: 3.

Решение. Так как хорда AB является стороной правильного треугольника, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен $120°$. Используем формулу $l = \frac{\pi R}{180°} 120°$, получаем $l = \frac{10\pi}{3}$ (см).

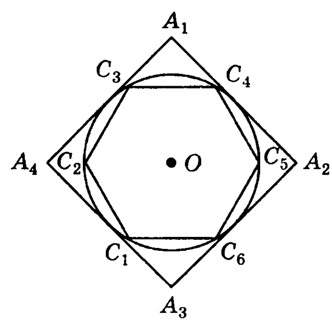


3. Ответ: 3.

Решение. Так как сумма внешнего и внутреннего углов при одной вершине равна $180°$, то каждый из его внешних углов равен $15°$. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$, значит, многоугольник имеет $360 : 15 = 24$ вершины.

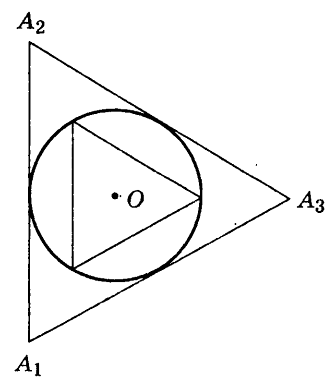
4. Ответ: 2.

Решение. Сторона квадрата (правильного четырехугольника) выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_4 = 2r$. Сторона правильного шестиугольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_6 = R$. Так как окружность одновременно является вписанной в правильный четырехугольник и описанной около правильного шестиугольника, то $R = r$. Отсюда $a_4 = 2r = 2R = 6$ (см).



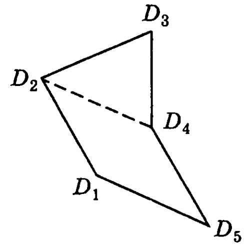
5. Ответ: 3.

Решение. Сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{впис} = R\sqrt{3}$, а сторона треугольника, описанного около этой окружности, равна $a_{опис} = 2r\sqrt{3}$. Так как окружность одновременно является вписанной в правильный четырехугольник и описанной около правильного шестиугольника, то $R = r$. Следовательно, отношение сторон описанного и вписанного треугольника $\frac{a_{опис}}{a_{впис}} = \frac{2R\sqrt{3}}{R\sqrt{3}} = 2$.



Часть 2

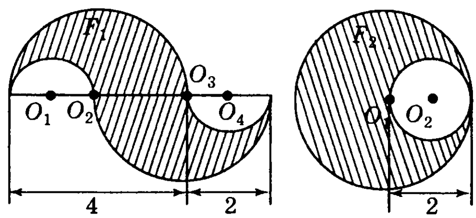
6. О т в е т: 49 см.



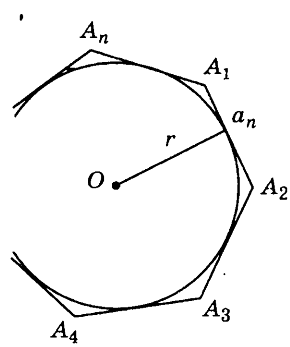
Решение. Периметр многоугольника $D_1D_2D_3D_4D_5$ равен $P_{D_1D_2D_3D_4D_5} = D_1D_2 + D_2D_3 + D_3D_4 + D_4D_5 + D_5D_1 = (D_1D_2 + D_2D_4 + D_4D_5 + D_5D_6) + D_2D_3 + D_3D_4 - D_2D_4 = P_{D_1D_2D_3D_4D_5} + (D_2D_3 + D_3D_4 - D_2D_4) = 2P_{D_2D_3D_4} + (D_2D_3 + D_3D_4 - D_2D_4)$. Стороны D_2D_3, D_3D_4 и D_2D_4 являются сторонами равностороннего треугольника $D_3D_4D_5$ и, значит, каждая равна 7 см. Следовательно, $P_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7} = 2 \cdot 21 + 7 + 7 - 7 = 49$ (см).

7. О т в е т: 12π.

Решение. Заметим, что фигура F_2 может быть получена из фигуры F_1, если фигуру F_1 разрезать по прямой O_1O_4 и сложить из полученных частей фигуру F_2. Длина границы заштрихованной фигуры F_2 равна сумме длин окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами $R = 4$ и $r = 2$. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна $L = 2\pi r + 2\pi R = 4\pi + 8\pi = 12\pi$.

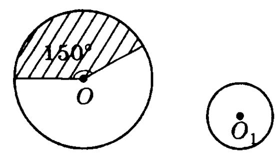


8. О т в е т: $90°$.



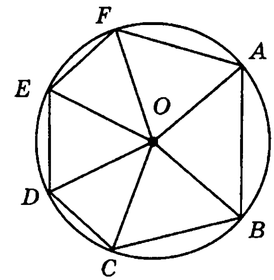
Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ – половина центрального угла правильного n-угольника. Отсюда, $2 = 2\sqrt{2}\sin\frac{180°}{n}$, $\sin\frac{180°}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{180°}{n} = 45°$. Следовательно, центральный угол правильного n- угольника равен $90°$.

9. О т в е т: 2,5 см.



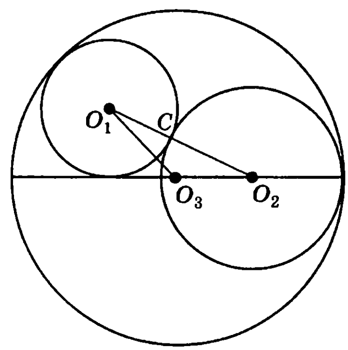
Решение. Длина дуги окружности с центром в точке O, соответствующей центральному углу, равному $150°$, равна $L = \frac{\pi R}{180°}n = \frac{\pi 6}{180°}150° = 5\pi$. Длина окружности с центром в точке O_1 равна $l = 2\pi r = 5\pi$. Следовательно, $r = 2,5$ (см).

10. Ответ: 108°.



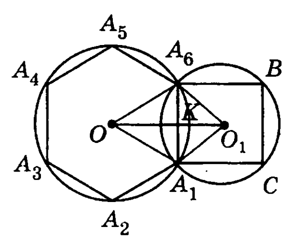
Решение. Соединим центр окружности O с вершинами шестиугольника, тогда $OA = OB = OC = OD = OE = OF = 5\sqrt{2}$ (см), как радиусы одной окружности. Так как $OA^2 + OB^2 = AB^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник AOB — прямоугольный с прямым углом O, кроме того этот треугольник — равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle OBA = 45°$. Остальные пять образовавшихся равнобедренных треугольников между собой равны по трем сторонам, поэтому каждый угол при вершине O у этих треугольников равен $(360° - 90°) : 5 = 54°$. Значит, по теореме о сумме углов треугольника углы при основаниях этих треугольников равны $(180° - 54°) : 2 = 63°$. Таким образом, $\angle ABC = \angle BAF = 108°$; $\angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFA = 126°$. Меньший угол шестиугольника равен 108°.

11. Ответ: 10π см.



Решение. Если две окружности касаются внешним образом, то расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, значит, $O_1O_2 = 4 + 6 = 10$ (см). Если две окружности касаются внутренним образом, то расстояние между центрами окружностей равно разности их радиусов, то $O_1O_3 = 12 - 4 = 8$ (см), $O_2O_3 = 12 - 6 = 6$ см. Окружность, проходящая через центры данных окружностей, является окружностью, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. Так как длины сторон этого треугольника составляют пифагорову тройку, то диаметром искомой окружности является гипотенуза O_1O_2 треугольника $O_1O_2O_3$. Длина этой окружности равна: $l = 2\pi R = 10\pi$ (см).

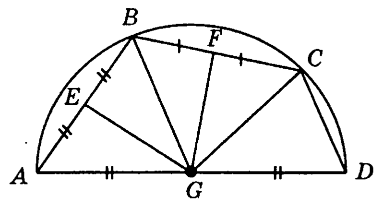
12. Ответ: $3(1 + \sqrt{3})$ см.



Решение. Соединим точки A_1 и A_6 с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OA_1O_1 и OA_6O_1 (OA_1 и OA_6 равны, как радиусы окружности с центром в точке O, A_1O_1 и A_6O_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде A_1A_6 и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров и хорды A_1A_6 буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда A_1A_6 является стороной вписанного правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и одновременно является стороной вписанного квадрата для окружности с центром в точке O_1, значит, сторона квадрата равна 6 см. Треугольник $A_1O_1A_6$ — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $O_1K = 3$ см. В равностороннем треугольнике A_1OA_6 высота OK (одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $OK = A_1K \cdot \mathrm{tg}60° = 3\sqrt{3}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = 3(1 + \sqrt{3})$ (см).

Часть 3

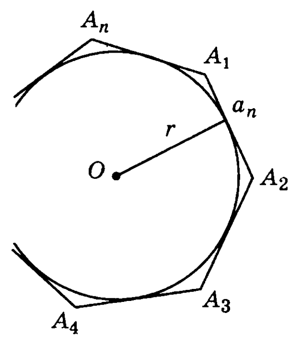
13. Ответ: $90°$.



Решение. Соединим точку G с вершинами B и C. Рассмотрим треугольники AGB и BGC. По условию $GE \perp AB$, $GF \perp BC$, а точки E и F — середины сторон AB и BC, следовательно, каждый из отрезков GE и GF является одновременно высотой и медианой в треугольниках AGB и BGC соответственно.

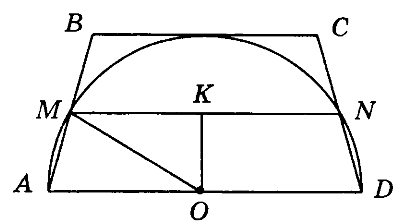
Значит, эти треугольники — равнобедренные. Отсюда $AG = BG = CG$, а так как точка G — середина стороны AD, то $AG = BG = CG = DG$. Следовательно, вершины четырехугольника $ABCD$ равноудалены от точки G, значит, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке G. Угол ACD — вписанный и опирается на диаметр AD, следовательно, $\angle ACD = 90°$.

14. Ответ: $n \leqslant 4$.



Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус вписанной в него окружности формулой $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. По условию $\frac{1}{2}a_n \geqslant r$, т. е. $r\operatorname{tg}\frac{180°}{n} < r$, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{180°}{n} \geqslant 1$. С увеличением острого угла его тангенс возрастает, поэтому $\frac{180°}{n} \geqslant 45°$, т. е. $n \leqslant 4$.

15. Ответ: $75°$ и $105°$.



Решение. В трапеции $ABCD$ точки O, M, N и K являются серединами отрезков AD, AB, CD и MN соответственно. Тогда трапеция $AMND$ вписана в данную окружность, следовательно, эта трапеция — равнобокая. Так как отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то и трапеция $ABCD$ — равнобокая.

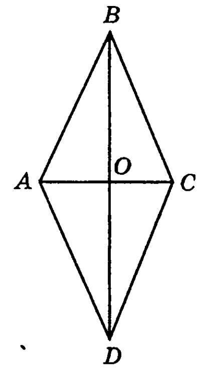
$\angle OKM = 90°$, так как точка K принадлежит радиусу, проведенному в точку касания, следовательно, треугольник OMK является прямоугольным. $OK = \frac{1}{2}r$, так как точка K принадлежит средней линии трапеции, отсюда $OK = \frac{1}{2}OM$. Значит, $\angle KMO = 30°$. $\angle KMO = \angle AOM = 30°$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и MN и секущей OM. А так как $OA = OM$, то $\angle MAO = 75°$. Отсюда получим, что $\angle A = \angle D = 75°$; $\angle B = \angle C = 105°$.

ТЕСТ 4

Вариант 1

Часть 1

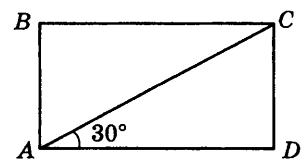
1. О т в е т: 2.



Решение. Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то они делят ромб на четыре равных прямоугольных треугольника. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, поэтому катеты каждого из этих треугольников равны 2 см и 3 см.

$$S_{ABCD} = 4\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\right) = 12\ \text{см}^2.$$

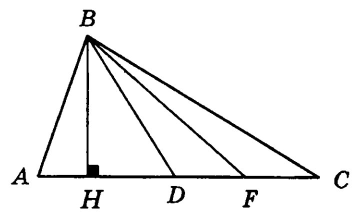
2. О т в е т: 4.



Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACD. По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника сторона CD равна $14\cdot \sin 30°$, а по определению косинуса острого угла прямоугольного треугольника сторона AD равна $14\cdot\cos 30°$. Отсюда находим площадь прямоугольника $ABCD$ $S_{ABCD} = AD\cdot CD$

$$= 14^2\cdot\sin 30°\cdot\cos 30° = 14^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 49\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

3. О т в е т: 3.



Решение. В треугольнике ABC из вершины B к основанию AC проведем высоту BH, которая является и высотой для треугольника DBF, так как основание треугольника DBF лежит на основании треугольника ABC.

$$S_{DBF} = \frac{1}{2}DF\cdot BH = \frac{3}{5}BH;\ S_{ABC} = \frac{1}{2}\ AC\cdot BH = 10{,}5BH.$$

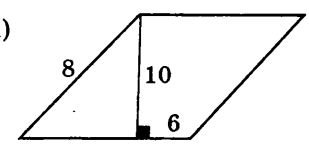
$$S_{ABC} : S_{DBF} = 10{,}5BH : 3{,}5BH = 3 : 1.$$

3. О т в е т: 4.

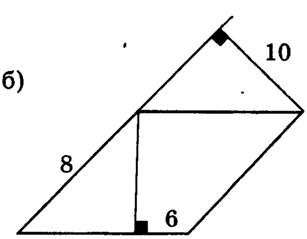
Анализируем условие задачи:

В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 8 см (рис а). Такой треугольник не существуют. Если провести высоту к стороне, равной 8 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 6 см (рис. б). Такой треугольник не существуют. Следовательно, задача не имеет решения.

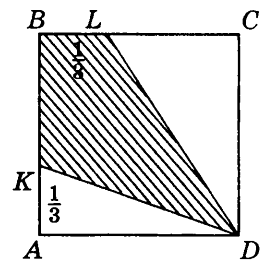
а)



б)



5. О т в е т: 1.



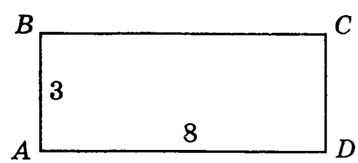
Решение. Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площадей: треугольника KAD, треугольника LCD и четырехугольника $KBLD$ $S_{ABCD} = S_{KAD} + S_{LCD} + S_{KBLD}$. Следовательно, площадь четырехугольника $KBLD$ равна $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - S_{LCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{3}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрат равна 1 см. Отсюда следует, что площадь треугольника KAD $S_{KAD} = \frac{1}{2}KA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ (см^2).

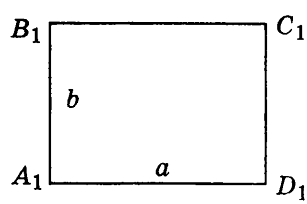
По условию на стороне BC квадрата $ABCD$ отложен отрезок $BL = \frac{1}{3}BC$, значит, отрезок $LC = \frac{2}{3}BC$. Отсюда следует, что площадь треугольника LCD $S_{LCD} = \frac{1}{2}LC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ (см^2).

Значит, $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - S_{LCD} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ (см^2).

Часть 2

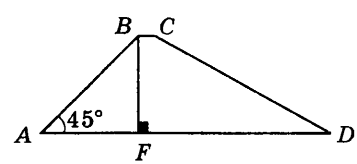
6. О т в е т: 6 см.





Решение. Прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь прямоугольники $ABCD$ $S_{ABCD} = 3 \cdot 8 = 24$ (см^2), значит, и площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна 24 см^2. Обозначим сторону A_1D_1 — x, а по условию сторона A_1B_1 равна $(x + 2)$, его площадь равна $S_{A_1B_1C_1D_1} = x(x + 2) = 24$. Отсюда $x^2 + 2x - 24 = 0$, $x_1 = -6$; $x_2 = 4$. Так как x является длиной стороны, то сторона A_1D_1 равна 4 (см). Следовательно, сторона A_1B_1 равна 6 (см).

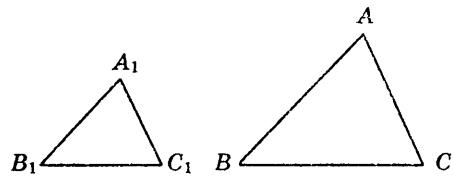
7. О т в е т: 72 см^2.



Решение. В прямоугольном треугольнике ABF (BF — высота трапеции) угол BAF по условию равен 45°. Значит, по теореме о сумме углов треугольника угол ABF также равен 45°. Таким образом, прямоугольной треугольник ABF — равнобедренный. Отсюда $AF = BF = 6$ (см). Основание трапеции $AD = AF + FD = 6 + 17 = 23$ (см). Площадь трапеции $ABCD$ вычисляется по формуле:

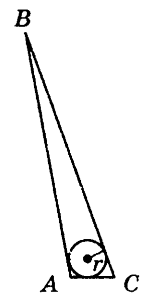
$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BF = \frac{1 + 23}{2} \cdot 6 = 72 \text{ (см}^2\text{)}.$$

8. Ответ: 8 $см^2$.



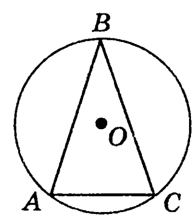
Решение. В подобных треугольниках площади относятся, как квадраты сходственных линейных элементов. По условию, периметры подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ относятся, как 2 : 5. Значит, $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = 4 : 25$, кроме того, $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} + 42$. Отсюда $S_{ABC} + 42 = \frac{25}{4} S_{ABC}$. Следовательно, $S_{ABC} = 8$ ($см^2$).

9. Ответ: $\frac{4}{3}$ см.



Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, полупериметр треугольника $p = 27$ (см). $S = \sqrt{27 \cdot (27-25) \cdot (27-26) \cdot (27-3)} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24} = 36$ ($см^2$). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Значит, $27r = 36$, отсюда $r = \frac{4}{3}$ (см).

10. Ответ: 16,9 см.



Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 25$ (см).

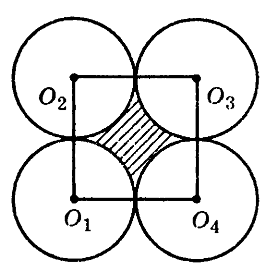
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{25 \cdot (25-13) \cdot (25-13) \cdot (25-24)} =$

$= \sqrt{25 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 1} = 60$ ($см^2$). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $\frac{abc}{4R}$, отсюда

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 24}{4 \cdot 60} = 16{,}9$ (см).

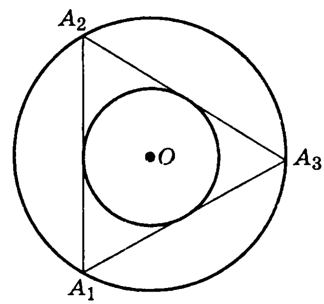
11. Ответ: $16(4 - \pi)$.



Решение. Соединим центры окружностей и получим квадрат $O_1O_2O_3O_4$, сторона которого равна 8 (см), так как равные окружности попарно касаются внешним образом, и значит, расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади квадрата и четырех круговых секторов, каждый из которых соответствует центральному углу, равному 90°. Значит, в сумме они составляют круг радиуса 4 (см). Площадь квадрата равна $S_{\text{квадрат}} = a^2$, площадь круга $S_{\text{круг}} = \pi R^2$.

Таким образом, $S = S_{\text{квадрат}} - S_{\text{круг}} = a^2 - \pi R^2 = 8^2 - 4^2 = 16(4 - \pi)$.

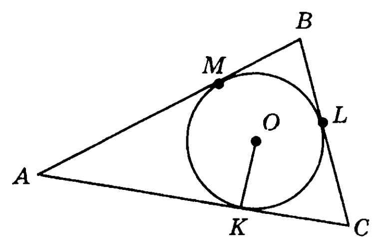
12. Ответ: 2.



Решение. Площадь кольца, ограниченного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна разности площади круга, ограниченного окружностью, описанной около треугольника, и площади круга, ограниченного окружностью, вписанной в треугольник. $S = S_{\text{опис}} - S_{\text{впис}} = R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi$. Сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_3 = R\sqrt{3}$, а сторона треугольника, описанного около окружности радиуса r, равна $a_3 = 2r\sqrt{3}$. Отсюда $R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$, $R = 2r$. Из полученной формулы для площади кольца $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi$ получаем $R^2 - r^2 = 1$, $4r^2 - r^2 = 3r^2 = 1$, $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Отсюда $a_3 = 2r\sqrt{3} = 2\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 2$.

Часть 3

13. Ответ: 15 см; 14 см и 13 см.

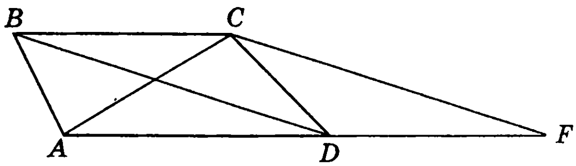


Решение. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках K, L и M. Пусть для определенности $AK = 8$ см; $CK = 6$ см. По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки, $AM = AK = 8$ (см); $CL = CK = 6$ см; $BM = BL = x$ см. Отсюда, $AB = x + 8$, $BC = x + 6$ и $AC = 14$ см. Найдем площадь треугольника ABC по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Полупериметр треугольника ABC равен $x + 14$. Следовательно, $S = 4\ (x + 14)$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника по формуле Герона равна: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+14)\cdot((x+14)-(x+6))((x+14)-(x+8))((x+14)-14)} = \sqrt{(x+14)\cdot 8\cdot 6\cdot x} = 4\sqrt{3x(x+14)}$ (см^2). Приравняв эти выражения, получим уравнение $4(x + 14) = 4\sqrt{3x(x+14)}$, откуда $x = 7$.

Следовательно, $AB = 15$ см, $BC = 13$ см, $AC = 14$ см.

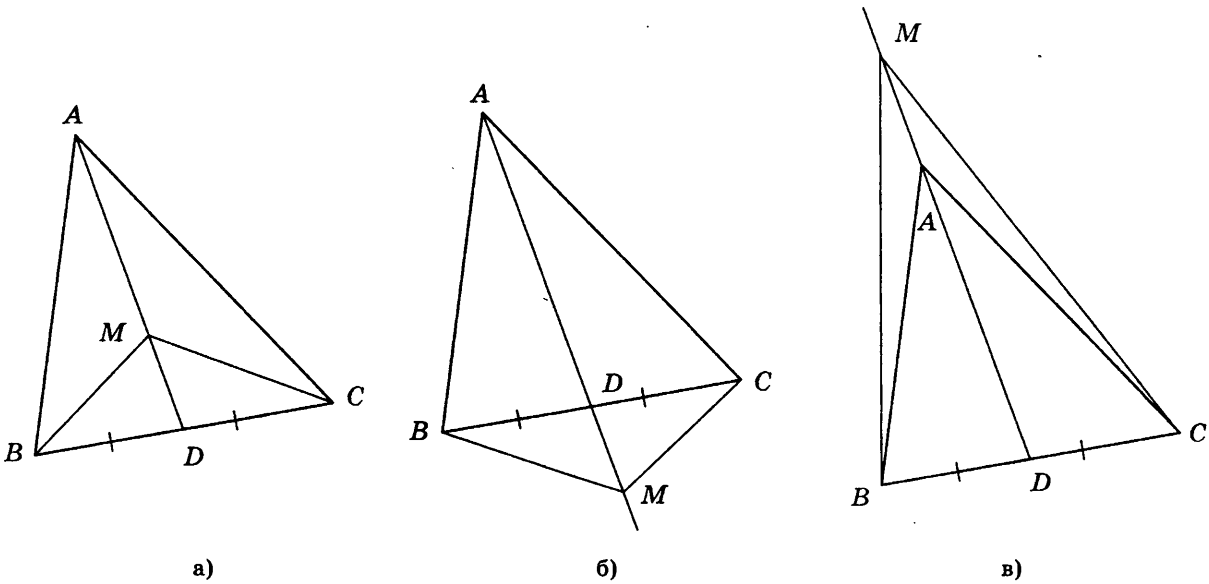
14. Ответ: 24 см^2.

Решение. Через вершину C трапеции $ABCD$ проведем прямую CF, параллельную диагонали BD. Тогда четырехугольник $DBCF$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AD$ ($ABCD$ — трапеция), $FC \parallel BD$ по построению. Следовательно, $FC = BD = 8$ (см); $DF = BC = 3$ (см). Таким образом, длины сторон треугольника ACF равны $FC = 8$ (см), $AC = 6$ см и $AF = 10$ см. Числа 8, 6 и 10



являются пифагоровой тройкой. Значит, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACF — прямоугольный. Значит, $S_{ACF} = \frac{1}{2}AC \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2). В треугольниках ABC и CDF основания (DF и BC) и высоты (расстояние между параллельными прямыми) равны, поэтому эти треугольники равновелики; $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$, $S_{ACF} = S_{ACD} + S_{CDF}$. Следовательно, $S_{ABCD} = = S_{ACF} = 24$ (см^2).

15.



Решение. Возможны три варианта расположения точки M.

1. Точка M принадлежит медиане AD (рис. а). Так как отрезок AD — медиана треугольника ABC, то треугольники ABD и ACD равновелики и $BD = CD$.

Значит, MD — медиана треугольника BMC. Следовательно, и треугольники BMD и CMD равновелики. Следовательно, треугольники AMB и AMC равновелики.

2. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку D (рис. б). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно суммам площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{ABD} + S_{BMD}$ и $S_{AMC} = S_{ACD} + + S_{CMD}$.

3. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку A (рис. в). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно разностям площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{BMD} - S_{ABD}$ и $S_{AMC} = = S_{CMD} - S_{ACD}$.

Вариант 2

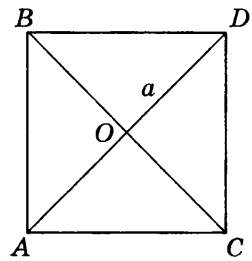
Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. По определению квадрат является прямоугольником и ромбом одновременно. Диагонали квадрата разбивают его на четыре прямоугольных треугольника. Обозначим диагональ буквой a, тогда $S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} \times$

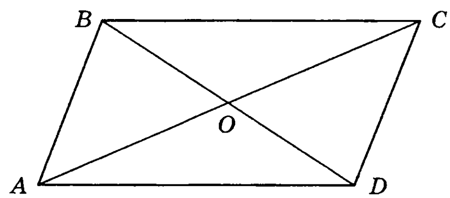
$\times \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{8}a^2$; $S_{\text{квадрата}} = 4 \cdot \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \cdot 14^2 = 98$ (см^2);

$S_{\text{квадрата}} = 98$ (см^2).



2. Ответ: 2.

Решение. Диагонали параллелограмма $ABCD$ разбивают его на четыре треугольника. Для вычисления площади каждого из них применим формулу $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, где α — острый угол, образованный при пересечении диагоналей, a и b — половины диагоналей. Так как $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$, значит треугольники AOB, BOC, COD и AOD — равновелики. Площадь треугольника AOD равна $S_{AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot OD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь параллелограмма равна $4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 21\sqrt{3}$ (см^2).

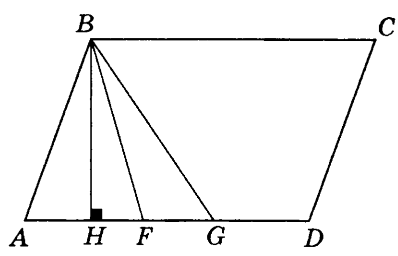


3. Ответ: 2.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ из вершины B к основанию AD проведем высоту BH, которая является и высотой для треугольника FBG, так как основание треугольника FBG лежит на основании параллелограмма $ABCD$.

$S_{FBG} = \frac{1}{2}FG \cdot BH = 2BH$; $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16BH$.

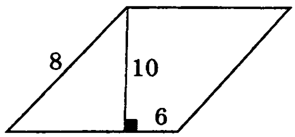
$S_{ABCD} : S_{FBG} = 16BH : 2BH = 8 : 1$.



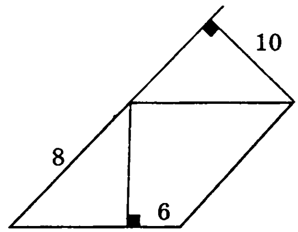
4. Ответ: 4.

Анализируем условие задачи:

В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 8 см (рис. а). Такой треугольник не существуют. Если провести высоту к стороне, равной 8 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 6 см (рис. б). Такой треугольник не существуют. Следовательно, задача не имеет решения.



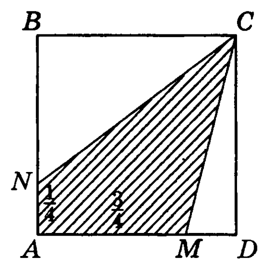
а)



б)

5. Ответ: 1.

Решение. Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площади треугольника NBC, площади треугольника MCD и площади четырехугольника $ANCM$ $S_{ABCD} = S_{NBC} + S_{MCD} + S_{ANCM}$. Следовательно, площадь четырехугольника $ANCM$ равна $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AN = \frac{1}{4}AB$, значит, отрезок $BN = \frac{3}{4}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрат равна 1 см. Отсюда следует, что площадь треугольника NBC $S_{NBC} = \frac{1}{2}NB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8}$ (см^2).

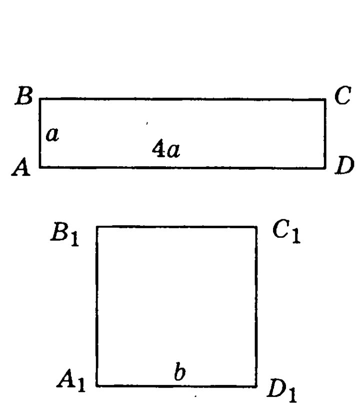


По условию на стороне AD квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AM = \frac{3}{4}AD$, значит, отрезок $MD = \frac{1}{4}AD$. Отсюда следует, что площадь треугольника MCD $S_{MCD} = \frac{1}{2}MD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8}$ (см^2). Значит, $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ (см^2)

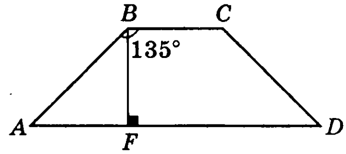
Часть 2

6. Ответ: 12 см.

Решение. Прямоугольник $ABCD$ и квадрат $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ $S = b^2 = 36$ см^2, значит, и площадь прямоугольника $ABCD$ равна 36 см^2. По условию стороны прямоугольника $ABCD$ относятся как 1 : 4, значит, его площадь равна $S = 4a \cdot a$. Отсюда $36 = 4a^2$; $a = 3$ (см). Следовательно, большая сторона прямоугольника равна 12 см.

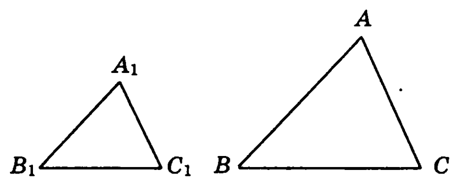


7. Ответ: 60 см^2.



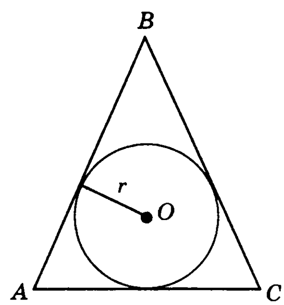
Решение. Проведем высоту BF. В прямоугольном треугольнике ABF (BF — высота трапеции) угол ABF равен $135° - 90° = 45°$ (BF — высота трапеции). Значит, по теореме о сумме углов треугольника угол ABF также равен $45°$. Таким образом, прямоугольной треугольник ABF — равнобедренный. По условию трапеция $ABCD$ — равнобедренная, значит, проекции равных наклонных AB и CD на прямую AD равны. Сумма проекций равна $17 - 7 = 10$ (см). Отсюда $AF = 5$ (см) и $BF = AF = 5$ (см). Площадь трапеции $ABCD$ вычисляется по формуле: $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BF = \frac{7 + 17}{2} = 60$ (см^2).

8. Ответ: 25 см^2.



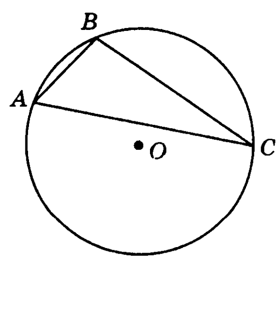
Решение. В подобных треугольниках площади относятся, как квадраты сходственных сторон. По условию, сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ относятся, как 5 : 3. Значит, $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = 25 : 9$, кроме того, $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} + 16$. Отсюда $S_{A_1B_1C_1} + 16 = \frac{25}{9} S_{A_1B_1C_1}$, $S_{A_1B_1C_1} = 9$ (см^2). Следовательно, $S_{ABC} = 25$ (см^2).

9. Ответ: 5,25 см.



Решение. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то в треугольнике известны три стороны, и площадь треугольника ABC можно найти по формуле Герона. $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, где полупериметр треугольника $p = 32$ (см). $S = \sqrt{32 \cdot (32 - 25) \cdot (32 - 25) \cdot (32 - 14)} = \sqrt{32 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 18} = 168$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Значит, $32r = 168$, отсюда $r = 5{,}25$ (см).

10. Ответ: 8,125 см.



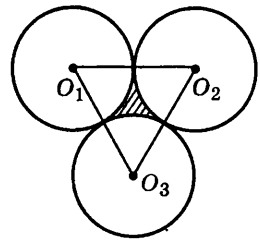
Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 21$ (см).

$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} =$

$= \sqrt{21 \cdot (21 - 13) \cdot (21 - 14) \cdot (21 - 15)} =$

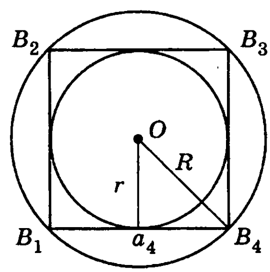
$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$, отсюда $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125$ (см).

11. Ответ: $8(2\sqrt{3}-\pi)$ см^2.



Решение. Соединим центры окружностей и получим равносторонний треугольник $O_1O_2O_3$, сторона которого равна 8 (см), так как равные окружности попарно касаются внешним образом, и значит, расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади треугольника и трех круговых секторов, каждый из которых соответствует центральному углу, равному 60°. Значит, в сумме они составляют полукруг радиуса 4 (см). Площадь равностороннего треугольника равна $S_{\text{треугольник}} = \frac{1}{2}a^2\sin 60°$, площадь полукруга $S_{\text{полукруг}} = \frac{1}{2}\pi R^2$. Таким образом, $S = S_{\text{треугольник}} - S_{\text{полукруг}} = \frac{1}{2}a^2\sin 60° - \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}64\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}16\pi = 16\sqrt{3} - 8\pi = 8(2\sqrt{3}-\pi)$ (см^2).

12. Ответ: 2.

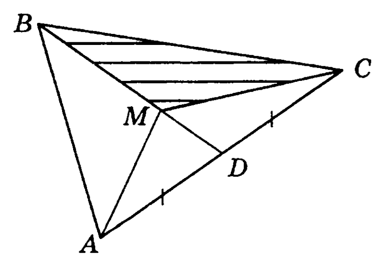


Решение. Площадь кольца, ограниченного окружностью, описанной около правильного четырехугольника, и окружностью, вписанной в него, равна разности площади круга, ограниченного окружностью, описанной около квадрата, и площади круга, ограниченного окружностью, вписанной в квадрат $S = S_{\text{опис}} - S_{\text{впис}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi$. Сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_4 = R\sqrt{2}$; а сторона квадрата, описанного около окружности радиуса r, равна $a_4 = 2r$. Отсюда $R\sqrt{2} = 2r$, $R = r\sqrt{2}$. Из полученной формулы для площади кольца $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi$ получаем $R^2 - r^2 = 1$, $2r^2 - r^2 = 1$, $r^2 = 1$, $r = 1$.

Отсюда $a_4 = 2r = 2$.

Часть 3

13. Ответ: 28 см^2.



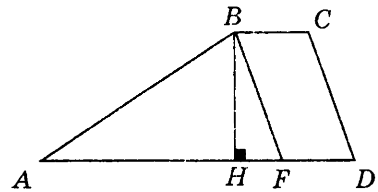
Решение. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ (см);

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84$ (см^2).

Медиана BD делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника ABD и CBD ($AD = CD$, а высота, проведенная из точки B, — общая). Кроме того, так как $BM : MD = 2 : 1$, то $S_{BMC} = 2S_{DMC}$ (эти треугольники имеют общую высоту, проведенную из точки C). Таким образом, $S_{BMC} = \frac{2}{3}S_{BDC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 28$ (см^2).

14. Ответ: 153, 6 см^2.



Решение. Через вершину B трапеции $ABCD$ проведем прямую BF, параллельную стороне CD. Тогда четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AD$ по определению трапеции, $BF \parallel CD$ по построению.

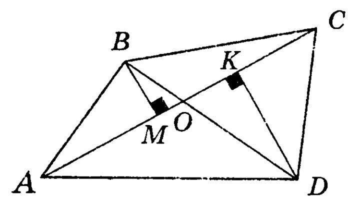
Следовательно, $BF = CD = 12$ (см); $FD = BC = 6$ (см). Таким образом, в треугольнике ABF стороны равны 12 см, 16 см и 20 см. Так как длины сторон этого треугольника удовлетворяют условию теоремы, обратной теореме Пифагора, то этот треугольник — прямоугольный. Следовательно, $S_{ABF} = \frac{1}{2}AB \cdot BF =$ $= 96$ (см^2). Высота BH треугольника ABF является также высотой параллелограмма $ABCD$; $BH = \frac{2S_{ABF}}{AF}$, $AF = AD - FD = 26 -$ $- 6 = 20$ (см), значит, $BH = \frac{2 \cdot 96}{20} = 9{,}6$ (см).

Площадь трапеции можно найти двумя способами.

1. $S_{ABCD} = S_{ABF} + S_{BCDF}$; $S_{BCDF} = BC \cdot BH = 6 \cdot 9{,}6 = 57{,}6$ (см^2); $S_{ABCD} = 57{,}6 + 96 = 153{,}6$ (см^2).

2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = \frac{1}{2}(26 + 6) \cdot 9{,}6 = 153{,}6$ см^2.

15.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Проведем перпендикуляры BM и DK к диагонали AC. По условию $S_{ABC} = S_{ADC}$, следовательно, $BM = DK$. Углы BOM и DOK равны как вертикальные. Следовательно, прямоугольные треугольники BOM и DOK равны (по катету и острому углу), отсюда, $BO = DO$. Аналогично, из равенства $S_{ABD} = S_{CBD}$ получим, что $AO = CO$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, четырехугольник $ABCD$ параллелограмм.

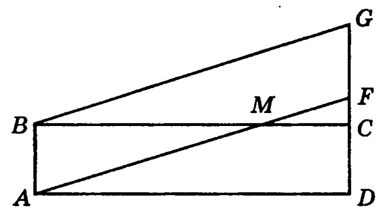
Учебник «Геометрия. 7–9» И.Ф. Шарыгина

ТЕСТ 1

Вариант 1

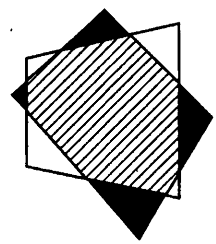
Часть 1

1. О т в е т: 2.



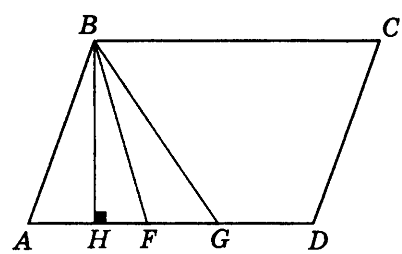
Решение. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его стороны AB и CD равны и параллельны. Так как $AFGB$ — параллелограмм, то его стороны AB и FG равны и параллельны. По условию, стороны CD и FG лежат на одной прямой GD, значит, эта прямая параллельна стороне AB. Сторона AB у данных четырехугольников — общая, а сторона BC прямоугольника $ABCD$ является их общей высотой. Следовательно, $S_{AFGB} = S_{ABCD} = 11$ (см^2).

2. О т в е т: 2.



Решение. По основному свойству площади каждый из двух равновеликих четырехугольников состоит из общей заштрихованной части и для одного из них четырех белых треугольников, а для другого четырех черных треугольников. Сумма площадей белых треугольников равна разности всей площади четырехугольника и общей части и равна S_2. Аналогично, сумма площадей черных треугольников равна разности всей площади четырехугольника и общей части и равна S_1. Как S_1 так и S_2 равна разности равных площадей, т. е. $S_1 = S_2$.

3. О т в е т: 2.

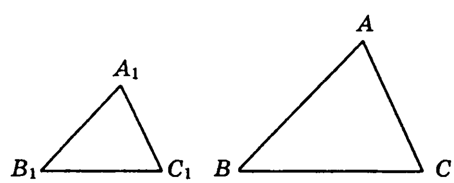


Решение. В параллелограмме $ABCD$ из вершины B к основанию AD проведем высоту BH, которая является и высотой для треугольника FBG, так как основание треугольника FBG лежит на основании параллелограмма $ABCD$.

$$S_{FBG} = \frac{1}{2} FG \cdot BH = 2BH; \; S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16BH.$$

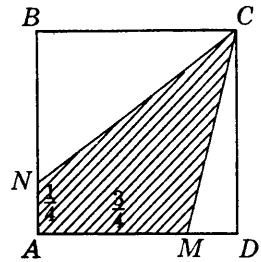
$$S_{ABCD} : S_{FBG} = 16BH : 2BH = 8 : 1.$$

4. О т в е т: 3.



Решение. В подобных треугольниках площади относятся, как квадраты сходственных сторон. По условию, сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ относятся, как 5 : 3. Значит, $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = 25 : 9$, кроме того, $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} + 16$. Отсюда $S_{A_1B_1C_1} + 16 = \frac{25}{9} S_{A_1B_1C_1}$, $S_{A_1B_1C_1} = 9$ (см^2). Следовательно, $S_{ABC} = 25$ (см^2).

5. О т в е т: 1.

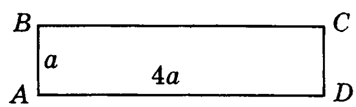


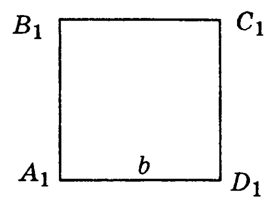
<u>Решение.</u> Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площади треугольника NBC, площади треугольника MCD и площади четырехугольника $ANCM$ $S_{ABCD} = S_{NBC} + S_{MCD} + S_{ANCM}$. Следовательно, площадь четырехугольника $ANCM$ равна $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AN = \frac{1}{4}AB$, значит, отрезок $BN = \frac{3}{4}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрат равна 1 см. Отсюда следует, что площадь треугольника NBC $S_{NBC} = \frac{1}{2}NB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8}$ (см^2).

По условию на стороне AD квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AM = AD$, значит, отрезок $MD = AD$. Отсюда следует, что площадь треугольника MCD $S_{MCD} = \frac{1}{2}MD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8}$ (см^2). Значит $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ (см^2).

Часть 2

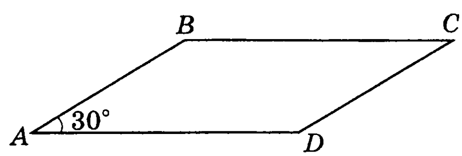
6. О т в е т: 12 см.





<u>Решение.</u> Прямоугольник $ABCD$ и квадрат $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ $S = b^2 = 36$ см^2, значит, и площадь прямоугольника $ABCD$ равна 36 см^2. По условию стороны прямоугольника $ABCD$ относятся как 1 : 4, значит, его площадь равна $S = 4a \cdot a$. Отсюда $36 = 4a^2$; $a = 3$ (см). Следовательно, большая сторона прямоугольника равна 12 см.

7. О т в е т: 44 см^2.

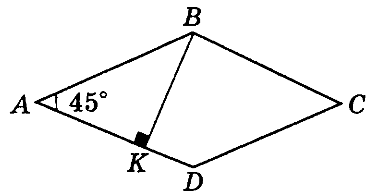


<u>Решение.</u> По условию стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30°. Значит, $S = AB \cdot AD \sin 30° = 8 \cdot 11 \cdot \frac{1}{2} = 44$ (см^2).

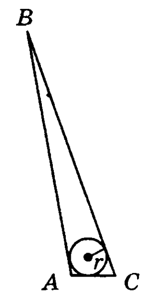
8. О т в е т: $50\sqrt{2}$ см^2.

<u>Решение.</u> По условию отрезок BK — высота ромба $ABCD$, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 45°$, следовательно, прямоугольный треугольник ABK — равнобедренный и $BK = AK$. Сторона AB ромба $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного равно-

бедренного треугольника ABK. По теореме Пифагора $AB^2 = BK^2 + AK^2 = 2 \cdot (5\sqrt{2})^2$, $AB = 10$ (см). Так как в ромбе все стороны равны, то $AB = AD = 10$ (см). Площадь ромба $ABCD$ равна $S_{ABCD} = AD \cdot BK = 10 \cdot 5\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$ (см^2).



9. Ответ: $\frac{4}{3}$ см.



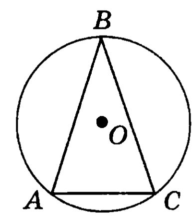
Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, полупериметр треугольника $p = 27$ (см).

$S = \sqrt{27 \cdot (27-25) \cdot (27-26) \cdot (27-3)} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24} = 36$ (см^2).

С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Значит, $27r = 36$, отсюда $r = \frac{4}{3}$ (см).

10. Ответ: 16,9 см.

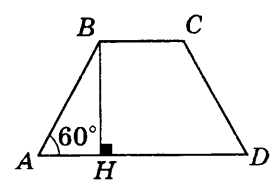


Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 25$ (см).

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{25 \cdot (25-13) \cdot (25-13) \cdot (25-24)} = \sqrt{25 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 1} = 60$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле:

$S = \frac{abc}{4R}$, отсюда $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 24}{4 \cdot 60} = 16{,}9$ (см).

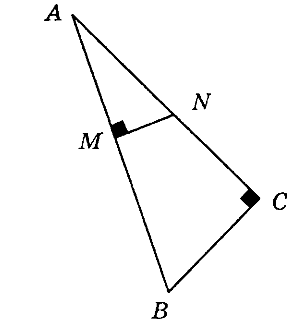
11. Ответ: $55\sqrt{3}$ см^2.



Решение. Проведем из вершины B равнобедренной трапеции $ABCD$ высоту BH, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 60°$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен 30°, катет AH прямоугольного треугольника ABH равен 5 см. По теореме Пифагора катет $BH^2 = AB^2 - AH^2 = \sqrt{10^2 - 5^2}$, $BH = 5\sqrt{3}$ (см).

По условию $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 42$ см и $AB = CD = 10$ см, значит, $BC + AD = 22$ см. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = 11 \cdot 5\sqrt{3} = 55\sqrt{3}$ (см^2).

12. О т в е т: 4 см.



Решение. Так как треугольники ABC и ANM прямоугольные, то $\angle BAC$ — общий, а $\angle ABC = \angle ANM$ по теореме о сумме треугольника. Обозначим $\angle ABC = \beta$, тогда площадь треугольника ABC $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\beta$, а площадь треугольника ANM $S_{ANM} = \ AN \cdot NM \cdot \sin\beta$. В треугольнике ANM введем обозначения $AN = y$, $NM = x$. Так как по условию $S_{ABC} = 4S_{ANM}$, то $\frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\beta = 4\left(\frac{1}{2}AN \cdot NM \cdot \sin\beta\right)$, т.е. $\frac{1}{2}17 \cdot\ 8\sin\beta = 4\left(\frac{1}{2}yx\sin\beta\right)$, $17 \cdot 8 = 4yx$.

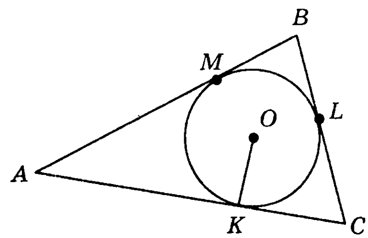
Треугольники ABC и ANM — подобны по двум углам, отсюда $\frac{AB}{AN} = \frac{BC}{NM}$, т.е. $\frac{17}{y} = \frac{8}{x}$, $y = \frac{17}{8}x$. Получили систем уравнений

$$\begin{cases} 17 \cdot\ 8 = 4yx, \\ y = \frac{17}{8}x. \end{cases}$$

Отсюда $4x^2 = 64$, $x = 4$ (см). Следовательно, $NM = 4$ (см).

Часть 3

13. О т в е т: 15 см; 14 см и 13 см.

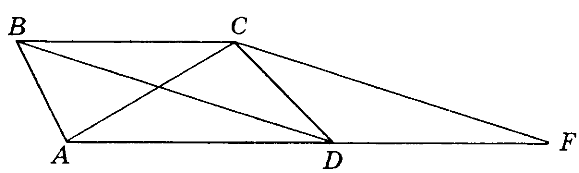


Решение. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках K, L и M, причем $AK = 8$ см; $CK = 6$ см. По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки, $AM = AK = 8$ (см); $CL = CK = 6$ см; $BM = BL = x$ см. Отсюда, $AB = x + 8$, $BC = x + 6$ и $AC = 14$ см.

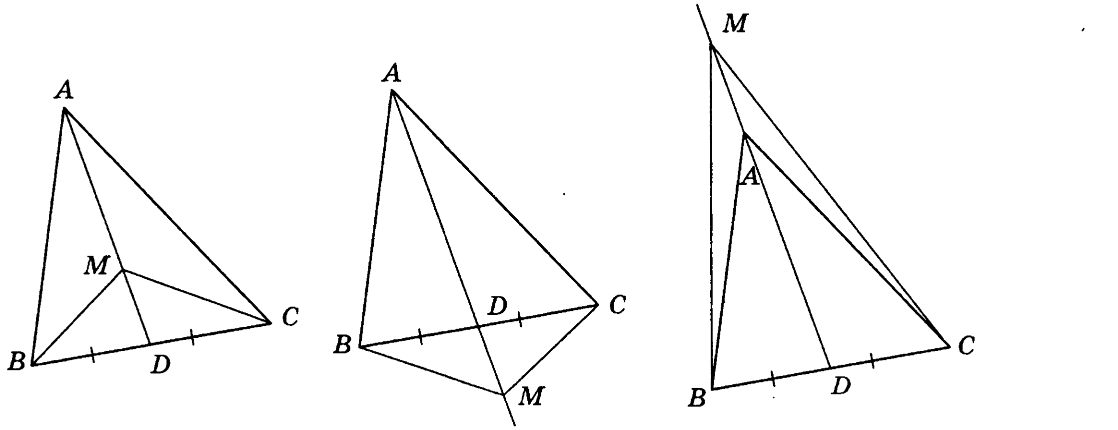
Найдем площадь треугольника ABC по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности; $p = x + 14$ (см). Следовательно, $S = 4(x + 14)$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника по формуле Герона равна: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+14) \cdot ((x+14)-(x+6))((x+14)-(x+8))((x+14)-14)} = \sqrt{(x+14) \cdot 8 \cdot 6 \cdot x} = 4\sqrt{3x(x+14)}$ (см^2). Приравняв эти выражения, получим уравнение $4(x+14) = 4\sqrt{3x(x+14)}$, откуда $x = 7$. Следовательно, $AB = 15$ см, $BC = 13$ см, $AC = 14$ см.

14. О т в е т: 24 см^2.

Решение. Через вершину C трапеции $ABCD$ проведем прямую CF, параллельную диагонали BD. Тогда четырехугольник $DBCF$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AD$ ($ABCD$ — трапеция), $FC \parallel BD$ по построению. Следовательно, $FC = BD = 8$ (см); $DF = BC = 3$ (см). Таким образом, длины сторон треугольника ACF равны $FC = 8$ (см), $AC = 6$ см и $AF = 10$ см. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACF — прямоугольный. Значит, $S_{ACF} = \frac{1}{2}AC \cdot FC = 6 \cdot 8 = 24$ (см^2). В треугольниках ABC и CDF основания (DF и BC) и высоты (расстояние между параллельными прямыми) равны, поэтому эти треугольники равновелики; $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$, $S_{ACF} = S_{ACD} + S_{CDF}$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ACF} = 24$ (см^2).



15.



а) б) в)

Решение. Возможны три варианта расположения точки M.

1. Точка M принадлежит медиане AD (рис. а). Так как отрезок AD — медиана треугольника ABC, то треугольники ABD и ACD равновелики и $BD = CD$.

Значит, MD — медиана треугольника BMC. Следовательно, и треугольники BMD и CMD равновелики. Следовательно, треугольники AMB и AMC равновелики.

2. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку D (рис. б). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно суммам площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{ABD} + S_{BMD}$ и $S_{AMC} = S_{ACD} + S_{CMD}$.

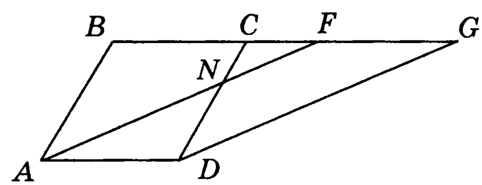
3. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку A (рис. в). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно разностям площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{BMD} - S_{ABD}$ и $S_{AMC} = S_{CMD} - S_{ACD}$.

Вариант 2

Часть 1

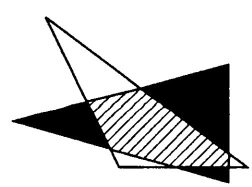
1. Ответ: 3.

Решение. Так как $ABCD$ — ромб, то его стороны AD и BC равны и параллельны. Так как $AFGD$ — параллелограмм, то его стороны AD и FG равны и параллельны. По условию, стороны BC и FG лежат на одной прямой BG, значит, эта прямая параллельна стороне AD. Сторона AD у данных четырехугольников общая, а их общей высотой является расстояние между параллельными прямыми BG и AD. Следовательно, $S_{AFGD} = S_{ABCD} = 11$ (см^2).

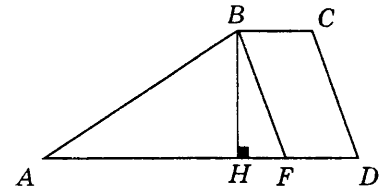


2. Ответ: 2.

Решение. По основному свойству площади каждый из двух равновеликих треугольников состоит из общей заштрихованной части и для одного из них трех белых треугольников, а для другого трех черных треугольников. Сумма площадей белых треугольников равна разности всей площади треугольника и общей части и равна S_2. Аналогично, сумма площадей черных треугольников равна разности всей площади треугольника и общей части и равна S_1. Как S_1 так и S_2 равна разности равных площадей, т. е. $S_1 = S_2$.



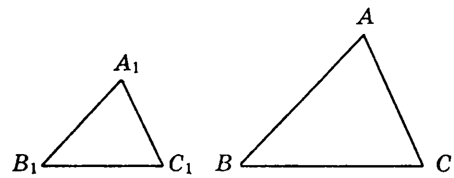
3. Ответ: 1.



Решение. В трапеции $ABCD$ проведем высоту BH, которая является общей высотой для треугольника FBG и трапеции $ABCD$, так как основание треугольника ABF лежит на основании трапеции $ABCD$. Четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм по определению ($AD \parallel BC$, $FB \parallel CD$), то $FD = BC = 4$ (см). Значит, $AF = 10$ (см).

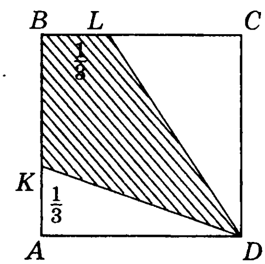
$S_{FBG} = \frac{1}{2}AF \cdot BH = 5BH$; $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = 9BH$; $S_{BCD} : S_{ABF} = 9BH : 5BH = 9 : 5$.

4. Ответ: 4.



Решение. В подобных треугольниках площади относятся, как квадраты сходственных линейных элементов. По условию, периметры подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ относятся, как $2 : 5$. Значит, $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = 4 : 25$, кроме того, $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} + 42$. Отсюда $S_{ABC} + 42 = \frac{25}{4}S_{ABC}$. Следовательно, $S_{ABC} = 8$ (см^2).

5. Ответ: 1.



Решение. Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площади треугольника KAD, площади треугольника LCD и площади четырехугольника $KBLD$ $S_{ABCD} = S_{KAD} + S_{LCD} + S_{KBLD}$. Следовательно, площадь четырехугольника $KBLD$ равна $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - S_{LCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{3}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрата равна 1 см. Отсюда следует, что площадь треугольника KAD $S_{KAD} = \frac{1}{2}KA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ (см^2).

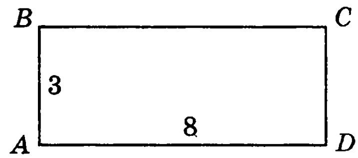
По условию на стороне BC квадрата $ABCD$ отложен отрезок $BL = \frac{1}{3}BC$, значит, отрезок $LC = \frac{2}{3}BC$. Отсюда следует, что площадь треугольника LCD $S_{MCD} = \frac{1}{2}LC \times CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ (см^2). Значит, $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - - S_{LCD} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ (см^2)

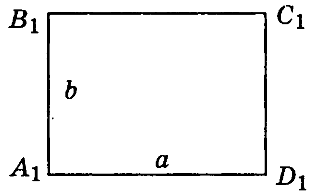
Часть 2

6. Ответ: 4 см.

Решение. Прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь прямоугольника $ABCD$ $S_{ABCD} = 3 \cdot 8 = 24$ (см^2), значит, и площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна 24 см^2.

По условию периметр прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равен 20 см. Значит, $a + b = 10$, а его площадь равна $S_{A_1B_1C_1D_1} = ab = 24$. Отсюда $\begin{cases} a + b = 10, \\ ab = 24; \end{cases}$ $a = 10 - b$; $(10 - b)b = 24$; $b^2 - 10b + 24 = 0$. Следовательно, b равно 4 см или 6 см, при этом a равно соответственно 6 см или 4 см.

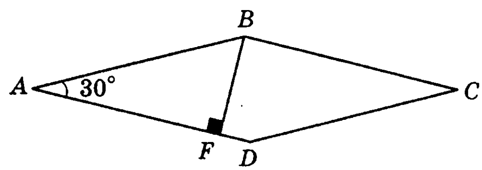




Значит, меньшая сторона прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна 4 см.

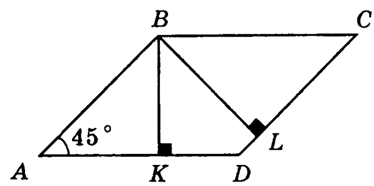
7. О т в е т: 18 см^2.

<u>Решение.</u> По условию в ромбе $ABCD$ $\angle ABC = 150°$, значит, $\angle BAD = 30°$. В ромбе все стороны равны проведем высоту BF. Значит, $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 30° = 6 \cdot 6 \times \times \frac{1}{2} = 18$ (см^2).



8. О т в е т: 30 см^2.

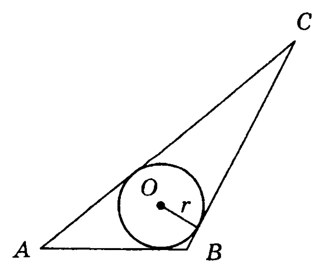
<u>Решение.</u> По условию отрезок BK — высота параллелограмма $ABCD$, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 45°$, и значит, прямоугольный треугольник ABK — равнобедренный и $BK = AK$. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника ABK.



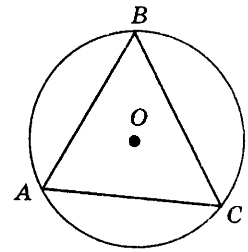
По теореме Пифагора $AB^2 = BK^2 + AK^2 = 2 \cdot (3\sqrt{2})^2 = 36$ (см^2), $AB = 6$ (см). Так как в параллелограмме противолежащие стороны равны, то $AB = CD = 6$ см. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S_{ABCD} = CD \cdot BL = 6 \cdot 5 = 30$ (см^2).

9. О т в е т: $\frac{9}{4}$ см.

<u>Решение</u>. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где полупериметр треугольника $p = 32$ (см); $S = \sqrt{32 \cdot (32-29) \cdot (32-30) \cdot (32-5)} = \sqrt{32 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 27} = 72$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Значит, $32r = 72$, отсюда $r = \frac{9}{4}$ (см).

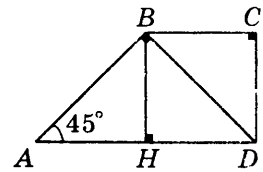


10. Ответ: 8,125 см.



Решение. Так как в треугольнике ABC даны три стороны, то можно найти площадь треугольника по формуле Герона. Полупериметр треугольника $p = 21$ (см); $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2). С другой стороны площадь треугольника ABC можно найти по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$, отсюда $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125$ (см).

11. Ответ: 24.

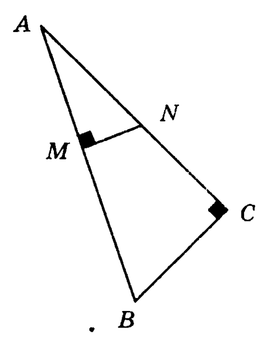


Задача может быть решена несколькими способами.

Решение. 1 способ. Проведем из вершины B прямоугольной трапеции $ABCD$ высоту BH. Тогда трапеция разобьется на три равных прямоугольных треугольника, катеты которых равны 4. Площадь каждого треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$. значит, площадь трапеции равна сумме площадей трех прямоугольных равнобедренных треугольников 24.

2 способ. Катет прямоугольного равнобедренного треугольника ABD является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника BCD. Площадь трапеции равна сумме площадей двух прямоуголбных равнобедренных треугольников ABD и BCD, стороны которых равны 4 и $4\sqrt{2}$; $S_{BCD} = \frac{1}{2}4^2 = 8$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})^2 = 16$, $S = S_{BCD} + S_{ABD} = 8 + 16 = 24$.

12. Ответ: 7,5 см.



Решение. Так как треугольники ABC и ANM прямоугольные, то $\angle BAC$ — общий, а $\angle ABC = \angle ANM$ по теореме о сумме треугольника. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, тогда площадь треугольника ABC $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC \sin\alpha$, а площадь треугольника ANM: $S_{ANM} = \frac{1}{2}AN \cdot AN \sin\alpha$. В треугольнике ANM введем обозначения $AN = y$, $AM = x$. Так как по условию $S_{ABC} = 4S_{ANM}$, то $\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha = 4\left(\frac{1}{2}AN \cdot AM \sin\alpha\right)$, т. е.

$\frac{1}{2}17 \cdot 15 \sin\alpha = 4\left(\frac{1}{2}yx \sin\alpha\right)$, $17 \cdot 15 = 4yx$.

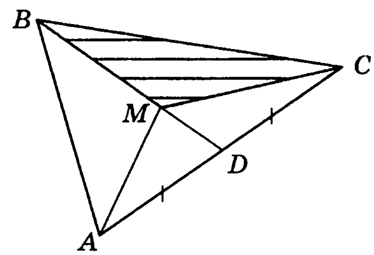
Треугольники ABC и ANM — подобны по двум углам, отсюда $\frac{AB}{AN} = \frac{BC}{NM}$, т.е. $\frac{17}{y} = \frac{15}{x}$, $y = \frac{17}{15}x$. Получили систем уравнений

$$\begin{cases} 17 \cdot 15 = 4yx, \\ y = \frac{17}{15}x. \end{cases}$$

Отсюда $4x^2 = 15^2$, $x = 7{,}5$ (см). Следовательно, $AM = 7{,}5$ (см).

Часть 3

13. О т в е т: 28 см^2.



Решение. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ (см);

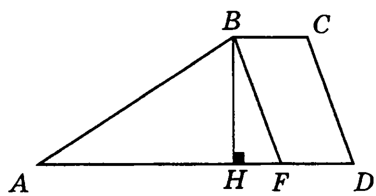
$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2).

Медиана BD делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника ABD и CBD ($AD = CD$, а высота, проведенная из точки B — общая). Кроме того, так как $BM : MD = 2 : 1$, то $S_{BMC} = 2S_{DMC}$ (эти треугольники имеют общую высоту, проведенную из точки C).

Таким образом, $S_{BMC} = \frac{2}{3}S_{BDC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 28$ (см^2).

14. О т в е т: 153,6 см^2.



Решение. Через вершину B трапеции $ABCD$ проведем прямую BF, параллельную стороне CD. Тогда четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AD$ по определению трапеции, $BF \parallel CD$ по построению.

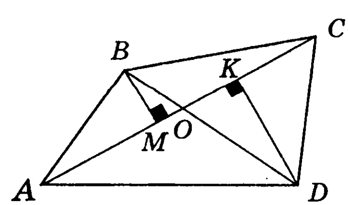
Следовательно, $BF = CD = 12$ (см); $FD = BC = 6$ (см). Таким образом, в треугольнике ABF стороны равны 12 см, 16 см и 20 см. Так как длины сторон этого треугольника удовлетворяют условию теоремы, обратной теореме Пифагора, то этот треугольник — прямоугольный. Следовательно, $S_{ABF} = \frac{1}{2}AB \cdot BF = 96$ (см^2). Высота BH треугольника ABF является также высотой параллелограмма $ABCD$; $BH = \frac{2S_{ABF}}{AF} = 9{,}6$ (см).

Площадь трапеции можно найти двумя способами.

1. $S_{ABCD} = S_{ABF} + S_{BCDF}$; $S_{BCDF} = BC \cdot BH = 57{,}6$ (см^2); $S_{ABCD} = 153{,}6$ см^2.

2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = 153{,}6$ см^2.

15.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Проведем перпендикуляры BM и DK к диагонали AC. По условию $S_{ABC} = S_{ADC}$, следовательно, $BM = DK$. Углы BOM и DOK равны, как вертикальные. Следовательно, прямоугольные треугольники BOM и DOK равны (по катету и острому углу), отсюда, $BO = DO$. Аналогично, из равенства $S_{ABD} = S_{CBD}$ получим, что $AO = CO$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ диагональ точкой пересечения делятся пополам, следовательно, четырехугольник $ABCD$ параллелограмм.

ТЕСТ 2

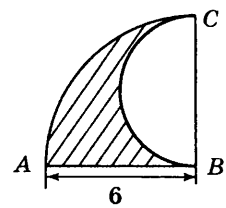
Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 3.

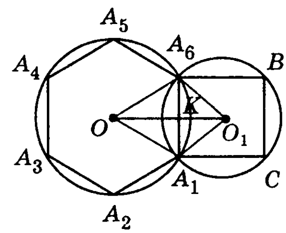
Решение. Сторона правильного n-угольника выражается через радиус описанной около него окружности формулой $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, где $\frac{180°}{n}$ — половина центрального угла правильного n-угольника. По условию $a_n < R$, т.е. $2R\sin\frac{180°}{n} < R$, следовательно, $\sin\frac{180°}{n} < \frac{1}{2}$. С увеличением острого угла его синус возрастает, поэтому $\frac{180°}{n} < 30°$, т.е. $n > 6$.

2. Ответ: 4.



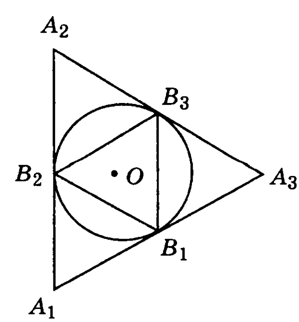
Решение. Длина границы заштрихованной фигуры равна сумме длин полуокружности BC радиуса $r = 3$, дуги окружности AC радиуса $R = 6$, градусная мера которой равно $90°$, и радиуса окружности AB, равного 6. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна $L = \frac{1}{2}(2\pi r) + \frac{1}{4}(2\pi R) + AB = 3\pi + 3\pi + 6 = 6\pi + 6$.

3. Ответ: 1.



Решение. Соединим точки A_1 и A_6 с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OA_1O_1 и OA_6O_1 (OA_1 и OA_6 равны, как радиусы окружности с центром в точке O, A_1O_1 и A_6O_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде A_1A_6 и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров и хорды A_1A_6 буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда A_1A_6 является стороной вписанного правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и одновременно является стороной вписанного квадрата для окружности с центром в точке O_1, значит, сторона квадрата равна 6 см. Треугольник $A_1O_1A_6$ — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $O_1K = 3$ см. В равностороннем треугольнике A_1OA_6 высота OK (одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $OK = OA_6 \cdot \cos60° = 3\sqrt{3}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = 3(1 + \sqrt{3})$ (см).

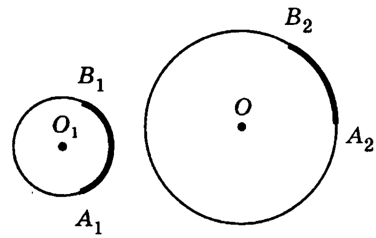
4. Ответ: 3.



Решение. Сторона треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{впис} = R\sqrt{3}$; а сторона треугольника, описанного около этой окружности равна $a_{опис} = 2R\sqrt{3}$. Следовательно, отношение сторон описанного и вписанного треугольника $\frac{a_{опис}}{a_{впис}} = 2$.

5. Ответ: 2.

Решение. Длина дуги окружности вычисляется по формуле $l = \frac{\pi R}{180^\circ}\alpha$, где l — длина дуги, соответствующая центральному углу, равному α, R — радиус окружности. Значит, длина дуги l окружности с центром точке O_1 и радиусом 3 (см), соответствующая центральному углу, равному α_1, равна $l_1 = \frac{\pi}{60}\alpha_1$. Длина дуги l_2 окружности с центром в точке O равна $l_2 = \frac{\pi}{20}\alpha_2$. По условию $l_1 = l_2$, отсюда, $\frac{\pi}{60}\alpha_1 = \frac{\pi}{20}\alpha_2$, значит, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.



Часть 2

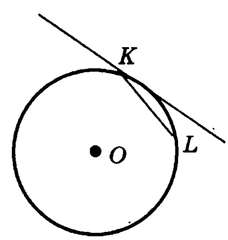
6. Ответ: 120°.

Решение. По условию, $\frac{r_n}{R_n} = \frac{1}{2}$. Так как $R_n = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, а $r_n = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$, то $\frac{r_n}{R_n} = \cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}$.

Отсюда, угол равен 60°, следовательно, $n = 3$. Значит, данный правильный многоугольник является правильным треугольником и его центральный угол равен 120°.

7. Ответ: $\frac{\pi}{9}$.

Решение. Угол, который образует хорда с касательной к окружности, проходящей через ее конец, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой. По условию градусная мера дуги окружности равна 40°. Значит, искомый угол равен 20° или по формуле $\alpha = \frac{\pi}{180^\circ}n = \frac{\pi}{180^\circ}20 = \frac{\pi}{9}$, где α — радианная мера угла, n — градусная. Таким образом, искомый угол равен $\frac{\pi}{9}$.

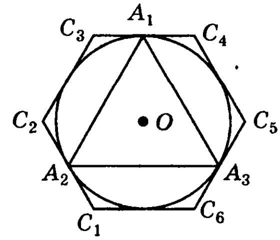


8. Ответ: 120°.

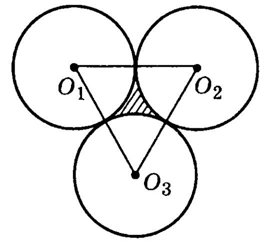
Решение. Площадь сектора круга вычисляется по формуле $S_\alpha = \frac{\alpha}{2}R^2$, где α — радианная мера центрального угла. По условию $S_\alpha = \frac{\alpha}{2}R^2 = 12\pi$ (см^2) и $R = 6$ (см). Отсюда $18\alpha = 12\pi$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. Значит, центральный угол равен π или 120°.

9. Ответ: 3.

Решение. Радиус r_6 окружности, вписанной в правильный шестиугольник, определяется по формуле $r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$. По условию сторона правильного шестиугольника равна 2 (см), значит, $r_6 = \sqrt{3}$ (см). Сторона треугольника, вписанного в окружность, определяется по формуле $a_3 = R_3$, где R_3 — радиус описанной окружности. По условию задачи $R_3 = r_6 = \sqrt{3}$ так как это одна и та же окружность. Следовательно, $a_3 = R_3\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$ (см).



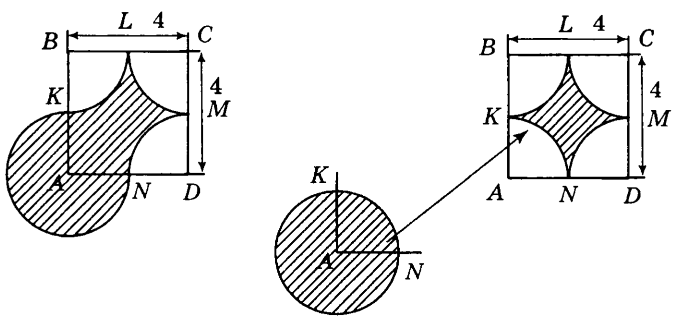
10. Ответ: 2π.



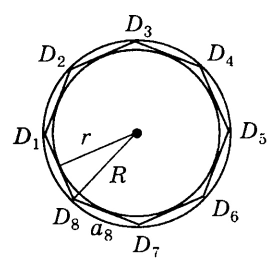
Решение. Соединим центры окружностей, получим треугольник $O_1O_2O_3$. Стороны треугольника являются линиями центров и проходят через точки касания окружностей, значит, каждая из них равна 8 (см) и треугольник $O_1O_2O_3$ — равносторонний. Угол равностороннего треугольника равен $60°$. Значит, длина каждой из трех дуг равна $\frac{1}{6}$ длины окружности. Таким образом, длина границы равна сумме трех дуг, т.е. половине длины окружности, радиус которой равны 4 см; $L = \frac{1}{2}\pi R = 2\pi$ (см).

11. Ответ: 16.

Решение. Заштрихованную фигуру образуют круг радиуса 2 с центром в вершине A квадрата $ABCD$ и часть квадрата, если из него вырезать четыре сектора радиуса 2 с центрами в вершинах квадрата $ABCD$. Градусная мера дуги каждого из секторов равна $90°$. Площадь этих четырех секторов составляет площадь круга радиуса 2. Таким образом, площадь закрашенной фигуры равна площади квадрата $S = 16$.



12. Ответ: 2.



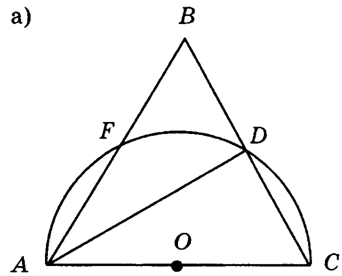
Решение. Так как восьмиугольник — правильный, то радиусы вписанной и описанной окружностей можно выразить через сторону восьмиугольника: $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{8}}$; $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{8}}$. Обозначим $\dfrac{180°}{8} = \alpha$,

тогда $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$; $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{a}{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{a\cos\alpha}{2\sin\alpha}$.

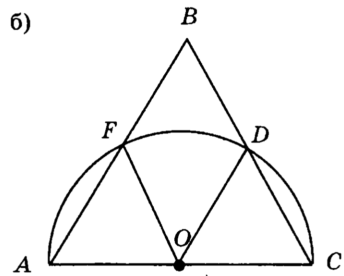
Площадь круга, вписанного в восьмиугольник, равна $S_{\text{впис}} = \pi r^2$, а площадь круга, описанного около восьмиугольника, равна $S_{\text{опис}} = \pi R^2$. Площадь кольца, следовательно, равна $S_{\text{опис}} - S_{\text{впис}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha} - \dfrac{a^2\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}\right) = \dfrac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}(1 - \cos^2\alpha) = \dfrac{1}{4}\pi a^2$. По условию площадь кольца равна π. Отсюда $\dfrac{1}{4}\pi a^2 = \pi$, $a = 2$.

Часть 3

13. Ответ: $6(3\sqrt{3} - \pi)$ см^2.



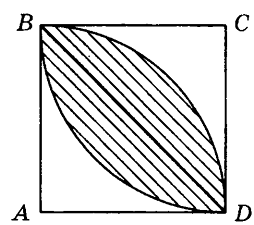
Решение. Треугольник ADC — прямоугольный, так как вписанный угол ADC опирается на диаметр окружности (рис. а). Так как треугольник ABC — равносторонний, то $\angle DCA = 60°$, значит, $\angle DAC = 30°$. Аналогично, доказывается, что $\angle FCA = 30°$. Отсюда, градусные меры каждой из дуг AF и DC равны $60°$. Таким образом, градусная мера дуги DF также равна $60°$ или $\frac{\pi}{6}$. Значит, $\angle FOA = 60°$ и $\angle DOC = 60°$, и треугольники AFO и ODC — равносторонние, стороны которых равны 6 (см).



Площадь части треугольника ABC, лежащей вне полукруга $AFDC$, можно представить в виде разности площади треугольника ABC и площади части треугольника ABC, лежащей внутри полукруга $AFDC$. Так как одна сторона равностороннего треугольника ABC является диаметром круга радиуса R, то стороны треугольника равны $2R$. Таким образом, $S_{ABC} = \frac{1}{2}4R^2\sin 60° = 72\frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$ (см^2).

Площадь части треугольника ABC, лежащей внутри полукруга $AFDC$ можно представить в виде суммы двух равносторонних треугольников AFO и ODC и сектора AFD (рис. б). $S_{AFO} = S_{ODC} = \frac{1}{2}R^2\sin 60° = 18\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см^2). Площадь сектора круга вычисляется по формуле $S_{\text{сек}} = \frac{\alpha}{2}R^2$, где R — радиус круга, α — угловая величина дуги сегмента, выраженная в радианах. $S_{\text{сек}} = 6\pi$ (см^2). Таким образом, $S_{AFDC} = 2 \cdot 18\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\pi = 6(3\sqrt{3} + \pi)$ (см^2). Следовательно, $S_{FBD} = S_{ABC} - S_{AFDC} = 36\sqrt{3} - 6(3\sqrt{3} + \pi) = 6(3\sqrt{3} - \pi)$ (см^2).

14. Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ см^2.



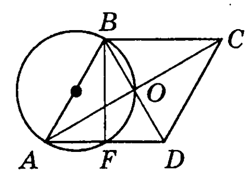
Решение. Отрезок AD — общая хорда кругов с центрами A и C. Общая часть кругов состоит из двух равных круговых сегментов, угловая величина дуги которых равна $90°$ или $\frac{\pi}{4}$, так как их центры находятся в вершинах единичного квадрата и их радиусы равны 1. Площадь сегмента вычисляется по формуле:

$$S_{\text{сег}} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha),$$

где R — радиус круга, α — угловая величина дуги сегмента, выраженная в радианах.

Значит, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Таким образом, площадь общей части кругов $S = 2S_{\text{сег}} = R^2(\alpha - \sin\alpha) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ (см^2).

15. Ответ: 64π см^2.



Решение. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка F — середина стороны AD. Так как угол AOB — вписанный и опирается на диаметр, то $\angle AOB = 90°$, т.е. параллелограмм $ABCD$ — ромб. Угол AFB — также вписанный и опирается на диаметр, поэтому угол AFB равен $90°$. Следовательно, отрезок BF является медианой и высотой треугольника ABD. Значит, треугольник ABD — равнобедренный и $AB = BD$. Таким образом, треугольник ABD — равносторонний, т.е. $\angle DAB = 60°$ и $\angle ABC = 120°$. Следовательно, диагональ BD — меньшая, отсюда диаметр $AB = 16$. Площадь круга $S_{\text{круг}} = \pi R^2 = 64\pi$.

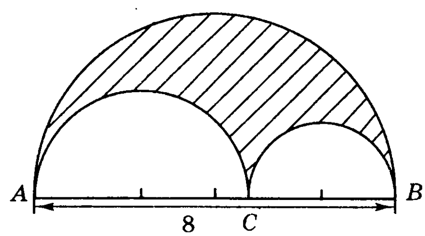
Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. По условию $\frac{1}{2}a_n \geqslant r$, а сторона правильного многоугольника $a_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, значит, $\operatorname{tg}\frac{180°}{n} \geqslant 1$. Так как при возрастании острого угла его тангенс возрастает, то $\frac{180°}{n} \geqslant 45°$, следовательно, $n \leqslant 4$.

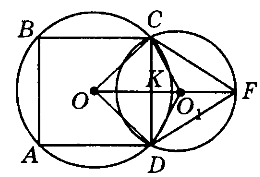
2. Ответ: 1.



Решение. Длина границы заштрихованной фигуры равна сумме длин полуокружностей радиусов $R_1 = 4$, и R_2 и R_3 таких, что $R_2 + R_3 = 4$. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна

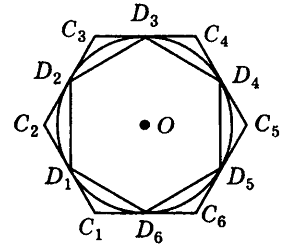
$$L = \pi R_1 + \pi R_2 + \pi R_3 = \pi(R_1 + R_2 + R_3) = \pi(4 + 4) = 8\pi.$$

3. Ответ: 2.



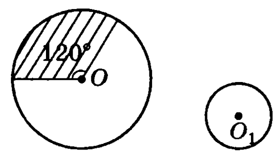
Решение. Соединим точки C и D с центрами окружностей точками O и O_1. Из равенства треугольников OCO_1 и ODO_1 (OC и OD равны, как радиусы окружности с центром в точке O, CO_1 и DO_1 равны, как радиусы окружности с центром в точке O_1, сторона OO_1 — общая) следует, что линия центров OO_1 перпендикулярна хорде CD и делит ее пополам. Обозначим точку пересечения линии центров OO_1 и хорды CD буквой K. По условию для окружности с центром в точке O хорда CD является стороной вписанного квадрата и одновременно является стороной вписанного равностороннего треугольника CFD для окружности с центром в точке O_1, значит, $CD = 3$ (см). Треугольник COD — прямоугольный (диагонали квадрата перпендикулярны) и равнобедренный, значит, $OK = CK = \frac{3}{2}$ (см). В равностороннем треугольнике CFD высота FK (одновременно медиана и биссектриса) принадлежит линии центров и равна $FK = CF \cdot \cos 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения медиан, следовательно, $O_1K = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см). Таким образом, $OO_1 = OK + O_1K = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ (см).

4. О т в е т: 4.



Решение. Сторона шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_{впис} = R$, а сторона шестиугольника, описанного около этой окружности равна $a_{опис} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Следовательно, отношение сторон вписанного и описанного шестиугольников $\frac{a_{впис}}{a_{опис}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. О т в е т: 1.



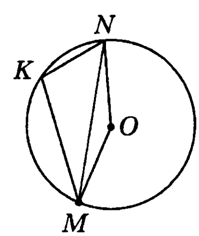
Решение. Длина дуги окружности вычисляется по формуле $l = \frac{\pi R}{180°}\alpha$, где l — длина дуги, соответствующая центральному углу, равному α, R — радиус окружности. Значит, длина дуги l окружности с центром точке O и радиусом R, соответствующая центральному углу, равному $120°$, равна $l = \pi\frac{2}{3}R$. С другой стороны длина окружности с центром в точке O_1 равна $l_1 = 2\pi R_1$. По условию $l = l_1$, отсюда, $\frac{2}{3}\pi R = 2\pi R_1$, значит, $\frac{R_1}{R} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

Часть 2

6. О т в е т: 90°.

Решение. Используя формулу $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, получим $2 = 2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{180°}{n}$, $\sin\frac{180°}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда, угол $\frac{180°}{n}$ равен $45°$, следовательно, $n = 4$. Значит, данный правильный многоугольник является квадратом и его центральный угол равен $90°$.

7. О т в е т: 110° или $\frac{11\pi}{18}$.

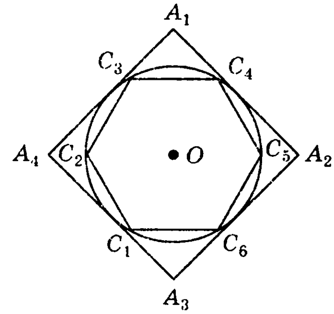


Решение. Обозначим вписанный угол MKN буквой x. Так как по определению центральный угол MON в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу, т. е. равен $2x$. По условию сумма углов MKN и MON равна $\frac{11\pi}{6}$, переведем радианную меру угла в градусную по формуле $n = \frac{180°}{\pi}\alpha = \frac{180°}{\pi}\,\frac{11\pi}{6} = 330°$, где α — радианная мера угла, n — градусная. Значит, $\angle MKN + \angle MON = x + 2x = 3x = 330°$, отсюда $x = 110°$ или $\frac{\pi}{180°}\cdot 110 = \frac{11\pi}{18}$.

8. О т в е т: 12 см.

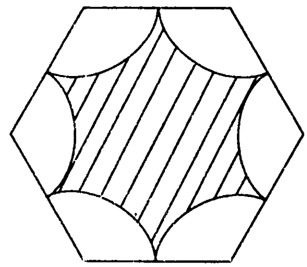
Решение. Площадь сектора круга вычисляется по формуле $S_\alpha = \frac{\alpha}{2}R^2$, где α — радианная мера центрального угла. По условию $S_\alpha = \frac{\alpha}{2}R^2 = 24\pi$ (см^2) и $\alpha = 60°$. Так как $60° = \frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{6}R^2 = 24\pi$ (см^2), $R^2 = 144$ (см^2), $R = 12$ (см).

9. Ответ: 6 см.



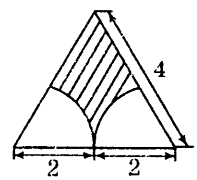
Решение. Радиус R_6 окружности, описанной около правильного шестиугольника, определяется по формуле $R_6 = a_6$. По условию сторона правильного шестиугольника a_6 равна 3 (см), значит, $R_6 = 3$ (см). Сторона квадрата a_4, описанного около окружности, определяется по формуле $a_4 = 2r_4$, где r_4 — радиус вписанной окружности. По условию задачи $R_6 = r_4 = 3$ (см), так как это одна и та же окружность. Следовательно, $a_4 = 2r_4 = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

10. Ответ: 12π см.



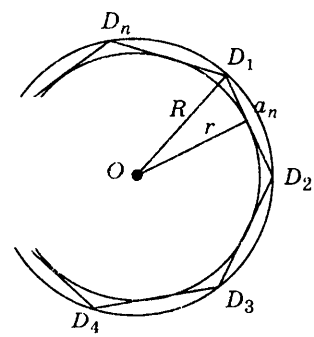
Решение. Угол правильного шестиугольника равен $120°$. Радиусы окружностей, проведенных из вершин шестиугольника равны 3 см, а стороны шестиугольника равны 6 см и являются линиями центров, значит, окружности касаются. Точки касания являются серединами сторон шестиугольника, следовательно, построенная таким образом фигура состоит из шести равных дуг, градусная мера которых составляет $120°$. Значит, длина каждой из шести дуг равна $\frac{1}{3}$ длины окружности. Таким образом, длина границы равна сумме шести дуг, т.е. сумме длин двух окружностей, радиусы которых равны 3 см; $L = 4\pi R = 12\pi$ (см).

11. Ответ: $4\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.



Решение. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади равностороннего треугольника S_1 со стороной 4 и удвоенной площади кругового сектора S_2 радиуса два. Площадь треугольника равна: $S_1 = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha = 4\sqrt{3}$. Дуга каждого сектора равна $60°$, так как соответствует углу равносторонний треугольника, поэтому его площадь равна $S_2 = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha = \frac{2\pi}{3}$. Таким образом, $S = 4\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = 4\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

12. Ответ: 2.

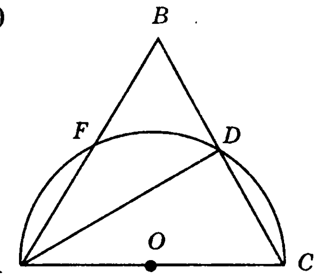


Решение. Так как n-угольник — правильный, то радиусы вписанной и описанной окружностей можно выразить через сторону n-угольника: $R_n = \dfrac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$; $r_n = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. Обозначим $\frac{180°}{n} = \alpha$, тогда $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$; $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{a}{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{a\cos\alpha}{2\sin\alpha}$. Площадь круга, вписанного в n-угольник, равна $S_{\text{впис}} = \pi r^2$, а площадь круга, описанного около n-угольника, равна $S_{\text{опис}} = R^2$. Площадь кольца, следовательно, равна $S_{\text{впис}} - S_{\text{опис}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(\frac{a^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{a^2\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}\right) = \frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}(1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{4}\pi a^2$. По условию площадь кольца равна π. Отсюда $\frac{1}{4}\pi a^2 = \pi$, $a = 2$.

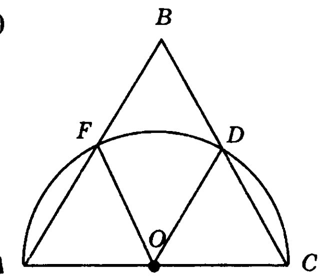
Часть 3

13. Ответ: $6(3\sqrt{3}+\pi)$.

а)



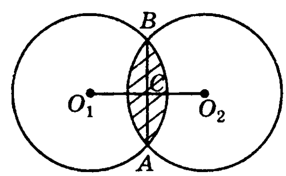
б)



Решение. Треугольник ADC — прямоугольный, так как вписанный угол ADC опирается на диаметр окружности (рис. а). Так как треугольник ABC – равносторонний, то $\angle DCA = 60°$, значит, $\angle DAC = 30°$. Аналогично доказывается, что $\angle FCA = 30°$. Отсюда, градусные меры каждой из дуг AF и DC равны $60°$. Таким образом, градусная мера дуги DF также равна $60°$ или $\frac{\pi}{6}$. Значит, $\angle FOA = 60°$ и $\angle DOC = 60°$, и треугольники AFO и ODC — равносторонние, стороны которых равны 6 (см).

Площадь части треугольника ABC, лежащей внутри полукруга $AFDC$ можно представить в виде суммы двух равносторонних треугольников AFO и ODC и сектора AFD (рис. б). $S_{AFO} = S_{ODC} = \frac{1}{2}R^2\sin 60° = 18\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см^2). Площадь сектора круга вычисляется по формуле $S_{сек} = \frac{\alpha}{2}R^2$, где R — радиус круга, α — угловая величина дуги сегмента, выраженная в радианах; $S_{сек} = 6\pi$ (см^2). Таким образом, $S_{AFDC} = 2\cdot 18\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\pi = 6(3\sqrt{3}+\pi)$.

14. Ответ: $25\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ см^2.



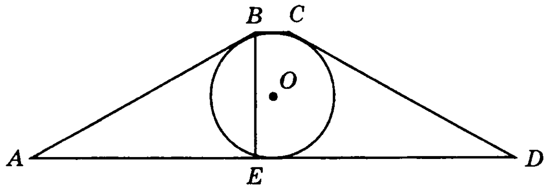
Решение. Отрезок AB — общая хорда кругов с центрами O_1 и O_2. Общая часть кругов состоит из двух равных круговых сегментов, угловую величину дуги которых обозначим α, т.е. $\alpha = \angle AO_1B = \angle AO_2B$. Площадь сегмента вычисляется по формуле: $S_{сег} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$, где R — радиус круга, α — угловая величина дуги сегмента, выраженная в радианах.

Так как O_1O_2 — линия центров, то прямые O_1O_2 и AB перпендикулярны и пересекаются в точке C, которая является серединой хорды AB. Центральный угол AO_1C опирается на половину дуги, равной α, значит, $\angle AO_1C = \frac{\alpha}{2}$. По определению синуса угла прямоугольного треугольника

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{O_1A} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$, отсюда $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Таким образом, площадь общей части кругов $S = 2S_{сег} = R^2(\alpha - \sin\alpha) = 25\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ (см^2).

15. Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

Решение. В равнобочной трапеции $ABCD$ проведем из вершины B высоту BE, тогда треугольник BAE — прямоугольный, у которого угол BAD равен $30°$. Следовательно, по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, $BE = \frac{1}{2}AB$. С другой стороны, так как в трапецию $ABCD$ вписана окружность, то $BE = 2R$, а $AB = 4R$. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC$. Так как трапеция $ABCD$ — равнобочная, то $AB = CD$, следовательно, периметр трапеции: $P = 4AB = 16R$. Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$. Следовательно, $\frac{C}{P} = \frac{2\pi R}{16R} = \frac{\pi}{8}$.



ТЕСТ 3

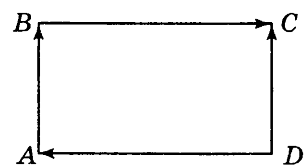
Вариант 1

Часть 1

1. О т в е т: 1.

Решение. Центр окружности, точка O, лежит на ее диаметре AB и делит его пополам, т.е. $AO = BO$. Координаты точки O находим по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Точка O является серединой отрезка AB, концы которого имеют координаты $A(1; 5)$ и $B(7; -3)$. Значит, $x = \frac{1 + 7}{2} = 4$, $y = \frac{5 - 3}{2} = 1$. Таким образом, O (4; 1).

2. О т в е т: 1.

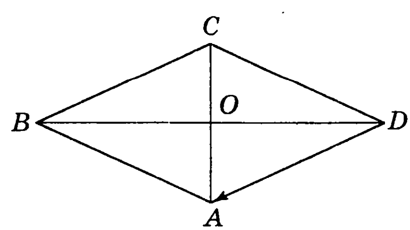


Решение. Чтобы установить равенство двух векторов необходимо проверить: 1) являются ли они коллинеарными, 2) сонаправлены они или противоположно направлены, 3) равны ли их модули. Векторы, лежащие на сторонах AB и DC, равны по модулю, аналогично векторы, лежащие на сторонах BC и AD, равны по модулю, так как противоположные стороны параллелограмма равны. В паре $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ векторы сонаправлены, в паре $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ векторы противоположно направлены, в парах $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$ векторы не коллинеарны. Таким образом, условию равенства векторов соответствует только пара $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

3. О т в е т: 2.

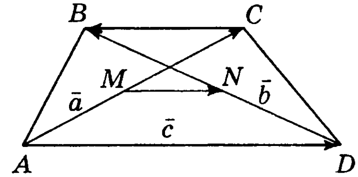
Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1 и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, то $x_1 = 2a_1 - \frac{1}{7}b_1 = -2 - 2 = -4$; $x_2 = 2a_2 - \frac{1}{7}b_2 = 4 - 1 = 3$. Таким образом $\bar{c}(-4; 3)$.

4. О т в е т: 3.



Решение. По определению длина вектора равна длине отрезка AD. Отрезок AD является стороной ромба $ABCD$. Из свойства диагоналей ромба следует, что треугольник AOD — прямоугольный и $AO = 5$ см, $DO = 12$ см. По теореме Пифагора $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (см). Следовательно, $|\overline{DA}| = 13$ см.

5. Ответ: 3.



Решение. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND}$. Так как точки M и N — середины диагоналей AC и BD, то $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{a}$ и $\overline{DN} = \frac{1}{2}\bar{b}$. Вектор $\overline{ND}$ по модулю равен вектору $\overline{DN}$, но противоположно направлен. Значит, $\overline{ND} = -\frac{1}{2}\bar{b}$. Отсюда, $\overline{MN} = \overline{AD} - (\overline{AM} + \overline{ND}) = \overline{AD} - \overline{AM} - \overline{ND} = \bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$.

Часть 2

6. Ответ: 13.

Решение. Основание медианы CD треугольника ABC делит сторону AB пополам, т.е. $AD = DB$. Координаты середины отрезка находим по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Концы отрезка AB имеют координаты $A(7;\ 3)$ и $B(5;\ 1)$. Значит, $x = \frac{7+5}{2} = 6$, $y = \frac{3+1}{2} = 2$. Таким образом, $D(6;\ 2)$. Расстояние между точками вычисляется по формуле $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Координаты концов отрезка CD: $C(1;\ 14)$ и $D\ (6;\ 2)$, значит, $CD = \sqrt{(1-6)^2 + (14-2)^2} = 13$.

7. Ответ: $-3\bar{a}$.

Решение. По условию $|\overline{CD}| = 3|\bar{a}|$ и векторы $\bar{a}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены, следовательно, $\overline{CD} = -3\bar{a}$.

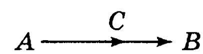
8. Ответ: 0.

Решение. В силу переместительного закона $\overline{MB} + \overline{AM} + \overline{BA} = \overline{AM} + \overline{MB} + \overline{BA} = \overline{AB} + \overline{BA}$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ равны по модулю, но противоположно направлены, значит $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$.

9. Ответ: 3.

Решение. Пусть $\bar{b} = x\,\bar{a}$. Поскольку $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленны, то $x = 2$, т. е. $\bar{b} = 2\bar{a}$. По условию $2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$, значит, $\bar{c} = 2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} = 3\bar{a}$. Следовательно, $|\bar{c}| = 3$.

10. Ответ: (4; 10).



Решение. По условию векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ лежит на одной прямой и началом обоих векторов является одна и та же точка A и точка C принадлежит отрезку AB, значит, векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны и сонаправлены. При этом $|\overline{AC}| : |\overline{CB}| = 2 : 1$, значит, $|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = 2 : 3$, $\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. Обозначим координаты вектора $\overline{AC}$: $(x_1;\ x_2)$, тогда $x_1 = \overline{AB} \cdot 6 = 4$, $x_2 = \overline{AB} \cdot 15 = 10$. Таким образом, $\overline{AC}\,(4;\ 10)$.

11. Ответ: $90°$.

Решение. Перемножим $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \frac{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}{4} = \frac{|\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2}{4}$. По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника, значит, модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами равнобедренного треугольника. Следовательно, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен $90°$.

12. Ответ: $0°$.

Решение. Обозначим угол между векторами α. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$. По условию $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, значит $\cos\alpha = 1$. Значит, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен нулю.

Часть 3

13. Ответ: $\overline{CK} = \frac{2}{5}\overline{KA}$.

Решение. Вычтем из обеих частей вектор $\overline{OC}$, тогда $\overline{OK} - \overline{OC} = \frac{2}{7}\overline{OA} + \frac{5}{7}\overline{OC} - \overline{OC} = \frac{2}{7}\overline{OA} - \frac{2}{7}\overline{OC}$, т. е. $\overline{CK} = \frac{2}{7}\overline{CA}$. Отсюда следует, что эти векторы коллинеарны, т.е. точка K лежит на отрезке CA и делит его в отношении $2 : 5$; $\overline{CK} = \frac{2}{5}\overline{KA}$.

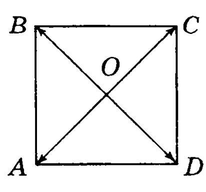
14.

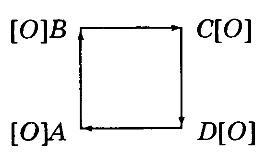
Решение. От одной точки нужно отложить векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и провести вектор из конца вектора $\vec{y}$ в начало вектора $\vec{x}$, получим вектор $\vec{x} - \vec{y}$. Получим треугольник со сторонами $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x} - \vec{y}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника $|\vec{x} - \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

При этом, если векторы не коллинеарны, то выполняется строгое неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, если векторы коллинеарны, то $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

15.

Решение. От произвольной точки плоскости отложим вектор $\overline{OA}$. От точки $A(O)$ отложим вектор, равный $\overline{OB}$. Затем отложим векторы соответственно равные $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$. Так как диагонали квадрата пересекаются под прямым углом, то у полученного четырехугольника все углы прямые, Значит, полученный четырехугольник — прямоугольник, а так как диагонали квадрата равны и точкой пересечения делятся пополам, то и стороны прямоугольника равны. Следовательно, полученный прямоугольник — квадрат. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$.





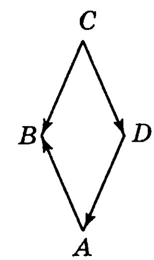
Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 4.

Решение. Основание медианы CD треугольника ABC делит сторону AC пополам, т.е. $AD = DB$. Координаты середины отрезка находим по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Точка D является серединой отрезка AB, концы которого имеют координаты $A(7; 3)$ и $B(5; 1)$. Значит, $x = \frac{7+5}{2} = 6$, $y = \frac{3+1}{2} = 2$. Таким образом, $D(6; 2)$.

2. Ответ: 2.



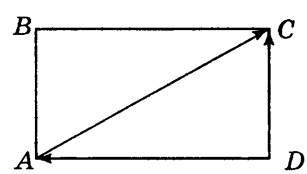
Решение. Чтобы установить равенство двух векторов необходимо проверить: первое, являются ли они коллинеарными, второе, сонаправлены они или противоположно направлены, третье, равны ли их модули.

Все векторы во всех парах по модулю равны, поскольку являются сторонами ромба. В паре $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ векторы противоположно направлены, в паре $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ векторы сонаправлены, в парах $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ векторы не коллинеарны. Таким образом, условию равенства векторов соответствует только одна пара $\overline{CB}$ и $\overline{DA}$.

3. Ответ: 1.

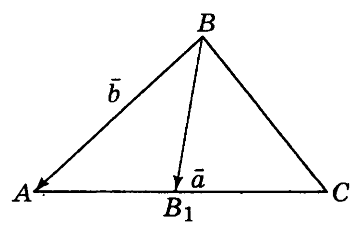
Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1 и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, то $x_1 = b_1 - \frac{1}{2}a_1 = 1 + 1 = 2$; $x_2 = b_2 - \frac{1}{2}a_2 = 1$. Таким образом $\bar{c}(2; 1)$.

4. Ответ: 2.



Решение. По определению длина вектора равна длине отрезка AC. Отрезок AC в прямоугольнике $ABCD$ является диагональю. Так как четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, то треугольник ABD — прямоугольный. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см). Следовательно, $|\overline{AC}| = 17$ см.

5. Ответ: 3.



Решение. По определению разности векторов $\overline{BB_1} = \overline{BA} - \overline{B_1A}$. Так как отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC, то $\overline{B_1A} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}\bar{a}$. Следовательно, $\overline{BB_1} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$.

Часть 2

6. Ответ: 10.

Решение. 1 способ. В треугольнике ABC средняя линия MN параллельна стороне CB и равна ее половине. Расстояние между точками вычисляется по формуле $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Координаты концов отрезка CB даны: $B(-8;\ 6)$, $C(4;\ -10)$, значит, $CB =$
$= \sqrt{(-8-4)^2+(6-(-10))^2} = 20$, $MN = 10$.

2 способ. В треугольнике ABC средняя линия, обозначим ее MN, параллельна стороне CB, значит, она проходит через середины сторон AB и AC — точки M и N, соответственно. Координаты точек M и N находим по формулам: $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ и $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$. Для точки M: $x = \dfrac{(-3)+(-8)}{2} = -5{,}5$, $y = \dfrac{(-6)+6}{2} = 0$; для точки N: $x = \dfrac{(-3)+4}{2} = 0{,}5$, $y = \dfrac{(-6)+10}{2} = -8$. Значит, $M(-5{,}5;\ 0)$ и $N(0{,}5;\ -8)$. Найдем длину $MN = \sqrt{(-5{,}5-0{,}5)^2+(0-(-8))^2} = 10$.

7. О т в е т: $-\dfrac{1}{2}\overline{m}$.

Решение. По условию $|\overline{MN}| = \dfrac{1}{2}|\overline{m}|$ и векторы $\overline{MN}$ и $\overline{m}$ противоположно направлены, следовательно, $\overline{MN} = -\dfrac{1}{2}\overline{m}$.

8. О т в е т: $\overline{AB}$.

Решение. В силу переместительного закона: $\overline{AK} - \overline{BC} + \overline{KC} = \overline{AK} + \overline{KC} - \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}$.

9. О т в е т: 14.

Решение. Пусть $\bar{c} = x\bar{a}$. Поскольку $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{c}| = 4$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленны, то $x = 2$, т. е. $\bar{c} = 2\bar{a}$. По условию $3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c} = \bar{0}$, значит, $\bar{b} = 3\bar{a} + 2\bar{c} = 7\bar{a}$. Следовательно, $|\bar{b}| = 14$.

10. О т в е т: (9; 12).

Решение. Векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ лежит на одной прямой и началом обоих векторов является одна и та же точка A и точка C принадлежит отрезку AB, значит, векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны и сонаправлены. По условию $|\overline{AC}| : |\overline{CB}| = 2 : 1$, значит, $|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = 2 : 3$, $\overline{AB} = \dfrac{3}{2}\overline{AC}$. Обозначим координаты вектора $\overline{AB}$ — $(x_1;\ x_2)$, тогда $x_1 = \dfrac{3}{2}\cdot 6 = 9$, $x_2 = \dfrac{3}{2}\cdot 8 = 12$. Таким образом $\overline{AC}(9;\ 12)$.

$$A \xrightarrow{\quad C \quad} B$$

11. О т в е т: 90°.

Решение. Перемножим $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\cdot\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \dfrac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \dfrac{\bar{a}^2-\bar{b}^2}{4} = \dfrac{|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2}{4}$. По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба, то модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами ромба. Значит, скалярное произведение векторов $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\cdot\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов следует, что если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен 90°.

12. Ответ: 3.

Решение. По условию векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, т. е. угол между ними равен 0°. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$, $\cos 0°=1$. Значит, $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=3\cdot 1=3$.

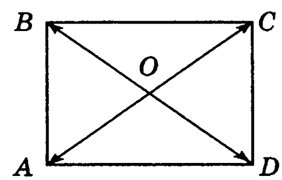
Часть 3

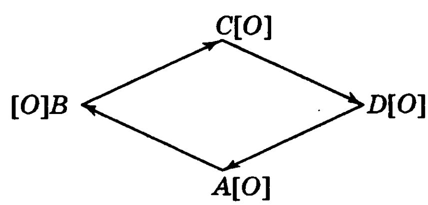
13. Ответ: $\frac{2}{3}\overline{KC}$.

Решение. Вычтем из обеих частей вектор $\overline{OA}$, тогда $\overline{OK}-\overline{OA}=\frac{3}{5}\overline{OA}+\frac{2}{5}\overline{OC}-\overline{OA}=\frac{2}{5}\overline{OC}-\frac{2}{5}\overline{OA}$, т. е. $\overline{AK}=\frac{2}{5}\overline{AC}$. Отсюда следует, что векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, т. е. точка K лежит на отрезке AC и делит его в отношении 2 : 3. Следовательно, $\overline{AK}=\frac{2}{3}\overline{KC}$.

14. Решение. Нужно от конца вектора $\vec{x}$ отложить вектор $\vec{y}$ и провести вектор из начала вектора $\vec{x}$ в конец вектора $\vec{y}$, получим вектор $\vec{x}+\vec{y}$. Получим треугольник со сторонами $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x}+\vec{y}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника $|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

При этом, если векторы не коллинеарны, то выполняется строгое неравенство $|\vec{x}-\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$, если векторы коллинеарны, то $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$.





15. Решение. От произвольной точки плоскости отложим вектор $\overline{OA}$. От точки $A(O)$ отложим вектор, равный $\overline{OB}$. Затем отложим векторы соответственно равные $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$.

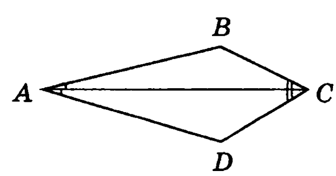
Векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ лежат на диагонали AC, а векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OD}$ лежат на диагонали BD, следовательно, они попарно коллинеарны. Отсюда следует, что у полученного четырехугольника стороны попарно параллельны. Значит, полученный четырехугольник — параллелограмм. Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то стороны полученного параллелограмма равны. Следовательно, полученный параллелограмм — ромб. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=0$.

ТЕСТ 4

Вариант 1

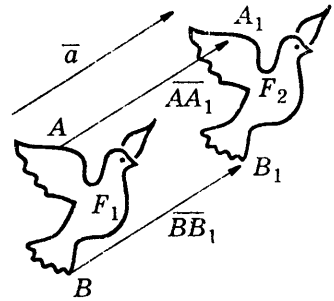
Часть 1

1. Ответ: 2.



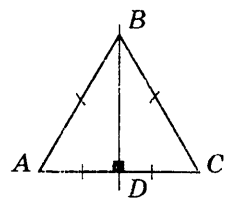
Решение. На рисунке — это четырехугольник 2). Рассмотрим этот четырехугольник и обозначим его вершины $ABCD$. Если провести диагональ AC, то получаем два равных треугольника ABC и ADC по трем сторонам $AB=AD$ и BC и DC (по данным чертежа) и AC (общая). Значит, $\angle CAB=\angle CAD$, следовательно, AC биссектриса $\angle BAD$ и является его осью симметрии, аналогично CA — биссектриса $\angle BCD$ и является его осью симметрии, значит, диагональ AC является осью симметрии четырехугольника $ABCD$.

2. Ответ: 4.



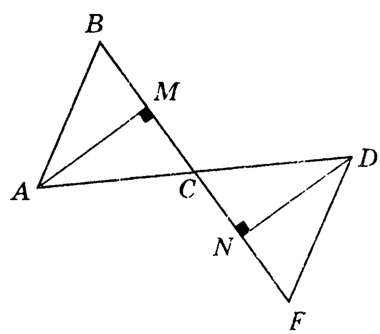
Решение этой задачи опирается на рисунок. Точка A фигуры F_1 отображается в точку A_1 фигуры F_2, а точка B фигуры F_1 отображается в точку B_1 фигуры F_2 так, что $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Таким образом, каждая точка фигуры F_1 отображается в точку фигуры F_2, передвигаясь по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Следовательно, движение, данное на рисунке, является параллельным переносом на вектор $\overline{a}$.

3. Ответ: 2.



Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т. е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то вершина A переходит в вершину C, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, $AB = BC$. Аналогично, при рассмотрении симметрии относительно прямой, проходящей через вершину A, доказывается, что стороны AC и AB равны. Значит, в треугольнике ABC все три стороны равны $AB = BC = AC$. Значит, треугольник ABC — равносторонний. Рассмотрение симметрии относительно прямой, проходящей через вершину C, позволяет проверить доказанное утверждение, т.е. подтвердить, что стороны $AC = BC$.

4. Ответ: 3.

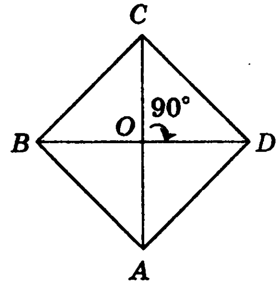


Решение. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. В треугольнике ABC проведена высота AM из вершины A к стороне BC, а в треугольнике FDC проведена высота DN из вершины D к стороне FC. Таким образом, к прямой BF проведены два перпендикуляра AM и DN, следовательно, прямые, содержащие высоты AM и DN, параллельны.

5. Ответ: 3.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. При повороте около точки O на угол 90° луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OD, луч OD — в луч OA и луч OA — в луч OB. Значит, диагонали AC и BD параллелограмма перпендикулярны,

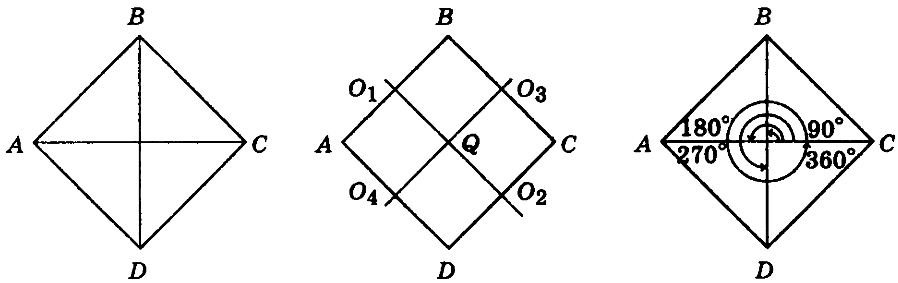
$AC \perp BD$. Значит, параллелограмм $ABCD$ — ромб. При повороте вершина C должна перейти в вершину D так, что $OC = OD$, то есть диагонали ромба равны. Следовательно, ромб — квадрат.



Часть 2

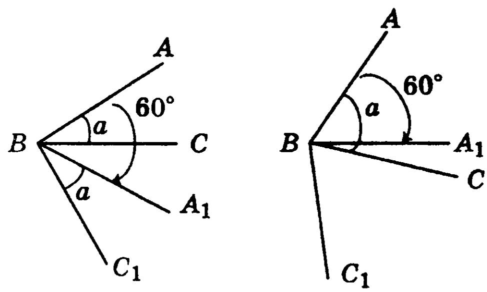
6. Ответ: 6.

Решение. Квадрат $ABCD$ переходит сам в себя при симметрии: 1) относительно прямых AC и BD, 2) относительно прямых O_1O_2 и O_3O_4 , 3) точки Q пересечения диагоналей, 4) при повороте на 90° n, где n — целое число, относительно центра Q. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра квадрата совпадает с поворотом на 180°.



7. Ответ: 60° + α.

Решение. Возможны два случая: 1) $\alpha < 60°$ и 2) $\alpha > 60°$.

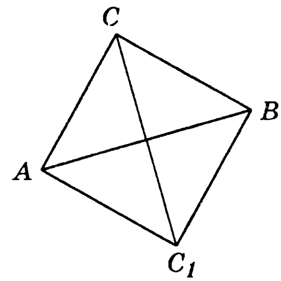


При повороте угла ABC на 60 каждый луч, выходящий из точки B поворачивается на угол в 60°, т.е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$ и $\angle CBA_1 < 60°$. Отсюда следует, что луч BA_1 проходит между сторонами угла $\angle CBC_1$, равного 60°. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABC + \angle CBA_1 + \angle A_1B_1C_1 = \alpha + 60° - \alpha + \alpha = 60° + \alpha$.

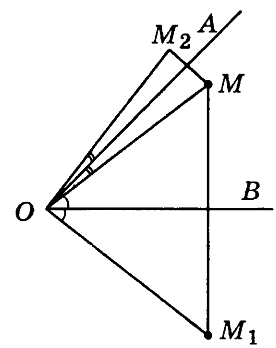
Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC = \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$ и $\angle A_1BC < \alpha$. Отсюда следует, что луч BC проходит между сторонами угла A_1BC_1, равного α. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABA_1 + \angle A_1BC + \angle CBC_1 = 60° + 60° + \alpha - 60° = 60° + \alpha$.

8. Ответ: $12\sqrt{2}$ см.



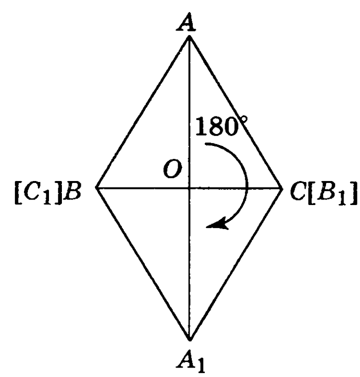
Решение. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки. Так как при симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника ABC относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C перешла — в точку C_1, катет AC перешел в равный ему отрезок AC_1, а катет BC — в отрезок BC_1. Таким образом, у четырехугольника $ABCC_1$ все стороны равны и угол ACB равен $90°$, то четырехугольник $ABCC_1$ — квадрат, в котором CC_1 является диагональю. У квадрата диагонали равны, значит $AB = CC_1$. По теореме Пифагора найдем AB как гипотенузу прямоугольного треугольника ABC; $AB = 12\sqrt{2}$ (см), следовательно, $CC_1 = 12\sqrt{2}$ (см).

9. Ответ: $90°$.



Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла — точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 45° + (\angle AOM + \angle BOM) = 90°$.

10. Ответ: 12 см.



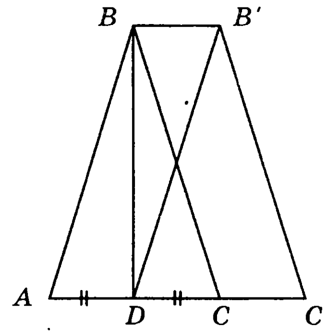
Решение. Пусть точка O — середина стороны BC. При повороте на угол $180°$ около точки O луч OB переходит в луч OB_1, а луч OC переходит в луч OC_1, который дополняет луч OB_1 до прямой, при этом точка O принадлежит отрезку CC_1. Таким образом, $CC_1 = OC + OC_1(B) = BC = 12$ (см) как сторона равностороннего треугольника.

11. Ответ: 18.

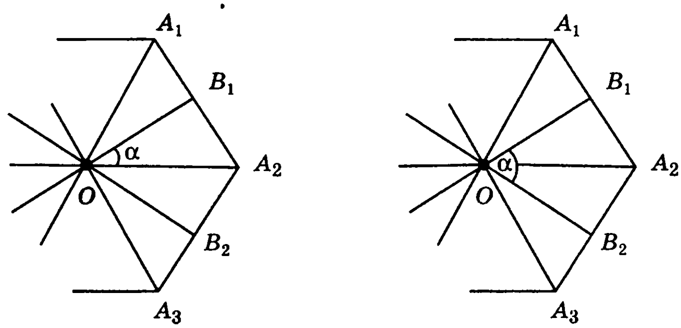
Решение. Точка D — середина стороны AC, так как отрезок DB — медиана треугольника ABC. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а, поскольку параллельный перенос — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, значит, вершина B перешла в точку B' и $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того, $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$.

Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ параллелограмм. Точка D — середина стороны AC, значит, $AD = \frac{1}{2}AC = 4$ (см).

$P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB = 2(4 + 5) = 18$ (см).



12. Ответ: 24.



а) б)

Решение. При осевой для правильного многоугольника, имеющего $2n + 1$ вершину, существует только одна ось симметрии, проходящая через вершину и середину противолежащей стороны. А для правильного многоугольника, имеющего $2n$ вершин, осями симметрии являются прямые, проходящие через середины противолежащих сторон, или прямые, содержащие диагонали многоугольника. По условию задачи данный многоугольник имеет больше одной оси симметрии, следовательно, его оси симметрии проходят через середины противолежащих сторон или являются диагоналями многоугольника.

Пусть данный угол α, равный 15, образуют соседние оси симметрии B_1O и A_2O (рис. а). Тогда $\angle A_1OA_2 = 30°$, а значит, многоугольник имеет 12 сторон.

Пусть данный угол α образуют оси симметрии B_1O и B_2O (рис. б). Тогда $\angle B_1OA_2 = 7{,}5°$, а значит, $\angle A_1OA_2 = 15°$ и многоугольник имеет 24 стороны.

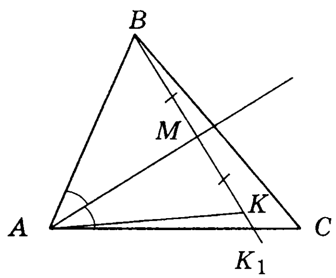
Если будем рассматривать $\angle B_1OA_3 = 15°$, тогда $\angle A_1OA_2 = 10°$ и многоугольник имеет 36 сторон. Таким образом, чем дальше отстоят друг от друга оси симметрии, образующие данный угол α, тем большее число сторон имеет многоугольник.

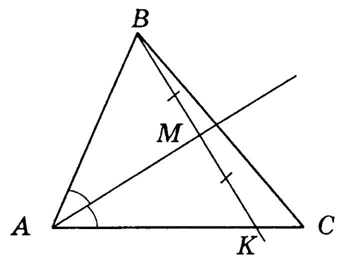
Следовательно, наименьшее число сторон равно 12.

Часть 3

13. Ответ: 2 см.

Решение. По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Обозначим точку пересечения прямой BK со стороной AC как K_1. По условию $\angle BAM = \angle K_1AM$, так как AM — биссектриса $\angle BAC$. Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывания углов. Значит, точки K и K_1 совпадают, отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC - AB = 5 - 3 = 2$ (см).





14. О т в е т: не существует.

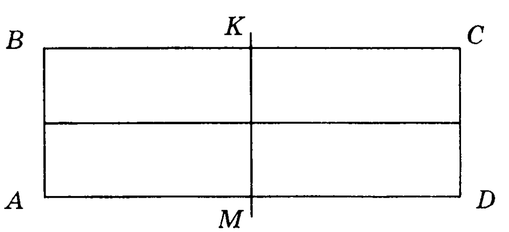
Решение. У параллелограмма $ABCD$ при осевой симметрии, ось симметрии может проходить через середину стороны BC. Это прямая KM. При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC параллелограмма $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В параллелограмме противолежащие стороны равны и параллельны, значит, и $AM = MD$. Следовательно, в параллелограмме $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольник $MKCD$ — прямоугольник, отсюда параллелограмм $ABCD$ так же прямоугольник.

Однако, если данный параллелограмм — прямоугольник, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через середины сторон AB и CD. но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

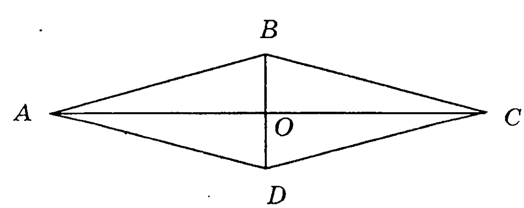
Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является диагональю параллелограмма. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

Однако, если данный параллелограмм — ромб, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через вершины A и C, т.е. диагональ AC, но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

Следовательно, такой параллелограмм не существует.



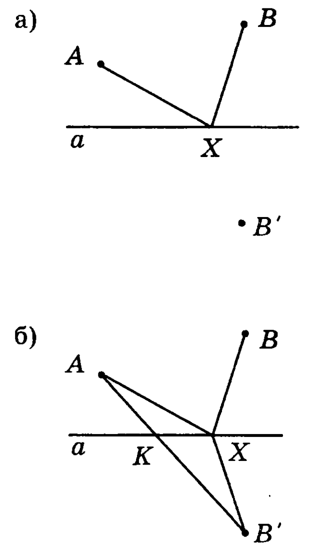
а)



б)

15. Ответ: точка K.

Решение. Предположим, что задача решена и остановка находится в некоторой точке X (рис. а). Значит надо минимизировать сумму $AX + XB$. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. б). По определению осевой симметрии $BX = B'X$. Поэтому $AX + XB = AX + XB'$. Сумма $AX + XB'$ будет наименьшей, когда точка X лежит на прямой a и является точкой пересечения отрезка AB' с прямой a. Соединим точки A и B'. Отрезок AB' пересекает прямую a в точке K (рис. б). Точка K и дает решение задачи.

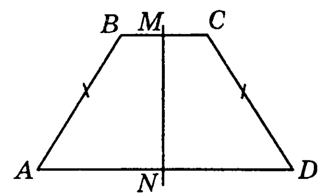


Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 3.

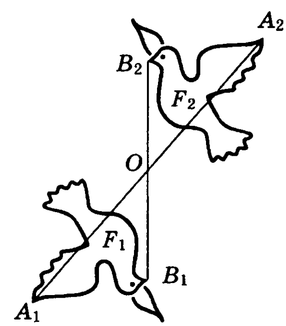
Решение. На рисунке — это трапеция 3). Рассмотрим эту трапецию и обозначим ее вершины $ABCD$. Проведем прямую NM, проходящую через середину стороны BC и перпендикулярную ей. Тогда прямая NM перпендикулярна и стороне AD, так как по данным чертежа BC и AD — основания трапеции, значит, $BC \parallel AD$. Рассмотрим симметрию относительно этой прямой.



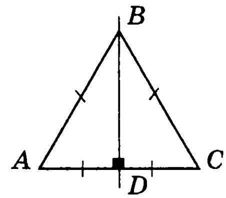
Так как $BM = MC$, то вершина B переходит в вершину C, по данным чертежа $AB = CD$, значит, отрезок AB переходит в отрезок, следовательно, точка A переходит в вершину D. Значит, трапеция $ABCD$ при симметрии относительно прямой NM переходит сама в себя и прямая NM ее ось симметрии.

2. Ответ: 1.

Решение этой задачи опирается на рисунок. Точка A_1 фигуры F_1 отображается в точку A_2 фигуры F_2 так, что $A_1O = OA_2$, а точка B_1 фигуры F_1 отображается в точку B_2 фигуры F_2 так, что $B_1O = OB_2$. Таким образом, каждая точка фигуры F_1 отображается в некоторую точку фигуры F_2, причем точка O является серединой расстояния между этими точками. Следовательно, движение, данное на рисунке, является поворотом.

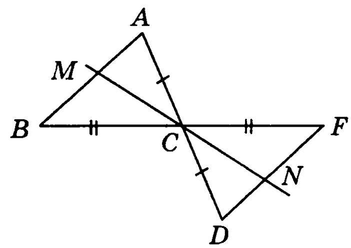


3. О т в е т: 3.



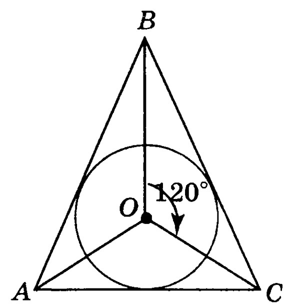
Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т. е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то вершина A переходит в вершину C, при этом, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

4. О т в е т: 4.



Решение. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. Так как точка C принадлежит и прямой AD и прямой BF, значит, прямые AD и BF пересекаются в точке C. Следовательно, углы ACB и FCD — вертикальные. В треугольнике ABC отрезок CM является биссектрисой угла ACB, а в треугольнике FDC отрезок CN является биссектрисой угла FCD. Известно, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, значит, прямые, содержащие биссектрисы CM и CN, совпадают.

5. О т в е т: 2.



Решение. При повороте около точки O на угол 120° луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OA и луч OA — в луч OB. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника. Обозначим углы треугольника ABC: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Тогда в треугольнике BOC в силу теоремы о сумме углов треугольника $120° + \beta + \gamma = 180°$, отсюда $\beta + \gamma = 60°$. Из треугольника AOC получим $\alpha + \gamma = 60°$, а из треугольника AOB получим $\alpha + \beta = 60°$. Значит: $\begin{cases} \alpha + \beta = 60°, \\ \beta + \gamma = 60°, \\ \alpha + \gamma = 60°, \end{cases}$ $\alpha = 60° - \beta$,

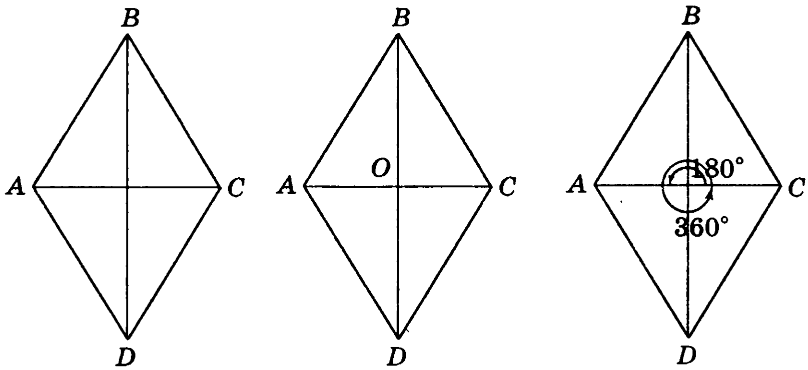
$60° - \beta + \gamma = 60°$, $\beta = \gamma$.

Аналогично получаем $\alpha = \beta$ и $\alpha = \gamma$. Таким образом в треугольнике ABC все углы равны, следовательно, треугольник — равносторонний.

Часть 2

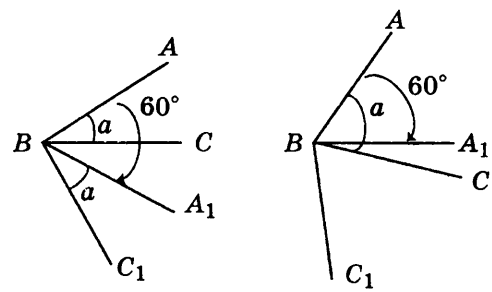
6. О т в е т: 4.

Решение. Ромб $ABCD$ переходит сам в себя при осевой симметрии относительно прямых AC и BD, при центральной симметрии относительно точки O, при повороте на $180° n$, где n — целое число, относительно центра O. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра ромба совпадает с поворотом на $180°$.



7. Ответ: $60° - \alpha$.

<u>Решение</u>. Возможны два случая: 1) $\alpha < 60°$ и 2) $\alpha > 60°$.

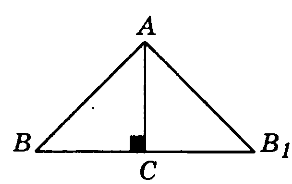


При повороте угла ABC на $60°$ каждый луч, выходящий из точки B поворачивается на угол в $60°$, т. е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$.

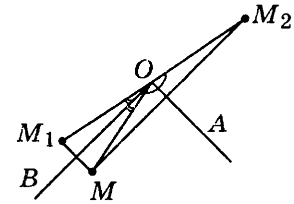
Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC = \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$.

8. Ответ: $7\sqrt{2}$ см.



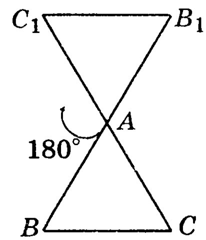
<u>Решение</u>. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки, а углы в равные им углы. При симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника AC относительно прямой, содержащей его катет AC, вершина B перешла — в точку B_1, значит, катет BC перешел в равный ему отрезок CB_1, а угол BAC в равный ему угол B_1AC, катет AC перешел сам в себя. Таким образом, у треугольника BAB_1 угол BAB_1 — прямой, стороны AB и AB_1 равны, значит треугольник BAB_1 — прямоугольный и равнобедренный. По теореме Пифагора найдем BB_1 как гипотенузу прямоугольного треугольника BAB_1; $BB_1 = \sqrt{2AB^2} = 7\sqrt{2}$ (см).

9. Ответ: 180°.



Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 90° + (\angle AOM + \angle BOM) = 90° + 90° = 180°$.

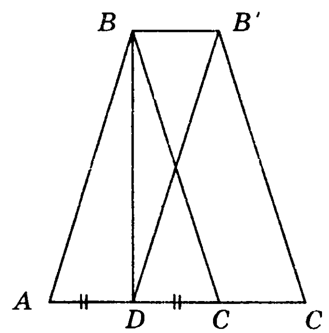
10. Ответ: 24 см.



Решение. При повороте около вершины A вершина A переходит сама в себя, а вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1, при этом расстояния между точками сохраняются. Значит, $AB = AB_1$, $AC = AC_1$. При повороте на угол 180° вокруг вершины A луч AC переходит в луч AC_1, который дополняет луч AC до прямой, при этом точка A принадлежит отрезку CC_1. Таким образом, $CC_1 = AC + AC_1 = 2\,AC = 24$ (см).

В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана BD. При параллельном переносе точка A перешла в точку D, а треугольник ABC в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если сторона треугольника равна 6 см.

11. Ответ: 18 см.

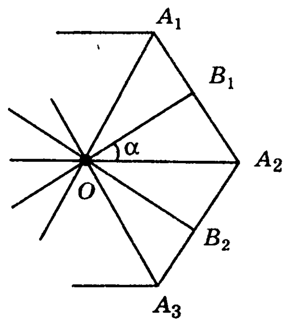


Решение. Точка D — середина стороны AC, так как отрезок DB — медиана треугольника ABC. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а, поскольку параллельный перенос — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, вершина B перешла в точку B' и при этом $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того, $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$. Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ — параллелограмм. Треугольник ABC — равносторонний, точка D — середина стороны AC, значит, $AD = \frac{1}{2}AC = 3$ (см); $P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB = 2(3 + 6) = 18$ (см).

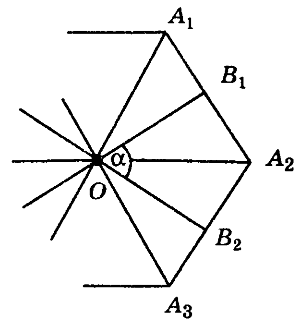
12. Ответ: 10.

Решение. При осевой симметрии для правильного многоугольника, имеющего $2n + 1$ вершину, существует только одна ось симметрии, походящая через вершину и середину противолежащей стороны. А для правильного многоугольника, имеющего $2n$ вершин, осями симметрии являются прямые, проходящие через середины противолежащих сторон, или прямые, содержащие диагонали многоугольника. По условию задачи данный многоугольник имеет больше одной оси симметрии, следовательно, его оси симметрии проходят через середины противолежащих сторон, или являются диагоналями многоугольника.

Пусть данный угол α, равный 18°, образуют соседние оси симметрии B_1O и A_2O (рис. а). Тогда $\angle A_1OA_2 = 36°$, а значит, многоугольник имеет 10 сторон.



а)



б)

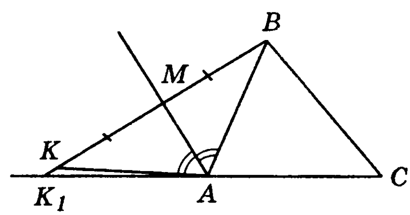
Пусть данный угол α образуют оси симметрии B_1O и B_2O (рис. б). Тогда $\angle B_1OA_2 = 9°$, а значит, $\angle A_1OA_2 = 18°$ и многоугольник имеет 20 стороны.

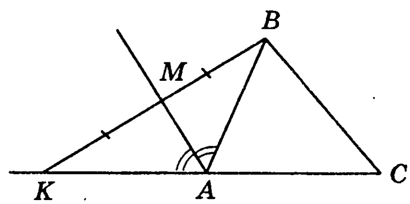
Если будем рассматривать $\angle B_1OA_3 = 18°$, тогда $\angle A_1OA_2 = 12°$ и многоугольник имеет 30 сторон. Таким образом, чем дальше отстоят друг от друга оси симметрии, образующие данный угол α, тем большее число сторон имеет многоугольник.

Следовательно, наименьшее число сторон равно 10.

Часть 3

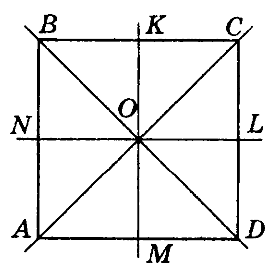
13. Ответ: 8 см.





Решение. По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Обозначим точку пересечения прямой BK с прямой, содержащей сторону AC, как K_1. По условию $\angle BAM = \angle K_1AM$, так как AM — биссектриса угла, смежного с углом BAC. Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывания углов. Значит, точки K и K_1 совпадают. Отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC + AB = 5 + 3 = 8$ (см).

14. Ответ: квадрат.



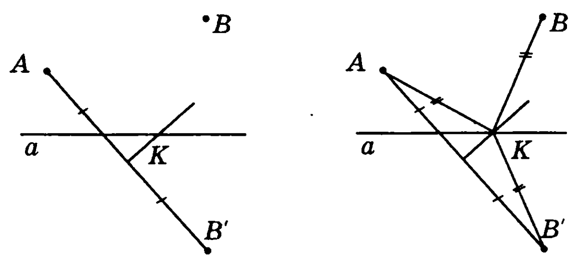
Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина параллелограмма должна перейти в другую его вершину. Так как у параллелограмма четыре вершины, то две вершины параллелограмма должны перейти в две другие вершины параллелограмма. Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является диагональю параллелограмма. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC ромба $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В ромбе все стороны равны, а противолежащие стороны параллельны, следовательно, $KM \perp AD$ и $AM = MD$. Значит, в ромбе $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. Отсюда отрезок AB переходит в равный ему отрезок CD. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольник $MKCD$ — прямоугольник, отсюда ромб $ABCD$ — квадрат.

Рассмотрение симметрии ромба $ABCD$ относительно прямой NL, проходящей через середину стороны AD приводит к тому же результату, а именно ромб $ABCD$ — квадрат. Следовательно, если параллелограмм имеет четыре оси симметрии, то он — квадрат.

15. Ответ: точка K.

Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. а). Соединим точки A и B' (рис. б). Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB', который пересекает прямую a в точке K (рис. б). Соединим точку K с точками A и B' (рис. б). По свойству серединного перпендикуляра $AK = KB'$, а по свойству осевой симметрии $KB' = BK$, следовательно $AK = BK$. Точка K и дает решение задачи.



а) б)

Тесты

Мищенко Татьяна Михайловна

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие к учебникам
Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»,
А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»,
И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9 классы»

9 класс

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *Г. Н. Хромова*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Корректор *И. Н. Мокина*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*
Обложка *дизайн-студии «Дикобраз»*

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 — литература учебная

Сертификат соответствия № РОСС RU.AES1H15301 от 04.05.2011

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»
141100, РФ, Московская обл., г. Щелково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru

ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов