Г.С. СУРВИЛЛО
А.С. СИМОНОВ

Алгебра

Дидактические материалы

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Г.С. СУРВИЛЛО
А.С. СИМОНОВ

Дидактические материалы

по алгебре для 9 класса с углубленным изучением математики

Москва «Просвещение» 2006

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
С90

Сурвилло Г. С.
С90 Дидактические материалы по алгебре для 9 класса с углубленным изучением математики / Г. С. Сурвилло, А. С. Симонов.— М. : Просвещение, 2006.— 95 с. : ил.— ISBN 5-09-014633-0.

Пособие содержит самостоятельные, контрольные, исследовательские работы, планирование учебного материала. Оно ориентировано главным образом на учебно-методический комплект, созданный на основе учебников «Алгебра, 8», «Алгебра, 9» под редакцией Н. Я. Виленкина.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 5-09-014633-0

Предисловие

Дидактические материалы — составная часть учебно-методического комплекта для углубленного изучения алгебры в 8—9 классах, созданного на основе учебников по алгебре под редакцией Н. Я. Виленкина; предназначены для организации самостоятельной работы учащихся и контроля за качеством усвоения изучаемого материала.

Самостоятельные и контрольные работы представлены в двух равноценных вариантах; нумерация самостоятельных работ дана внутри каждого крупного раздела программы в виде обозначения С — k, где k — номер работы.

Ко всем самостоятельным и контрольным работам приведены ответы (за исключением тривиальных случаев).

В дидактических материалах содержится три исследовательские работы. Их выполнение требует несколько большего времени, и поэтому выполнять их желательно дома. Обычно срок выполнения такого задания — одна неделя.

Приведено примерное тематическое планирование учебного материала по алгебре в двух вариантах — 5 ч в неделю (170 ч в год) и 4 ч в неделю (136 ч в год).

Отметим некоторые особенности самостоятельных и контрольных работ, включенных в данное пособие. Как правило, каждая самостоятельная работа направлена на усвоение определенного раздела программы, а поэтому содержит задания одного уровня, в некоторых случаях достаточно высокого.

Заметим, что в переработанном варианте учебника Н. Я. Виленкина «Алгебра, 9» систематически демонстрируются возможности курса математики при решении важных задач современной экономики.

Рассматриваемые в данном пособии задачи во многих случаях существенно отличаются от тех, которые имеются в стандартных учебниках и учебных пособиях. Задачи же, относящиеся к экономическому блоку, составлены заново. Кроме того, отметим, что экономический блок замкнут — в учебнике приведены и разъяснены все основные понятия, необходимые для решения задач, и нет необходимости обращаться к другим учебникам, например к учебникам по экономике.

Заметим также, что самостоятельные работы не регламентированы жестко ни по времени их исполнения, ни по единственности места их использования. Основная часть работ может быть использована, с одной стороны, при изучении нескольких тем, что отмечено в прилагаемом тематическом планировании. С другой стороны, обсуждение отдельных важных разделов курса проводится в нескольких его разделах (нахождение множества значений функции, задачи на нахождение экстремума и т. д.). Таким образом, каждая самостоятельная работа и ее фрагменты могут использоваться на различных этапах формирования конкретных знаний и умений. Содержание самостоятельных работ позволяет учителю организовать дифференцированную работу на уроке и сконструировать для каждого ученика индивидуальную траекторию изучения учебного материала.

В учебнике учтено, что девятый класс является «рубежным» и на его уровне полезно показать перспективу дальнейшего развития курса математики.

В связи с этим в учебник включены такие разделы, как «Исследование функций элементарными средствами», «Предел последовательности» и т. д. Если ученик и не будет в дальнейшем углубленно изучать математику, то у него останется цельное представление о математике и ее приложениях к решению важных задач. Если же он будет изучать математику и дальше, то основательно подготовленная база девятого класса позволит ему эффективнее овладеть новыми, более мощными методами решения многих задач.

Контрольные работы обычно охватывают больший объем материала, чем самостоятельные работы. При необходимости в контрольную работу учитель может включить задания из соответствующих самостоятельных работ. Как правило, контрольные работы рассчитаны на один уровень, но поскольку они достаточно объемные, то учитель в зависимости от уровня обученности класса может изменять их объем. Вместе с тем оценка «пять» ставится, как правило, за выполнение учеником и достаточно сложных задач, а не только наиболее простых.

В заключение отметим, что данное пособие дает возможность учителю проводить обучение в разнообразных формах, позволяет варьировать объем и составление индивидуальных заданий, демонстрирует учащимся глубокую связь абстрактного материала математики и реальных задач современной экономики.

Примерное планирование учебного материала

I вариант — 4 ч в неделю на алгебру, всего 136 ч
II вариант — 5 ч в неделю на алгебру, всего 170 ч

Номер урока	Название темы	Кол-во часов I	Кол-во часов II	Номер работы
I	**Функции**	**27**	**35**	
1	Переменные величины. Понятие функции. График функции. Способы задания функций. Кусочное задание функций	1	2	С—1, С—2, С—3, С—4
2	Линейная функция. Линейные неравенства с двумя переменными	2	2	С—4, С—5
3	Функции $\|x\|$, $[x]$, $\{x^2\}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{k}{x}$	2	3	С—3
4	Преобразование графиков: параллельный перенос, растяжение и сжатие графика вдоль оси *Oy*; вдоль оси *Ox*. Графики функций, содержащих знак модуля	3	3	С—10, С—11 (исследовательские)
5	**Контрольная работа № 1**	**1**	**1**	
6	Квадратичная функция и ее график. Корни квадратичной функции. Общие точки параболы и прямой	3	4	С—6, С—8, С—9, С—12
7	Зависимость свойств квадратичной функции $y=x^2+px+q$ от коэффициентов p и q. Примеры зависимостей, выражающихся квадратичной функцией	2	2	С—8
8	Дробно-линейная функция	2	2	С—7, С—10

Номер урока	Название темы	Кол-во часов		Номер работы
		I	II	
9	**Контрольная работа № 2**	**1**	**1**	
10	Четные и нечетные функции. Возрастающие и убывающие функции	2	4	С—15
11	Точки экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	2	4	С—4, С—13
12	Исследование некоторых рациональных функций и построение их графиков. График функции $\frac{1}{f(x)}$	2	3	С—13, С—14, С—15
13	Применение свойств квадратичной функции к решению задач на нахождение наибольших и наименьших значений	2	2	С—14
14	Понятие о простейших математических моделях. Функции в экономике	1	1	С—15
15	**Контрольная работа № 3**	**1**	**1**	
II	**Степени и корни**	**20**	**28**	
16	Степени с целыми показателями	2	3	С—16, С—17, С—18
17	Степенная функция	2	2	С—19
18	Корни с натуральными показателями	3	4	С—20

Продолжение

Номер урока	Название темы	Кол-во часов		Номер работы
		I	II	
19	Извлечение корней нечетной степени из отрицательных чисел	2	2	С—21
20	Свойства корней из неотрицательных чисел	3	3	С—22, С—23, С—24
21	График функции $y=\sqrt[n]{x}$	1	2	С—25
22	Степени с рациональными показателями	3	4	С—26, С—27, С—28
23	**Контрольная работа № 4**	**1**	**1**	
24	Производственная функция. Функция Кобба—Дугласа	1	2	С—29
25	Изокванта — линия равного выпуска. Изокоста — линия равной стоимости	1	2	С—29, С—30
26	Наименьшие расходы фирмы на приобретение ресурсов при заданном объеме производства	1	3	С—30
III	**Уравнения, неравенства и их системы**	**40**	**52**	
27	Деление многочлена на многочлен с остатком	2	2	С—31
28	Теорема Безу. Корни многочлена. Схема Горнера	2	2	С—32
29	Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное	—	3	

Продолжение

Номер урока	Название темы	Кол-во часов		Номер работы
		I	II	
30	Уравнения с одной переменной	1	2	С—33
31	Равносильные уравнения. Следствия уравнений	1	1	С—34
32	Целые рациональные уравнения. Основные методы решения целых рациональных уравнений	6	8	С—35, С—36, С—37, С—38
33	Формула Виета для уравнений высших степеней	1	2	С—39
34	Дробно-рациональные уравнения	2	3	С—40
35	Системы уравнений с двумя переменными. Основные определения и методы решения систем уравнений	4	4	С—41, С—42, С—43, С—44
36	Уравнения и системы уравнений с параметрами	3	4	С—45, С—46, С—47, С—48
37	**Контрольная работа № 5**	**1**	**1**	
38	Рациональные неравенства. Основные определения. Решение целых рациональных неравенств. Метод интервалов	3	3	С—49
39	Решение дробно-рациональных неравенств	2	2	С—50
40	Доказательства неравенств	2	2	С—51
41	**Контрольная работа № 6**	**1**	**1**	

Продолжение

Номер урока	Название темы	Кол-во часов		Номер работы
		I	II	
42	Иррациональные уравнения	2	2	С—52, С—53, С—54
43	Иррациональные неравенства	2	2	С—55
44	Графическое решение неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными	2	3	С—56
45	**Контрольная работа № 7**	**1**	**1**	
46	Функции спроса и предложения. Рыночное равновесие	2	4	С—57
IV	**Последовательности**	**18**	**24**	
47	Числовые последовательности	1	1	С—58, С—59
48	Метод математической индукции	2	3	С—60
49	Арифметическая прогрессия	3	4	С—61, С—62
50	Геометрическая прогрессия	5	6	С—63, С—64
51	Предел последовательности	4	4	С—65, С—66, С—67, С—68, С—69
52	**Контрольная работа № 8**	**1**	**1**	
53	Арифметическая прогрессия и простые проценты. Геометрическая прогрессия и сложные проценты	2	3	С—70
54	Простейшая модель банковской системы		2	С—71 (исследовательская)

Номер урока	Название темы	Кол-во часов		Номер работы
		I	II	
V	**Элементы комбинаторики и теории вероятностей**	**15**	**16**	
55	Основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания	3	3	С—72
56	**Контрольная работа № 9**	**1**	**1**	
57	Частота и вероятность. Статистическое определение вероятности события	1	1	С—72
58	Опыты с конечным числом равновозможных исходов	2	2	С—72, С—73
59	Подсчет вероятностей в опытах с равновозможными исходами	2	3	С—72, С—73
60	Объединение событий и вероятность объединения несовместимых событий	1	1	С—72, С—73, С—74, С—76
61	Независимые события и вероятность их пересечения	2	2	С—72, С—73, С—74, С—75, С—76
62	Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей	1	1	С—72, С—73, С—74, С—75, С—76
63	Вероятность того, что в n опытах событие a произойдет ровно m раз	1	1	С—72, С—73, С—74, С—75, С—76, С—77
64	**Контрольная работа № 10**	**1**	**1**	
65	**Повторение**	**16**	**15**	

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Функции

С—1

Вариант 1

1. Вычислите значения функции $f(x)$ в точках x_1, x_2, x_3, если:

   а) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 3$; $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = \frac{1}{2}$;

   б) $f(x) = \frac{2x+4}{5-3x}$; $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{4}{5}$.

2. Найдите значение заданной функции в указанных точках:

   а) $\varphi(t) = \frac{-4t+3}{1-2t}$; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = \frac{2}{3}$;

   б) $f(s) = \frac{4s^2+3}{\sqrt{4s+1}}$; $s_1 = 2$, $s_2 = 6$, $s_3 = 0$.

3. Принимает ли заданная функция $y = f(x)$ значения y_1, y_2, y_3? Если принимает, то при каких значениях x?

   а) $y = x^2 + 5$; $y_1 = 9$, $y_2 = 6$, $y_3 = -4$;

   б) $y = \frac{2x+3}{3-4x}$; $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $y_3 = -\frac{7}{5}$.

Вариант 2

1. Вычислите значение функции $f(x)$ в точках x_1, x_2, x_3, если:

   а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\frac{1}{4}$;

   б) $f(x) = \frac{2-3x}{4-2x}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

2. Найдите значения заданной функции в указанных точках:

   а) $\varphi(t) = \frac{-3t+1}{2-4t}$; $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{3}$, $t_3 = 2$;

   б) $f(s) = \frac{3s^2+1}{\sqrt{4s+1}}$; $s_1 = 0$, $s_2 = 5$, $s_3 = 8$.

3. Принимает ли заданная функция $y = f(x)$ значения y_1, y_2, y_3? Если принимает, то при каких значениях x?

   а) $y = x^2 - 6$; $y_1 = -3$, $y_2 = -15$, $y_3 = 0$;

   б) $y = \frac{1+3x}{4-x}$; $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{2}{3}$, $y_3 = -3$.

С—2

Вариант 1

1. Дана функция $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\neq 1$. Докажите справедливость соотношения $f(x)-f(x+3)=\frac{3f(x)}{x+2}$ для $x\neq -2$.
2. Функция задана формулой $f(x)=3(x-1)^2$. Докажите справедливость равенства $\frac{f(x^4)}{f(x^2)}=(x^2+1)^2$.
3. Дана функция $f(x)=\frac{3x+4}{1-x}$, $x\neq 1$. Докажите, что число $f(2)+$ $+f(0)$ делится на 3.
4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t)=6t^2+2t$, где t — время, с; $S(t)$ — пройденный путь, см.

   а) Какой путь пройдет материальная точка за $t_1=5$ с? за $t_2=10$ с?

   б) За какое время материальная точка пройдет путь, равный 28 см?
5. Дана функция

$$y=\begin{cases}10-2x, & \text{если } -\infty<x\leqslant 3,\\ x+1, & \text{если } 3<x<+\infty.\end{cases}$$

   Вычислите значения функции в точках $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$. Сделайте эскиз графика этой функции.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=\frac{1}{2x+1}$, $x\neq -\frac{1}{2}$. Докажите справедливость соотношения $f(x-1)-f(x+1)=4f(x-1)\cdot f(x+1)$.
2. Функция задана формулой $f(x)=x+1$. Докажите справедливость равенства $f(x^2)+2f(x)=f^2(x)+1$.
3. Дана функция $f(x)=\frac{6x+4}{x+2}$. Докажите, что число $f(2)+f(6)$ делится на 3.
4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t)=4t^2+5t$, где t — время, с; $S(t)$ — расстояние, см.

   а) Какой путь пройдет материальная точка за $t_1=3$ с? за $t_2=5$ с?

   б) За какое время материальная точка пройдет расстояние, равное 44 см?
5. Дана функция

$$y=\begin{cases}7-2x, & \text{если } -\infty<x\leqslant 2,\\ 3x-3, & \text{если } 2<x<+\infty.\end{cases}$$

   Вычислите значения функции в точках $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=2$. Сделайте эскиз графика этой функции.

С—3

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-10x+16}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-5}}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{1-|x|}$;

д) $f(x)=\dfrac{3x+1}{1+\operatorname{sign} x}$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{1-[x]}$.

2. Вычислите значение функции $f(x)=3|x|-2[x]+\{x\}+2\operatorname{sign} x$, если:

а) $x=4{,}5$; б) $x=-3{,}75$; в) $x=-4$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{4+x^2}$;

б) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+7x+12}$;

в) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3-4x}}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{2-2|x|}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sign} x-1}$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{[x]-1}$.

2. Вычислите значение функции $f(x)=2|x|+3\{x\}-[x]-3\operatorname{sign} x$, если:

а) $x=-6{,}8$; б) $x=1{,}35$; в) $x=10{,}3$.

С—4

Вариант 1

Найдите множество $E(y)$ значений заданной функции. Выясните, существуют ли среди значений функции наименьшее m и наибольшее M значения. Если такие значения существуют, то при каких x справедливы равенства $f(x)=m$ и $f(x)=M$?

а) $y=\dfrac{2x+1}{x^2+12}$; б) $y=\dfrac{10+2x^2}{2+x}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+8}$.

Вариант 2

Найдите множество $E(y)$ значений заданной функции. Выясните, существуют ли среди значений функции наименьшее m и наибольшее M значения. Если такие значения существуют, то при каких x справедливы равенства $f(x)=m$ и $f(x)=M$?

а) $y=\dfrac{3x+7}{x^2+8}$; б) $y=\dfrac{5+x^2}{2+x}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+12}$.

С—5

Вариант 1

1. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

   а) $3x-6y+5<0$; б) $4y-5x+1\geqslant 0$.

2. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

   а) $\begin{cases} y-2x+2\leqslant 0, \\ x+y-7>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-2x-1>0, \\ y+3x-11<0. \end{cases}$

3. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

   а) $y+|3x-1|+1=0$; б) $|y+2|-3x+1=0$.

Вариант 2

1. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

   а) $4x-3y-12\leqslant 0$; б) $4y+3x+12>0$.

2. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

   а) $\begin{cases} y-3x+1>0, \\ y+2x-3<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+1<0, \\ y+2x-1\geqslant 0. \end{cases}$

3. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

   а) $|y+3|+2x+3=0$; б) $y+|3x-6|+1=0$.

С—6

Вариант 1

1. Докажите, что если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ выполнено условие $a+b+c=0$, то $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$.
2. Найдите значения x и y, для которых выполняется равенство $x^2+2xy+2y^2-2y+1=0$.
3. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-7x+10)\times$ $\times(x^2-a)=0$ имеет три корня?
4. Для уравнения $x^2-4x+k=0$ определите значение k, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $5x_1+7x_2=30$.
5. Не вычисляя корней квадратного трехчлена $4x^2+8x+p$, найдите значение p, такое, чтобы корни x_1 и x_2 заданного трехчлена удовлетворяли условию $x_1^2+x_1x_2+x_2^2\leqslant 3{,}5$.

Вариант 2

1. Докажите, что если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ выполнено условие $a-b+c=0$, то $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$.
2. Найдите значения x и y, для которых выполняется равенство $x^2+6xy+25y^2-8y+1=0$.
3. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-7x+10)\times$ $\times(x^2-a)=0$ имеет три корня?
4. Для уравнения $x^2-8x+k=0$ определите значение k, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $7x_1+10x_2=32$.
5. Не вычисляя корней квадратного трехчлена $5x^2+10x+p$, найдите значение p, такое, чтобы корни x_1 и x_2 заданного трехчлена удовлетворяли условию $x_1^2-x_1x_2+x_2^2\leqslant 2$.

С—7

Вариант 1

1. При каких значениях параметра k прямая $y=kx-9$ и парабола $y=x^2$:

   а) имеют две точки пересечения;
   б) имеют одну точку пересечения;
   в) не имеют точек пересечения?
2. При каких значениях параметра k у гиперболы $y=\frac{5}{x}$ и прямой $y=kx+2$ существуют общие точки? Сколько таких точек?

Вариант 2

1. При каких значениях параметра k прямая $y=kx-16$ и парабола $y=x^2$:

   а) имеют две точки пересечения;
   б) имеют одну точку пересечения;
   в) не имеют точек пересечения?
2. При каких значениях параметра k у гиперболы $y=\frac{3}{x}$ и прямой $y=kx+4$ существуют общие точки? Сколько таких точек?

С—8

Вариант 1

1. Обращается ли в нуль функция $y=2x^2+5x+3$? Каковы промежутки знакопостоянства этой функции?
2. Найдите число точек пересечения параболы $y=px^2$ и прямой $y=2x+5$ в зависимости от значений параметра p $(p\neq 0)$. Определите координаты этих точек.

3. Выделите на плоскости pOq множество точек $(p;\ q)$, для которых квадратный трехчлен $x^2+(p-2)x+q$:

а) имеет различные корни;
б) имеет равные корни;
в) не имеет корней.

Вариант 2

1. Обращается ли в нуль функция $y=3x^2+4x-4$? Каковы промежутки знакопостоянства этой функции?
2. Найдите число точек пересечения параболы $y=px^2$ и прямой $y=x+2$ в зависимости от значений параметра p $(p\neq 0)$. Определите координаты этих точек.
3. Выделите на плоскости pOq множество точек $(p;\ q)$, для которых квадратный трехчлен $x^2+(p+3)x+q$:

а) имеет различные корни;
б) имеет равные корни;
в) не имеет корней.

С—9

Вариант 1

1. Рассмотрите параболу $y=-4x^2-10x+6$ и семейство прямых $y=-4x+p$, зависящих от параметра p. При каких значениях p парабола и прямая:

а) имеют две точки пересечения;
б) имеют одну точку пересечения;
в) не имеют точек пересечения?

2. Не вычисляя корней квадратного трехчлена $y=4x^2+8x+p$, найдите значения параметра p, такие, чтобы корни x_1 и x_2 удовлетворяли неравенству $x_1^3+x_2^3\geqslant -4$.

Вариант 2

1. Рассмотрите параболу $y=8x^2-12x-3$ и семейство прямых $y=-2x+p$, зависящих от параметра p. При каких значениях p парабола и прямая:

а) имеют две точки пересечения;
б) имеют одну точку пересечения;
в) не имеют точек пересечения?

2. Не вычисляя корней квадратного трехчлена $y=x^2+3x+p$, найдите значения параметра p, такие, чтобы корни x_1 и x_2 удовлетворяли неравенству $x_1^3+x_2^3+x_1x_2\geqslant -17$.

С—10

Исследовательская работа (выполняется на миллиметровой или клетчатой бумаге).

Вариант 1

1. Исходя из графика функции $y=x^2$ постройте график функции:

   а) $y=|x^2-8x+15|$; б) $y=|-x^2+6x-8|$; в) $y=|-x^2+6x-9|$.

2. Исходя из графика функции $y=\frac{1}{x}$ постройте график функции:

   а) $y=\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|$; б) $y=\left|\frac{3x+1}{x+4}\right|$.

Вариант 2

1. Исходя из графика функции $y=x^2$ постройте график функции:

   а) $y=|x^2-6x+8|$; б) $y=|-x^2-7x-12|$; в) $y=|-x^2-4x-4|$.

2. Исходя из графика функции $y=\frac{1}{x}$ постройте график функции:

   а) $y=\left|\frac{3x-2}{x+2}\right|$; б) $y=\left|\frac{4-2x}{3x+1}\right|$.

С—11

Исследовательская работа (выполняется на миллиметровой или клетчатой бумаге).

Вариант 1

Исходя из графика функции $y=f(x)$ постройте график функции $y=\frac{1}{f(x)}$, если:

а) $f(x)=x^2-6x+5$; в) $f(x)=x^2-4x+6$;
б) $f(x)=x^2-6x+9$; г) $f(x)=-x^2-8x+12$.

Вариант 2

Исходя из графика функции $y=f(x)$ постройте график функции $y=\frac{1}{f(x)}$, если:

а) $f(x)=x^2-7x+10$; в) $f(x)=x^2+2x+6$;
б) $f(x)=x^2-8x+12$; г) $f(x)=-x^2+7x-12$.

С—12

Вариант 1

1. При каких значениях параметра p уравнение $(p-2)x^2-(3p+6)x+6p=0$, $p\neq 2$, будет иметь два корня? будет иметь один корень? не будет иметь корней?

2. Определите значение p, такое, чтобы в уравнении $2x^2-(2p+1)x+p^2-9p+39=0$ один из корней был в два раза больше другого.
Решите уравнение при найденном значении p.
3. Не вычисляя корней уравнения $2x^2-4x+1=0$, найдите:
а) $x_1x_2^3+x_1^3x_2$; б) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра p уравнение $(3+p)x^2-(6-p)x+p+3=0$ будет иметь два корня? будет иметь один корень? не будет иметь корней?
2. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ таковы, что $x_1^2+x_2^2=1{,}75$. Определите величину a.
Решите уравнение при найденном значении a.
3. Не вычисляя корней уравнения $2x^2+6x+1=0$, найдите:
а) $x_1x_2^3+x_1^3x_2$; б) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

С—13

Вариант 1

1. На отрезке [1; 4] заданы три функции. Для каждой из них найдите точку экстремума (если она существует), значение функции в этой точке, наибольшее M и наименьшее m ее значения на этом отрезке. Укажите множество значений функции на этом отрезке.
а) $y=4x+3$; б) $y=2x^2-8x+3$; в) $y=-x^2+4x+1$.
2. На параболе $y=-x^2+6x-4$ найдите точку, для координат которой выражение $y-3x^2+2x+3$ принимает свое наибольшее значение.

Вариант 2

1. На отрезке [0; 3] заданы три функции. Для каждой из них найдите точку экстремума (если она существует), значение функции в этой точке, наибольшее M и наименьшее m ее значения на этом отрезке. Укажите множество значений функции на этом отрезке.
а) $y=2-5x$; б) $y=-x^2+4x+1$; в) $y=x^2-5x-1$.
2. На параболе $y=x^2-10x+2$ найдите точку, для координат которой выражение $4y-6x^2-4x+5$ принимает свое наибольшее значение.

С—14

Вариант 1

1. При каком значении параметра a наименьшее значение функции $y=ax^2+(a+4)x+a$ равно $-\frac{3}{2}$?
2. Фигура ограничена параболами $y=16-x^2$ и $y=x^2-6x-5$. Найдите длину l наибольшего отрезка, параллельного оси Oy и лежащего внутри данной фигуры.
3. Около каменной стенки нужно сделать деревянный забор, чтобы огородить прямоугольный участок земли. Имеется материал на 200 м забора. При каких размерах площадь огороженного участка будет наибольшей?
4. На прямой $x+2y-1=0$ найдите точку, для координат которой выражение x^2+xy+y^2-3x+y принимает свое наименьшее значение. Чему оно равно?

Вариант 2

1. При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y=ax^2+(a+1)x+a$ равно $-\frac{5}{3}$?
2. Фигура ограничена параболами $y=4-x^2$ и $y=x^2-4x-8$. Найдите длину l наибольшего отрезка, параллельного оси Oy и лежащего внутри данной фигуры.
3. Кусок проволоки длиной 100 см нужно разрезать на две части: из одной части сделать квадрат, из другой — правильный треугольник. На какие части следует разделить проволоку, чтобы сумма площадей полученных фигур была наименьшей?
4. На параболе $y=x^2-12x+1$ найдите точку, для координат которой выражение $2y-9x^2-4x+5$ принимает свое наибольшее значение. Чему оно равно?

С—15

Вариант 1

1*. Для заданной функции $y=f(x)$ найдите область определения, множество значений, нули функции, интервалы знакопостоянства, интервалы монотонности, если:

а) $f(x)=x^2-9x+14$;   в) $f(x)=-x^2+9x-18$;

б) $f(x)=\frac{4x-3}{2-3x}$;   г) $f(x)=\frac{1-3x}{2+x}$.

2*. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{x}{x^2+16}$ и постройте эскиз ее графика.

Вариант 2

1*. Для заданной функции $y=f(x)$ найдите область определения, множество значений, нули функции, интервалы знакопостоянства, интервалы монотонности, если:

а) $f(x)=-x^2+12x-27$; в) $f(x)=x^2-8x+15$;

б) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-3}$; г) $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-5}$.

2*. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+25}$ и постройте эскиз ее графика.

Степени и корни

С—16

Вариант 1

1. Используя свойства степеней, вычислите $(-2^3)^2\cdot 9^0$.
2. Выполните действия:
$$\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\left(\frac{2b^2}{3a}\right)^2\cdot\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^0.$$
3. Постройте график функции $y=(x^2-1)^0$.
4. При каких значениях параметра p данное выражение определено при всех значениях переменной x:
а) $(x^2+x-p)^2$; б) $(x^2-2x+p)^0$?

Вариант 2

1. Используя свойства степеней, вычислите $(-3^2)^3\cdot 5^0$.
2. Выполните действия:
$$\left(\frac{4m}{3n^2}\right)^3\cdot\left(\frac{3n}{4m^2}\right)^2\cdot\left(\frac{m^2}{n^5}\right)^0.$$
3. Постройте график функции $y=(x^2-x-2)^0$.
4. При каких значениях параметра p данное выражение определено при всех значениях переменной x:
а) $(x^2+x+p)^2$; б) $(x^2+4x+p)^0$?

С—17

Вариант 1

1. Вычислите $\left[\left(1\,\frac{1}{3}\right)^{-1}-2^{-2}\right]^{-3}$.
2. Решите уравнение $(x^{-2}-a^{-2})\cdot(x^{-1}-a^{-1})^{-1}=b^{-1}$.

3. При каких значениях x определено выражение $\left[\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{-3}\right]^0$?
4. Постройте график функции $y=\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{-1}$.

Вариант 2

1. Вычислите $\left[\left(4\frac{1}{2}\right)^{-1}-3^{-2}\right]^{-2}$.
2. Решите уравнение $(x^{-1}+a^{-1})\cdot(x^{-2}-a^{-2})^{-1}=b^2$.
3. При каких значениях x определено выражение $\left[\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{-4}\right]^0$?
4. Постройте график функции $y=\left(\frac{3}{3x+5}\right)^{-1}$.

С—18

Вариант 1

1. Упростите выражение $\frac{[(a+b+c)^{-1}]^{-1}}{a^{-1}b^{-1}+b^{-1}c^{-1}+c^{-1}a^{-1}}$.
2. При каких значениях x выполняется неравенство
$$\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{-1}>1?$$
3. При каких значениях параметра a уравнение $\left[-\frac{3}{4}-(2a+1)x^2\right]^{-1}\cdot(a+2)x=a^0$ имеет два равных отрицательных корня?

Вариант 2

1. Упростите выражение $\frac{a^{-1}b^{-1}+b^{-1}c^{-1}-c^{-1}a^{-1}}{[(a-b+c)^{-1}]^{-1}}$.
2. При каких значениях x выполняется неравенство
$$\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{-1}>1?$$
3. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{a}{x^{-2}}-\frac{x}{(a-1)^{-1}}=$ $=\left(\frac{1}{3}\right)^0$ имеет два равных положительных корня?

С—19

Вариант 1

1. Имеет ли график функции $y=(x-1)^3+2$ ось симметрии или центр симметрии? Если да, то укажите их.
2. Расположите в порядке возрастания числа:
$$26{,}5^3,\quad 27^4,\quad 25{,}2^3,\quad 27^6.$$

3. Сколько корней на промежутке $[2; +\infty)$ имеет уравнение $(x-2)^4+(x-2)^3-a=0$ при $a=-1$; $a=1$?
4. Имеет ли функция $y=x^6-x^3$ наибольшее или наименьшее значение на промежутке $(-\infty; 0]$? Если да, то найдите его.

Вариант 2

1. Имеет ли график функции $y=(x-1)^2+5$ ось симметрии или центр симметрии? Если да, то укажите их.
2. Расположите в порядке возрастания числа:
$$24^4, \quad 23{,}9^3, \quad 24^5, \quad 22{,}5^2.$$
3. Сколько корней на промежутке $[-3; +\infty)$ имеет уравнение $(x+3)^4+(x+3)^3-a=0$ при $a=1$; $a=-1$?
4. Имеет ли функция $y=x^4-x^3$ наибольшее или наименьшее значение на промежутке $(-\infty; 0]$? Если да, то найдите его.

С—20

Вариант 1

1. Вычислите $\dfrac{\sqrt[4]{625\cdot(-3)^4}\cdot(-\sqrt[7]{3})^7}{\sqrt{225}}$.
2. При каких x имеет значение выражение $\dfrac{\sqrt[4]{x-3}+\sqrt[6]{x^2-x-6}}{x^2-25}$?
3. Установите, является ли число $\sqrt[4]{2}+1$ рациональным.

Вариант 2

1. Вычислите $\dfrac{\sqrt[5]{1024\cdot(-3)^5}\cdot(-\sqrt[8]{8})^8}{\sqrt{144}}$.
2. При каких x имеет значение выражение $\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x^2-5x+6}}{x^2-12}$?
3. Установите, является ли число $3+\sqrt[3]{2}$ рациональным.

С—21

Вариант 1

1. Вычислите $\dfrac{\sqrt[17]{5^{10}\cdot(-5)^7}\cdot\sqrt[6]{(-8)^2}}{\left(\sqrt[11]{-10}\right)^{11}}$.
2. Решите уравнение $\sqrt[4]{(2x+5)^4}=x$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $\sqrt[6]{xy}=1$.

Вариант 2

1. Вычислите $\dfrac{\sqrt[5]{6^2\cdot(-6)^3}\cdot\sqrt[12]{(-27)^4}}{\left(\sqrt[9]{-4}\right)^9}$.
2. Решите уравнение $\sqrt[6]{(4-3x)^6}=x$.
3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $\sqrt[4]{-yx}=1$.

С—22

Вариант 1

1. Выполните действия: $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32a^{-5}b^{15}}}\cdot(-4m^2n)^2$.
2. Вычислите $\sqrt[4]{81\cdot0{,}0625}-\sqrt[3]{15^3\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\cdot0{,}3^3}$.
3. Докажите, что при $x<2$ для любого значения y выполняется равенство

$$\frac{\sqrt[4]{(x-2)^4(y+3)^8}}{x-2}=-(y+3)^2.$$

Вариант 2

1. Выполните действия: $20a^6\sqrt[3]{\dfrac{125m^{-6}n^{18}}{64(5a^2b)^6}}$.
2. Вычислите $\sqrt[5]{32\cdot0{,}00243}-\sqrt[4]{8^4\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\cdot0{,}9^4}$.
3. Докажите, что при $x>4$ для любого значения y выполняется равенство

$$\frac{\sqrt[8]{(x-4)^8(y+6)^{16}}}{4-x}=-(y+6)^2.$$

С—23

Вариант 1

1. Выполните действия:

а) $\sqrt[3]{4m^2-1}:\left(\sqrt[6]{\dfrac{2m+1}{2m-1}}\right)^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}}}$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $(\sqrt{5}-3)\sqrt[6]{\dfrac{1}{\sqrt{5}+3}}$; б*) $(x-2)\sqrt[4]{\dfrac{2x}{(2-x)^2}}$.

Вариант 2

1. Выполните действия:

а) $\sqrt[5]{16a^2-9}:\left(\sqrt[10]{\dfrac{4a-3}{4a+3}}\right)^2$; б) $\sqrt[4]{3\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}}}$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а) $(\sqrt{6}-4)\sqrt[4]{\dfrac{1}{\sqrt{6}+4}}$; б*) $(8-x)\sqrt[6]{\dfrac{5x}{(x-8)^2}}$.

С—24

Вариант 1

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

2. Упростите выражение $2\sqrt[3]{x^6y^4}-x\sqrt[3]{x^3y^4}$.
3. Сравните два числа:

$$\sqrt{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}} \text{ и } \sqrt{17+\sqrt{2}}-\sqrt{17-\sqrt{2}}.$$

Вариант 2

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$.

2. Упростите выражение $4\sqrt[7]{x^{22}y^9}+2x^2\sqrt[7]{x^8y^9}$.
3. Сравните два числа:

$$3^{-1}\sqrt{28-10\sqrt{3}}\,(5+\sqrt{3}) \text{ и } \sqrt{11+\sqrt{101}}-\sqrt{11-\sqrt{101}}.$$

С—25

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[6]{x-3}.$$

2. Найдите область значений функции $y=\sqrt[4]{2x-3}$.

3. Имеет ли график функции $y=\sqrt[5]{2x-1}$ ось симметрии или центр симметрии? Если да, то укажите их.
4. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{2x-5}$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции
$$y=\sqrt[4]{x+5}+2\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x-2}.$$
2. Найдите область значений функции $y=1+\sqrt[6]{3x+1}$.
3. Имеет ли график функции $y=\sqrt[3]{4-5x}$ ось симметрии или центр симметрии? Если да, то укажите их.
4. Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt[3]{4x}+\sqrt{2x-7}$.

С—26

Вариант 1

1. Вычислите $4^{0,5}\cdot 81^{-0,25}-(0{,}027)^{-\frac{2}{3}}\cdot 10^{-2}+32^{0,2}$.
2. Запишите с помощью дробных показателей:
$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[4]{b^{-3}}}}{\sqrt{a^2b}+\sqrt[4]{a^2b^3}}.$$

Вариант 2

1. Вычислите $32^{-0,2}\cdot 625^{0,25}-(0{,}064)^{-\frac{2}{3}}\cdot 10^{-2}+16^{0,5}$.
2. Запишите с помощью дробных показателей:
$$\frac{\sqrt[6]{m^3n^2}+\sqrt{m^4n}}{\sqrt[7]{\sqrt{\sqrt[3]{m^4}}\cdot\sqrt[8]{n^{-5}}}}.$$

С—27

Вариант 1

1. Выполните указанные действия:
$$a^2(ab^{-2})^{\frac{1}{2}}\cdot(b^2\sqrt{ab})^{\frac{1}{3}}-2\sqrt{a^3b}\cdot(ab^5)^{\frac{1}{6}}\cdot a.$$
2. Упростите выражение
$$\frac{\left(x^{\frac{3}{2}}+xy^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{5}{3}}+x^{\frac{4}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+xy^{\frac{2}{3}}}.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\left(x^{0,75}-y^{0,75}\right)\left(x^{0,25}+y^{0,25}\right)\left(x^{0,5}+y^{0,5}\right)}{x^{0,5}+x^{0,25}\cdot y^{0,25}+y^{0,5}}=x-y.$$

Вариант 2

1. Выполните указанные действия:

$$m^2\left(n^{\frac{4}{3}}m^{-2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(n^{-1}\cdot\sqrt[3]{m^{-5}n^4}\right)^{\frac{1}{2}}+3\left(n^{\frac{9}{2}}m^{\frac{1}{2}}\sqrt{n^{-3}m^7}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

2. Упростите выражение

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}b^2-b^{\frac{5}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+ab^{\frac{2}{3}}}.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\left(x^{1,5}+y^{1,5}\right)\left(1+\left(yx^{-1}\right)^{0,5}\right)\cdot x^{0,75}y^{0,25}}{\left(x+y-(yx)^{0,5}\right)\left(-2(yx)^{0,5}-x-y\right)}=-\sqrt[4]{yx}.$$

С—28

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$y=\left[(x^2-x-6)^{\frac{1}{4}}+5\right]^{\frac{1}{4}}.$$

2. Решите неравенство $(5x+2)^{-\frac{1}{6}}<(3x-1)^{-\frac{1}{6}}$.
3. В каком промежутке находятся значения функции $y=2\sqrt[3]{x}-5x^{-\frac{1}{6}}+(3x)^{\frac{1}{4}}$, если аргумент изменяется в промежутке $[10^{-12};\ 2^{-12}]$?

Вариант 2

1. Найдите область определения функции

$$y=\left[(5x-x^2-6)^{\frac{1}{2}}+4\right]^{\frac{1}{6}}.$$

2. Решите неравенство $(3x-2)^{\frac{1}{3}}>(2-x)^{\frac{1}{3}}$.
3. В каком промежутке находятся значения функции $y=\sqrt[4]{x}-2x^{-\frac{1}{5}}+x^{\frac{1}{10}}$, если аргумент изменяется в промежутке $[1;\ 10^{20}]$?

С—29

Вариант 1

1. Производственная функция фирмы имеет вид $Q=2{,}5K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$. Затратив $L=40$ единиц труда, фирма выпустила $Q=200$ единиц окончательной продукции. Какие затраты капитала обеспечили этот выпуск?
2. Производственная функция фирмы имеет вид $Q=5K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$. Фирма выпустила $Q=300$ единиц продукции, затратив на это $K=100\,000$ единиц капитала. Какие затраты труда обеспечили этот выпуск?
3. Найдите изокванту производственной функции $Q=2K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}$, соответствующую выпуску 10 единиц продукции.
4. Какой изокванте производственной функции $Q=5K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$ соответствуют затраты $K=6561$, $L=1296$?
5. Производственная функция имеет вид $Q=1{,}7K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$.

   а) Обеспечит ли выпуск $Q_0=1540$ единиц окончательной продукции сочетание ресурсов $K=729$, $L=1000$?

   б) Достаточно ли этих ресурсов для выпуска 1500 единиц окончательной продукции?

Вариант 2

1. Производственная функция фирмы имеет вид $Q=3K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}$. Фирма выпустила 120 единиц окончательной продукции, затратив $L=32$ единицы труда. Какие затраты капитала обеспечили этот выпуск?
2. Производственная функция фирмы имеет вид $Q=1{,}4K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$. Фирма выпустила $Q=42$ единицы продукции, затратив на это $K=900$ единиц капитала. Какие затраты труда обеспечили этот выпуск?
3. Найдите изокванту производственной функции $Q=2{,}7K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, соответствующую выпуску 24,3 единицы продукции.
4. Какой изокванте производственной функции $Q=1{,}6K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$ соответствуют затраты $K=14\,641$, $L=2401$?
5. Производственная функция имеет вид $Q=1{,}2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$.

   а) Обеспечит ли выпуск $Q_0=60$ единиц окончательной продукции сочетание ресурсов $K=36$, $L=81$?

   б) Достаточно ли этих ресурсов для выпуска 70 единиц окончательной продукции?

С—30

Вариант 1

1. Производственная функция фирмы имеет вид $Q = 300K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$. Стоимость единицы труда $\omega = 25$ денежных единиц, стоимость единицы капитала $r = 4$ денежные единицы. Фирма предполагает выпустить 1000 единиц окончательной продукции. Определите наименьшую стоимость этого выпуска и затраты на этот выпуск труда и капитала.

2. Производственная функция фирмы задана в виде $Q = 100K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$. Стоимость единицы труда $\omega = 121$ денежная единица, а единицы капитала $r = 81$ денежная единица. Фирма предполагает выпустить 1600 единиц окончательной продукции.
   а) Достаточна ли сумма в 300 денежных единиц для этого производства?
   б) Достаточна ли сумма в 3500 денежных единиц для этого производства?
   в) Какова минимальная стоимость выпуска 1600 единиц окончательной продукции?

Вариант 2

1. Производственная функция фирмы имеет вид $Q = 800K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$. Стоимость единицы труда $\omega = 16$ денежных единиц и единицы капитала $r = 4$ денежные единицы. Фирма предполагает выпустить 51 200 единиц окончательной продукции. Определите наименьшую стоимость этого выпуска, а также затраты на него труда и капитала.

2. Производственная функция фирмы задана в виде $Q = 144K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$. Стоимость единицы труда $\omega = 36$ денежных единиц, а единицы капитала $r = 9$ денежных единиц. Фирма предполагает выпустить 1728 единиц окончательной продукции.
   а) Достаточна ли сумма в 400 денежных единиц для этого производства?
   б) Достаточна ли сумма в 500 денежных единиц для этого производства?
   в) Какова наименьшая стоимость выпуска 1728 единиц окончательной продукции и затраты труда и капитала на этот выпуск?

Уравнения, неравенства и их системы

С—31

Вариант 1

1. Убедитесь, что многочлен $P(x)=x^4+x^2+1$ делится на многочлен $R(x)=x^2+x+1$, и найдите их частное.
2. Разделите с остатком многочлен $f(x)=x^4+3x^3+2x^2-1$ на многочлен $Q(x)=-x^2+2x+1$.
3. При каких натуральных значениях n сократима дробь $\dfrac{n+4}{n^2+n-7}$?

Вариант 2

1. Убедитесь, что многочлен $P(x)=x^5-x^3-2x$ делится на многочлен $R(x)=x^3-2x$, и найдите их частное.
2. Разделите с остатком многочлен $f(x)=x^4-2x^3+x-1$ на многочлен $Q(x)=x^2-3x+1$.
3. При каких натуральных значениях n сократима дробь $\dfrac{n-3}{n^2+2n-8}$?

С—32

Вариант 1

1. Для каких значений a и b многочлен $P(x)=x^5-2x^3+ax+b$ имеет корень $x=1$, а при делении на $x-2$ дает остаток 15?
2. Используя схему Горнера, вычислите значение многочлена $P(x)=x^6-4x^4+x^3-2x^2+5$ при $x=-3$.
3. Докажите, что остаток при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $ax+b$ равен значению многочлена при $x=-\dfrac{b}{a}$.

Вариант 2

1. Для каких значений p и q многочлен $P(x)=2x^4+3x^3+px+q$ имеет корень $x=-1$, а при делении на $x+2$ дает остаток 6?
2. Используя схему Горнера, вычислите значение многочлена $P(x)=x^6+2x-x^3-3x^2+1$ при $x=-2$.
3. Какую кратность имеет корень $x=-2$ для многочлена $x^5+2x^4-8x^3-16x^2+16x+32$?

С—33

Вариант 1

1. Найдите область допустимых значений уравнения $\frac{\sqrt{1-x}}{x^2-5x+4}+\frac{x}{x+3}=1.$
2. Докажите, что уравнение $\frac{5x^2-2x}{\sqrt{3x-2}}=0$ не имеет корней.
3. Не решая уравнения $\sqrt{2x-b}+x=2$, укажите значения параметра b, при которых оно не имеет корней.

Вариант 2

1. Найдите область допустимых значений уравнения $\frac{\sqrt[4]{x-3}}{x^2-4x+3}+\frac{2x}{x-5}=1.$
2. Докажите, что уравнение $\frac{3x-2x^2}{2+\sqrt{x-2}}=0$ не имеет корней.
3. Не решая уравнения $b-\sqrt{x-5}=3x$, укажите значения параметра b, при которых оно не имеет корней.

С—34

Вариант 1

1. Какое из уравнений является следствием другого:

   а) $\frac{x^2+x}{x+3}=\frac{6}{x+3}$; б) $\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{6}{x-1}$?
2. Укажите значения параметра p, при которых уравнения $\frac{x^2-5x-6}{\sqrt[4]{2x+p}}=0$ и $x^2-5x-6=0$ равносильны.
3. Может ли измениться множество корней, если перейти от уравнения $f(x)=\varphi(x)$ к уравнению:

   а) $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$; б) $(f(x))^{2n}=(\varphi(x))^{2n}$; в) $\sqrt[2k-1]{f(x)}=\sqrt[2k-1]{\varphi(x)}$?

Вариант 2

1. Какое из уравнений является следствием другого:

   а) $(x+1)^2=5x^2(x+1)$; б) $5x^2-x-1=0$?
2. При каких значениях параметра a уравнения $\frac{(x^2-a)^2(x^2-5x-6)}{\sqrt{(x^2-a)^2}}=0$ и $(x^2-a)(x^2-5x-6)=0$ равносильны?

3. Может ли измениться множество корней, если перейти от уравнения $f(x)=\varphi(x)$ к уравнению:

а) $(f(x))^{2k-1}=(\varphi(x))^{2k-1}$; б) $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{\varphi(x)}$; в) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\varphi(x)}{x}$?

С—35

Вариант 1

1. Решите уравнение, разлагая левую часть на множители методом группировки: $x^3-7x^2-21x+27=0$.
2. Решите уравнение, используя теорему Безу: $4x^3+x^2-5=0$.
3. Найдите все значения b, при которых один из корней уравнения $x^3+3x^2-bx-8=0$ равен 2. Для каждого из найденных значений b определите остальные корни уравнения.

Вариант 2

1. Решите уравнение, разлагая левую часть на множители методом группировки: $3x^3-5x^2+15x-81=0$.
2. Решите уравнение, используя теорему Безу: $2x^3-3x^2-4x+$ $+1=0$.
3. Найдите все значения b, при которых один из корней уравнения $2x^3+bx^2-5x+2=0$ равен -2. Для каждого из найденных значений b определите остальные корни уравнения.

С—36

Вариант 1

1. Решите уравнение, подобрав подходящую замену переменной:

   а) $x^4+5x^2-6=0$; б) $x(x-1)(x-2)(x-3)=8$.

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4+4x^3=a-7|x^2+2x|-4x^2$$

не имеет корней?

Вариант 2

1. Решите уравнение, подобрав подходящую замену переменной:

   а) $|2x+3|-7=4x^2+12x$; б) $(x+2)(x+3)(x+4)=-6$.

2. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^6+5x^4+x^2=a+2|x^3+x|+3x^4$$

не имеет корней?

С—37

Вариант 1

Решите уравнение, используя подходящую замену переменной:

а) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$; б) $x^4+2x^3-9x^2-6x+9=0$.

Вариант 2

Решите уравнение, используя подходящую замену переменной:

а) $2x^4-x^3+3x^2-x+2=0$; б) $x^4+3x^3-8x^2-12x+16=0$.

С—38

Вариант 1

1. Убедившись, что данное уравнение является однородным, найдите его корни: $(x^2-1)^2-4(x^2+1)^2=3(x^4-1)$.
2. Найдите корни уравнения $(2x-1)^2(x+2)^2-(2x-1)(x^2-4)-2(x-2)^2=0$.

Вариант 2

1. Убедившись, что данное уравнение является однородным, найдите его корни: $(x-2)^2-6(x^2+2x+4)^2=5x^3-40$.
2. Найдите корни уравнения $(2x+1)^4-(2x^2+5x+2)^2-12(x+2)^4=0$.

С—39

Вариант 1

1. Используя формулы Виета, докажите, что уравнение $x^3-2x^2-x-9=0$ не может иметь три неотрицательных корня.
2. Найдите число a, если один из корней уравнения $x^3-6x^2+21x-a=0$ равен полусумме двух других корней.

Вариант 2

1. Используя формулы Виета, докажите, что уравнение $x^3-5x^2+12x-3=0$ не может иметь три целых корня.
2. Найдите число a, если один из корней уравнения $x^3+4x^2+5x+a=0$ равен сумме двух других корней.

С—40

Вариант 1

1. Решите уравнение $\dfrac{x}{2+3x}-\dfrac{5}{3x-2}=\dfrac{5x+10}{4-9x^2}$.

2. Решите уравнение $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2=2$.

3. Решите уравнение $\frac{x}{2x^2-3x+4}=1-\frac{4x}{x^2+x+2}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{1+(2+x)^{-1}}{1-(2+x)^{-1}}-\left(1-\frac{1-(4+x^2)}{4x}\right)=0$.

2. Решите уравнение $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.

3. Решите уравнение $\frac{x^2+3x+2}{x^2-5x+2}+\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}=2$.

С—41

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=12, \\ \frac{xy}{x-y}=4\frac{1}{2}. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3-y^3-5x+5y=0, \\ xy=25. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+y=1, \\ y^3-4y^2+4y+x^6=7. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y^2=3, \\ x^4+y^4+6x=29. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4+y^4+6x^2=2y^4+6y^2, \\ x^2+2y^2=3. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y=3, \\ y^3+3y^2+11y+x^4=7. \end{cases}$

С—42

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=2, \\ xz=6. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4+4x^2y^2=12, \\ y^4+x^2y^2=3. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61, \\ xy=12. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} y-2z=-1, \\ x+z=2, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 8x^3-3x^2y-xy^2-x-y=0, \\ y^3-xy^2-x^2y+x+y=0. \end{cases}$

С—43

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=11, \\ xy=5. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 25x^2-4y^2=12, \\ \dfrac{3}{5x+2y}+\dfrac{4}{5x-2y}=2. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+xy}+\dfrac{4}{y^2+xy}=11, \\ \dfrac{7}{x^2+xy}-\dfrac{1}{y^2+xy}=5. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-xy+y^2=4, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2+(y-4)^2=8, \\ 4x-xy=2. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4x^2+xy}+\dfrac{2}{y^2+3xy}=-1, \\ \dfrac{3}{4x^2+xy}-\dfrac{7}{y^2+3xy}=10. \end{cases}$$

С—44

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy^3+x^3y=0, \\ x^2y^4+3y^2=48. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 = 2(x-y), \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^3y^4 + x^4y^3 = 24. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2y^3 - 5x^3y^2 = 4, \\ 6x^3y^4 - 10x^4y^3 = 16. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 8x^3 - 27y^3 = 10x - 15y, \\ 4x^2 + 9y^2 = 2. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 - y^4 + x^2 = y^2, \\ y^2 + 7xy + 10x^2 = 15. \end{cases}$

С—45

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x+a}{x-2} + \frac{2ax}{2-x} = 5$ не имеет корней?
2. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $5x^3 - 2x = p(x^3 + x)$ имеет три различных корня.
3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{y-2}{5y-y^2} = \frac{y-a}{5-y}$ имеет не пустое множество корней.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{3x+a}{2x-5} - \frac{4ax}{15-6x} = 2$ не имеет корней?
2. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $p^2x^3 - (2x-3)(x-1) = p^2x^2$ имеет три различных корня.
3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{ay+4}{3y-y^2} = \frac{y-1}{y-3}$ имеет не пустое множество корней.

С—46

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 4y - x = a, \\ x - y^2 = 1 \end{cases}$ совместна.
2. Найдите количество решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 2a^2, \\ y = \sqrt{(x-2a)^2} \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a.

3. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} y-|x|+1=p, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+x=y \end{cases}$ совместна.
2. Найдите количество решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ (x+y)^2=16 \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a.
3. При каких значениях параметра p система $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=4, \\ y=px^2 \end{cases}$ имеет два решения?

С—47

Вариант 1

1. С помощью графиков определите, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=1, \\ y=|x|+a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.
2. Найдите графически множество точек с координатами $(0;\ b)$, таких, что система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=b \end{cases}$ совместна.

Вариант 2

1. С помощью графиков определите, при каких значениях параметра p система уравнений $\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2=1, \\ y=|x-2|+p \end{cases}$ несовместна.
2. Найдите графически множество точек с координатами $(0;\ b)$, таких, что система уравнений $\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2=4, \\ x+y=b \end{cases}$ совместна.

С—48

Вариант 1

1. Периметр прямоугольника равен 10 м, а его площадь равна 6 м^2. Найдите длины сторон прямоугольника.
2. При покупке 60 акций акционерного общества «Прогресс» и 75 акций акционерного общества «Интер» уплачено 405 тыс. р. Через месяц акции АО «Прогресс» упали в цене на 15%, а

акции АО «Интер» подорожали на 10% и их общая стоимость составила 355 500 р. Определите стоимость акций каждого общества в момент покупки.

Вариант 2

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен 13 кв. ед. После того как один катет увеличили в 3 раза, а другой уменьшили в 2 раза, площадь треугольника стала равной 4,5 кв. ед. Определите первоначальные длины катетов.
2. Две бригады должны вырыть три траншеи, из которых первая траншея вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, бригады вырыли первую траншею за 3 ч 36 мин. Вторая траншея была вырыта за 8 ч, но при этом 2 ч первая бригада работала одна. Какое время потребуется второй бригаде, чтобы одной вырыть третью траншею?

С—49

Вариант 1

1. Применяя метод интервалов, решите неравенство:

   а) $(x^2+6)(x^2-4)\leqslant(2x^2-3)(x^2-4)$;

   б) $(x^2-4x+3)(x^2-5x)\geqslant 0$.
2. Решите неравенство $(x^2+x+3)(x^2+x+4)>2$.

Вариант 2

1. Применяя метод интервалов, решите неравенство:

   а) $(2x^2+3)(x^2-9)\geqslant(x^2+4x)(x^2-9)$;

   б) $(x^3-6x^2+10x)(x^2-2x-15)<0$.
2. Решите неравенство $(x^2-4x+2)(x^2-4x+5)<4$.

С—50

Вариант 1

1. Равносильны ли неравенства
$$\frac{x^3-8}{(2x-1)(x^2+2x+4)}\geqslant 0 \text{ и } (x-2)(2x-1)\geqslant 0?$$
2. Решите неравенство
$$\frac{4}{x^2-4x}<\frac{1}{x-4}.$$
3. Решите неравенство
$$\frac{2}{x^2+10x+27}+\frac{5}{x^2+10x+26}\geqslant 6.$$

Вариант 2

1. Равносильны ли неравенства
$$\frac{x-2}{(x+5)(x+4)} \geqslant 0 \text{ и } (x-2)(x+5)(x+4) \geqslant 0?$$
2. Решите неравенство
$$\frac{2x+10}{(x-4)(x-5)} + \frac{x+5}{x-5} > -1.$$
3. Решите неравенство
$$\frac{2(x^2-6x+9)}{x^2-3x+4} + \frac{5x^2-30x+45}{x^2-3x+5} < 6x^2-36x+54.$$

С—51

Вариант 1

1. Докажите, что если $a>0$ и $ab=1$, то $a+b \geqslant 2$.
2. Докажите, что неравенство $x^2+y^2-2x-2y+5>0$ выполняется для любой пары чисел x и y.
3. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то
$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+c)(b+c)+(a+b)(b+c)+(a+b)(a+c)} \leqslant \frac{1}{3}\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Вариант 2

1. Докажите, что если $a+b=1$, то $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$.
2. Докажите, что неравенство $3x^2+3y^2-4xy+2x-4y+6>0$ выполняется для любой пары чисел x и y.
3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \geqslant 9$.

С—52

Вариант 1

1. Найдите область допустимых значений уравнения
$$\sqrt{1-2x} + \sqrt[3]{5x-2x^2-2} + \sqrt[4]{4x+7} = 0.$$
2. Докажите, что уравнение $\sqrt[4]{1-x^2} = x-2$ не имеет корней.
3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt[4]{9-x^2} = x+3a$ может иметь корни.

Вариант 2

1. Найдите область допустимых значений уравнения
$$\sqrt[4]{2-5x} + \sqrt[3]{2-5x-x^2} + \sqrt{3x+2} = 0.$$

2. Докажите, что уравнение $\sqrt{10+\sqrt[4]{x-x^2}}=x^2-3$ не имеет решения.
3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt[6]{4-9x^2}=2a-x$ может иметь корни.

С—53

Вариант 1

1. Решите уравнение:

   а) $2\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{4-x}$; б) $\sqrt{3x+6}-\sqrt{5x-1}=1$.
2. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt[4]{x+5}}{x-3}+\dfrac{\sqrt[4]{x+5}}{8}=4\sqrt[4]{x-3}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

   а) $\sqrt{2\sqrt{x^2-3}+x^2}=x+2$; б) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$.
2. Решите уравнение $\dfrac{3\sqrt[4]{1-2x}}{x+2}-\dfrac{6\sqrt[4]{1-2x}}{5}=\sqrt[4]{\dfrac{5x+10}{3}}$.

С—54

Вариант 1

1. Решите уравнение, вводя новое неизвестное:
$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$$
2. Решите уравнение, используя свойства функций:
$$\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+27}=5.$$
3. Решите уравнение, вводя новое неизвестное:
$$\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}+\sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}=2.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение, вводя новое неизвестное:
$$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+3}=-1.$$
2. Решите уравнение, используя свойства функций:
$$\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[3]{x+7}=3.$$
3. Решите уравнение, вводя новое неизвестное:
$$\sqrt{x+7}-\sqrt[3]{x-10}=5.$$

С—55

Вариант 1

1. Решите неравенство
$$\sqrt[4]{5x-1} \geqslant 2.$$

2. Решите неравенство:

   а) $\sqrt{6-3x} > x-2$; б) $\sqrt{3-7x} \geqslant \sqrt{6x-8}$.

3. Решите неравенство, вводя новое неизвестное:
$$\frac{4}{\sqrt{x-5}+3} > \frac{3}{\sqrt{x-5}+1}.$$

Вариант 2

1. Решите неравенство
$$\sqrt[4]{25x^2-10x+1} < 1.$$

2. Решите неравенство:

   а) $\sqrt{5-2x} > x-1$; б) $\sqrt{5x+7} < \sqrt{2-3x}$.

3. Решите неравенство, вводя новое неизвестное:
$$\frac{\sqrt[3]{x-1}}{3-\sqrt[3]{x-1}} - \frac{1}{2-\sqrt[3]{x-1}} \geqslant -1.$$

С—56

Вариант 1

1. Изобразите на координатной плоскости решение неравенства
$$y \leqslant |x^2-4x+3|.$$

2. Изобразите на координатной плоскости решение системы неравенств $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y \leqslant 7, \\ 2y-5x \geqslant y-4x. \end{cases}$

3*. Изобразите на координатной плоскости решение системы неравенств $\begin{cases} |x-1|+|y-1| \geqslant 1, \\ |x-2|+|y-2| \leqslant 2. \end{cases}$

Вариант 2

1. Изобразите на координатной плоскости решение неравенства
$$y \geqslant |x^2-7x+10|.$$

2. Изобразите на координатной плоскости решение системы неравенств $\begin{cases} 2y-2\sqrt[3]{x-2} \leqslant 0, \\ y-x^2+4x \geqslant 4. \end{cases}$

3*. Изобразите на координатной плоскости решение системы неравенств $\begin{cases} |x|+|y| \leqslant 2, \\ x^2+y^2 \leqslant 2y+3. \end{cases}$

С—57

Вариант 1

1. Функция предложения фирмы имеет вид $p=q^2+9$, а функция спроса имеет вид $p=\frac{400}{q^2}$.
   Определите:
   а) равновесную цену p_0 и равновесное количество товара q_0, которые установились на рынке;
   б) рыночную ситуацию (избыточное предложение товара или его дефицит) при ценах $p_1=30$ и $p_2=18$ денежных единиц.
2. Функция предложения фирмой некоторого товара задается соотношением $q=-7+\sqrt{9+p}$, а функция спроса — соотношением $p=\frac{288}{q^2}$.
   Определите:
   а) равновесную цену p_0 и равновесное количество товара q_0, которые установились на рынке;
   б) рыночную ситуацию (избыточное предложение товара или его дефицит) при ценах $p_1=60$ и $p_2=80$ денежных единиц.

Вариант 2

1. Функция предложения фирмы имеет вид $p=q^2+5$, а функция спроса имеет вид $p=\frac{36}{q^2}$.
   Определите:
   а) равновесную цену p_0 и равновесное количество товара q_0, которые установились на рынке;
   б) рыночную ситуацию (избыточное предложение товара или его дефицит) при ценах $p_1=18$ и $p_2=8$ денежных единиц.
2. Функция предложения фирмой некоторого товара задается соотношением $p=q^2+8q+20$, а функция спроса — соотношением $p=\frac{160}{q^2}$.
   Определите:
   а) равновесную цену p_0 и равновесное количество товара q_0, которые установились на рынке;
   б) рыночную ситуацию (избыточное предложение товара или его дефицит) при ценах $p_1=30$ и $p_2=50$ денежных единиц.

Последовательности

С—58

Вариант 1

1. Последовательность задана формулой общего члена $a_n = n^2 - 5n$.

   а) Найдите первые шесть членов этой последовательности.

   б) Содержится ли в этой последовательности число 14? Если да, то укажите его номер.

   в) Запишите выражение для $2n+1$-го члена последовательности.

2. Докажите, что данная последовательность убывает:

   а) $(a_n) = \left(\frac{1-5n}{n+3}\right)$; б*) $(a_n) = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Вариант 2

1. Последовательность задана формулой общего члена $a_n = n^2 + 3n$.

   а) Найдите первые пять членов этой последовательности.

   б) Содержится ли в этой последовательности число 70? Если да, то укажите его номер.

   в) Запишите выражение для $2n-1$-го члена последовательности.

2. Докажите, что данная последовательность возрастает:

   а) $(a_n) = \left(\frac{3+2n}{n+5}\right)$; б*) $(a_n) = \sqrt{n} - \sqrt[4]{n} + 1$.

С—59

Вариант 1

1. Напишите первые пять членов последовательности (a_n), если $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ и для всех $n \in N$ выполняется равенство $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$.

2*. Докажите, что последовательность $a_n = -2 \cdot 3^n + 4^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$ и начальным условиям $a_1 = a_2 = -2$.

Вариант 2

1. Напишите первые пять членов последовательности (a_n), если $a_1 = 1$, $a_2 = -2$ и для всех $n \in N$ выполняется равенство $a_{n+2} = a_{n+1} - 3a_n$.

2*. Докажите, что последовательность с общим членом $a_n = 5^n - 3^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 15a_n$ и начальным условиям $a_1 = 2$, $a_2 = 16$.

С—60

Вариант 1

1. Используя метод математической индукции, докажите, что
$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}}<2.$$
2. Докажите, что $5^{n+2}+6^{2n+1}$ делится на 31 при любых $n\in\boldsymbol{N}$.
3. Последовательность (a_n) задана рекуррентно $a_1=4$, $a_{n+1}=$ $=3a_n-2$. Докажите, что $a_n=3^n+1$.

Вариант 2

1. Используя метод математической индукции, докажите, что $6^n-5^n\geqslant n^3$, $n\in\boldsymbol{N}$.
2. Докажите, что $5^{n+1}-2^{n+3}$ делится на 3 при любых $n\in\boldsymbol{N}$.
3. Последовательность (a_n) задана рекуррентно $a_1=7$, $a_{n+1}=$ $=5a_n-8$. Докажите, что $a_n=5^n+2$.

С—61

Вариант 1

1. Дана последовательность чисел $\frac{x-1}{x}$, $\frac{x-3}{x}$, $\frac{x-5}{x}$, ...

   а) Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

   б) Найдите, чему равна разность прогрессии.

   в) Запишите 20-й член прогрессии.

   г) Найдите номер n-го члена прогрессии, если $a_n=\frac{x-21}{x}$.
2. В арифметической прогрессии найдите a_{20}, если $a_2+a_5=2$ и $a_7+a_9=11$.
3. Известно, что корни уравнения $x^3+6x^2+5x+p=0$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите число p и корни уравнения.

Вариант 2

1. Дана последовательность чисел $\frac{2x+1}{x+1}$, $\frac{2x+3}{x+1}$, $\frac{2x+5}{x+1}$, ...

   а) Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

   б) Найдите, чему равна разность прогрессии.

   в) Запишите 15-й член прогрессии.

   г) Найдите номер n-го члена прогрессии, если $a_n=\frac{2x+23}{x+1}$.
2. В арифметической прогрессии найдите a_{12}, если $a_2+a_6=24$ и $a_{10}-a_8=10$.
3. Известно, что корни уравнения $x^3+3x^2-6x+p=0$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите число p и корни уравнения.

С—62

Вариант 1

1. Известно, что восьмой член арифметической прогрессии равен 6. Найдите, чему равна сумма первых пятнадцати членов этой прогрессии.
2. Для некоторой арифметической прогрессии известно, что $S_3=12$, $S_7=35$. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.
3. В каком отношении должны быть первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии, чтобы отношение между суммой n первых членов и суммой n членов, следующих за ними, не зависело от числа членов?

Вариант 2

1. Известно, что десятый член прогрессии равен 5. Найдите, чему равна сумма первых девятнадцати членов этой прогрессии.
2. Для некоторой арифметической прогрессии известно, что $S_4=-16$, $S_9=9$. Найдите сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.
3. В каком отношении должны быть первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии, чтобы сумма n первых членов была в три раза меньше суммы n членов, следующих за ними?

С—63

Вариант 1

1. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $b_3=\frac{1}{6}$, $b_9=\frac{1}{48}$.
2. Найдите номер члена геометрической прогрессии, в которой $b_1=3$, $q=\frac{2}{3}$, $b_n=\frac{32}{81}$.
3. Известно, что сумма второго и четвертого членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма их квадратов равна 144. Найдите третий член этой прогрессии.

Вариант 2

1. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если $b_4=\frac{2}{9}$, $b_7=\frac{2}{27}$.
2. Найдите номер члена геометрической прогрессии, в которой $b_1=-2$, $q=-\frac{3}{4}$, $b_n=\frac{243}{512}$.

3. Известно, что сумма третьего и пятого членов геометрической прогрессии равна $\frac{10}{3}$, а сумма их квадратов равна $\frac{100}{81}$. Найдите четвертый член этой прогрессии.

С—64

Вариант 1

1. Для некоторой геометрической прогрессии известно, что $b_6 - b_4 = 72$, а $b_1 - b_3 = 9$. Найдите S_8.
2. Решите уравнение $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^{37}} = 0$.

3*. Вычислите сумму $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 49 \cdot 2^{48} + 50 \cdot 2^{49}$.

Вариант 2

1. Для некоторой геометрической прогрессии известно, что $b_1 + b_3 = 16$, а $b_4 + b_2 = 32$. Найдите S_7.
2. Решите уравнение $\frac{x+1}{x} + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^3 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^4 = 0$.

3*. Вычислите сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \ldots + 29 \cdot 3^{28} + 30 \cdot 3^{29}$.

С—65

Вариант 1

1. Докажите, что последовательность $\left(\frac{1}{n+3}\right)$ является бесконечно малой, полагая, что последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ бесконечно малая.
2. Докажите, что последовательность $\left(\frac{n}{n^2+1} - \frac{5}{n^2}\right)$ является бесконечно малой.

Вариант 2

1. Докажите, что последовательность $\left(\frac{1}{n+5}\right)$ является бесконечно малой, полагая, что последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ бесконечно малая.
2. Докажите, что последовательность $\left(\frac{n^2}{n^3+2} - \frac{7}{n^2}\right)$ является бесконечно малой.

С—66

Вариант 1

Докажите, что данная последовательность является бесконечно большой:

а) $\left(\frac{n+n^4}{n^3-4}\right)$; б) $\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}$.

Вариант 2

Докажите, что данная последовательность является бесконечно большой:

а) $\left(\dfrac{n^3+3^4}{n^2-7}\right)$; б) $\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-1}$.

С—67

Вариант 1

1. Докажите, что последовательность $\left(1+(-1)^n\right)$ не имеет предела.
2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n^3-1}{6-a_n}$.
3. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$.

Вариант 2

1. Докажите, что последовательность $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)$ не имеет предела.
2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-1$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n^2+2}{1-a_n}$.
3. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n-1}$.

С—68

Вариант 1

Докажите, что заданные рекуррентно последовательности имеют предел, и найдите его:

а) $a_{n+1}=\dfrac{5+a_n}{3}$, $a_1=0$;

б) $a_{n+1}=\sqrt{7+a_n}$, $a_1=\sqrt{7}$.

Вариант 2

Докажите, что заданные рекуррентно последовательности имеют предел, и найдите его:

а) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3}$, $a_1=2$;

б) $a_{n+1}=\sqrt{a_n+12}$, $a_1=\sqrt{12}$.

С—69

Вариант 1

1. Найдите сумму $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{8}{27}+\frac{1}{8}+\frac{16}{81}+\dots$.
2. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма первых трех членов равна $\frac{78}{125}$, а сумма прогрессии равна $\frac{2}{3}$.
3. Представьте смешанную периодическую дробь 3,20(3) в виде обыкновенной.

Вариант 2

1. Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{5}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}-\frac{4}{25}+\frac{1}{(\sqrt{2})^3}-\frac{8}{125}+\dots$.
2. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма членов которой равна 1, а сумма двух первых членов равна $\frac{3}{4}$.
3. Представьте смешанную периодическую дробь 5,30(2) в виде обыкновенной дроби.

С—70

Вариант 1

1. Вкладчик открыл в банке счет, положив на него 30 000 р. Банк выплачивает 6% годовых (проценты простые). Через 5 месяцев 17 дней вкладчик закрыл счет. Какую сумму банк выплатил вкладчику?
2. На счете вкладчика находится 45 000 р. Банк выплачивает 8% годовых (проценты простые). Сколько лет вкладчик держал деньги в банке, если при закрытии счета банк выдал ему 59 400 р.?
3. Какую сумму следует положить на два года в банк, выплачивающий 5% годовых, чтобы первоначальная сумма вклада увеличилась на 600 р. (проценты простые)?
4. На счет вкладчика внесена сумма 20 000 р. Банк выплачивает 12% годовых (проценты сложные).
   а) Какая сумма будет на счете вкладчика через три года?
   б) На какую сумму увеличился первоначальный вклад?
   в) На сколько процентов вырос первоначальный вклад?
5. Какую годовую ставку выплачивает банк (проценты сложные), если через три года первоначальная сумма 64 000 р. увеличилась на 61 000 р.? На сколько процентов увеличился вклад?

6. Пусть в течение четырех лет на расчетный счет акционерного общества в банке в конце каждого года поступает 500 000 денежных единиц, на которые банк начисляет проценты по годовой ставке 12% (проценты сложные). Какая сумма денег будет находиться на расчетном счете акционерного общества в конце указанного срока?

Вариант 2

1. Вкладчик открыл счет в банке, положив на него 90 000 р. Через год 4 месяца и 16 дней вкладчик счет закрыл. Банк выплачивает 7% годовых (проценты сложные). Какую сумму получил вкладчик?
2. На счете вкладчика находится 12 000 р. Банк выплачивает 11% годовых (проценты простые). Сколько лет вкладчик держал деньги в банке, если при закрытии счета банк выдал ему 15 960 р.?
3. Какую сумму следует положить на четыре года в банк, выплачивающий 12% годовых (проценты простые), чтобы первоначальная сумма вклада увеличилась на 1500 р.?
4. На счет вкладчика внесена сумма 35 000 р. Банк выплачивает 11% годовых (проценты сложные).
   а) Какая сумма будет на счете вкладчика через пять лет?
   б) На какую сумму увеличился первоначальный вклад?
   в) На сколько процентов вырос первоначальный вклад?
5. Какую годовую ставку выплачивает банк (проценты сложные), если через два года первоначальная сумма 250 000 р. увеличилась на 110 000 р.? На сколько процентов увеличился вклад?
6. Вкладчик предполагает открыть счет в банке на пять лет при условии, что в начале каждого года вкладчик дополнительно вносит на этот счет 20 000 р. Банк начисляет 8% годовых по ставке сложных процентов. Какая сумма денег будет находиться на счете вкладчика в конце пятого года?

С—71

Исследовательская работа

Постройте модель банковской системы (см. учебник «Алгебра, 9», с. 284), содержащей 6 банков. Выберите самостоятельно их названия, задайте норму обязательных резервов $P\%$, величину вклада в первый банк системы и постройте таблицу, аналогичную таблице 1 учебника. Определите: а) S_6; б) S_n; в) предельную суммарную величину кредитов и мультипликатор.
(Для расчетов используйте компьютер или калькулятор.)

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

С—72

Вариант 1

1. На собрании хоккейной команды присутствуют 25 игроков, среди которых 3 игрока — мастера спорта. Выбирают стартовую пятерку, в которую обязательно должны войти все мастера спорта. Сколько существует способов выбора стартовой пятерки?
2. Среди 40 учащихся девятых классов восемь отличников. На школьную математическую олимпиаду девятиклассники представят команду из 12 учеников, в которую войдут все отличники. Сколько существует способов выбрать такую команду?
3. Учащиеся школы изучают 10 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, чтобы в день было 5 различных предметов?
4. На собрании садового кооператива присутствуют 70 человек. Сколько существует способов выбора председателя кооператива, казначея и секретаря?
5. Сколько различных шестизначных номеров можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторения цифр)?
6. Сколько окружностей можно провести через 15 точек, из которых никакие четыре не лежат на одной окружности и никакие три не лежат на одной прямой, если каждая окружность проходит через 3 точки?
7. Среди 12 стоящих на полке книг 4 книги составляют собрание сочинений Н. В. Гоголя.
   а) Сколькими способами можно расставить эти 12 книг на полке?
   б) Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы тома сочинений Н. В. Гоголя стояли рядом (необязательно подряд)?
   в) Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы тома сочинений Н. В. Гоголя стояли в определенном порядке (1, 2, 3, 4)?
8. На научную конференцию учащихся заявлено 9 докладов. Оргкомитет составляет программу конференции. Сколько вариантов программы имеется у оргкомитета, если:
   а) участник A должен выступать первым;
   б) участник B должен выступать последним;
   в) участники A и B выступают друг за другом в любом порядке;
   г) участник B выступает первым, участник A — последним?
9. Решите уравнение (где x — натуральное число):

   а) $\dfrac{A_x^7+A_x^5}{A_x^5}=91$; б) $\dfrac{A_x^5+A_x^3}{A_x^3}=43$.

Вариант 2

1. Сколько шестизначных чисел, больших 500 000 (без повторения цифр), можно составить из цифр 6, 4, 1, 2, 5, 3?
2. Сколько пятизначных чисел, больших 20 000 (без повторения цифр), можно составить из цифр 2, 3, 1, 4, 7?
3. Из 20 шахматистов, среди которых 4 мастера спорта, комплектуется команда из 6 человек. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если:
   а) в команду следует включить трех мастеров спорта;
   б) в команду следует включить всех мастеров спорта?
4. Собрание из 30 акционеров выбирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?
5. Некоторый комитет, состоящий из 45 человек, выбирает председателя, двух заместителей и пять членов контрольной комиссии. Сколькими способами можно это сделать?
6. Бригада отделочников состоит из трех маляров, четырех штукатуров и двух столяров. Сколькими способами можно составить бригаду отделочников из коллектива, имеющего в составе 16 маляров, 12 штукатуров и 4 столяра?
7. В урне 10 белых и 6 черных шаров. Сколькими способами можно из урны вынуть 7 шаров, из которых 5 шаров белые?
8. Решите уравнение (где x — натуральное число) $C_x^4 = \frac{15A_x^2}{4}$.
9. Решите уравнение (где x — натуральное число) $C_x^5 = \frac{1}{4}A_x^3$.

С—73

Вариант 1

1. В урне лежит 20 шаров, не различающихся на ощупь. Из них 2 шара белые, остальные красные. Из урны извлекают наугад 5 шаров. Сколькими способами их можно извлечь так, чтобы среди извлеченных шаров оказались оба белых шара?
2. В восьмых классах школы преподается некоторый предмет и требуется распределить его преподавание между четырьмя преподавателями. Сколькими способами можно произвести это распределение, если каждый преподаватель должен получить два класса?
3. В лотерее разыгрывается 10 призов. Всего в урне находится 80 билетов. Из урны извлекается 6 билетов. Сколько существует способов извлечения этих 6 билетов так, чтобы 4 из них оказались выигрышными?
4. В студенческом строительном отряде 25 человек, среди которых 7 маляров, 5 плотников, 3 штукатура, остальные раз-

норабочие. На объект требуется послать бригаду из 7 человек, такую, чтобы в нее обязательно вошли один маляр, один плотник, один штукатур и четыре разнорабочих. Сколькими способами это можно сделать?

5. Группа учеников, состоящая из 12 юношей и 12 девушек, купила 24 билета в одном ряду партера. Сколькими способами можно распределить эти билеты ученикам при условии, чтобы рядом не сидели двое юношей или две девушки?
6. В высшей футбольной лиге участвуют 16 команд. Команды, занявшие первые три места, получают золотые, серебряные и бронзовые медали. Команды, занявшие два последних места, из высшей лиги выбывают. Сколько существует возможных вариантов образования троек медалистов и двух команд, покидающих высшую лигу?
7. n параллельных прямых плоскости пересекаются серией из m параллельных прямых. Сколько параллелограммов можно выделить в образовавшейся сетке?
8. Сколькими способами можно распределить 24 человека в 3 группы по 8 человек в каждой?

Вариант 2

1. Сколько можно составить букетов, содержащих 3 розы и 4 георгина, если имеется 12 роз и 8 георгинов?
2. Сколько различных диагоналей можно провести в n-угольнике?
3. 30 учеников одиннадцатого класса обменялись своими фотографиями. Сколько фотографий было роздано?
4. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, если каждая из этих цифр в запись числа может входить лишь один раз?
5. Вычислите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые могут быть записаны с помощью цифр 1, 4, 5, 2 (без повторения цифр).
6. Имеется 5 предметов, из которых можно выбрать один, два, три, четыре или пять. Сколько может быть различных вариантов?
7. Среди всех перестановок из m элементов сколько должно быть таких, чтобы:

   а) они начинались определенным элементом a;

   б) у них определенный элемент a стоял на втором месте?
8. На книжной полке стоит 15 томов собрания сочинений некоторого писателя. Сколькими способами можно переставить книги так, чтобы тома 3, 4, 12 и 14 стояли рядом в любом порядке?

С—74

Вариант 1

1. Бросают два игральных кубика. Определите вероятность следующих событий:

а) событие A: «сумма очков, выпавших на верхних гранях кубиков, делится на 4»;

б) событие B: «сумма очков, выпавших на верхних гранях кубиков, является простым числом, меньшим 7».

2. В казарме находятся 12 офицеров и 28 солдат. Для выполнения задания требуется 8 военнослужащих. Какова вероятность события A: «среди случайно отобранных военнослужащих окажется 6 офицеров»?
3. Два орудия стреляют по цели. Первое орудие поражает цель с вероятностью 0,7, а второе — 0,85. Какова вероятность поражения цели при залпе?
4. В течение некоторого времени одно радиоустройство отказывает с вероятностью 0,31, другое — с вероятностью 0,27. Какова вероятность того, что в течение этого промежутка времени оба устройства будут работать безотказно?
5. Среди 100 лотерейных билетов 10 выигрышных. Какова вероятность события A: «два наугад выбранных билета окажутся выигрышными»?
6. Студент выучил к экзамену 25 из 30 вопросов программы. Найдите вероятность события A: «студент знает ответы на два вопроса, предложенные ему экзаменатором».
7. Стрелок поражает цель с вероятностью 0,4. Какова вероятность события A: «в четырех выстрелах цель будет поражена не менее трех раз»?

Вариант 2

1. Бросают два игральных кубика. Определите вероятность следующих событий:

   а) событие A: «сумма очков, выпавших на верхних гранях кубиков, делится на 6»;

   б) событие B: «сумма очков, выпавших на верхних гранях кубиков, является простым числом, меньшим 5».
2. К олимпиаде по математике готовятся 23 девятиклассника и 19 десятиклассников. Единая команда должна насчитывать 15 человек. Какова вероятность события A: «команда школы насчитывает ровно 10 девятиклассников»?
3. Известно, что стрелок выбивает 10 очков с вероятностью 0,3, а 9 очков с вероятностью 0,5. Какова вероятность события A: «стрелок выбил не менее 9 очков»?
4. В цехе работают два станка. Вероятность поломки в течение смены для одного из них равна 0,21, для другого — 0,18. Какова вероятность того, что оба станка в течение смены будут работать без поломки?
5. В урне находится 6 белых и 8 черных шаров. Из урны извлекают 2 шара. Какова вероятность события A: «оба шара черные»?
6. Студент выучил к экзамену 20 из 40 вопросов программы. Найдите вероятность события A: «студент знает ответы на два вопроса, предложенные ему экзаменатором».

7. Монету бросают 4 раза. Какова вероятность события A: «герб выпадает не менее трех раз»?

С—75

Вариант 1

1. В читальном зале на полке стоит 20 учебников по алгебре 2000 и 2005 гг. издания. Среди них 12 учебников изданы в 2000 г., а 8 учебников изданы в 2005 г. Внешне учебники неотличимы. Студент наудачу взял 2 учебника. Какова вероятность следующих событий: а) A: «оба учебника изданы в 2005 г.»; б) B: «один учебник издан в 2005 г.»; в) C: «первый учебник издан в 2000 г., а второй — в 2005 г.»?
2. Команда лыжников состоит из 5 мастеров спорта и 15 перворазрядников. Случайным образом для эстафеты выбирают четырех спортсменов. Какова вероятность того, что в эстафете побегут два мастера спорта и два перворазрядника?
3. Электрическая схема состоит из двух последовательно соединенных блоков. Вероятность безотказной работы каждого блока в течении некоторого промежутка времени равна P. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найдите вероятность безотказной работы всей схемы.
4. Два стрелка стреляют в цель. Вероятность ее поражения первым стрелком равна 0,6, а вторым — 0,3. Какова вероятность поражения цели хотя бы одним из стрелков?
5. Из ряда чисел 1, 2, 3, ..., 100 наудачу выбирают одно. Пусть событие A: «выбрано четное число», а событие B: «выбранное число делится на 5». Определите, зависимы ли эти события.

Вариант 2

1. Команда бегунов состоит из 7 мастеров спорта и 10 перворазрядников. Для первого забега случайным образом отбирают двух спортсменов. Какова вероятность того, что оба спортсмена окажутся перворазрядниками?
2. В урне a белых и b красных шаров. Из урны вынимают поочередно два шара. Найдите вероятность события A: «оба шара белые».
3. Электрическая схема состоит из двух параллельно соединенных блоков. Вероятность безотказной работы каждого блока в течении некоторого промежутка времени равна P. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найдите вероятность непрерывной работы всей цепи.
4. Один стрелок поражает цель с вероятностью 0,5, а другой — с вероятностью 0,4. Результаты стрельб независимы один от

другого. Какова вероятность поражения цели хотя бы одним из стрелков?

5. Из ряда чисел 1, 2, 3, ..., 100 наудачу выбирают одно. Пусть событие A: «выбрано четное число», а событие B: «выбранное число делится на 7». Определите, зависимы ли эти события.

С—76

Вариант 1

1. Бросают два игральных кубика. Пусть событие A: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, равна 7», а событие B: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, равна 8». Что больше: $P(A)$ или $P(B)$?
2. Бросают два игральных кубика. Пусть событие A: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, не более 4», а событие B: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, не менее 9». Какое событие более вероятно?
3. Из 25 учеников 9 класса 8 учеников увлекаются историей, а 16 — математикой, один ученик не увлекается ни математикой, ни историей. Случайным образом из класса выбирают 7 учеников. Какова вероятность события A: «среди выбранных учеников 5 увлекаются историей, а 2 — математикой»?
4. В партии из 1000 деталей имеется 20 бракованных. Наудачу выбирают 50 деталей. Какова вероятность события A: «среди отобранных деталей ровно 7 бракованных»?
5. В ящике 120 деталей, из них 100 стандартных. Наудачу выбирают 4 детали. Какова вероятность события A: «среди извлеченных деталей нет нестандартных»?
6. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, но помнил, что они различны. Абонент набрал последние три цифры наугад. Какова вероятность события A: «номер абонента набран правильно»?
7. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы в течение определенного времени для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найдите вероятность события:
   а) событие A: «за время работы откажет ровно один узел»;
   б) событие B: «за время работы откажут ровно два узла».

Вариант 2

1. Бросают два игральных кубика. Пусть событие A: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, равна 6», а событие B: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, равна 9». Вероятность какого события больше?

2. Бросают два игральных кубика. Пусть событие A: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, не менее 8», а событие B: «сумма очков, выпавших на гранях кубиков, не более 6». Сравните вероятности этих событий.
3. В урне находится 20 шаров, неразличимых на ощупь. Среди них 12 белых и 8 черных. Из урны наугад вынимают 6 шаров. Какова вероятность события A: «среди вынутых шаров 2 белых и 4 черных шара»?
4. На хоккейный матч заявлено 30 полевых игроков, среди которых 6 игроков являются мастерами спорта. Какова вероятность события A: «в стартовой пятерке оказалось 4 мастера спорта»?
5. В ящике 50 деталей, из которых 20 бракованных. Наудачу извлекают 6 деталей. Найдите вероятность события A: «среди извлеченных деталей все оказались бракованными».
6. На кодовом замке помещены 9 кнопок с цифрами от 1 до 9. Замок открывается только при одновременном нажатии трех определенных кнопок. Наугад нажимают кнопки. Какова вероятность события A: «нажаты нужные кнопки»?
7. Вероятность того, что изделие не пройдет контроля, равна 0,1. Какова вероятность следующих событий: а) A: «среди 10 изделий отдел контроля забракует 2 изделия»; б) B: «среди 10 изделий отдел контроля забракует 4 изделия»?

С—77

Вариант 1

1. Бросают два кубика. Определить вероятность события A: «сумма очков, выпавших на верхних гранях, больше 5, но меньше 8».
2. Вероятность поражения цели первым орудием равна 0,85, вторым — 0,95. Орудия стреляют залпом. Какова при этом вероятность поражения цели?
3. Из 50 вопросов к экзамену студент выучил 35 вопросов. На экзамене студент наугад выбирает три вопроса. Какова вероятность следующих событий: а) A: «студент знает ответы на все доставшиеся ему вопросы»; б) B: «студент знает ответы только на два из доставшихся ему трех вопросов»?
4. Долговременные наблюдения за частотой поражения цели неким стрелком позволили сделать вывод, что вероятность поражения цели этим стрелком равна 0,8. Стрелок сделал 6 выстрелов. Какова вероятность события A: «цель поражена ровно 4 раза»?
5. Из 17 десятиклассников и 15 одиннадцатиклассников формируется отряд из 12 учеников. Какова вероятность события A: «в отряд включены 8 десятиклассников»?

6. Контрольный тест состоит из 7 задач. На каждую предлагается 5 вариантов ответов, среди которых только один ответ правильный. Ученик вместо решения задач случайным образом выбирает для каждой задачи наудачу один из предложенных ответов. Какова вероятность события A: «ученик дал правильный ответ ровно на две задачи теста»?
7. Приведите пример случайного события, имеющего вероятность $P = \frac{4}{7}$.

Вариант 2

1. Контрольный тест состоит из шести задач. На каждую задачу предлагается шесть вариантов ответов, среди которых только один ответ правильный. Абитуриент, вместо того чтобы решать задачи, к каждой задаче выбирает наудачу один из предложенных ответов. Какова вероятность правильного ответа ровно на четыре задачи?
2. Завод выпустил 10000 изделий. Наблюдения за их качеством позволяют утверждать, что 72% выпущенных деталей имеют отличное качество. Из деталей отличного качества 3% деталей принадлежат классу «Экстра» и идут на экспорт. Какова вероятность события A: «наугад взятое изделие пойдет на экспорт»?
3. Вероятность того, что электрическая лампочка останется исправной после 1000 ч работы равна 0,2. Какова вероятность события A: «хотя бы одна из двух ламп останется исправной после 1000 ч работы»?
4. Коммерческий банк на определенный срок выдает 7 кредитов различным заемщикам. Вероятность события A «кредит возвращен банку не будет» для каждого из заемщиков равна 0,25. Кредит возвращается в банк по окончании срока договора. Какова вероятность события B: «ровно два заемщика вовремя не вернули банку взятые ими кредиты»?
5. За круглым столом сидят по пять игроков команд A и B. Какова вероятность того, что два игрока одной команды не сидят рядом, если места за столом заняты случайно?
6. По цели производится три независимых выстрела. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,7. Для разрушения цели достаточно двух попаданий в нее. Найти вероятность события A: «цель поражена».
7. Приведите пример случайного события, вероятность которого равнялась бы числу $P = \frac{3}{5}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К—1

Вариант 1

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x+1}$. Докажите, что число $f(4)+f(0)$ делится на 2.
2. Принимает ли функция $y=x^2-8x+5$ значение $y=-7$? Если принимает, то в каких точках?
3. Найдите область определения функции:

   а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{8-3x}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{2-[x]}$.
4. Найдите множество $E(y)$ значений функции $y=f(x)$. Существуют ли среди значений функции ее наименьшее m и наибольшее M значения?

   а) $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.
5. Докажите, что для функции $f(x)=x^2$ справедливо равенство $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+2$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{2x+10}{3x+1}$. Докажите, что число $f(1)\cdot f(0)$ делится на 5.
2. Принимает ли функция $y=x^2-7x+4$ значение $y=-6$? Если принимает, то в каких точках?
3. Найдите область определения функции:

   а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{3-[x]}$.
4. Найдите множество $E(y)$ значений функции $y=f(x)$. Существуют ли среди значений функции ее наименьшее m и наибольшее M значения?

   а) $y=\dfrac{3x+3}{x^2+3}$; б) $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.
5. Докажите, что для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ справедливо равенство $\dfrac{f(2x)}{f(x^2)}=\dfrac{x}{2}$, $x\neq 0$.

К—2

Вариант 1

1. Для уравнения $x^2-20x+k=0$ определите значение k, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $4x_1+9x_2=205$.

2. Не вычисляя корней квадратного трехчлена $5x^2-15x+p$, найдите такие значения p, чтобы корни x_1 и x_2 заданного трехчлена удовлетворяли условию

$$x_1^2+x_2^2+5x_1x_2\geqslant 3.$$

3. При каких значениях k прямая $y=kx$ и парабола $y=x^2+$ $+3x+\frac{25}{4}$:

а) имеют две общие точки;
б) имеют единственную общую точку;
в) не имеют общей точки?

4. Найдите квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$, для которой соответствующая парабола проходит через точку $A(0;\ 24)$ и вершина находится в точке $O(3;\ -3)$.

Вариант 2

1. Для уравнения $x^2-21x+k=0$ определите значение k, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $5x_1-8x_2=-90$.
2. Не вычисляя корней квадратного трехчлена $3x^2-6x+p$, найдите такие значения p, чтобы корни x_1 и x_2 заданного трехчлена удовлетворяли условию

$$x_1^2+3x_1x_2+x_2^2\leqslant 1.$$

3. При каких значениях k прямая $y=kx$ и парабола $y=x^2+$ $+6x+4$:

а) имеют две общие точки;
б) имеют единственную общую точку;
в) не имеют общей точки?

4. Найдите квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$, для которой соответствующая парабола проходит через точку $A(0;\ -12)$ и вершина находится в точке $O(-4;\ 4)$.

К—3

Вариант 1

1. Задана дробно-линейная функция $y=\frac{2-3x}{x-6}$. Найдите:

а) горизонтальную и вертикальную асимптоты;
б) промежутки знакопостоянства.

2*. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2-8x+3=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1^3+1 и x_2^3+1.

3. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2+ax-1=0$ меньше чем 3?
4. При каких значениях p сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-p)x+p^2-3=0$ принимает наибольшее значение? Чему оно равно?

5. Найдите значения p и q, если точка $O(-2;\ -7)$ является вершиной параболы $y=px^2+8x+q$.

Вариант 2

1. Задана дробно-линейная функция $y=\dfrac{4x+5}{2x-3}$. Найдите:

   а) горизонтальную и вертикальную асимптоты;

   б) промежутки знакопостоянства.

2*. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-9x+1=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\dfrac{x_1}{x_2^2}$ и $\dfrac{x_2}{x_1^2}$.

3. При каких значениях параметра p оба корня уравнения $x^2+px-1=0$ меньше чем -3?

4. При каких значениях p сумма квадратов корней уравнения $x^2-2p+3x-1-px=0$ принимает наименьшее значение? Чему оно равно?

5. Найдите значения p и q, если точка $O(1;\ -2)$ является вершиной параболы $y=x^2+px+q$.

К—4

Вариант 1

1. Вычислите $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0{,}2)^{-4}\cdot(25^{-0{,}4})^5+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$.

2. Упростите:

$$\left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{a^5b^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a\sqrt[4]{ab^8}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{x-3}{\sqrt[4]{1+2x}+\sqrt[4]{5-3x}}.$$

4*. Постройте эскиз графика функции $y=|x-1|^{0{,}2}$.

Вариант 2

1. Вычислите $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}\cdot 8^{-2}+(0{,}04)^{-5}\cdot 25^{-4}+\left(81^{-\frac{1}{8}}\right)^{-2}$.

2. Упростите:

$$\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}-\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^7b^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{b^{-1}}}}{\sqrt{a^6}\sqrt[3]{a^3\sqrt{b}}}.$$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{x+2}{\sqrt[4]{5x+3}-\sqrt[4]{3x-1}}.$$

4*. Постройте эскиз графика функции $y=|x+1|^{0,25}$.

К—5

Вариант 1

1. Выясните, при каких целых значениях a и b уравнение $2x^3-ax^2+bx+1=0$ имеет два положительных рациональных корня.
2. Решите уравнение $x^4-3x^3+x^2+4=0$.
3. Решите уравнение $x(x+4)(x+5)(x+9)+96=0$.
4*. Решите систему уравнений в зависимости от значений параметра a: $\begin{cases} x+y=3, \\ x+2|y|=a. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите уравнение $x^4+3x^3+x^2+4=0$.
2. Решите уравнение $(x-7)(x-5)(x-2)x-75=0$.
3. Выясните, при каких целых значениях a и b уравнение $3x^3+ax^2-bx-1=0$ имеет два положительных рациональных корня.
4*. Решите систему уравнений в зависимости от значений параметра a: $\begin{cases} x-y=1, \\ 2|x|+y=a. \end{cases}$

К—6

Вариант 1

1. Решите неравенство $(x^2+3x-5)(x^2+3x+2)>-12$.
2. Найдите область определения функции

$$\sqrt[4]{7-|x-2|}+\sqrt{x^4-3x^2+2}.$$

3. Изобразите на плоскости решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y\leqslant 0, \\ 2x+y-2\geqslant 0. \end{cases}$$

4*. Найдите все значения a, при которых для всех $|x|<1$ выполняется неравенство $\dfrac{ax-a(1-a)}{x-1}<0$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $(x^2+5x-3)(x^2+5x-10)>-10$.

2. Найдите область определения функции

$$\sqrt{x^4-7x^2+12}+\sqrt[4]{|x+5|-2}.$$

3. Изобразите на плоскости решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0.\end{cases}$$

4*. Найдите все значения a, при которых для всех $|x|<2$ выполняется неравенство $\dfrac{(a+1)a-ax}{x-2}<0$.

К—7

Вариант 1

1. Решите уравнение $\dfrac{4\sqrt{3x-2}(x+2)-x\sqrt{x}-\sqrt{4x}}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}=0$.
2. Найдите корни уравнения $\sqrt[4]{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt[4]{\dfrac{2+x}{3-x}}=4$.
3. Решите неравенство $\sqrt{2\sqrt{x^2-3}+x^2}>x+2$.

4*. Решите относительно x уравнение в зависимости от значений параметра a: $\sqrt{x^2+4ax+4a^2+1}=a$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{5x+1}(x+1)-3\sqrt{x}-\sqrt{9x^3}}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}=0$.
2. Решите неравенство $\sqrt{2\sqrt{x^2-5}+4x^2}>2x+1$.
3. Найдите корни уравнения

$$\sqrt[4]{\frac{5-x}{x+3}}-2\sqrt[4]{\frac{x+3}{5-x}}=-1.$$

4*. Решите относительно x уравнение в зависимости от значений параметра a: $\sqrt{4x^2+12ax+9a^2}=a-2$.

К—8

Вариант 1

1. Докажите, что $5^n+2\cdot 3^n+5$ делится на 8 при любых натуральных значениях n.
2. Сумма n первых членов последовательности (a_n) определяется по формуле $S_n=2n^2+3n$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и найдите a_1 и d.

3. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, такой, чтобы сумма ее первых шести членов составляла $\frac{7}{8}$ суммы всех ее членов.

4*. Докажите, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$, возрастает и ограничена.

Вариант 2

1. Сумма n первых членов последовательности (a_n) определяется по формуле $S_n=4n^2+2n$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и найдите a_1 и d.

2. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, такой, чтобы сумма ее первых шести членов составляла $\frac{26}{27}$ суммы всех ее членов.

3. Докажите, что $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11 при любых натуральных значениях n.

4*. Докажите, что последовательность (a_n), где $a_n=\frac{3n-1}{n+2}$, возрастает и ограничена.

К—9

Вариант 1

1. Исследования показали, что каждый пятый клиент банка приходит в банк для того, чтобы снять проценты, начисленные банком на его вклад за некоторый промежуток времени. В очереди на обслуживание стоят 9 человек. Какова вероятность события A: «проценты, начисленные на вклад, снимут только 2 клиента»?

2. Из 15 мальчиков и 9 девочек выбирают группу из 6 человек для участия в походе. Какова вероятность события A: «в состав группы войдут 4 мальчика и 2 девочки»?

3. Банк выдает 10 кредитов. Вероятность невозврата кредита для каждого из заемщиков равна 0,1. Какова вероятность события A: «4 заемщика не вернут кредит по окончании срока кредитования»?

4. При игре в домино четыре игрока делят поровну 28 игральных костей. Сколькими способами они могут это сделать?

5. Всевозможные восьмизначные числа записаны с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 без повторений. Сколько среди них чисел, которые не заканчиваются цифрами 6, 7, 8?

6. В теннисном турнире участвуют 12 юношей и 8 девушек. Сколькими способами можно составить 4 смешанные пары?

Вариант 2

1. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются 2 группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстракласса. Какова вероятность события A: «все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу»?
2. Исследование показало, что каждый восьмой клиент банка приходит в банк для того, чтобы снять проценты, начисленные банком на его вклад за некоторый промежуток времени. В очереди на обслуживание стоят 7 человек. Какова вероятность события A: «проценты, начисленные на вклад, снимут 3 клиента»?
3. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Наугад вынимаются одна за другой 5 карточек и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность события A: «в результате получится слово «конец».
4. Группу из 21 шахматиста требуется разбить на 3 равные группы по 7 человек в каждой. Сколькими способами это можно сделать?
5. Из группы шахматистов, состоящих из 7 мужчин и 4 женщин, на очередной тур надо выставить команду из 6 игроков так, чтобы в ней было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?
6. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В три охранных отделения принимают только юношей, в четыре детских сада — только девушек, а две фабрики принимают на работу и тех и других. Сколькими способами они могут распределиться между этими предприятиями?

К—10

Вариант 1

1. Бросают два игральных кубика. Сколько существует способов бросания, при которых сумма цифр на верхних гранях кубиков больше 8?
2. Вычислите:

   а) $\dfrac{A_8^3+A_7^4}{A_6^3}$; б) $\dfrac{P_7}{P_5}$; в) $C_8 \cdot P_7$.
3. Сколькими способами можно разместить 10 учеников на одной скамейке?
4. В урне находится 20 одинаковых шаров под номерами от 1 до 20. Из урны извлекают 4 шара. Сколько при этом будет всевозможных комбинаций номеров?

5. Среди сочетаний из 10 букв *а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к* по 4 сколько таких, которые не содержат: а) букву *в*; б) буквы *д* и *е*?
6. Сколькими различными способами собрание из 50 человек может выбрать председателя собрания, его заместителя и двух секретарей?
7. В лотерее разыгрывается 15 призов. Из урны, содержащей 100 билетов, извлекают 8 билетов. Сколько существует способов их извлечения так, чтобы 5 из них оказались выигрышными?

Вариант 2

1. Бросают два игральных кубика. Сколько существует способов бросания, при которых сумма цифр на верхних гранях кубиков была бы больше 7 и меньше 10?
2. Вычислите:

   а) $\dfrac{A_{10}^6+A_{10}^5}{A_9^5-A_9^4}$; б) $\dfrac{P_5+P_4}{P_3}$; в) $C_{11}\cdot 4!$.
3. В строительной фирме 25 работников, среди которых 6 маляров, 3 плотника и 4 штукатура, остальные 12 работников — разнорабочие. Сколькими способами можно укомплектовать бригаду из 8 человек так, чтобы в нее вошли 3 маляра, 2 плотника, 2 штукатура и один разнорабочий?
4. 20 деталей, из которых две бракованные, разложены в два ящика по 10 деталей в каждом. Сколькими способами можно разложить эти детали так, чтобы в каждый ящик попало по одной бракованной детали?
5. Для розыска заблудившегося товарища группа поиска, состоящая из 16 человек, разделилась на два равных отряда. Среди них только 4 человека знакомы с местностью. Сколькими способами они могут разделиться так, чтобы в каждом отряде было 2 человека, знающих местность?
6. Сколько чисел, начинающихся с цифры 5, можно получить, переставляя всевозможными способами цифры числа 19058?
7. Сколькими способами можно составить дозор из 5 солдат и 2 офицеров при наличии 4 офицеров и 8 солдат?

Ответы

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Функции

С—1

Вариант 1

3. а) $y_1=9$ принимает при $x=-2$ или $x=2$;
$y_2=6$ принимает при $x=-1$ или $x=1$;
$y_3=-4$ — не принимает;
б) $y_1=0$ принимает при $x=-\frac{3}{2}$;
$y_2=-\frac{1}{2}$ — не принимает; $y_3=-\frac{7}{5}$ принимает при $x=-2$.

Вариант 2

3. а) $y_1=-3$ принимает при $x=-\sqrt{3}$ или $x=\sqrt{3}$;
$y_2=-15$ — не принимает;
$y_3=0$ принимает при $x=-\sqrt{6}$ или $x=\sqrt{6}$;
б) $y_1=0$ принимает при $x=-\frac{1}{3}$;
$y_2=-\frac{2}{3}$ принимает при $x=-\frac{11}{7}$; $y_3=-3$ — не принимает.

С—2

Вариант 1

4. а) $S_1=160$ см, $S_2=620$ см; б) $t=2$ с.
5. $y_1=6$, $y_2=4$, $y_3=6$.

Вариант 2

4. а) $S_1=51$ см, $S_2=125$ см; б) $t=2{,}75$ с.
5. $y_1=11$, $y_2=6$, $y_3=3$.

С—3

Вариант 1

1. а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 8)\cup(8;\ +\infty)$; в) $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$;
г) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; д) $[0;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ 1)\cup[2;\ +\infty]$.

Вариант 2

1. а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ -3)\cup(-3;\ +\infty)$; в) $\left(-\infty;\ \frac{3}{4}\right)$;
г) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; д) $[-\infty;\ 0)$; е) $(-\infty;\ 1)\cup[2;\ +\infty]$.

С—4

Вариант 1

а) $E(y)=\left[-\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right]$; $m=-\frac{1}{4}$ при $x=-4$, $M=\frac{1}{3}$ при $m=3$;

б) $E(y)=(-\infty;\ -20)\cup[4;\ +\infty)$; m и M не существуют;

в) $E(y)=\left(0;\ \frac{1}{4}\right]$; m не существует, $M=\frac{1}{4}$ при $x=-2$.

Вариант 2

а) $E(y)=\left[-\frac{1}{4};\ \frac{9}{8}\right]$; $m=-\frac{1}{4}$ при $x=6$, $M=\frac{9}{8}$ при $x=\frac{4}{3}$;

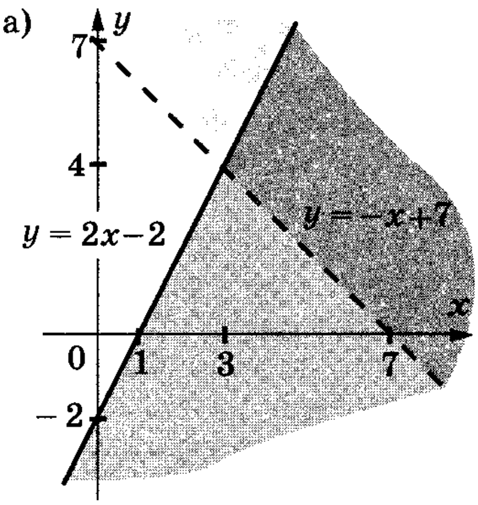
б) $E(y)=(-\infty;\ -10]\cup[2;\ +\infty)$; m и M не существуют;

в) $E(y)=\left(0;\ \frac{1}{3}\right]$; m не существует, $M=\frac{1}{3}$ при $x=3$.

С—5

Вариант 1

2. а)



б)

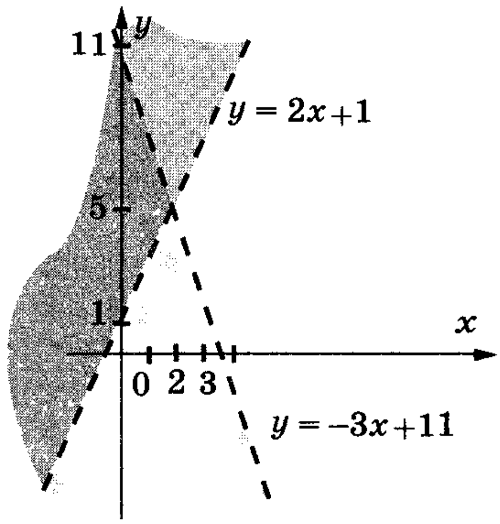
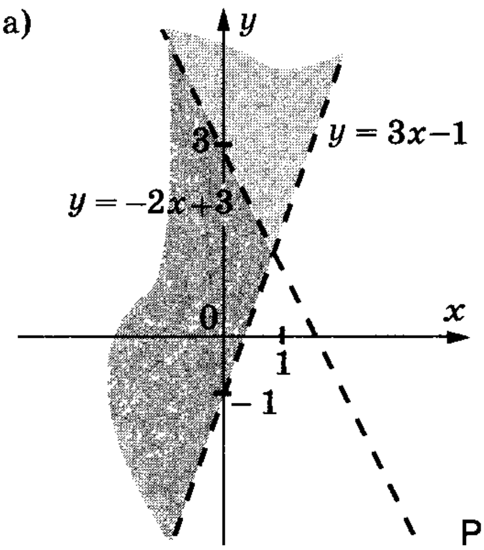


Рис. 1

Вариант 2

2. а)



б)

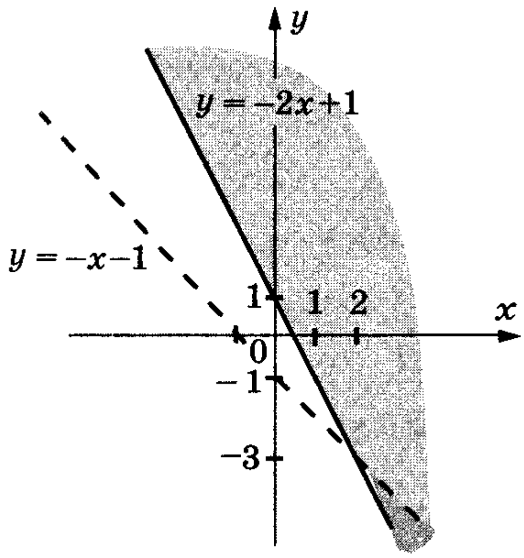


Рис. 2

С—6

Вариант 1

2. $x=-1$, $y=1$. Указание. Заданное уравнение можно рассмотреть как уравнение относительно x. 3. $a=0$, $a=4$, $a=25$. 4. $k=-5$. 5. $2\leqslant p\leqslant 4$.

Вариант 2

2. $x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{4}$. Указание. Заданное уравнение можно рассмотреть как уравнение относительно x. 3. $a=0$, $a=4$, $a=100$. 4. $k=-128$. 5. $\frac{10}{3}\leqslant p\leqslant 5$.

С—7

Вариант 1

1. а) $k\in(-\infty;\ -6)\cup(6;\ +\infty)$; б) $k=-6$, $k=6$; в) $k\in(-6;\ 6)$.
2. При $k\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{5}\right)$ общих точек нет; при $k\in\left(-\frac{1}{5};\ 0\right)\cup(0;\ +\infty)$ две общие точки; при $k=-\frac{1}{5}$ и $k=0$ единственная общая точка.

Вариант 2

1. а) $k\in(-\infty;\ -8)\cup(8;\ +\infty)$; б) $k=-8$, $k=8$; в) $k\in(-8;\ 8)$.
2. При $k\in\left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right)$ общих точек нет; при $k=-\frac{4}{3}$ или $k=0$ единственная общая точка; при $k\in\left(-\frac{4}{3};\ 0\right)\cup(0;\ +\infty)$ две общие точки.

С—8

Вариант 1

1. $y=0$ при $x=-\frac{3}{2}$ и $x=-1$; $y>0$ при $x\in\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)\cup(-1;\ +\infty)$, $y<0$ при $x\in\left(-\frac{3}{2};\ -1\right)$.
2. При $p\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{5}\right)$ точек пересечения нет; при $p=-\frac{1}{5}$ одна общая точка $A(-5;\ -5)$; при $p\in\left(-\frac{1}{5};\ +\infty\right)$ две точки пересечения:
$$B\left(\frac{1-\sqrt{1+5p}}{p};\ 2\left(\frac{1-\sqrt{1-5p}}{p}\right)+5\right) \text{ и } C\left(\frac{1+\sqrt{1+5p}}{p};\ 2\left(\frac{1-\sqrt{1+5p}}{p}\right)+5\right).$$

Вариант 2

1. $A(-2;\ 0)$, $B\left(\frac{2}{3};\ 0\right)$; $y>0$ при $x\in(-\infty;\ -2)\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$, $y<0$ при $x\in\left(-2;\ \frac{2}{5}\right)$, $y=0$ при $x=-2$ или $x=\frac{2}{3}$.

2. При $p\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{8}\right)$ точек пересечения нет; при $p=-\frac{1}{8}$ одна общая точка $A\left(-\frac{1}{8};\ -4\right)$; при $p\in\left(-\frac{1}{8};\ +\infty\right)$ две точки пересечения:

$B\left(\frac{1-\sqrt{1+8p}}{2p};\ \frac{1-\sqrt{1+8p}}{2p}+2\right)$ и $D\left(\frac{1+\sqrt{1+8p}}{2p};\ \frac{1+\sqrt{1+8p}}{2p}+2\right)$.

С—9

Вариант 1

1. а) $p\in\left(\frac{33}{4};\ +\infty\right)$; б) $p=\frac{33}{4}$; в) $p\in\left(-\infty;\ \frac{33}{4}\right)$. **2.** $p\in\left[\frac{8}{3};\ 4\right]$.

Вариант 2

1. а) $p\in\left(-\frac{49}{8};\ +\infty\right)$; б) $p=-\frac{49}{8}$; в) $p\in\left(-\infty;\ -\frac{49}{4}\right)$. **2.** $p\in\left[1;\ \frac{9}{4}\right]$.

С—12

Вариант 1

1. При $p\in\left(-\frac{2}{5};\ 6\right)$ два корня; при $p\in\left(-\infty;\ -\frac{2}{5}\right)\cup(6;\ +\infty)$ корней нет; при $p=-\frac{2}{5}$ и $p=6$ единственный корень. **2.** $p=7$ и $p=10$; $x_1=2{,}5$, $x_2=5$ и $x_1=3{,}5$, $x_2=7$. **3.** а) 1,5; б) 12.

Вариант 2

1. При $p\in(-12;\ 0)$ два корня; при $p\in(-\infty;\ -12)\cup(0;\ +\infty)$ корней нет; при $p=-12$ и $p=0$ единственный корень. **2.** а) 4; б) 32. **3.** а) 4; б) 32.

С—13

Вариант 1

1. а) Точек экстремума нет, $m=7$ при $x=1$, $M=19$ при $x=4$, $E(y)=[7;\ 19]$;
   б) $x=2$ — точка минимума, $y_{min}=-5$, $m=-5$, $M=3$ при $x=4$, $E(y)=[-5;\ 3]$;
   в) $x=2$ — точка максимума, $y_{max}=5$, $m=1$ при $x=1$, $M=5$, $E(y)=[1;\ 5]$.
2. $A(1;\ 1)$; $M=3$.

Вариант 2

1. а) Точек экстремума нет, $m=-13$, $M=2$, $E(y)=[-13;\ 2]$;
   б) $x=2$ — точка максимума, $y_{max}=5$, $m=1$, $M=5$, $E(y)=[1;\ 5]$;

в) $x=2{,}5$ — точка минимума, $y_{min}=-7{,}25$, $m=-7{,}25$, $M=-1$ при $x=0$, $E(y)=[-7{,}25;\ -1]$.

2. $A(-11;\ 233)$; $M=255$.

С—14

Вариант 1

1. $a=\frac{8}{3}$. 2. $l=15{,}5$. 3. 50×100. 4. $\left(\frac{7}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$, $m=-\frac{10}{3}$.

Вариант 2

1. $a=-3$. 2. $l=14$. 3. Из куска проволоки длиной $\frac{400\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ см сделать квадрат; из куска проволоки длиной $\frac{900}{9+4\sqrt{3}}$ см — правильный треугольник. 4. $(-2;\ 29)$, $M=35$.

С—15

Вариант 1

1*. а) $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$; $E(f)=[6{,}25;\ +\infty)$; $f(x)=0$ при $x=2$ и $x=7$; $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ 2)\cup(7;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(2;\ 7)$; $f(x)$ убывает на $(-\infty;\ -4{,}5]$, возрастает на $[4{,}5;\ +\infty)$;

б) $D(f)=\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; $E(f)=\left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3};\ +\infty\right)$; $f(x)=0$ при $x=\frac{3}{4}$; $f(x)>0$ при $x\in\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\right)$; $f(x)<0$ при $x\in\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{4};\ +\infty\right)$; $f(x)$ убывает на промежутках $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.

2*. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$; $E(f)=\left[-\frac{1}{8};\ \frac{1}{8}\right]$; $f(x)=0$ при $x=0$; $f(x)$ — нечетная функция, ее график симметричен относительно начала координат; $f(x)>0$ при $x\in(0;\ +\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty;\ -4]$ и $[4;\ +\infty)$; возрастает на $[-4;\ 4]$.

Вариант 2

1*. а) $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$; $E(f)=(-\infty;\ 9)$; $f(x)=0$ при $x=3$ и $x=9$; $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;\ 3)\cup(9;\ +\infty)$; $f(x)>0$ при $x\in(3;\ 9)$; $f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 6)$, убывает на $[6;\ +\infty)$;

б) $D(f)=\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; $E(f)=\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; $f(x)=0$ при $x=\frac{1}{3}$; $f(x)<0$ при $x\in\left(\frac{1}{3};\ \frac{3}{2}\right)$; $f(x)>0$ при $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; $f(x)$ убывает на промежутках $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$.

2*. $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$; $E(f)=\left[-\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}\right]$; $f(-x)=-f(x)$ — функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат; $f(x)=0$ при $x=0$; $f(x)>0$ при $x\in(0;\ +\infty)$ и $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;\ 0)$; $f(x)$ убывает на $(-\infty;\ -5]$, возрастает на $[-5;\ 5]$ и снова убывает на $[5;\ +\infty)$.

Степени и корни

С—16

Вариант 1

1. 64. **2.** $\frac{3a^4b}{2}$. **3.** Рис. 3.

4. а) $p\in(-\infty;\ +\infty)$;

б) $p\in(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

Вариант 2

1. -729. **2.** $\frac{4}{3n^4m}$. **3.** Рис. 4.

4. а) $p\in(-\infty;\ +\infty)$;

б) $p\in(-\infty;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$.

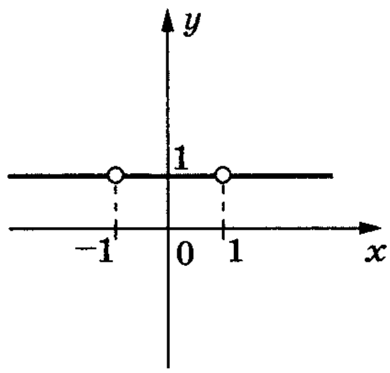


Рис. 3

С—17

Вариант 1

1. 8. **2.** $x=\frac{ab}{a-b}$.

3. $x\in(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$.

4. Рис. 5.

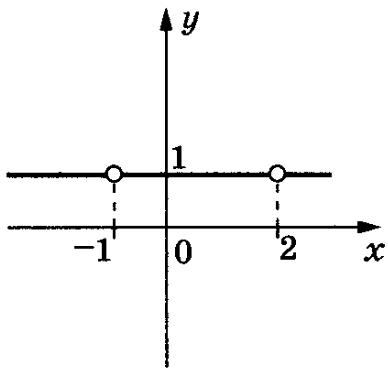


Рис. 4

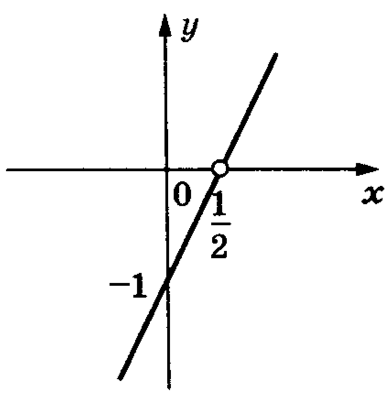


Рис. 5

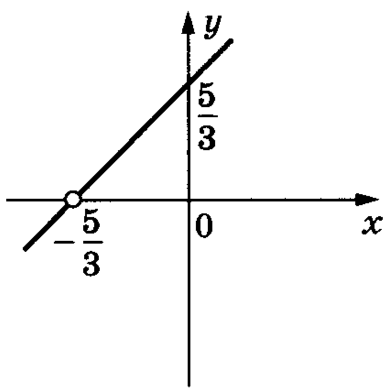


Рис. 6

Вариант 2

1. 81. 2. $x=\dfrac{ab^2}{a+b^2}$. 3. $x\in(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. 4. Рис. 6.

С—18

Вариант 1

1. abc. 2. $x\in(-\infty;\ -3)$. 3. $a=1$.

Вариант 2

1. $\dfrac{1}{abc}$. 2. $(-\infty;\ -2)$. 3. $a=-1$.

С—19

Вариант 1

1. Точка $M(1;\ 2)$ — центр симметрии. 2. $25{,}2^3$, $26{,}5^3$, 27^4, 27^6. 3. При $a=-1$ корней нет, при $a=1$ один корень. 4. Наибольшего значения нет, $y_{\text{наим}}=0$.

Вариант 2

1. $x=1$ — ось симметрии. 2. $22{,}5^2$, $23{,}9^2$, 24^4, 24^5. 3. При $a=1$ один корень, при $a=-1$ корней нет. 4. Наибольшего значения нет, $y_{\text{наим}}=0$.

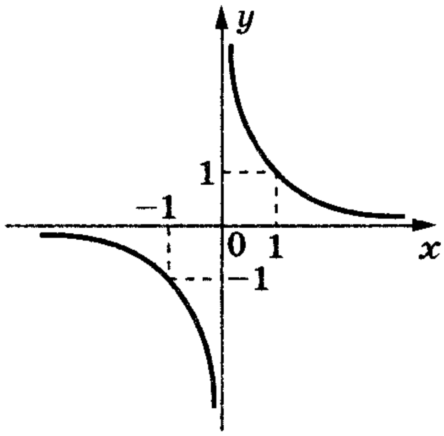


Рис. 7

С—20

Вариант 1

1. -3. 2. $x\in[3;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$.
3. Не является.

Вариант 2

1. -8. 2. $x\in(-\infty;\ -\sqrt{12})\cup(-\sqrt{12};\ 2)\cup$ $\cup(3;\ \sqrt{12})\cup(\sqrt{12};\ +\infty)$.
3. Не является.

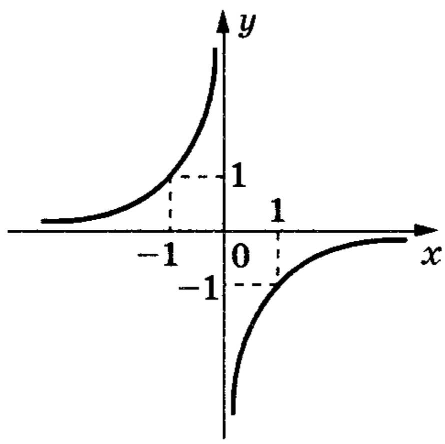


Рис. 8

С—21

Вариант 1

1. 1. 2. $\varnothing$. 3. Рис. 7.

Вариант 2

1. 4,5. 2. $x_1=1$, $x_2=2$. 3. Рис. 8.

С—22

Вариант 1

1. $\frac{8am^4n^2}{b^3}$. 2. 0,6.

Вариант 2

1. $\frac{n^6a^2}{m^2b^2}$. 2. $-1{,}2$.

С—23

Вариант 1

1. а) $\sqrt[3]{(2m-1)^2}$, $|m|>\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$. 2. а) $-\sqrt[6]{\frac{(3-\sqrt{5})^7}{4}}$; б*) $-\sqrt[4]{2x(2-x)^2}$, если $x\in[0;\ 2)$; $\sqrt[4]{2x(x-2)^2}$, если $x\in(2;\ +\infty)$.

Вариант 2

1. а) $\sqrt[5]{(4a+3)^2}$, $|a|>\frac{3}{4}$; б) $\sqrt[3]{4}$. 2. а) $-\sqrt[4]{\frac{(4-\sqrt{6})^5}{10}}$; б*) $\sqrt[6]{5x(x-8)^4}$, если $x\in[0;\ 8)$; $-\sqrt[6]{5x(x-8)^4}$, если $x\in(8;\ +\infty)$.

С—24

Вариант 1

1. а) $\frac{\sqrt{2}(5-\sqrt{7})}{6}$; б) $\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}$. 2. $x^2y\sqrt[3]{y}$.

3. $\sqrt{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}}>\sqrt{17+\sqrt{2}}-\sqrt{17-\sqrt{2}}$.

Вариант 2

1. а) $\frac{\sqrt{47}(7-\sqrt{2})}{47}$; б) $2(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})$. 2. $6x^3y\sqrt[7]{xy^2}$.

3. $\sqrt{11+\sqrt{101}}-\sqrt{11-\sqrt{101}}<3^{-1}\sqrt{28-10\sqrt{3}}(5+\sqrt{3})$.

С—25

Вариант 1

1. $[3;\ +\infty)$. 2. $[0;\ +\infty)$. 3. Оси симметрии нет. Центр симметрии $M\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$. 4. $y_{\text{наим}}(2{,}5)=\sqrt{0{,}5}$.

Вариант 2

1. $[2;\ +\infty)$. 2. $[1;\ +\infty)$. 3. Оси симметрии нет. Центр симметрии $M\left(\frac{4}{5};\ 0\right)$. 4. $y_{\text{наим}}(3{,}5)=\sqrt[3]{14}$.

С—26

Вариант 1

1. $2\frac{5}{9}$. 2. $\dfrac{a^{\frac{1}{15}}b^{-\frac{3}{4}}}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}}$.

Вариант 2

1. $4\frac{3}{80}$. 2. $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{3}}+m^{2}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{2}{21}}n^{-\frac{5}{8}}}$.

С—27

Вариант 1

1. $a^{\frac{8}{3}}\left(b^{-\frac{1}{6}}-2b^{\frac{4}{3}}\right)$. 2. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$.

Вариант 2

1. $4m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{2}}$. 2. $\frac{b^2}{a}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$.

С—28

Вариант 1

1. $(-\infty;\ -2]\cup[3;\ +\infty)$. 2. $\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. 3. $[-499{,}9968;\ -19{,}55]$.

Вариант 2

1. $[2;\ 3]$. 2. $(1;\ 2]$. 3. $[0;\ 100099{,}9998]$.

С—29

Вариант 1

1. $K=\left(\frac{200}{215}\right)^5\frac{1}{L^4}=160$.

2. $L=\left[\left(\frac{300}{5}\right)^5\frac{1}{K}\right]^{\frac{1}{4}}=6\sqrt[4]{6}\approx 0{,}39$.

3. $K=\frac{25\sqrt{5}}{\sqrt[3]{L}}$, или $L=\left(\frac{25\sqrt{5}}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

4. $Q=11\ 664$.
5. а) Не обеспечит; б) достаточно.

Вариант 2

1. $K=\left(\dfrac{Q}{3}\right)^{\frac{5}{2}}\dfrac{1}{L^{\frac{3}{2}}}=25\sqrt{5}\approx 55{,}9.$

2. $L=\left(\dfrac{Q}{1{,}4}\right)^4=KL^3,\ L=\left(\dfrac{30^4}{K}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 9{,}654.$

3. $KL^2=729$, отсюда $K=\dfrac{729}{L^2}$, или $L=\dfrac{9\sqrt{9}}{\sqrt{K}}$.

4. $Q=1{,}6\cdot 11\cdot 7=123{,}2.$
5. а) Обеспечит; б) недостаточно.

С—30

Вариант 1

1. $C=120;\ L=\dfrac{12}{5};\ K=15.$
2. а) Нет; б) да; в) $C=3168;\ L\approx 13{,}09;\ K\approx 1956.$

Вариант 2

1. $C=128;\ L=4;\ K=16.$
2. а) Нет; б) да; в) $C=432;\ L=6;\ K=26.$

Уравнения, неравенства и их системы

С—31

Вариант 1

1. x^2-x+1. 2. $f(x)=Q(x)(-x^2-5x+13)+31x+12.$
3. $n=5k-4,\ k\in N.$

Вариант 2

1. x^2+1. 2. $f(x)=Q(x)(x^2+x+2)+(6x-3).$
3. $n=7k+3,\ k\in N.$

С—32

Вариант 1

1. $a=-2,\ b=3$. 2. $P(-3)=365.$

Вариант 2

1. $p=3,\ q=4$. 2. $P(-2)=57$. 3. Кратность 3.

С—33

Вариант 1

1. $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ 1)$. 3. $b>4$.

Вариант 2

1. $(3;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$. 3. $b<15$.

С—34

Вариант 1

1. Уравнение *б* является следствием уравнения *а*. 2. $p>2$.
3. а) Произойдет потеря корней x_0, при которых $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$; б) могут появиться посторонние корни x_0, при которых $f(x_0)=-\varphi(x_0)$; в) множество корней не изменится.

Вариант 2

1. Уравнение *а* является следствием уравнения *б*. 2. $a\in(-\infty;\ 0)$.
3. а) Не изменится; б) произойдет потеря корней x_0, при которых $f(x_0)=\varphi(x_0)<0$; в) может произойти потеря корня $x_0=0$, если $f(x_0)=\varphi(x_0)$.

С—35

Вариант 1

1. $x_1=1,\ x_2=9,\ x_3=-3$. 2. $x=1$. 3. $b=6,\ x_2=-1,\ x_3=-4$.

Вариант 2

1. $x=3$. 2. $x=-1,\ x_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$. 3. $b=1,\ x_2=1,\ x_3=\dfrac{1}{2}$.

С—36

Вариант 1

1. а) $x=\pm1$; б) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. 2. $a\in(-\infty;\ 0)$.

Вариант 2

1. а) $x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=-\dfrac{5}{2}$; б) $x=-5$. 2. $a\in(-\infty;\ -1)$.

С—37

Вариант 1

а) $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3},\ x_{3,4}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2},\ x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

Вариант 2

а) $\varnothing$; б) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=1$, $x_4=-4$.

С—38

Вариант 1

1. $x=0$. **2.** $x=-1\pm\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $x_1=-2$, $x_2=-1$. **2.** $x=-\frac{5}{4}$.

С—39

Вариант 1

2. $a=26$.

Вариант 2

2. $a=2$.

С—40

Вариант 1

1. $x_1=0$, $x_2=4$. **2.** $x=-\frac{1}{2}$. **3.** $x=2\pm\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. $x=-3$. **2.** $x_1=0$, $x_2=1$. **3.** $x=0$.

С—41

Вариант 1

1. $\{(9;\ 3),\ (-6;\ 18)\}$.
2. $\{(5;\ 5),\ (-5;\ -5)\}$. **3.** $\{(-\sqrt[3]{2};\ 3)\}$.

Вариант 2

1. $\{(2;\ 1),\ (2;\ -1),\ (-2;\ \sqrt{5}),\ (-2;\ -\sqrt{5})\}$. **2.** $\{(1;\ 1),\ (1;\ -1),\ (-1;\ 1),\ (-1;\ -1)\}$. **3.** $\{(\sqrt{5};\ -2),\ (-\sqrt{5};\ -2),\ (2;\ -1),\ (-2;\ -1)\}$.

С—42

Вариант 1

1. $\{(1;\ 3),\ (3;\ 1),\ (-1;\ -3),\ (-3;\ -1)\}$. **2.** $\{(2;\ -1;\ 3),\ (-3;\ 4;\ -2)\}$.
3. $\{(\sqrt{2};\ -1),\ (\sqrt{2};\ 1),\ (-\sqrt{2};\ -1),\ (-\sqrt{2};\ 1)\}$.

Вариант 2

1. $\{(3;\ 4),\ (4;\ 3),\ (-3;\ -4),\ (-4;\ -3)\}$. 2. $\{(2;\ -1;\ 0),\ \left(\frac{2}{5};\ \frac{11}{5};\ \frac{8}{5}\right)\}$. 3. $\{(0;\ 0)\}$.

С—43

Вариант 1

1. $\{(5;\ 1),\ (1;\ 5),\ (-5;\ -1),\ (-1;\ -5)\}$.
2. $\left\{\left(\frac{7}{10};\ -\frac{1}{4}\right)\right\}$. 3. $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

Вариант 2

1. $\left\{(2;\ 2),\ \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.
2. $\{(1;\ 2),\ (-1;\ 6)\}$. 3. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\sqrt{2}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right)\right\}$.

С—44

Вариант 1

1. $\{(0;\ 4),\ (0;\ -4)\}$. 2. $\{(2;\ 2),\ (-2;\ -2)\}$. 3. $\{(1;\ 2),\ (2;\ 1)\}$.

Вариант 2

1. $\left\{\left(-\frac{6}{5};\ -\frac{5}{3}\right),\ (1;\ 2)\right\}$. 2. $\left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)\right\}$.
3. $\left\{\left(\sqrt{\frac{5}{6}};\ \sqrt{\frac{5}{6}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5}{6}};\ -\sqrt{\frac{5}{6}}\right),\ \left(\frac{\sqrt{15}}{2};\ -\frac{\sqrt{15}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{15}}{2};\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)\right\}$.

С—45

Вариант 1

1. При $a=-2$ и $a=\frac{2}{3}$. 2. $-2<p<5$. 3. $a\geqslant 2\sqrt{2}-1$, $a\leqslant -2\sqrt{2}-1$.

Вариант 2

1. $a=\frac{3}{4}$, $a=-\frac{45}{26}$. 2. $p\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 3. $a\leqslant -3$, $a\geqslant 5$.

С—46

Вариант 1

1. $a\leqslant 3$. 2. При $a<\frac{1}{2}$ два решения, при $a=\frac{1}{2}$ одно решение, при $a>\frac{1}{2}$ решений нет. 3. $p=2$.

Вариант 2

1. $a \geqslant -1$. 2. При $a > 4$ четыре решения, при $a = 4$ два решения, при $a < 4$ решений нет.

3. $p = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$.

С—47

Вариант 1

1. $3-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 4$. 2. $-2\sqrt{2} \leqslant b \leqslant 2\sqrt{2}$. Рис. 9.

Вариант 2

1. $p > 4$; $p < 3-\sqrt{2}$. 2. $4-2\sqrt{2} \leqslant b \leqslant 4+2\sqrt{2}$. Рис. 10.

С—48

Вариант 1

1. $a=2$, $b=3$. 2. Стоимость акции АО «Прогресс» — 6000 р., АО «Интер» — 600 р.

Вариант 2

1. 2 ед. и 3 ед. 2. 3 ч.

С—49

Вариант 1

1. а) $(-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; +\infty)$; б) $(-\infty; 0] \cup [1; 3] \cup [5; +\infty)$.
2. $(-\infty; +\infty)$.

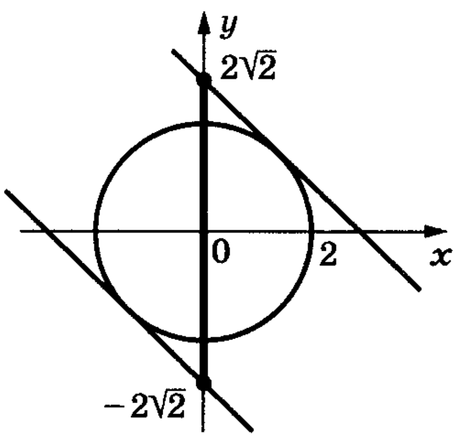


Рис. 9

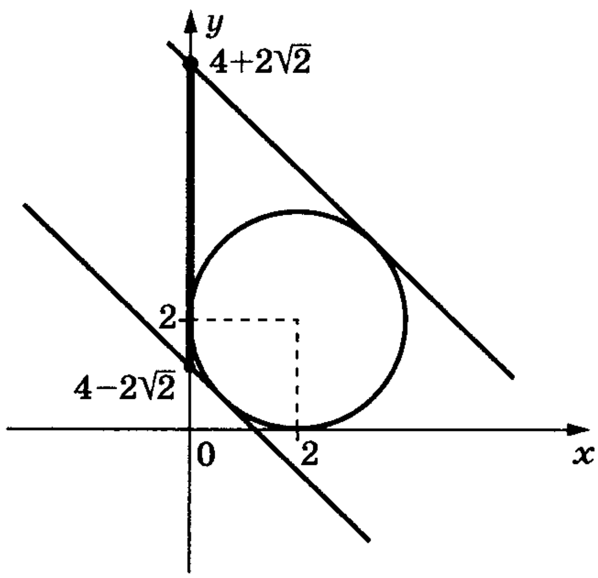


Рис. 10

Вариант 2

1. а) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (0; 5)$. 2. $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.

С—50

Вариант 1

1. Нет. 2. $(0; 4) \cup (4; +\infty)$. 3. $x=-5$.

Вариант 2

1. Нет. 2. $(-\infty; 4) \cup (5; +\infty)$. 3. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

С—51

Вариант 1

3. Указание. Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел.

Вариант 2

1. Указание. Проведите рассуждения от противного, предположив существование a и b, таких, что $a^2+b^2<1$.
2. Указание. Примените способ выделения полного квадрата.
3. Указание. Воспользуйтесь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

С—52

Вариант 1

1. $\left[-\frac{7}{4}; \frac{1}{2}\right]$. 3. $|a| \geqslant -1$. Указание. Данное уравнение может иметь корни, если подкоренное выражение и выражение, стоящее в правой части неравенства, неотрицательны.

Вариант 2

1. $\left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{5}\right]$. 3. $a \geqslant -\frac{1}{3}$ (см. Указание к заданию 3 варианта 1).

С—53

Вариант 1

1. а) $x=0$; б) $x=1$. 2. $x=\frac{53}{15}$.

Вариант 2

1. а) $\varnothing$; б) $x=2$, $x=34$. 2. $x=-\frac{7}{11}$.

С—54

Вариант 1

1. $x=1$. **2.** $x=0$. **3.** $x=0$.

Вариант 2

1. $x_1=-2$, $x_2=-3$. **2.** $x=1$. **3.** $x_1=2$, $x_2=9$, $x_3=74$.

С—55

Вариант 1

1. $\left[\frac{17}{5};\ +\infty\right)$. **2.** а) $(-\infty;\ 2)$; б) $\varnothing$. **3.** $x>30$.

Вариант 2

1. $\left(0;\ \frac{2}{5}\right)$. **2.** а) $(-\infty;\ 2)$; б) $\left[-\frac{7}{5};\ -\frac{5}{8}\right)$. **3.** $\left(-\infty;\ \frac{35}{8}\right] \cup (9;\ 28)$.

С—56

Вариант 1

1. Рис. 11. **2.** Рис. 12. **3.** Рис. 13.

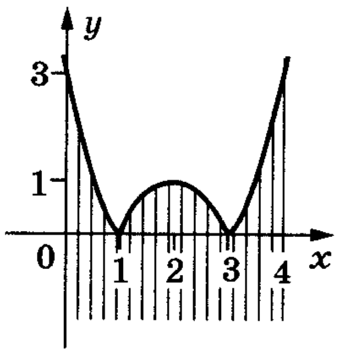


Рис. 11

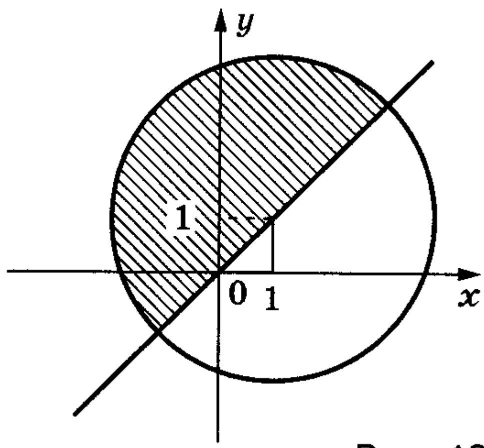


Рис. 12

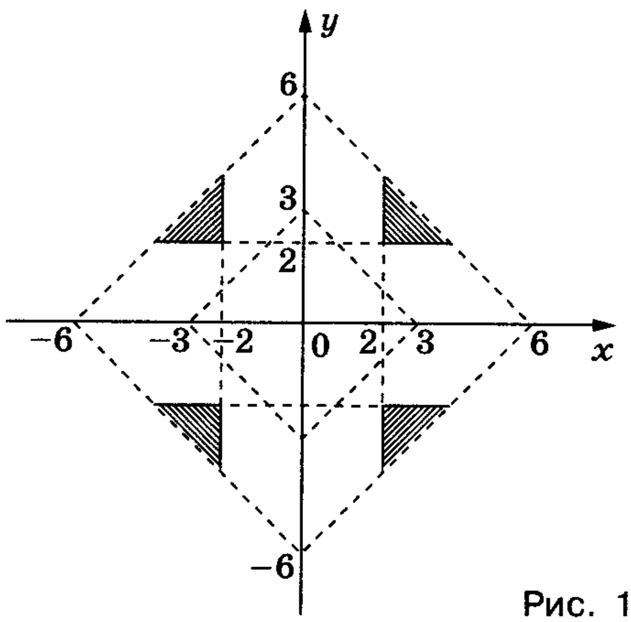


Рис. 13

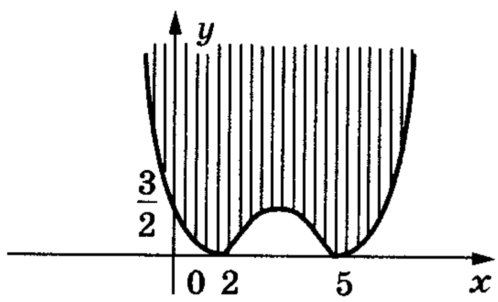


Рис. 14

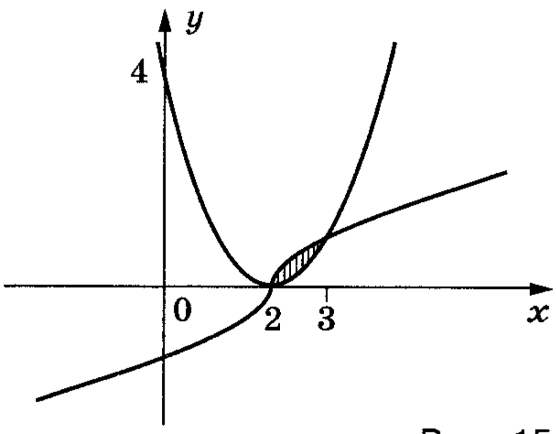


Рис. 15

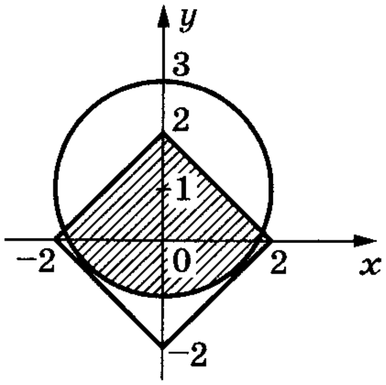


Рис. 16

Вариант 2

1. Рис. 14. 2. Рис. 15. 3. Рис. 16.

С—57

Вариант 1

1. а) $p_0=25$, $q_0=4$; б) при $p_1=30$ возникает избыточное предложение товара объемом $\sqrt{p_1-9-\frac{20}{p_1}}\approx 0{,}93$; при $p_2=18$ возникает дефицит товара объемом $\frac{20}{\sqrt{p_2}}-\sqrt{p_2-9}\approx 1{,}71$.
2. а) $p_0=72$, $q_0=2$; б) при $p_1=60$ возникает дефицит товара объемом $\sqrt{\frac{288}{p_1}}-(-7+\sqrt{9+p_1})\approx 0{,}89$; при $p_2=80$ возникает избыточное предложение товара объемом $-7+\sqrt{9+p_2}-\sqrt{\frac{288}{p_2}}\approx$ $\approx 0{,}53$.

Вариант 2

1. а) $p_0=9$, $q_0=2$; б) при $p_1=12$ возникает избыточное предложение товара объемом $p_1-5-\frac{6}{\sqrt{p_1}}\approx 0{,}92$; при $p_2=8$ возникает дефицит товара объемом $\frac{6}{\sqrt{p_2}}-\sqrt{p_2-5}\approx 0{,}39$.
2. а) $p_0=40$, $q_0=2$; б) при $p_1=30$ возникает дефицит товара объемом $\sqrt{\frac{160}{p_1}}-(4+\sqrt{16-20+p_1})\approx 1{,}21$; при $p_2=50$ возникает избыточное предложение товара объемом $-4+\sqrt{16-20+p^2}-$ $-\sqrt{\frac{160}{p_2}}\approx 0{,}993$.

Последовательности

С—58

Вариант 1

1. а) $-4,\ -6,\ -6,\ -4,\ 0,\ 6$; б) $14=a_7$; в) $a_{2n+1}=4n^2-6n-4$.

Вариант 2

1. а) $4,\ 10,\ 18,\ 28,\ 40$; б) $70=a_7$; в) $a_{2n-1}=4n^2+2n-2$.

С—59

Вариант 1

1. $2,\ -1,\ -5,\ -14,\ -37$.

Вариант 2

1. $1,\ -2,\ -5,\ 1,\ 16$.

С—61

Вариант 1

1. б) $d=-\frac{2}{x}$; в) $a_{20}=\frac{35}{2}$. 3. $p=-6$, $x_1=-2-\sqrt{7}$, $x_2=-2$, $x_3=-2+\sqrt{7}$.

Вариант 2

1. б) $d=\frac{2}{x+1}$; в) $a_{15}=\frac{2x+29}{x+1}$; г) $n=12$. 2. $a_{12}=52$.
3. $p=-8$, $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=-4$.

С—62

Вариант 1

1. $S_{15}=90$. 2. $S_{10}=57\frac{1}{2}$. 3. $\frac{d}{a_1}=2$.

Вариант 2

1. $S_{19}=95$. 2. $S_{11}=33$. 3. $\frac{d}{a_1}=2$.

С—63

Вариант 1

1. $b_1=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 2. $n=6$. 3. $b_3=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 2

1. $b_1=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. 2. $n=6$. 3. $b_4=\pm\frac{20}{9}$.

С—64

Вариант 1

1. $S_8=255$. 2. $x=-1$. 3. $S=49\cdot 2^{50}+1$.

Вариант 2

1. $S_7=406\frac{2}{5}$. 2. $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{2}$. 3. $S=\frac{1}{4}(59\cdot 3^{30}+1)$.

С—65

Вариант 1

1. Указание. $0<\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n}$.
2. Указание. Докажите, что $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ и $\left(\frac{5}{n^2}\right)$ — бесконечно малые последовательности.

С—67

Вариант 1

2. $\frac{15}{4}$. 3. -1.

Вариант 2

2. $\frac{5}{2}$. 3. -2.

С—68

Вариант 1

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{5}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$.

Вариант 2

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{49}}{2}$.

С—69

Вариант 1

1. $S=\frac{7}{3}$. 2. $\frac{2}{5}$. 3. $3\frac{61}{300}$.

Вариант 2

1. $S=\sqrt{2}+\frac{1}{3}$. 2. $b_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ или $b_1=\frac{3}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$. 3. $5\frac{68}{225}$.

С—70

Вариант 1

1. 30194,86. 2. 4. 3. 6000. 4. а) 28098,56; б) 8098,56; в) 40,49%.
5. 25%; 95,31%.
6. Указание. Первый взнос в конце первого года пролежит в банке три года и поэтому возрастет до величины

$S_0(1+0{,}12)^3$, где $S_0=500\,000$ денежных единиц.

Второй взнос в конце второго года пролежит в банке два года и поэтому возрастет до величины $S_0(1+0{,}12)^2$. Третий взнос в конце третьего года пролежит в банке всего один год и поэтому возрастет только до величины $S_0(1+0{,}12)$. На последний взнос величиной S_0 проценты не начисляются. Обозначим искомую сумму через S. Тогда

$$S=S_0(1+0{,}12)^3+S_0(1+0{,}12)^2+S_0(1+0{,}12)+S_0,$$

или

$$S=S_0+S_0(1+0{,}12)+S_0(1+0{,}12)^2+S_0(1+0{,}12)^3.$$

Отсюда следует, что искомая сумма является суммой четырех членов геометрической прогрессии, из которой первый член равен S_0, а знаменатель $q=(1+0{,}12)=1{,}12$. Учитывая этот факт, получим

$$S=S_0\,\frac{(1-(1+0{,}12))^4}{1-1{,}12}=500\,000\,\frac{(1{,}12)^4-1}{0{,}12}=2389663{,}7.$$

Вариант 2

1. 98676,16. 2. 3. 3. 3125 р. 4. а) 58977,03; б) 23977,03; в) 68,5%. 5. 20%; 44%.
6. Указание. Первый взнос вкладчика размером 20 000 р. пролежит в банке пять лет и поэтому возрастет до величины $20\,000(1+0{,}08)^5$. Второй взнос пролежит в банке четыре года и возрастет до величины $20\,000(1+0{,}08)^4$, третий взнос пролежит в банке три года и возрастет до величины $20\,000(1+0{,}08)^3$, четвертый — до величины $20\,000(1+0{,}08)^2$, и последний взнос пролежит всего один год и возрастет до величины $20\,000(1+0{,}08)$. Общая сумма денег в конце пятилетнего срока будет равна:

$$20\,000(1+0{,}08)^5+20\,000(1+0{,}08)^4+20\,000(1+0{,}08)^3+$$
$$+20\,000(1+0{,}08)^2+20(1+0{,}08)=20\,000\,\frac{(1{,}08)^6-1{,}08}{1{,}08-1}=12671{,}55.$$

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

С—72

Вариант 1

1. $N=C_{25-3}^{5-3}=C_{22}^{2}=\dfrac{22\cdot 21}{2}=231$. 2. $N=C_{40-8}^{12-8}=C_{32}^{4}=$
$=\dfrac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=35\,960$. 3. $N=C_{10}^{5}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{12345}=252$.
4. $N=A_{70}^{3}=70\cdot 69\cdot 68=328\,440$. 5. $N=A_{9}^{6}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=$
$=60\,480$. 6. $N=C_{15}^{3}=455$. 7. а) $N=12!$; б) $N=9!4!$; в) $N=9!$.
8. а) $N=P(8!)$; б) $N=P(8!)$; в) $N=2\cdot P(8!)$; г) $N=P(7!)$.
9. а) $x=15$; б) $x=10$.

Вариант 2

1. $N=2\cdot 5!=240$. 2. $N=4\cdot 4!=96$. 3. $N=C_{20}^{6}$; а) $N=C_{4}^{3}\cdot C_{16}^{3}$;
б) $N=C_{4}^{4}\cdot C_{16}^{2}$. 4. $N=30\cdot 29\cdot C_{28}^{3}$. 5. $N=45\cdot C_{44}^{2}\cdot C_{42}^{5}$.
6. $N=C_{16}^{3}\cdot C_{12}^{4}\cdot C_{4}^{2}$. 7. $N=C_{10}^{5}\cdot C_{6}^{7-5}=C_{10}^{5}\cdot C_{6}^{2}$. 8. $x=12$. 9. $x=9$.

С—73

Вариант 1

1. $N=C_{20-2}^{3}=C_{18}^{3}=816$. 2. $N=C_{8}^{2}C_{6}^{2}C_{4}^{2}C_{2}^{2}=2520$.
3. $N=C_{10}^{4}C_{80-6}^{2}=567210$. 4. $N=7\cdot 5\cdot 3\cdot C_{25-15}^{4}=29050$.
5. $N=2(12!)^{2}$. 6. $A_{16}^{3}\cdot C_{13}^{2}$.
7. $N=C_{n}^{2}C_{m}^{2}=\dfrac{n(n-1)m(m-1)}{4}$. 8. $N=\dfrac{24!}{(8!)^{3}}$.

Вариант 2

1. $C_{12}^{3}\cdot C_{8}^{4}=15\,400$. 2. $C_{n}^{2}-n$. 3. $A_{30}^{2}=870$. 4. $N=P_{4}-P_{3}=18$.
5. $N=12\cdot P_{4}=288$. 6. $C_{5}^{1}+C_{5}^{2}+C_{5}^{3}+C_{5}^{4}+C_{5}^{5}=31$. 7. а) N;
б) $N=P_{m-1}=(m-1)!$. 8. $N=12!\cdot 4!$.

С—74

Вариант 1

1. $P(A)=\dfrac{8}{36}$; $P(B)=\dfrac{7}{36}$.

2. $P(A)=\dfrac{C_{8}^{6}C_{28}^{2}}{C_{40}^{8}}$.

3. $P(A)=0,7+0,85-0,7\cdot 0,85=0,955.$
4. $P=(1-0,31)(1-0,27)=0,5037.$
5. $P=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}=0,01.$
6. $P(A)=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}=\frac{20}{29}.$
7. $P(A)=C_4^3(0,4)^3(1-0,4)+C_4^4(0,4)^4(1-0,4)^0=$
$=0,1536+0,0256=0,1792.$

Вариант 2

1. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{3}{36}.$
2. $P(A)=\frac{C_{23}^{10}C_{19}^{5}}{C_{42}^{15}}.$
3. $P(A)=0,3+0,5=0,8.$
4. $P(A)=(1-0,21)(1-0,18)=0,6478.$
5. $P(A)=\frac{8}{14}\cdot\frac{7}{13}\approx 0,3.$
6. $P(A)=\frac{20}{40}\cdot\frac{19}{39}=\frac{19}{78}\approx 0,24.$
7. $P(A)=C_4^3(0,5)^3\cdot 0,5+C_4^4(0,5)^4=0,44.$

С—75

Вариант 1

1. а) $P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ $P_A(B)=\frac{7}{19}$;

   б) $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{19}=\frac{14}{95}.$
2. $P=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^2}{C_{20}^4}\approx 0,22.$
3. Пусть событие A: «схема работает исправно»; A_1: «первый блок работает исправно»; A_2: «второй блок работает исправно». Событие A наступает лишь тогда, когда наступают события A_1 и A_2. В силу независимости событий A_1 и A_2 имеем: $P(A)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=P^2.$
4. Пусть событие A: «цель поражается первым стрелком»; B: «цель поражается вторым стрелком»; $P(A)=0,6$, $P(B)=0,3$. Из независимости событий A и B следует:
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,6\cdot 0,3=0,18;$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,6+0,3-0,18=0,72.$$
5. Проверим равенство $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Среди первых 100 натуральных чисел 50 чисел четных, 20 чисел делится

на 5 и 10 чисел делится на 10. Поэтому $P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$; $P(A\cap B)=\frac{10}{100}=0{,}1$. Отсюда следует, что $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{10}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$. События A и B независимы.

Вариант 2

1. Событие A: «первый спортсмен — перворазрядник»; событие B: «второй спортсмен — перворазрядник»;
$$P(A)=\frac{10}{17};\ P_A(B)=\frac{9}{16};$$
$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{10}{17}\cdot\frac{9}{16}=0{,}33.$$
2. Пусть событие B: «первым вынут белый шар»; C: «вторым вынут белый шар»;
$$P(B)=\frac{a}{a+b};\ P_B(C)=\frac{a-1}{a+b-1};\ A=B\cap C;$$
$$P(A)=P(B\cap C)=P(B)P_B(C)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}.$$
3. Пусть событие A: «система работает исправно»; A_1: «первый блок работает исправно»; A_2: «второй блок работает исправно». Система выйдет из строя лишь тогда, когда выйдут из строя все блоки. Поэтому
$$\overline{A}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2,\ P(\overline{A})=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)=(1-P)(1-P)=(1-P)^2.$$
Отсюда $P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-P)^2=2P-P^2$.
4. Пусть событие A: «первый стрелок поразил цель»; событие B: «второй стрелок поразил цель». По условию $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}5$, тогда $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}4+0{,}5-$ $-0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}7$.
5. Среди первых 90 чисел 45 четных, 12 чисел делится на 7 и 6 чисел делится на 14. Проверим равенства
$$P(A)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{12}{100}=\frac{3}{25};\ P(A\cap B)=\frac{6}{100}.$$
Отсюда $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{25}=\frac{8}{50}$; $P(A\cap B)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$, т. е. $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$. Это равенство показывает, что события A и B независимы.

С—76

Вариант 1

1. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{5}{36}$; $P(B)<P(A)$.

2. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$; $P(B)>P(A)$.

3. $P(A)=\frac{C_8^5C_{16}^2}{C_{24}^7}=0{,}02$. 4. $P(A)=\frac{C_{20}^7C_{980}^{43}}{C_{1000}^{50}}$.

5. $P(A)=\frac{C_{100}^4}{C_{120}^4}$. 6. $P(A)=\frac{1}{A_{10}^3}$.

7. а) $P(A)=C_4^1pq^3=4\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}8)^3=0{,}0256$;

б) $P(B)=C_4^2p^2q^2=6\cdot(0{,}8)^2(0{,}2)^2=0{,}1536$.

Вариант 2

1. $P(A)=\frac{5}{36}$; $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $P(B)<P(A)$.

2. $P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$; $P(B)=\frac{5}{12}$; $P(A)=P(B)$.

3. $P(A)=\frac{C_{12}^2C_8^4}{C_{20}^6}$. 4. $P(A)=\frac{C_6^4C_{24}^1}{C_{30}^5}$.

5. $P(A)=\frac{C_{20}^6}{C_{50}^6}$. 6. $P(A)=\frac{1}{A_9^3}$.

7. а) $P(A)=C_{10}^2\cdot(0{,}1)^2\cdot(0{,}9)^8\approx 0{,}1937$;

б) $P(B)=C_{10}^4\cdot(0{,}1)^4(1-0{,}1)^6\approx 0{,}1116$.

С—77

Вариант 1

1. $P(A)=\frac{11}{36}$.

2. Пусть A и B — события «при залпе цель поражена соответственно первым или вторым орудием». Очевидно, что результаты выстрелов не зависят друг от друга и поэтому $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A)\cdot p(B)=0{,}85+0{,}95-0{,}85\cdot 0{,}95=$ $=0{,}9925$.

Ответ: 0,9925.

3. а) $P(A)=\frac{C_{35}^3}{C_{50}^3}$; б) $P(B)=\frac{C_{35}^2C_{15}^1}{C_{50}^3}$.

4. а) $P(A)=C_6^4P^4(1-P)^2=C_6^2(0{,}8)^4(0{,}2)^2\approx 0{,}245$.

5. а) $P(A)=\frac{C_{17}^8C_{15}^4}{C_{32}^{12}}$.

6. По условию задачи $p=0{,}2$, $q=1-p=0{,}8$. Тогда $p(A)=C_7^2(0{,}2)^2\times$ $\times(0{,}8)^5=0{,}275$. Ответ: $p(A)=C_7^2(0{,}2)^2(0{,}8)^5=0{,}275$.

Вариант 2

1. По условию задачи $P=\frac{1}{6}$. Тогда $P=C_6^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=0{,}008$.

   Ответ: $p=0{,}008$. Заметим, что искомая вероятность невелика: правильный ответ на 4 задачи будет приходиться 8 раз на 1000 таких ответов.

2. Пусть событие A: «деталь отличного качества»; событие B: «деталь «Экстра»». Количество деталей отличного качества $n_1=\frac{10000\cdot 72}{100}=7200$ штук. Количество деталей «Экстра» $n_2=\frac{7200\cdot 3}{100}=216$. $p(A)=\frac{7200}{10\,000}=0{,}72$, $p(B|A)=\frac{216}{7200}$.

   $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B|A)=0{,}72\cdot\frac{216}{7200}=\frac{216}{10\,000}=0{,}0216$.

   Ответ: $p=0{,}0216$.

3. Исправными могут остаться или одна, или две лампы. Используя формулу Бернулли при $p=0{,}3$, $q=1-p=0{,}7$ и теорему сложения, получаем: $p=C_2^1(0{,}3)^1(0{,}7)^1+C_2^2(0{,}3)^2(0{,}7)^0=0{,}51$.

4. По условию $p=0{,}25$, $q=1-p=0{,}75$; $p(B)=C_7^2(0{,}25)^2(0{,}75)^{7-2}=$ $=0{,}31$. Полученный результат означает, что в среднем из 100 кредитов 30—31 кредит в банк возвращен не будет.

   Ответ: 0,31.

5. Места за столом пронумеруем числами от 1 до 10. Сначала игроки команды A садятся на места с нечетными номерами. Это можно сделать 5! способами. На свободные места с четными номерами посадим 5! способами игроков команды B. Игроков команд A и B можно поменять местами. Получаем $2(5!)^2$ способов. Столькими способами можно рассадить игроков обеих команд так, чтобы игроки разных команд не сидели рядом. Если рассаживаться в любом порядке, то число возможных способов равно 10!.

   Отсюда $p=\frac{2\cdot(5!)^2}{10!}=\frac{1}{126}$.

   Ответ: $\frac{1}{126}$.

6. По условию $p=0{,}7$, $q=1-p=0{,}3$. Поэтому $p(A)=C_3^2p^2q+$ $+C_3^3p^3q^0=0{,}784$.

   Ответ: $p\approx 0{,}784$.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К—1

Вариант 1

3. б) $x \in (-\infty;\ 2) \cup [3;\ +\infty)$.
4. а) $E(y) = [-1;\ 4]$;
   б) $E(y) = (-\infty;\ -6] \cup [0;\ +\infty)$. Значений m и M не существует.

Вариант 2

3. б) $x \in (-\infty;\ 3) \cup [4;\ +\infty)$.
4. а) $E(y) = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right]$; $m = -\frac{1}{2}$; $M = \frac{3}{2}$;
   б) $E(y) = (-\infty;\ -6] \cup [2;\ +\infty)$. Значений m и M не существует.

К—2

Вариант 1

1. $k = -125$. 2. $p \geqslant -10$. 3. а) $k \in (-\infty;\ 2) \cup (8;\ +\infty)$; б) $k = 2$; $k = 8$; в) $k \in (2;\ 8)$. 4. $y = 3x^2 - 18x + 24$.

Вариант 2

1. $k = 90$. 2. $p \leqslant -9$. 3. а) $k \in (-\infty;\ 2) \cup (10;\ +\infty)$; б) $k = 2$; $k = 10$; в) $k \in (2;\ 0)$. 4. $y = -x^2 - 8x - 12$.

К—3

Вариант 1

2. $x^2 - 48x - 50{,}375 = 0$. 3. $p \in \left(-\frac{8}{3};\ +\infty\right)$. 4. $p = -2$; $M = 14$. 5. $p = 2$; $q = 1$.

Вариант 2

2. $x^2 - 216x + 3 = 0$. 3. $p \in (-\infty;\ 2)$. 4. $p = -2$; $m = 10$. 5. $p = -2$; $q = -1$.

К—4

Вариант 1

1. 8. 2. $a^{\frac{5}{3}}$.

3. $\dfrac{(x-3)\left(\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{5-3x}\right)\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{5-3x}\right)}{5x-4}$.

4*. Рис. 17.

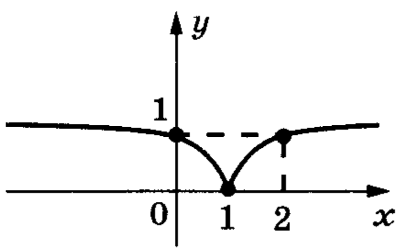


Рис. 17

Вариант 2

1. 30. 2. $b^{\frac{11}{12}}$.

3. $\dfrac{(\sqrt[4]{5x+3}+\sqrt[4]{3x-1})(\sqrt{5x+3}+\sqrt{3x-1})}{2}$.

4*. Рис. 18.

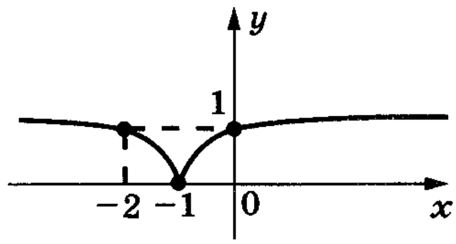


Рис. 18

К—5

Вариант 1

1. $a=1$, $b=-2$. 2. $x=2$. 3. $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{33}}{2}$; $x_3=-8$; $x_4=-1$.

4*. При $a\geqslant 3$ $x_1=2+\dfrac{a}{3}$, $y_1=1-\dfrac{a}{3}$; $x_2=6-a$, $y_2=a-3$; при $a<3$ $\varnothing$.

Вариант 2

1. $x=-2$.

2. $x_1=\dfrac{7+\sqrt{69}}{2}$; $x_2=\dfrac{7-\sqrt{69}}{2}$. 3. $a=-7$, $b=-5$.

4*. При $a<-1$ $\varnothing$;
при $a\geqslant -1$ $\left\{\left(\dfrac{a+1}{3};\ \dfrac{a-2}{3}\right);\ (-a-1;\ -a-2)\right\}$.

К—6

Вариант 1

1. $\left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right)$.

2. $x\in[-5;\ -\sqrt{2}]\cup[-1;\ 1]\cup[\sqrt{2};\ 9]$. 3. Рис. 19.

4*. $a\in(-\infty;\ 0)\cup[2;\ +\infty)$.

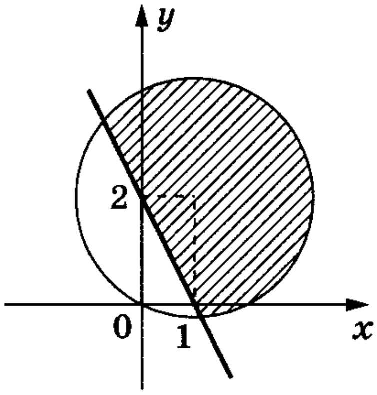


Рис. 19

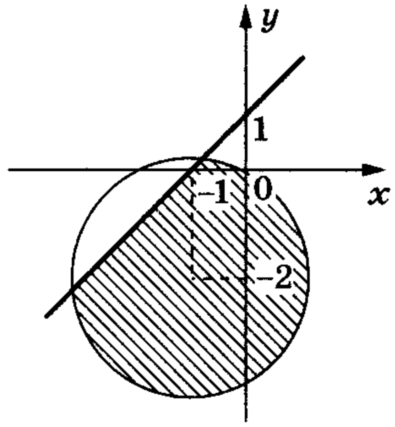


Рис. 20

Вариант 2

1. $\left(-\infty;\ \frac{-5-\sqrt{57}}{2}\right)\cup\left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{57}}{2};\ +\infty\right)$.

2. $x\in(-\infty;\ -7]\cup[-3;\ -2]\cup[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]\cup[2;\ +\infty)$. 3. Рис. 20.

4*. $a\leqslant-3,\ a\geqslant1$.

К—7

Вариант 1

1. $x=\frac{32}{47}$.

2. $x\leqslant-2$.

3. $x_1=-\frac{159}{82}$; $x_2=\frac{1}{2}$.

4*. При $a<1\ \varnothing$; при $a\geqslant1\ x=-(a+1)$.

Вариант 2

1. $x=\frac{1}{4}$.

2. $(-\infty;\ -\sqrt{5}]$.

3. $x=1$.

4*. При $a<2$ действительных корней нет; при $a=2\ x=-3$; при $a>2\ x=-1-a,\ x=1-2a$.

К—8

Вариант 1

2. $a_1=5,\ d=4$. 3. $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 2

1. $a_1=6,\ d=8$. 2. $q=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

К—9

Вариант 1

1. $p(A)=C_9^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(1-\frac{1}{5}\right)^7\approx0{,}3$.

2. $p(A)=\frac{C_{15}^4\cdot C_9^2}{C_{24}^6}$.

3. $p(A)=C_{10}^4(0{,}1)^4(1-0{,}1)^6\approx0{,}11$.

4. Первый игрок произвольным образом выбирает 7 игральных костей из 28 и имеет C_{28}^7 способов выбора. Второй игрок выбирает 7 игральных костей из оставшихся $21=28-7$. Это делается C_{21}^7 способами выбора. Третий игрок выбирает 7 игральных костей из оставшихся $14=21-7$ костей и имеет C_{14}^7 способов выбора. У четвертого игрока выбора нет: он выбирает 7 игральных костей из оставшихся 7 и имеет единственный выбор: $C_7^7=1$.

По правилу умножения имеем $C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = \frac{28!}{21! \cdot 7!} \times$
$\times \frac{21!}{14! \cdot 7!} \cdot \frac{14!}{7! \cdot 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}$.

Ответ: $\frac{28!}{(7!)^4}$.

5. $8!-5!=40\,200$.
Ответ: 40 200.

6. $N=C_{12}^4 C_8^4=34\,650$.
Ответ: 34 650.

Вариант 2

1. $p(A)=\frac{2 \cdot C_5^5 \cdot C_{13}^4}{C_{18}^9}=\frac{1}{34}$.

2. $p(A)=C_7^3\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(1-\frac{1}{8}\right)^4 \approx 0{,}04$.

3. $\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{28} = \frac{27!}{32!}$.

4. Произвольным способом выбираем 7 шахматистов из 21. Это можно сделать C_{21}^7 способами. Выберем 7 шахматистов из оставшихся $21-7=16$ шахматистов. Это можно сделать C_{14}^7 способами. Наконец, выбираем 7 шахматистов из оставшихся 7. Это можно сделать единственным способом $C_7^7=1$.

Получаем $C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = \frac{21!}{14! \cdot 7!} \cdot \frac{14!}{7!\,7!} \cdot 1 = \frac{21!}{(7!)^3}$.

Ответ: $\frac{21!}{(7!)^3}$.

5. Двух женщин можно выбрать C_4^2 способами. После этого надо выбрать 4 мужчин. Это можно сделать C_7^4 способами. По правилу произведения имеем $C_4^2 \cdot C_7^4$ способов. Если выбирать трех женщин, то надо выбрать $6-3=3$ мужчин. Это можно сделать $C_4^3 \cdot C_7^3$ способами. Если же выбирать 4 женщин, то получим $C_4^4 \cdot C_7^2$ способов. По правилу суммы получаем $C_4^2C_7^4+C_4^3C_7^3+C_4^4C_7^2=371$ способ.
Ответ: 371 способ.

6. Юноша выбирает из 5 мест работы. Это возможно сделать 5^3 способами. Каждая девушка выбирает из 6 мест работы. Это возможно сделать 6^2 способами. По правилу произведения имеем $5^3 \cdot 6^2 = 4500$ способов.
Ответ: 4500 способов.

К—10

Вариант 1

3. $N = 10!$. 5. A_{20}^4. 6. $N = 50 \cdot 49 \cdot C_{48}^2$. 7. $N = C_{15}^5 C_{100-8}^3$.

Вариант 2

3. $N = C_6^3 C_3^2 C_4^2 C_{25-12}^1$. 4. $N = 2C_{18}^9 = 97\,240$. 5. $2C_4^2 C_{16-4}^6 = 2772 = 11\,088$. 6. $N = 4! = 24$. 7. $N = C_8^5 C_4^2$.

Содержание

Учебное издание

Сурвилло Геннадий Станиславович
Симонов Александр Сергеевич

Дидактические материалы
по алгебре для 9 класса
с углубленным изучением математики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Б. Грызлова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *А. С. Побезинский*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор *Н. Н. Бажанова*
Корректоры *А. В. Рудакова, И. В. Чернова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Сдано в набор 10.11.05. Подписано в печать 10.05.06. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,22. Тираж 7000 экз. Заказ № 15676.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Учебно-методический комплект
для углубленного изучения алгебры
в 8–9 классах содержит:

- **учебники для 8 и 9 классов**
  авторы: Н.Я. Виленкин и др.

- **дидактические материалы по алгебре для 8–9 классов**
  авторы: Г.С. Сурвилло и др.

- **сборник задач по алгебре для 8–9 классов**
  авторы: М.Л. Галицкий и др.

- **углубленное изучение алгебры в 8 и 9 классах книги для учителя**
  авторы: Ю.А. Дробышев и др.

ISBN 5-09-014633-0

9 785090 146333

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО