А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова

МАТЕМАТИКА

11

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова

МАТЕМАТИКА

11 класс

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений
(базовый уровень)

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

8-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
М34

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106–5215/9 от 31.10.2007) и Российской академии образования (№ 01–663/5/7д от 29.10.2007)

Авторы: *А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова, П. В. Семенов, Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова, Т. Н. Мишустина*

М34 **Математика. 11 класс** : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович, И. М. Смирнова [и др.]. — 8-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2013. — 416 с. : ил.

ISBN 978-5-346-02449-1

Учебник написан в соответствии с программой курса математики средней школы, на изучение которого отводится 4 урока в неделю *(базовый уровень)*. Концептуальную основу учебника составили апробированные в российских школах учебные пособия тех же авторов по алгебре и началам математического анализа (учебник, задачник) и геометрии (учебник) для 10—11-го классов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич, **Смирнова** Ирина Михайловна, **Семенов** Павел Владимирович и др.

МАТЕМАТИКА

11 класс

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений
(базовый уровень)

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,0.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 2765

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ», ИНТЕРНЕТ-магазин).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285. E-mail: magazin@mnemozina.ru
www.shop.mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография», филиал «Ульяновский Дом Печати».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 978-5-346-02449-1

Этот учебник написан в соответствии с программой курса математики средней общеобразовательной школы (базовый уровень), на изучение которого отводится 4 часа в неделю (примерная пропорция: 2,5 ч на изучение курса «Алгебра и начала математического анализа» и 1,5 ч на изучение курса «Геометрия» в рамках единого курса математики). Он является продолжением нашего учебника «Математика-10».

Главы 1—5 заимствованы из учебного комплекта: Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа, 10—11. Часть 1. Учебник (главы 6—10); Мордкович А. Г. и др. Алгебра и начала математического анализа 10—11. Часть 2. Задачник (главы 6—10).

В каждом параграфе содержится подробное и обстоятельное изложение теоретического материала, адресованного непосредственно школьникам. Весь материал того или иного параграфа рассмотреть на уроках вы, скорее всего, не успеете, но это и не нужно, поскольку изложение теоретического материала ориентировано на самостоятельное изучение учащимися, как правило, в домашней обстановке. Значение самостоятельной работы с книгой возрастает как по традиционной причине острой нехватки недельных часов, отведенных учебным планом на изучение курса, так и в связи с актуализировавшейся в современных условиях одной из основных задач школы — задачи приобщения учеников к самостоятельному поиску информации (в основном в школьных учебниках). Этим, в частности, объясняется наличие во всех параграфах большого числа примеров с подробными решениями, а также различных методических советов и рекомендаций.

Для удобства читателей на окончание решения примера (если отсутствует рубрика *Ответ*) и на окончание доказательства того или иного утверждения (в необходимых случаях) указывает специальный значок ◁■.

В конце каждого параграфа приводятся разноуровневые упражнения для самостоятельного решения. Устные и полуустные упражнения не содержат никакого значка (слева от номера), номера упражнений средней трудности отмечены значком ○, повышенной сложности — значком ●. В главах 6—8 значок * указвает на дополнительный материал.

В рамках единого курса целесообразно изучать материал блоками, завершая каждый из них контрольной работой. Тогда практически каждая контрольная работа будет содержать и алгебраический и геометрический материал. Сборник контрольных работ готовится к печати. С вариантами контрольных работ можно ознакомиться на сайте www.ziimag.narod.ru

Авторы

ГЛАВА 1 Степени и корни. Степенные функции

§ 1. Понятие корня n-й степени из действительного числа

Рассмотрим уравнение $x^4 = 1$ и решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = x^4$ и прямую $y = 1$ (рис. 1, *а*). Они пересекаются в точках $A(-1;\ 1)$ и $B(1;\ 1)$. Абсциссы точек A и B, т. е. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, являются корнями уравнения $x^4 = 1$.

Рассуждая точно так же, находим корни уравнения $x^4 = 16$: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

А теперь попробуем решить уравнение $x^4 = 5$; геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 1, *б*. Ясно, что уравнение

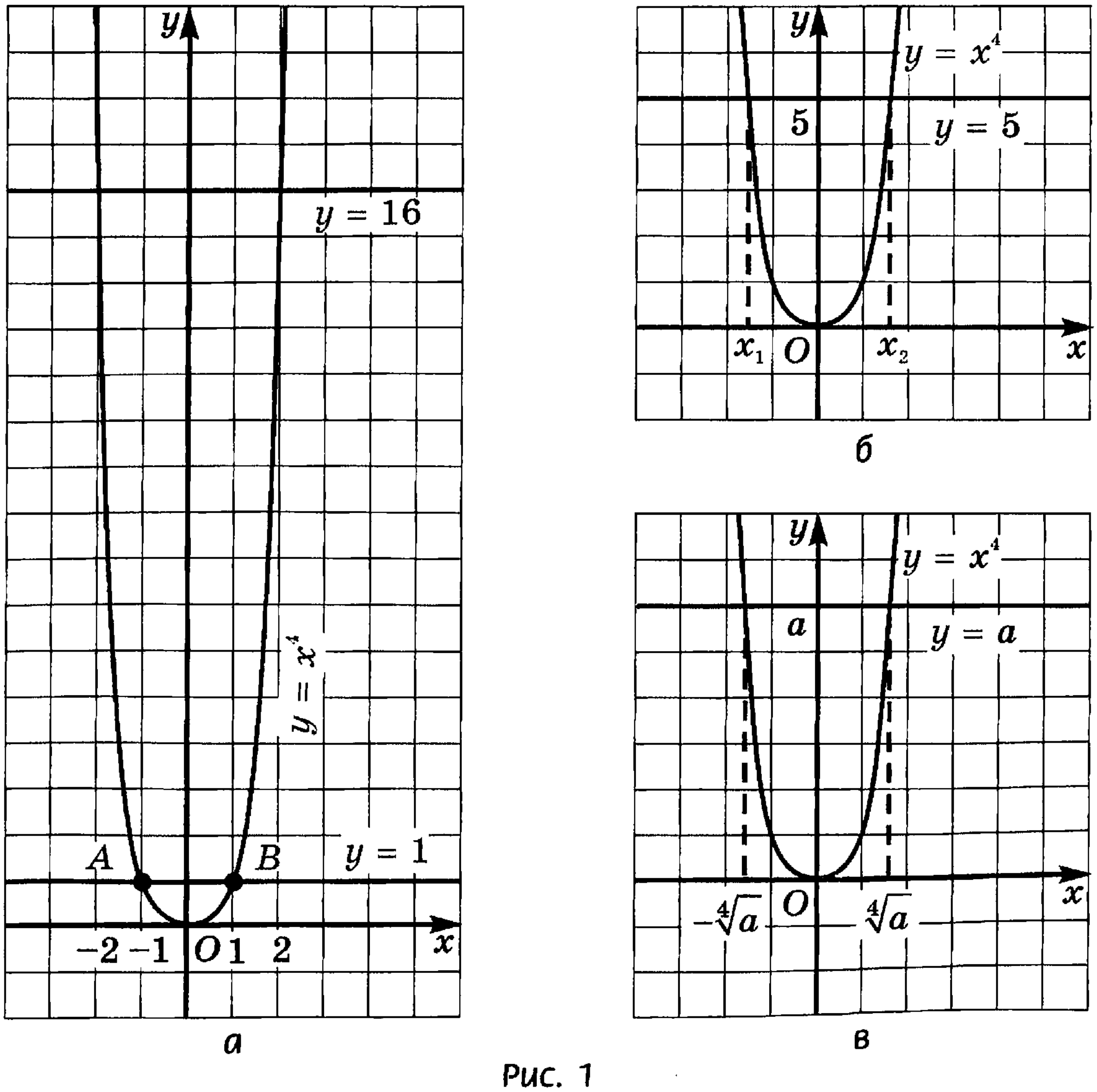


Рис. 1

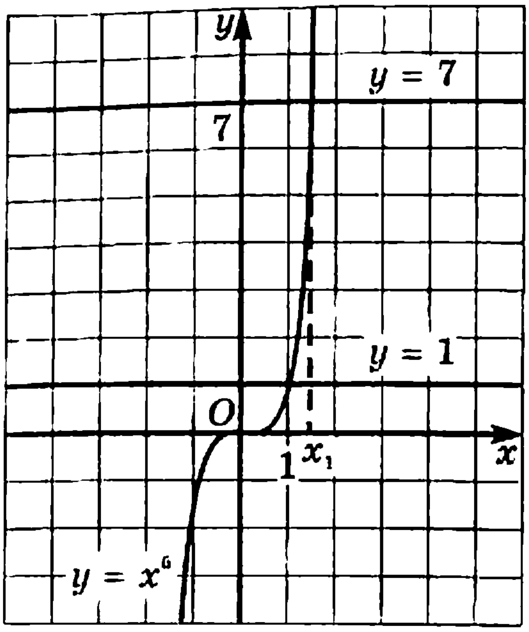


Рис. 2

имеет два корня: x_1 и x_2, — причем эти числа, как и в двух предыдущих случаях, противоположные. Но для первых двух уравнений корни были найдены без труда (их можно было найти и не пользуясь графиками), а с уравнением $x^4 = 5$ имеются проблемы: по чертежу мы не можем указать значения корней, а можем только установить, что один корень располагается левее точки -1, а второй — правее точки 1.

Можно доказать, что x_1 и x_2 — иррациональные числа (т. е. бесконечные непериодические десятичные дроби).

Встретившись с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\sqrt[4]{}$, который назвали *корнем четвертой степени*, и с помощью этого символа корни уравнения $x^4 = 5$ записали так: $x_1 = -\sqrt[4]{5}$, $x_2 = \sqrt[4]{5}$ (читают: *корень четвертой степени из пяти*).

Мы говорили об уравнении $x^4 = a$, где $a > 0$ ($a = 1; 16; 5$). С равным успехом мы могли говорить и об уравнении $x^n = a$, где $a > 0$, а n — любое натуральное число. Например, решая графически уравнение $x^5 = 1$, находим $x = 1$ (рис. 2); решая уравнение $x^5 = 7$, устанавливаем, что уравнение имеет один корень x_1, который располагается на оси x чуть правее точки 1 (см. рис. 2). Для числа x_1 используют обозначение $\sqrt[5]{7}$.

Вообще, решая уравнение $x^n = a$, где $a > 0$, $n \in N$, $n > 1$, получаем в случае четного n два корня: $-\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$; в случае нечетного n — один корень $\sqrt[n]{a}$ (читают: *корень n-й степени из числа a*). Решая уравнение $x^n = 0$, получаем единственный корень $x = 0$.

Замечание. В математическом языке, как и в обыденном, бывает так, что один и тот же термин применяется к разным понятиям. Так, в предыдущем абзаце слово «корень» употреблено в двух смыслах: как корень уравнения (к такому толкованию вы давно привыкли) и как корень n-й степени из числа (новое толкование). Обычно из контекста бывает ясно, какое толкование термина имеется в виду.

Теперь мы готовы дать точное определение.

Определение 1. Корнем n-й степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) называют неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается a.

Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a при этом называют *подкоренным числом*, а число n — *показателем корня.*

Если $n = 2$, то обычно говорят не «корень второй степени», а «квадратный корень». В этом случае пишут не $\sqrt[2]{a}$, а $\sqrt{a}$. Это тот частный случай, который вы специально изучали в курсе алгебры 8-го класса.

Если $n = 3$, то вместо «корень третьей степени» часто говорят «кубический корень». Первое знакомство с кубическим корнем у вас состоялось в курсе алгебры 9-го класса.

Итак,

если $a \geqslant 0$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$; 2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Вообще $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ — одна и та же зависимость между неотрицательными числами a и b, но только вторая описана более простым языком (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения корня из неотрицательного числа называют обычно *извлечением корня.* Эта операция является обратной по отношению к возведению в соответствующую степень. Сравните:

Возведение в степень	Извлечение корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3$

Еще раз обратите внимание: в таблице фигурируют только положительные числа, поскольку это оговорено в определении 1. И хотя, например, $(-6)^2 = 36$ — верное равенство, перейти от него к записи с использованием квадратного корня, т. е. написать, что $\sqrt{36} = -6$, нельзя. По определению, $\sqrt{36}$ — положительное число, значит, $\sqrt{36} = 6$, (а не -6). Точно так же, хотя и $2^4 = 16$, и $(-2)^4 = 16$, переходя к знакам корней, мы должны написать $\sqrt[4]{16} = 2$ (и в то же время $\sqrt[4]{16} \neq -2$).

Иногда выражение $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом* (от латинского слова *radix* — «корень»). В русском языке термин *радикальный* используется довольно часто, например, «радикальные изменения» — это значит «коренные изменения». Между прочим и само обозначение корня напоминает о слове *radix*: символ $\sqrt{\ }$ — это стилизованная буква *r*.

Пример 1. Вычислить:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt[3]{0,125}$; в) $\sqrt[7]{0}$; г) $\sqrt[4]{17}$.

Решение. а) $\sqrt{49} = 7$, так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$, так как $0,5 > 0$ и $0,5^3 = 0,125$.

в) $\sqrt[7]{0} = 0$.

г) В отличие от предыдущих примеров, мы не можем указать точное значение числа $\sqrt[4]{17}$. Ясно лишь, что оно больше, чем 2, но меньше, чем 3, поскольку $2^4 = 16$ (это меньше, чем 17), а $3^4 = 81$ (это больше, чем 17). Приближенное значение числа $\sqrt[4]{17}$ можно найти с помощью калькулятора, который содержит операцию извлечения корня: $\sqrt[4]{17} \approx 2,03$ (с точностью до 0,01).

Операцию извлечения корня определяют и для отрицательного подкоренного числа, но только в случае нечетного показателя корня. Иными словами, равенство $(-2)^5 = -32$ можно переписать в эквивалентной форме: $\sqrt[5]{-32} = -2$. При этом используется следующее определение.

***Определение* 2. Корнем нечетной степени *n* из отрицательного числа *a* (*n* = 3, 5, ...)** называют отрицательное число, при возведении которого в степень *n* получается *a*.

Это число, как и в определении 1, обозначают $\sqrt[n]{a}$, число *a* — *подкоренное число*, число *n* — *показатель корня*.

Итак,

$$\boxed{\text{если } a < 0,\ n = 3, 5, 7, \ldots,\ \text{то: 1) } \sqrt[n]{a} < 0;\ \text{2) } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.}$$

Таким образом, корень четной степени имеет смысл (т. е. определен) только для неотрицательного подкоренного числа; корень нечетной степени имеет смысл для любого подкоренного числа.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{3x+4} = -2$; в) $\sqrt[4]{2-5x} = -4$;

б) $\sqrt[4]{3x-2} = 1$; г) $\sqrt[6]{x^2-5x+68} = 2$.

Р е ш е н и е. а) Если $\sqrt[3]{y} = -2$, то $y = -8$. Фактически обе части заданного уравнения мы должны возвести в куб. Получим:

$$3x + 4 = -8;$$
$$3x = -12;$$
$$x = -4.$$

б) Возведем обе части уравнения в четвертую степень. Получим:

$$3x - 2 = 1;$$
$$3x = 3;$$
$$x = 1.$$

в) Здесь не надо возводить в четвертую степень, это уравнение не имеет корней. Почему? Потому что, согласно определению 1, корень четной степени — неотрицательное число.

г) Возведя обе части уравнения в шестую степень, получим:

$$x^2 - 5x + 68 = 64;$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Упражнения

1.1. Назовите подкоренное число и показатель корня:

а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[7]{5}$; в) $\sqrt{11}$; г) $\sqrt[15]{37}$.

1.2. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{361} = 19$; в) $\sqrt[3]{343} = 7$;

б) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{2}$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{2}{3}$.

1.3. Объясните, почему неверно равенство:

а) $\sqrt{25} = -5$; в) $-\sqrt[3]{-8} = -2$;

б) $\sqrt[6]{-64} = -2$; г) $\sqrt[4]{625} = -25$.

○1.4. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$; в) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$;

б) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 3$; г) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = 3 - \sqrt{6}$?

1.5. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $\sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[3]{64}$.

Вычислите:

1.6. а) $\sqrt[3]{0{,}125}$; б) $\sqrt[4]{0{,}0625}$; в) $\sqrt[4]{0{,}0081}$; г) $\sqrt[3]{0{,}027}$.

1.7. а) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$; б) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; в) $\sqrt{\frac{100}{121}}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

1.8. а) $\sqrt[7]{-128}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; г) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$.

1.9. а) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-8}$; в) $3\sqrt[4]{16} - 4\sqrt[3]{27}$;

б) $\sqrt[4]{625} - \sqrt[3]{-125}$; г) $12 - 6\sqrt[3]{0{,}125}$.

О1.10. Найдите отрезок $[n;\ n+1]$, где $n \in N$, которому принадлежит заданное число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{19}$; в) $\sqrt[4]{52}$; г) $\sqrt[3]{63}$.

Решите уравнение:

1.11. а) $x^3 = 125$; в) $x^5 = 32$;

б) $x^7 = \frac{1}{128}$; г) $x^9 = 1$.

1.12. а) $x^4 = 17$; в) $x^6 = 11$;

б) $x^4 = -16$; г) $x^8 = -3$.

1.13. а) $0{,}02x^6 - 1{,}28 = 0$; в) $0{,}3x^9 - 2{,}4 = 0$;

б) $-\frac{3}{4}x^8 + 18\frac{3}{4} = 0$; г) $\frac{1}{8}x^4 - 2 = 0$.

1.14. а) $\sqrt[3]{x-5} = -3$; в) $\sqrt[5]{2x+8} = -1$;

б) $\sqrt[4]{4-5x} = -2$; г) $\sqrt[3]{7-4x} = 4$.

О1.15. а) $\sqrt[3]{x^2 - 9x - 19} = -3$; в) $\sqrt[7]{2x^2 + 6x - 57} = -1$;

б) $\sqrt[4]{x^2 - 10x + 25} = 2$; г) $\sqrt[6]{x^2 + 7x + 13} = 1$.

О1.16. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $2,\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{17}$;

б) $\sqrt[3]{75},\ 4,\ \sqrt[5]{100}$;

в) $3,\ \sqrt[5]{40},\ \sqrt[3]{7}$;

г) $2,\ \sqrt[6]{60},\ \sqrt[4]{20}$.

О1.17. Расположите числа в порядке убывания:

а) $-1,\ \sqrt[3]{-5},\ \sqrt[4]{0,1}$;

б) $0,\ \sqrt[3]{-0,25},\ \sqrt[5]{-29}$;

в) $-2,\ \sqrt[5]{-1,5},\ \sqrt[3]{-9}$;

г) $1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{-2}$.

О1.18. Определите знак разности:

а) $\sqrt[3]{15} - \sqrt[4]{90}$;

б) $3 - \sqrt[7]{150}$;

в) $\sqrt[5]{40} - \sqrt[3]{50}$;

г) $\sqrt[4]{300} - 5$.

О1.19. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\frac{\pi}{2},\ \sqrt[5]{-12},\ 2,\ \sqrt[6]{70}$;

б) $\frac{3}{\pi},\ \sqrt[7]{\pi},\ 1,\ \sqrt[5]{-\pi}$;

в) $\sqrt{2\pi},\ \frac{\pi}{3},\ \sqrt[3]{-2},\ 2,5$;

г) $2\pi,\ \sqrt[5]{-0,5},\ 0,\ \sqrt[3]{200}$.

§ 2. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

В предыдущем параграфе мы ввели понятие корня n-й степени из действительного числа, отметили, что из любого неотрицательного числа можно извлечь корень любой степени (второй, третьей, четвертой и т. д.), а из отрицательного числа можно извлечь корень нечетной степени. Но тогда следует подумать и о функции вида $y = \sqrt[n]{x}$, ее графике и свойствах. Этим мы и займемся в настоящем параграфе. Сначала поговорим о функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае неотрицательных значений аргумента.

Функция $y = x^n$, $x \in [0;+\infty)$ монотонна, значит, обратима. Выразив x через y из уравнения $y = x^n$, получим $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Таким образом, функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной для функции $y = x^n$, а потому *график функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$, симметричен графику функции $y = x^n$, $x \geqslant 0$, относительно прямой $y = x$* (рис. 3).

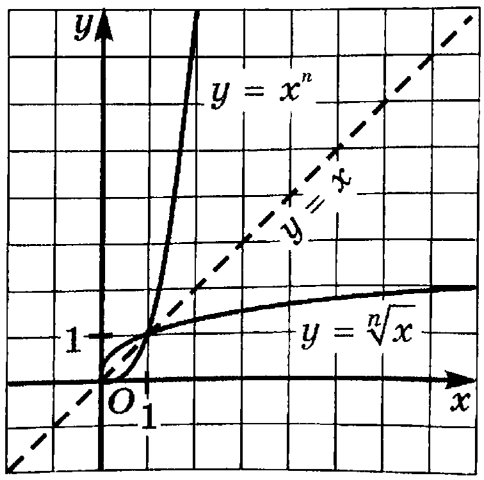


Рис. 3

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geqslant 0$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;

2) функция не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на $[0; +\infty)$;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет наибольшего значения, а $y_{\text{наим}} = 0$;

6) непрерывна;

7) $E(f) = [0; +\infty)$;

8) функция $y = \sqrt[n]{x}$ выпукла вверх на луче $[0; +\infty)$.

В 10-м классе вы познакомились еще с одним свойством функции — дифференцируемостью, видели, что функция $y = x^n$ дифференцируема в любой точке, ее производная равна nx^{n-1}. Геометрически это означает, что в любой точке графика функции $y = x^n$ к нему можно провести касательную. Этим же свойством обладает и график функции $y = \sqrt[n]{x}$: в любой его точке к графику можно провести касательную. Таким образом, мы можем отметить еще одно свойство функции $y = \sqrt[n]{x}$:

9) функция $y = \sqrt[n]{x}$ дифференцируема в любой точке $x > 0$.

Обратите внимание: о дифференцируемости функции в точке $x = 0$ речь не идет — в этой точке касательная к графику функции совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс. Значит, производная функции $y = \sqrt[n]{x}$ в точке $x = 0$ не существует.

Пример 1. Построить график функции $y = \sqrt[4]{x + 1} - 4$.

Р е ш е н и е. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; -4)$ — пунктирные прямые $x = -1$ и $y = -4$ проведены на рисунке 4.

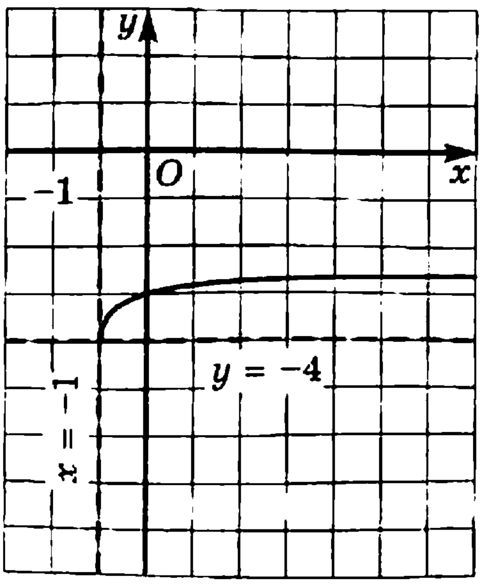


Рис. 4

2) «Привяжем» функцию $y = \sqrt[4]{x}$ к новой системе координат. Это и будет требуемый график. ◼

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt[6]{x} = 2 - x.$$

Р е ш е н и е. Первый способ.

1) Введем в рассмотрение две функции: $y = \sqrt[6]{x}$ и $y = 2 - x$.

2) Построим график функции $y = \sqrt[6]{x}$ (рис. 5).

3) Построим график линейной функции $y = 2 - x$ (см. рис. 5).

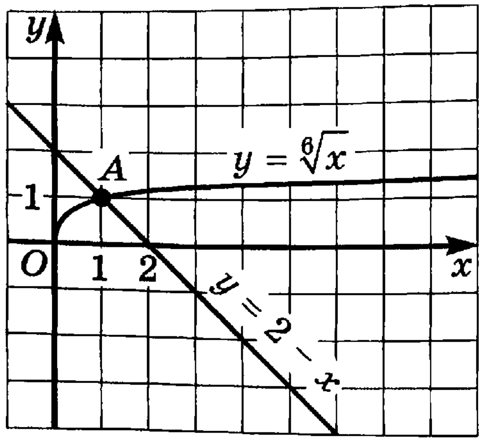


Рис. 5

4) Построенные графики пересекаются в одной точке A, причем по графику можно сделать предположение, что координаты точки A таковы: (1; 1). Проверка показывает, что на самом деле точка (1; 1) принадлежит и графику функции $y = \sqrt[6]{x}$, и графику функции $y = 2 - x$. Значит, наше уравнение имеет один корень: $x = 1$ — абсцисса точки A.

Второй способ.

Графическая иллюстрация, представленная на рисунке 5, наглядно поясняет следующее утверждение, с которым вы впервые встретились в курсе алгебры 9-го класса: *если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один.*

Вот как, опираясь на это утверждение, мы можем решить заданное уравнение:

1) заметим, что при $x = 1$ выполняется равенство $\sqrt[6]{1} = 2 - 1$, значит, $x = 1$ — корень уравнения (этот корень мы угадали);

2) функция $y = 2 - x$ убывает, а функция $y = \sqrt[6]{x}$ возрастает; значит, корень у заданного уравнения только один, и этим корнем является найденное выше значение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

До сих пор мы говорили о функции $y = \sqrt[n]{x}$ только для неотрицательных значений аргумента. Но ведь если n — нечетное число, выражение $\sqrt[n]{x}$ имеет смысл и для $x < 0$. Значит, в случае нечетного n следует поговорить о функции $y = \sqrt[n]{x}$ для любых значений x.

Справедливо следующее свойство: *если n — нечетное число ($n = 3, 5, 7, \ldots$), то $y = \sqrt[n]{x}$ — нечетная функция.*

В самом деле, пусть $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Тогда

$$f(-x) = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} = -f(x)$$

(для нечетного показателя n такие преобразования верны). Итак, $f(-x) = -f(x)$, а это и означает нечетность функции.

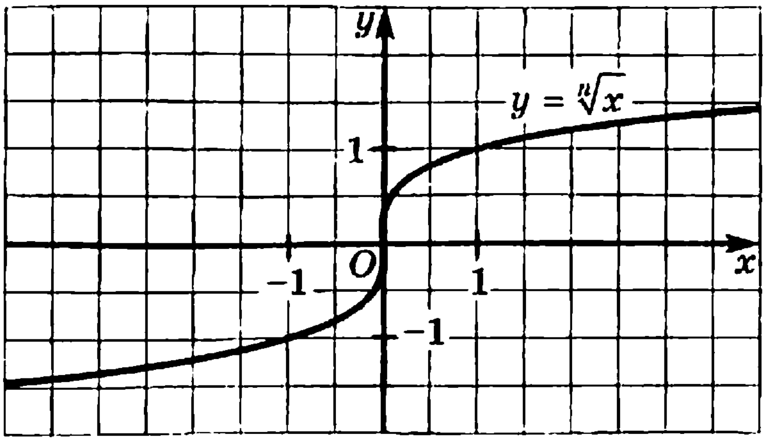


Рис. 6

Как же выглядит график функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае нечетного показателя n? При $x \geqslant 0$ так, как показано на рисунке 3, — это ветвь искомого графика. Добавив к ней ветвь, симметричную ей относительно начала координат (что, напомним, характерно для любой нечетной функции), получим график функции $y = \sqrt[n]{x}$ (рис. 6). Обратите внимание: ось y является касательной к графику в точке $x = 0$.

Итак, повторим еще раз:

если n — четное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рисунке 3;

если n — нечетное число, то график функции $y = \sqrt[n]{x}$ имеет вид, представленный на рисунке 6.

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Сначала построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и выделим его часть на луче $(-\infty; 1]$ (рис. 7). Затем построим график функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ (берем только одну ветвь графика — при $x > 0$) и выделим его часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (рис. 8).

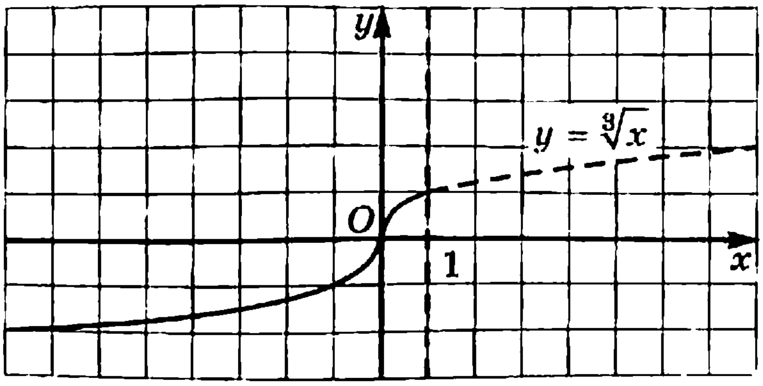


Рис. 7

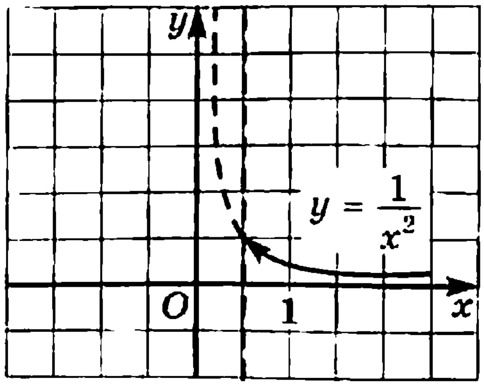


Рис. 8

Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график заданной функции (рис. 9, масштаб увеличен).

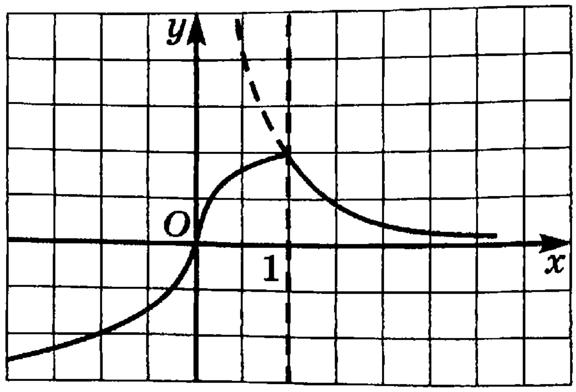


Рис. 9

Перечислим (опираясь на построенный график) свойства функции $y = f(x)$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) ни четная, ни нечетная;

3) убывает на луче $[1; +\infty)$; возрастает на луче $(-\infty; 1]$;

4) не ограничена снизу, ограничена сверху;

5) нет наименьшего значения, а $y_{\text{наиб}} = 1$ (достигается в точке $x = 1$);

6) непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; 1]$;

8) функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = 0$ и $x = 1$.

Отметим еще, что график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$; это означает, напомним, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ◁■

Пример 4. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt[4]{4x - 8}$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2 - 9}$;

в) $y = \sqrt{2x + 2} - \sqrt[6]{16 - x^2}$.

Решение. а) Под знаком корня четной степени должно находиться неотрицательное число, значит, задача сводится к решению неравенства $4x - 8 \geqslant 0$. Получаем: $x \geqslant 2$. Значит, $D(f) = [2; +\infty)$.

б) Под знаком корня нечетной степени может находиться любое число, значит, здесь на x не накладывается никаких ограничений, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

в) Выражение $\sqrt{2x+2}$ имеет смысл при условии $2x + 2 \geqslant 0$, а выражение $\sqrt[6]{16-x^2}$ — при условии $16 - x^2 \geqslant 0$. Значит, должны одновременно выполняться неравенства $2x + 2 \geqslant 0$ и $16 - x^2 \geqslant 0$, т. е. задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 2 \geqslant 0, \\ 16 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая неравенство $2x + 2 \geqslant 0$, находим: $x \geqslant -1$.

Решим неравенство $16 - x^2 \geqslant 0$. Разложим левую часть неравенства на множители: $(4 - x)(4 + x) \geqslant 0$. Левая часть неравенства

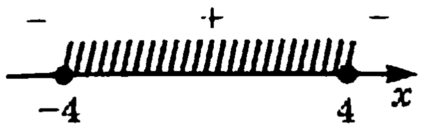


Рис. 10

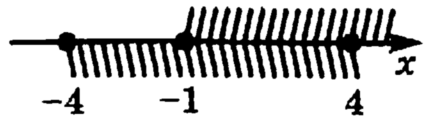


Рис. 11

обращается в нуль в точках −4 и 4. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 10). Числовая прямая разбивается указанными точками на три промежутка, причем на каждом промежутке выражение $p(x) = (4 - x)(4 + x)$ сохраняет постоянный знак (знаки указаны). Промежуток, на котором выполняется неравенство $p(x) > 0$, заштрихован. По условию задачи нас интересуют и те точки x, в которых выполняется равенство $p(x) = 0$. Таких точек две: $x = -4$, $x = 4$ — они на рисунке 10 отмечены темными кружочками. Таким образом, на рисунке 10 представлена геометрическая иллюстрация решения второго неравенства системы.

Отметим найденные решения первого и второго неравенств системы на одной координатной прямой, использовав для первого верхнюю, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 11). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы — отрезок $[-1; 4]$.

Итак, $D(f) = [-1; 4]$. ◼

Упражнения

Постройте график функции:

2.1. а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[6]{x}$; в) $y = \sqrt[4]{x}$; г) $y = \sqrt[5]{x}$.

2.2. а) $y = 2\sqrt[3]{x}$; в) $y = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$;

б) $y = -\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}$; г) $y = 3\sqrt[4]{x}$.

2.3. а) $y = \sqrt[4]{x+1}$; в) $y = \sqrt[7]{x+3}$;

б) $y = \sqrt[5]{x-2}$; г) $y = \sqrt[6]{x-4}$.

2.4. а) $y = \sqrt{x} + 2$; в) $y = \sqrt[5]{x} + 1$;

б) $y = \sqrt[3]{x} - 4$; г) $y = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{2}$.

О2.5. а) $y = \sqrt{x+2} - 3$; в) $y = \sqrt[4]{x-1} + 3$;

б) $y = \sqrt[3]{x-1} + 2$; г) $y = \sqrt[5]{x+4} - 4$.

2.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[4]{x}$:

а) на отрезке $[0; 1]$;
б) на полуинтервале $[1; 3)$;
в) на отрезке $[5; 16]$;
г) на луче $[16; +\infty)$.

2.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[5]{x}$:

а) на отрезке $[-1; 1]$;
б) на луче $(-\infty; 1]$;
в) на отрезке $[-32; 32]$;
г) на луче $[2; +\infty)$.

○2.8. Найдите точки пересечения графиков функций:

а) $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^2$;
б) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = |x|$;
в) $y = \sqrt[6]{x}$ и $y = x$;
г) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = -x - 2$.

○2.9. Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x} = -x$;
б) $\sqrt[3]{x} = 7 - 6x$;
в) $\sqrt[4]{x} = 2 - x$;
г) $\sqrt[5]{x} = -x^2$.

○2.10. Определите число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sqrt[4]{x}, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ 3y - 4x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \sqrt[5]{x}, \\ 6 - 2x - 3y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = \sqrt[6]{x}, \\ 5 + x - 2y = 0. \end{cases}$

Постройте и прочитайте график функции:

○2.11. $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt[4]{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○2.12. $y = \begin{cases} \dfrac{3}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○2.13. $y = \begin{cases} \sqrt[5]{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

ливо равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

***Теорема 2.* Если $a \geqslant 0$, $b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Краткая (хотя и неточная) формулировка, которую удобнее использовать на практике: *корень частного равен частному корней.*

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства теоремы 2, а вы попробуйте сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = x$ $\sqrt[n]{a} = y$ $\sqrt[n]{b} = z$	$x^n = \frac{a}{b}$ $y^n = a$ $z^n = b$	$x^n = \frac{y^n}{z^n}$ $x^n = \left(\frac{y}{z}\right)^n$ $x = \frac{y}{z}$
Доказать: $x = \frac{y}{z}$		

Вы, наверное, обратили внимание на то, что доказанные два свойства корней n-й степени представляют собой обобщение известных вам из курса алгебры 8-го класса свойств квадратных корней. И если бы других свойств корней n-й степени не было, то все было бы просто (и не очень интересно). На самом деле есть еще несколько интересных и важных свойств, которые мы обсудим в этом параграфе. Но сначала рассмотрим примеры, в которых применяются теоремы 1 и 2.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27}$.

Решение. Воспользовавшись первым свойством корней (теорема 1), получим:

$$\sqrt[3]{125 \cdot 64 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Замечание 3. Можно, конечно, этот пример решить по-другому, особенно если у вас под рукой есть микрокалькулятор: перемножить числа 125, 64 и 27, а затем извлечь кубический корень из полученного произведения. Но, согласитесь, данное выше решение «интеллигентнее».

Пример 2. Вычислить: $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

Решение. Обратим смешанное число $5\frac{1}{16}$ в неправильную дробь: $5\frac{1}{16} = 5 + \frac{1}{16} = \frac{81}{16}$. Воспользовавшись вторым свойством корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$.

б) $\sqrt[5]{96} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96 : 3} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Пример 4. Выполнить действия:

а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b}$; б) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a \cdot b \cdot b} = \sqrt[4]{ab^2}$.

б) Теорема 1 позволяет нам перемножать только корни одинаковой степени, т. е. только корни с одинаковым показателем. Здесь же предлагается умножить корень 2-й степени из числа a на корень 3-й степени из того же числа. Как это делать, мы пока не знаем. Вернемся к этому примеру позднее.

Продолжим изучение свойств радикалов.

Теорема 3. **Если $a \geqslant 0$, k — натуральное число и n — натуральное число, большее 1, то справедливо равенство**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Иными словами, *чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.*

Это следствие теоремы 1. В самом деле, например, для $k = 3$ получаем: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^3 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[n]{a^3}$. Точно так же можно рассуждать в случае любого другого натурального значения показателя k.

Теорема 4. **Если $a \geqslant 0$ и n, k — натуральные числа, большие 1, то справедливо равенство**

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Иными словами, *чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней.*

Например, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt{a}} = \sqrt[10]{a}$; $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

Доказательство. Как и в теореме 2, приведем краткую запись доказательства, а вы попробуйте самостоятельно сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = x$ $\sqrt[nk]{a} = y$	$x^n = \sqrt[k]{a}$ $(x^n)^k = a$ $y^{nk} = a$	$(x^n)^k = y^{nk}$ $x^{nk} = y^{nk}$ $x = y$
Доказать: $x = y$		

Замечание 4. Чему мы научились благодаря доказанным теоремам? Мы узнали, что над корнями можно осуществлять четыре операции: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня (из корня). А как обстоит дело со сложением и вычитанием корней? Никак. Об этом мы говорили еще в 8-м классе по поводу операции извлечения квадратного корня. Например, вместо $\sqrt[3]{8+27}$ нельзя написать $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$. В самом деле, $\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35}$, а $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2 + 3 = 5$. Но ведь очевидно, что $\sqrt[3]{35} \neq 5$. Будьте внимательны!

Самое, пожалуй, интересное свойство корней — это то, о котором пойдет речь в следующей теореме.

Теорема 5. **Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:**

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}. \tag{1}$$

Например:

$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 4);

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 3);

$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[10]{a^4}$ (показатели корня и подкоренного выражения умножили на 2).

Доказательство. Обозначим левую часть равенства (1) буквой x: $\sqrt[np]{a^{kp}} = x$. Тогда, по определению корня, должно выполняться равенство

$$x^{np} = a^{kp}. \tag{2}$$

Обозначим правую часть равенства (1) буквой y: $\sqrt[n]{a^k} = y$. Тогда, по определению корня, должно выполняться равенство $y^n = a^k$.

Возведем обе части последнего равенства в одну и ту же степень p; получим:

$$y^{np} = a^{kp}. \tag{3}$$

Итак (см. равенства (2) и (3)),

$$x^{np} = a^{kp}, \quad y^{np} = a^{kp}.$$

Сопоставляя эти два равенства, приходим к выводу, что $x^{np} = y^{np}$, а значит, $x = y$, что и требовалось доказать. ◀■

Доказанная теорема позволит нам решить ту проблему, с которой мы столкнулись выше при решении примера 4б, где требовалось выполнить умножение корней с разными показателями:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Вот как обычно рассуждают в подобных случаях.

1) По теореме 5 в выражении $\sqrt{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 2), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 3; получим:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}.$$

2) По теореме 5 в выражении $\sqrt[3]{a}$ можно и показатель корня (т. е. число 3), и показатель подкоренного выражения (т. е. число 1) умножить на одно и то же натуральное число. Воспользовавшись этим, умножим оба показателя на 2; получим:

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}.$$

3) Поскольку получили корни одной и той же 6-й степени, их можно перемножить:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5}.$$

Замечание 5. Вы не забыли, что все свойства корней, которые мы обсуждали в этом параграфе, рассмотрены нами только для случая, когда переменные принимают лишь неотрицательные значения? Почему пришлось сделать такое ограничение? Потому что корень n-й степени из отрицательного числа не всегда имеет смысл — он определен только для нечетных значений n. Для таких значений показателя корня рассмотренные свойства корней верны и в случае отрицательных подкоренных выражений.

Упражнения

Найдите значение числового выражения:

3.1. а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; в) $\sqrt[4]{625 \cdot 16}$;

б) $\sqrt[4]{16 \cdot 0{,}0001}$; г) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 243}$.

3.2. а) $\sqrt[5]{243 \cdot \frac{1}{32}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; в) $\sqrt[6]{64 \cdot \frac{1}{729}}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

3.3. а) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; б) $\sqrt[5]{48 \cdot 162}$; в) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$; г) $\sqrt[4]{54 \cdot 24}$.

3.4. а) $\sqrt[4]{\frac{125}{0{,}2}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{0{,}0625}}$; в) $\sqrt[3]{\frac{27}{0{,}125}}$; г) $\sqrt[6]{\frac{16}{0{,}25}}$.

3.5. а) $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$; в) $\sqrt[3]{0{,}2^3 \cdot 5^6}$;

б) $\sqrt[5]{0{,}2^{10} \cdot 10^{10}}$; г) $\sqrt[6]{36^3 \cdot 2^6}$.

3.6. а) $\sqrt[4]{\frac{7^8}{3^4}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{5^6}{3^9}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{3^{12}}{2^8}}$; г) $\sqrt[5]{\frac{5^5}{13^{10}}}$.

Упростите выражение, считая, что все переменные принимают только положительные значения:

3.7. а) $\sqrt[4]{x^2}$; б) $\sqrt[6]{y^4}$; в) $\sqrt[10]{a^5}$; г) $\sqrt[24]{n^{16}}$.

3.8. а) $\sqrt[4]{b^8}$; б) $\sqrt{l^6}$; в) $\sqrt[5]{d^{15}}$; г) $\sqrt[3]{t^{12}}$.

3.9. а) $\sqrt{a^2b^4}$; б) $\sqrt[3]{a^3b^6}$; в) $\sqrt[4]{a^4b^8}$; г) $\sqrt[5]{a^5b^{15}}$.

3.10. а) $\sqrt{\frac{49a^4}{169b^2}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8}{c^{12}}}$; в) $\sqrt[3]{\frac{27a^6}{64b^3}}$; г) $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}b^{10}}{243c^{15}}}$.

Вычислите:

3.11. а) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$; в) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$;

б) $\sqrt[3]{135} \cdot \sqrt[3]{25}$; г) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{486}$.

3.12. а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}$; в) $\frac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{1024}}{\sqrt[4]{4}}$.

3.13. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27}$; б) $\sqrt[5]{2^5 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3}$.

Приведите радикалы к одинаковому показателю корня:

3.14. а) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[6]{3}$; в) $\sqrt[4]{7}$ и $\sqrt[12]{8}$;

б) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{9}$; г) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[5]{2}$.

3.15. а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{7}$; в) $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{17}$ и $\sqrt[8]{40}$;

б) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{4}$; г) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[15]{100}$.

О3.16. Сравните числа:

а) $\sqrt[4]{26}$ и $\sqrt{5}$; в) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{47}$;

б) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; г) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[3]{3}$.

Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$:

3.17. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$; в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$;

б) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$; г) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{3}$.

О3.18. а) $\sqrt[4]{3b^3} \cdot \sqrt{3b}$; в) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}$;

б) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt[6]{4a^5}$; г) $\sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[6]{3y^3}$.

О3.19. а) $\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[6]{4ab}$; в) $\sqrt[6]{5ab^2} \cdot \sqrt[3]{5a^3b^4}$;

б) $\sqrt[5]{a^4b^3} \cdot \sqrt[10]{a^5b^2}$; г) $\sqrt[8]{6xz} \cdot \sqrt[6]{xz^5}$.

О3.20. а) $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a}$; в) $\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[4]{a}$;

б) $\sqrt[12]{a^2b^3} : \sqrt[6]{ab^4}$; г) $\sqrt[4]{a^3b^5} : \sqrt[5]{ab}$.

Возведите в степень:

3.21. а) $(\sqrt{3})^2$; б) $(\sqrt[n]{a})^n$; в) $(\sqrt[5]{7})^5$; г) $(\sqrt[p]{b})^p$.

3.22. а) $(2\sqrt{5})^4$; б) $\left(b \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{b}}\right)^{2n}$; в) $\left(3 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^5$; г) $\left(\frac{1}{b}\sqrt[p]{b}\right)^{2p}$.

3.23. Возведите в степень:

а) $\left(\sqrt[3]{3a}\right)^9$; б) $\left(5a \cdot \sqrt[3]{a}\right)^2$; в) $\left(-5 \cdot \sqrt[3]{a^2}\right)^2$; г) $\left(2\sqrt[3]{-3a^2}\right)^5$.

3.24. Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}$; г) $\sqrt{\sqrt[3]{ab}}$.

О3.25. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5x} + 13 + \frac{\sqrt[3]{5x}}{5} = 2\sqrt[3]{5x}$;

б) $\sqrt[4]{2x} + \sqrt[4]{32x} + \sqrt[4]{162x} = 6$.

О3.26. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{6 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6 - 2\sqrt{5}}$; в) $\sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$;

б) $\sqrt[5]{6 - 2\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{6 + 2\sqrt{17}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{17} + 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} - 3}$.

О3.27. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} = 0$; в) $\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} - 1 = 0$;

б) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$; г) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x} - 3 = 0$.

О3.28. Докажите, что $2f(x) = f(128x)$, если $f(x) = \sqrt[7]{x}$.

О3.29. Докажите, что $2f(x) = f(32x)$, если $f(x) = 2\sqrt[5]{x}$.

О3.30. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[4]{(x-2)^4}$; в) $y = \sqrt[3]{(x+1)^3}$;

б) $y = \sqrt[5]{(2-x)^5}$; г) $y = \sqrt[6]{(3-x)^6}$.

§ 4. Преобразование выражений, содержащих радикалы

В предыдущих параграфах мы познакомились с операцией извлечения корня n-й степени из действительного числа, изучили свойства этой операции, а именно (для неотрицательных значений a и b):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \quad \left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a; \qquad (1)$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad (2)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \qquad (3)$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad (4)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \qquad (5)$$

$$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}. \qquad (6)$$

Используя эти формулы, можно осуществлять преобразования выражений, содержащих операцию извлечения корня (выражений с радикалами), — такие выражения называют *иррациональными*. Рассмотрим несколько примеров на преобразования иррациональных выражений.

Пример 1. Упростить выражения:

а) $\sqrt[4]{32a^5}$; б) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5$.

Решение. а) Представим подкоренное выражение $32a^5$ в виде $16 \cdot a^4 \cdot 2a$ и воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[4]{32a^5} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{2a} = 2a\sqrt[4]{2a}.$$

Полученное выражение считается более простым, чем заданное, поскольку под знаком корня содержится более простое выражение. Подобное преобразование называют *вынесением множителя за знак радикала.*

б) Воспользовавшись формулой (4), получим:

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5 = \sqrt[3]{\left(a^2\right)^5} = \sqrt[3]{a^{10}}.$$

Представим подкоренное выражение a^{10} в виде $a^9 \cdot a$ и воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Как видите, и здесь удалось вынести множитель за знак радикала.

Вспомните формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, которую вы изучали в курсе алгебры 8-го класса. Она обобщается на случай любого четного показателя корня:

$$\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.}$$

Эту формулу следует иметь в виду в тех случаях, когда нет уверенности в том, что переменные принимают только неотрицательные значения. Например, вынося множитель за знак корня в выражении $\sqrt[4]{x^4y}$, следует (если о знаке числа x ничего не известно) рассуждать так:

$$\sqrt[4]{x^4y}=\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{y}=|x|\cdot\sqrt[4]{y}.$$

Наряду с вынесением множителя за знак радикала используется и противоположное преобразование: *внесение множителя под знак радикала*. Это преобразование мы используем в следующих двух примерах.

Пример 2. Сравнить числа $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$.

Решение. Имеем: $2=\sqrt[3]{8}$; $3=\sqrt[3]{27}$. Значит,

$$2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\cdot 8}=\sqrt[3]{24};$$

$$3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{54}.$$

Ясно, что $\sqrt[3]{24}<\sqrt[3]{54}$, т. е. $2\sqrt[3]{3}<3\sqrt[3]{2}$.

Пример 3. Упростить выражение $\sqrt[4]{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Сначала внесем множитель x^2 под знак корня 3-й степени:

$$x^2\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^6\cdot x}=\sqrt[3]{x^7}.$$

Теперь заданное выражение можно записать так: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}$.

Воспользовавшись формулой (5), мы можем последнее выражение записать в виде $\sqrt[12]{x^7}$.

Итак, $\sqrt[4]{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}=\sqrt[12]{x^7}$.

Пример 4. Выполнить действия:

а) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$;

б) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$.

Решение. а) Здесь можно применить формулу разности квадратов:

$$\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)=\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-\left(\sqrt[4]{b}\right)^2=\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{b^2}.$$

Воспользовавшись формулой (6), разделим в каждом из полученных радикалов показатели корня и подкоренного выражения на 2, что существенно упростит запись: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Итак, $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

б) Здесь можно применить формулу разности кубов:

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a-b.$$

Пример 5. Выполнить действия:

а) $\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^{11}}$; б) $\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{4\sqrt{5}+9}$.

Решение. а) Поскольку перемножать можно корни только одной и той же степени, начнем с уравнивания показателей у имеющихся радикалов. Для этого дважды воспользуемся формулой (6):

$$\sqrt[8]{x^3}=\sqrt[8\cdot 3]{x^{3\cdot 3}}=\sqrt[24]{x^9};\qquad \sqrt[12]{x^{11}}=\sqrt[12\cdot 2]{x^{11\cdot 2}}=\sqrt[24]{x^{22}}.$$

А теперь воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[24]{x^9}\cdot\sqrt[24]{x^{22}}=\sqrt[24]{x^9\cdot x^{22}}=\sqrt[24]{x^{31}}.$$

Осталось вынести множитель за знак радикала:

$$\sqrt[24]{x^{31}}=\sqrt[24]{x^{24}\cdot x^7}=\sqrt[24]{x^{24}}\cdot\sqrt[24]{x^7}=|x|\sqrt[24]{x^7}.$$

В условии примера содержатся выражения $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[12]{x^{11}}$. Значит, предполагается, что $x\geqslant 0$ (при $x<0$ в обоих случаях под знаком корня четной степени будет отрицательное число). Но тогда $|x|=x$ и, следовательно, $|x|\sqrt[24]{x^7}=x\sqrt[24]{x^7}$.

б) Первый способ. Преобразуем первый множитель так, чтобы получился корень 4-й степени:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+2^2}=$$
$$=\sqrt[4]{5-4\sqrt{5}+4}=\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}.$$

Теперь нетрудно выполнить умножение радикалов:

$$\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=$$

$$=\sqrt[4]{9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[4]{81-80}=1.$$

Второй способ. Сначала поработаем с подкоренным выражением во втором множителе:

$$9+4\sqrt{5}=5+4\sqrt{5}+4=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\cdot2\cdot\sqrt{5}+2^2=\left(\sqrt{5}+2\right)^2.$$

Значит, $\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}$. Разделив показатели корня и подкоренного выражения на 2, получим: $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ (формулой (6) мы здесь имеем право пользоваться, поскольку подкоренное выражение $\sqrt{5}+2$ — положительное число). Осталось выполнить умножение квадратных корней:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=\sqrt{5-4}=1.$$

Ответ: а) $x\sqrt[24]{x^7}$; б) 1.

Пример 6. Разложить на множители выражение

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}.$$

Решение. Заданное выражение можно переписать следующим образом:

$$\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^2-2\sqrt[5]{x^2}\cdot2\sqrt[5]{y}+\left(2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Теперь видно, что это полный квадрат — квадрат разности выражений $\sqrt[5]{x^2}$ и $2\sqrt[5]{y}$. Значит,

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}=\left(\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Пример 7. Сократить дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

Решение. Первый способ. Знаменатель дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-2\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}+\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2.$$

В числителе получаем:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{y^2} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{y}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right).$$

Теперь выполним сокращение заданной дроби:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)^2} = \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}.$$

<u>Второй способ</u>. Введем новые переменные: $\sqrt[4]{x} = a$, $\sqrt[4]{y} = b$; учтем, что при этом $\sqrt{x} = a^2$, $\sqrt{y} = b^2$. Тогда заданная дробь примет вид $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$.

Что дала нам замена переменных? Она позволила заменить иррациональное выражение (с переменными x и y) рациональным выражением (с переменными a и b). А оперировать с рациональными выражениями намного проще, чем с иррациональными. Имеем:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a - b)^2} = \frac{a + b}{a - b} = \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}.$$ ◀■

Упражнения

Вынесите множитель из-под знака корня:

4.1. а) $\sqrt{20}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{108}$; г) $\sqrt{245}$.

4.2. а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[4]{160}$; в) $\sqrt[3]{512}$; г) $\sqrt[4]{486}$.

Вынесите множитель из-под знака корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения:

4.3. а) $\sqrt{x^3}$; б) $\sqrt[3]{a^4}$; в) $\sqrt[5]{m^7}$; г) $\sqrt[4]{n^{13}}$.

4.4. а) $\sqrt{25a^3}$; б) $\sqrt[4]{405a^5}$; в) $\sqrt[3]{24x^3}$; г) $\sqrt[5]{160m^{10}}$.

4.5. а) $\sqrt{75t^4r^3}$; в) $\sqrt[3]{250x^4y^7}$;

б) $\frac{x^2}{b}\sqrt[3]{\frac{72a^4b^3}{343x^3}}$; г) $3mn\sqrt[4]{\frac{80x^3}{243m^5n^9}}$.

Теперь нетрудно выполнить умножение радикалов:

$$\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=$$
$$=\sqrt[4]{9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[4]{81-80}=1.$$

Второй способ. Сначала поработаем с подкоренным выражением во втором множителе:

$$9+4\sqrt{5}=5+4\sqrt{5}+4=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+2^2=\left(\sqrt{5}+2\right)^2.$$

Значит, $\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}$. Разделив показатели корня и подкоренного выражения на 2, получим: $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ (формулой (6) мы здесь имеем право пользоваться, поскольку подкоренное выражение $\sqrt{5}+2$ — положительное число). Осталось выполнить умножение квадратных корней:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=\sqrt{5-4}=1.$$

Ответ: а) $x\sqrt[24]{x^7}$; б) 1.

Пример 6. Разложить на множители выражение

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}.$$

Решение. Заданное выражение можно переписать следующим образом:

$$\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^2-2\sqrt[5]{x^2}\cdot 2\sqrt[5]{y}+\left(2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Теперь видно, что это полный квадрат — квадрат разности выражений $\sqrt[5]{x^2}$ и $2\sqrt[5]{y}$. Значит,

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}=\left(\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Пример 7. Сократить дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

Решение. Первый способ. Знаменатель дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}=$$
$$=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-2\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}+\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2.$$

В числителе получаем:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Теперь выполним сокращение заданной дроби:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

<u>Второй способ</u>. Введем новые переменные: $\sqrt[4]{x}=a$, $\sqrt[4]{y}=b$; учтем, что при этом $\sqrt{x}=a^2$, $\sqrt{y}=b^2$. Тогда заданная дробь примет вид $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

Что дала нам замена переменных? Она позволила заменить иррациональное выражение (с переменными x и y) рациональным выражением (с переменными a и b). А оперировать с рациональными выражениями намного проще, чем с иррациональными. Имеем:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

Упражнения

Вынесите множитель из-под знака корня:

4.1. а) $\sqrt{20}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{108}$; г) $\sqrt{245}$.

4.2. а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[4]{160}$; в) $\sqrt[3]{512}$; г) $\sqrt[4]{486}$.

Вынесите множитель из-под знака корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения:

4.3. а) $\sqrt{x^3}$; б) $\sqrt[3]{a^4}$; в) $\sqrt[5]{m^7}$; г) $\sqrt[4]{n^{13}}$.

4.4. а) $\sqrt{25a^3}$; б) $\sqrt[4]{405a^5}$; в) $\sqrt[3]{24x^3}$; г) $\sqrt[5]{160m^{10}}$.

4.5. а) $\sqrt{75t^4r^3}$; в) $\sqrt[3]{250x^4y^7}$;

б) $\frac{x^2}{b}\sqrt[3]{\frac{72a^4b^3}{343x^3}}$; г) $3mn\sqrt[4]{\frac{80x^3}{243m^5n^9}}$.

Теперь нетрудно выполнить умножение радикалов:

$$\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=$$

$$=\sqrt[4]{9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[4]{81-80}=1.$$

<u>Второй способ</u>. Сначала поработаем с подкоренным выражением во втором множителе:

$$9+4\sqrt{5}=5+4\sqrt{5}+4=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+2^2=\left(\sqrt{5}+2\right)^2.$$

Значит, $\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}$. Разделив показатели корня и подкоренного выражения на 2, получим: $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ (формулой (6) мы здесь имеем право пользоваться, поскольку подкоренное выражение $\sqrt{5}+2$ — положительное число). Осталось выполнить умножение квадратных корней:

$$\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+2}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=\sqrt{5-4}=1.$$

Ответ: а) $x^2\sqrt[4]{x^7}$; б) 1.

Пример 6. Разложить на множители выражение

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}.$$

Решение. Заданное выражение можно переписать следующим образом:

$$\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^2-2\sqrt[5]{x^2}\cdot 2\sqrt[5]{y}+\left(2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Теперь видно, что это полный квадрат — квадрат разности выражений $\sqrt[5]{x^2}$ и $2\sqrt[5]{y}$. Значит,

$$\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2y}+4\sqrt[5]{y^2}=\left(\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{y}\right)^2.$$

Пример 7. Сократить дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$.

Решение. <u>Первый способ</u>. Знаменатель дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt[4]{y^2}=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-2\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}+\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2.$$

В числителе получаем:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-\left(\sqrt[4]{y}\right)^2=\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right).$$

Теперь выполним сокращение заданной дроби:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

Второй способ. Введем новые переменные: $\sqrt[4]{x}=a$, $\sqrt[4]{y}=b$; учтем, что при этом $\sqrt{x}=a^2$, $\sqrt{y}=b^2$. Тогда заданная дробь примет вид $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

Что дала нам замена переменных? Она позволила заменить иррациональное выражение (с переменными x и y) рациональным выражением (с переменными a и b). А оперировать с рациональными выражениями намного проще, чем с иррациональными. Имеем:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

Упражнения

Вынесите множитель из-под знака корня:

4.1. а) $\sqrt{20}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{108}$; г) $\sqrt{245}$.

4.2. а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[4]{160}$; в) $\sqrt[3]{512}$; г) $\sqrt[4]{486}$.

Вынесите множитель из-под знака корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения:

4.3. а) $\sqrt{x^3}$; б) $\sqrt[3]{a^4}$; в) $\sqrt[5]{m^7}$; г) $\sqrt[4]{n^{13}}$.

4.4. а) $\sqrt{25a^3}$; б) $\sqrt[4]{405a^5}$; в) $\sqrt[3]{24x^3}$; г) $\sqrt[5]{160m^{10}}$.

4.5. а) $\sqrt{75t^4r^3}$; в) $\sqrt[3]{250x^4y^7}$;

б) $\frac{x^2}{b}\sqrt[3]{\frac{72a^4b^3}{343x^3}}$; г) $3mn\sqrt[4]{\frac{80x^3}{243m^5n^9}}$.

О4.6. Вынесите множитель из-под знака корня, считая, что переменные могут принимать как положительные, так и отрицательные значения:

а) $\sqrt{a^2b}$; б) $\sqrt[3]{a^3b}$; в) $\sqrt[4]{a^4b}$; г) $\sqrt{a^5b}$.

Внесите множитель под знак корня:

4.7. а) $2\sqrt{5}$; б) $6\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$; в) $5\sqrt{3}$; г) $3\sqrt[4]{2\frac{5}{27}}$.

4.8. а) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$; в) $1\frac{2}{5}\sqrt{3\frac{4}{7}}$; г) $0{,}2\sqrt[3]{25}$.

4.9. Внесите множитель под знак корня, считая, что переменные принимают только неотрицательные значения:

а) $7a^2\sqrt{ab}$; б) $5ab^2\sqrt[3]{a^2b}$; в) $5x\sqrt{2x}$; г) $2m\sqrt[3]{3m^2}$.

О4.10. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3}$; в) $2\sqrt[5]{64} + \sqrt[5]{486}$;

б) $2\sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{384}$; г) $\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{2}$.

О4.11. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{18}$; в) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$;

б) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{40}$; г) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[3]{2}$.

Выполните действия:

4.12. а) $(\sqrt[3]{m} - 2\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n})$; в) $(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})$;

б) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt[3]{5})$; г) $(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{2} - \sqrt[3]{4})$.

4.13. а) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$;

б) $(3 + \sqrt[4]{a})(9 - 3\sqrt[4]{a} + \sqrt{a})$;

в) $(2\sqrt{p} + \sqrt{q})(4p - 2\sqrt{pq} + q)$;

г) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}\right)$.

4.14. а) $\left(\sqrt[3]{m}-2\sqrt[3]{n}\right)^2$;

в) $\left(a^2-\sqrt{a}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}\right)^2$;

г) $\left(\sqrt[3]{4}+2\sqrt{2}\right)^2$.

○4.15. а) $(a-b):\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$;

в) $(m-n):\left(\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}\right)$;

б) $(k+l):\left(\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{l}\right)$;

г) $(x-4y):\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)$.

Сократите дроби, считая, что переменные принимают неотрицательные значения.

○4.16. а) $\dfrac{\sqrt{10b}-\sqrt{15}}{\sqrt{15b}-\sqrt{5}}$;

в) $\dfrac{\sqrt[4]{14}+\sqrt[4]{21k}}{\sqrt[4]{7k}-\sqrt[4]{14}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{xy}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{ad}}{\sqrt[4]{3a}-\sqrt[4]{a^2d}}$.

○4.17. а) $\dfrac{\sqrt{a}-2\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

в) $\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab^2}+b}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{m}+2\sqrt[3]{n}}{4\sqrt[3]{n^2}+4\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{m^2}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{b}+2a\sqrt[4]{a^2b}+a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$.

○4.18. а) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}$;

г) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$.

Преобразуйте заданное выражение к виду $\sqrt[n]{A}$:

○4.19. а) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2m^4n^8}}$;

в) $\sqrt[5]{4\sqrt[3]{k^2l^5}}$;

б) $\sqrt{y\sqrt[5]{9x^4y^2}}$;

г) $\sqrt[7]{q\sqrt[5]{2p^3q}}$.

○4.20. а) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}$;

б) $\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{4}{3}}}}$;

г) $\sqrt{3\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}}$.

О4.21. Упростите выражение:

а) $\sqrt{50} - \sqrt[3]{3} - 6\sqrt{2} + \sqrt[3]{24} + \sqrt{8}$;

б) $6\sqrt[4]{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{9xy} - \sqrt[8]{x^2} + \frac{7}{x}\sqrt{x^3y}$.

О4.22. Сравните числа:

а) $-\sqrt[5]{2\sqrt[4]{10}}$ и $-\sqrt[4]{\sqrt[5]{99}}$;

б) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ и $\sqrt[3]{5}$;

в) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$;

г) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ и $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

О4.23. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$, $\sqrt[6]{100}$;

б) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt[10]{25}$;

в) $\sqrt[5]{3\sqrt{4}}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}$;

г) $\sqrt[16]{64}$, $\sqrt[48]{7\sqrt{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$.

О4.24. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{4 - 3\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8}\right)^2}$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24} + \sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}$;

б) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt{3}\right)^2}{\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[6]{3} + 1}$;

г) $\dfrac{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}{\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45}\right)^2}$.

Выполните действия:

О4.25. а) $(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 - \sqrt[4]{a})$;

б) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})$.

О4.26. а) $\left(\sqrt[3]{9a^2x} - 2\sqrt[3]{3abx} + \sqrt[3]{b^2x}\right) : \left(\sqrt[3]{3a} - \sqrt[3]{b}\right)$;

б) $\left(\sqrt[3]{16x^2} - \sqrt[3]{25y^2}\right) : \left(\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{5y}\right)$.

О4.27. Разложите на множители:

а) $\sqrt{2x} - \sqrt{3y} + \sqrt{2y} - \sqrt{3x}$;

б) $\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{y^3} - \sqrt[4]{2y^3}$;

в) $\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}$;

г) $b\sqrt{a} - ab + \sqrt{ab} - ab\sqrt{b}$.

○**4.28.** Разложите на множители:

а) $\sqrt[4]{m} - \sqrt[8]{m} - 6$;

б) $\sqrt{m} + 5\sqrt[4]{m} + 6$;

в) $\sqrt[5]{a} + 7\sqrt[10]{a} + 12$;

г) $2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 1$.

○**4.29.** Сократите дробь:

а) $\dfrac{6\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 1}{2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}$;

б) $\dfrac{3\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} - 2}{9\sqrt{x} - 1}$.

○**4.30.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt[4]{a}}{(a + b) \cdot \sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a}}} - \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$;

б) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n}\right)^2}{2(m - n)} : \dfrac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}$.

●**4.31.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$;

б) $\dfrac{x + 8}{\sqrt[3]{x} + 2} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 25}{\sqrt[3]{x} + 5} = 5$.

§ 5. Обобщение понятия о показателе степени

Вы умеете вычислять значение степени с любым целочисленным показателем, руководствуясь при этом следующими определениями:

1) если $n = 1$, то $a^1 = a$;

2) если $n = 0$ и $a \neq 0$, то $a^0 = 1$;

3) если $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n множителей);

4) если $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ и $a \neq 0$, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

В этом параграфе мы обсудим, какой смысл придается в математике понятию степени с дробным показателем, т. е. выясним, что означают такие символы математического языка, как $2^{\frac{3}{5}}$, $3^{-0,3}$ и т. д.

Зададимся вопросом: если вводить символ $2^{\frac{3}{5}}$, то каким математическим содержанием его наполнить? Хорошо бы, рассуждали математики, чтобы сохранялись привычные свойства степеней, например, чтобы при возведении степени в степень показатели перемножались, в частности, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 2^3 \qquad (1)$$

(поскольку $\frac{3}{5} \cdot 5 = 3$). Пусть $a = 2^{\frac{3}{5}}$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде $a^5 = 2^3$, откуда получаем: $a = \sqrt[5]{2^3}$. Значит, появилось основание определить $2^{\frac{3}{5}}$ как $\sqrt[5]{2^3}$. Вероятно, подобные соображения и привели математиков к следующему определению.

> ***Определение 1.*** Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a \geqslant 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$:

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},\ a \geqslant 0.}$$

Например, $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$ и т. д.

Это определение оказалось удивительно удачным. При нем сохранились *все* привычные свойства степеней, которые были доказаны для натуральных показателей: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются и т. д. Пусть, например, нам нужно выполнить умножение $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$. Поскольку $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, то задача сводится к умножению радикалов:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}.$$

Итак, $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$. Но, между прочим, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, т. е. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$.

Поскольку складывать дроби легче, чем применять свойства радикалов, на практике во многих случаях предпочитают заменять радикалы степенями с дробными показателями. Для иллюстрации этого положения вернемся к примеру 5а из § 4: $\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}}$. Если перейти к дробным показателям, то получим:

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}.$$

Видите, насколько быстрее и проще мы получили здесь тот же результат, что и в § 4.

Пример 1. Вычислить:

а) $64^{\frac{1}{6}}$; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $0^{\frac{51}{4}}$; г) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. а) $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2.$

б) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9.$

в) $0^{\frac{51}{4}} = \sqrt[4]{0^{51}} = \sqrt[4]{0} = 0.$

г) Это задание некорректно, поскольку нет определения степени с дробным показателем для случая *отрицательного* основания. По определению 1 возводить в дробные степени можно *только неотрицательные числа.* Так что запись вида $(-8)^{\frac{1}{3}}$ считается в математике лишенной смысла. ◁■

Замечание. Иногда приходится слышать возражения: неверно, что запись $(-8)^{\frac{1}{3}}$ лишена смысла, ведь $\sqrt[3]{-8} = -2$ — верное равенство. Так почему бы не считать, что $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$? Если бы математики не запретили себе возводить в дробные степени отрицательные числа, то вот, например, с какой неприятностью пришлось бы столкнуться:

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Получилось «равенство» $-2 = 2$. Выбирая определения, математики как раз и заботятся о том, чтобы все было точно, определенно, недвусмысленно. Поэтому в определении степени с нулевым показателем a^0 появилось ограничение $a \neq 0$, а в определении степени с положительным дробным показателем $a^{\frac{p}{q}}$ появилось ограничение $a \geqslant 0$.

Определение 2. Если $\frac{p}{q}$ — обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$:

$$\boxed{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, \quad a > 0.}$$

Например, $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^5}}$ и т. д.

Итак, теперь мы знаем, что такое степень с любым рациональным показателем. Справедливы следующие свойства (мы считаем, что $a > 0$, $b > 0$, s и t — произвольные рациональные числа):

1) $^2a^s \cdot a^t = a^{s+t}$;

2) $a^s : a^t = a^{s-t}$;

3) $(a^s)^t = a^{st}$;

4) $(ab)^s = a^s \cdot b^s$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^s = \dfrac{a^s}{b^s}$.

Частичные обоснования указанных свойств были сделаны выше, этим мы и ограничимся.

Пример 2. Упростить выражение

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{xy} - \frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}.$$

Решение.

1) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt[3]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$;

3) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}} = \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = y^{\frac{2}{3}}$;

4) $\left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $x^{\frac{2}{3}}$.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $\sqrt[3]{x^2} = 1$; б) $x^{\frac{2}{3}} = 1$.

Решение. а) Возведя обе части уравнения в куб, получим:

$$x^2 = 1;$$
$$x = \pm 1.$$

б) Это практически то же самое уравнение, что и в пункте а), но с одной существенной оговоркой: поскольку переменная x возводится в дробную степень, она по определению должна принимать только неотрицательные значения. Значит, из найденных выше двух значений x в качестве корня уравнения мы имеем право взять лишь значение $x = 1$.

Ответ: а) ± 1; б) 1.

Пример 4. Решить уравнение $x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} - 8 = 0$.

Решение. Введем новую переменную $y = x^{-\frac{1}{3}}$. Тогда $x^{-\frac{2}{3}} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2 = y^2$. Получаем квадратное уравнение относительно новой переменной y

$$y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Решим это уравнение: $y_1 = -2$, $y_2 = 4$.

Теперь задача сводится к решению двух уравнений:

$$x^{-\frac{1}{3}} = -2; \quad x^{-\frac{1}{3}} = 4.$$

Первое уравнение не имеет корней, поскольку (напомним еще раз) область допустимых значений для переменной x в подобных случаях определяется условием $x > 0$, а тогда и $x^{-\frac{1}{3}} > 0$. Решая второе уравнение, последовательно находим:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 4; \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}; \quad \sqrt[3]{x} = \frac{1}{4};$$

$$x = \left(\frac{1}{4}\right)^3; \quad x = \frac{1}{64}.$$

Ответ: $\frac{1}{64}$.

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или возводится в дробную степень, называют *иррациональными*. Первое знакомство с иррациональными уравнениями состоялось у вас в курсе алгебры для 8-го класса, где встречались уравнения, содержащие переменную под знаком квадратного корня. В этой главе мы рассмотрели еще несколько примеров решения иррациональных уравнений — пример 2 из § 1, пример 2 из § 2 и примеры 3, 4 из § 5.

Назовем основные методы решения иррациональных уравнений:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) метод введения новых переменных;

3) функционально-графический метод.

Если используется метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень, то возможно появление посторонних корней, значит, обязательна проверка всех найденных решений — об этом мы говорили и раньше, в курсе алгебры для 8-го класса.

Упражнения

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

5.1. а) $c^{\frac{3}{4}}$; б) $p^{5\frac{1}{2}}$; в) $x^{\frac{3}{4}}$; г) $y^{2\frac{2}{3}}$.

5.2. а) $0{,}2^{0{,}5}$; б) $t^{0{,}8}$; в) $b^{1{,}5}$; г) $8{,}5^{0{,}6}$.

Представьте заданное выражение в виде степени с рациональным показателем:

5.3. а) $\sqrt{1{,}3}$; б) $\sqrt[7]{\frac{3}{5}}$; в) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt[8]{4{,}3}$.

5.4. а) $\sqrt[5]{b^4}$; б) $\sqrt[3]{a^2}$; в) $\sqrt[11]{c^2}$; г) $\sqrt[5]{a}$.

Вычислите:

5.5. а) $49^{\frac{1}{2}}$; б) $1000^{\frac{1}{3}}$; в) $27^{\frac{1}{3}}$; г) $25^{\frac{1}{2}}$.

О5.6. а) $9^{2\frac{1}{2}}$; б) $0{,}16^{1\frac{1}{2}}$; в) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$; г) $0{,}001^{\frac{2}{3}}$.

5.7. Представьте выражение в виде степени и найдите его значение при заданном значении переменной:

а) $\dfrac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ при $a = 6$;

б) $\dfrac{b^{-9}}{(b^2)^{-3}}$ при $b = \dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{p^{-9}}{p^{-2} \cdot p^{-6}}$ при $p = \dfrac{1}{2}$;

г) $(t^{-3})^2 \cdot \dfrac{1}{t^{-5}}$ при $t = 0{,}1$.

Вычислите:

5.8. а) $(27 \cdot 3^{-4})^2$; б) $16 \cdot (2^{-3})^2$.

5.9. а) $\dfrac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{6^{-12}}$; б) $\dfrac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$.

О5.10. а) $\dfrac{5^4 \cdot 49^{-3}}{7^{-7} \cdot 25^3}$; б) $\dfrac{81^{12} \cdot 10^{-7}}{10^{-5} \cdot 27^{17}}$.

5.11. Представьте заданное выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $\sqrt{b^{-1}}$; б) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{-3}}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}$.

5.12. Вычислите:

а) $4^{-\frac{1}{2}}$; б) $8^{-\frac{1}{3}}$; в) $32^{-\frac{1}{5}}$; г) $16^{-\frac{1}{4}}$.

5.13. Имеет ли смысл выражение:

а) $5^{-\frac{4}{3}}$; б) $(-16)^{\frac{2}{3}}$; в) $23^{-\frac{3}{2}}$; г) $(-25)^{-\frac{1}{2}}$?

5.14. Сравните:

а) $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$; в) $5^{\frac{1}{2}}$ и $5^{\frac{1}{3}}$;

б) $0{,}3^{\frac{1}{2}}$ и $0{,}5^{\frac{1}{2}}$; г) $7^{\frac{1}{3}}$ и $7^{\frac{2}{6}}$.

Упростите выражение:

5.15. а) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$; б) $b^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$; в) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}$; г) $d^{5} \cdot d^{\frac{1}{2}}$.

5.16. а) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{2}}$; б) $y^{-\frac{5}{6}} : y^{\frac{1}{3}}$; в) $z^{\frac{1}{5}} : z^{-\frac{1}{2}}$; г) $m^{\frac{1}{3}} : m^{2}$.

5.17. а) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$; г) $\left(p^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{9}}$.

5.18. а) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$; б) $y^{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{y^{2}}$; в) $z^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{z}$; г) $\sqrt[4]{c^{3}} \cdot c^{\frac{1}{4}}$.

○**5.19.** а) $\left(a^{0{,}4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{0{,}8}$; в) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{17}{4}}$;

б) $\sqrt[10]{c} \cdot \left(c^{-1{,}2}\right)^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(b^{0{,}8}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1{,}5}$.

Найдите значение выражения:

○**5.20.** а) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{0{,}1}$; в) $49^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{12}} \cdot 7^{-\frac{3}{4}}$;

б) $2^{1{,}3} \cdot 2^{-0{,}7} \cdot 4^{0{,}7}$; г) $25^{0{,}3} \cdot 5^{1{,}4} \cdot 625^{0{,}25}$.

○**5.21.** а) $4^{0{,}6} \cdot 2^{0{,}2} : 2^{-0{,}6}$; в) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{1\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{1}{3}}$;

б) $3 \cdot 9^{0{,}4} : \sqrt[5]{3^{-1}}$; г) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} : \sqrt[3]{2}$.

О5.22. Вычислите:

а) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$;   в) $\left(\frac{1}{36} \cdot 0{,}04\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(\frac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$;   г) $\left(5^{-3} \cdot \frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Упростите выражение:

О5.23. а) $\left(m^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}$;   в) $\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\left(8x^{-1\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$;   г) $(81x^{-4})^{-\frac{3}{4}}$.

О5.24. а) $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}$;   в) $\dfrac{\left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^{-4}}{c^{\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{1}{2}}}$;

б) $\dfrac{y^{\frac{6}{7}} \cdot \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}}{\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{-2}}$;   г) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{5}}}\right)^{20}$.

Представьте выражение в виде суммы:

5.25. а) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;   в) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{4}}\right)$;

б) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$;   г) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$.

5.26. а) $\left(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;   в) $\left(1 + b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

б) $\left(1 - c^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$;   г) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$.

5.27. Раскройте скобки:

а) $\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 3\right)$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b\right)$;

в) $\left(d^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(d^{\frac{1}{2}} + 1\right)$;

г) $\left(p^{\frac{1}{3}} - q^{\frac{1}{3}}\right)\left(p^{\frac{2}{3}} + (pq)^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{2}{3}}\right)$.

Сократите дробь:

5.28. а) $\dfrac{4\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}-3}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; в) $\dfrac{x+x^{\frac{1}{2}}}{2x}$; г) $\dfrac{p^{\frac{1}{2}}-5}{p-25}$.

○5.29. а) $\dfrac{c+c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c^{\frac{3}{2}}-d^{\frac{3}{2}}}$; б) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$.

Упростите выражение:

○5.30. а) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^2-2c^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(m^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{3}}\right)^2+2m^{\frac{7}{12}}$; г) $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\left(b^{\frac{1}{4}}+c^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

○5.31. а) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

б) $\left(a^{\frac{3}{2}}+5a^{\frac{1}{2}}\right)^2-10a^2$.

○5.32. а) $\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$;

б) $\left(k^{\frac{1}{4}}+l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}+l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}-l^{\frac{1}{8}}\right)$.

○5.33. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\sqrt{y}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$.

§ 6. Степенные функции, их свойства и графики

Обычно *степенными функциями* называют функции вида $y = x^r$, где r — любое действительное число. В этом параграфе мы ограничимся случаем рационального показателя r.

Целый ряд таких функций мы с вами уже изучили. Так, если r — натуральное число ($r = n$), то получаем функцию $y = x^n$; графики и свойства таких функций вам известны из курса алгебры 7—9-го классов. На рисунке 12 изображен график функции $y = x^1$ (прямая), на рисунке 13 изображен график функции $y = x^2$ (парабола), на рисунке 14 изображен график функции $y = x^3$

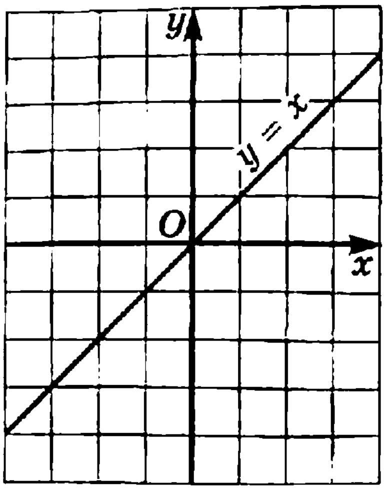


Рис. 12

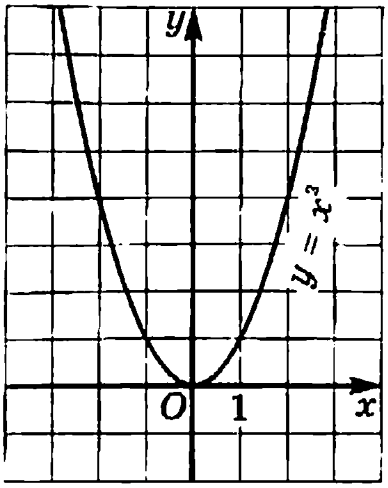


Рис. 13

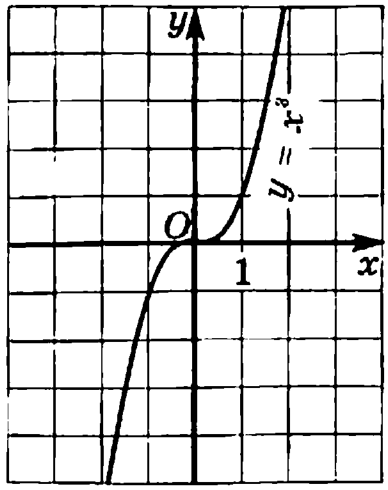


Рис. 14

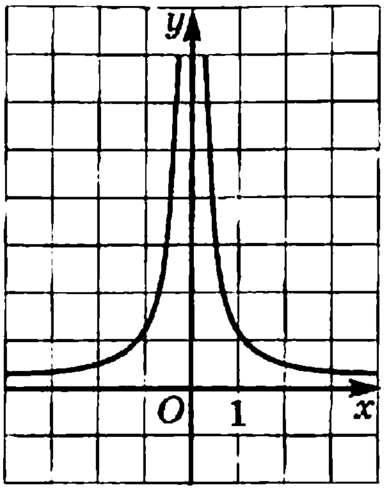


Рис. 15

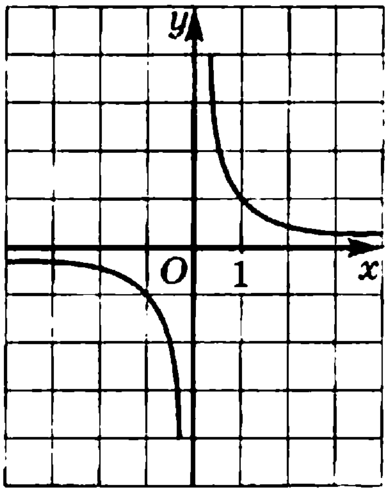


Рис. 16

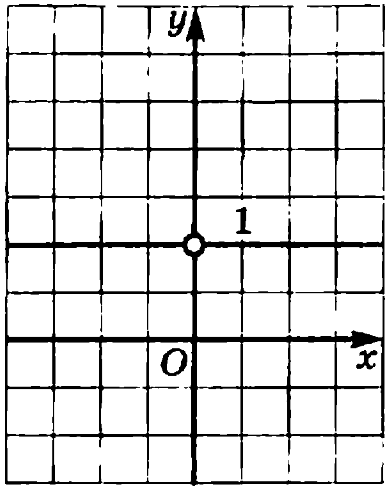


Рис. 17

(кубическая парабола). График степенной функции $y = x^n$ в случае четного n ($n = 4, 6, 8, \ldots$) похож на параболу, а график степенной функции $y = x^n$ в случае нечетного n ($n = 5, 7, 9, \ldots$) похож на кубическую параболу.

Если $r = -n$, то получаем функцию $y = x^{-n}$, т. е. $y = \dfrac{1}{x^n}$; о таких функциях мы говорили в курсе алгебры 9-го класса. В случае четного n график имеет вид, изображенный на рисунке 15; в случае нечетного n график имеет вид, изображенный на рисунке 16.

Наконец, если $r = 0$, то речь идет о функции $y = x^0$, или, что то же самое, $y = 1$, где $x \neq 0$; график этой функции изображен на рисунке 17.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{\frac{m}{n}}$ для случая, когда $\dfrac{m}{n} > 1$. Возьмем в качестве примера функцию $y = x^{2,5}$. Область ее определения — луч $[0; +\infty)$. Построим на этом луче графики функций $y = x^2$ (ветвь параболы) и $y = x^3$ (ветвь кубической параболы) — они изображены на рисунке 18. Отметим, что на интервале $(0; 1)$

кубическая парабола располагается ниже, а на открытом луче $(1; +\infty)$ — выше параболы.

Нетрудно убедиться в том, что график функции $y = x^{2,5}$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$, как и графики функций $y = x^2$, $y = x^3$. При остальных значениях аргумента x график функции $y = x^{2,5}$ находится между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$ (рис. 18). Почему? Смотрите.

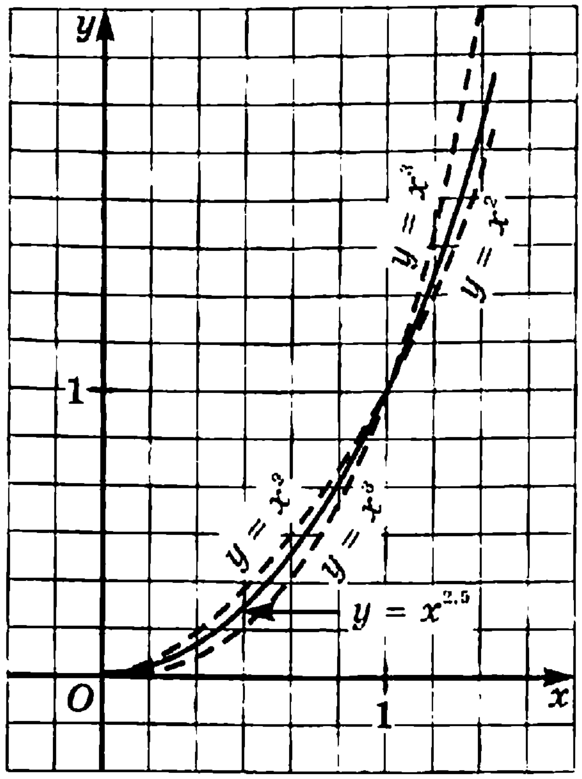


Рис. 18

1) Если $0 < x < 1$, то

$$x^6 < x^5 < x^4;$$

$$\sqrt{x^6} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^4};$$

$$x^3 < x^{2,5} < x^2.$$

2) Если $x > 1$, то

$$x^4 < x^5 < x^6;$$

$$\sqrt{x^4} < \sqrt{x^5} < \sqrt{x^6};$$

$$x^2 < x^{2,5} < x^3.$$

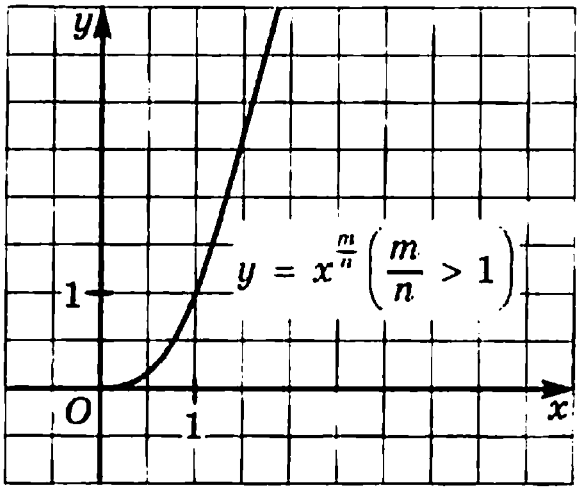


Рис. 19

График функции $y = x^{2,5}$ напоминает ветвь параболы. Примерно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^r$, где $r = \frac{m}{n}$ — неправильная дробь (числитель больше знаменателя). Ее графиком является кривая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$ и похожая на ветвь параболы (рис. 19). Чем больше показатель r, тем «круче» устремлена эта кривая вверх.

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) нé является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения, а $y_{\text{наим}} = 0$;
6) непрерывна;

7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^{\frac{1}{n}}$. Это известная нам функция $y = \sqrt[n]{x}$, где $x \geqslant 0$. График любой степенной функции $y = x^r$, где $r = \frac{m}{n}$ — правильная дробь (числитель меньше знаменателя), выглядит так же, как и график функции $y = \sqrt[n]{x}$ (рис. 20).

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $[0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, ограничена снизу;
5) не имеет наибольшего значения, а $y_{\text{наим}} = 0$;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Нам осталось рассмотреть степенную функцию вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$. Область ее определения — открытый луч $(0; +\infty)$. Выше мы построили график степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. При $x > 0$ график функции $y = x^{-n}$ похож на ветвь гиперболы (см. рис. 8). Точно так же обстоит дело для любой степенной функции вида $y = x^{-\frac{m}{n}}$, ее график изображен на рисунке 21. Отметим, что график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;

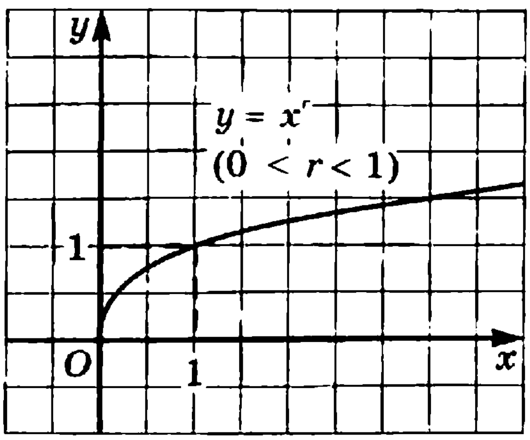


Рис. 20

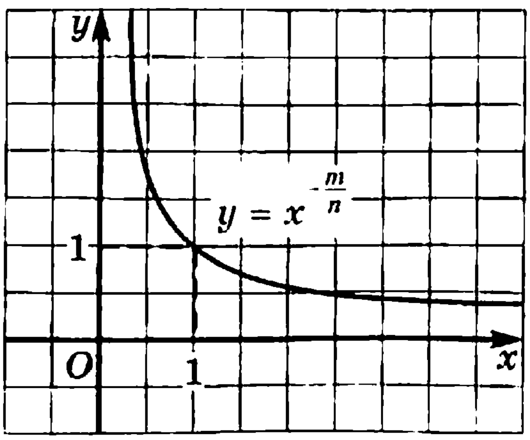


Рис. 21

3) убывает на $(0; +\infty)$;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз.

Вы, наверное, заметили, что мы пока ничего не сказали о свойстве дифференцируемости степенной функции. Начнем издалека.

Мы знаем, чему равна производная функции $y = x^n$, где n — натуральное число:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (1)$$

Нетрудно найти производную степенной функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. Для этого надо переписать выражение x^{-n} в виде $\frac{1}{x^n}$ и воспользоваться правилом дифференцирования дроби:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{\ n-1}.$$

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \qquad (3)$$

где m — любое целое число.

Идем дальше. Мы знаем, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Эту формулу можно записать следующим образом:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

И формула (3), и формула (4) являются частными случаями общего утверждения (которое мы приводим без доказательства).

***Теорема.* Если $x > 0$ и r — любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле**

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}.}$$

Например,

$$(x^{1000})' = 1000x^{999}; \quad (x^{-5})' = -5x^{-6}; \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

(мы учли, что $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$);

$$\left(\sqrt[5]{(3x-4)^3}\right)' = \left((3x-4)^{\frac{3}{5}}\right)' = 3 \cdot \frac{3}{5}(3x-4)^{\frac{3}{5}-1} = \frac{9}{5}(3x-4)^{-\frac{2}{5}}$$

(мы использовали правило дифференцирования: $(f(ax+b))' = a \cdot f'(ax+b)$).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{3}{2}}$:

а) на отрезке $[1; 9]$;

б) на интервале $(0; 4)$;

в) на луче $[25; +\infty)$.

Решение. Можно воспользоваться тем, что функция $y = x^{\frac{3}{2}}$ возрастает на любом из указанных промежутков и, следовательно, свои наименьшее и наибольшее значения достигает соответственно в левом и правом концах промежутка, если, разумеется, концы промежутка принадлежат самому промежутку.

а) $y_{наим} = 1^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1^3} = 1;\quad y_{наиб} = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27.$

б) Здесь нет ни наименьшего, ни наибольшего значения функции, поскольку концы промежутка — точки 0 и 4 — интервалу $(0; 4)$ не принадлежат.

в) $y_{наим} = 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125;$ $y_{наиб}$ не существует. ◼

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3$ на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

1) Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 8\sqrt{x} - x^2.$$

2) Производная существует при всех $x \geqslant 0$, значит, критических точек у функции нет. Стационарные точки найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$8\sqrt{x} - x^2 = 0;$$

$$8\sqrt{x} = x^2;$$

$$\left(8\sqrt{x}\right)^2 = (x^2)^2;$$

$$64x = x^4;$$

$$x(x^3 - 64) = 0;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Отрезку [1; 9] принадлежит лишь точка $x = 4$.

3) Составим таблицу значений функции $y = \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3$, включив в нее концы отрезка — точки $x = 1$ и $x = 9$ — и найденную стационарную точку $x = 4$:

x	1	4	9
y	5	$21\frac{1}{3}$	-99

Таким образом, $y_{наим} = -99$ (достигается в точке $x = 9$);

$y_{наиб} = 21\frac{1}{3}$ (достигается в точке $x = 4$).

Пример 3. Решить уравнение $x^{\frac{2}{3}} = 12 - x$.

Решение. Нетрудно подобрать один корень этого уравнения: $x = 8$. В самом деле,

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4 \text{ и } 12 - 8 = 4,$$

значит, при $x = 4$ уравнение обращается в верное числовое равенство $4 = 4$.

Так как степенная функция $y = x^{\frac{2}{3}}$ возрастает, а линейная функция $y = 12 - x$ убывает, то других корней у уравнения нет (см. с. 13).

Ответ: 8.

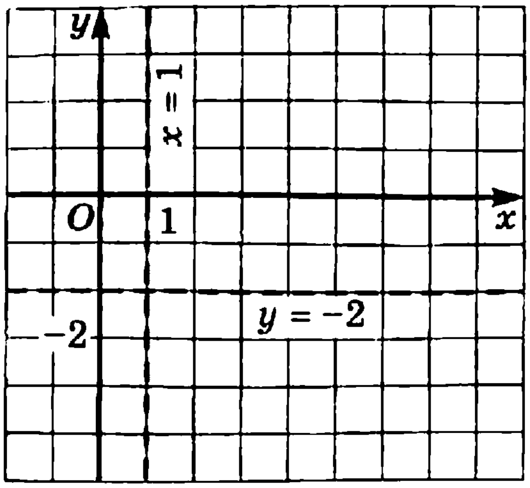


Рис. 22

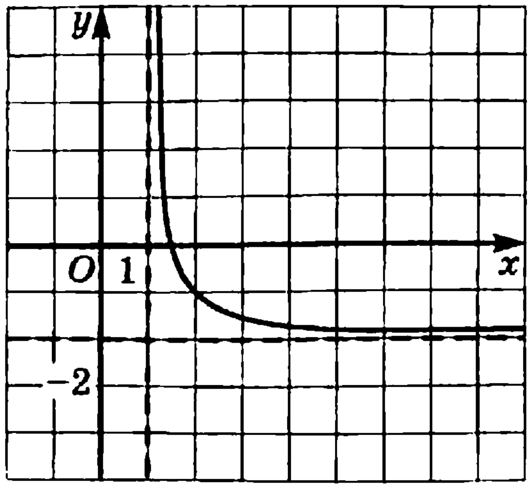


Рис. 23

Пример 4. Построить график функции $y = (x-1)^{-\frac{2}{3}} - 2$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(1; -2)$ — пунктирные прямые $x = 1$ и $y = -2$ (рис. 22).

2) «Привяжем» функцию $y = x^{-\frac{2}{3}}$ к новой системе координат, т. е. в новой системе координат построим кривую того вида, какой представлен на рисунке 21. Это и будет требуемый график (рис. 23). ◁■

Пример 5. Составить уравнение касательной к графику функции:

а) $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$; б) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ в точке $x = 1$.

Решение. Напомним общий вид уравнения касательной:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{5}$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной.

а) Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то:

1) $a = 1$;

2) $f(a) = f(1) = 1$;

3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$;

4) подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ в формулу (5):

$$y = 1 - (x - 1);$$
$$y = 2 - x.$$

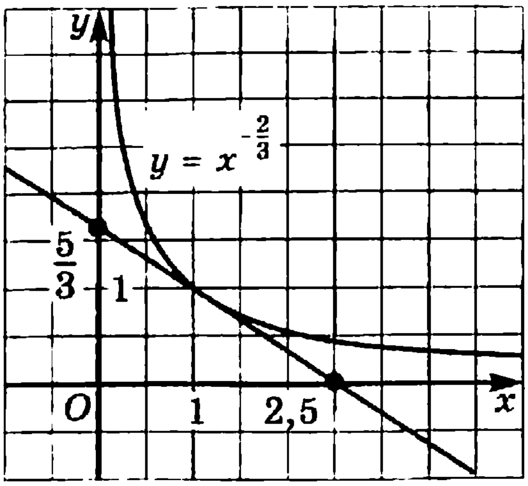


Рис. 24

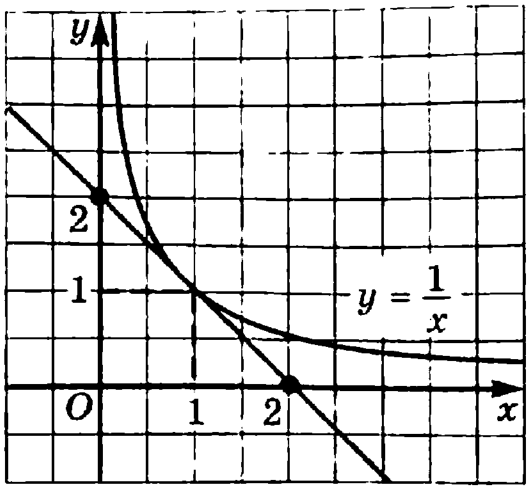


Рис. 25

б) Если $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, то:

1) $a = 1$;

2) $f(a) = f(1) = 1^{-\frac{2}{3}} = 1$;

3) $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{2}{3}$;

4) подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -\frac{2}{3}$ в формулу (5):

$$y = 1 - \frac{2}{3}(x - 1);$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Ответ: а) $y = 2 - x$; б) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Замечание. График функции $y = x^{-\frac{2}{3}}$ похож на ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$: оба графика имеют своими асимптотами оси координат, оба графика проходят через точку (1; 1). Но, разумеется, это разные графики. Так, их поведение в точке (1; 1) различно, у них, как мы увидели при решении примера 5, разные касательные в этой точке (рис. 24, 25).

Упражнения

Постройте график функции:

6.1. а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{-3}$; в) $y = x^5$; г) $y = x^{-4}$.

6.2. а) $y = x^{\frac{3}{2}}$; б) $y = x^{\frac{1}{4}}$; в) $y = x^{-\frac{1}{2}}$; г) $y = x^{\frac{5}{4}}$.

6.3. Постройте и сравните графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$.

6.4. Известно, что $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$. Вычислите:

а) $f(4)$; б) $f\left(\frac{1}{9}\right)$; в) $f(0)$; г) $f(0{,}01)$.

6.5. Известно, что $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Вычислите:

а) $f(1)$; б) $f(8)$; в) $f\left(\frac{1}{8}\right)$; г) $f(0)$.

6.6. Исследуйте степенную функцию на четность:

а) $y = x^{10}$; б) $y = x^{-\frac{1}{3}}$; в) $y = x^{-15}$; г) $y = x^{\frac{4}{3}}$.

6.7. Исследуйте степенную функцию на ограниченность:

а) $y = x^{8}$; б) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; в) $y = x^{-5}$; г) $y = x^{\frac{2}{5}}$.

6.8. Исследуйте степенную функцию на монотонность:

а) $y = x^{12}$; б) $y = x^{-\frac{1}{6}}$; в) $y = x^{-11}$; г) $y = x^{\frac{1}{7}}$.

6.9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^{\frac{1}{4}}$:

а) на отрезке $[0;\ 1]$;
б) на луче $[1;\ +\infty)$;
в) на интервале $(2;\ 3)$;
г) на полуинтервале $(5;\ 16]$.

6.10. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^{\frac{5}{2}}$:

а) на луче $[0;\ +\infty)$;
б) на полуинтервале $[1;\ 3)$;
в) на отрезке $[1;\ 2]$;
г) на полуинтервале $(6;\ 8]$.

6.11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^{-\frac{2}{3}}$:

а) на отрезке $[1;\ 8]$;
б) на интервале $(3;\ 5)$;
в) на луче $[1;\ +\infty)$;
г) на полуинтервале $(0;\ 1]$.

Постройте график функции:

6.12. а) $y = (x + 2)^{\frac{1}{2}}$; в) $y = (x - 1)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $y = x^{\frac{7}{2}} - 3$; г) $y = x^{-\frac{1}{3}} + 4$.

○6.13. а) $y=(x+3)^{\frac{1}{6}}-1$; в) $y=(x+6)^{\frac{7}{4}}+2$;

б) $y=(x-2)^{-\frac{1}{9}}+5$; г) $y=(x-3)^{\frac{1}{2}}-1$.

○6.14. а) $y = 2x^{\frac{1}{3}}$; в) $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$;

б) $y = -x^{-\frac{3}{5}}$; г) $y = -2x^{\frac{1}{4}}$.

○6.15. Решите графически уравнение:

а) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; в) $x^{\frac{1}{4}} = x^3$;

б) $x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^2}$; г) $x^{\frac{2}{3}} = x - 4$.

○6.16. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^{\frac{5}{2}}, \\ y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^{\frac{1}{6}}, \\ y = |x|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^{-\frac{1}{3}}, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^{-\frac{2}{3}}, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$

Постройте и прочитайте график функции:

○6.17. $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0 \\ x^{\frac{5}{3}}, \text{ если } x \geqslant 0 \end{cases}$

○6.18. $y = \begin{cases} |x|, \text{ если } x < 1, \\ x^{\frac{1}{3}}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

○6.19. $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ x^{-\frac{1}{2}}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

О6.20. Известно, что $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$. Найдите:

а) $f(16x)$; б) $f(81x^4)$; в) $f\left(\frac{1}{81}x\right)$; г) $f(x^{-8})$.

О6.21. Известно, что $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Найдите:

а) $f(8x^3)$; б) $f(x^{-6})$; в) $f\left(\frac{1}{27}x\right)$; г) $f(x^{12})$.

Найдите производную заданной функции:

6.22. а) $y = x^8$; б) $y = x^{-4}$; в) $y = x^{40}$; г) $y = \frac{1}{x^6}$.

6.23. а) $y = x^{\frac{3}{5}}$; б) $y = \sqrt[4]{x^5}$; в) $y = x^{\frac{7}{2}}$; г) $y = \sqrt[5]{x}$.

6.24. а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; г) $y = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$.

6.25. а) $y = x\sqrt{x}$; б) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; в) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$; г) $y = x^2\sqrt[3]{x}$.

6.26. а) $y = 2x^4 + x\sqrt{x}$; в) $y = x^5 - \frac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3x^6 - 1$; г) $y = x^3 - 7x\sqrt[5]{x}$.

О6.27. Найдите значение производной функции $y = g(x)$ в заданной точке x_0:

а) $g(x) = x^3 - 3\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

б) $g(x) = \sqrt[3]{3x - 1}$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

в) $g(x) = x^{-1} + x^{-2}$, $x_0 = 1$;

г) $g(x) = \frac{1}{3}(5 - 2x)^{-3}$, $x_0 = 2$.

○6.28. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = 4 - x^{-\frac{3}{4}}, \ x_0 = 1;$

б) $f(x) = 12x^{-\frac{1}{2}} - x, \ x_0 = 9;$

в) $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - 1, \ x_0 = 8;$

г) $f(x) = x^{-3} + 6\sqrt{x}, \ x_0 = 1.$

○6.29. Найдите угол, образованный касательной к графику функции $y = g(x)$ с положительным направлением оси абсцисс в точке с абсциссой x_0:

а) $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3x}, \ x_0 = \frac{1}{3};$

б) $g(x) = -3\left(\sqrt{2} + x\right)^{-\frac{1}{3}}, \ x_0 = 1 - \sqrt{2}.$

○6.30. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

а) $y = x^4 - 3x^3, \ a = 2;$

б) $y = \sqrt[3]{3x - 1}, \ a = 3;$

в) $y = 3x^3 - 5x^2 - 4, \ a = 2;$

г) $y = (2x + 5)^{-\frac{1}{2}}, \ a = 2.$

○6.31. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

а) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x;$

б) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x.$

○6.32. Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на заданном промежутке:

а) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x, \ [1; 9];$

б) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x, \ (0; 8);$

в) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x, \ (1; 9);$

г) $y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - x, \ [0; 8].$

●6.33. Постройте график функции:

а) $y = 2(x-1)^{\frac{2}{3}} - 2$;   в) $y = -(x+2)^{\frac{3}{2}} + 1$;

б) $y = -\frac{1}{\sqrt[4]{x+4}} + 2$;   г) $y = 1{,}5(x-3)^{-\frac{2}{7}} - 4$.

●6.34. Решите графически неравенство:

а) $x^{\frac{1}{2}} < 6 - x$;   в) $x^{-\frac{1}{4}} \leqslant x^3$;

б) $x^{\frac{3}{2}} \geqslant x^{-2}$;   г) $x^{\frac{2}{3}} > x - 4$.

●6.35. Решите уравнение $g'(x) = 0$, если:

а) $g(x) = 2\sqrt{x} - x$;

б) $g(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} + 2x$;

в) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x$;

г) $g(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - 2x$.

6.36. Проведите касательную к графику функции $y = f(x)$, параллельную заданной прямой $y = kx + m$:

а) $f(x) = 4\sqrt[4]{x}$, $y = x - 2$;   б) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $y = 5 - 3x$.

●6.37. Исследуйте функцию на монотонность и экстремум и постройте ее график:

а) $y = \sqrt{x} - x$;   б) $y = x\sqrt{x+2}$.

●6.38. Используя свойство монотонности функции, решите уравнение:

а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$;

б) $\sqrt[4]{10 + 3x} = 74 - x^5 - 3x^3 - 8x$.

●6.39. Проведите касательную к графику заданной функции из данной точки M:

а) $y = \sqrt{x}$, $M(0; 1)$;   б) $y = x^{\frac{3}{2}} + 4$, $M(0; 0)$.

ГЛАВА 2 Показательная и логарифмическая функции

§ 7. Показательная функция, ее свойства и график

Рассмотрим выражение 2^x и найдем его значения при различных рациональных значениях переменной x, например при $x = 2$; 5; 0; -4; $\frac{4}{3}$; $-3{,}5$:

если $x = 2$, то $2^x = 2^2 = 4$;
если $x = 5$, то $2^x = 2^5 = 32$;
если $x = 0$, то $2^x = 2^0 = 1$;
если $x = -4$, то $2^x = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$;
если $x = \frac{4}{3}$, то $2^x = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$;
если $x = -3{,}5$, то $2^x = 2^{-3{,}5} = \frac{1}{2^{3{,}5}} = \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

Вообще, какое бы рациональное значение мы ни придали переменной x, всегда можно вычислить соответствующее числовое значение выражения 2^x. Таким образом, можно говорить о *показательной функции* $y = 2^x$, *определенной на множестве* Q *рациональных чисел*:

$$y = 2^x,\ x \in Q.$$

Вероятно, у вас возник вопрос: почему мы рассматриваем функцию $y = 2^x$ только на множестве рациональных чисел, почему мы не рассматриваем ее, как другие известные функции, на всей числовой прямой или на каком-либо сплошном промежутке числовой прямой? Что нам мешает? Обдумаем ситуацию.

Числовая прямая содержит не только рациональные, но и иррациональные числа. Для изученных ранее функций это нас не смущало. Например, значения функции $y = x^2$ мы одинаково легко находили как при рациональных, так и при иррациональных значениях x: достаточно было заданное значение x возвести в квадрат.

А вот с функцией $y = 2^x$ дело обстоит сложнее. Если аргументу x придать рациональное значение, то в принципе 2^x вычислить можно (вернитесь еще раз к началу параграфа, где именно это мы и делали). А если аргументу x придать иррациональное значение? Как, например, вычислить $2^{\sqrt{3}}$? Этого мы пока не знаем.

Математики нашли выход из положения; вот как они рассуждали.

Известно, что $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ Рассмотрим последовательность рациональных чисел — десятичных приближений числа $\sqrt{3}$ по недостатку:

$1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}7320;\ 1{,}73205;\ 1{,}732050;\ 1{,}7320508;\ ...$.

Ясно, что $1{,}732 = 1{,}7320$, а $1{,}732050 = 1{,}73205$. Во избежание подобных повторов отбросим те члены последовательности, которые заканчиваются цифрой 0. Тогда получим возрастающую последовательность

$$1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}73205;\ 1{,}7320508;\ ... .$$

Соответственно возрастает и последовательность

$$2^1;\ 2^{1{,}7};\ 2^{1{,}73};\ 2^{1{,}732};\ 2^{1{,}73205};\ 2^{1{,}7320508},\ ... . \qquad (1)$$

Как в этом убедиться? Возьмем, например, два соседних члена последовательности $2^{1{,}7}$ и $2^{1{,}73}$. Перепишем их так:

$$2^{1{,}7} = 2^{\frac{170}{100}} = \sqrt[100]{2^{170}};\quad 2^{1{,}73} = 2^{\frac{173}{100}} = \sqrt[100]{2^{173}}.$$

Поскольку $2^{170} < 2^{173}$, то $\sqrt[100]{2^{170}} < \sqrt[100]{2^{173}}$, а это и означает, что $2^{1{,}7} < 2^{1{,}73}$.

Все члены последовательности (1) — положительные числа, меньшие, чем 2^2, т. е. эта последовательность ограниченная. По теореме Вейерштрасса (мы упоминали ее в книге «Математика-10»), если последовательность возрастает и ограничена, то она имеет предел. Этот предел принято считать значением числового выражения $2^{\sqrt{3}}$. И неважно, что найти даже приближенное значение числового выражения $2^{\sqrt{3}}$ очень трудно, важно, что это — конкретное число (в конце концов, мы же не боялись говорить, что, например, $x = \sqrt{17} - \sqrt{13}$ — корень рационального уравнения, а $x = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ — корень тригонометрического уравнения, не особенно задумываясь над тем, а что же это конкретно за числа $\sqrt{17} - \sqrt{13}$ или $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$).

Итак, мы выяснили, какой смысл вкладывают математики в символ $2^{\sqrt{3}}$. Аналогично можно определить, что такое $2^{\sqrt{5}}$, $3^{\sqrt[4]{2}}$, $2{,}5^{\pi}$ и т. д.

Определение 1. Пусть $a > 1$ и $\alpha = a,a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ — положительное иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). Составим последовательность десятичных приближений числа α по недостатку:

$\alpha_1 = a,a_1,\ \alpha_2 = a,a_1a_2,\ \alpha_3 = a,a_1a_2a_3,\ \dots,\ \alpha_n = a,a_1a_2a_3 \dots a_n,\ \dots$.

Тогда предел последовательности a^{α_1}, a^{α_2}, a^{α_3}, ..., a^{α_n}, ... обозначают a^{α} и называют **степенью с иррациональным показателем.** Если $a > 1$ и $\alpha < 0$, то под a^{α} будем понимать число $\frac{1}{a^{-\alpha}}$.

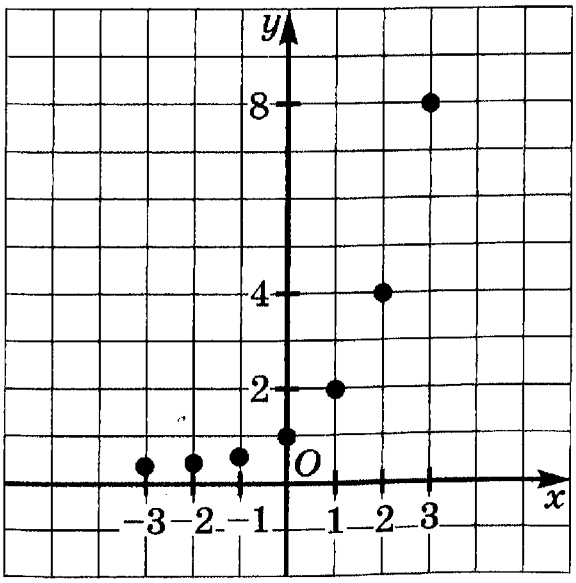
Если $0 < a < 1$, то под a^{α} будем понимать число $\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$.

Теперь мы можем говорить не только о степенях с произвольными рациональными показателями, но и *о степенях с произвольными действительными показателями*. Доказано, что степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, при делении — вычитаются, при возведении степени в степень — перемножаются и т. д. Но самое главное, что теперь мы можем говорить о функции $y = a^x$, определенной на множестве всех действительных чисел.

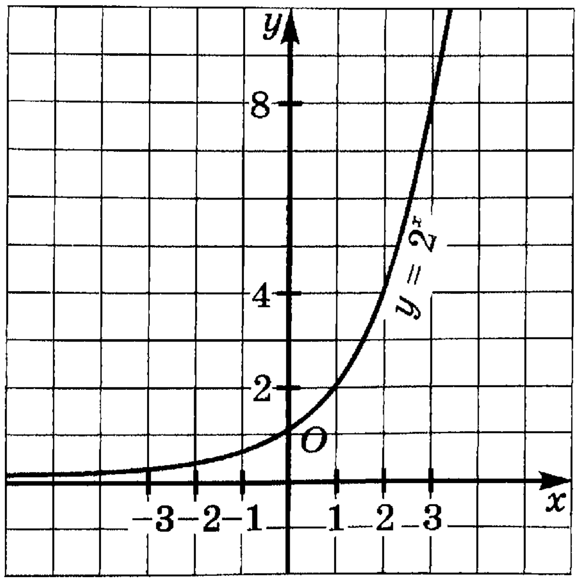
Построим (по точкам) график функции $y = 2^x$. Для этого составим таблицу значений функции $y = 2^x$:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки (0; 1), (1; 2), $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, (2; 4), $\left(-2; \frac{1}{4}\right)$, (3; 8), $\left(-3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 26, *а*). Они намечают некоторую линию — это график функции $y = 2^x$ (рис. 26, *б*).



а



б

Рис. 26

Свойства функции $y = 2^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

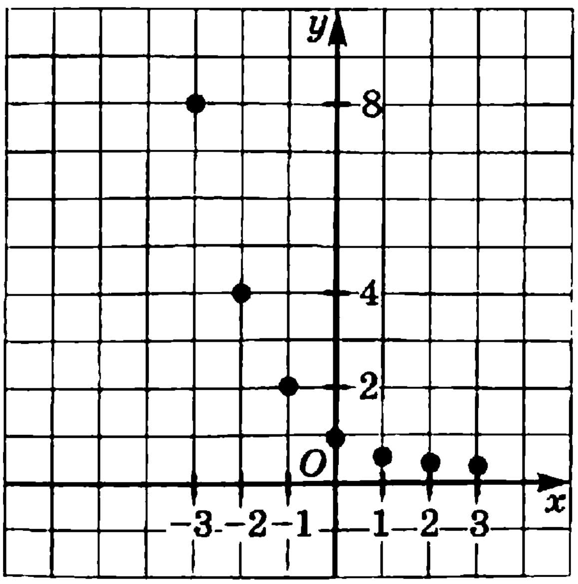
8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $a > 1$.

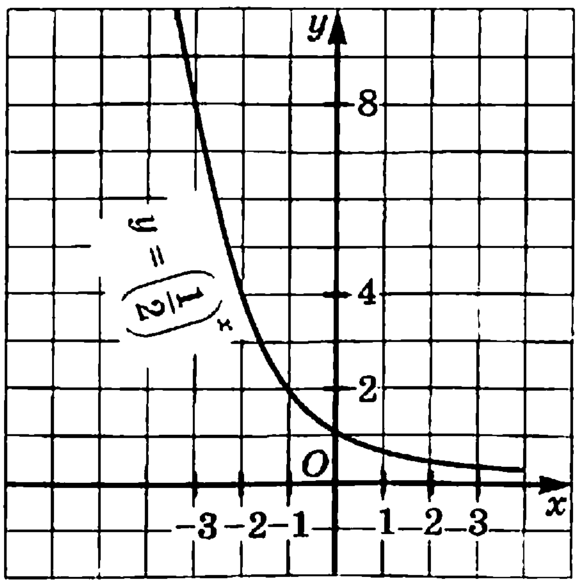
Рассмотрим теперь функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, составим для нее таблицу значений:

x	0	−1	1	−2	2	−3	3
y	1	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$

Отметим точки $(0; 1)$, $(-1; 2)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $(-2; 4)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $(-3; 8)$, $\left(3; \frac{1}{8}\right)$ на координатной плоскости (рис. 27, *а*). Они намечают некоторую линию — это график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 27, *б*).



а



б

Рис. 27

Свойства функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) убывает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз.

Точно такими же свойствами обладает любая функция вида $y = a^x$, где $0 < a < 1$.

Обратите внимание: графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, т. е. $y = 2^{-x}$, симметричны относительно оси y (рис. 28). Аналогично будут симметричны относительно оси y графики функций $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 5^x$ и $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ и $y = \left(\frac{7}{2}\right)^x$ и т. д.

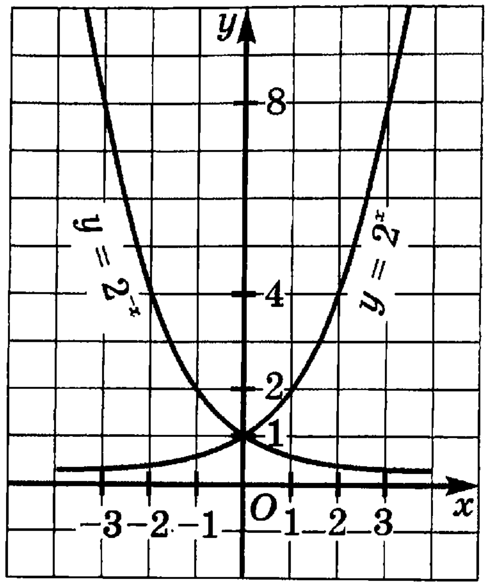


Рис. 28

Подводя итог сказанному, дадим определение показательной функции и выделим наиболее важные ее свойства.

Определение. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией.**

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Возрастает	Убывает
Непрерывна	Непрерывна

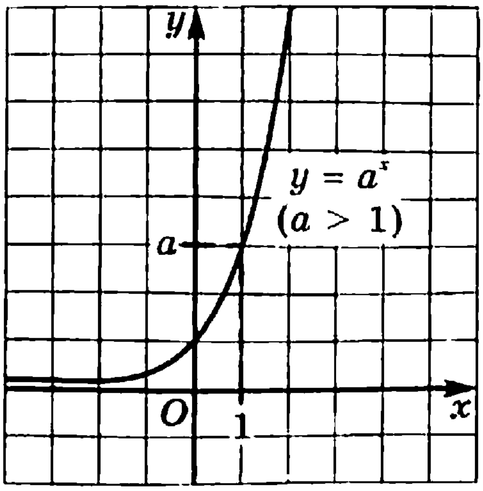


Рис. 29

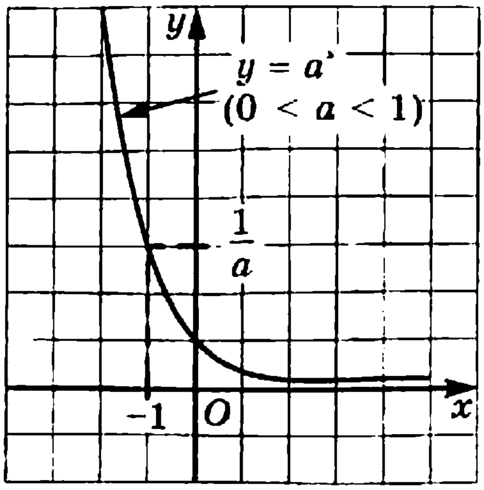


Рис. 30

График функции $y = a^x$ для $a > 1$ изображен на рисунке 29, а для $0 < a < 1$ — на рисунке 30.

Кривую, изображенную на рисунке 29 или 30, называют *экспонентой*. Впрочем, экспонентой называют и саму показательную функцию $y = a^x$. Так что термин «экспонента» используется в двух смыслах: и для наименования показательной функции, и для названия графика показательной функции.

Обратите внимание на геометрическую особенность графика показательной функции $y = a^x$: *ось x является горизонтальной асимптотой графика*. Правда, обычно это утверждение уточняют следующим образом: ось x является горизонтальной асимптотой графика функции $y = a^x$ при $x \to -\infty$, если $a > 1$ (см. рис. 29), и при $x \to +\infty$, если $0 < a < 1$ (см. рис. 30).

А встречаются ли показательные функции как математические модели реальных ситуаций, заданные на всей числовой прямой или на каком-либо числовом промежутке? Безусловно, и очень часто. Например, из физики известен закон радиоактивного распада вещества: $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; здесь m_0 — первоначальная масса вещества, m — масса вещества в рассматриваемый момент времени t, T — некоторое положительное число (константа), свое для каждого вида радиоактивного вещества (это число обычно называют *периодом полураспада*). Как видите, указанный закон связан с показательной функцией, причем областью определения этой функции является множество всех неотрицательных чисел (аргумент t может принимать любые неотрицательные значения).

На рисунке 31 схематически представлен график функции $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

С показательными функциями связаны многие экономические, биологические, физические законы, относящиеся, например, к изменению температуры тела, и т. д.

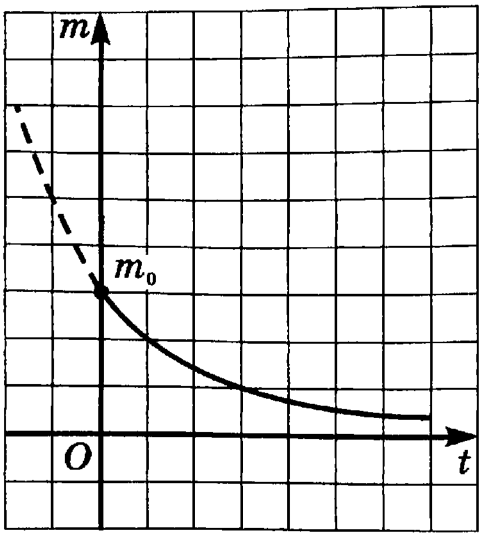


Рис. 31

Приведем еще два примера.

1. Предположим, что колония живых организмов находится в благоприятных условиях: пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы не ограничены, а хищников, питающихся организмами данной колонии, нет, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность. В таких условиях обычно считают, что скорость изменения численности колонии пропорциональна численности (чем больше организмов, тем выше скорость; k — коэффициент пропорциональности). Установлено, что число организмов колонии выражается формулой $y = y_0e^{kt}$, где y_0 — численность колонии в момент времени $t = 0$, а e — особое число, примерно равное 2,7 (об этом числе речь пойдет в § 15). На рисунке 32 схематически представлен график функции $y = y_0e^{kt}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

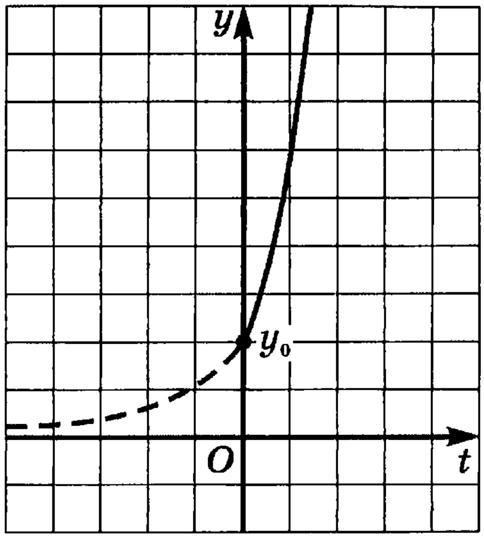


Рис. 32

Примерно по такому же закону изменяется величина вклада в банковской структуре, этот закон называют *законом показательного роста*.

2. В комнату с температурой 20° внесли кипящий чайник. При определенных условиях можно считать, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Температура T тела в момент времени t выражается формулой $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$; здесь T_1 — температура окружающей среды, а T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$. В ситуации с чайником $T_1 = 20°$, а $T_0 = 100°$. Значит, $T = 20 + 80e^{-kt}$. График этой функции схематически представлен на рисунке 33.

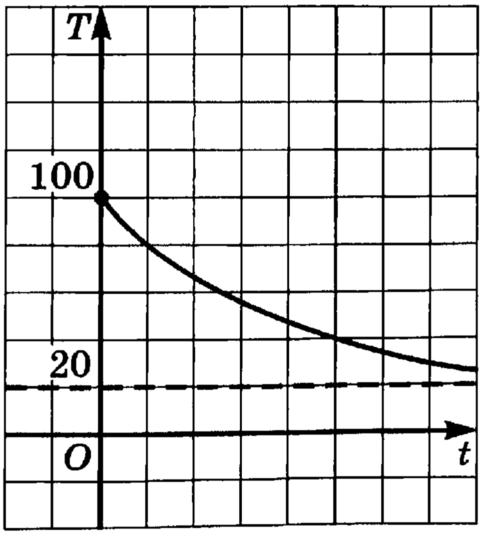


Рис. 33

График наглядно иллюстрирует вполне понятное обстоятельство: с течением времени температура чайника приближается к температуре окружающей среды. Процессы подобного рода называют *процессами выравнивания.*

Замечание. Школьники часто путают термины «степенная функция» и «показательная функция». Сравните:

$y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-10}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-2,5}$ — это примеры степенных функций;

$y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (2,5)^x$ — это примеры показательных функций.

Вообще $y = x^r$, где r — конкретное число, — *степенная функция* (аргумент x содержится в *основании степени*);

$y = a^x$, где a — конкретное число (положительное и отличное от 1), — *показательная функция* (аргумент x содержится в *показателе степени*).

А такую «экзотическую» функцию, как $y = x^x$, не считают ни показательной, ни степенной (ее иногда называют показательно-степенной).

Пример 1. Решить уравнения и неравенства:

а) $2^x = 1$; в) $2^x = 8$; д) $2^x > 1$;

б) $2^x = 4$; г) $2^x = \frac{1}{16}$; е) $2^x < 4$.

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y = 2^x$ и $y = 1$, замечаем (рис. 34), что они имеют одну общую точку (0; 1). Значит, уравнение $2^x = 1$ имеет единственный корень $x = 0$.

Итак, из уравнения $2^x = 2^0$ мы получили: $x = 0$.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y = 2^x$ и $y = 4$, замечаем (см. рис. 34), что они имеют одну общую точку (2; 4). Значит, уравнение $2^x = 4$ имеет единственный корень $x = 2$.

Итак, из уравнения $2^x = 2^2$ мы получили: $x = 2$.

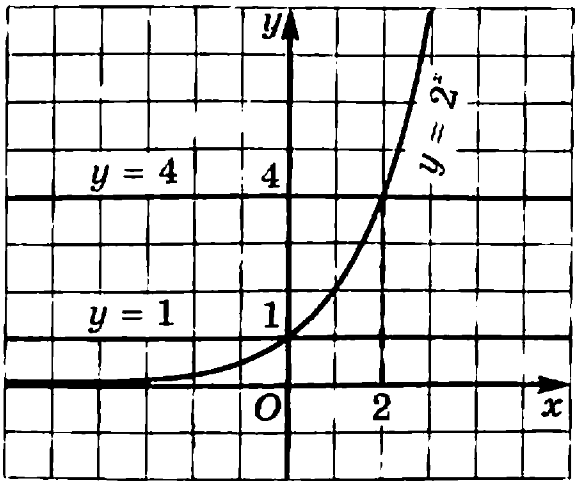


Рис. 34

в) и г) Исходя из тех же соображений, делаем вывод, что уравнение $2^x = 8$ имеет единственный корень, причем для его нахождения графики соответствующих функций можно и не строить; ясно, что $x = 3$, поскольку $2^3 = 8$. Аналогично находим единственный корень уравнения $2^x = \frac{1}{16}$; здесь $x = -4$, поскольку $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

Итак, из уравнения $2^x = 2^3$ мы получили: $x = 3$; из уравнения $2^x = 2^{-4}$ мы получили: $x = -4$.

д) График функции $y = 2^x$ расположен выше графика функции $y = 1$ при $x > 0$ — это хорошо читается по рисунку 34. Значит, решением неравенства $2^x > 1$ служит открытый луч $(0; +\infty)$.

е) График функции $y = 2^x$ расположен ниже графика функции $y = 4$ при $x < 2$ — это хорошо читается по рисунку 34. Значит, решением неравенства $2^x < 4$ служит открытый луч $(-\infty; 2)$. ◁■

Вы, наверное, заметили, что в основе всех выводов, сделанных при решении примера 1, лежало свойство монотонности (возрастания) функции $y = 2^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 1. **Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.**

Теорема 2. **Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$** (см. рис. 35); **неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.**

Пример 2. Решить уравнения и неравенства:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$;

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$;

е) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$.

Решение. а) Построив в одной системе координат графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 1$, замечаем (рис. 36), что они имеют одну

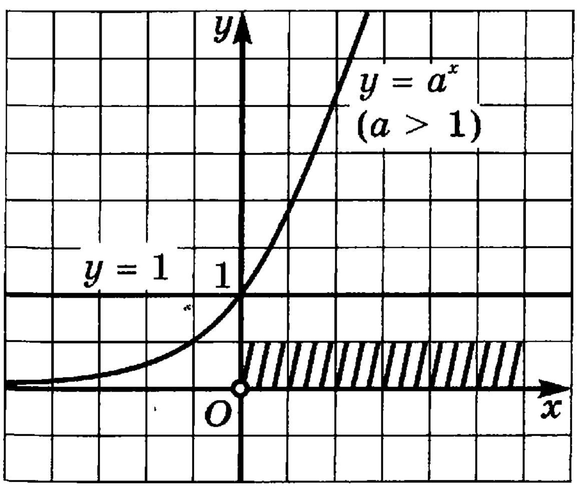


Рис. 35

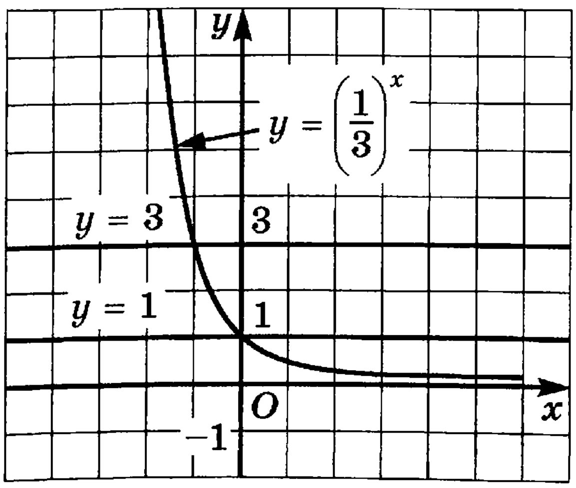


Рис. 36

общую точку (0; 1). Значит, уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ имеет единственный корень $x = 0$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ мы получили: $x = 0$.

б) Построив в одной системе координат графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 3$, замечаем (см. рис. 36), что они имеют одну общую точку (−1; 3). Значит, уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$ имеет единственный корень $x = -1$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ мы получили: $x = -1$.

в), г) Исходя из тех же соображений, делаем вывод, что уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ имеет единственный корень, причем для его нахождения графики соответствующих функций можно и не строить; ясно, что $x = -2$, поскольку $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$. Аналогично находим единственный корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$; здесь $x = 2$, поскольку $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Итак, из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ мы получили: $x = -2$; из уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ мы получили: $x = 2$.

д) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен выше графика функции $y = 1$ при $x < 0$ — это хорошо читается по рисунку 36. Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$ служит открытый луч $(-\infty; 0)$.

е) График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ расположен ниже графика функции $y = 3$ при $x > -1$ — это хорошо читается по рисунку 36.

Значит, решением неравенства $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$ служит открытый луч $(-1; +\infty)$. ◁■

В основе всех выводов, сделанных при решении примера 2, лежало свойство монотонности (убывания) функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Аналогичные рассуждения позволяют убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 3. **Если $0 < a < 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.**

Теорема 4. **Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$** (рис. 37); **неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.**

Пример 3. Построить график функции $y = 3 \cdot 3^x + 2$ и найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Можно действовать так: построить график функции $y = 3^x$, осуществить его растяжение от оси x с коэффициентом 3, а затем полученный график поднять вверх на 2 единицы масштаба. Но удобнее воспользоваться тем, что $3 \cdot 3^x = 3^{x+1}$, и, следовательно, построить график функции $y = 3^{x+1} + 2$.

Перейдем, как неоднократно уже делали в подобных случаях, к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 2)$ — пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 2$ на рисунке 38. «Привяжем» функцию $y = 3^x$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = 3^x$: $(0; 1)$, $(1; 3)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, — но строить их будем не в старой, а в новой системе координат.

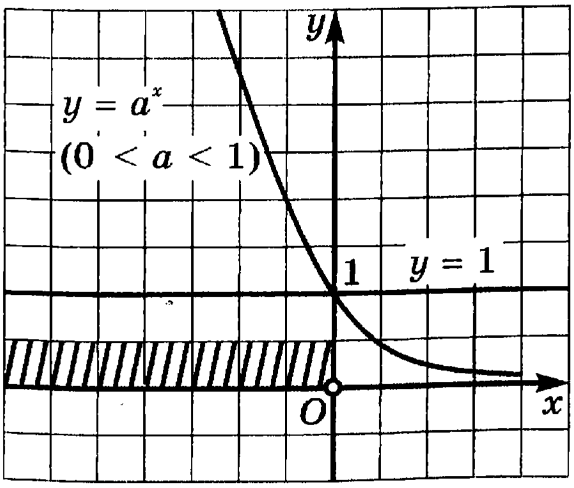


Рис. 37

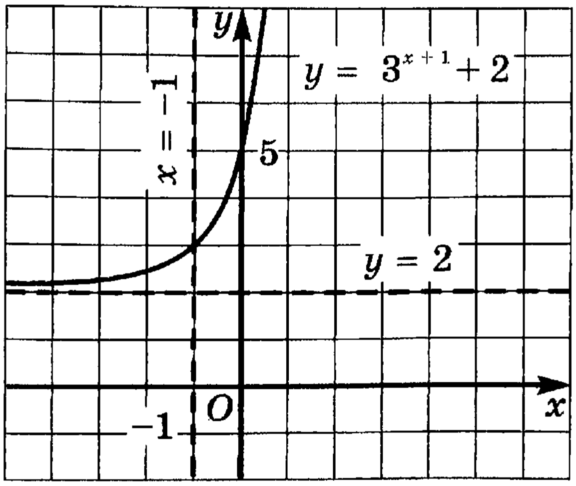


Рис. 38

Затем по точкам построим экспоненту — это и будет требуемый график (см. рис. 38).

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения заданной функции на отрезке $[-2;\ 2]$, воспользуемся тем, что заданная функция возрастает, а потому свои наименьшее и наибольшее значения она принимает соответственно в левом и правом концах отрезка.

Итак,

$$y_{\text{наим}} = 3^{-2+1} + 2 = 2\frac{1}{3};$$

$$y_{\text{наиб}} = 3^{2+1} + 2 = 29.$$

Пример 4. Решить уравнение и неравенства:

а) $5^x = 6 - x$; б) $5^x \geqslant 6 - x$; в) $5^x < 6 - x$.

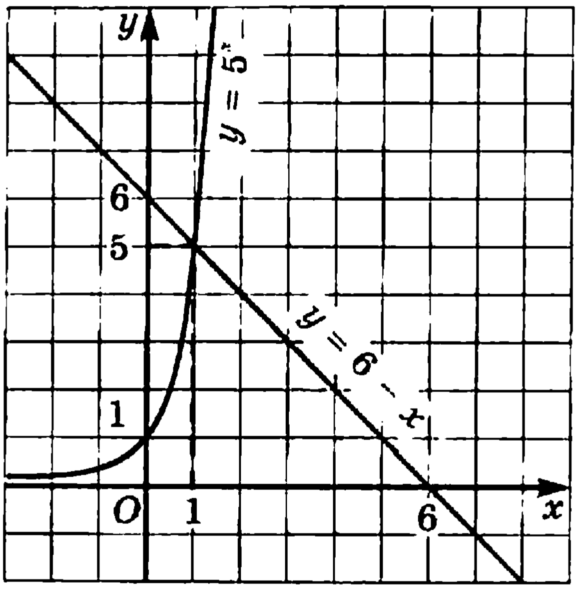


Рис. 39

Решение. а) Построим в одной системе координат графики функций $y = 5^x$ и $y = 6 - x$ (рис. 39). Они пересекаются в одной точке; судя по чертежу, это точка $(1;\ 5)$. Проверка показывает, что на самом деле точка $(1;\ 5)$ удовлетворяет и уравнению $y = 5^x$, и уравнению $y = 6 - x$. Абсцисса этой точки служит единственным корнем уравнения $5^x = 6 - x$, поскольку функция $y = 5^x$ возрастает, а функция $y = 6 - x$ убывает.

Итак, уравнение $5^x = 6 - x$ имеет единственный корень $x = 1$.

б), в) Экспонента $y = 5^x$ лежит выше прямой $y = 6 - x$, если $x > 1$, — это хорошо видно на рисунке 39. Значит, решение неравенства $5^x \geqslant 6 - x$ можно записать так: $x \geqslant 1$. А решение неравенства $5^x < 6 - x$ можно записать так: $x < 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $x \geqslant 1$; в) $x < 1$.

Упражнения

Найдите значение выражения 2^x при указанных значениях переменной x:

7.1. а) $x = 3$; б) $x = -2$; в) $x = 5$; г) $x = -4$.

7.2. а) $x = \frac{3}{2}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = \frac{4}{3}$; г) $x = -\frac{2}{3}$.

7.3. Определите, какое из чисел 5^{x_1} или 5^{x_2} больше, если:

а) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{5}$; в) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{4}{7}$;

б) $x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = -\frac{6}{5}$; г) $x_1 = -\frac{3}{8}$, $x_2 = -\frac{11}{9}$.

Найдите значение выражения:

7.4. а) $2^{5,3} \cdot 2^{-0,3}$; в) $3^{6,8} \cdot 3^{-5,8}$;

б) $7^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{3,5}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3,7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-0,7}$.

7.5. а) $4^{3,5} : 4^3$; в) $8^{2\frac{1}{3}} : 8^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6,3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2,3}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2,4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-0,6}$.

7.6. а) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6$; б) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2$; г) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$.

7.7. а) $(2^{-3})^2 \cdot 2^5$; в) $(3^{2,7})^3 : 3^{5,1}$;

б) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{4,1}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^{20,6}$; г) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$.

Решите уравнение:

7.8. а) $3^x = 9$; в) $3^x = 27$;

б) $3^x = \frac{1}{3}$; г) $3^x = \frac{1}{81}$.

7.9. а) $5^x = \sqrt{5}$; в) $8^x = \sqrt[5]{8}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; г) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{16}{25}$.

○7.10. а) $2^{3x} = 128$; в) $3^{2x} = \frac{1}{27}$;

б) $6^{3x} = 216$; г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} = \frac{1}{343}$.

7.11. Среди заданных функций укажите те, которые являются показательными:

а) $y = 3^x$; б) $y = x^3$; в) $y = x^{\frac{5}{3}}$; г) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$.

○7.12. Найдите значение аргумента x, при котором функция $y = 2^x$ принимает заданное значение:

а) 16; б) $8\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{32\sqrt{2}}$.

○7.13. Найдите значение аргумента x, при котором функция $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ принимает заданное значение:

а) $\frac{1}{25}$; б) 125; в) $\frac{1}{25\sqrt{5}}$; г) $625\sqrt{5}$.

7.14. Укажите, какие из заданных функций ограничены снизу:

а) $y = 4x - 1$; в) $y = -3x^2 + 8$;

б) $y = 18^x$; г) $y = \left(\frac{4}{11}\right)^x$.

7.15. Укажите, какие из заданных функций не ограничены сверху:

а) $y = -3x^2 + 1$; в) $y = (7{,}2)^x$;

б) $y = (0{,}6)^x$; г) $y = \cos x$.

7.16. Схематично изобразите график показательной функции:

а) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$; в) $y = \left(\sqrt{7}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^x$.

7.17. Сравните числа:

а) $1{,}3^{34}$ и $1{,}3^{40}$; в) $12{,}1^{\sqrt{3}}$ и $12{,}1^{\sqrt{5}}$;

б) $\left(\frac{7}{9}\right)^{16{,}2}$ и $\left(\frac{7}{9}\right)^{-3}$; г) $(0{,}65)^{-\sqrt{2}}$ и $(0{,}65)^{\frac{1}{2}}$.

7.18. Сравните с единицей заданное число:

а) $17^{-\frac{3}{4}}$; б) $(9{,}1)^{\sqrt{7}}$; в) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2{,}5}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^8$.

○7.19. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{1{,}5}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{-\sqrt{2}}$, $2^{1{,}4}$, 1;

б) $0{,}3^9$, 1, $0{,}3^{-\sqrt{5}}$, $0{,}3^{\frac{1}{2}}$, $0{,}3^{-9}$, $0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

Исследуйте функцию на монотонность:

7.20. а) $y = (\sqrt{3})^x$; в) $y = 21^x$;

б) $y = 0{,}3^x$; г) $y = \left(\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^x$.

7.21. а) $y = 2^{-x}$; б) $y = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x}$; в) $y = 17^{-x}$; г) $y = \left(\frac{1}{13}\right)^{-x}$.

Решите неравенство:

7.22. а) $4^x \leqslant 64$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$; в) $5^x \geqslant 25$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{8}{27}$.

О7.23. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 81$; в) $\left(\frac{2}{7}\right)^x \leqslant \frac{343}{8}$;

б) $15^x < \frac{1}{225}$; г) $2^x > \frac{1}{256}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке:

7.24. а) $y = 2^x$, $[1; 4]$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $[0; 4]$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $[-4; -2]$; г) $y = 2^x$, $[-4; 2]$.

7.25. а) $y = (\sqrt{2})^x$, $(-\infty; 4]$; в) $y = (\sqrt[3]{5})^x$, $[0; +\infty)$;

б) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$, $(-\infty; 2]$; г) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^x$, $[-2; +\infty)$.

О7.26. Найдите, на каком отрезке функция $y = 2^x$ принимает наибольшее значение, равное 32, и наименьшее, равное $\frac{1}{2}$.

О7.27. Найдите, на каком отрезке функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ принимает наибольшее значение, равное 81, и наименьшее, равное $\frac{1}{27}$.

7.28. Найдите область определения функции:

а) $y = 4^{x^2-1}$;

б) $y = 7^{\frac{1}{x}}$;

в) $y = \left(\frac{3}{8}\right)^{-x^2+2}$;

г) $y = 9{,}1^{\frac{1}{x-1}}$.

Постройте график функции:

7.29. а) $y = 2^x + 1$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$;

в) $y = 4^x - 1$;

г) $y = (0{,}1)^x + 2$.

7.30. а) $y = 5^{x+1}$;

б) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$;

в) $y = 3^{x-2}$;

г) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+0,5}$.

Решите графически уравнение:

○7.31. а) $3^x = 4 - x$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$;

в) $5^x = 6 - x$;

г) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = x + 8$.

○7.32. а) $2^x = -2x + 8$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 11$;

в) $3^x = -x + 1$;

г) $0{,}2^x = x + 6$.

При каких значениях x график заданной показательной функции лежит выше графика заданной линейной функции:

○7.33. а) $y = 3^x$, $y = -x + 1$;

б) $y = 0{,}5^x$, $y = 2x + 1$;

в) $y = 5^x$, $y = -2x + 1$;

г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = x + 1$?

○7.34. а) $y = 2^x$, $y = 3 - x$;

б) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, $y = -x - 3$;

в) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$, $y = 4 - x$;

г) $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x$, $y = -x - 2$?

О7.35. При каких значениях x график заданной показательной функции лежит ниже графика заданной линейной функции:

а) $y = 2^x$, $y = -\frac{3}{2}x - 1$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = -x - 2$;

в) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 3x + 1$;

г) $y = 3^x$, $y = -2x + 5$?

О7.36. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 3x + 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-3)$; $f(-2{,}5)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(3{,}5)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции.

О7.37. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 4^x, \text{ если } x < 1, \\ -x^2 + 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-3)$; $f(-2{,}5)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции.

О7.38. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x} + 1, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-5)$; $f(-2{,}5)$; $f(0)$; $f(4)$; $f(1{,}69)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции.

О7.39. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \cos x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-3)$; $f(-2)$; $f(-1{,}5)$; $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции.

Найдите область значений функции:

О7.40. а) $y = 3 \cdot 2^x$; в) $y = \frac{1}{2} \cdot 7^x$;

б) $y = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; г) $y = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

О7.41. а) $y = 3^x + 1$; в) $y = 17^x - 2$;

б) $y = \left(\frac{7}{9}\right)^x + 6$; г) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x - 8$.

О7.42. Докажите, что для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2^x$ выполняется равенство:

а) $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$; в) $f(-2x) = \frac{1}{f^2(x)}$;

б) $f(x + 1) \cdot f(2x) = 2f^3(x)$; г) $f(\cos^2 x) = \sqrt{2f(\cos 2x)}$.

§ 8. Показательные уравнения и неравенства

Показательными уравнениями называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на приведенные в предыдущем параграфе теоремы 1 и 3, согласно которым равенство $a^t = a^s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. **Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

Пример 1. Решить уравнения:

а) $2^{2x-4} = 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$.

Решение. а) Представив 64 как 2^6, перепишем заданное уравнение в виде $2^{2x-4} = 2^6$. Это уравнение равносильно уравнению $2x - 4 = 6$, откуда находим: $x = 5$.

б) Представив $\frac{1}{\sqrt{3}}$ как $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное уравнение в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Это уравнение равносильно уравнению $2x - 3,5 = 0,5$, откуда находим: $x = 2$.

в) Заданное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 3x = 3x - 8.$$

Далее имеем:

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 4.$$

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-2}$.

Решение. Здесь есть возможность и левую и правую части уравнения представить в виде степени с основанием 5. В самом деле:

1) $(0{,}2)^{x-0{,}5} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-0{,}5} = (5^{-1})^{x-0{,}5} = 5^{0{,}5-x}$;

2) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{0{,}5}$;

3) $5^{0{,}5-x} : 5^{0{,}5} = 5^{0{,}5-x-0{,}5} = 5^{-x}$;

4) $5 \cdot 0{,}04^{x-2} = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-2} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2} = 5 \cdot 5^{-2x+4} = 5^{1-2x+4} = 5^{5-2x}$.

Таким образом, заданное уравнение мы преобразовали к виду

$$5^{-x} = 5^{5-2x}.$$

Далее получаем: $-x = 5 - 2x$; $x = 5$.

Пример 3. Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение. Заметив, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, а $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, перепишем заданное уравнение в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Есть смысл ввести новую переменную: $y = 2^x$; тогда уравнение примет вид $y^2 + 2y - 24 = 0$. Решив квадратное уравнение относительно y, находим: $y_1 = 4$, $y_2 = -6$. Но $y = 2^x$, значит, нам остается решить два уравнения:

$$2^x = 4;\ 2^x = -6.$$

Из первого уравнения находим: $x = 2$; второе уравнение не имеет корней, поскольку при любых значениях x выполняется неравенство $2^x > 0$.

Ответ: 2.

Подведем некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения показательных уравнений*.

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 7.

2) Метод уравнивания показателей. Он основан на теореме о том, что уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, где a — положительное число, отличное от 1. Мы применили этот метод в примерах 1 и 2.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 3.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot (\sqrt{2})^{x+y} = 16^{3x-y}; \\ 9^{x+y} - 3^{x+y} = 72. \end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{x+y} = 16^{3x-y};$$

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(x+y)} = 2^{4(3x-y)};$$

$$2^{1+\frac{x+y}{2}} = 2^{12x-4y};$$

$$1 + \frac{x+y}{2} = 12x - 4y;$$

$$2 + x + y = 24x - 8y;$$

$$23x - 9y = 2.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду. Введем новую переменную $z = 3^{x+y}$. Тогда второе уравнение системы примет вид $z^2 - z = 72$, откуда находим: $z_1 = 9$, $z_2 = -8$.

Из уравнения $3^{x+y} = 9$ находим $x + y = 2$; уравнение $3^{x+y} = -8$ не имеет решений.

Итак, второе уравнение системы нам удалось преобразовать к виду

$$x + y = 2.$$

3) Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 23x - 9y = 2; \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 9 и сложим полученное уравнение с первым уравнением системы:

$$(23x - 9y) + (9x + 9y) = 2 + 18;$$

$$32x = 20;$$

$$x = \frac{5}{8}.$$

Из уравнения $x + y = 2$ находим: $\frac{5}{8} + y = 2$; $y = \frac{11}{8}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$.

Показательными неравенствами называют неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1) проведем следующие рассуждения. Разделив обе части неравенства (1) на выражение $a^{g(x)}$, получим неравенство $\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} > 1$, равносильное неравенству (1) (поскольку обе части неравенства (1) мы разделили на выражение, положительное при любых значениях x). Далее имеем:

$$a^{f(x)-g(x)} > 1, \text{ т. е. } a^t > 1, \text{ где } t = f(x) - g(x).$$

Теперь следует рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t > 0$ (см. теорему 2 из § 7). Значит, $f(x) - g(x) > 0$, т. е. $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $t < 0$ (см. теорему 4 из § 7). Значит, $f(x) - g(x) < 0$, т. е. $f(x) < g(x)$.

Тем самым доказано следующее утверждение.

***Теорема 2.* Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$.**

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример 5. Решить неравенства:

а) $2^{2x-4} > 64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $0,5^{x^2-3x} \leqslant 0,5^{3x-8}$.

Решение. а) Имеем $2^{2x-4} > 2^6$. Это неравенство равносильно неравенству того же смысла $2x - 4 > 6$, откуда находим: $x > 5$.

б) Воспользовавшись тем, что $\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное неравенство в виде $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Здесь основанием служит число $\frac{1}{3} < 1$. Значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $2x - 3,5 > 0,5$, откуда находим: $x > 2$.

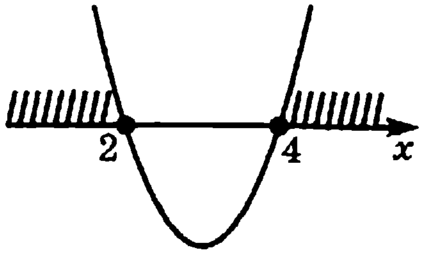


Рис. 40

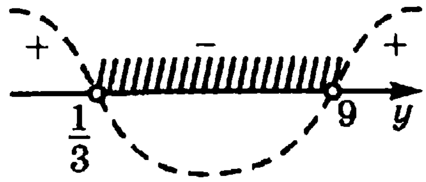


Рис. 41

в) Заданное неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $x^2 - 3x \geqslant 3x - 8$, т. е. $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$. Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 8$:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

Значит, неравенство $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$ выполняется при

$$x \leqslant 2 \text{ или } x \geqslant 4 \text{ (рис. 40).}$$

Пример 6. Решить неравенство $\dfrac{4 \cdot 3^x - 10}{3^{x+1} - 1} < 1.$

Р е ш е н и е. Заметим, что $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$, и введем новую переменную $y = 3^x$. Получим: $\dfrac{4y - 10}{3y - 1} < 1.$

Далее последовательно получаем:

$$\frac{4y - 10}{3y - 1} - 1 < 0; \quad \frac{y - 9}{3y - 1} < 0; \quad \frac{y - 9}{3\left(y - \frac{1}{3}\right)} < 0.$$

Применив для решения последнего неравенства метод интервалов (рис. 41), находим: $\frac{1}{3} < y < 9.$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\frac{1}{3} < 3^x < 9; \quad 3^{-1} < 3^x < 3^2; \quad -1 < x < 2.$$

Упражнения

8.1. Решите уравнение:

а) $3^x = 9$;

б) $2^x = 16$;

в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$;

г) $0{,}5^x = 0{,}125$.

Решите уравнение:

8.2. а) $4^x = \frac{1}{16}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$;

б) $7^x = \frac{1}{343}$; г) $0{,}2^x = 0{,}00032$.

8.3. а) $10^x = \sqrt[4]{1000}$; в) $0{,}3^x = \sqrt[4]{0{,}0081}$;

б) $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25\sqrt{5}$.

8.4. а) $0{,}3^x = \frac{1000}{27}$; в) $0{,}7^x = \frac{1000}{343}$;

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$; г) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$.

8.5. а) $2^{x+1} = 4$; в) $0{,}4^{4-5x} = 0{,}16\sqrt{0{,}4}$;

б) $5^{3x-1} = 0{,}2$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 8\sqrt{2}$.

○8.6. а) $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 6^{x-3}$;

б) $6^{2x-8} = 216^x$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8x+1} = 1{,}5^{2x-3}$.

○8.7. а) $3^{x^2-4{,}5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$; в) $\sqrt{2^{-1}} \cdot 2^{x^2-7{,}5} = \frac{1}{128}$;

б) $0{,}5^{x^2-5{,}5} \cdot \sqrt{0{,}5} = 32$; г) $0{,}1^{x^2-0{,}5} \cdot \sqrt{0{,}1} = 0{,}001$.

○8.8. а) $2^x\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{9}$; в) $5^x \cdot 2^x = 0{,}1^{-3}$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \sqrt{\frac{27}{125}}$; г) $0{,}3^x \cdot 3^x = \sqrt[3]{0{,}81}$.

○8.9. а) $(\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{6}$; б) $(\sqrt[3]{3})^{2x} \cdot (\sqrt[3]{9})^{2x} = 243$.

Решите уравнение:

○8.10. а) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} = 0{,}81^{-2x}$; б) $\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+4} = 20{,}25^{x+1}$.

○8.11. а) $\sqrt{625}\cdot\sqrt{5^{14x-9}} = \sqrt[6]{125\cdot 5^{6x-12}}$;

б) $\sqrt[3]{0{,}2}\cdot\sqrt{0{,}2^{2x-\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{0{,}04^{-3x+6}}$.

○8.12. а) $27^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{9^{x+1}}$; в) $3^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+1}} = 243$;

б) $2^{\sqrt{13-x^2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; г) $\left(0{,}1^{\sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{x+6}} = \frac{1}{10^6}$.

○8.13. а) $3^x - 3^{x+3} = -78$; в) $2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7} - 7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8} = 49$;

б) $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4{,}8$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{4}{9}$.

○8.14. а) $2^{2x} - 6\cdot 2^x + 8 = 0$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x} - 6 = 0$;

б) $3^{2x} - 6\cdot 3^x - 27 = 0$; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} + 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{x} - 6 = 0$.

○8.15. а) $2\cdot 4^x - 5\cdot 2^x + 2 = 0$;

б) $3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 = 0$;

в) $4\left(\frac{1}{16}\right)^x + 15\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 = 0$;

г) $(0{,}25)^x + 1{,}5\cdot(0{,}5)^x - 1 = 0$.

○8.16. а) $4\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^x - 17\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x + 4 = 0$;

б) $0{,}01^x + 9{,}9\cdot(0{,}1)^x - 1 = 0$;

в) $3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x + 7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6 = 0$;

г) $5\cdot\left(\frac{4}{25}\right)^x + 23\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x - 10 = 0$.

Решите уравнение:

○8.17. а) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 32 = 0$;

в) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 162 = 0$.

●8.18. а) $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$;

б) $\sqrt[4]{16^{x+1}} + 188 = 8 \cdot 2^x - 0{,}5^{3-x}$.

○8.19. а) $2^x = 3^x$;

б) $25^x = 7^{2x}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 8^x$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

●8.20. а) $3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$;

б) $2^{x+1} \cdot 5^{x+3} = 250 \cdot 9^x$.

○8.21. а) $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$;

б) $35^{4x+2} = 5^{3x+4} \cdot 7^{5x}$.

○8.22. а) $2^{4x+2} \cdot 5^{-3x-1} = 6{,}25 \cdot 2^{x+1}$;

б) $3^{5x-1} \cdot 7^{2x-2} = 3^{3x+1}$.

○8.23. а) $3^x = -x - \frac{2}{3}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4x + 6$;

в) $2x + 1{,}8 = -5^x$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 3x + 1$.

○8.24. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}5x + 5$;

б) $3^x = -x + 4$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 2x + 9$;

г) $3^{\frac{x}{2}} = -0{,}5x + 4$.

●8.25. а) $18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0$;

б) $12^x - 6^{x+1} + 8 \cdot 3^x = 0$.

Решите уравнение:

●8.26. а) $\frac{1}{3^x+2}=\frac{1}{3^{x+1}}$; в) $\frac{1}{5^x+4}=\frac{1}{5^{x+1}}$;

б) $\frac{5}{12^x+143}=\frac{5}{12^{x+2}}$; г) $\frac{8}{11^x+120}=\frac{8}{11^{x+2}}$.

●8.27. а) $3\cdot 2^{2x}+6^x-2\cdot 3^{2x}=0$;

б) $2\cdot 2^{2x}-3\cdot 10^x-5\cdot 5^{2x}=0$;

в) $3^{2x+1}-4\cdot 21^x-7\cdot 7^{2x}=0$;

г) $5\cdot 3^{2x}+7\cdot 15^x-6\cdot 25^x=0$.

Решите систему уравнений:

○8.28. а) $\begin{cases}2^{x+y}=16,\\ 3^y=27^x;\end{cases}$ в) $\begin{cases}5^{2x-y}=125,\\ 4^{x-y}=4;\end{cases}$

б) $\begin{cases}0{,}5^{3x}\cdot 0{,}5^y=0{,}5,\\ 2^{3x}\cdot 2^{-y}=32;\end{cases}$ г) $\begin{cases}0{,}6^{x+y}\cdot 0{,}6^x=0{,}6,\\ 10^x\cdot 10^y=(0{,}01)^{-1}.\end{cases}$

○8.29. а) $\begin{cases}(\sqrt{3})^{x+2y}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{27},\\ 0{,}1^x\cdot 10^{3y}=10;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(\sqrt{5})^{2x+y}=\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5},\\ \left(\frac{1}{5}\right)^x\cdot 5^y=125;\end{cases}$

б) $\begin{cases}27^y\cdot 3^x=1,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot 4^y=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}5^y\cdot 25^x=625,\\ \left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot 9^y=\frac{1}{27}.\end{cases}$

Решите неравенство:

8.30. а) $2^x\geqslant 4$; в) $2^x\leqslant 8$;

б) $2^x<\frac{1}{2}$; г) $2^x>\frac{1}{16}$.

8.31. а) $3^x\leqslant 81$; в) $5^x>125$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\frac{1}{27}$; г) $(0{,}2)^x\leqslant 0{,}04$.

Решите неравенство:

8.32. а) $3^{2x-4} \leqslant 27$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$;

в) $5^{4x+2} \geqslant 125$;

г) $(0,1)^{5x-9} < 0,001$.

8.33. а) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$;

б) $0,5^{4x+3} \geqslant 0,5^{6x-1}$;

в) $9^{x-1} \leqslant 9^{-2x+8}$;

г) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-3x-0,5} < \left(\frac{7}{11}\right)^{x+1,5}$.

○8.34. а) $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3x+1} \geqslant \left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$;

в) $11^{-7x+1} \leqslant 121^{-2x-10}$;

г) $(0,09)^{5x-1} < 0,3^{x+7}$.

○8.35. а) $2^{3x+6} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$;

б) $\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} > \left(\frac{12}{7}\right)^{3+2x}$;

в) $25^{-x+3} \geqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$;

г) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-8} < \left(\frac{9}{25}\right)^{-x+3}$.

○8.36. а) $2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \geqslant \frac{1}{2}$;

б) $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt{5} \leqslant 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1}$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$;

г) $0,25 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10-x} > 4\sqrt{64}$.

○8.37. а) $7^{x^2-5x} < \left(\frac{1}{7}\right)^6$;

б) $0,6^{x^2-x} \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^6$;

в) $11^{2x^2+3x} \leqslant 121$;

г) $0,3^{x^2-10x} > \left(3\frac{1}{3}\right)^{24}$.

○8.38. а) $\sqrt{2^{-1}} \cdot \sqrt{2^{x^2-7,5}} \geqslant 2^{-7}$;

б) $0,9^{x^2-4x} < \left(\frac{10}{9}\right)^3$;

в) $14^{x^2+x} \leqslant 196$;

г) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x^2-13x} > 9$.

○8.39. а) $2^x + 2^{x+2} \leqslant 20$;

б) $3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3}$;

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$;

г) $0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} \geqslant 0,7$.

Решите неравенство:

О8.40. а) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 \leqslant 0$;   в) $0{,}2^{2x} - 1{,}2 \cdot 0{,}2^x + 0{,}2 > 0$;

б) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 \geqslant 0$;   г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} + 6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x - 7 < 0$.

О8.41. а) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 \geqslant 0$;

б) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} + 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 < 0$;

г) $(0{,}5)^{2x-1} + 3 \cdot (0{,}5)^x - 2 \geqslant 0$.

О8.42. а) $3^x < 5^x$;   б) $6^x \geqslant 2^x$;   в) $\left(\frac{12}{13}\right)^x \leqslant 12^x$;   г) $0{,}6^x > 3^x$.

О8.43. а) $5^x \leqslant -x + 6$;   в) $3^x \geqslant -x + 4$;

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 3x + 1$;   г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0{,}5x + 5$.

О8.44. а) $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geqslant 1$;   в) $37^{\frac{5x-9}{x+6}} \leqslant 1$;

б) $0{,}36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 1$;   г) $\left(\frac{29}{30}\right)^{\frac{9x-18}{6-x}} > 1$.

О8.45. а) $3^{\frac{x-4}{x}-3} < \frac{1}{27}$;   в) $8^{\frac{2-x}{x}-2} > \frac{1}{64}$;

б) $\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{6x-1}{x}-1} \geqslant \frac{81}{64}$;   г) $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{5x+1}{x}-1} \leqslant \frac{121}{36}$.

О8.46. а) $4^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \leqslant 2{,}25$;   в) $5^x \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^x \geqslant \frac{4}{9}$;

б) $9^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x > 0{,}25$;   г) $3^x \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^x < 0{,}0625$.

О8.47. Сколько натуральных чисел являются решениями неравенства:

а) $\frac{1}{64} < 8^{-2x+3} < 512$;   б) $\frac{1}{27} \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^{7-x} \leqslant 243$?

○**8.48.** Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

а) $2{,}5^{2x+3} \leqslant 6{,}25$;

б) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{7x-9} \geqslant \dfrac{8}{125}$;

в) $1{,}1^{5x-3} < 1{,}21$;

г) $0{,}7^{9x+4} > 0{,}49$.

○**8.49.** Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

а) $5^{x^2-2x} \leqslant 125$;

б) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \dfrac{1}{49}$;

в) $2^{-x^2+8x} > 128$;

г) $(0{,}3)^{x^2-x} > 0{,}09$?

●**8.50.** Решите неравенство:

а) $2x + 2 - x^2 \geqslant 3^{x^2-2x+2}$;

б) $2^{x^2-4x+5} \geqslant 4x - 2 - x^2$.

§ 9. Понятие логарифма

Рассмотрим уравнение $2^x = 4$ и решим его графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = 2^x$ и прямую $y = 4$ (рис. 42). Они пересекаются в точке $A(2; 4)$, значит, $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Рассуждая точно так же, находим корень уравнения $2^x = 8$ (см. рис. 42): $x = 3$.

А теперь попробуем решить уравнение $2^x = 6$ (геометрическая иллюстрация представлена на рис. 42). Ясно, что уравнение имеет один корень, но, в отличие от предыдущих случаев, где корни уравнений были найдены без труда (причем понятно, что их можно найти и не пользуясь графиками), с уравнением $2^x = 6$ у нас возникают трудности: по чертежу мы не можем определить значение корня, можем только установить, что оно заключено в промежутке от 2 до 3.

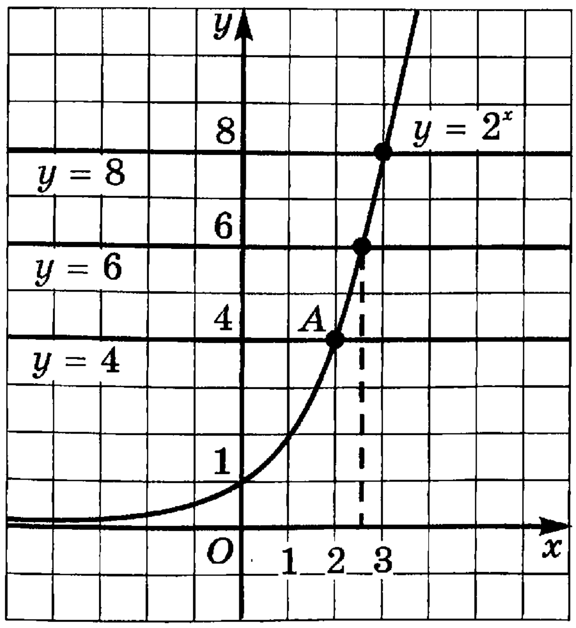


Рис. 42

С подобной ситуацией мы уже встречались в § 1, когда, решая уравнение $x^4 = 5$, поняли, что надо вводить новый символ математического языка (корень этого уравнения обозначили $\sqrt[4]{5}$). Обдумывая ситуацию с показательным

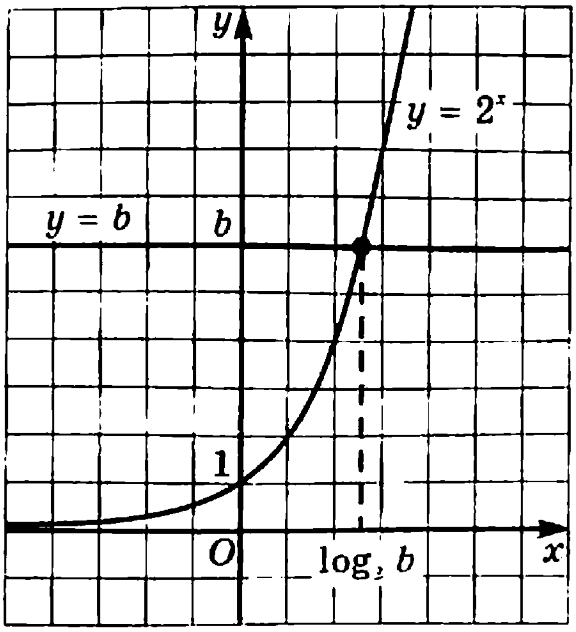


Рис. 43

уравнением $2^x = 6$, математики ввели в рассмотрение новый символ $\log_2$, который назвали *логарифмом по основанию* 2, и с помощью этого символа корень уравнения $2^x = 6$ записали так: $x = \log_2 6$ (читают: *логарифм числа* 6 *по основанию* 2). Теперь для любого уравнения вида $2^x = b$, где $b > 0$, можно найти корень — им будет число $\log_2 b$ (рис. 43).

Мы говорили об уравнении $2^x = 6$. С равным успехом мы можем говорить и об уравнении $3^x = 5$, и об уравнении $10^x = 0{,}3$, и об уравнении $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$, и вообще о любом уравнении вида $a^x = b$, где a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$. Единственный корень уравнения $a^x = b$ записывают так:

$$x = \log_a b$$

(читают: *логарифм числа b по основанию a*).

Определение. **Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a** называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Например,

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$

$$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3, \text{ так как } 3^{-3} = \frac{1}{27};$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2, \text{ так как } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25;$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}, \text{ так как } 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Особо выделим три формулы (попробуйте их обосновать, это очень просто):

$$\boxed{\log_a a = 1,} \qquad \boxed{\log_a 1 = 0,} \qquad \boxed{\log_a a^c = c.}$$

Например,

$$\log_2 2 = 1, \ \log_3 3^4 = 4, \ \log_5 5^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}, \ \log_8 1 = 0.$$

Для числа $\log_2 6$, которое встретилось нам в начале параграфа, точного рационального значения мы указать не можем, поскольку $\log_2 6$ — *иррациональное число*. Доказывается это довольно красиво.

Предположим, что $\log_2 6$ — рациональное число, т. е. что $\log_2 6 = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Тогда $2^{\frac{m}{n}} = 6$; $\left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n = 6^n$; $2^m = 6^n$. Последнее равенство невозможно, поскольку его правая часть есть натуральное число, которое делится без остатка на 3, а левая часть делиться без остатка на 3 никак не может.

Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, и, следовательно, $\log_2 6$ — иррациональное число.

Определение логарифма можно переписать так:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b, \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.}$$

В самом деле, что надо подставить вместо $*$ в равенство $a^* = b$? Какое число должно находиться в показателе степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b? Ответ следует из данного выше определения: этим показателем является $\log_a b$. Значит, вместо $*$ надо подставить число $\log_a b$, что мы и сделали.

Например, $2^{\log_2 3} = 3$, $5^{\log_5 10} = 10$, $10^{\log_{10} 0{,}4} = 0{,}4$.

Подчеркнем, что $\log_a b = c$ и $a^c = b$ — одна и та же зависимость между числами a, b и c, но только вторая описана на более простом языке (использует более простые символы), чем первая.

Операцию нахождения логарифма числа обычно называют *логарифмированием*. Эта операция является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием. Сравните:

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$0{,}3^4 = 0{,}0081$	$\log_{0,3} 0{,}0081 = 4$

Вычисление значения логарифма можно свести к решению некоторого показательного уравнения.

Пример. Вычислить:

а) $\log_4 128$; б) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}$.

Решение. а) Пусть $\log_4 128 = x$. Тогда, по определению логарифма, $4^x = 128$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{2x} = 2^7;\ 2x = 7;\ x = 3{,}5.$$

б) Пусть $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = x$. Тогда, по определению логарифма, $\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$. Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}};\ \frac{x}{2} = \frac{2}{3};\ x = \frac{4}{3}.$$

в) Пусть $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2} = x$. Тогда, по определению логарифма, $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4\sqrt{2}.$ Решая это показательное уравнение, последовательно находим:

$$2^{-x} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}};\ -x = 2 + \frac{1}{2};\ x = -2{,}5.$$

Логарифм по основанию 10 обычно называют *десятичным логарифмом*. Например, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 3{,}4$ — десятичные логарифмы. Вместо символа $\log_{10}$ принято использовать символ lg; так, вместо $\log_{10} 5$ пишут $\lg 5$, а вместо $\log_{10} 3{,}4$ пишут $\lg 3{,}4$. В недалеком прошлом десятичным логарифмам отдавали предпочтение; опираясь на особенности принятой десятичной системы счисления, составляли весьма подробные таблицы десятичных логарифмов, наносили значения логарифмов на шкалы специальных логарифмических линеек. В эпоху всеобщей компьютеризации десятичные логарифмы утратили свою ведущую роль, более важными стали логарифмы по основанию 2, но особенно широко используются в математике и технике логарифмы, основанием которых служит число e (такое же знаменитое, как число π), которое мы уже упоминали выше, в § 7.

Упражнения

Докажите, что:

9.1. а) $\log_2 2 = 1$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$; в) $\log_{0,1} 0{,}1 = 1$; г) $\log_5 1 = 0$.

9.2. а) $\log_4 64 = 3$; в) $\log_{0,2} 125 = -3$;
б) $\log_2 4\sqrt{2} = 2{,}5$; г) $\lg 100\sqrt[5]{10} = 2{,}2$.

Вычислите:

9.3. а) $\log_2 2^4$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; в) $\log_8 8^{-3}$; г) $\log_{0,1} (0,1)^5$.

9.4. а) $\log_3 \frac{1}{27}$; в) $\lg 0,0001$;

б) $\log_{0,1} 0,0001$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 81$.

○**9.5.** а) $\log_{\sqrt{7}} 49$; в) $\log_{\frac{1}{15}} \left(225\sqrt[3]{15}\right)$;

б) $\log_{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{8}\right)$; г) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{64}{729}$.

○**9.6.** а) $\log_{\sqrt{2}} 1$; б) $\log_{0,5} \frac{1}{4\sqrt{2}}$; в) $\log_{\sqrt{3}} 81\sqrt{3}$; г) $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

9.7. а) $3^{\log_3 8}$; б) $4^{\log_4 23}$; в) $12^{\log_{12} 1,3}$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 7}$.

○**9.8.** а) $2^{3+\log_2 9}$; б) $7^{1+\log_7 4}$; в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2+\log_{\frac{1}{6}} 20}$; г) $\left(\sqrt{7}\right)^{4+\log_{\sqrt{7}} 0,5}$.

○**9.9.** а) $8^{2\log_8 3}$; б) $6^{-3\log_6 2}$; в) $3^{4\log_3 2}$; г) $5^{-2\log_5 3}$.

Решите уравнение:

9.10. а) $\lg x = 1$; б) $\lg x = -2$; в) $\lg x = 3$; г) $\lg x = -4$.

9.11. а) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; в) $\log_8 x = \frac{1}{3}$;

б) $\log_{0,027} x = \frac{2}{3}$; г) $\log_{0,25} x = \frac{3}{2}$.

9.12. а) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; в) $\log_{32} x = -\frac{4}{5}$;

б) $\log_{0,125} x = -\frac{2}{3}$; г) $\log_{0,01} x = -\frac{3}{2}$.

9.13. а) $\log_x 4 = 2$; в) $\log_x 49 = 2$;

б) $\log_x 27 = 3$; г) $\log_x 125 = 3$.

Решите уравнение:

○9.14. а) $\log_x \frac{1}{27} = -3$; в) $\log_x \frac{1}{16} = -4$;

б) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$; г) $\log_x 8 = -\frac{1}{3}$.

9.15. а) $2^x = 9$; б) $12^x = 7$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4$; г) $(0{,}2)^x = 5$.

○9.16. а) $3^{x+1} = 14$; в) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} = 11$;

б) $4^{5x-4} = 10$; г) $(\sqrt{5})^{8-9x} = 6$.

○9.17. а) $4^x - 5 \cdot 2^x = -6$; в) $9^x - 7 \cdot 3^x = -12$;

б) $16^x = 6 \cdot 4^x - 5$; г) $-9 \cdot 7^x + 14 = -49^x$.

Решите неравенство:

○9.18. а) $2^x \geqslant 9$; б) $12^x \leqslant 7$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 4$; г) $(0{,}2)^x > 5$.

●9.19. а) $4^x - 5 \cdot 2^x \geqslant -6$; в) $9^x - 7 \cdot 3^x < -12$;

б) $16^x \leqslant 6 \cdot 4^x - 5$; г) $9 \cdot 7^x + 14 > -49^x$.

§ 10. Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график

В § 9 мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию a. Для любого положительного числа можно найти логарифм по заданному основанию. Но тогда следует подумать и о функции $y = \log_a x$, $x \in (0; +\infty)$, о ее графике и свойствах. Этим и займемся в настоящем параграфе.

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, монотонна, значит обратима. Выразив x через y из уравнения $y = a^x$, получим: $x = \log_a y$; поменяв x и y местами, получим: $y = \log_a x$. Таким образом, функция $y = \log_a x$ является обратной для функции $y = a^x$, а потому справедливо следующее утверждение.

График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.

На рисунке 44 схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $a > 1$; на рисунке 45

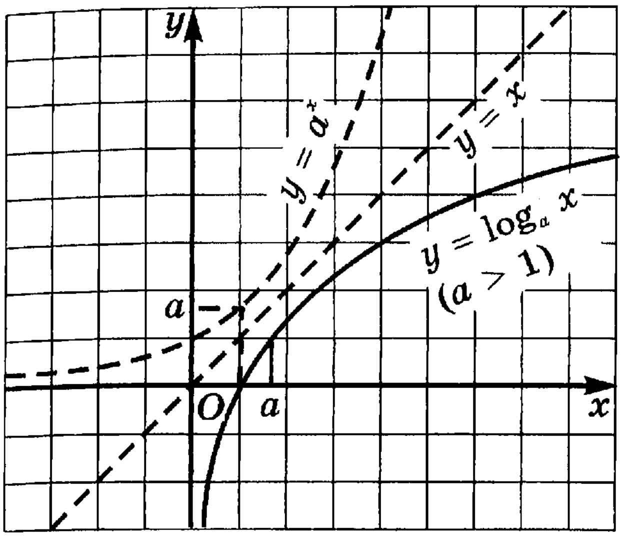


Рис. 44

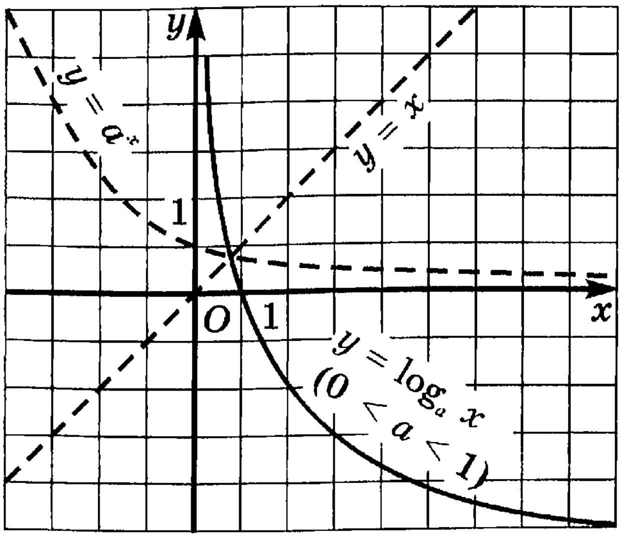


Рис. 45

схематически изображены графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ в случае, когда $0 < a < 1$.

График функции $y = \log_a x$ называют *логарифмической кривой*, хотя на самом деле нового названия можно было и не придумывать. Ведь это та же экспонента, что служит графиком показательной функции, только по-другому расположенная на координатной плоскости.

Если значение основания a указано, то график логарифмической функции можно построить по точкам. Пусть, например, нужно построить график функции $y = \log_2 x$. Составляя таблицу контрольных точек, будем руководствоваться соотношением $\log_2 2^r = r$ (см. § 9). Поэтому в таблицу в качестве значений аргумента x мы включим числа, являющиеся степенями числа 2.

Имеем:

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2;$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1;$$

$$\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0;$$

$$\log_2 2 = \log_2 2^1 = 1;$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2;$$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

Сведем полученные результаты в таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−2	−1	0	1	2	3

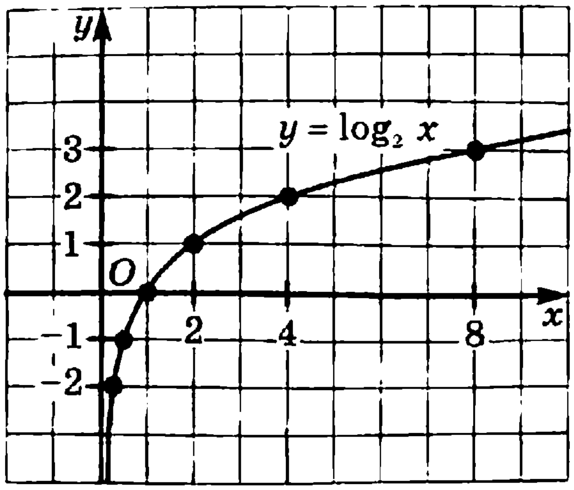


Рис. 46

Отметив на координатной плоскости точки $\left(\frac{1}{4}; -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, (1; 0), (2; 1), (4; 2), (8; 3), проводим через них логарифмическую кривую (рис. 46).

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рисунке 44:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) возрастает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вверх.

Свойства функции $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Необходимую информацию извлекаем из геометрической модели, представленной на рисунке 45:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;
2) не является ни четной, ни нечетной;
3) убывает на $(0; +\infty)$;
4) не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Отметим, что ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции и в случае, когда $a > 1$, и в случае, когда $0 < a < 1$.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке:

а) $y = \lg x$, $x \in [1; 1000]$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $x \in \left[\frac{1}{9}; 27\right]$.

Решение. а) Функция $y = \lg x$ — непрерывная и возрастающая, поскольку основание этой логарифмической функции больше 1 (напомним, что $\lg x = \log_{10} x$). Следовательно, своих наименьшего и наибольшего значений функция достигает на концах заданного отрезка [1; 1000]:

$$y_{\text{наим}} = \lg 1 = 0;$$

$$y_{\text{наиб}} = \lg 1000 = \log_{10} 10^3 = 3.$$

б) Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ непрерывная и убывающая, поскольку основание этой логарифмической функции, т. е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Следовательно, своих наибольшего и наименьшего значений функция достигает на концах заданного отрезка $\left[\frac{1}{9};\ 27\right]$:

$$y_{\text{наиб}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2;$$

$$y_{\text{наим}} = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3.$$

Пример 2. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_2 x = 0$; б) $\log_2 x > 0$; в) $\log_2 x < 0$.

Решение. а) Уравнение $\log_2 x = 0$ имеет один корень $x = 1$, поскольку график функции $y = \log_2 x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0) (см. рис. 46).

б) График функции $y = \log_2 x$ расположен выше оси x при $x > 1$ (см. рис. 46). Значит, решение неравенства $\log_2 x > 0$ имеет вид $x > 1$.

в) График функции $y = \log_2 x$ расположен ниже оси x при $0 < x < 1$ (см. рис. 46). Значит, решение неравенства $\log_2 x < 0$ имеет вид $0 < x < 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $x > 1$; в) $0 < x < 1$.

Пример 3. Решить уравнение и неравенства:

а) $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$; б) $\log_{\frac{2}{5}} x > 0$; в) $\log_{\frac{2}{5}} x < 0$.

Решение. График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ схематически изображен на рисунке 45. Заданные уравнение и неравенства нетрудно решить, используя эту геометрическую модель.

а) Уравнение $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$ имеет один корень $x = 1$, поскольку график функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ пересекает ось x в единственной точке (1; 0) (см. рис. 45).

б) График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ расположен выше оси x при $0 < x < 1$ (см. рис. 45). Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x > 0$ имеет вид $0 < x < 1$.

в) График функции $y = \log_{\frac{2}{5}} x$ расположен ниже оси x при $x > 1$ (см. рис. 45). Значит, решение неравенства $\log_{\frac{2}{5}} x < 0$ имеет вид $x > 1$.

Ответ: а) $x = 1$; б) $0 < x < 1$; в) $x > 1$.

Пример 4. Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Построим график функции $y = 2^x$ и выделим его часть на луче $(-\infty; 1]$ (выделенная часть пунктирной линии на рис. 47). Построим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и выделим его часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (выделенная часть тонкой линии на рис. 47). Объединение двух выделенных линий и представляет собой график заданной функции.

Прочитаем график, т. е. укажем иллюстрируемые графиком свойства заданной функции:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на луче $(-\infty; 1]$, убывает на открытом луче $(1; +\infty)$;

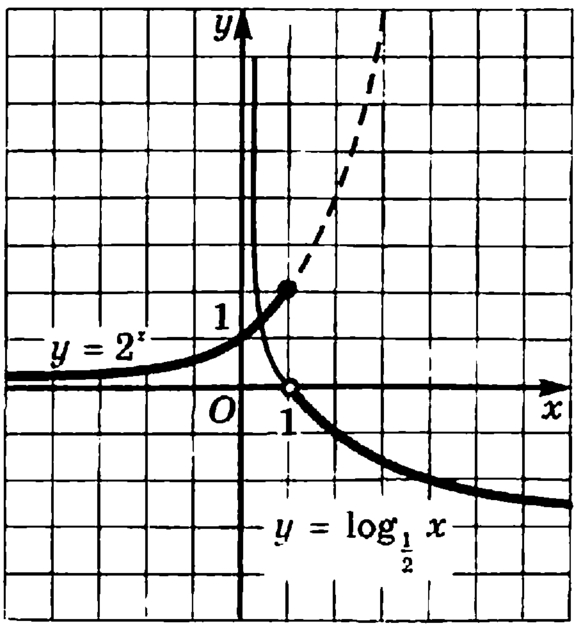


Рис. 47

4) не ограничена снизу, ограничена сверху;

5) $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается в точке $x = 1$), наименьшего значения у функции нет;

6) функция претерпевает разрыв в точке $x = 1$; на луче $(-\infty; 1]$ и открытом луче $(1; +\infty)$ она непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2]$.

Заметим, что прямая $y = 0$ (ось x) является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to -\infty$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. ◀

Пример 5. Решить уравнение $\lg x = 11 - x$.

Решение. Достаточно очевидно, что $x = 10$ — корень уравнения. В самом деле, $\lg 10 = 1$ и $11 - 10 = 1$, т. е. при $x = 10$ заданное уравнение обращается в верное числовое равенство $1 = 1$.

Так как функция $y = \lg x$ возрастает, а функция $y = 11 - x$ убывает, то заданное уравнение имеет только один корень, который уже найден путем подбора: $x = 10$. ◀■

Упражнения

10.1. Найдите значение логарифмической функции $y = \log_2 x$ в указанных точках:

а) $x_1 = 4,\ x_2 = 8,\ x_3 = 16$;

б) $x_1 = \frac{2}{\sqrt{8}},\ x_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}$;

в) $x_1 = \frac{1}{8},\ x_2 = \frac{1}{32},\ x_3 = \frac{1}{128}$;

г) $x_1 = \sqrt{32},\ x_2 = 16\sqrt{128}$.

10.2. Постройте (схематично) график функции:

а) $y = \log_{\sqrt{3}} x$;

б) $y = \log_{\frac{1}{\pi}} x$;

в) $y = \lg x$;

г) $y = \log_{0,2} x$.

10.3. Сравните числа:

а) $\log_4 7$ и $\log_4 23$;

б) $\log_{\frac{2}{3}} 0,8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 1$;

в) $\log_9 \sqrt{15}$ и $\log_9 13$;

г) $\log_{\frac{1}{12}} \frac{1}{7}$ и $\log_{\frac{1}{12}} \frac{2}{3}$.

10.4. Сравните с единицей число:

а) $\log_3 41$; б) $\log_{2,3} 0,1$; в) $\log_{\frac{1}{7}} 2,6$; г) $\log_{\sqrt{7}} 0,4$.

○10.5. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\log_2 0,7$; $\log_2 2,6$; $\log_2 0,1$; $\log_2 \frac{1}{6}$; $\log_2 3,7$;

б) $\log_{0,3} 17$; $\log_{0,3} 2,7$; $\log_{0,3} \frac{1}{2}$; $\log_{0,3} 3$; $\log_{0,3} \frac{2}{3}$.

○10.6. Сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\sqrt[3]{9}$;

б) $\log_{0,5} 3$ и $\sin 3$;

в) $\log_2 5$ и $\sqrt[3]{7}$;

г) $\lg 0,2$ и $\cos 0,2$.

10.7. Исследуйте функцию на монотонность:

а) $y = \log_{2,6} x$; в) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;

б) $y = \log_{\frac{3}{4}} x$; г) $y = \log_{0,9} x$.

10.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке $[a; b]$:

а) $y = \log_3 x$, $\left[\frac{1}{3}; 9\right]$; в) $y = \lg x$, $[1; 1000]$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{8}; 16\right]$; г) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{8}{27}; \frac{81}{16}\right]$.

O10.9. а) Найдите, на каком промежутке функция $y = \log_3 x$ принимает наибольшее значение, равное 4, и наименьшее, равное -2.

б) Найдите, на каком промежутке функция $y = \log_{0,5} x$ принимает наибольшее значение, равное -1, и наименьшее, равное -3.

O10.10. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4)$; б) $y = \log_{0,3} (x^2 - 4x + 3)$.

O10.11. Решите уравнение:

а) $\log_3 x = 4 - x$; в) $\log_5 x = 6 - x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x = x + \frac{2}{3}$.

Решите неравенство:

10.12. а) $\log_6 x \geqslant 2$; в) $\log_9 x \leqslant \frac{1}{2}$;

б) $\log_{0,1} x > 3$; г) $\log_{\frac{4}{5}} x < 3$.

10.13. а) $\log_9 x \leqslant -1$; в) $\log_5 x \geqslant -2$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x < -4$; г) $\log_{0,2} x > -3$.

Постройте график функции:

10.14. а) $y = 2 + \log_3 x$; в) $y = -3 + \log_4 x$;

б) $y = -1 + \log_{\frac{1}{3}} x$; г) $y = 0,5 + \log_{0,1} x$.

10.15. а) $y = 3 \log_4 x$; в) $y = 5 \log_8 x$;

б) $y = 2 \log_{\frac{1}{3}} x$; г) $y = \frac{1}{2} \log_{0,5} x$.

Постройте график функции:

10.16. а) $y = -2 \log_7 x$; в) $y = -0{,}5 \log_2 x$;

б) $y = -4 \log_{\frac{1}{6}} x$; г) $y = -\log_{\frac{2}{3}} x$.

10.17. а) $y = \log_2 (x + 4)$; в) $y = \log_5 (x - 1)$;

б) $y = \log_{\frac{1}{5}} (x - 3)$; г) $y = \log_{0,3} (x + 5)$.

10.18. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_6 (4x - 1)$; в) $y = \log_9 (8x + 9)$;

б) $y = \log_{\frac{1}{9}} (7 - 2x)$; г) $y = \log_{0,3} (2 - 3x)$.

○10.19. Решите графически неравенство:

а) $\log_2 x \geqslant -x + 1$; в) $\log_9 x \leqslant -x + 1$;

б) $\log_{\frac{3}{7}} x > 4x - 4$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x < 2x - 2$.

○10.20. Решите неравенство:

а) $\log_3 x \leqslant 4 - x$; в) $\log_5 x \geqslant 6 - x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x < x + \dfrac{1}{2}$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x > x + \dfrac{2}{3}$.

○10.21. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -3x + 3, \text{ если } x \leqslant 1, \\ \log_{\frac{1}{3}} x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

а) Вычислите $f(-8)$, $f(-6)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(9)$;

б) постройте график функции;

в) прочитайте график функции.

○10.22. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} -4x + 4, \text{ если } x < 1, \\ \log_2 x, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -(x - 4)^2, \text{ если } x < 5, \\ \log_{0,2} x, \text{ если } x \geqslant 5; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \log_2 x, \text{ если } 0 < x < 2, \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \log_{\sqrt{2}} x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

О10.23. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_5 (x^2 - 5x + 6)$;

б) $y = \log_{\frac{2}{3}} (-x^2 - 5x + 14)$;

в) $y = \log_9 (x^2 - 13x + 12)$;

г) $y = \log_{0,2} (-x^2 + 8x + 9)$.

О10.24. Найдите область значений функции:

а) $y = \log_{\sqrt{3}} x$;

в) $y = -\log_{\frac{1}{10}} x$;

б) $y = -22 \log_7 x$;

г) $y = 12 \log_{\frac{1}{3}} x$.

О10.25. Дано $f(x) = \log_2 x$. Докажите, что выполняется следующее соотношение:

а) $f(2^x) = x$;

б) $f(4^x) + f(8^x) = 5x$.

§ 11. Свойства логарифмов

В предыдущих параграфах мы ввели понятие логарифма положительного числа по положительному и отличному от 1 основанию, изучили свойства функции $y = \log_a x$, построили ее график. Но чтобы успешно использовать на практике операцию логарифмирования, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе. *Все свойства формулируются и доказываются только для положительных значений переменных, содержащихся под знаками логарифмов.* Впрочем, два свойства доказательства не требуют, они представляют собой запись определения логарифма как показателя степени, мы ими уже пользовались:

$$\boxed{\log_a a^r = r;} \qquad \boxed{a^{\log_a b} = b.}$$

Теорема 1. **Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел**

$$\boxed{\log_a bc = \log_a b + \log_a c.}$$

Например,

$$\log_2 15 = \log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5;$$

$$\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2;$$

$$\lg 5 + \lg 2 = \lg (5 \cdot 2) = \lg 10 = 1.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\log_a bc = x$, $\log_a b = y$, $\log_a c = z$. Нам надо доказать, что выполняется равенство $x = y + z$.

Так как $\log_a bc = x$, то $a^x = bc$.

Так как $\log_a b = y$, то $a^y = b$.

Так как $\log_a c = z$, то $a^z = c$.

Итак, $a^x = bc$, $a^y = b$, $a^z = c$.

Значит, $a^y \cdot a^z = a^x$, т. е. $a^{y+z} = a^x$.

Но если степени двух положительных чисел равны и основания степеней равны и отличны от 1, то равны и показатели степеней. Значит, $y + z = x$, что и требовалось доказать. ◀

Приведем краткую запись доказательства теоремы.

<table>
<tr><th>Подготовка к доказательству (введение новых переменных)</th><th>Перевод на более простой язык</th><th>Доказательство</th></tr>
<tr><td>$\log_a bc = x$
$\log_a b = y$
$\log_a c = z$</td><td rowspan="2">$a^x = bc$
$a^y = b$
$a^z = c$</td><td rowspan="2">$a^x = a^y a^z$
$a^x = a^{y+z}$
$x = y + z$</td></tr>
<tr><td>Доказать: $x = y + z$</td></tr>
</table>

Теорема остается справедливой и для случая, когда логарифмируемое выражение представляет собой произведение более двух положительных чисел.

Например, $\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7 = \log_5 (2 \cdot 3 \cdot 7) = \log_5 42$.

Замечание. Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если... то» (как принято для теорем в математике). Приведем соответствующую формулировку: *если a, b и c — положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливо равенство* $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. **Если a, b, c — положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливо равенство**

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя* или *логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя.*

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 2{,}5 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2} = \log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 5 + 1;$$

$$\lg 15 - \lg 3 = \lg \frac{15}{3} = \lg 5.$$

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства, а вы попробуйте сделать соответствующие комментарии, аналогичные тем, что были приведены при доказательстве теоремы 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a \frac{b}{c} = x$ $\log_a b = y$ $\log_a c = z$	$a^x = \frac{b}{c}$ $a^y = b$ $a^z = c$	$a^x = a^y : a^z$ $a^x = a^{y-z}$ $x = y - z$
Доказать: $x = y - z$		

Теорема 3. **Если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство**

$$\boxed{\log_a b^r = r \log_a b.}$$

Краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.*

Например,

$$\log_{\frac{1}{2}} 25 = \log_{\frac{1}{2}} 5^2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} 5;$$

$$\lg \frac{1}{5} = \lg 5^{-1} = -\lg 5;$$

$$3 \log_2 5 = \log_2 5^3 = \log_2 125.$$

Доказательство. Приведем краткую запись доказательства, а вы, как и при доказательстве теоремы 2, попробуйте сделать соответствующие комментарии по аналогии с теоремой 1.

Подготовка к доказательству (введение новых переменных)	Перевод на более простой язык	Доказательство
$\log_a b^r = x$ $\log_a b = y$	$a^x = b^r$ $a^y = b$	$a^x = (a^y)^r$ $a^x = a^{ry}$ $x = ry$
Доказать: $x = ry$		

Пример 1. Известно, что положительные числа x, y, z, t связаны соотношением $x = \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}}$. Выразить $\log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) через логарифмы по основанию a чисел y, z, t.

Решение. 1) Логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя. Значит, $\log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a (yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t}$.

2) Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей. Значит, $\log_a (yz^3) = \log_a y + \log_a z^3$.

3) Логарифм степени равен произведению показателя степени и логарифма основания степени. Значит,

$$\log_a z^3 = 3 \log_a z; \quad \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a t^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_a t.$$

4) В итоге получаем:

$$\log_a x = \log_a (yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a y + \log_a z^3 - \frac{1}{3} \log_a t =$$

$$= \log_a y + 3 \log_a z - \frac{1}{3} \log_a t.$$

При наличии определенного опыта решение примера можно не разбивать на последовательные этапы, а оформить так:

$$\log_a x = \log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a y + \log_a z^3 - \log_a t^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \log_a y + 3 \log_a z - \frac{1}{3} \log_a t.$$

Еще раз подчеркнем, что все свойства логарифмов мы получили при условии, что переменные принимают положительные значения. А как быть, если про знак переменной ничего не известно? Можно ли, например, написать $\lg x^2 = 2 \lg x$, если о знаке числа x ничего не известно? Отвечаем: нельзя, поскольку при $x < 0$ левая часть равенства определена, а правая не определена. Как же быть в таком случае? Нас выручит знак модуля. Поскольку $x^2 = |x|^2$ и $|x| > 0$ при $x \neq 0$, верное равенство выглядит так: $\lg x^2 = 2 \lg |x|$. Это частный случай общей формулы

$$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x| \quad (n \in Z).}$$

Помните и о том, что заменять выражение $\log_a bc$ выражением $\log_a b + \log_a c$ мы имеем право лишь в случае, когда $b > 0$ и $c > 0$. Если мы в этом не уверены, но знаем, что $bc > 0$, то, поскольку в этом случае выполняется равенство $bc = |bc| = |b| \cdot |c|$, следует использовать формулу

$$\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|.$$

Если числовое выражение A составлено из положительных чисел x, y, z с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы чисел x, y, z. Такое преобразование называют *логарифмированием* (см. пример 1). Ценность операции логарифмирования состоит в том, что она позволяет сводить вычисления к более простым операциям: произведение, частное, степень заменяются соответственно на сумму, разность, произведение.

Иногда приходится решать обратную задачу: находить выражение, логарифм которого представлен через логарифмы некоторых чисел. Такое действие называют *потенцированием*. При этом используется следующее утверждение.

Теорема 4. **Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.**

Это достаточно очевидное следствие монотонности логарифмической функции.

Пример 2. Известно, что $\lg x = 2 \lg y - \lg z + 0{,}5 \lg t$. Выразить x через y, z, t.

Решение. Имеем последовательно:

$$2 \lg y = \lg y^2;$$

$$0{,}5 \lg t = \lg t^{0{,}5} = \lg \sqrt{t};$$

$$2 \lg y - \lg z + 0{,}5 \lg t = \lg y^2 + \lg \sqrt{t} - \lg z = \lg \frac{y^2\sqrt{t}}{z}.$$

Итак, $\lg x = \lg \dfrac{y^2\sqrt{t}}{z}$ и, следовательно, $x = \dfrac{y^2\sqrt{t}}{z}$. ◁■

Пример 3. Известно, что $\log_3 2 = a$. Вычислить $\log_3 6{,}75$.

Решение. Выразим число 6,75 через числа 3 и 2 (3 — основание логарифма, 2 — заданное в условии логарифмируемое число) с помощью операций умножения, деления и возведения в степень:

$$6{,}75 = 6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} = \frac{3^3}{2^2}.$$

Далее находим:

$$\log_3 6{,}75 = \log_3 \left(\frac{3^3}{2^2}\right) = \log_3 3^3 - \log_3 2^2 = 3 - 2 \log_3 2 = 3 - 2a.$$ ◁■

Пример 4. Вычислить $49^{1-0{,}25\log_7 25}$.

Решение. Поработаем с показателем степени:

$$1 - 0{,}25\log_7 25 = \log_7 7 - \log_7 25^{\frac{1}{4}} = \log_7 7 - \log_7 \sqrt[4]{5^2} =$$

$$= \log_7 7 - \log_7 \sqrt{5} = \log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Теперь заданное числовое выражение мы можем записать в виде $49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}}$.

Далее находим:

$$49^{\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{2\log_7 \frac{7}{\sqrt{5}}} = 7^{\log_7 \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2} = 7^{\log_7 \frac{49}{5}}.$$

Остается вспомнить, что $a^{\log_a b} = b$. Значит,

$$7^{\log_7 \frac{49}{5}} = \frac{49}{5} = 9{,}8.$$

Пример 5. Положительное число a записано в стандартном виде $a = a_0 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a_0 < 10$ и n — целое число (порядок числа a). Найти десятичный логарифм числа a.

Решение. $\lg a = \lg(a_0 \cdot 10^n) = \lg a_0 + \lg 10^n = \lg a_0 + n$.

Таким образом, $\lg a = n + \lg a_0$.

Проанализируем полученный результат. По условию $1 \leqslant a_0 < 10$, значит, в силу возрастания функции $y = \lg x$ имеем: $\lg 1 \leqslant \lg a_0 < \lg 10$, т. е. $0 \leqslant \lg a_0 < 1$.

Таким образом, нам удалось представить число $\lg a$ в виде суммы целого числа n и числа $\lg a_0$, заключенного в промежутке $[0; 1)$.

Число n — это наибольшее целое число, не превосходящее $\lg a$ (такое число, напомним, — это целая часть числа $\lg a$). Его называют *характеристикой десятичного логарифма числа a*. Число $\lg a_0$, т. е. дробную часть числа $\lg a$, называют *мантиссой десятичного логарифма числа a*.

Математики, как вы знаете, ничего просто так не делают; если уж они выделили десятичные логарифмы, ввели термины «характеристика» и «мантисса», значит, с определенной целью. С какой? Для ответа на этот вопрос рассмотрим пример: вычислить $\lg 70$, $\lg 700$, $\lg 700\,000$, $\lg 0{,}007$, если известно, что $\lg 7 \approx 0{,}8451$.

Имеем:

$$\lg 70 = \lg(7 \cdot 10) = \lg 7 + \lg 10 \approx 0{,}8451 + 1 = 1{,}8451;$$

$$\lg 700 = \lg(7 \cdot 10^2) = \lg 7 + \lg 10^2 \approx 0{,}8451 + 2 = 2{,}8451;$$

$$\lg 700\,000 = \lg(7\cdot10^5) = \lg 7 + \lg 10^5 \approx 0{,}8451 + 5 = 5{,}8451;$$
$$\lg 0{,}007 = \lg(7\cdot10^{-3}) = \lg 7 + \lg 10^{-3} \approx 0{,}8451 - 3 = -2{,}1549.$$

Таким образом, достаточно составить таблицу десятичных логарифмов чисел, заключенных в промежутке [1; 10), чтобы с ее помощью и с помощью стандартного вида положительного числа вычислять десятичные логарифмы любых положительных чисел.

Завершая этот параграф, рассмотрим занимательный пример, где используются десятичные логарифмы.

Пример 6. Сколько цифр содержит число 7^{100}?

Решение. Часто начинают решать эту задачу «в лоб»: возводят число 7 постепенно в 1, 2, 3-ю и т. д. степени и пытаются увидеть закономерность. Имеем:

$7^1 = 7$ (одна цифра), $7^2 = 49$ (две цифры), $7^3 = 343$ (три цифры), $7^4 = 2401$ (четыре цифры), $7^5 = 16\,807$ (пять цифр), $7^6 = 117\,649$ (шесть цифр).

Возникает естественная гипотеза: каков показатель степени, столько цифр в результате. Но эта гипотеза рушится уже на следующем шаге: $7^7 = 823\,543$ — в этом числе не 7, а 6 цифр. Так что метод перебора и угадывания здесь не срабатывает.

Поступим по-другому: вычислим десятичный логарифм числа 7^{100}. Получаем: $\lg 7^{100} = 100\cdot\lg 7 = 100\cdot0{,}8451 = 84{,}51$.

Видим, что характеристика логарифма равна 84. Значит, порядок числа 7^{100} равен 84, а потому в числе 7^{100} — 85 цифр.

Упражнения

Вычислите:

11.1. а) $\log_6 12 + \log_6 3$; в) $\log_{26} 2 + \log_{26} 13$;
б) $\lg 25 + \lg 4$; г) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$.

11.2. а) $\log_{144} 3 + \log_{144} 4$; в) $\log_{216} 2 + \log_{216} 3$;
б) $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2$; г) $\log_{12} \frac{1}{2} + \log_{12} \frac{1}{72}$.

11.3. а) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7$;
б) $\log_2 15 - \log_2 30$; г) $\log_{0,2} 40 - \log_{0,2} 8$.

○11.4. а) $\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{3}$; в) $\log_{\frac{2}{3}} 32 - \log_{\frac{2}{3}} 243$;
б) $\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 14$; г) $\log_{0,1} 0{,}003 - \log_{0,1} 0{,}03$.

○11.5. а) $(3 \lg 2 - \lg 24) : (\lg 3 + \lg 27)$;

б) $(\log_3 2 + 3\log_3 0{,}25) : (\log_3 28 - \log_3 7)$.

○11.6. а) Известно, что $\log_3 2 = c$. Найдите $\log_3 8$.

б) Известно, что $\log_{0,5} 3 = a$. Найдите $\log_{0,5} 81$.

○11.7. а) Известно, что $\log_5 2 = a$. Найдите $\log_5 10$.

б) Известно, что $\log_6 4 = m$. Найдите $\log_6 24$.

○11.8. а) Известно, что $\log_6 42 = b$. Найдите $\log_6 7$.

б) Известно, что $\log_7 35 = n$. Найдите $\log_7 5$.

Найдите число x по его логарифму:

○11.9. а) $\log_2 x = \log_2 72 - \log_2 9$;

б) $\log_4 x = \log_4 2\sqrt{2} + \log_4 8\sqrt{8}$;

в) $\log_7 x = \log_7 14 - \log_7 98$;

г) $\lg x = \lg \frac{1}{8} + \lg \frac{1}{125}$.

○11.10. а) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 19 - \log_{\frac{1}{2}} 38 + \log_{\frac{1}{2}} 3$;

б) $\log_{0,2} x = \log_{0,2} 93 + \log_{0,2} 4 - \log_{0,2} 31$;

в) $\log_{\sqrt{7}} x = 2\log_{\sqrt{7}} 4 - \log_{\sqrt{7}} 2 + \log_{\sqrt{7}} 5$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} \frac{7}{9} + \log_{\frac{1}{3}} 21 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7$.

○11.11. а) $\lg x = 2 \lg 7 - 3 \lg 3 + \lg 8$;

б) $\lg x = 2 \lg 3 + \lg 6 - \frac{1}{2} \lg 9$;

в) $\lg x = \frac{1}{2} \lg 3 + \frac{2}{3} \lg 5 - \frac{1}{3} \lg 4$;

г) $\lg x = -\frac{1}{2} \lg 5 + \lg\sqrt{5} + \frac{1}{4} \lg 25$.

11.12. Вычислите:

а) $\log_2 4 \cdot \log_3 27$;

б) $\log_5 125 : \log_4 16$;

в) $\log_{0,5} 0{,}25 \cdot \log_{0,3} 0{,}09$;

г) $\lg 1000 : \lg 100$.

Вычислите:

О11.13. а) $\log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_3 9 : \log_4 \frac{1}{4}$;

б) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} : \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{49} \cdot \log_5 \sqrt{5}$;

в) $\log_3 81 : \log_{0,5} 2 \cdot \log_5 125$;

г) $\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} \cdot \log_{0,3} \sqrt{0,3} : \lg 10\sqrt{0,1}$.

О11.14. а) $2^{2+\log_2 5}$; б) $5^{\log_5 16 - 1}$; в) $3^{1+\log_3 8}$; г) $8^{\log_8 3 - 2}$.

О11.15. а) $2^{3\log_2 4}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_{\frac{1}{2}} 7}$; в) $5^{2\log_5 3}$; г) $(0,3)^{3\log_{0,3} 6}$.

О11.16. а) $8^{\log_2 3}$; б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 13}$; в) $100^{\lg 5}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5}$.

О11.17. а) $36^{\frac{1}{2}\log_6 18}$; в) $121^{\frac{1}{2}\log_{11} 35}$;

б) $64^{\frac{1}{4}\log_8 25}$; г) $25^{\frac{1}{4}\log_5 9}$.

О11.18. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1+0,5\log_{\frac{1}{2}} 14}$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 18}$;

б) $25^{1-0,5\log_5 11}$; г) $49^{1-0,5\log_7 14}$.

О11.19. а) $\sqrt[3]{81^{\log_9 6} - 7^{\log_7 9}}$; б) $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}}$.

О11.20. а) $\dfrac{\log_7 25}{\log_7 5}$; б) $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 9}{\log_{\frac{1}{3}} 27}$; в) $\dfrac{\log_4 36}{\log_4 6}$; г) $\dfrac{\log_{0,3} 32}{\log_{0,3} 64}$.

О11.21. а) $\dfrac{\frac{1}{2}\log_3 64 - 2\log_3 2}{\log_3 2}$; в) $\dfrac{2\log_{0,5} 2 + \log_{0,5}\sqrt{10}}{\log_{0,5} 10 - \log_{0,5}\sqrt{10} + \log_{0,5} 4}$;

б) $\dfrac{\log_6 12 + 2\log_6 2}{\frac{1}{3}\log_6 27 + 4\log_6 2}$; г) $\dfrac{\log_{0,3} 16 - 5\log_{0,3} 2}{\log_{0,3} 15 - \log_{0,3} 30}$.

11.22. Вычислите:

а) $\log_4 \sin\frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\log_4 \sin^3\frac{13\pi}{6} + \log_4 \sin\frac{7\pi}{12}$;

б) $\frac{1}{2}\log_8\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 - \log_8\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}$.

11.23. Известно, что положительные числа x, a, b и c связаны соотношением $x = \frac{a^2c^3}{\sqrt{b}}$. Выразите $\log_n x$ через логарифмы по основанию n чисел a, b, c.

11.24. Прологарифмируйте по основанию 2:

а) $16a^2b^3$; б) $\frac{1}{8}a(\sqrt{b})^7$; в) $48a\sqrt{a}\cdot b^4$; г) $\frac{b^3}{4a^5}$.

11.25. Прологарифмируйте по основанию 5:

а) $125a^4 : b^4$; в) $\frac{25\sqrt{5}\cdot a^6b^7}{c^3}$;

б) $\frac{625(\sqrt{a}\cdot b)^3}{c^{\frac{1}{2}}}$; г) $\left(\frac{a^6}{\sqrt[5]{b^2}}\right)^{-3}$.

Решите уравнение:

11.26. а) $\log_4 x = \log_4 2 + \log_4 7$; в) $\log_9 x = \log_9 5 + \log_9 6$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} 7 = \log_{\frac{1}{3}} 4$; г) $\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_{\frac{1}{4}} 5$.

11.27. а) $\log_6 12 + \log_6 x = \log_6 24$;

б) $\log_{0,5} 3 + \log_{0,5} x = \log_{0,5} 12$;

в) $\log_5 13 + \log_5 x = \log_5 39$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 4$.

11.28. а) $\log_2 3x = \log_2 4 + \log_2 6$;

б) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{2}\right) = \log_{\sqrt{3}} 6 + \log_{\sqrt{3}} 2$;

в) $\log_4 5x = \log_4 35 - \log_4 7$;

г) $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{3}\right) = \log_{\sqrt{2}} 15 - \log_{\sqrt{2}} 6$.

○11.29. а) $\log_x 8 - \log_x 2 = 2$; в) $\log_x 3 + \log_x 9 = 3$;

б) $\log_x 2 + \log_x 8 = 4$; г) $\log_x \sqrt{5} + \log_x (25\sqrt{5}) = 3$.

11.30. Положительное число b записано в стандартном виде $b = b_0 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant b_0 < 10$ и n — целое число. Найдите десятичный логарифм числа b:

а) $b = 9 \cdot 10^2$;
в) $b = 9 \cdot 10^4$;
б) $b = 9 \cdot 10^{-3}$;
г) $b = 9 \cdot 10^{-5}$.

(Для справок: $\lg 9 \approx 0{,}95$.)

11.31. Найдите десятичный логарифм числа:

а) $\lg 50$;
в) $\lg 5000$;
б) $\lg 0{,}005$;
г) $\lg 0{,}00005$.

(Для справок: $\lg 5 \approx 0{,}7$.)

○11.32. Вычислите:

а) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)$.

○11.33. Известно, что $\log_3 2 = a$ и $\log_3 5 = b$. Выразите через a и b:

а) $\log_3 10$; б) $\log_3 20$; в) $\log_3 50$; г) $\log_3 200$.

●11.34. Сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$; б) $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$.

Постройте график функции:

○11.35. а) $y = \log_2 8x$;
в) $y = \log_3 \frac{x}{27}$;
б) $y = \log_{\frac{1}{2}} 4x$;
г) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9}$.

○11.36. а) $y = \log_2 x^3$;
в) $y = \log_3 \frac{1}{x}$;
б) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$;
г) $y = \log_{\frac{1}{2}} x^3$.

○11.37. а) $y = \log_2 \frac{4}{x}$;
в) $y = \log_3 9x^3$;
б) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^3}{27}$;
г) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{x}$.

§ 12. Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \tag{1}$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опираясь на теорему 4 из § 11, согласно которой равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$, мы можем сформулировать следующее утверждение.

***Теорема.* Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

На практике эту теорему применяют так: переходят от уравнения (1) к уравнению $f(x) = g(x)$ (такой переход называют *потенцированием*), решают уравнение $f(x) = g(x)$, а затем проверяют его корни по условиям $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, определяющим область допустимых значений переменной (ОДЗ). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями уравнения (1). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение. 1) Потенцируя (т. е. освобождаясь от знаков логарифмов), получаем:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$
$$x^2 - x - 12 = 0;$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

2) Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x = 4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т. е. $x = 4$ — посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ — корень заданного уравнения.

Ответ: -3.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

Решение. 1) Сначала надо преобразовать уравнение к виду (1). Для этого воспользуемся правилом: сумма логарифмов равна логарифму произведения. Оно позволяет заменить выражение $\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3)$ выражением $\log_2 (x + 4)(2x + 3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать так:

$$\log_2 (x + 4)(2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

2) Потенцируя, получаем:

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 13x + 11 = 0;$$
$$x_1 = -1, \quad x_2 = -5{,}5.$$

3) Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

(обратите внимание: *условия для проверки всегда составляют по исходному уравнению*). Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет — это посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание. Иногда удобнее использовать другой порядок ходов: сначала решить систему неравенств — в примере 2 решением системы неравенств будет интервал $(-1{,}5;\ 0{,}5)$; это область допустимых значений переменной. Затем найти корни: $x_1 = -1$, $x_2 = -5{,}5$. И наконец, сделать проверку найденных значений x, но уже не с помощью системы неравенств, а по найденной заранее области допустимых значений. В примере 2 значение $x = -1$ принадлежит интервалу $(-1{,}5;\ 0{,}5)$, а значение $x = -5{,}5$ этому интервалу не принадлежит. Следовательно, $x = -5{,}5$ — посторонний корень, а $x = -1$ — единственный корень заданного логарифмического уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg \frac{x}{10}}$.

Решение. Так как $\lg \dfrac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1$, то заданное уравнение можно переписать так: $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg x - 1}$.

Есть смысл ввести новую переменную: $y = \lg x$; тогда уравнение примет следующий вид: $y^2 + y + 1 = \frac{7}{y-1}$.

Далее находим:

$$(y - 1)(y^2 + y + 1) = 7;$$
$$y^3 - 1 = 7;$$
$$y^3 = 8;$$
$$y = 2.$$

Это значение удовлетворяет условию $y \neq 1$ (посмотрите: у записанного выше рационального относительно y уравнения переменная содержится в знаменателе, а потому следует проверить, не обращается ли знаменатель в нуль при найденном значении переменной y).

Итак, $y = 2$. Но $y = \lg x$, значит, нам осталось решить простейшее логарифмическое уравнение $\lg x = 2$, откуда находим: $x = 100$.

Ответ: 100.

Подведем некоторые итоги. Можно выделить *три основных метода решения логарифмических уравнений.*

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод в § 10.

2) Метод потенцирования. Он основан на теореме, полученной в начале параграфа. Мы применили этот метод в примерах 1 и 2.

3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 3.

Завершая параграф, рассмотрим пример, в котором для решения уравнения используется еще один метод — *метод логарифмирования*, и пример решения системы логарифмических уравнений.

Пример 4. Решить уравнение $x^{1-\log_5 x} = 0{,}04$.

Решение. Возьмем от обеих частей уравнения логарифмы по основанию 5; это равносильное преобразование уравнения, поскольку обе его части принимают только положительные значения. Получим: $\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04$.

Учтем, что $\log_5 x^r = r \log_5 x$ и что

$$\log_5 0{,}04 = \log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 5^{-2} = -2.$$

Это позволит переписать заданное уравнение так:

$$(1 - \log_5 x) \cdot \log_5 x = -2.$$

Замечаем, что «проявилась» новая переменная $y = \log_5 x$, относительно которой уравнение принимает весьма простой вид $(1 - y)y = -2$. Далее получаем:

$$y^2 - y - 2 = 0;$$
$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1.$$

Но $y = \log_5 x$, значит, нам осталось решить два уравнения:

$$\log_5 x = 2; \quad \log_5 x = -1.$$

Из первого уравнения находим: $x = 5^2$, т. е. $x = 25$; из второго уравнения находим: $x = 5^{-1}$, т. е. $x = \frac{1}{5}$.

Ответ: 25; $\frac{1}{5}$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ 2\log_3(x - y) = \log_3(y + 2). \end{cases}$$

Решение. 1) Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$$\lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6;$$
$$\lg 10(2x - y) = \lg 6(y + 2x);$$
$$10(2x - y) = 6(y + 2x);$$
$$x = 2y.$$

2) Преобразуем второе уравнение системы к более простому виду:

$$\log_3(x - y)^2 = \log_3(y + 2);$$
$$(x - y)^2 = y + 2.$$

3) Решим полученную систему уравнений

$$\begin{cases} x = 2y, \\ (x - y)^2 = y + 2. \end{cases}$$

Подставив $2y$ вместо x во второе уравнение системы, получим:

$$(2y - y)^2 = y + 2;$$
$$y^2 = y + 2;$$
$$y^2 - y - 2 = 0;$$
$$y_1 = 2, y_2 = -1.$$

Из соотношения $x = 2y$ находим соответственно: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

4) Осталось сделать проверку найденных пар (4; 2) и (−2; −1) с помощью условий, которые задают область допустимых значений переменных x, y; эти условия мы находим, анализируя исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y > 0, \\ y + 2x > 0, \\ x - y > 0, \\ y + 2 > 0. \end{cases}$$

Пара (4; 2) удовлетворяет этим условиям, а пара (−2; −1) не удовлетворяет (например, она «не проходит» уже через первое условие $2x - y > 0$).

Ответ: (4; 2).

Упражнения

Решите уравнение:

12.1. а) $\log_2 (3x - 6) = \log_2 (2x - 3)$;

б) $\log_6 (14 - 4x) = \log_6 (2x + 2)$;

в) $\log_{\frac{1}{6}} (7x - 9) = \log_{\frac{1}{6}} x$;

г) $\log_{0,2} (12x + 8) = \log_{0,2} (11x + 7)$.

○12.2. а) $\log_3 (x^2 + 6) = \log_3 5x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} (7x^2 - 200) = \log_{\frac{1}{2}} 50x$;

в) $\lg (x^2 - 6) = \lg (8 + 5x)$;

г) $\lg (x^2 - 8) = \lg (2 - 9x)$.

○12.3. а) $\log_{0,1} (x^2 + 4x - 20) = 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 10x + 10) = 0$;

в) $\log_7 (x^2 - 12x + 36) = 0$;

г) $\log_{12} (x^2 - 8x + 16) = 0$.

○12.4. а) $\log_3 (x^2 - 11x + 27) = 2$;

б) $\log_{\frac{1}{7}} (x^2 + x - 5) = -1$;

в) $\log_2 (x^2 - 3x - 10) = 3$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 3x - 1) = -2$.

○12.5. а) $\log_2 (x^2 + 7x - 5) = \log_2 (4x - 1)$;

б) $\log_{0,3} (-x^2 + 5x + 7) = \log_{0,3} (10x - 7)$;

в) $\log_2 (x^2 + x - 1) = \log_2 (-x + 7)$;

г) $\log_{0,2} (-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2} (-x - 31)$.

○12.6. а) $\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0$;

б) $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$;

г) $\log_{0,2}^2 x + \log_{0,2} x - 6 = 0$.

Решите уравнение:

О12.7. а) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$;

б) $3\log_4^2 x - 7\log_4 x + 2 = 0$;

в) $2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 = 0$;

г) $3\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 5\log_{\frac{1}{2}} x - 2 = 0$.

12.8. а) $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5$;

б) $\log_7 4 = \log_7 x - \log_7 9$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 18$;

г) $\log_{0,4} 9 - \log_{0,4} x = \log_{0,4} 3$.

О12.9. а) $2\log_8 x = \log_8 2,5 + \log_8 10$;

б) $3\log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 x$;

в) $3\log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$;

г) $4\log_{0,1} x = \lg_{0,1} 2 + \log_{0,1} 8$.

О12.10. а) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 2) = \log_3 (2x - 1)$;

б) $\log_{11} (x + 4) + \log_{11} (x - 7) = \log_{11} (7 - x)$;

в) $\log_{0,6} (x + 3) + \log_{0,6} (x - 3) = \log_{0,6} (2x - 1)$;

г) $\log_{0,4} (x + 2) + \log_{0,4} (x + 3) = \log_{0,4} (1 - x)$.

О12.11. а) $\log_{23} (2x - 1) - \log_{23} x = 0$;

б) $\log_{0,5} (4x - 1) - \log_{0,5} (7x - 3) = 1$;

в) $\log_{3,4} (x^2 - 5x + 8) - \log_{3,4} x = 0$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 9) - \log_{\frac{1}{2}} (8 - 3x) = 2$.

О12.12. а) $\log_x (2x^2 + x - 2) = 3$;

б) $\log_{x-1}(12x - x^2 - 19) = 3$.

Решите уравнение:

О12.13. а) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \dfrac{9}{\lg 10x}$;

б) $\log_3^2 x + 3\log_3 x + 9 = \dfrac{37}{\log_3 \dfrac{x}{27}}$;

в) $\lg^2 x - 2\lg x + 4 = \dfrac{9}{\lg 100x}$;

г) $\log_2^2 x + 7\log_2 x + 49 = \dfrac{-218}{\log_2 \dfrac{x}{128}}$.

О12.14. а) $\lg 100x \cdot \lg x = -1$;

б) $\lg^2 10x + \lg 10x = 6 - 3\lg \dfrac{1}{x}$.

О12.15. а) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$; б) $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$.

О12.16. а) $x^{\log_3 x} = 81$; в) $x^{\log_2 x} = 16$;

б) $x^{\log_{0,5} x} = \dfrac{1}{16}$; г) $x^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \dfrac{1}{81}$.

О12.17. а) $x^{1 + \log_3 x} = 9$; в) $x^{5 + \log_2 x} = \dfrac{1}{16}$;

б) $x^{\log_{0,5} x - 2} = 0,125$; г) $x^{\log_{\frac{1}{3}} x - 4} = 27$.

Решите систему уравнений:

О12.18. а) $\begin{cases} \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \log_3(x^2 + 4x - 3) - \log_3 y = 1. \end{cases}$

О12.19. а) $\begin{cases} \log_5 (x + y) = 1, \\ \log_6 x + \log_6 y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{0,5} (x + 2y) = \log_{0,5} (3x + y), \\ \log_7 (x^2 - y) = \log_7 x. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

О12.20. а) $\begin{cases} \log_9 (x - y) = \dfrac{1}{2}, \\ \log_{64} x - \log_{64} y = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} (3x - y) = \log_{\frac{1}{3}} (x + 4), \\ \log_9 (x^2 + x - y) = \log_9 x^2. \end{cases}$

О12.21. а) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 16, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 81, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$

О12.22. а) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-y} = \dfrac{1}{27}, \\ \log_2 2x - \log_2 y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} \cdot (\sqrt{2})^{y} = \log_9 3, \\ \log_4 y - \log_4 x = 1. \end{cases}$

§ 13. Логарифмические неравенства

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Для решения неравенства (1), где, разумеется, следует считать, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, преобразуем его к виду

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$$

и далее $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, т. е. $\log_a t > 0$, где $t = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Теперь следует рассмотреть два случая: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a t > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $t > 1$ (см. § 10, рис. 44). Значит, $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 1$, т. е. $f(x) > g(x)$, — мы учли, что $g(x) > 0$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a t > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $0 < t < 1$ (см. § 10, рис. 45). Значит, $0 < \dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$, т. е. $f(x) < g(x)$, — мы учли, что $g(x) > 0$ и $f(x) > 0$.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:**

при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$;

при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

На практике эту теорему применяют так: при $a > 1$ переходят от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ к равносильной ему системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — к равносильной неравенству $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют область допустимых значений переменной для неравенства (1), а знак последнего неравенства каждой из систем (обратите внимание!) либо совпадает со знаком неравенства (1) — в случае, когда $a > 1$, — либо противоположен знаку неравенства (1) — в случае, когда $0 < a < 1$.

Пример 1. Решить неравенства:
а) $\log_3 (2x - 4) > \log_3 (14 - x)$;
б) $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 4) > \log_{\frac{1}{3}} (14 - x)$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной для заданного неравенства определяется условиями $2x - 4 > 0$ и $14 - x > 0$. Поскольку основанием логарифмов служит число 3, а оно больше 1, то, «освобождаясь» от знаков логарифмов, мы получим неравенство того же смысла: $2x - 4 > 14 - x$.

В итоге получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 > 14 - x. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим, что $x > 2$, из второго — $x < 14$, из третьего — $x > 6$. Геометрическая иллюстрация (рис. 48) помогает найти решение системы неравенств: $6 < x < 14$.

б) Здесь основание логарифма, т. е. число $\frac{1}{3}$, меньше 1. Значит, соответствующая система неравенств имеет вид

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 < 14 - x \end{cases}$$

(обратите внимание: знак последнего неравенства системы противоположен знаку исходного логарифмического неравенства).

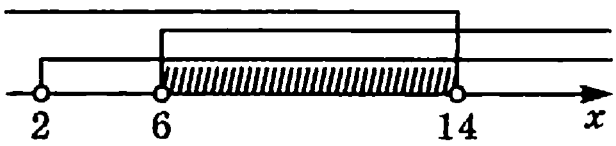


Рис. 48

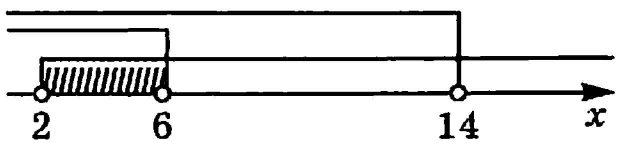


Рис. 49

Из первого неравенства системы находим, что $x > 2$, из второго — $x < 14$, из третьего — $x < 6$. Геометрическая иллюстрация (рис. 49) помогает найти решение системы неравенств: $2 < x < 6$.

Ответ: а) $6 < x < 14$; б) $2 < x < 6$.

Замечание. Еще раз рассмотрим систему неравенств, которая получилась в примере 1, а). Третье неравенство системы имеет вид $2x - 4 > 14 - x$, а второе: $14 - x > 0$. Но если $2x - 4 > 14 - x$, а $14 - x > 0$, то, по свойству транзитивности неравенств, получаем: $2x - 4 > 0$. Что это значит? Это значит, что первое неравенство системы с самого начала можно было отбросить без всякого ущерба для решения системы.

Рассуждая аналогично в системе неравенств, которую мы получили в примере 1, б), можно было с самого начала отбросить второе неравенство.

Решая систему неравенств, полезно посмотреть, нет ли в ней неравенства, которое логически следует из других. Если такое неравенство есть, его можно отбросить. Советуем и вам так поступать, но, разумеется, только в том случае, если вы уверены в правильности своих выводов.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant -4$.

Решение. Представим -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$: $-4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Это позволит переписать заданное неравенство так: $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16$.

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число, меньшее 1, составляем равносильную заданному неравенству систему неравенств:

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 \geqslant 16. \end{cases}$$

Обратите внимание: если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое (если $A \geqslant 16$, то тем более $A > 0$). Значит, первое неравенство системы можно отбросить. Решая второе неравенство, находим:

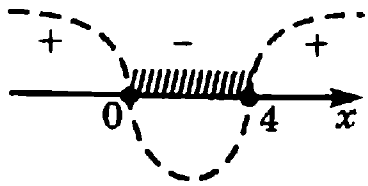


Рис. 50

$$x^2 - 4x \leqslant 0; \;\; x(x - 4) \leqslant 0; \;\; 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ (рис. 50).}$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\lg x + \lg (45 - x) < 2 + \lg 2.$$

Решение. Имеем последовательно:

$$\lg x + \lg (45 - x) = \lg x(45 - x) = \lg (45x - x^2);$$

$$2 + \lg 2 = \lg 100 + \lg 2 = \lg 100 \cdot 2 = \lg 200.$$

Значит, заданное неравенство можно переписать так:

$$\lg (45x - x^2) < \lg 200.$$

Освобождаясь от знаков десятичных логарифмов, получим неравенство того же смысла: $45x - x^2 < 200$. А условия, задающие область допустимых значений переменной, всегда определяют по исходному неравенству; в данном примере они таковы: $x > 0$ и $45 - x > 0$. В итоге получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ 45 - x > 0, \\ 45x - x^2 < 200. \end{cases}$$

Первые два неравенства можно записать в виде двойного неравенства $0 < x < 45$. Решая третье неравенство системы, находим:

$$x^2 - 45x + 200 > 0;$$
$$(x - 40)(x - 5) > 0;$$
$$x < 5, \; x > 40.$$

Решите неравенство:

О13.10. а) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$;

б) $3\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 3$;

в) $\log_5 x - \log_5 35 \leqslant \log_5 \frac{1}{7}$;

г) $4\log_{0,6} x \geqslant \log_{0,6} 8 + \log_{0,6} 2$.

О13.11. а) $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (4 - x) > -1$;

б) $\log_2 (7 - x) + \log_2 x \geqslant 1 + \log_2 3$;

в) $\lg (7 - x) + \lg x > 1$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (10 - x) \geqslant -1 + \log_{\frac{1}{2}} 4,5$.

О13.12. а) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 \geqslant 0$;

б) $2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 \leqslant 0$;

в) $3\log_4^2 x - 7\log_4 x + 2 < 0$;

г) $3\log_{\frac{1}{3}}^2 x + 5\log_{\frac{1}{3}} x - 2 > 0$.

О13.13. а) $\log_2^2 x^2 - 15\log_2 x - 4 \leqslant 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x^2 - 7\log_{\frac{1}{3}} x + 3 \leqslant 0$;

в) $\log_3^2 x^2 + 13\log_3 x + 3 < 0$;

г) $\log_{\frac{1}{5}}^2 x^2 - 31\log_{\frac{1}{5}} x - 8 < 0$.

О13.14. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

а) $\log_7 (6x - 9) < \log_7 (2x + 3)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} (2 - x) \geqslant \log_{\frac{1}{5}} (2x + 4)$;

в) $\lg (8x - 16) < \lg (3x + 1)$;

г) $\log_{0,4} (7 - x) \geqslant \log_{0,4} (3x + 6)$.

О13.15. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

а) $\log_{12}(x^2 - x) \leqslant 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 10x + 9) \geqslant 0$;

в) $\log_9(x^2 - 8x) \leqslant 1$;

г) $\log_{0,3}(-x^2 + 7x - 5) < 0$?

Решите систему неравенств:

О13.16. а) $\begin{cases} \log_2(2x + 3) > \log_2(x - 2), \\ \log_6(3x - 1) \leqslant \log_6(9x + 4); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3(6x - 1) \leqslant \log_3(9x + 11), \\ \log_6(3 - x) > \log_6(4x - 1); \end{cases}$

О13.17. а) $\begin{cases} \log_3 x^2 > \log_3 125 - \log_3 5, \\ \log_{0,2}(x - 1) < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x^2 \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7, \\ \log_3(4x - 1) > 0. \end{cases}$

О13.18. а) $\begin{cases} \log_{0,1}(x^2 - 12) < \log_{0,1}(-x), \\ 2^{x-1} > \dfrac{1}{8}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^{x^2 - 5x - 4} < 9, \\ \log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 3) \geqslant \lg_{\frac{1}{5}} 4x. \end{cases}$

§ 14. Переход к новому основанию логарифма

Логарифмических функций бесконечно много: $y = \log_2 x$; $y = \log_3 x$; $y = \log_{0,3} x$; $y = \lg x$; $y = \log_{\frac{8}{7}} x$ и т. д. Возникает вопрос, как они связаны между собой. Есть ли, например, какая-то связь между функциями $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$? На рисунке 53 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$. Не кажется ли вам, что график первой функции получается из графика второй функции растяжением от оси x

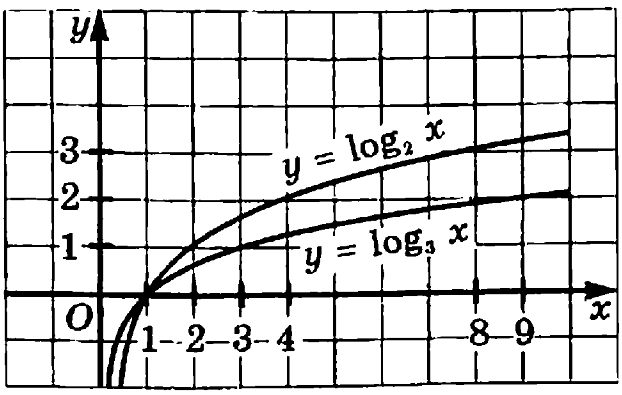


Рис. 53

с некоторым коэффициентом $k > 1$? Если это на самом деле верно, то должно выполняться равенство

$$\log_2 x = k \cdot \log_3 x.$$

Так ли это? Теоретической основой для ответа является следующая теорема.

Теорема. **Если a, b, c — положительные числа, причем a и c отличны от 1, то имеет место равенство**

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \qquad (1)$$

(формула перехода к новому основанию логарифма).

Например, $\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\log_7 4 = \frac{\lg 4}{\lg 7}$ и т. д.

Доказательство. Введем обозначения:

$$x = \log_a b, \quad y = \log_c b, \quad z = \log_c a.$$

Тогда $a^x = b$, $c^y = b$, $c^z = a$. Значит, $a^x = c^y$. Поскольку $a = c^z$, получаем: $(c^z)^x = c^y$, т. е. $c^{zx} = c^y$. Отсюда следует, что $zx = y$, т. е. $x = \frac{y}{z}$ или $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. ◄■

Теперь нетрудно ответить на поставленный выше вопрос: как связаны между собой различные логарифмические функции? Рассмотрим логарифмические функции $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$, графики которых изображены на рисунке 53. По формуле (1) получаем:

$\log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$, откуда находим, что $\log_2 x = \log_2 3 \cdot \log_3 x$.

Таким образом, наша догадка подтвердилась: действительно, справедливо соотношение $\log_2 x = k \log_3 x$, где $k = \log_2 3$; верна и наша догадка о том, что в данном случае $k > 1$, поскольку $\log_2 3 > 1$.

Аналогичные формулы связывают и другие логарифмические функции. Например, справедливы соотношения:

$\log_5 x = k \log_7 x$, где $k = \log_5 7$; $\lg x = k \log_{0,5} x$, где $k = \lg 0{,}5$ и т. д.

Рассмотрим два важных частных случая формулы перехода к новому основанию логарифма, два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. Если a и b положительные и отличные от 1 *числа, то справедливо равенство*

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.}$$

Например, $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$; $\lg 5 = \frac{1}{\log_5 10}$.

Доказательство. Положив в формуле (1) $c = b$, получим:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Следствие 2. Если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равенство

$$\boxed{\log_a b = \log_{a^r} b^r.}$$

Например, $\log_2 3 = \log_{2^2} 3^2 = \log_{2^{-1}} 3^{-1} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ и т. д.

Доказательство. Перейдем в выражении $\log_{a^r} b^r$ к логарифмам по основанию a: $\log_{a^r} b^r = \frac{\log_a b^r}{\log_a a^r} = \frac{r \log_a b}{r} = \log_a b$.

Пример 1. Дано: $\lg 3 = a$, $\lg 5 = b$. Вычислить $\log_2 15$.

Решение.

$$\log_2 15 = \frac{\lg 15}{\lg 2} = \frac{\lg (3 \cdot 5)}{\lg (10:5)} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 10 - \lg 5} = \frac{a+b}{1-b}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\sqrt[3]{4}} 3$.

Решение. Перейдем во всех логарифмах к основанию 4. Для этого дважды воспользуемся формулой, доказанной в следствии 2:

$$\log_2 x = \log_{2^2} x^2 = \log_4 x^2;$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} 3 = \log_{(\sqrt[3]{4})^3} 3^3 = \log_4 27.$$

Теперь заданное уравнение перепишем в более простом виде

$$\log_4 x^2 + \log_4 x = \log_4 27.$$

Далее получаем:

$$\log_4 (x^2 \cdot x) = \log_4 27;\ \log_4 x^3 = \log_4 27;\ x^3 = 27;\ x = 3.$$

Упражнения

О14.1. Вычислите:

а) $\log_2 \frac{1}{3} + \log_4 9$;
б) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{2}$;
в) $\log_{25} 9 - \log_5 3$;
г) $\log_{16} 4 - \log_4 8$.

О14.2. Известно, что $\log_2 3 = a$. Найдите:

а) $\log_3 2$; б) $\log_3 \frac{1}{2}$; в) $\log_3 4$; г) $\log_3 \frac{1}{4}$.

О14.3. Известно, что $\log_5 2 = b$. Найдите:

а) $\log_2 25$; б) $\log_2 \frac{1}{25}$; в) $\log_2 125$; г) $\log_2 \frac{1}{625}$.

О14.4. Известно, что $\log_2 3 = a$. Найдите:

а) $\log_4 9$; б) $\log_8 18$; в) $\log_4 81$; г) $\log_8 54$.

Сравните числа:

О14.5. а) $\log_2 7$ и $\log_7 4$;
б) $\log_6 9$ и $\log_9 8$;
в) $\log_3 5$ и $\log_5 4$;
г) $\log_{11} 14$ и $\log_{14} 13$.

О14.6. а) $\log_2 6$ и $\log_4 5$;
б) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{4}} 1{,}5$;
в) $\log_9 6$ и $\log_3 7$;
г) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ и $\log_{\frac{1}{9}} 7$.

Решите уравнение:

О14.7. а) $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$;

б) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

О14.8. а) $3\log_3^2 x = \dfrac{5}{\log_x 3} + 2$; б) $2\log_2^2 x = \dfrac{5}{\log_x 2} + 3$.

Вычислите:

О14.9. а) $9^{\log_3 4} + \log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$;

б) $\log_3 8 \cdot \log_2 27 - 3^{\log_9 25}$;

в) $3^{4\log_3 2} + \log_5 \sqrt{2} \cdot \log_4 25$;

г) $10^{0{,}5\lg 16} + 14\log_3 \sqrt{2} \cdot \log_4 81$.

●14.10. а) $\dfrac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \dfrac{\log_2 7}{\log_{224} 2}$; б) $\dfrac{\log_3 135}{\log_{45} 3} - \dfrac{\log_3 5}{\log_{1215} 3}$.

●14.11. Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Вычислите:

а) $\log_4 12$; б) $\log_6 18$; в) $\log_{0,5} 3$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 24$.

●14.12. Известно, что $\log_2 5 = a$, $\log_2 3 = b$. Вычислите:

а) $\log_3 15$; б) $\log_8 75$; в) $\log_{16} 45$; г) $\log_{15} 12$.

Решите уравнение:

○14.13. а) $\log_3 x + 1 = 2 \log_x 3$; в) $\log_7 x - 1 = 6 \log_x 7$;

б) $2 \log_x 5 - 3 = -\log_5 x$; г) $\log_2 x + 9 \log_x 2 = 10$.

●14.14. а) $\log_4 (x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$;

б) $1 + \log_x 5 \cdot \log_7 x = \log_5 35 \cdot \log_x 5$.

●14.15. а) $\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) = 4$;

б) $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) = 4 - \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21)$.

●14.16. Решите неравенство:

а) $\log_9 x^2 + \log_3^2 (-x) < 2$;

б) $\log_4 x^2 + \log_2^2 (-x) > 6$.

§ 15. Дифференцирование показательной и логарифмической функций

1. Число e. Функция $y = e^x$, ее свойства, график, дифференцирование

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$, где $a > 1$. Для различных оснований a получаем различные графики (рис. 54—56), но можно заметить, что все они проходят через точку (0; 1), все они имеют горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$, все они обращены выпуклостью вниз и, наконец, все они имеют касательные во всех своих точках.

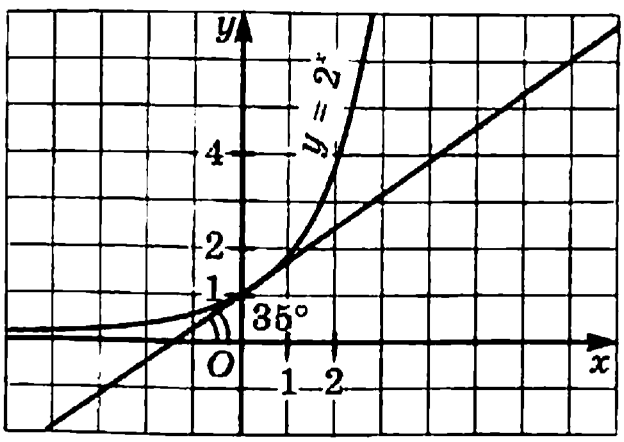


Рис. 54

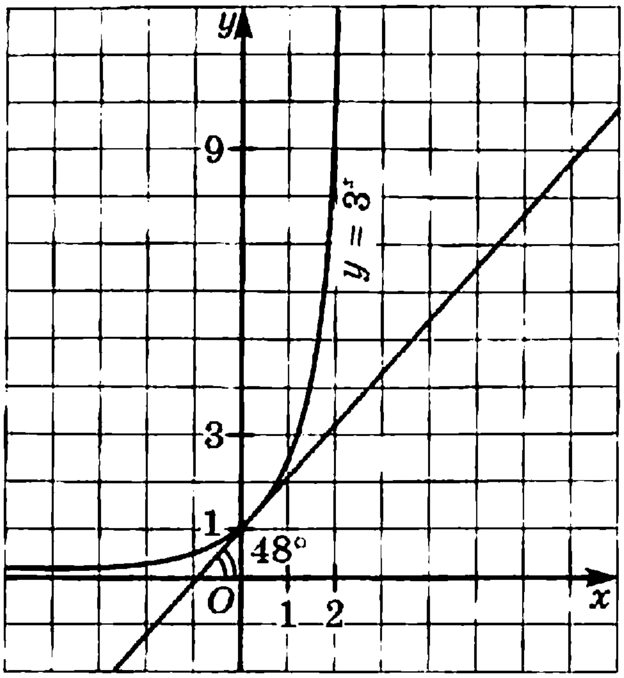


Рис. 55

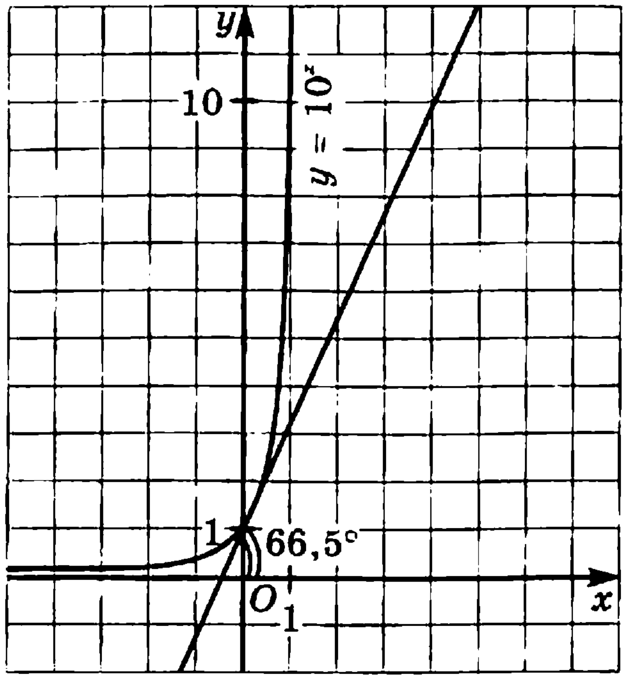


Рис. 56

Проведем для примера касательную к графику функции $y = 2^x$ в точке $x = 0$ (рис. 54). Если сделать аккуратные построения и измерения, то можно убедиться в том, что эта касательная образует с осью x угол 35° (примерно). Теперь проведем касательную к графику функции $y = 3^x$ тоже в точке $x = 0$ (рис. 55). Здесь угол между касательной и осью x будет больше — примерно 48°. А для показательной функции $y = 10^x$ в аналогичной ситуации получаем угол примерно 66,5° (рис. 56).

Итак, если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно увеличивается от 35° до 66,5°. Логично предположить, что существует основание a, для которого соответствующий угол равен 45°. Это основание должно быть заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше, чем 45°, а для функции $y = 3^x$ он равен 48°, что уже немного больше, чем 45°. Доказано, что интересующее нас основание действительно существует, его принято обозначать буквой e. Установлено, что число e — иррациональное, т. е. представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь:

$$e = 2{,}7182818284590\ldots;$$

на практике обычно полагают, что $e \approx 2{,}7$.

Замечание 1 (не очень серьезное). Ясно, что Л. Н. Толстой никакого отношения к числу e не имеет, тем не менее в записи числа e, обратите внимание, два раза подряд повторяется число 1828 — год рождения Л. Н. Толстого.

График функции $y = e^x$ изображен на рисунке 57. Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков показательных функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x = 0$ и осью абсцисс равен 45°.

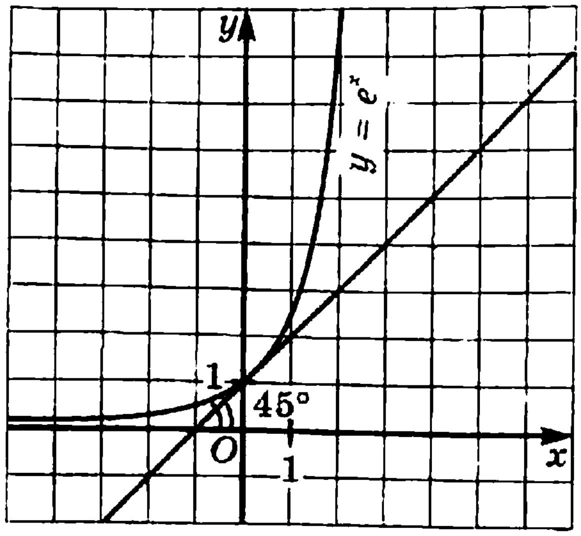


Рис. 57

Свойства функции $y = e^x$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз.

В курсе математического анализа доказано, что функция $y = e^x$ имеет производную в любой точке x, причем

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y = e^x$ в точке $x = 1$.

Решение. Напомним, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \qquad (1)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции, учитывая, что в данном примере $f(x) = e^x$.

1) $a = 1$.

2) $f(a) = f(1) = e$.

3) $f'(x) = e^x$; $f'(a) = f'(1) = e$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = e$, $f'(a) = e$ в формулу (1). Получим:

$$y = e + e(x - 1);$$
$$y = ex.$$

Пример 2. Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке $x = 3$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования функции $y = f(kx + m)$, согласно которому $y' = k \cdot f'(kx + m)$, и тем, что $(e^x)' = e^x$; здесь $f(kx + m) = e^{4x-12}$. Получим:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4 \cdot e^{4x-12}.$$

Далее имеем

$$f'(3) = 4 \cdot e^{12-12} = 4 \cdot e^0 = 4.$$

Ответ: 4.

Замечание 2. Вообще имеет место формула $(e^{kx})' = ke^{kx}$, т. е. функция $y = e^{kx}$ удовлетворяет уравнению $y' = ky$. Этим уравнением описываются многие процессы реальной действительности (радиоактивный распад, рост вклада в банке и т. д.). Поэтому функция $y = e^{kx}$ весьма почитаема в высшей математике.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2e^x$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x + 2).$$

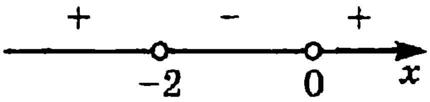


Рис. 58

Эта производная существует при всех значениях x, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = -2$ — это две стационарные точки. Отметим их на числовой прямой. Знаки производной на полученных промежутках меняются так, как показано на рисунке 58. Значит, $x = -2$ — точка максимума функции, $y_{\max} = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$; $x = 0$ — точка минимума, $y_{\min} = 0^2 \cdot e^0 = 0$.

2. Натуральные логарифмы. Функция $y = \ln x$, ее свойства, график, дифференцирование

Мы рассматривали логарифмы с различными основаниями: $\log_2 3$ — логарифм по основанию 2, $\log_5 7$ — логарифм по основанию 5, $\lg 2$ — логарифм по основанию 10 (десятичный логарифм) и т. д. Если основанием логарифма служит число e, то говорят, что задан *натуральный логарифм*.

Примеры натуральных логарифмов: $\log_e 2$, $\log_e 5$, $\log_e 0{,}2$ и т. д.

Подобно тому как для десятичных логарифмов введено специальное обозначение lg, введено специальное обозначение и для натуральных логарифмов: ln (l — *логарифм*, n — *натуральный*). Вместо $\log_e 2$ пишут $\ln 2$, вместо $\log_e 5$ пишут $\ln 5$ и т. д.

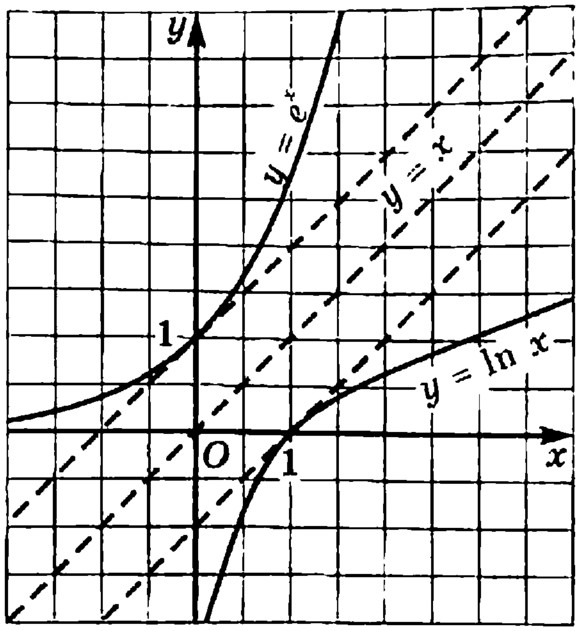


Рис. 59

Мы знаем, что график логарифмической функции $y = \log_a x$ симметричен графику показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$. Значит, и график функции $y = \ln x$ симметричен графику функции $y = e^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 59). Это экспонента, отличающаяся от других экспонент (графиков логарифмических функций с другими основаниями) тем, что угол между касательной к графику в точке $x = 1$ и осью абсцисс равен 45°.

Свойства функции $y = \ln x$:

1) $D(f) = (0; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на $(0; +\infty)$;

4) не ограничена ни сверху, ни снизу;

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

8) выпукла вверх;

9) дифференцируема.

В курсе математического анализа доказано, что для любого значения $x > 0$ справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Приведем обоснование указанной формулы исходя из геометрических соображений.

На рисунке 60 изображены графики двух взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Эти графики симметричны относительно прямой $y = x$. Предположим, что в точке $M(x_0; y_0)$, взятой на графике функции $y = f(x)$,

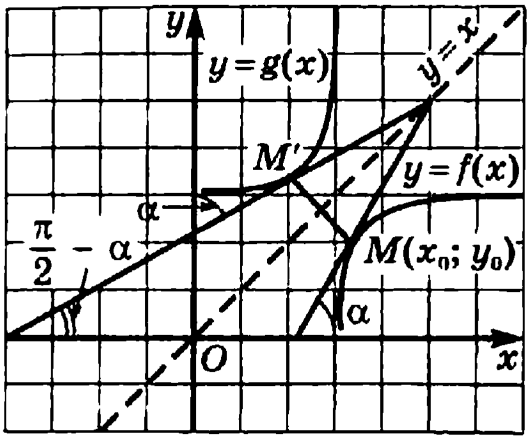


Рис. 60

существует невертикальная касательная к графику; эта касательная составляет с положительным лучом оси абсцисс угол α. Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Возьмем на графике обратной функции $y = g(x)$ точку M', симметричную точке M относительно прямой $y = x$. Точка M' имеет координаты $(y_0;\ x_0)$, в этой точке к графику функции $y = g(x)$ можно провести касательную, причем она симметрична проведенной выше касательной к графику $y = f(x)$ в точке M (ось симметрии — прямая $y = x$). Новая касательная составляет с положительным лучом оси y угол α, с положительным лучом оси x — угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Поэтому

$$g'(y_0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Обобщим полученный результат: $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ — правило дифференцирования обратной функции. Можно использовать иную запись:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ если } x'_y \neq 0.$$

Если $y = \ln x$, то

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y}.$$

Так как $y = \ln x$, то $e^y = x$. Следовательно,

$$(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Пример 5. Вычислить значение производной функции $y = \ln(3x + 5)$ в точке $x = -1$.

Решение. Воспользуемся правилом дифференцирования функции $y = f(kx + m)$, согласно которому $y' = k \cdot f'(kx + m)$, и тем, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; в данном примере $f(kx + m) = \ln(3x + 5)$. Получим:

$$y' = (\ln(3x + 5))' = 3 \cdot \frac{1}{3x + 5} = \frac{3}{3x + 5};$$

$$f'(-1) = \frac{3}{3 \cdot (-1) + 5} = 1{,}5.$$

Пример 6. Провести касательную к графику функции $y = \ln x$ в точке $x = e$.

Решение. Напомним еще раз, как и в примере 1, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \qquad (1)$$

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции, учитывая, что в данном примере $f(x) = \ln x$.

1) $a = e$.

2) $f(a) = f(e) = \ln e = 1$.

3) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(a) = f'(e) = \dfrac{1}{e}$.

4) Подставим найденные числа $a = e$, $f(a) = 1$, $f'(a) = \dfrac{1}{e}$ в формулу (1). Получим: $y = 1 + \dfrac{1}{e} \cdot (x - e)$, т. е. $y = \dfrac{x}{e}$.

На рисунке 61 изображен график функции $y = \ln x$, построена прямая $y = \dfrac{x}{e}$, проходящая через начало координат. Чертеж подтверждает полученный результат: построенная прямая касается графика функции $y = \ln x$ в точке $(e;\ 1)$.

Ответ: $y = \dfrac{x}{e}$.

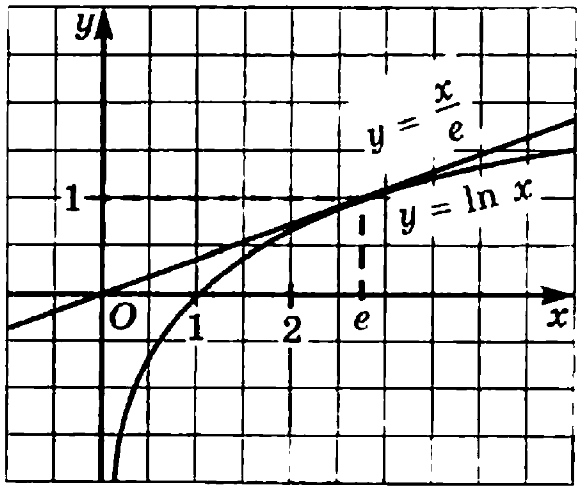


Рис. 61

Пример 7. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Эта производная существует при всех значениях $x > 0$, т. е. при всех значениях x из области определения функции. Значит, критических точек у функции нет. Приравняв производную нулю, получим:

$$1 - \ln x = 0;\ \ \ln x = 1;\ \ x = e.$$

Это единственная стационарная точка. Если $x < e$, то $y' > 0$; если $x > e$, то $y' < 0$. Значит, $x = e$ — точка максимума функции $y_{max} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$.

Ответ: $x = e$ — точка максимума; $y_{max} = \frac{1}{e}$.

Завершая параграф, получим формулы дифференцирования любой показательной и любой логарифмической функции.

Пусть дана показательная функция $y = a^x$. Воспользуемся тем, что $a = e^{\ln a}$ и, следовательно, $a^x = e^{x \ln a}$. Тогда

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x.$$

Итак,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Например, $(2^x)' = 2^x \ln 2$; $(5^x)' = 5^x \ln 5$ и т. д.

Пусть дана логарифмическая функция $y = \log_a x$. Имеем

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.}$$

Упражнения

15.1. Найдите производную функции $y = f(x)$.

а) $f(x) = 4 - e^x$; в) $f(x) = -8e^x$;

б) $f(x) = x^3 e^x$; г) $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$.

Найдите значение производной заданной функции в указанной точке x_0:

15.2. а) $y = e^x + x^2$, $x_0 = 0$; в) $y = e^x - x$, $x_0 = 1$;

б) $y = e^x(x + 1)$, $x_0 = -1$; г) $y = \frac{e^x}{x + 1}$, $x_0 = 0$.

15.3. а) $y = e^{3x-1}$, $x_0 = \frac{1}{3}$; в) $y = e^{4-9x}$, $x_0 = \frac{4}{9}$;

б) $y = 3e^{6+x}$, $x_0 = -5$; г) $y = e^{0,5x-3}$, $x_0 = 4$.

О15.4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = 4e^x + 3,\ x_0 = -2;$

б) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^x,\ x_0 = 1;$

в) $f(x) = 0{,}1e^x - 10x,\ x_0 = 0;$

г) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x},\ x_0 = 1.$

О15.5. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $h(x) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^x,\ x_0 = 0;$

б) $h(x) = e^{-x+2},\ x_0 = 2;$

в) $h(x) = \dfrac{1}{e^x} + x^5,\ x_0 = -1;$

г) $h(x) = x + e^{2x-3},\ x_0 = 1{,}5.$

О15.6. Найдите угол, образованный касательной к графику функции $y = h(x)$ с положительным направлением оси абсцисс в точке с абсциссой x_0:

а) $h(x) = \dfrac{1}{5}e^{5x-1},\ x_0 = 0{,}2;$

б) $h(x) = e^{-x-\sqrt{3}},\ x_0 = -\sqrt{3};$

в) $h(x) = \dfrac{1}{3}e^{1-3x},\ x_0 = \dfrac{1}{3};$

г) $h(x) = e^{\frac{\sqrt{3}}{3}x-1},\ x_0 = \sqrt{3}.$

Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

О15.7. а) $y = e^x,\ a = 1;$ в) $y = e^x,\ a = 0;$

б) $y = e^x,\ a = 2;$ г) $y = e^x,\ a = -1.$

О15.8. а) $y = e^{3x-1},\ a = \dfrac{1}{3};$ в) $y = \dfrac{2}{e^x},\ a = 0;$

б) $y = xe^{-2x+1},\ a = 0{,}5;$ г) $y = \dfrac{e^x}{x+1},\ a = 0.$

Постройте график функции:

О15.9. а) $y = e^{x+4}$; в) $y = e^{x-3}$;

б) $y = e^{-x} + 1$; г) $y = e^{x-2} - 3$.

О15.10. а) $y = \ln(x - 4)$; в) $y = \ln(x + 3)$;

б) $y = \ln ex$; г) $y = \ln \frac{x}{e}$.

О15.11. Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

а) $y = x^2e^x$; б) $y = xe^{2x-4}$; в) $y = x^3e^x$; г) $y = \frac{e^x}{x}$.

О15.12. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2e^x$ на заданном отрезке:

а) $[-1; 1]$; б) $[-3; 1]$; в) $[-3; -1]$; г) $[1; 3]$.

15.13. Найдите производную функции:

а) $y = x^2 \ln x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$;

б) $y = 3\ln x + \sin 2x$; г) $y = 2\cos\frac{x}{2} - 5\ln x$.

Найдите значение производной заданной функции в указанной точке:

15.14. а) $y = \ln x + x$, $x_0 = \frac{1}{7}$;

б) $y = x^3 \ln x$, $x_0 = e$;

в) $y = x^2 - \ln x$, $x_0 = 0{,}5$;

г) $y = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$.

15.15. а) $y = \ln(2x + 2)$, $x_0 = -\frac{1}{4}$;

б) $y = \ln(5 - 2x)$, $x_0 = 2$;

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

О15.16. а) $f(x) = x^5 - \ln x$, $a = 1$;

б) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $a = 1$;

в) $f(x) = -2x\ln x$, $a = e$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{x}\ln x$, $a = 1$.

О15.17. а) $y = xe^{2x-1}$, $a = \frac{1}{2}$;

б) $y = \frac{x^2-1}{e^{3-x}}$, $a = 2$;

в) $y = x^3 \ln x$, $a = e$;

г) $y = (2x+1)e^{1-2x}$, $a = \frac{1}{2}$.

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

О15.18. а) $y = x + \ln \frac{1}{x}$;

б) $y = x^4 - 4 \ln x$.

О15.19. а) $y = e^{2x} - 3e^x + x + 4$;

б) $y = 1 - 3x + 5e^x - e^{2x}$.

О15.20. а) $y = 2 \ln x^3 - 5x + \frac{x^2}{2}$;

б) $y = \ln \frac{1}{x^3} + x^2 + x + 3$.

О15.21. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x - \ln x$ на заданном отрезке:

а) $\left[\frac{1}{e};\ e\right]$;

б) $\left[e;\ e^2\right]$.

О15.22. Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на заданном отрезке:

а) $y = x + \ln(-x)$, $[-4; -0{,}5]$;

б) $y = x + e^{-x}$, $[-\ln 4;\ \ln 2]$.

О15.23. Напишите уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая параллельна данной прямой $y = kx + m$:

а) $f(x) = e^{2x}$, $y = 2ex - 5$;

б) $f(x) = \ln(3x + 2)$, $y = x + 7$.

О15.24. Решите уравнение $f'(x) = a$, если:

а) $f(x) = 3e^{x+4}$, $a = \frac{3}{e}$;

б) $f(x) = 2 + \frac{1}{3}e^{-6x-18}$, $a = -2$;

в) $f(x) = 2e^{-7x+9}$, $a = -14$;

г) $f(x) = 42 - e^{0{,}1x-4}$, $a = 0{,}1$.

○**15.25.** Решите неравенство $g'(x) < a$, если:

а) $g(x) = 6 - \frac{1}{2}e^{2x-3}$, $a = \frac{1}{e^3}$;

б) $g(x) = x + e^{4x-3}$, $a = 5$;

в) $g(x) = \frac{1}{3}e^{3x+5}$, $a = \frac{1}{e}$;

г) $g(x) = e^{9x+21} - x$, $a = 8$.

●**15.26.** Проведите касательную к графику заданной функции так, чтобы она проходила через начало координат:

а) $y = e^{\frac{x}{2}}$;

б) $y = \ln x$;

в) $y = e^{\frac{x}{3}}$;

г) $y = \ln x$.

●**15.27.** При каком значении параметра a:

а) прямая $y = 3x - 4 + a$ является касательной к графику функции $y = \ln(3x - 4)$;

б) прямая $y = 2x + 3 + a$ является касательной к графику функции $y = \ln(2x + 3)$?

●**15.28.** При каких значениях параметра a функция $y = x^6e^{-x}$ на интервале $(a;\ a + 7)$:

а) имеет одну точку экстремума;

б) имеет две точки экстремума;

в) убывает;

г) возрастает?

ГЛАВА 3 Первообразная и интеграл

§ 16. Первообразная

Ранее мы не раз по заданной функции, руководствуясь различными формулами и правилами, находили ее производную. Мы убедились в том, что производная имеет многочисленные применения: это скорость движения (или, обобщая, скорость протекания любого процесса); угловой коэффициент касательной к графику функции; с помощью производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы; она помогает решать задачи на оптимизацию.

Но наряду с задачей о нахождении скорости по известному закону движения встречается и обратная задача — задача о восстановлении закона движения по известной скорости. Рассмотрим одну из таких задач.

Пример 1. По прямой движется материальная точка, скорость ее движения в момент времени t задается формулой $v = gt$. Найти закон движения.

Решение. Пусть $s = s(t)$ — искомый закон движения. Известно, что $s'(t) = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой равна gt. Нетрудно догадаться, что в качестве такой функции можно взять $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. В самом деле,

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Ответ: $s = \frac{gt^2}{2}$.

Сразу заметим, что пример решен верно, но неполно. Мы получили $s = \frac{gt^2}{2}$. На самом деле задача имеет бесконечно много решений: любая функция вида $s = \frac{gt^2}{2} + C$, где C — произвольная константа, может служить законом движения, поскольку

$$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt.$$

Чтобы задача стала более определенной, нам надо было зафиксировать исходную ситуацию: указать координату движущейся точки в какой-либо момент времени, например при $t = 0$. Если, скажем, $s(0) = s_0$, то из равенства $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$ получаем: $s(0) = 0 + C$, т. е. $C = s_0$. Теперь закон движения определен однозначно: $s = \frac{gt^2}{2} + s_0$.

В математике взаимно обратным операциям присваивают разные названия, придумывают специальные обозначения, например: возведение в квадрат (x^2) и извлечение квадратного корня $\left(\sqrt{x}\right)$, синус ($\sin x$) и арксинус ($\arcsin x$) и т. д. Процесс нахождения производной по заданной функции называют *дифференцированием*, а обратную операцию, т. е. процесс нахождения функции по заданной производной, — *интегрированием*.

Сам термин «производная» можно обосновать «по-житейски»: функция $y = f(x)$ «производит на свет» новую функцию $y' = f'(x)$. Функция $y = f(x)$ выступает как бы в качестве «родителя», но математики, естественно, не называют ее «родителем» или «производителем», они говорят, что это, по отношению к функции $y' = f'(x)$, *первичный образ*, или *первообразная*.

Определение. Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для функции $y = f(x)$** на промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

На практике промежуток X обычно не указывают, но подразумевают (в качестве естественной области определения функции).

Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для любого x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для любого x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для любого x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.

4) Функция $y = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$, поскольку для любого $x > 0$ справедливо равенство $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ради краткости иногда вместо фразы: «Функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$», — говорят: «$F(x)$ — первообразная для $f(x)$».

Зная формулы для нахождения производных, нетрудно составить таблицу формул для нахождения первообразных.

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

Надеемся, вы поняли, как составлена эта таблица: производная функции, которая записана во втором столбце, равна той функции, которая записана в соответствующей строке первого столбца (проверьте, не поленитесь, это очень полезно).

Например, для функции $y = x^5$ первообразной, как вы установите, служит функция $y = \frac{x^6}{6}$ (см. пятую строку таблицы).

Некоторого комментария заслуживает, пожалуй, лишь шестая строка таблицы, из которой следует, что первообразной для $\frac{1}{x}$ служит $\ln |x|$. В самом деле, найдем производную функции $y = \ln |x|$. Если $x > 0$, то $|x| = x$, и мы получаем: $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если

$x < 0$, то $|x| = -x$, и мы получаем: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Замечание 1. Ниже мы сформулируем теорему о том, что если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$. Поэтому правильнее было бы во втором столбце таблицы всюду добавить слагаемое C, где C — произвольное действительное число.

При нахождении первообразных, как и производных, используются не только формулы (указанные в таблице), но и некоторые правила. Они непосредственно связаны с соответствующими правилами вычисления производных.

Мы знаем, что производная суммы равна сумме производных. Это правило порождает соответствующее правило нахождения первообразных.

Правило 1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Обращаем ваше внимание на некоторую «легковесность» этой формулировки. На самом деле следовало бы сформулировать теорему: *если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то и сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.* Но обычно, формулируя правила (а не теоремы), оставляют только ключевые слова — так удобнее для применения правила на практике.

Пример 2. Найти первообразную для функции $y = 2x + \cos x$.

Решение. Первообразной для $2x$ служит x^2; первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Значит, первообразной для функции $y = 2x + \cos x$ будет служить функция $y = x^2 + \sin x$ (и вообще любая функция вида $y = x^2 + \sin x + C$). ◼

Мы знаем, что постоянный множитель можно вынести за знак производной. Это правило порождает соответствующее правило нахождения первообразных.

Правило 2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.

Пример 3. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = 5\sin x$; б) $y = -\frac{\cos x}{3}$; в) $y = 12x^3 + 8x - 1$.

Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = 5\sin x$ первообразной будет функция $y = -5\cos x$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = -\frac{1}{3}\cos x$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{3}\sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$; первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$; первообразной для функции $y = 1$ служит функция $y = x$.

Используя первое и второе правила нахождения первообразных, получим, что первообразной для функции $y = 12x^3 + 8x - 1$ служит функция $y = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x$, т. е. $y = 3x^4 + 4x^2 - x$.

Замечание 2. Как известно, производная произведения не равна произведению производных (правило дифференцирования произведения более сложное) и производная частного не равна частному производных. Поэтому нет и правил для нахождения первообразной произведения или первообразной частного двух функций. Будьте внимательны!

Получим еще одно правило нахождения первообразных. Мы знаем, что производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Это правило порождает соответствующее правило нахождения первообразных.

***Теорема 1.* Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$.**

Доказательство. Имеем

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+m)\right)' = \frac{1}{k} \cdot kF'(kx + m) = f(kx + m).$$

Это и означает, что функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$ является первообразной для функции $y = f(kx + m)$.

Смысл теоремы 1 заключается в следующем. Если вы знаете, что первообразной для $f(x)$ является $F(x)$, а вам нужно найти первообразную для $f(kx + m)$, то действуйте так: берите ту же самую функцию F, но вместо аргумента x подставьте выражение $kx + m$; кроме того, не забудьте перед знаком функции записать «поправочный множитель» $\frac{1}{k}$.

Пример 4. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos \frac{x}{3}$; в) $y = (4 - 5x)^7$; в) $y = e^{\frac{2x-1}{3}}$.

Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = \sin 2x$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x)$, т. е. $y = -\frac{\cos 2x}{2}$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = \cos \frac{x}{3}$ первообразной будет функция $y = 3 \sin \frac{x}{3}$; здесь $k = \frac{1}{3}$, значит, $\frac{1}{k} = 3$.

в) Первообразной для x^7 служит $\frac{x^8}{8}$; значит, для функции $y = (4 - 5x)^7$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(4-5x)^8}{8}$, т. е. $y = -\frac{1}{40} \cdot (4 - 5x)^8$.

г) Выражение $\frac{2x-1}{3}$ можно представить в виде $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Первообразной для e^x служит e^x, значит, для функции $y = e^{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$, т. е. $y = \frac{3}{2} e^{\frac{2x-1}{3}}$.

Теорема 2. **Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$.**

Эту теорему доказывают в курсе высшей математики.

Если бы мы в разобранном примере 4 искали множество всех первообразных для каждой из заданных функций, то ответ был бы таким:

а) для функции $y = \sin 2x$ все первообразные имеют вид $y = -\frac{\cos 2x}{2} + C$;

б) для функции $y = \cos \frac{x}{3}$ все первообразные имеют вид $y = 3 \sin \frac{x}{3} + C$;

в) для функции $y = (4 - 5x)^7$ все первообразные имеют вид $y = -\frac{1}{40} \cdot (4 - 5x)^8 + C$;

г) для функции $y = e^{\frac{2x-1}{3}}$ все первообразные имеют вид $y = \frac{3}{2} e^{\frac{2x-1}{3}} + C$.

Пример 5. Задан закон изменения скорости от времени $v = -5\sin 2t$. Найти закон движения $s = s(t)$, если известно, что в момент времени $t = 0$ координата точки была равна 1,5 (т. е. $s(0) = 1{,}5$).

Р е ш е н и е. Так как скорость — производная координаты как функции времени, то нам прежде всего нужно найти первообразную для скорости, т. е. первообразную для функции $v = -5\sin 2t$. Одной из таких первообразных является функция $s = -5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2t)$, т. е. $s = 2{,}5\cos 2t$, а все первообразные имеют вид

$$s = 2{,}5\cos 2t + C. \qquad (1)$$

Чтобы найти значение постоянной C, воспользуемся начальными условиями: $s(0) = 1{,}5$. Подставив в формулу (1) значения $t = 0$, $s = 1{,}5$, получим:

$$1{,}5 = 2{,}5 \cdot \cos 0 + C;$$
$$1{,}5 = 2{,}5 + C;$$
$$C = -1.$$

Подставив найденное значение C в формулу (1), получим интересующий нас закон движения:

$$s = 2{,}5\cos 2t - 1.$$

Упражнения

Докажите, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, если:

16.1. а) $F(x) = x^2 + x^3$, $f(x) = 2x + 3x^2$;

б) $F(x) = x^4 - x^{11}$, $f(x) = 4x^3 - 11x^{10}$;

в) $F(x) = x^7 + x^9$, $f(x) = 7x^6 + 9x^8$;

г) $F(x) = x^{13} - x^{19}$, $f(x) = 13x^{12} - 19x^{18}$.

16.2. а) $F(x) = 3\sin x$, $f(x) = 3\cos x$;

б) $F(x) = -4\cos x$, $f(x) = 4\sin x$;

в) $F(x) = -9\sin x$, $f(x) = -9\cos x$;

г) $F(x) = 5\cos x$, $f(x) = -5\sin x$.

16.3. Для функции $y = f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{7}{x^2}$.

Для функции $y = f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную:

16.4. а) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}}$.

16.5. а) $f(x) = x^2 + x^{16}$; в) $f(x) = x^{13} + x^{18}$;

б) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$; г) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$.

16.6. а) $f(x) = 4x^3 - 6x^2$;

б) $f(x) = -3\sin x + 2\cos x$;

в) $f(x) = 5x^4 - 3x^5$;

г) $f(x) = -13\sin x + \frac{5}{\cos^2 x}$.

16.7. а) $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$; в) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$;

б) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{\sin^2 x}$; г) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 2e^x$.

○16.8. а) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$; в) $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;

б) $y = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; г) $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

○16.9. а) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $f(x) = \cos(4x - 3)$;

б) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$; г) $f(x) = \sin\left(2 - \frac{x}{2}\right)$.

○16.10. а) $f(x) = -\frac{1}{(6x+1)^2}$; в) $f(x) = \frac{1}{(7x-3)^2}$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-9}}$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{42-3x}}$.

○16.11. а) $f(x) = \sin 2x$; в) $f(x) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$;

б) $f(x) = e^{2x-6} - \cos 3x$; г) $f(x) = \sqrt[3]{3x-1} + \frac{1}{2-7x}$.

O16.12. Для данной функции найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку M:

а) $y = \sin x$, $M\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{4}\right)$; в) $y = \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$;

б) $y = \cos 3x$, $M\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{2}{3}\right)$; г) $y = \sin\frac{x}{2}$, $M\left(\frac{2\pi}{3}; 1\right)$.

O16.13. Точка движется по координатной прямой, ее скорость задана формулой $v = 1 + 2t$, t — время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени $t = 2$ координата точки была равна 5.

O16.14. Скорость движения точки по координатной прямой задана формулой $v = -4\sin 3t$, t — время движения. Найдите закон движения, если известно, что в момент времени $t = 0$ координата точки была равна 2.

O16.15. Скорость движения точки по координатной прямой задана формулой $v = \frac{6}{\sqrt{2t+1}}$, t — время движения. Найдите закон движения, если $s(0) = 3$.

O16.16. Ускорение движения точки по координатной прямой задано формулой $a(t) = 2(t+1)^2$, t — время движения. Найдите закон изменения скорости $v = v(t)$ и закон движения $s = s(t)$, если $v(0) = 1$, $s(0) = 1$.

O16.17. Для функции $y = g(x)$ найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку M:

а) $g(x) = 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$;

б) $g(x) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 16\right)$;

в) $g(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, $M(0; 7)$;

г) $g(x) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 15\right)$.

O16.18. Найдите ту первообразную для заданной функции $y = f(x)$, график которой касается оси x:

а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = 12(3x-1)^3$.

○**16.19.** Некоторая первообразная функции $y = 3\cos 3x + 6\sin 6x$ принимает в точке $x = \frac{\pi}{2}$ значение 6. Какое значение принимает та же первообразная в точке $x = \frac{\pi}{6}$?

●**16.20.** Найдите ту первообразную для заданной функции $y = f(x)$, график которой касается заданной прямой $y = kx + m$:

а) $f(x) = 2x$, $y = x + 2$;   б) $f(x) = 3x^3$, $y = 3x + 4{,}75$.

●**16.21.** Известно, что функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$. Найдите точки экстремума функции $y = F(x)$, если:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x - 1}}$;   в) $f(x) = \dfrac{3x - 6}{\sqrt[3]{2x + 4}}$;

б) $f(x) = (25x - x^3)\ln x$;   г) $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{\sqrt[4]{2 - x}}$.

●**16.22.** Известно, что функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$. Что больше — $F(a)$ или $F(b)$, если:

а) $f(x) = (2x - 10)\sqrt{x - 3}$, $a = 3{,}3$, $b = 4{,}1$;

б) $f(x) = (3x + 60)\sqrt[3]{2x - 4}$, $a = 15$, $b = 17$?

§ 17. Определенный интеграл

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

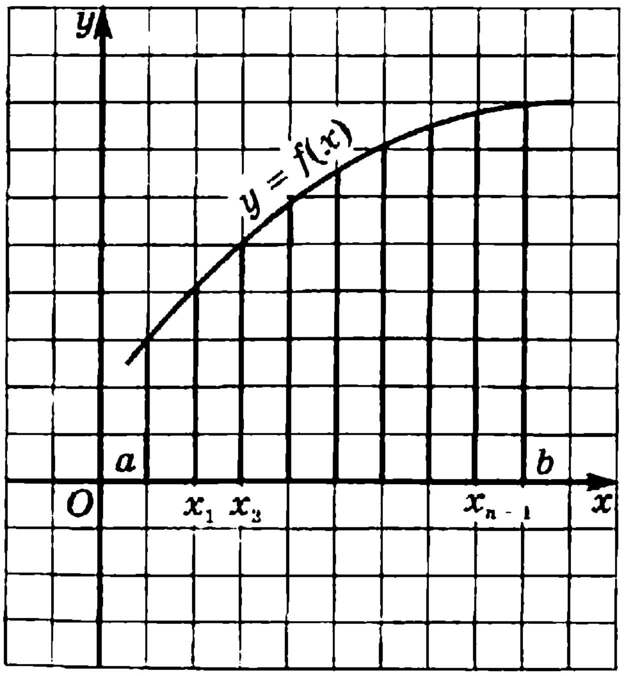


Рис. 62

Задача 1 *(о вычислении площади криволинейной трапеции).*

В декартовой прямоугольной системе координат xOy дана фигура (рис. 62), ограниченная осью x, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$; назовем эту фигуру *криволинейной трапецией*. Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции.

Решение. Геометрия дает нам рецепты для вычисления площадей многоугольников и некоторых частей круга (сектора, сегмента). Используя геометрические соображения, мы сумеем найти лишь приближенное значение искомой площади, рассуждая следующим образом.

Разобьем отрезок $[a; b]$ (основание криволинейной трапеции) на n равных частей; это разбиение осуществим с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}$. Проведем через эти точки прямые, параллельные оси y. Тогда заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей, на n узеньких столбиков. Площадь всей трапеции равна сумме площадей столбиков.

Рассмотрим отдельно k-ый столбик, т. е. криволинейную трапецию, основанием которой служит отрезок $[x_k; x_{k+1}]$. Заменим его прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k)$ (рис. 63). Площадь прямоугольника равна $f(x_k) \cdot \Delta x_k$, где Δx_k — длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$; естественно считать составленное произведение приближенным значением площади k-го столбика.

Если теперь сделать то же самое со всеми остальными столбиками, то придем к следующему результату: площадь S заданной криволинейной трапеции приближенно равна площади S_n ступенчатой фигуры, составленной из n прямоугольников (рис. 64):

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Здесь ради единообразия обозначений мы считаем, что $a = x_0$, $b = x_n$; Δx_0 — длина отрезка $[x_0; x_1]$, Δx_1 — длина отрезка $[x_1; x_2]$ и т. д; при этом, как мы условились выше, $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1}$.

Итак, $S \approx S_n$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

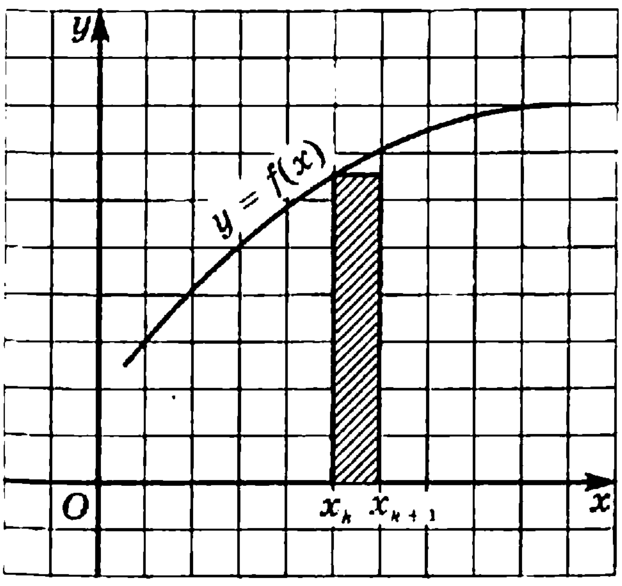


Рис. 63

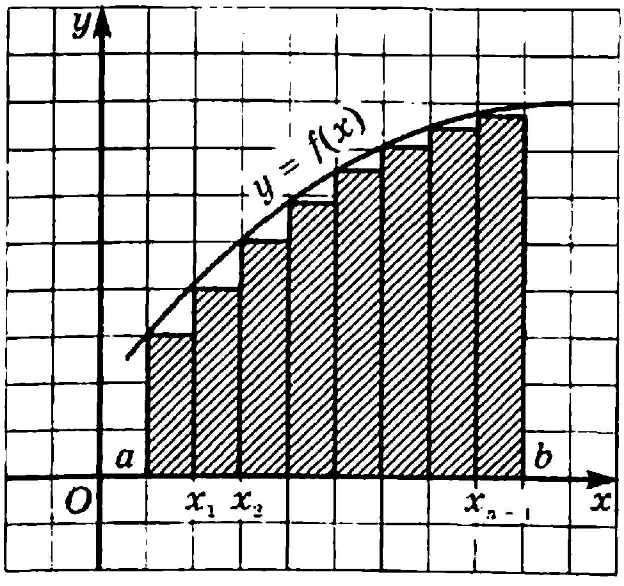


Рис. 64

По определению полагают, что искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности (S_n)

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 2 (*о вычислении массы стержня*).

Дан прямолинейный неоднородный стержень $[a; b]$ (рис. 65), плотность в точке x вычисляется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найти массу стержня.

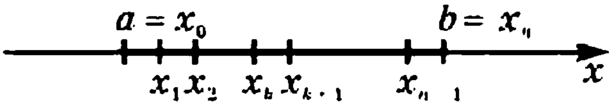


Рис. 65

Решение. Масса m тела, как известно из курса физики, равна произведению плотности ρ на объем V (вместо объема берут площадь, если речь идет о плоской пластине; вместо объема берут длину, если речь идет о прямолинейном стрежне без учета его толщины). Но этот закон действует только для однородных тел, т. е. в тех случаях, когда плотность постоянна. Для неоднородного стержня используется тот же метод, что был применен при решении задачи 1.

1) Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим k-ый участок $[x_k; x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого участка постоянна, а именно такая, как, например, в точке x_k. Итак, мы считаем, что $\rho = \rho(x_k)$.

3) Найдем приближенное значение массы k-го участка, это приближенное значение обозначим m_k:

$$m_k = \rho(x_k)\Delta x_k,$$

где Δx_k, как и в предыдущей задаче, — длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$.

4) Найдем приближенное значение массы стержня

$$m \approx S_n,$$

$$\text{где } S_n = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_{n-1} =$$
$$= \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \rho(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \rho(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

5) Физическая масса равна пределу последовательности (S_n)

$$\boxed{m = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Задача 3 (*о перемещении точки*).

По прямой движется материальная точка. Зависимость скорости от времени выражается формулой $v = v(t)$. Найти перемещение точки за промежуток времени $[a; b]$.

Решение. Если бы движение было равномерным, то задача решалась бы очень просто: $s = vt$, т. е. $s = v(b - a)$. Для неравномерного движения приходится использовать те же идеи, на которых было основано решение двух предыдущих задач.

1) Разделим промежуток времени $[a; b]$ на n равных частей.

2) Рассмотрим промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$ и будем считать, что в этот промежуток времени скорость была постоянной, такой, как в момент времени t_k. Итак, мы считаем, что $v = v(t_k)$.

3) Найдем приближенное значение перемещения точки за промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$, это приближенное значение обозначим s_k:

$$s_k = v(t_k)\Delta t_k.$$

4) Найдем приближенное значение перемещения s:

$$s \approx S_n,$$

$$\text{где } S_n = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_k + \ldots + s_{n-1} =$$
$$= v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}.$$

5) Искомое перемещение равно пределу последовательности (S_n)

$$\boxed{s = \lim_{n \to \infty} S_n.}$$

Подведем итоги. Решения трех различных задач привели к одной и той же математической модели. Многие задачи из различных областей науки и техники приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, данную математическую модель надо специально изучить, т. е.:

а) присвоить ей новый термин;

б) ввести для нее обозначение;

в) научиться с ней работать.

Этим и займемся.

2. Понятие определенного интеграла

Дадим математическое описание той модели, которая была построена в трех рассмотренных задачах для функции $y = f(x)$, непрерывной (но необязательно неотрицательной, как это предполагалось в рассмотренных задачах) на отрезке $[a; b]$:

1) разбиваем отрезок $[a; b]$ на n равных частей;

2) составляем сумму

$$S_n = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 +$$
$$+ \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

3) вычисляем $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

В курсе математического анализа доказано, что этот предел в случае непрерывной (или кусочно-непрерывной) функции существует. Его называют **определенным интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$** и обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(читают: *интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс*). Числа a и b называют *пределами интегрирования* (соответственно *нижним* и *верхним*).

Замечание. Приведем правдоподобную версию происхождения указанных обозначения и термина: $\int$ — стилизованная буква S (*summa*); $f(x)dx$ — напоминание о слагаемых вида $f(x_k)\Delta x_k$, из которых состоит сумма S_n. Само слово *интеграл* происходит от латинского слова *integer* — «целый». Употребление этого термина вполне оправданно: вспомните, какой смысл вкладывается в русском языке в слово *интеграция* — восстановление, восполнение, воссоединение, т. е. это процесс, ведущий к состоянию связанности отдельных частей в целое. В построенной математической модели речь фактически идет о воссоединении целого по отдельным частям (например, о нахождении всей площади по площадям столбиков, как было в задаче 1).

Вернемся к трем рассмотренным выше задачам. Определение площади, данное в задаче 1, теперь можно переписать следующим образом:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx;} \qquad (1)$$

здесь S — площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 62. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*.

Определение массы m прямолинейного неоднородного стержня с плотностью $\rho(x)$, данное в задаче 2, можно переписать так:

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

В этом состоит *физический смысл определенного интеграла*.

Наконец, определение перемещения s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, данное в задаче 3, можно переписать так:

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

Это еще одно физическое истолкование определенного интеграла.

3. Формула Ньютона — Лейбница

У вас, наверное, возник вопрос: какая связь между определенным интегралом, о котором идет речь в § 17, и первообразной, о которой шла речь в § 16?

Ключ к разгадке дает задача 3. С одной стороны, перемещение s точки, движущейся по прямой со скоростью $v = v(t)$, за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$ вычисляется по формуле

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

С другой стороны, координата движущейся точки есть первообразная для скорости — обозначим ее $s(t)$; значит, перемещение s выражается формулой $s = s(b) - s(a)$. В итоге получаем:

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a),$$

где $s(t)$ — первообразная для $v(t)$.

В курсе математического анализа доказана следующая теорема.

Теорема. **Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Приведенную формулу обычно называют ***формулой Ньютона — Лейбница*** в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда *двойной подстановкой*) и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{-1}^{3} x^3dx$.

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int\limits_{-1}^{3} x^3dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс.

Решение. Можно взять полуволну синусоиды от точки $x = 0$ до точки $x = \pi$ (рис. 66) и воспользоваться формулой (1) при следующих условиях: $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$. Получим:

$$S = \int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x\,\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

(в процессе вычислений мы учли, что первообразной для $\sin x$ является $-\cos x$).

Ответ: $S = 2$.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 8$.

Решение. Фигура, площадь которой требуется вычислить, изображена на рисунке 67. Имеем

$$S = \int\limits_{0}^{8} \sqrt[3]{x}dx = \int\limits_{0}^{8} x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_{0}^{8} = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}\Big|_{0}^{8} = \frac{3}{4}\cdot\left(8^{\frac{4}{3}} - 0^{\frac{4}{3}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot(16 - 0) = 12.$$

Ответ: $S = 12$.

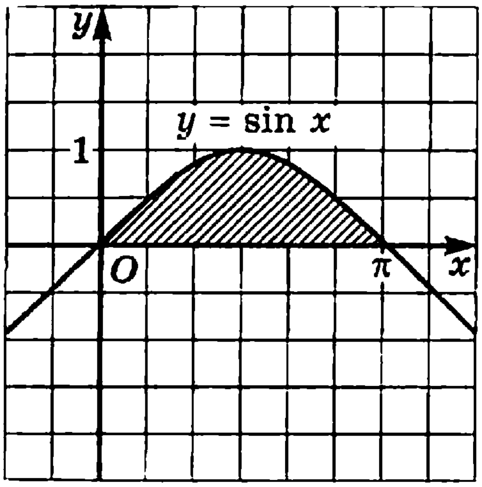


Рис. 66

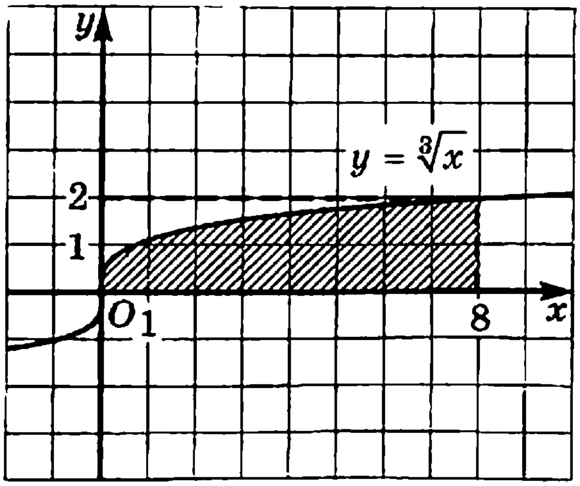


Рис. 67

Опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, можно получить два свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b =$$

$$= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$ ◀■

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

4. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

С помощью интеграла можно вычислять площади не только криволинейных трапеций типа той, что представлена на рисунке 62, но и плоских фигур более сложного вида, например такого, который представлен на рисунке 68. Фигура P ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, причем на отрезке $[a;\ b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$. Чтобы вычислить площадь S такой фигуры, будем действовать следующим образом.

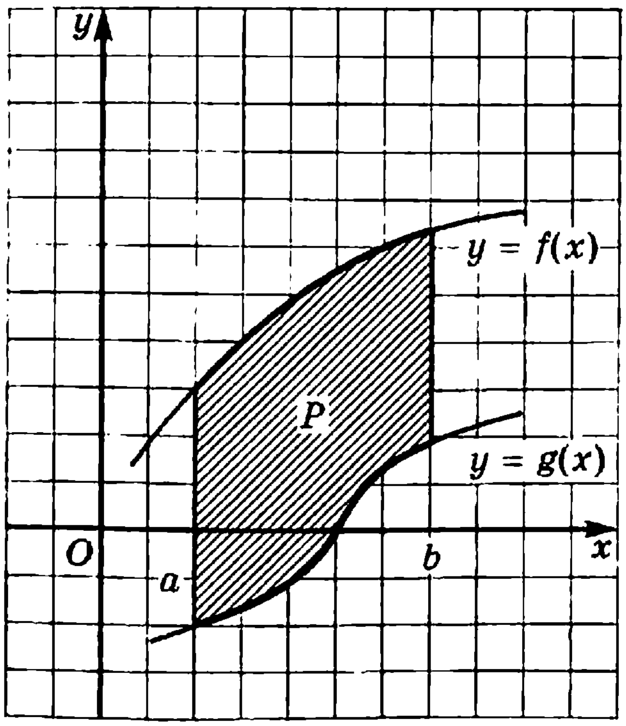


Рис. 68

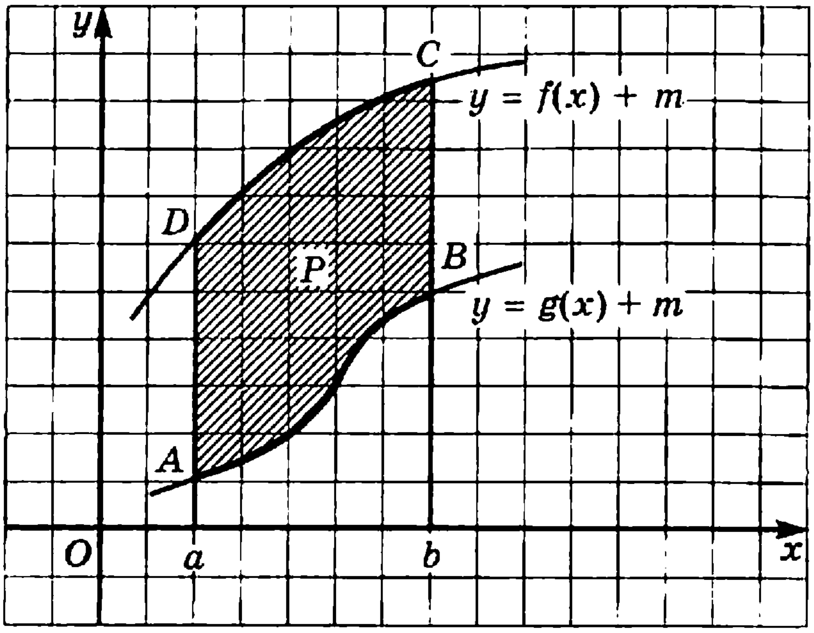


Рис. 69

Выполним параллельный перенос фигуры P на m единиц вверх ($m > 0$) так, чтобы фигура P оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс (рис. 69). Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = f(x) + m$, $y = g(x) + m$, причем обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a; b]$. Имеем

$$S = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Итак, *площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$, вычисляется по формуле*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.} \qquad (2)$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ и гиперболой $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Речь идет о вычислении площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 70. Имеем

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

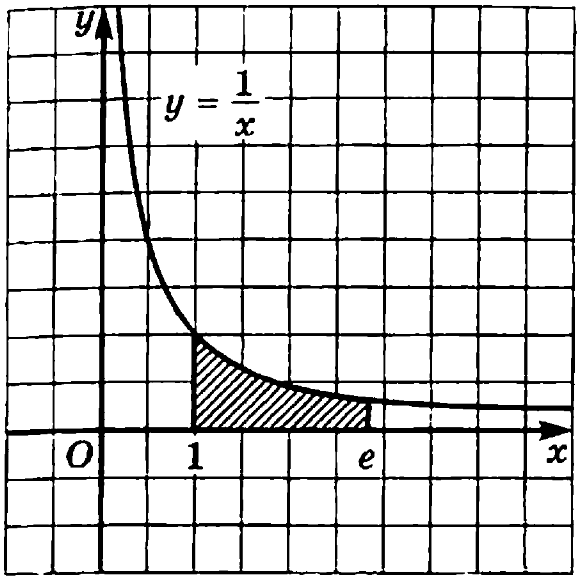


Рис. 70

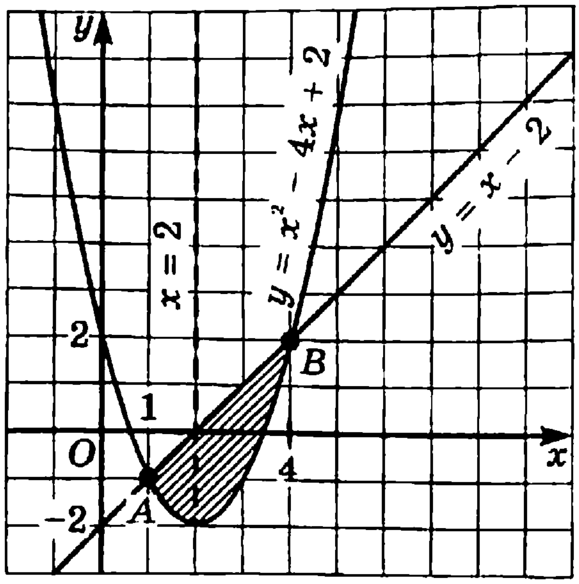


Рис. 71

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Прямую $y = x - 2$ можно построить по точкам (2; 0) и (0; −2) (рис. 71). Абсциссу вершины параболы найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4;$$
$$2x - 4 = 0;$$
$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2$.

Значит, вершиной параболы служит точка (2; −2), а осью параболы — прямая $x = 2$. Возьмем две пары точек, симметричных относительно оси параболы: (1; −1) и (3; −1), (0; 2) и (4; 2), и построим параболу по пяти точкам (рис. 71). Парабола и прямая пересекаются в точках A и B, для отыскания абсцисс этих точек надо решить уравнение $x^2 - 4x + 2 = x - 2$.

Находим последовательно:

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 4.$$

Фигура, площадь которой надо найти, ограничена линиями $y = x^2 - 4x + 2$ (снизу) и $y = x - 2$ (сверху). Можно считать, что с боков эта фигура ограничена прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Значит, для вычисления площади фигуры можно применить формулу (2):

$$S = \int_1^4 ((x - 2) - (x^2 - 4x + 2))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx =$$

$$= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = \left(5 \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4\right) - \left(5 \cdot \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1\right) = 4{,}5.$$

Ответ: $S = 4{,}5$.

Упражнения

Вычислите:

17.1. а) $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$; в) $\int\limits_{-1}^{2} x^4 dx$; г) $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

17.2. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$; г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

17.3. а) $\int\limits_{0}^{1} e^x dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} 3e^x dx$; в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{2} e^x dx$; г) $\int\limits_{-2}^{1} (-2e^x) dx$.

○17.4. а) $\int\limits_{0}^{4} e^{0,5x-1} dx$; в) $\int\limits_{-4}^{4} e^{0,25x+1} dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} e^{2x+1} dx$; г) $\int\limits_{-0,5}^{0} e^{-2x+2} dx$.

○17.5. а) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[3]{1-2x}\, dx$; в) $\int\limits_{\frac{2}{3}}^{11} 5\sqrt[5]{3x-1}\, dx$;

б) $\int\limits_{4}^{5} \frac{1}{(x-3)^3} dx$; г) $\int\limits_{2}^{3} (5x-7)^{-\frac{2}{3}} dx$.

○17.6. а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{0,1}{x+1} dx$;

б) $\int\limits_{1}^{2} \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$; г) $\int\limits_{1}^{2} \left(e^{2x} + \frac{2}{x}\right) dx$.

○17.7. а) $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{2x-1}$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{-5x+6}$; в) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x+1} dx$; г) $\int\limits_{5}^{8} \frac{dx}{9-x}$.

○17.8. Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой $v = v(t)$ (время измеряется в секундах, а скорость — в сантиметрах в секунду). Какой путь пройдет точка за 3 секунды, считая от начала движения ($t = 0$)?

а) $v(t) = 3t^2 - 4t + 1$; в) $v(t) = 4t^3 - 6t^2$;

б) $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{5t+1}}$; г) $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{7t+4}}$.

○17.9. Дан прямолинейный стержень длиной l. Он неоднороден, и его плотность в точке, удаленной от левого конца на x, $0 \leqslant x \leqslant l$, определяется по формуле $\rho = \rho(x)$. Найдите массу стержня, если:

а) $\rho(x) = x^2 - x + 1$, $l = 6$;

б) $\rho(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$, $l = 3$;

в) $\rho(x) = -x^2 + 6x$, $l = 2$;

г) $\rho(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$, $l = 1$.

○17.10. Вычислите $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx$, если график функции $y = f(x)$ изображен на:

а) рис. 72; б) рис. 73.

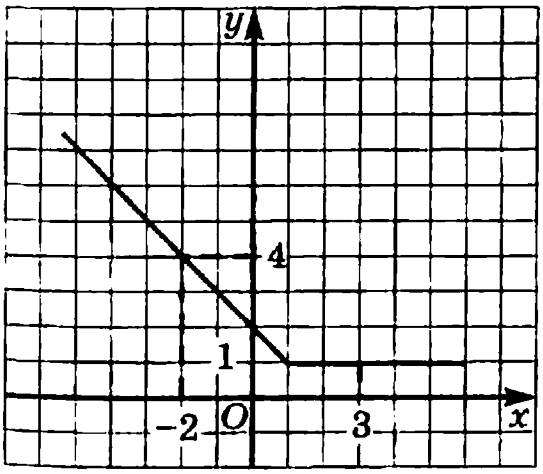


Рис. 72

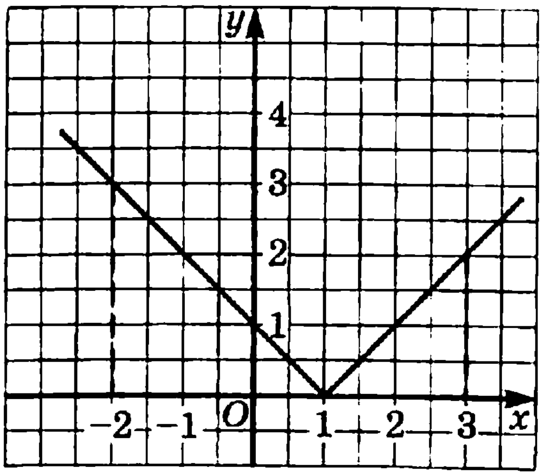


Рис. 73

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

O17.11. а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$;

б) $y = x^3$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 1$;

в) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -3$;

г) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

O17.12. а) $y = x^3 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

б) $y = -x^2 + 4x$, $y = 0$.

O17.13. а) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 9$.

O17.14. а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$;

в) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

г) $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

O17.15. а) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = 1 - \sin 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

O17.16. а) $y = 0$, $x = 4$, $y = \sqrt{x}$;

б) $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $y = \frac{1}{x^2}$;

в) $y = 1$, $x = 0$; $y = \sqrt[3]{x}$;

г) $y = 2$, $x = 0$, $y = \sqrt{x}$.

O17.17. а) $y = \sqrt{x}$, $y = -2\sqrt{x}$, $x = 4$;

б) $y = 2\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 9$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

О17.18. а) $y = 0,\ x = 0,\ x = 3,\ y = e^x$;

б) $y = 0,\ x = 0,\ x = 4,\ y = e^{-x}$;

в) $y = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ y = e^x$;

г) $y = 0,\ x = -2,\ x = 0,\ y = e^{-x}$.

О17.19. а) $x = 1,\ \ y = e^x,\ y = e^{-x}$;

б) $y = \dfrac{1}{e^x},\ y = 1,\ x = -1$;

в) $y = e^x,\ x = 2,\ x + 2y = 2$;

г) $y = e^x,\ \ y = -e^x,\ x = 2,\ x = 0$.

О17.20. а) $y = 0,\ x = 1,\ x = e,\ y = \dfrac{1}{x}$;

б) $y = 0,\ x = 3,\ x = -1,\ y = \dfrac{1}{2x + 3}$;

в) $y = 0,\ x = e,\ x = e^2,\ y = \dfrac{2}{x}$;

г) $y = 0,\ x = 2,\ x = 5,\ y = \dfrac{1}{3x - 5}$.

О17.21. а) $y = e^x,\ y = \dfrac{1}{x},\ x = 2,\ x = 3$;

б) $y = \dfrac{1}{x},\ y = 1,\ x = 5$;

в) $y = \sqrt{x},\ y = \dfrac{1}{x},\ x = 4$;

г) $y = -\dfrac{1}{x},\ y = -1,\ x = e$.

О17.22. Найдите площадь фигуры, изображенной на:

а) рис. 74;

б) рис. 75;

в) рис. 76;

г) рис. 77.

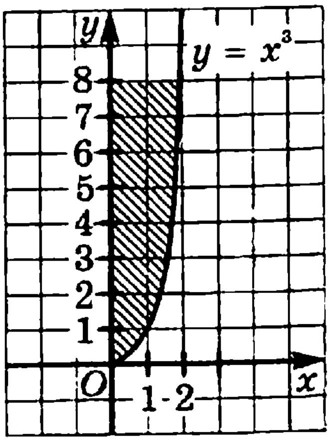


Рис. 74

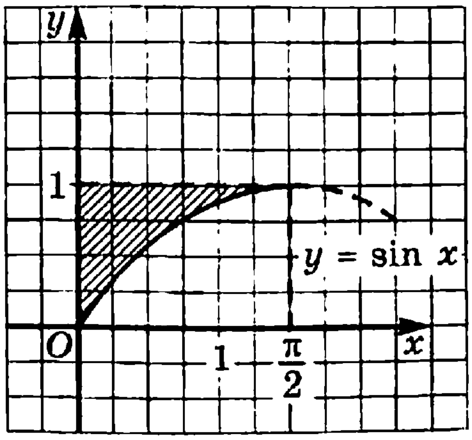


Рис. 75

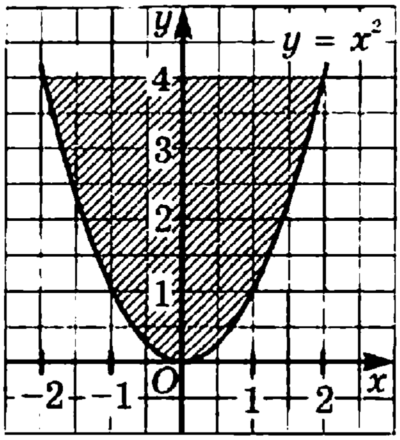


Рис. 76

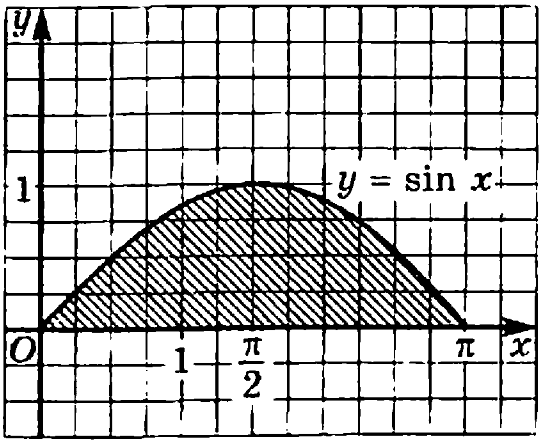


Рис. 77

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

○17.23. а) $y = 1 - x^2$, $y = -x - 1$;

б) $y = x^2 - 3x + 2$, $y = x - 1$;

в) $y = x^2 - 1$, $y = 2x + 2$;

г) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 3 - x$.

○17.24. а) $y = x^2 - 4x$, $y = -(x - 4)^2$;

б) $y = x^2 + 2x - 3$, $y = -x^2 + 2x + 5$.

○17.25. а) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = (x + 1)(3 - x)$;

б) $y = x^2 - 4x + 3$, $y = -x^2 + 6x - 5$.

●17.26. а) $y = 3 - x^2$, $y = 1 + |x|$; б) $y = x^2$, $y = 2 - |x|$.

●17.27. Вычислите:

а) $\int\limits_{-3}^{6} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 2, \\ 6 - x, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

б) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} f(x)\,dx$, где $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \text{ если } 0 < x \leqslant 1, \\ x^3, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

○17.28. Используя геометрические соображения, вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-5}^{0} \sqrt{25 - x^2}\,dx$.

Используя геометрические соображения, вычислите интеграл:

●17.29. а) $\int_0^4 \sqrt{4x - x^2}dx$; б) $\int_{-1}^0 \sqrt{-x^2 - 2x}\, dx$.

●17.30. а) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}dx$; б) $\int_{-4}^4 \sqrt{64 - x^2}dx$.

●17.31. Найдите площадь параболического сегмента, изображенного на:

а) рис. 78; б) рис. 79.

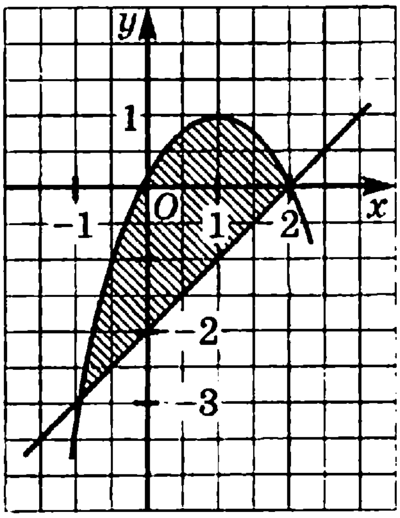


Рис. 78

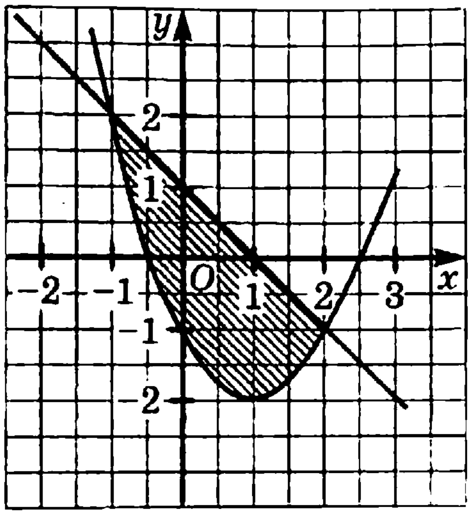


Рис. 79

●17.32. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sin 2x$, $y = \frac{16x^2}{\pi^2}$; в) $y = \cos x$, $y = \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)^2$;

б) $y = x^2 - 1$; $y = \cos \frac{\pi x}{2}$; г) $y = x^2 - 2x$, $y = \sin \frac{\pi x}{2}$.

●17.33. а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$, касательной к нему в точке $x = 1$ и осью y.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3$ и касательными к нему в точках $x = 0$ и $x = 1$.

●17.34. а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ и касательной к нему в точке $x = 3$.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 - 3x$ и касательной к нему в точке $x = -1$.

ГЛАВА 4 Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§ 18. Статистическая обработка данных

На праздничном вечере среди учеников 11 «А» и 11 «Б» классов провели лотерею. Каждый из 50 школьников произвольно задумал одну цифру от 0 до 9 и записал ее и на левой и на правой половинках своего лотерейного билета. Правые половинки билетов остались у их владельцев, а левые половинки положили на стол перед организатором лотереи. Итак, на столе 50 листочков, содержащих всю необходимую информацию. Как в ней разобраться?

Первое, что целесообразно сделать с такой разрозненной информацией, — это как-то упорядочить и сгруппировать ее. Так и поступили, разложив все 50 ответов по кучкам: в одну собрали все ответы «0», в другую собрали все ответы «1» и т. д. После этой перегруппировки результаты собрали в таблицу, и общая картина распределения полученных данных стала абсолютно ясна:

Ответ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество ответов	2	5	3	9	4	10	3	5	3	5	1

Потом, несколько пародируя телевизионные шоу, всем участникам раздавали небольшие призы по шуточным номинациям: «Самый популярный» (ответ 5), «Почти самый популярный» (ответ 3), «Оригинально, но неверно» (ответ 10), «Сладкая парочка» (ответ 0), «Три богатыря» (ответы 2, 6 и 8), «Отличники» (ответы 1, 7 и 9), «Хорошисты» (ответ 4). Пока проходило награждение, включили компьютер, и результаты из таблицы ввели в программу статистической обработки данных. Получили три картинки — три графических изображения распределения данных.

На первой из них по оси абсцисс отложены сами ответы (числа из первой строки таблицы), по оси ординат отложено количество ответов (числа из второй строки), а в координатной плоскости отмечены точки (0; 2), (1; 5), (2; 3), (3; 9), ..., (9; 5), (10; 1), соответствующие парам чисел из столбцов таблицы. Отмеченные

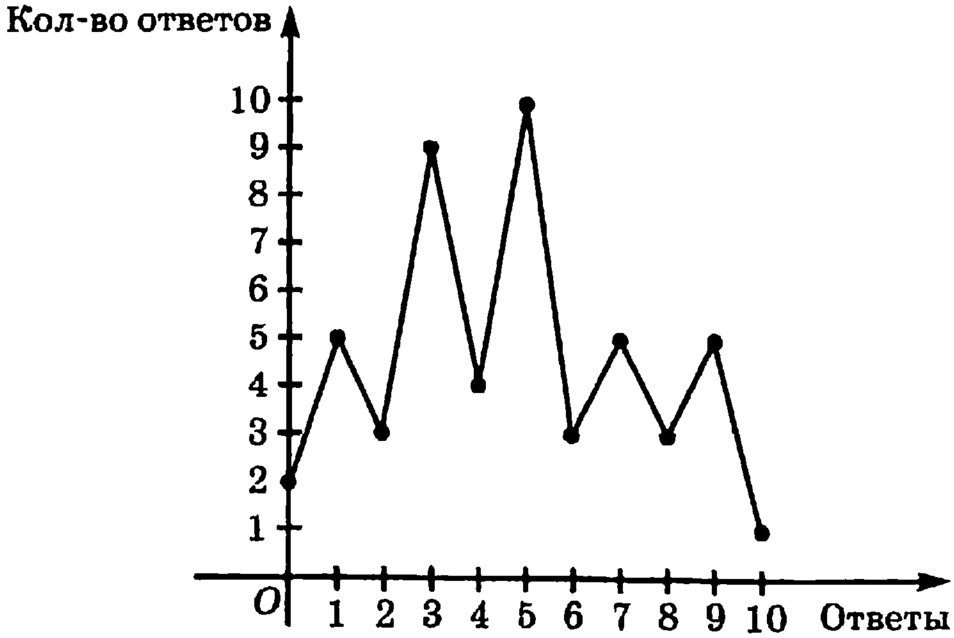


Рис. 80

11 точек для наглядности соединены ломаной. Получился *многоугольник распределения* (рис. 80).

Вторая картинка получается из первой таким образом. Вертикальный отрезок с концами в точках (0; 0) и (0; 2) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного вертикального столбика, ширина которого равна 1, а высота равна 2. Точно так же следующий вертикальный отрезок с концами в точках (1; 0) и (1; 5) симметрично «раздут» вправо и влево до прямоугольного вертикального столбика, ширина которого равна 1, а высота равна 5, и т. д. Получается столбчатая диаграмма — *гистограмма распределения* (рис. 81).

Третья картинка состоит из круга, разделенного на 11 секторов, внутри каждого сектора указан соответствующий ему ответ. Сектор «0» занимает $\frac{1}{25}$ часть круга, так как два полученных

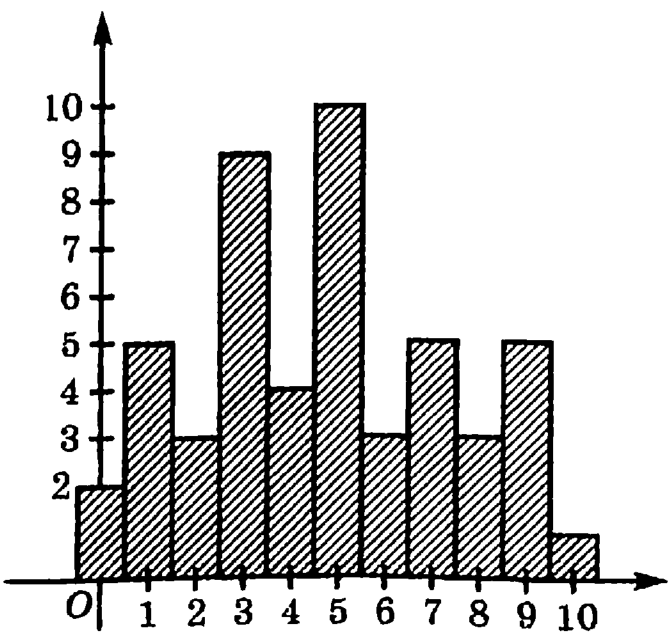


Рис. 81

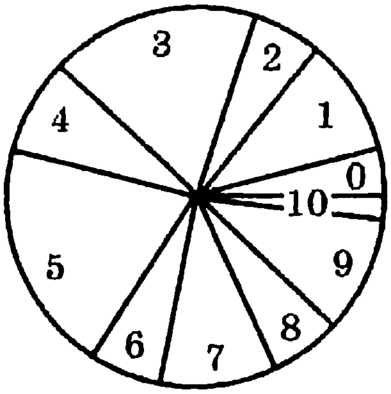


Рис. 82

ответа «0» составляют $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ часть от общего числа всех ответов. Значит, центральный угол сектора «0» равен $\frac{360°}{25} = 14{,}4°$. Самый большой из всех 11 секторов — это сектор «5», он занимает $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ часть всего круга, и его центральный угол равен $\frac{360°}{5} =$ $= 72°$. А сектор «10» — самый маленький, его центральный угол равен 7,2°. Так получается *круговая диаграмма* (рис. 82).

Подведем предварительные итоги. Мы на конкретном примере разобрали основные этапы простейшей статистической обработки данных:

1) сначала данные измерений *упорядочивают* и *группируют*;
2) затем составляют *таблицы распределения данных*;
3) таблицы распределения позволяют построить *графики распределения данных* в виде многоугольника распределения, гистограммы распределения или круговой диаграммы.

К этим трем этапам позже, как правило, добавляют еще один:

4) получение *паспорта данных* измерения, который состоит из небольшого количества основных *числовых характеристик* полученной информации.

Перечислим некоторые числовые характеристики для разобранного выше измерения.

Объем измерения. В данном случае он равен 50, так как обрабатывались ответы 50 участников.

Размах измерения. В данном случае он равен 10, т. е. разности между наибольшим (10) и наименьшим (0) результатами измерения (10 − 0 = 10).

Мода измерения. В данном случае она равна 5, так как ответ «5» — самый «модный», самый популярный, он встретился чаще других — 10 раз из всех 50 результатов.

Среднее (или *среднее арифметическое*). Это частное от деления суммы всех результатов измерения на объем измерения. Среднее удобно вычислять после того, как составлена таблица распределения. В данном случае вычисления выглядят так:

$$\frac{0\cdot 2+1\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 9+4\cdot 4+5\cdot 10+6\cdot 3+7\cdot 5+8\cdot 3+9\cdot 5+10\cdot 1}{50} =$$

$$= \frac{0+5+6+27+16+50+18+35+24+45+10}{50} = \frac{236}{50} = 4{,}72.$$

Чаще всего результатами измерения являются числа. Каждое число, встретившееся в конкретном измерении, называют *вариантой измерения*[1]. В конкретном измерении его варианты могут быть никак не упорядочены, как, например, билетики на столе перед организатором лотереи. Если записать все варианты измерения по порядку (например, по времени) их получения, то получится *ряд данных* измерения. Если же начать с наименьшей из всех вариант измерения и затем записать все варианты в порядке возрастания (точнее неубывания) их числовых значений, то получится *сгруппированный ряд данных*. В разобранном выше примере сгруппированный ряд данных выглядит так:

$$\underbrace{0,0}_{2},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{5},\ \underbrace{2,2,2}_{3},\ \underbrace{3,\ldots,3}_{9},\ \underbrace{4,4,4,4}_{4},\ \underbrace{5,\ldots,5}_{10},\ \underbrace{6,6,6}_{3},$$

$$\underbrace{7,\ldots,7}_{5},\ \underbrace{8,8,8}_{3},\ \underbrace{9,\ldots,9}_{5},\ \underbrace{10}_{1}.$$

Среднюю варианту в сгруппированном ряде данных называют *медианой измерения*. Если средних вариант две, то медиана равна их полусумме. По обе стороны от медианы лежит одинаковое число вариант. Так, в рассмотренном примере 50 вариант, средних — две, это варианты № 25 и № 26. Обе они равны 5, значит, и медиана равна 5.

Ответ «0» встретился два раза. В статистике в этом случае говорят, что *абсолютная частота* варианты «0» равна двум. Ответ «7» встретился ровно пять раз. Значит, *абсолютная частота* варианты «7» равна пяти. К сожалению, в статистике термин «частота» используется в различных сочетаниях: абсолютная частота, относительная частота, процентная частота, статистическая частота, эмпирическая частота, частота наступления случайного события и т. п. Мы заменим термин *абсолютная частота* более кратким.

Определение. Если среди всех данных конкретного измерения одна из вариант встретилась k раз, то число k называют **кратностью** этой варианты.

В разобранном примере кратность варианты «5» равна 10, кратность варианты «3» равна 9 и т. д. (см. таблицу).

	Варианта											Сумма
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Кратность	2	5	3	9	4	10	3	5	3	5	1	50

[1] Использование женского рода слегка непривычно, но именно такой термин принят в статистике. Кстати, это помогает избежать путаницы с привычным использованием слова «вариант» в мужском роде (например, вариант контрольной работы).

Так получается *таблица распределения* данных измерения. Клетку «Сумма» добавляют для контроля: число в графе «Сумма» всегда должно равняться объему измерения.

Посмотрим, как эти понятия используются в других примерах.

Пример 1. На уроке физкультуры 14 школьников прыгали в высоту, а учитель записывал их результаты. Получился такой ряд данных (в сантиметрах):

125, 110, 130, 125, 120, 130, 140, 125,
110, 130, 120, 125, 120, 125.

Требуется сгруппировать данные, составить таблицу их распределения, найти размах, моду и медиану измерения.

Решение. Выпишем все варианты измерения в порядке возрастания (точнее, неубывания), разделяя пробелами группы одинаковых результатов:

110,110, 120,120,120, 125,125,125,125,125,
130,130,130, 140.

Это сгруппированный ряд данных. Размах измерения равен 140 − 110 = 30. Варианта 140 встретилась однажды, кратность равна 1. Варианта 110 встретилась дважды, кратность равна 2. Варианта 125 встретилась наибольшее число раз, ее кратность равна 5; это мода измерения. Составляем таблицу распределения:

	Варианта					Сумма
	110	120	125	130	140	
Кратность	2	3	5	3	1	14

Если двигаясь по сгруппированному ряду слева направо отсчитать половину (7) результатов, то мы остановимся на результате 125 см. Следующая половина результатов начинается также со 125. Значит, 125 — медиана измерения.

Подчеркнем, что в процессе упорядочивания, группировки данных и составления таблиц распределения с самими данными ничего не происходит: они остаются неизменными. Изменяется только способ их представления. По существу меняется только дизайн информации, способ ее оформления.

Пример 2. В таблице распределения данных часть информации была утеряна. Восстановить ее, если известно, что объем измерения равен 20, размах равен 6, а мода равна 2.

	Варианта					Сумма
		−1	0		3	
Кратность	5	1		7	3	

Решение. По определению в графе «Сумма» должен стоять объем измерения, т. е. 20. Этот объем равен сумме всех кратностей. Значит, кратность варианты «0» равна $20 - (5 + 1 + 7 + 3) = 4$. Самая большая кратность равна 7. Значит, над ней и расположена мода измерения, равная 2. Так как размах равен 6, а наибольшая варианта равна 3, то наименьшая варианта равна $3 - 6 = -3$. Эту варианту помещаем в последнюю свободную графу над кратностью 5. Итак, все пустые места в таблице заполнены.

Ответ (в виде итоговой таблицы):

	Варианта					Сумма
	–3	–1	0	2	3	
Кратность	5	1	4	7	3	20

Пример 3. По приведенной гистограмме распределения данных (рис. 83) найти: количество вариант измерения, объем, размах, моду измерения, наиболее удаленную от моды варианту и ее кратность. Составить таблицу распределения данных.

Решение. Количество вариант — это количество столбиков в гистограмме, т. е. 7. Объем измерения равен сумме кратностей всех вариант, т. е. равен сумме высот всех семи столбиков: $3 + 2 + 7 + 3 + 5 + 4 + 1 = 25$. Таблица распределения выглядит так:

	Варианта							Сумма
	2	4	5	6	7	9	10	
Кратность	3	2	7	3	5	4	1	25

Наибольшая варианта равна 10, а наименьшая равна 2. Значит, размах равен 8. Чаще других — 7 раз — встретилась варианта 5. Значит, мода равна 5. На наибольшем расстоянии от моды находится варианта 10, ее кратность равна 1.

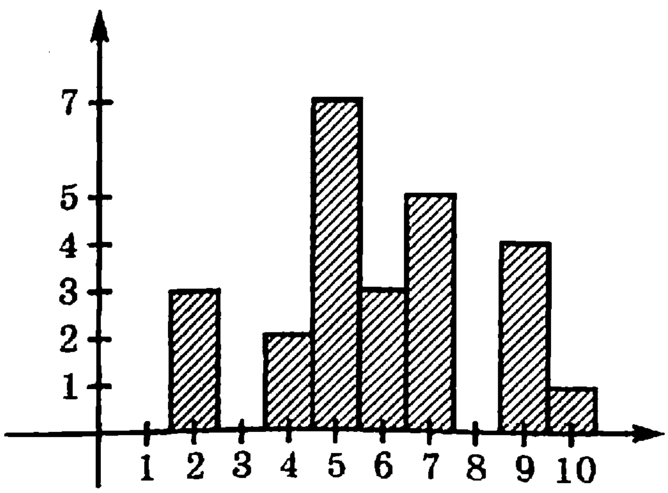


Рис. 83

Обратите внимание, что варианты измерения совсем не обязательно располагаются через равные промежутки. Вполне возможны и пропуски, и неравномерное расположение вариант на оси абсцисс. Подчеркнем также, что кратность варианты всегда больше нуля: ведь если число ни разу не встретилось среди результатов измерения, то оно не является вариантой измерения.

Если кратность данной варианты разделить на объем измерения, то получится *частота варианты*.

$$\textbf{Частота варианты} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объем измерения}}$$

Это число показывает, какую часть (долю) среди всех данных составляют данные, равные выбранной варианте. Заметим, что для составления круговой диаграммы на рисунке 82 мы фактически пользовались понятием частоты варианты. В статистике, как правило, используют термин *относительная частота*. Мы будем пропускать прилагательное *относительная*: других частот у нас не будет.

Разумеется, частоту варианты можно измерять и в процентах.

$$\textbf{Частота варианты (в процентах)} = \frac{\textit{кратность варианты}}{\textit{объем измерения}} \cdot 100\%$$

Зная таблицу распределения данных, нетрудно составить таблицу распределения частот данных, скажем, для примера 2:

	Варианта					Сумма
	–3	–1	0	2	3	
Кратность	5	1	4	7	3	20
Частота	0,25	0,05	0,2	0,35	0,15	1
Частота, %	25	5	20	35	15	100

А теперь составим таблицу распределения частот по таблице распределения данных из примера 3:

	Варианта							Сумма
	2	4	5	6	7	9	10	
Кратность	3	2	7	3	5	4	1	25
Частота	0,12	0,08	0,28	0,12	0,2	0,16	0,04	1
Частота, %	12	8	28	12	20	16	4	100

Если целиком известна вторая строка таблицы, то по ней единственным образом можно заполнить третью и четвертую строки. Однако, скажем, по третьей строке нельзя точно узнать числа во второй строке: для такого восстановления нужно знать объем измерения. Иногда по частичной информации в разных строках можно восстановить всю информацию в таблице.

Пример 4. Восстановить сводную таблицу распределения данных измерения по следующей информации:

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность		$2k$		$4k$	200
Частота					
Частота, %	$3k$	$k^2 - 7k - 33$			

Решение. В последнем столбце сумма частот всегда равна 1, а сумма частот в процентах всегда равна 100. Правильнее всего начинать восстановление информации с того столбца, в котором уже заполнено больше всего клеток — в данном случае с варианты № 2. Всего было 200 результатов, среди них встретились $2k$ результатов, равных варианте № 2. Значит, частота этой варианты равна $\frac{2k}{200}$, а процентная частота в сто раз больше частоты, т. е. равна k. Поэтому $k^2 - 7k - 33 = k$. Решив это уравнение, получим: $k_1 = -3$, $k_2 = 11$. Но k — натуральное число, поэтому из двух найденных значений выбираем $k = 11$.

Итак, под вариантой № 2 в первой строке записываем число 22, во второй — 0,11, а в третьей — 11.

Столбцы под вариантами № 1 и № 4 теперь заполняются сразу, т. к. по одной заполненной клетке легко восстанавливаются сведения в других клетках. Под вариантой № 1 в последней строке стоит число $3k$, т. е. 33, значит, во второй — число 0,33, а в первой — число 66. Под вариантой № 4 в первой строке стоит число $4k$, т. е. 44, значит, во второй — число 0,22, а в последней — число 22. Столбец под вариантой № 3 заполняется по дополнению: всего было 200 результатов, а в первой строке в трех других столбцах оказалось 132 результата. Значит, кратность варианты № 3 равна 68. Теперь все пустые места заполнены:

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность	66	22	68	44	200
Частота	0,33	0,11	0,34	0,22	1
Частота, %	33	11	34	22	100

Пример 5. В десятых классах трех школ микрорайона провели проверочный диктант по русскому языку. На рисунке 84 изображена гистограмма распределения полученных отметок.

а) Найти общее количество работ, частоту пятерок, процентную частоту двоек.

б) Заполнить сводную таблицу распределения данных.

в) Построить гистограмму распределения частот (в процентах).

г) Построить круговую диаграмму распределения частот (в процентах).

Решение. а) На гистограмме указано, что двоек было 40, троек — 50, а четверок 75, пятерок — 35. Значит, всего было 200 работ. Это и есть объем измерения. Частота пятерок равна $\frac{35}{200} =$ $= 0{,}175$, а частота (в процентах) двоек равна $\frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%$.

б) Так как все кратности известны, то можно заполнить всю таблицу распределения:

	Варианта				Сумма
	2	3	4	5	
Кратность	40	50	75	35	200
Частота	0,2	0,25	0,375	0,175	1
Частота, %	20	25	37,5	17,5	100

в) Для построения гистограммы распределения частот (в процентах) используем первую и четвертую строки. Получим четыре вертикальных столбика (рис. 85), основания которых соответствуют полученным отметкам, а высоты равны найденным частотам (в процентах).

Подчеркнем, что гистограммы на рисунках 84 и 85 отличаются друг от друга только размерами по оси ординат, а общий характер распределения — один и тот же в обоих случаях.

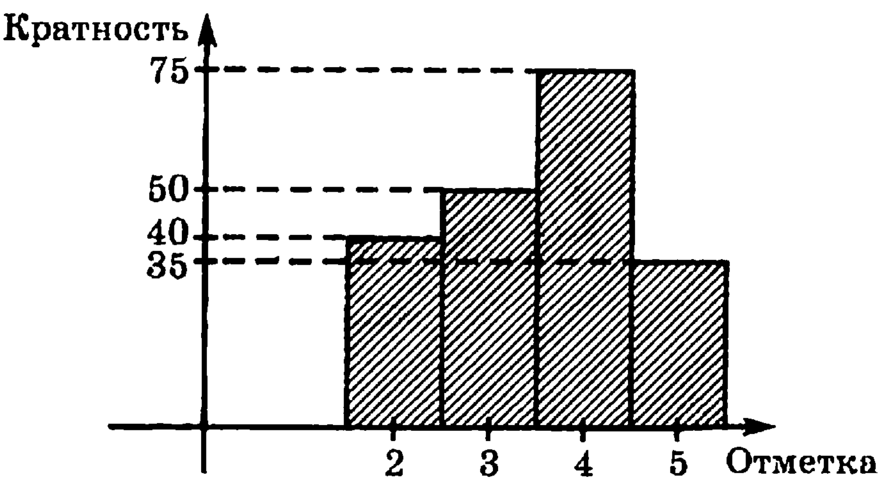


Рис. 84

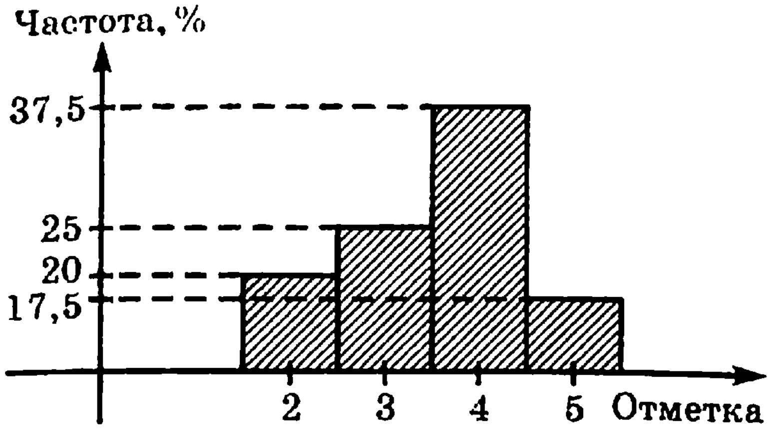


Рис. 85

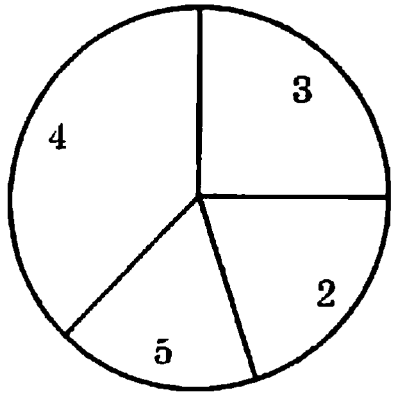


Рис. 86

г) Разделим круг на четыре сектора. Центральный угол сектора двойки составляет 20% от 360°, т. е. равен 72°. Центральный угол сектора тройки составляет 25% от 360°, это прямой угол. Центральные углы секторов четверки и пятерки равны, соответственно, 135° и 63° (рис. 86). ◁■

Пример 6. В большом книжном магазине провели оценку того, как распределены в нем книги, по пяти ценовым категориям:

Цена, p	$p \leqslant 50$	$50 < p \leqslant 100$	$100 < p \leqslant 200$	$200 < p \leqslant 400$	$p > 400$
Категория	Дешевые	Умеренные	Средние	Дорогие	Очень дорогие

По первой тысяче проверенных наименований составили гистограмму распределения частот (в процентах) (рис. 87). Найти: частоту дешевых книг, количество очень дорогих книг, моду распределения. Составить таблицу распределения количества книг по категориям.

Решение. Частота в 100 раз меньше частоты в процентах. Значит, частота дешевых книг равна 0,15. Очень дорогие книги составляют 9% от общего числа, т. е. от 1000 книг. Значит, очень дорогих книг было 90. Таблица распределения количества книг в ценовых категориях выглядит так:

Категория	Дешевые	Умеренные	Средние	Дорогие	Очень дорогие
Количество	150	250	330	180	90

Модой распределения являются средние по цене книги, их было 330. ◁■

Пример 6 показывает, что вариантой измерения совсем не обязательно является число. Вполне возможны случаи, когда варианты измерения отличаются друг от друга просто по названию.

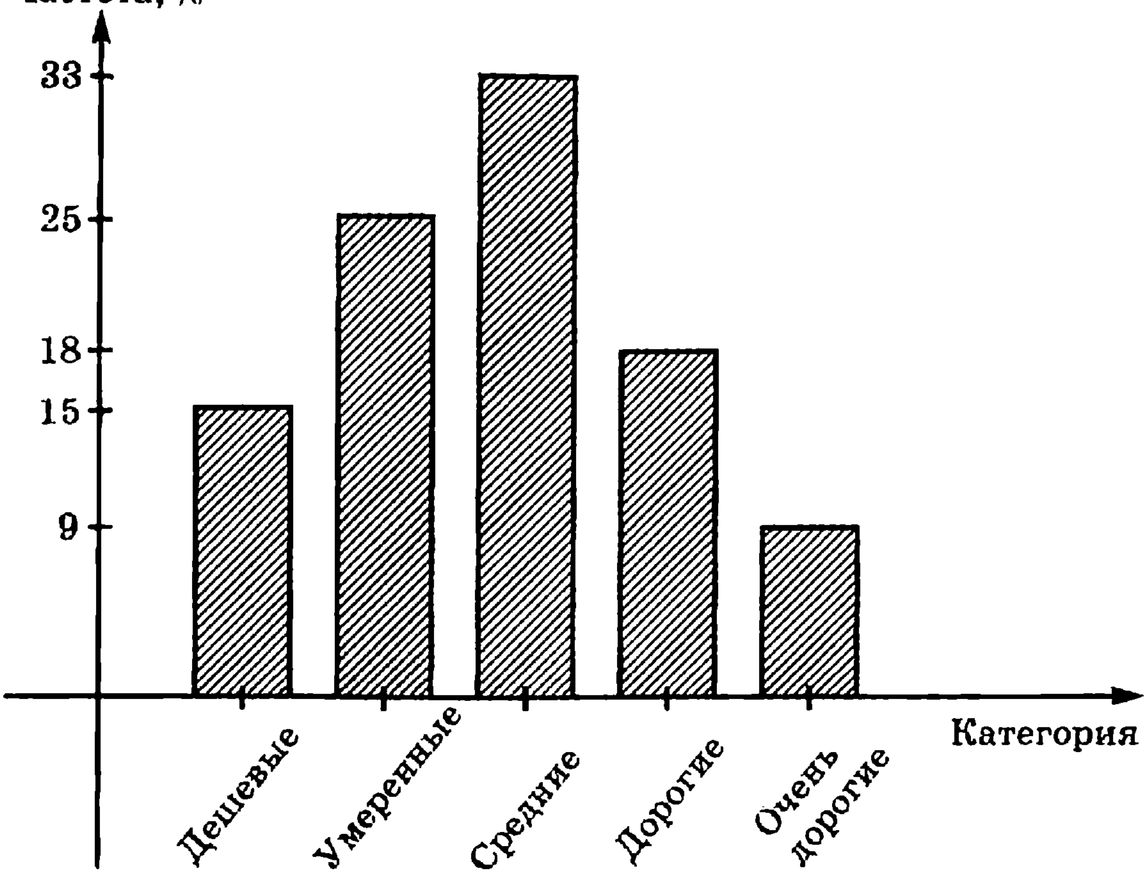


Рис. 87

В таких случаях говорят о *номинативной* шкале вариант измерения (*номинативная шкала* — шкала по номинациям, т. е. по названию, по имени). Заметим, что в таком случае теряет смысл понятие размаха измерения: неизвестно, какая из вариант наибольшая, а какая наименьшая. Но так как во всех реальных измерениях количество вариант конечно, то всегда можно их имена или названия заменить на номера (№ 1, № 2, № 3, ...) и после этого перейти к обычному числовому способу перечисления вариант.

Пример 7. Вычислить среднее измерений в примерах 1—6.

Решение. 1) В примере 1 было 14 прыгунов. Общая сумма их прыжков в высоту составила

$$110 \cdot 2 + 120 \cdot 3 + 125 \cdot 5 + 130 \cdot 3 + 140 \cdot 1 = 220 + 360 + \\ + 625 + 390 + 140 = 1735 \text{ см.}$$

Значит, среднее измерения равно $\frac{1735}{14} \approx 123{,}93$ см.

2) В примере 2 было получено 20 результатов. Используя таблицу распределения из примера 2, вычисляем среднее:

$$\frac{(-3) \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3}{20} = \frac{-15 - 1 + 14 + 9}{20} = 0{,}35.$$

3) В примере 3 было 25 результатов. Получаем:

$$\frac{2\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 7+6\cdot 3+7\cdot 5+9\cdot 4+10\cdot 1}{25}=$$

$$=\frac{6+8+35+18+35+36+10}{25}=\frac{148}{25}=5{,}92.$$

4) В примере 4 среднее вычислить нельзя, так как мы знаем только номера вариант, но не знаем их реальных числовых значений. Аналогично обстоит дело и в примере 6: бессмысленно умножать имя «дешевые» на 150 и складывать его, например, с именем «умеренные», умноженным на 250. Правда, тут возможен следующий, весьма условный и приблизительный, подход. Предположим, что в среднем дешевые книги стоят 30 р., умеренные стоят 80 р., средние — 150 р., дорогие — 300 р., очень дорогие — 600 р. Тогда общая стоимость всей тысячи книг (примерно) такова:

$$30\cdot 150+80\cdot 250+150\cdot 330+300\cdot 180+600\cdot 90=$$
$$=100(45+200+495+540+540)=182\,000,$$

а средняя цена (приблизительно) равна 182 р. Произвол при таком подсчете весьма высок: вполне может быть, что дешевые книги в среднем стоят 40 р., а дорогие — 350 р.

5) В примере 5 было 200 результатов. У вариант этого измерения практически совпали их наименования и их численные значения: двойки — 2, тройки — 3... Поэтому подсчет среднего возможен:

$$\frac{2\cdot 40+3\cdot 50+4\cdot 75+5\cdot 35}{200}=\frac{80+150+300+175}{200}=\frac{705}{200}=3{,}525.$$

Отметим, что подсчет можно было вести сразу по таблице частот. Это даже удобнее. Смотрите:

$$\frac{2\cdot 40+3\cdot 50+4\cdot 75+5\cdot 35}{200}=$$

$$=2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}375+5\cdot 0{,}175=3{,}525.$$

Подсчет среднего значения — вещь важная, но далеко не всегда полезная. Например, если вам известно расписание движения электричек от станции А до города Б на целый день, то совершенно бессмысленно вычислять среднее времени отправления электрички. Скорее всего получится ответ — где-то около 13-00 или 14-00, но он не даст никакой содержательной информации. А вот среднее время нахождения электрички в пути — весьма полезная информация: заранее зная его, вы хотя бы приблизительно можете планировать свое время. Другой классический пример — средняя температура людей, лежащих в одной больнице. Никакого здравого вывода из того, что среди 200 пациентов она сегодня равна, скажем, 36,9°, а вчера равнялась 36,7°, сделать невозможно. А вот средняя дневная, среднемесячная или среднегодовая температура в определенной точке земного шара — очень важный метеорологический показатель.

Среднее, мода и медиана относятся к одному и тому же типу числовых характеристик данных измерения. Иногда их называют *мерами центральной тенденции*: каждое из этих чисел по-своему описывает некоторое центральное значение ряда данных. Например, при поиске нового места работы довольно естественно спросить о средней зарплате на интересующем вас предприятии. Однако может так случиться, что ответ о большой величине средней зарплаты введет вас в заблуждение. Например, пусть медиана или мода зарплаты много меньше, чем средняя зарплата. Это просто означает, что на данном предприятии сравнительно небольшое число работников получают очень большую зарплату, а большинство — маленькую зарплату. В таком случае стоит интересоваться средней зарплатой не на всем предприятии, а в более узком секторе должностей, на которых вы предполагаете работать.

Для статистического анализа результатов измерения важными являются не только его центральные значения, но и то, насколько тесно, «кучно», расположены эти результаты вокруг, например, среднего значения всех результатов.

Пример 8. На испытательном стенде оружейного завода пристреливают готовые ружья, т. е. уточняют и корректируют их прицел. В таблице приведены измерения горизонтальных отклонений (в сантиметрах) от цели при стрельбе из трех ружей:

	Выстрел				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Ружье А	+1,0	+1,0	+2,0	+1,5	+2,0
Ружье Б	+1,0	0	−1,5	+1,5	−0,5
Ружье В	−0,5	−1,0	0	−1,5	−1,0

	Выстрел				
	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
Ружье А	+2,0	+1,5	+1,5	+0,5	+1,0
Ружье Б	−1,5	+2,0	+1,0	−1,0	+2,0
Ружье В	+1,0	+1,0	+1,5	+1,0	+3,0

Вычислить средние значения результатов испытания.

Решение. Для ружья А среднее равно

$$\frac{1{,}0 + 1{,}0 + 2{,}0 + 1{,}5 + 2{,}0 + 2{,}0 + 1{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 1{,}0}{10} = \frac{14{,}0}{10} = 1{,}4;$$

для ружья Б получаем:

$$\frac{1{,}0 + 0 - 1{,}5 + 1{,}5 - 0{,}5 - 1{,}5 + 2{,}0 + 1{,}0 - 1{,}0 + 2{,}0}{10} = \frac{3{,}0}{10} = 0{,}3;$$

для ружья В получаем:

$$\frac{-0{,}5 - 1{,}0 + 0 - 1{,}5 - 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}5 + 1{,}0 + 3{,}0}{10} = \frac{3{,}5}{10} = 0{,}35.$$

Ответ: 1,4; 0,3; 0,35.

Какое же из ружей более точное? Если точность оценивать только по среднему значению, то лучшим является ружье Б: среднее отклонений его выстрелов от цели ближе всего к нулю; ружье В несколько хуже, и совсем плохо пристреляно ружье А. Но если внимательно проанализировать приведенную в примере 8 таблицу построчно, то мы увидим, что практически все попадания из ружья А расположены очень «кучно», недалеко от их среднего значения 1,4. Скорее всего имеет место некоторая систематическая ошибка, но после ее исправления попадания будут концентрироваться вокруг цели с прежним, весьма небольшим разбросом. С ружьем Б дело обстоит хуже: выстрелы из него сильно рассеяны вправо и влево. Хотя в среднем ошибка и мала (всего 0,3 см), но для каждого конкретного выстрела отклонение от цели может быть достаточно большим, и, что самое неприятное, знак отклонения меняется непредсказуемо. Вывод: ружье Б ненадежно. С ружьем В, кажется, что-то случилось в процессе испытания: первые 5 выстрелов стабильно и довольно кучно располагались левее цели, а все следующие — правее, причем выстрел № 10 дал вообще самую заметную ошибку. Здесь требуется восстановить первоначальные параметры настройки ружья, а затем сделать небольшую корректировку.

Числовую характеристику данных измерения, отвечающую за разброс (рассеивание) данных вокруг их среднего значения, называют *дисперсией* (от лат. *disperses* — рассыпанный, разогнанный, рассеянный) и обозначают буквой D; число $\sigma = \sqrt{D}$ называют *средним квадратическим* отклонением. Чем меньше дисперсия D или среднее квадратическое отклонение σ, тем плотнее группируются данные измерения вокруг своего среднего значения.

Подсчет дисперсии и среднего квадратического отклонения вручную или даже с помощью калькулятора — вещь достаточно трудоемкая и требующая времени. Если вы уверенно работаете с каким-либо пакетом компьютерных программ по статистической обработке данных, то разумнее вводить данные измерения с клавиатуры и использовать соответствующие возможности программы. В любой достаточно полной современной операционной системе для персонального компьютера такие программы предусмотрены. Например, в Microsoft Office за это отвечает Microsoft Exel — программа работы с таблицами.

Опишем прямой алгоритм вычисления дисперсии D — меры рассеивания результатов измерения.

Алгоритм вычисления дисперсии

Для нахождения дисперсии D данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ измерения следует вычислить:

1) среднее значение $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;

2) отклонения данных от M, т. е. $x_1 - M$, $x_2 - M$, ..., $x_{n-1} - M$, $x_n - M$;

3) квадраты $(x_i - M)^2$ отклонений $(x_i - M)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, найденных на предыдущем шаге;

4) среднее значение всех квадратов отклонений — это и есть дисперсия D:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_{n-1} - M)^2 + (x_n - M)^2}{n};$$

$\sigma = \sqrt{D}$ — среднее квадратическое отклонение.

Пример 9. Найти дисперсию результатов измерений для ружей А и Б из примера 8.

Решение. Проведем подсчеты для испытания ружья А. Удобно собрать вычисления в таблицу. Напомним, что среднее $M = 1{,}4$ уже вычислено в примере 8.

	Выстрел				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Результат	+1,0	+1,0	+2,0	+1,5	+2,0
Отклонение	−0,4	−0,4	0,6	0,1	0,6
Квадрат отклонения	0,16	0,16	0,36	0,01	0,36

	Выстрел				
	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
Результат	+2,0	+1,5	+1,5	+0,5	+1,0
Отклонение	0,6	0,1	0,1	−0,9	−0,4
Квадрат отклонения	0,36	0,01	0,01	0,81	0,16

$$D = \frac{0{,}16 \cdot 3 + 0{,}36 \cdot 3 + 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}81}{10} = \frac{2{,}4}{10} = 0{,}24;\ \sigma = \sqrt{D} \approx 0{,}5.$$

Аналогично поступим с результатами испытания ружья Б; здесь $M = 0{,}3$:

	Выстрел				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Результат	+1,0	0	−1,5	+1,5	−0,5
Отклонение	0,7	−0,3	−1,8	1,2	−0,8
Квадрат отклонения	0,49	0,09	3,24	1,44	0,64

	Выстрел				
	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
Результат	−1,5	+2,0	+1,0	−1,0	+2,0
Отклонение	−1,8	1,7	0,7	−1,3	1,7
Квадрат отклонения	3,24	2,89	0,49	1,69	2,89

$$D = \frac{0{,}49 \cdot 2 + 3{,}24 \cdot 2 + 2{,}89 \cdot 2 + 0{,}09 + 1{,}44 + 0{,}64 + 1{,}69}{10} =$$

$$= \frac{17{,}1}{10} = 1{,}71,\ \sigma = \sqrt{D} \approx 1{,}31.$$

Мы видим, что дисперсии различаются более чем в 7 раз, а среднее квадратическое отклонение для испытаний ружья Б почти в 3 раза превышает среднее квадратическое для испытаний ружья А. Грубо говоря, ружье Б стреляет с разбросом в три раза больше, нежели ружье А.

Упражнения

О18.1. Ученик выписал из дневника свои отметки за март. Вот что получилось:

4, 4, 3, 2, 5, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 4, 5, 4, 2, 4, 4, 5, 3, 3.

а) Составьте сгруппированный ряд этих данных.

б) Чему равна мода этого измерения и какова ее кратность?

в) Выпишите таблицу распределения данных.

г) Найдите среднее значение отметок за март.

О18.2. В очередном туре футбольного чемпионата состоялись 10 матчей. Вот их результаты:

3 : 1, 0 : 2, 1 : 1, 0 : 0, 0 : 4, 0 : 1, 2 : 2, 0 : 3, 1 : 0, 1 : 1.

Футбольный статистик подсчитал результативность матчей (количество голов).

а) Выпишите (не сгруппированный) ряд полученных данных.

б) Сгруппируйте их и составьте таблицу распределения данных и распределения частот (в процентах).

в) Постройте гистограмму распределения данных.

г) Найдите среднюю результативность матчей в этом туре.

О18.3. Лидеру партии принесли следующую сводку данных о проголосовавших за его партию по пяти избирательным участкам одного округа:

	Избирательный участок				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
Проголосовавшие за партию, %	7	8	10	2	9
Число голосовавших, тыс. чел.	14	12	10	20	11

а) Найдите среднее значение процента проголосовавших за партию.

б) Подсчитайте общее количество голосовавших на этих пяти участках.

в) Подсчитайте количество проголосовавших за партию на каждом участке.

г) Пройдет ли партия 7-процентный барьер в этом округе?

О18.4. По приведенной гистограмме распределения данных (рис. 88) найдите:

а) количество вариант и объем измерения;

б) размах и моду измерения;

в) таблицу распределения данных;

г) среднее результатов измерения.

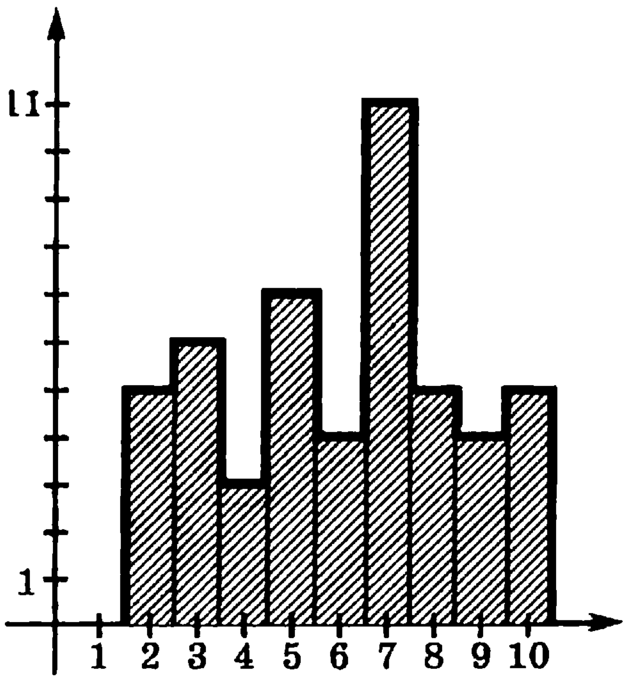


Рис. 88

●18.5. а) Найдите частоту каждой из букв в строке «Октябрь уж наступил...» из стихотворения «Осень» А. С. Пушкина.

б) Найдите частоту (в процентах) букв слова «гром» среди всех букв двустишия «...Как бы резвяся и играя / Грохочет в небе голубом...» из стихотворения Ф. И. Тютчева.

в) Найдите моду и ее кратность среди всех букв двустишия «Это дерево сосна, / И судьба сосны ясна...» из стихотворения Ю. Минералова.

г) Измеряется длина слов в приведенном отрывке из поэмы А. С. Пушкина «Медный всадник». Составьте ряд данных и постройте гистограмму распределения этих данных.

«...Ужасен он в окрестной мгле!
Какая сила в нем сокрыта
А в сем коне какой огонь!
Куда ты скачешь, гордый конь,
И где опустишь ты копыта?...»

○18.6. Каждый из трех мальчиков, Миша, Коля и Петя, 200 раз бросил игральный кубик и записал, сколько раз выпали числа 1, 2, 3, 4, 5. Получились такие данные:

	Число очков						Сумма
	1	2	3	4	5	6	
Результат Миши	45	29	35	31	28	32	200
Результат Коли	31	32	41	34	36	26	200
Результат Пети	27	40	23	39	30	41	200

Составьте гистограммы распределения результатов:

а) Миши;

б) Коли;

в) Миши и Коли;

г) Миши, Коли и Пети.

О18.7. По приведенным данным из сводной таблицы распределения результатов некоторого измерения:

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность		x	y	$x+y$	50
Частота					
Частота, %		$23x-105$	y^2-y-70		

а) найдите x;

б) найдите y;

в) восстановите всю таблицу;

г) найдите моду этого распределения.

Ниже в задачах 18.8—18.11 рассматриваются результаты одного и того же измерения: речь идет об отметках, которые получили выпускники одной из школ за сочинение. Выставлялись две отметки: первая — по литературе, вторая — по русскому языку. Отметки эти таковы:

5/4 4/5 3/1 4/3 2/3 3/3 4/3 5/3 3/3 1/2

4/4 4/2 2/1 3/5 3/4 4/3 5/5 4/4 5/4 2/2

2/3 4/3 5/4 2/3 3/3.

О18.8. Для отметок по литературе:

а) выпишите сгруппированный ряд данных;

б) составьте таблицу распределения кратностей;

в) постройте многоугольник распределения процентных частот;

г) найдите среднее.

О18.9. Для отметок по русскому языку:

а) выпишите сгруппированный ряд данных;

б) составьте таблицу распределения кратностей;

в) постройте многоугольник распределения процентных частот;

г) найдите среднее.

О18.10. Итоговая отметка за сочинение была выставлена по инструкции: «2» — если сумма отметок меньше 5; «3» — если сумма отметок равна 5 или 6; «4» — если сумма отметок равна 7 или 8 и «5» — в остальных случаях.

а) Определите число итоговых «2».

б) Определите число итоговых «5».

в) Составьте таблицу распределения итоговых отметок.

г) Нарисуйте гистограмму распределения итоговых отметок.

●18.11. а) Вычислите дисперсию и среднее квадратичное распределения отметок по литературе.

б) Вычислите дисперсию и среднее квадратичное распределения отметок по русскому языку.

в) По какому предмету отметки в среднем выше?

г) По какому предмету отметки имеют более устойчивый характер?

§ 19. Простейшие вероятностные задачи

Рассмотрим два автомобиля: первый, настоящий, ездит по реальной, не слишком ровной дороге, останавливается перед светофором, тормозит на поворотах и перед постом ДПС, стоит в пробках и т. д.; второй — автомобиль из текстовой задачи на составление уравнений, который движется, никуда не сворачивая, по прямолинейному шоссе из пункта А в пункт Б с постоянной скоростью. В первом случае мы имеем дело с реальностью, а во втором — с некоторым идеальным представлением об этой реальности, с простейшей моделью движения настоящего автомобиля. Именно простота позволяет нам применять математические методы исследования модели. Если попробовать как-то точнее приблизиться к реальности, усложнить модель, то и условия задач, и способы их решения сильно усложнятся. Для математического исследования тогда придется использовать значительно более сложные понятия и факты, чем те, которые входят в школьную программу.

Рассмотрим две монеты. Одна — настоящая, которую вы можете подержать в руке, которая может быть слегка помятой, старой или совсем новой, иметь массу, несколько отличающуюся от массы эталона, и т. п. При реальном подбрасывании эта монета может упасть «орлом» или «решкой», может остановиться, прикоснувшись к ножке стула, может укатиться, ее может кто-то схватить и убежать и т. д. Вторая — монета из какой-либо текстовой задачи. Она идеально круглая, симметричная, абсолютно однородная, может упасть только «орлом» или «решкой» и, что самое главное, оба эти исхода равновозможны (равновероятны) между собой. Как и в случае с автомобилями, мы имеем дело с реальным объектом и некоторой идеальной моделью этого объекта.

Простота этой модели позволяет нам сравнительно легко изучать различные *случайные события* и подсчитывать *вероятности* наступления этих событий.

При статистической обработке информации, как правило, имеют дело с конкретными данными реально проведенных измерений и изучают события, уже происшедшие в действительности (см. § 18). В теории вероятностей изучают различные *модели* случайных событий, их свойства и числовые характеристики. Как в рассмотренных примерах про автомобили и монеты, теория вероятностей, в отличие от статистической обработки информации, имеет дело с некоторыми идеальными представлениями о реальных событиях.

Самый простой и наиболее известный способ подсчета вероятностей наступления тех или иных случайных событий дает *классическое определение вероятности* (с ним вы знакомились в курсе алгебры основной школы). Напомним его.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Непросто сразу понять и запомнить эту довольно длинную фразу. При решении задач удобнее использовать формулировку в виде алгоритма, схемы конкретных действий.

Алгоритм нахождения вероятности случайного события

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого испытания следует найти:

1) число N всех возможных исходов данного испытания;

2) количество $N(A)$ тех исходов, в которых наступает событие A;

3) частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.

Принято вероятность события A обозначать так: $P(A)$[1]. Значит, $P(A) = \frac{N(A)}{N}$. Напомним, что применять это правило можно *толь-*

[1] Объяснение такого обозначения очень простое: «вероятность» по-французски — *probabilite*, по-английски «вероятно» — *probably*; как видите, в обоих случаях слово начинается с буквы *p*.

ко в предположении о равновозможности всех исходов испытания.

Одному ученику был задан вопрос: «Какова вероятность выпадения тройки при одном бросании кубика?» Ученик ответил так: «Вероятность равна 0,5». И объяснил свой ответ: «Тройка или выпадет, или нет. Значит, всего есть два исхода и ровно в одном наступает интересующее нас событие. Получаем ответ $\frac{1}{2}$». Есть в этом рассуждении ошибка? Ее *почти нет*! Действительно, тройка или выпадет, или нет, т. е. при таком определении исхода бросания $N = 2$. Верно и то, что $N(A) = 1$ и, разумеется, что $\frac{1}{2} = 0,5$. А вот равновозможность указанных двух исходов бросания кубика вызывает большие сомнения. Конечно, «чисто юридически» мы имеем право считать, что выпадение тройки равновероятно ее невыпадению. Но вот можем ли мы так считать, не нарушая свои же естественные предположения об «одинаковости» граней кубика? Конечно, нет! Здесь мы имеем дело с правильным рассуждением внутри некоторой модели. Только вот сама эта модель «неправильная», т. е. плохо соответствует реальному явлению.

Рассмотрим несколько примеров подсчета вероятностей.

Пример 1. Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет: а) пять очков; б) четное число очков; в) число очков больше четырех; г) число очков, не кратное трем.

Решение. Всего имеется $N = 6$ возможных исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6. Мы считаем, что ни один из них не имеет никаких преимуществ перед другими, т. е. *принимаем* предположение о равновозможности этих исходов.

а) Ровно при одном из исходов произойдет интересующее нас событие A — выпадение пяти очков. Значит, $N(A) = 1$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{6}$.

б) Интересующее нас событие B произойдет ровно в трех случаях: когда выпадет 2, 4 или 6. Значит, $N(B) = 3$ и $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

в) Интересующее нас событие C произойдет ровно в двух случаях, когда выпадет 5 или 6. Значит, $N(C) = 2$ и $P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

г) Из шести возможных выпавших чисел четыре (1, 2, 4, и 5) не кратны трем, а остальные два (3 и 6) делятся на три. Значит, интересующее нас событие наступает ровно в четырех из шести возможных и равновероятных между собой исходах опыта. Поэтому в ответе получается $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Ответ: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{3}$.

При подсчете вероятности часто используется правило умножения, знакомое вам из курса алгебры основной школы. Напомним это правило.

Правило умножения

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

Пример 2. Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков: а) равна 1; б) меньше 13; в) меньше 5; г) меньше 10.

Решение. а) Минимально возможная сумма очков равна 2, так что сумма никак не может быть равной 1. Значит, $N(A) = 0$ и $P(A) = 0$.

б) Максимально возможное значение суммы очков равно 12. Это произойдет, если выпали 6 и 6. Значит, интересующее нас событие произойдет при любом исходе нашего опыта. Поэтому $N(A) = N$ и $P(A) = 1$.

в) При каждом бросании кубика возможны 6 исходов. Предполагается, что результаты бросаний *независимы* друг от друга. По правилу умножения получаем, что данный опыт имеет $N = 6 \cdot 6 = 36$ исходов. Они предполагаются равновозможными между собой.

Перечислим все те исходы, в которых наступает интересующее нас событие A. Таких исходов ровно 6: (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (1; 3), (3; 1). Значит, $N(A) = 6$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

г) Вместо подсчета тех исходов, в которых наступает интересующее нас событие A, перечислим те исходы, в которых оно *не наступает*, т. е. те исходы, в которых сумма очков равна 10, 11 или 12. Таких исходов ровно 6: (4; 6), (6; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 5), (6; 6). Значит, $N(A) = 36 - 6 = 30$ и $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{6}$.

Каждый из пунктов примера 2 интересен по-своему. В пункте а) мы имеем дело с **невозможным** событием. Так называют событие, которое никогда не наступает при проведении данного испытания, его вероятность равна нулю. В пункте б), наоборот, событие обязательно наступит в данном испытании. Такое событие называют **достоверным**. Вероятность достоверного события равна единице. В пункте в) мы использовали правило умножения. Наконец, в пункте г) нам оказалось удобнее перейти к **противоположному** событию. Так называют событие, которое наступает в том и только том случае, когда *не наступает* интересующее нас событие. Вероятность $P(A)$ события A и вероятность $P(\bar{A})$ противоположного ему события $\bar{A}$ связаны следующим соотношением:

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1.}$$

Пример 3. Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число: а) не оканчивается нулем; б) состоит из различных цифр; в) не является квадратом целого числа; г) не делится на 17.

Решение. Всего имеется 90 двузначных чисел (от 10 до 99), т. е. в данном случае $N = 90$.

а) Пусть A — интересующее нас событие, а $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Событие $\bar{A}$ заключается в том, что число оканчивается нулем. Таких чисел ровно девять: 10, 20, 30, ..., 80, 90. Значит, $N(\bar{A}) = 9$, $P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N} = \frac{9}{90} = 0{,}1$, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}9$.

б) Пусть A — интересующее нас событие, а $\bar{A}$ — противоположное ему событие. Оно заключается в том, что число состоит из одинаковых цифр. Таких чисел ровно девять: 11, 22, 33, ..., 88, 99. Значит, $N(\bar{A}) = 9$, $P(\bar{A}) = \frac{9}{90} = 0{,}1$, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}9$.

в) Следует найти $P(\bar{A})$, где событие A заключается в том, что число является квадратом целого числа. Таких двузначных чисел ровно шесть: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Значит,

$$N(A) = 6,\ P(A) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15},\ P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{14}{15}.$$

г) Следует найти $P(\bar{A})$, где событие A заключается в том, что число делится на 17. Таких двузначных чисел ровно пять: 17, 34, 51, 68, 85. Значит, $N(A) = 5$, $P(A) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{17}{18}$.

Ответ: а) 0,9; б) 0,9; в) $\frac{14}{15}$; г) $\frac{17}{18}$.

Пример 4. Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному натуральному числу. Найдите вероятность того, что: а) эти два числа различны; б) сумма чисел равна 100; в) сумма чисел не больше 25; г) сумма чисел больше 190.

Решение. Каждый из учеников *независимо* друг от друга выбирает одно число из 90 двузначных. По правилу умножения всего $N = 90 \cdot 90$ исходов такого выбора.

а) Случаев, когда эти два числа совпадут между собой, ровно 90: это пары (10; 10), (11; 11), ..., (99; 99). Значит, интересующее нас событие A произойдет в $N(A) = 90 \cdot 90 - 90$ случаях. По формуле подсчета вероятности получаем

$$P(A) = \frac{90 \cdot 90 - 90}{90 \cdot 90} = 1 - \frac{1}{90} = \frac{89}{90} \approx 0{,}989.$$

б) Если первый ученик выбрал число от 10 до 90, то интересующее нас событие произойдет, как только второй выберет недостающее до 100 слагаемое. Если первый выбрал число, большее 90 (таких чисел 9), то при любом выборе второго сумма окажется больше 100, т. е. интересующее нас событие не произойдет. В остальных случаях у второго ученика имеется по одной возможности составить сумму 100. Значит,

$$N(A) = 90 - 9 = 81,\ P(A) = \frac{81}{90 \cdot 90} = 0{,}01.$$

в) Выполним перебор случаев. Если первый ученик выбрал 10, то второй может выбрать любое число от 10 до 15. Всего 6 случаев. Если первый выбрал 11, то второй может выбрать любое число от 10 до 14. Всего 5 случаев. Для 12 будет 4 случая, для 13 — три, для 14 — два. Если первый выбрал 15, то второй может выбрать только 10, т. е. имеется один случай. Если первый выбрал число, которое больше 15, то у второго ученика выбора нет: сумма всегда будет больше 25. Значит, интересующее нас событие произойдет в $N(A) = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ случае, и потому

$$P(A) = \frac{21}{90 \cdot 90} = \frac{7}{2700} \approx 0{,}0026.$$

г) Выполним перебор случаев. Если первый ученик выбрал число от 10 до 91, то при любом выборе второго сумма не будет больше 190, поскольку даже $91 + 99 = 190$. Если первый выбрал 92, то второй может выбрать только 99: один вариант. Если первый выбрал 93, то второй может выбрать или 98, или 99: два варианта; и т. д. Если первый выбрал 99, то второй может выбрать любое число от 92 до 99: восемь вариантов. Значит, интересующее нас событие произойдет в $N(A) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ случаях, и потому $P(A) = \frac{36}{90 \cdot 90} = \frac{1}{225} \approx 0{,}0044$.

Ответ: а) 0,989; б) 0,01; в) 0,0026; г) 0,0044.

Как мы видим, вычисление значений N и $N(A)$ представляет определенные сложности. Прямое перечисление (выписывание, перебор) всех возможностей можно провести лишь в сравнительно небольшом количестве задач. Для подсчета количества различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, используются методы и факты *комбинаторики*.

Довольно часто говорят, что основы комбинаторики и теории вероятностей создали и разработали французские математики XVII века Пьер Ферма и Блез Паскаль. Невольно складывается впечатление, что Ферма и Паскаль как-то собравшись вместе сначала приняли решение создать новую теорию, а затем, в соответствии с неким разработанным планом, осуществили задуманное. Конечно, это не так! Не было никакого совместного плана, и теория, как мы ее сейчас представляем, по-настоящему появилась существенно позже. Просто Ферма и Паскаль решали интересные задачи и в переписке между собой и с другими математиками обсуждали подходы к их решению, полученные результаты, связь с другими задачами, возможности применения в новых ситуациях и т. п.

Рассмотрим задачу, которую не без основания можно отнести к задачам, с которых началось развитие теории вероятностей или, как еще тогда говорили, *комбинаторного анализа*. Ее предложил Паскалю кавалер де Мере — весьма влиятельный деятель при дворе короля Людовика XIV.

Пример 5. Игральную кость бросают четыре раза. Что более вероятно: то, что шестерка появится хотя бы один раз, или же что шестерка не появится ни разу?

Решение. По правилу умножения при четырехкратном бросании игральной кости всего $N = 6^4$ исходов. Сама формулировка задачи ясно указывает на то, что мы имеем дело с парой противоположных друг другу событий. Что же обозначить A, а что — $\bar{A}$? То событие, вероятность которого проще сосчитать, удобно обозначить A. Для появления шестерки хотя бы один раз есть очень много различных ситуаций: шестерка при третьем бросании, шестерка при первом и четвертом бросаниях и т. п. Не очень ясно, как их все пересчитать. Мы и не будем этого делать.

Пусть A — событие, состоящее в том, что шестерка не появится ни разу. Это означает, что при каждом из четырех бросаний имеется ровно *пять* исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5. По правилу умножения находим, что $N(A) = 5^4$. Значит,

$$P(A) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} \approx 0{,}4823; \; P(\bar{A}) = 1 - P(A) \approx 0{,}5177.$$

Таким образом, вероятность события $\bar{A}$ немного, но больше, чем 0,5.

Ответ: появление хотя бы одной шестерки более вероятно, чем полное отсутствие шестерок при четырех бросаниях игральной кости.

Между прочим, для трех бросаний ответ получится другой:

$$P(A) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787 > 0{,}5 > P(\bar{A}).$$

В следующем параграфе мы поговорим о комбинаторике — разделе математики, без использования которого невозможно решение большинства задач по теории вероятностей.

Упражнения

О19.1. Перед новогодним праздником Деду Морозу выдали набор подарков. Все подарки сделаны в виде одинаковых по размеру пластмассовых шаров. Всего в мешок Деда Мороза положили 12 красных, 14 белых, 13 синих и 11 оранжевых шаров. Какова вероятность того, что первый вытащенный подарок будет:

а) белого цвета;

б) красный или оранжевый;

в) одного из цветов российского флага;

г) не оранжевого цвета?

О19.2. На координатной плоскости отмечены все точки, абсциссы и ординаты которых равны одному из следующих чисел: -4, -1, 1, 4, 8 (повторения допускаются). Из отмеченных точек случайным образом выбирают одну. Найдите вероятность того, что она лежит:

а) правее оси ординат;

б) ниже оси абсцисс;

в) в четвертой координатной четверти;

г) ниже прямой $y = x$.

О19.3. В круге радиусом $\sqrt{3}$ с центром в начале координат отмечены все точки, абсциссы и ординаты являются целыми числами. Из отмеченных точек случайным образом выбирают одну. Найдите вероятность того, что:

а) она лежит на оси ординат;

б) она лежит не на координатных осях;

в) она лежит в круге радиусом 1 с центром в начале координат;

г) ее абсцисса и ордината отличаются более чем на 2.

●19.4. Составили множество всех чисел вида $x = 2^a5^b$, где $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (совпадения допускаются). Из этого множества случайным образом выбрали одно число. Какова вероятность того, что оно будет:

а) больше 1;

б) меньше 20;

в) четным;

г) не оканчиваться нулем?

19.5. Для заданного события назовите противоположное событие:

а) мою новую соседку по парте зовут или Таня, или Аня;

б) явка на выборы была от 40 до 47% включительно;

в) из пяти выстрелов в цель попали хотя бы два;

г) на контрольной я не решил одну или две задачи из пяти.

19.6. Назовите событие, для которого противоположным является данное событие:

а) на контрольной работе больше половины класса получили пятерки;

б) все семь пулек в тире у меня попали мимо цели;

в) в нашем классе все и умные, и красивые;

г) в кошельке у меня есть или три рубля одной монетой, или три доллара одной купюрой.

○19.7. Ученик случайным образом выбрал произвольное трехзначное натуральное число, начинающееся с единицы. Найдите вероятность того, что:

а) это число нечетно;

б) среди цифр этого числа есть цифра 3;

в) это число не является кубом целого числа;

г) сумма его цифр больше 3.

○19.8. Игральную кость бросили дважды. Найдите вероятность того, что:

а) среди выпавших чисел нет ни одной «пятерки»;

б) среди выпавших чисел есть или «пятерка», или «шестерка»;

в) сумма выпавших чисел меньше 11;

г) произведение выпавших чисел меньше 25.

○19.9. Из костей домино выбрали одну. Какова вероятность того, что:

а) она является «дублем»;

б) на ней выпала «шестерка»;

в) произведение очков на ней меньше 26;

г) модуль разности очков больше 1.

●19.10. В русском алфавите 33 буквы: 10 гласных, 21 согласная и 2 специальные буквы (ъ и ь). Два ученика независимо друг от друга выбрали по одной букве русского алфавита. Какова вероятность того, что:

а) были выбраны различные буквы;

б) обе выбранные буквы — гласные;

в) среди выбранных букв есть согласные;

г) это две соседние буквы алфавита.

○19.11. Из пяти чисел 1, 2, 3, 4, 5 поочередно выбирают два (без повторений). Найдите вероятность того, что:

а) первое из чисел меньше второго;

б) эти два числа — длины катетов прямоугольного треугольника с целочисленной гипотенузой;

в) произведение этих чисел оканчивается нулем;

г) первое из чисел делится на второе.

○19.12. Случайно и поочередно нажимают три клавиши одной октавы. Найдите вероятность того, что:

а) не была нажата «фа»;

б) не были нажаты ни «до», ни «си»;

в) была нажата «ля»;

г) получилась последовательность нот «до-ми-соль» (до-мажорное трезвучие).

§ 20. Сочетания и размещения

Правило умножения, которое мы использовали в предыдущем параграфе, применимо не только к двум, но и к трем, четырем и т. д. испытаниям. Если перемножить числа исходов испытаний, то в ответе получится число всех исходов независимого проведения этих испытаний. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Учительница подготовила к контрольной работе 4 примера на решение линейных неравенств, 5 текстовых задач (две на движение и три на работу) и 6 примеров на решение квадратных уравнений (в двух из них дискриминант отрицателен). В контрольной должно быть по одному заданию на каждую из трех тем. Найти общее число:

а) всех возможных вариантов контрольной;

б) тех возможных вариантов, в которых встретится задача на движение;

в) тех возможных вариантов, в которых у квадратного уравнения будут корни;

г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

Решение. а) При выборе неравенства есть 4 исхода, при выборе текстовой задачи есть 5 исходов, при выборе квадратного уравнения есть 6 исходов. По правилу умножения получаем, что число всех вариантов контрольной работы равно $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

б) В предыдущем рассуждении меняется число исходов при выборе текстовой задачи: их всего два. Значит, можно составить $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ вариантов такой контрольной работы.

в) По сравнению с пунктом а) меняется число исходов при выборе уравнения: только в четырех случаях корни есть. Значит, можно составить $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ вариантов такой контрольной работы.

г) Из общего числа вариантов (120) мы вычтем те варианты, в которых встретятся *одновременно* и задача на работу, и квадратное уравнение, не имеющее корней. По сравнению с пунктом а) для них меняется число исходов при выборе текстовой задачи (3 варианта) и число исходов при выборе уравнения (только в двух случаях корней нет). Значит, можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта такой контрольной, а условию задачи удовлетворяют остальные $120 - 24 = 96$ вариантов.

Ответ: а) 120; б) 48; в) 80; г) 96.

Пример 2. Известно, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x.

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет четных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

Решение. а) Наименьшее число получится, когда $a = b = c = 0$. Тогда $x = 2^0 3^0 5^0 = 1$. Наибольшее число получится, когда $a = b = c = 3$. Тогда $x = 2^3 3^3 5^3 = 27 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 27\,000$.

б) Рассмотрим три испытания: выбор числа a, выбор числа b и выбор числа c. Они независимы друг от друга, и в каждом имеется по четыре исхода. По правилу умножения получаем, что всего возможны $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ варианта.

в) Число $x = 2^a 3^b 5^c$ будет четным только в тех случаях, когда $a > 0$, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора числа a есть три исхода. Снова применим правило умножения. Получим $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ вариантов.

г) Число $x = 2^a 3^b 5^c$ будет оканчиваться нулем только в тех случаях, когда среди множителей есть хотя бы одна двойка и есть хотя бы одна пятерка, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$ и $c \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора чисел a и c есть по три исхода. Снова применим правило умножения. Получим $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ вариантов.

Ответ: а) 1 и 27 000; б) 64; в) 48; г) 36.

В курсе алгебры 9 класса вы познакомились с понятием факториала и теоремой о перестановках. Напомним их.

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют **«эн факториал»**:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Значения $n!$ очень быстро возрастают с увеличением n.

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	$1 \cdot 2 = 2$	$2! \cdot 3 = 6$	$3! \cdot 4 = 24$	$4! \cdot 5 = 120$	$5! \cdot 6 = 720$	$6! \cdot 7 = 5040$

Теорема 1. **n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.**

Как правило, эту теорему записывают в виде краткой формулы:

$$P_n = n!.$$

P_n — это число перестановок из n различных элементов[1], оно равно $n!$.

Пример 3. К хозяину дома пришли гости A, B, C, D. За круглым столом — пять разных стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?

в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя C следует посадить рядом с гостем A?

г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя A не следует сажать рядом с гостем D?

Решение. а) На 5 стульев должны сесть 5 человек (включая хозяина дома). Значит, всего имеется P_5 способов их рассаживания: $P_5 = 5! = 120$.

б) Так как место хозяина фиксировано, то следует рассадить четырех гостей на четыре места. Это можно сделать $P_4 = 4! = 24$ способами.

[1] Буква P в этом сокращении взята от первой буквы английского слова *permute* (*permutation*), что переводится как *переставлять* (*перестановка*).

в) Сначала выберем место для гостя A. Возможны 5 вариантов. Если место гостя A уже известно, то гостя C следует посадить или справа, или слева от A, всего 2 варианта. После того как места для A и C уже выбраны, нужно трех человек произвольно рассадить на 3 оставшихся места: $P_3 = 3! = 6$ вариантов. Остается применить правило умножения: $5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$.

г) Решение такое же, как и в пункте в). Место для гостя D после выбора места для A можно также выбрать двумя способами: на два отдаленных от A стула.

Ответ: а) 120; б) 24; в) 60; г) 60.

Пример 4. В чемпионате по футболу участвовало 7 команд. Каждая команда сыграла по одной игре с каждой командой. Сколько всего было игр?

Решение. Первый способ. Рассмотрим таблицу 7×7, в которую вписаны результаты игр. В ней 49 клеток:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3 : 1	0 : 5	2 : 2	0 : 0	1 : 0	1 : 3
2			4 : 3	1 : 0	1 : 0	0 : 0	1 : 1
3				1 : 3	1 : 0	1 : 2	0 : 0
4					1 : 1	1 : 1	1 : 4
5						1 : 0	0 : 0
6							2 : 2
7							

По диагонали клетки закрашены, так как никакая команда не играет сама с собой. Если убрать диагональные клетки, то останется $7^2 - 7 = 42$ клетки. В нижней части результатов нет, потому что все они получаются отражением уже имеющихся результатов из верхней части таблицы (не 3 : 1, а 1 : 3, не 1 : 4, а 4 : 1 и т. д.; результаты 0 : 0, 1 : 1 и т. д. дублируются). Поэтому количество всех проведенных игр равно половине от 42, т. е. 21.

Второй способ. Произвольно пронумеруем команды № 1, № 2, ..., № 7 и посчитаем число игр поочередно. Команда № 1 встречается с командами № 2—7 — это 6 игр. Команда № 2 тоже проведет 6 встреч, но одну игру, с командой № 1, мы уже посчитали. Получается всего 5 новых игр. Команда № 3 проведет 6 встреч, из которых две, с командами № 1 и 2, уже посчитаны. Значит, добавятся еще 4 игры. Продолжая, получаем:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.$$

Третий способ. Используем геометрическую модель: 7 команд — это вершины выпуклого семиугольника, а отрезок между двумя вершинами — это встреча двух соответствующих команд: сколько отрезков — столько игр. Из каждой вершины выходит 6 отрезков. Получается $7 \cdot 6$ отрезков, каждый из которых посчитан дважды: и как AB, и как BA. Значит, всего проведен $7 \cdot 3 = 21$ отрезок.

Ответ: 21 игра.

Проанализируем решение примера 4. Состав игры определен, как только мы *выбираем две* команды. Значит, количество всех игр в турнире для n команд — это в точности количество всех *выборов двух элементов из n данных* элементов. Важно при этом то, что порядок выбора не имеет значения, т. е. если выбрано две команды, то какая из них первая, а какая вторая — не существенно.

Первую команду можно выбрать n способами, а вторую — $(n - 1)$ способами. По правилу умножения получаем $n(n - 1)$. Но при этом состав каждой игры посчитан дважды. Значит, число игр равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Тем самым фактически доказана следующая теорема.

Теорема 2 (*о выборе двух элементов*). **Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести $\frac{n(n-1)}{2}$ способами.**

Достаточно длинный словесный оборот «число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных» неудобен при постоянном использовании в решении задач. Математики поступили просто: ввели новый термин и специальное обозначение.

Определение 2. Число всех выборов двух элементов *без учета их порядка* из n данных элементов называют **числом сочетаний из n элементов по 2** и обозначают C_n^2.

Символ C_n^2 читается в русской транскрипции так: «цэ из эн по два». Буква C хорошо согласуется здесь «и с французским, и с нижегородским»: с одной стороны, C — это первая буква слова *combinations*, с другой стороны, C — это первая буква слова *сочетание*.

Учитывая сказанное, теорему о выборе двух элементов без учета их порядка можно записать в виде краткой формулы

$$\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

Пример 5. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было: а) между футболистами; б) между хоккеистами; в) между футболистами и хоккеистами; г) всего?

Решение. а) $C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$

б) $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$

в) Будем действовать по правилу умножения. Одно испытание — выбор футболиста, а другое испытание — выбор хоккеиста. Испытания предполагаются независимыми, и у них, соответственно, 11 и 6 исходов. Значит, получится $11 \cdot 6 = 66$ игр.

г) Можно сложить все предыдущие ответы: $55 + 15 + 66 = 136$; но можно использовать и формулу для числа сочетаний:

$C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136.$

А что получится, если мы *будем учитывать порядок* двух выбираемых элементов? По правилу умножения получаем следующую теорему.

Теорема 3. **Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n-1)$ способами.**

Доказательство. Первый по порядку элемент можно выбрать n способами. Из оставшихся $(n-1)$ элементов второй по порядку элемент можно выбрать $(n-1)$ способом. Так как два этих испытания (выбора) независимы друг от друга, то по правилу умножения получаем $n(n-1)$.

Определение 3. Число всех выборов двух элементов *с учетом их порядка* из n данных называют **числом размещений из n элементов по 2** и обозначают A_n^2.

Пример 6. В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй — по геометрии; б) они должны быстро стереть с доски?

Решение. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, ответы таковы:

а) $A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702;$ б) $C_{27}^2 = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351.$

Подведем итоги для числа выборов двух элементов из n данных.

Сочетания из n элементов по 2:	Размещения из n элементов по 2:
$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$	$A_n^2 = n(n-1)$

А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс 2 заменить на 3, 4, ... и вообще на произвольное число k, $1 \leqslant k \leqslant n$? Тут мы переходим к основному вопросу параграфа — к выборам, состоящим из произвольного числа элементов. Вот типичные вопросы: сколькими способами можно выбрать 5 учеников из 30 для дежурства в столовой; актив класса (староста, культорг, редактор стенгазеты, организатор спортивных мероприятий) — 4 человека из 30; 7 монет из 10 данных монет; 10 карт из колоды в 32 карты и т. п. Введем специальные термины и обозначения.

Определение 4. Число всех выборов k элементов из n данных *без учета порядка* называют **числом сочетаний из n элементов по k** и обозначают C_n^k. Число всех выборов k элементов из n данных *с учетом их порядка* называют **числом размещений из n элементов по k** и обозначают A_n^k.

Используя эти обозначения, нетрудно записать ответы на поставленные выше вопросы: 5 учеников из 30 для дежурства в столовой можно выбрать C_{30}^5 способами; 7 монет из 10 данных монет можно выбрать C_{10}^7 способами; 10 карт из колоды в 32 карты можно выбрать C_{32}^{10} способами. В этих случаях порядок не важен, и поэтому мы используем *сочетания.* А вот для состава актива класса важно, кто именно будет старостой, кто — культоргом, кто — редактором стенгазеты и кто будет отвечать за спорт. Поэтому следует использовать *размещения*: нужный выбор (4 человека из 30) можно произвести A_{30}^4 способами.

Однако нам важна не столько формульная запись ответа, сколько его конкретное числовое значение.

Теорема 4. **Для любых натуральных чисел n и k таких, что $k < n$, справедливы соотношения:**

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \quad (1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad (2)$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}, \quad (3)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4)$$

Доказательство. 1) Нам следует поочередно выбирать k элементов из n данных. Проведем независимо k следующих испытаний. Первое из них состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 1. Это испытание имеет n исходов. После проведения первого испытания проведем второе. Оно состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 2. Так как один элемент из n данных уже выбран, то осталось $(n - 1)$ непронумерованных элементов. Значит, второе испытание имеет $(n - 1)$ исход. После проведения двух испытаний проводится третье, в результате которого один из оставшихся $(n - 2)$ элементов получит № 3, и т. д. В последнем k-м испытании будет $(n - (k - 1))$ исходов, так как в предыдущих испытаниях выбран $(k - 1)$ элемент. Остается применить правило умножения. Получим:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

2) $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3) Достаточно проверить, что $k! \cdot C_n^k = A_n^k$. Будем проводить выбор k элементов с учетом порядка в два этапа. Сначала выберем их «кучей», без учета порядка. Число вариантов здесь по определению равно C_n^k. На втором этапе будем упорядочивать, т. е. нумеровать по порядку выбранные k элементов всеми возможными способами. Но число таких нумераций (перестановок) равно $P_k = k!$. Значит, каждому неупорядоченному выбору k элементов из n данных соответствует $k!$ упорядоченных выборов. При этом каждый упорядоченный выбор будет посчитан ровно один раз. Следовательно, $k! \cdot C_n^k = A_n^k$.

4) Это очевидное следствие формул (3) и (2).

Заметим, что при $k = 2$ получаются уже известные формулы из теорем 2 и 3. Действительно, по формуле (1) получаем:

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Используя формулы (3) и (1), получаем:

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример 7. В классе 27 учеников, из них нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу, второй — сходить за мелом, третий — пойти дежурить в столовую; б) им следует спеть хором?

Р е ш е н и е. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, в первом случае получим A_{27}^3, во втором — C_{27}^3.

а) $A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25 = 17\,550;$

б) $C_{27}^3 = \dfrac{A_{27}^3}{3!} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9 \cdot 13 \cdot 25 = 2925.$ ◁■

Пример 8. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили выбрать 4 любых инструмента из имеющихся 11.

а) Найти число всевозможных выборов инструментов.

б) Найти число всевозможных рассаживаний участников квартета с выбранными четырьмя инструментами (инструменты, как в басне Крылова, занимают четко отведенные позиции).

в) Сколько всего различных инструментальных составов квартета может получиться?

Р е ш е н и е. а) Требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных без учета порядка, т. е. число сочетаний из 11 элементов по 4:

$$C_{11}^4 = \frac{A_{11}^4}{4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330.$$

б) Это уже знакомая нам задача про рассаживание четырех субъектов на 4 места. Найдем число перестановок:

$$P_4 = 4! = 24.$$

в) Каждый инструментальный состав квартета получается в результате проведения двух независимых испытаний: первое — из пункта а), второе — из пункта б). По правилу умножения получаем:

$$C_{11}^4 \cdot P_4 = 330 \cdot 24 = 7920.$$

Впрочем, ответ можно получить и без использования пунктов а) и б). Действительно, можно считать, что выбор инструментов происходит поочередно: первой выбирает Мартышка, потом Осел, Козел и Мишка. Значит, требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных с учетом порядка, т. е. число размещений из 11 элементов по 4:

$$A_{11}^4 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920.$$

Ответ: а) 330; б) 24; в) 7920.

Теперь посмотрим на число C_n^k при $k = n$. По определению C_n^n — это количество выборов n элементов из n данных. Но такой выбор единственный — надо взять все множество целиком; значит, $C_n^n = 1$.

А если к этому случаю применить формулу из теоремы 4, то получается:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!}.$$

Что же такое «ноль факториал»? Математики поступили просто. Чтобы сохранить красивую формулу для чисел C_n^k при любых целочисленных значениях k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, решили *по определению* считать, что $0! = 1$. Тогда

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1,$$

что отлично согласуется с комбинаторным определением C_n^n.

При такой договоренности понятный смысл имеет и C_n^0; получается, что

$$C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

Действительно, 0 элементов из n данных можно «выбрать» единственным способом, ничего не выбирая.

У теоремы 4 есть ряд важных следствий. Рассмотрим одно из них: *справедлива формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В самом деле,

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}; \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Как видите, числители в обоих случаях одинаковы, а в знаменателе множители меняются местами, что, естественно, не отражается на числовом значении выражения.

В чем польза полученной формулы? Представьте себе, что надо вычислить C_{15}^{13}. Если использовать равенство $C_{15}^{13} = C_{15}^{2}$, то вычисления упростятся: $C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$.

Для чисел C_n^k имеется красивый и удобный способ их записи в виде *треугольной таблицы* — ее называют *треугольником Паскаля.* Приведем эту таблицу:

$$\begin{array}{c}
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Основная закономерность образования строк состоит в следующем: *каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке* ($5 = 1 + 4$, $10 = 4 + 6$; $6 = 3 + 3$ и т. д.). В общем виде (в виде формулы) это свойство записывается так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Например, C_6^4 можно вычислить непосредственно по пятой строке треугольника Паскаля $C_6^4 = C_5^4 + C_5^3 = 5 + 10 = 15$.

Докажем, что $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$. Имеем:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!^{\backslash n-k}}{k! \cdot (n-k-1)!} + \frac{(n-1)!^{\backslash k}}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Упражнения

О20.1. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9 (повторения цифр допустимы).

а) Сколько всего можно составить чисел?

б) Сколько всего можно составить чисел, больших 50?

в) Сколько всего можно составить нечетных чисел?

г) Сколько всего можно составить нечетных чисел, меньших 55?

О20.2. В шахматном зале 5 столов. Для проведения игры за каждый стол садится по одному шахматисту из двух встречающихся команд. В каждой команде по 5 шахматистов.

а) Найдите число всех возможных составов матчей (Иванов — Петров, Сидоров — Каспаров и т. д.).

б) То же, но для двух независимо проводимых матчей.

в) То же, но если во втором матче за тремя выбранными столами играют по три лучших шахматиста из каждой команды.

г) То же, что и в пункте б), но если во втором матче капитаны команд обязательно играют между собой.

○20.3. Вычислите:

а) $\frac{7!+8!}{5!+6!}$; в) $\frac{1}{6!}+\frac{1}{5!}-\frac{49}{7!}$;

б) $\frac{1}{4!}+\frac{10}{5!}+\frac{630}{6!}$; г) $\frac{7}{11}\cdot\frac{(10!)^2-(9!)^2}{(8!)^2-(7!)^2}$.

○20.4. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого:

а) верно неравенство $(n+1)! > (0{,}99n+5)\cdot n!$;

б) верно неравенство $(n+1)! > (n+333)\cdot(n-1)!$;

в) число $\frac{2^n}{n!}$ меньше единицы;

г) число $n!$ составляет более 1000% от числа $(n-1)!$.

●20.5. Сколькими нулями оканчивается число:

а) 10!; б) 15!; в) 26!; г) 100!?

○20.6. В правильном 17-угольнике провели все стороны и все диагонали.

а) Сколько всего провели отрезков?

б) Сколько провели сторон?

в) Сколько провели диагоналей?

г) Сколько провели диагоналей, которые отсекают треугольник от 17-угольника?

20.7. Важен или нет порядок в следующих выборах:

а) капитан волейбольной команды и его заместитель;

б) три ноты в аккорде;

в) шесть человек останутся убирать класс;

г) придумайте 4 различные ситуации, в двух из которых порядок выбора важен, а в двух — нет.

Вычислите:

20.8. а) C_{17}^2 и A_{17}^2; б) C_{100}^2 и A_{100}^2; в) C_5^3 и A_5^3; г) C_8^4 и A_8^4.

○20.9. а) $C_{27}^2 - C_{26}^2$; б) $\frac{A_{10}^3}{C_{10}^3}$; в) $\frac{A_8^6}{A_{10}^2}$; г) $C_{11}^5 - C_{11}^6$.

○20.10. Решите уравнение:

а) $C_x^3 = 2C_x^2$; в) $C_x^2 + C_{x+1}^2 = 49$;

б) $C_x^{x-2} = 15$; г) $C_8^x = 70$.

○**20.11.** Решите уравнение:

а) $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$;   в) $C_x^3 = A_x^2$;

б) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;   г) $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$.

●**20.12.** Решите неравенство:

а) $120 < A_{k-3}^2 < 140$;   в) $C_{10}^2 < A_x^2 < 60$;

б) $C_6^2 < A_n^2 < C_8^2$;   г) $C_{19}^2 < A_x^2 + C_x^2 < 200$.

●**20.13.** Найдите значение n, при котором:

а) число C_{n+1}^2 составляет 80% от числа C_n^3;

б) число C_{n+1}^3 составляет 120% от числа C_n^4;

в) число C_{2n}^{n-1} составляет 56% от числа C_{2n+1}^{n-1};

г) число C_{2n+3}^{n} составляет 120% от числа C_{2n+2}^{n+1}.

○**20.14.** «Вороне где-то Бог послал кусочек сыра», брынзы, колбасы, сухарика и шоколада. «На ель Ворона взгромоздясь, позавтракать совсем уж было собралась, да призадумалась»:

а) если есть кусочки по очереди, то из скольких вариантов придется выбирать;

б) сколькими способами можно составить «бутерброд» из двух кусочков;

в) если съесть сразу три кусочка, а остальные спрятать и съесть завтра и послезавтра, то из скольких вариантов придется выбирать;

г) сколько получится, если один кусочек все-таки бросить Лисе, а потом ответить на вопрос а)?

●**20.15.** Три клавиши из семи (ноты до, ре, ми, фа, соль, ля, си одной октавы) можно нажать либо одновременно (аккорд), либо поочередно (трезвучие).

а) Найдите число всех возможных трезвучий.

б) Найдите число всех возможных аккордов.

в) Найдите число всех возможных аккордов, содержащих ноту соль.

г) Найдите число всех возможных аккордов, в которых нет подряд идущих нот.

○**20.16.** Из колоды в 36 карт одновременно выбирают 5 карт. Найдите:

а) число всех возможных вариантов открытых карт;

б) число вариантов, при которых среди открытых карт есть 4 туза;

в) число вариантов, при которых все открытые карты — пики;

г) число вариантов, при которых все открытые карты одной масти.

○20.17. За четверть в классе прошли 5 тем по алгебре. Для подготовки к контрольной работе составлено по 10 задач к каждой теме. На контрольной будет по одной задаче из каждой темы. Ученик умеет решать только по 8 задач в каждой теме. Найдите:

а) общее число всех вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых ученик ничего не может решить;

г) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все задачи, кроме первой.

●20.18. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Рукопожатий было от 60 до 70. Сколько всего человек встретилось, если известно, что:

а) каждый здоровался с каждым;

б) только один человек не здоровался ни с кем;

в) только двое не поздоровались между собой;

г) четверо поздоровались только между собой.

●20.19. Из 20 вопросов к экзамену ученик 12 выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Найдите количество возможных вариантов билета.

б) Сколько из них тех, в которых ученик знает все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трех типов?

г) Сколько из них тех, в которых ученик выучил большинство вопросов?

●20.20. В театре 10 певцов и 8 певиц, а для исполнения оперы в хоре должно быть 5 мужских и 3 женских голоса.

а) Сколько существует различных составов хора?

б) То же, но если известно, что певцы А и Б ни за что не будут петь вместе?

в) То же, но если известно, что певец А будет петь тогда, и только тогда, когда будет петь певица В?

г) То же, если 6 певцов накануне сорвали голос на футболе и одной певице придется петь мужскую партию.

§ 21. Формула бинома Ньютона

Известно, что $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Умножив обе части этого тождества на $(a+b)$, получим: $(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Аналогично умножив обе части тождества $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ на $(a+b)$ получим: $(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Итак,

$(a+b)^1 = a + b;$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Проанализируем полученные формулы. Замечаем, во-первых, что в правой части любой из формул сумма показателей при переменных в каждом одночлене равна показателю двучлена в левой части. Например, в последней формуле двучлен возводится в четвертую степень и сумма показателей при a и b в каждом слагаемом в правой части равна 4. Впрочем, это понятно, ведь $(a+b)^4$ — это $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ и после раскрытия скобок получится многочлен, состоящий из одночленов a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4 с некоторыми коэффициентами.

Замечаем, во-вторых, что коэффициенты при одночленах в правых частях формул ассоциируются с треугольником Паскаля, о котором мы говорили в § 20. Сравните числа, имеющиеся в первых четырех строках треугольника, с соответствующими коэффициентами при одночленах в каждой из четырех формул. Полное совпадение.

Естественно предположить, что подмеченная закономерность сохранится и в общем случае, т. е. для любого натурального значения n верна следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots +$$
$$+ C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим произведение n двучленов $(a+b)(a+b)(a+b)\cdot \ldots \cdot(a+b)$ и докажем, что коэффициент при одночлене $a^{n-k}b^k$ равен C_n^k.

В самом деле, чтобы, раскрыв скобки, получить одночлен вида $a^{n-k}b^k$, нужно из n множителей вида $(a+b)$ выбрать k множителей (порядок не важен), откуда берется переменная b; тогда автоматически из оставшихся $n-k$ множителей будет взята переменная a.

Но выбрать k множителей из n имеющихся без учета порядка можно C_n^k способами, что и требовалось доказать.

Формулу (1) обычно называют **формулой бинома Ньютона** (*бином* — двучлен), а коэффициенты C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^k, ..., C_n^{n-1}, C_n^n — *биномиальными коэффициентами.*

Пример. Раскрыть скобки в выражении: а) $(x + 1)^6$; б) $(a^2 - 2b)^5$.

Решение. а) Применим формулу (1), считая, что $a = x$, $b = 1$, $n = 6$. Получим:

$$(x + 1)^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5 \cdot 1 + C_6^2x^4 \cdot 1^2 + C_6^3x^3 \cdot 1^3 +$$
$$+ C_6^4x^2 \cdot 1^4 + C_6^5x \cdot 1^5 + C_6^6 \cdot 1^6.$$

Осталось вычислить биномиальные коэффициенты:

$$C_6^0 = C_6^6 = 1;\ C_6^1 = C_6^5 = 6;\ C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15;$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Таким образом, $(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

б) Применим формулу (1), считая, что в роли a выступает $2a^2$, а в роли b выступает $-2b$. Получим:

$$(a^2 - 2b)^5 = C_5^0(a^2)^5 + C_5^1(a^2)^4(-2b) + C_5^2(a^2)^3(-2b)^2 +$$
$$+ C_5^3(a^2)^2(-2b)^3 + C_5^4(a^2)(-2b)^4 + C_5^5(-2b)^5.$$

Осталось вычислить биномиальные коэффициенты:

$$C_5^0 = C_5^5 = 1;\ C_5^1 = C_5^4 = 5;\ C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

Таким образом, $(a^2 - 2b)^5 = a^{10} - 10a^8b + 40a^6b^2 - 80a^4b^3 + 80a^2b^4 - 32b^5$.

В заключение получим одно любопытное свойство биномиальных коэффициентов. Составим формулу бинома Ньютона для выражения $(x + 1)^n$ (подобно тому, как в рассмотренном примере мы применили формулу бинома Ньютона к выражению $(x + 1)^6$). Получим:

$$(x + 1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} +$$
$$+ C_n^3x^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2}x^2 + C_n^{n-1}x + C_n^n.$$

Если в этом тождестве положить $x = 1$, то получим:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Упражнения

21.1. Раскройте скобки в выражении:

а) $(x + 1)^7$; в) $(x^2 + 2)^5$;

б) $(2x - y)^6$; г) $(1 - x^3)^4$.

○21.2. Найдите коэффициент при первой степени переменной x у многочлена $P(x)$:

а) $P(x) = (1 + x)^7$; в) $P(x) = (3 - 2x)^5$;

б) $P(x) = (1 + 3x)^4$; г) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$.

●21.3. Найдите коэффициент при x^3 у многочлена $P(x)$:

а) $P(x) = (1 + 3x)^4$; в) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$;

б) $P(x) = (3 - 2x)^5$; г) $P(x) = (x^2 - x)^4 + \left(3 - \dfrac{x}{3}\right)^4$.

●21.4. Найдите член разложения, не содержащий переменных:

а) $\left(2x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$; б) $\left(3\sqrt[4]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$.

○21.5. В разложении $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$ по степеням переменной x укажите:

а) одночлен, содержащий x^8;

о) одночлен, содержащий x^4;

в) одночлен, содержащий x^{-2};

г) свободный коэффициент (одночлен, не содержащий x).

○21.6. Чему равен наибольший коэффициент в разложении $(a + b)^n$, если сумма биномиальных коэффициентов разложения равна: а) 1024; б) 512? Сколько в разложении членов с этим наибольшим коэффициентом?

●21.7. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого положительного числа x справедливо неравенство $(1 + x)^n > 1 + nx$.

§ 22. Случайные события и их вероятности

В теории вероятностей и математической статистике строятся и исследуются модели различных ситуаций, связанных с понятием *случайности*. Один из основателей математической статистики шведский ученый Гаральд Крамер писал так: «По-видимому, невозможно дать точное определение того, что подразумевается под словом “случайный”. Смысл этого слова лучше всего разъяснить на примерах».

В § 19 мы последовали этому совету и разобрали простейшие вероятностные задачи. После знакомства с основными формулами комбинаторики можно переходить к более сложным задачам.

1. Использование комбинаторики для подсчета вероятностей

Пример 1. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что среди них: а) нет пиковой дамы; б) есть пиковая дама?

Решение. У нас имеется множество из 36 элементов — игральных карт. Мы производим выбор трех элементов, порядок выбора не важен. Значит, имеется $N = C_{36}^3$ исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предполагать, что все эти исходы равновероятны между собой.

а) Среди всех N исходов нам следует сосчитать те, в которых нет пиковой дамы (событие A). Поэтому отложим даму пик в сторону и будем выбирать три карты из оставшихся 35 карт. Получатся все интересующие нас варианты: $N(A) = C_{35}^3$. Осталось вычислить нужную вероятность:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{35}^3}{C_{36}^3} = \frac{35!}{3! \cdot 32!} \cdot \frac{3! \cdot 33!}{36!} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

При вычислениях мы учли, что $33! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 32 \cdot 33 = 32! \cdot 33$, а $36! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 35 \cdot 36 = 35! \cdot 36$.

б) Вычислим вероятность противоположного события $\bar{A}$ (есть дама пик) по формуле из § 19:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{12}.$$

Ответ: а) $\frac{11}{12}$; б) $\frac{1}{12}$.

Пример 2. В урне лежит 10 белых и 11 черных шаров. Случайным образом достают пять шаров. Какова вероятность того, что:

а) среди этих пяти шаров ровно три белых;

б) среди них не менее четырех белых шаров;

в) большинство шаров — белые?

Решение. Считаем шары в урне неразличимыми на ощупь. Из 21 шара случайным образом производят выбор пяти шаров. Порядок выбора не важен. Значит, существует $N(A) = C_{21}^5$ способов такого выбора.

а) Интересующее нас событие A наступает, когда три из пяти шаров — белые, а два оставшихся — черные, т. е. когда из 10 белых шаров оказались выбранными 3 шара, а из 11 черных шаров —

2 шара. Из 10 белых шаров 3 шара можно выбрать C_{10}^3 способами, а из 11 черных шаров 2 шара можно выбрать C_{11}^2 способами. По правилу умножения получаем, что нужный нам состав шаров можно выбрать $N(A) = C_{10}^3 \cdot C_{11}^2$ способами. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{11}^2}{C_{21}^5} = \frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{11!}{2!9!} \cdot \frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 21} = \frac{2200}{6783} \approx 0{,}3243.$$

б) Проведем перебор случаев. Пусть B — событие, состоящее в том, что белых шаров *ровно* 4, а C — событие, означающее, что все 5 шаров — белые. Вероятности $P(B)$ и $P(C)$ вычисляются по той же схеме, что и $P(A)$ в пункте а):

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{C_{10}^4 \cdot C_{11}^1}{C_{21}^5} = \frac{10!}{4!6!} \cdot 11 \cdot \frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 11 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 21} = \frac{770}{6783} \approx 0{,}1135;$$

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{C_{10}^5}{C_{21}^5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!16!}{21!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{4}{17 \cdot 19} \approx 0{,}0124.$$

События B и C не могут наступить одновременно, т. е. они *несовместны*. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий (об этом мы уже говорили в курсе алгебры 9-го класса). Значит,

$$P(B + C) = P(B) + P(C) \approx 0{,}1135 + 0{,}0124 = 0{,}1259.$$

в) Интересующее нас событие произойдет в следующих случаях: из пяти вытащенных шаров — 3 белых и 2 черных, из пяти шаров — 4 белых и 1 черный, все 5 шаров — белые. Эти три случая соответствуют событиям A, B, C, разобранным в пунктах а) и б). Никакие два из событий A, B, C не могут наступить одновременно, т. е. эти события *попарно несовместны*. Поэтому

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 0{,}3243 + 0{,}1135 + 0{,}0124 = \\ = 0{,}4502.$$

Ответ: а) 0,3243; б) 0,1259; в) 0,4502.

З а м е ч а н и е. Задачи на отыскание вероятностей случайных событий «в два с половиной раза» сложнее задач по комбинаторике. Сначала мы используем комбинаторику при нахождении N — количества всех исходов опыта. Во второй раз комбинаторика нужна при нахождении $N(A)$, причем это уже, как правило, более сложная комбинаторика. Наконец, надо еще уметь вычислить значение дроби. Вот и получается «две с половинной комбинаторики».

2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимость событий

В примере 2 мы говорили о сумме несовместных событий. А как найти вероятность $P(A + B)$ для событий, которые могут наступать одновременно? Для ответа на такой вопрос необходима не только сама сумма $A + B$ событий A и B, но и их *произведение*.

***Определение* 1. Произведением событий A и B** называют событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает и событие A, и событие B. Оно обозначается $A \cdot B$ или AB.

Пример 3. Дать описание произведения AB событий A и B, если:

а) A — цена товара больше 100 р., B — цена товара не больше 110 р.;

б) A — завтра пятница, B — завтра 13-е число;

в) A — координаты случайно выбранной точки на плоскости удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 1$; B — координаты случайно выбранной точки положительны;

г) A — случайно выбранное двузначное число четно; B — случайно выбранное двузначное число делится на 11.

Р е ш е н и е. а) Одновременное наступление событий A и B означает, что для цены S товара верно двойное неравенство

$$100 < S \leqslant 110.$$

б) Одновременное наступление событий A и B означает, что завтра — пятница, 13-е число.

в) Геометрически событие A означает, что точка выбрана в единичном круге $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, а событие B означает, что она выбрана в первой координатной четверти. Значит, одновременное наступление A и B означает, что точка выбрана в той четверти единичного круга, которая расположена выше оси абсцисс и правее оси ординат (рис. 89).

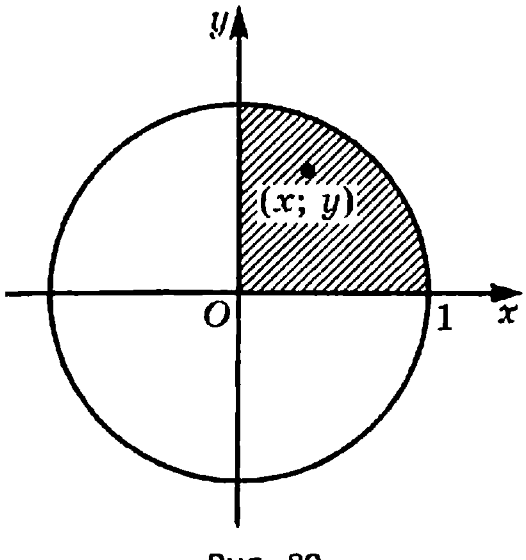


Рис. 89

г) Четные двузначные числа составляют множество $\{10, 12, 14, \ldots, 94, 96, 98\}$. Двузначные числа, которые делятся на 11, составляют множество $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$. Одновременное наступление событий A и B означает, что выбранное число принадлежит и множеству $\{10, 12, 14, ..., 94, 96, 98\}$ и множеству $\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$. Значит, событие AB состоит в том, что выбранное число принадлежит пересечению указанных множеств, т. е. множеству $\{22, 44, 66, 88\}$. Всего 4 случая. ◁■

Мы видим, что произведение AB событий A и B связано с пересечением множеств, соответствующих событиям A и B.

В курсе алгебры 9-го класса мы говорили о связи между понятиями и терминами теории вероятностей и теории множеств и составили соответствующую таблицу. Дополним ее новыми связями.

Теория вероятностей	**Теория множеств**
Испытание с N исходами	Множество из N элементов
Отдельный исход испытания	Элемент множества
Случайное событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое подмножество
Достоверное событие	Подмножество, совпадающее со всем множеством
Вероятность события	Доля элементов подмножества среди всех элементов множества
Сумма событий	*Объединение подмножеств*
Несовместные события	*Непересекающиеся подмножества*
Противоположное событие	*Дополнение подмножества до всего множества*
Произведение событий	*Пересечение подмножеств*

Теорема 1. **Сумма вероятностей двух событий равна сумме вероятности произведения этих событий и вероятности суммы этих событий.**

$$\boxed{P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B).}$$

Доказательство. Пусть A_1 — событие, состоящее в том, что наступает A, но не наступает B. Согласно определению 1 AB — событие, состоящее в том, что наступают A и B. Значит, события A_1 и AB несовместны, а их сумма равна A. Поэтому

$$P(A) = P(A_1) + P(AB).$$

Аналогично обозначим через B_1 событие, состоящее в том, что наступает B, но не наступает A. Тогда события B_1 и AB несовместны, а их сумма равна B. Значит,

$$P(B) = P(B_1) + P(AB).$$

Сложим эти равенства:

$$P(A) + P(B) = (P(A_1) + P(AB)) + (P(B_1) + P(AB)) =$$
$$= P(AB) + (P(A_1) + P(AB) + P(B_1)).$$

События A_1, AB, B_1 попарно несовместны, а их сумма равна $A + B$. Значит,

$$P(A_1) + P(AB) + P(B_1) = P(A + B),$$

и поэтому $P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B)$. ◁■

Для несовместных событий A и B доказанная теорема приводит к уже известным формулам. Действительно, несовместность событий A и B означает, что событие AB невозможно, т. е. $P(AB) = 0$. Тогда

$$P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B) = P(A + B).$$

В частности, так как событие $A + \bar{A}$ всегда достоверно, то

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = 1; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

При решении практических задач формулу $P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B)$ чаще всего записывают в виде

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

и применяют ее к *независимым* событиям A и B. Это понятие является одним из важнейших в теории вероятностей. Определение *независимости* двух событий напоминает правило умножения.

Определение 2. События A и B называют **независимыми**, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Не следует путать несовместность событий A и B и их независимость. Напомним, что несовместность событий A и B означает, что соответствующие множества исходов испытания не пересекаются. К сожалению, понятие независимости не имеет никакого наглядного смысла.

В практических задачах независимость событий, как правило, подразумевается в условиях задачи и обосновывается независимостью проводимых испытаний.

Теорема 2. **Вероятность суммы двух независимых событий равна разности суммы вероятностей этих событий и произведения вероятностей этих событий:**

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).}$$

Доказательство. По теореме 1

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Независимость A и B означает, что $P(AB) = P(A)P(B)$. Значит,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$ ◁■

Отметим еще, что если независимы события A и B, то независимы события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Пример 4. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что мишень:

а) будет поражена дважды;

б) не будет поражена ни разу;

в) будет поражена хотя бы один раз;

г) будет поражена ровно один раз.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что первый стрелок попал в мишень, B — событие, состоящее в том, что второй стрелок попал в мишень. По условию $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}3$, а A и B независимы.

а) Мишень будет поражена дважды, если одновременно произошли оба события A и B, т. е. произошло событие AB. Поэтому $P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27$.

б) Мишень вообще не будет поражена, если одновременно произошли события $\bar{A}$ и $\bar{B}$, т. е. произошло событие $\bar{A} \cdot \bar{B}$. Поэтому

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07.$$

в) Мишень будет поражена, если произошло или A, или B, т. е. произошло событие $A + B$. Поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}9 + 0{,}3 - 0{,}27 = 0{,}93.$$

Ту же вероятность можно получить и другим способом, действуя «через отрицание». Допустим, что событие $A + B$ *не произошло*, т. е. произошло событие $\overline{A + B}$. Это значит, что мишень вообще не поражена, а вероятность этого уже найдена в пункте б). Значит,

$$P(A + B) = 1 - P(\overline{A + B}) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93.$$

г) Мишень будет поражена ровно один раз, если произошло событие $A + B$, но не произошло событие AB. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A + B) - P(AB) = 0{,}93 - 0{,}27 = 0{,}66.$$

Ту же вероятность можно получить и другим способом. Событие, состоящее в том, что мишень будет поражена ровно один раз, равно сумме двух событий: $A \cdot \bar{B}$ (попал первый, но не попал второй стрелок) и $\bar{A} \cdot B$ (не попал первый, но попал второй стрелок). Значит, искомая вероятность равна

$$P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}66.$$

Ответ: а) 0,27; б) 0,07; в) 0,93; г) 0,66.

3. Независимые повторения испытаний. Теорема Бернулли и статистическая устойчивость

Несколько изменим предыдущий пример: вместо двух разных стрелков по мишени будет стрелять один и тот же стрелок.

Пример 5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Было произведено 3 независимых друг от друга выстрела. Найти вероятность того, что мишень:

а) будет поражена трижды;

б) не будет поражена;

в) будет поражена хотя бы раз;

г) будет поражена ровно один раз.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена при первом выстреле. Тогда событие $\bar{A}$ означает промах. По условию $P(A) = 0,8$, значит, $P(\bar{A}) = 0,2$. Пусть далее $B(C)$ — событие, состоящее в том, что мишень поражена при втором (третьем) выстреле. События A, B, C попарно независимы так же, как независимы события, скажем, AB и C, или $A \cdot \bar{B}$ и $\bar{C}$ и т. п.

а) Мишень будет поражена трижды, если одновременно произошли события A, B, и C, т. е. произошло событие ABC. Поэтому

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,8^3 = 0,512.$$

б) Мишень вообще не будет поражена, если одновременно произошли события $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, т. е. произошло событие $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$. Поэтому

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0,2^3 = 0,008.$$

в) Мишень будет поражена, если произошло или событие A, или B, или C, т. е. произошло событие $A + B + C$. Однако для вероятности суммы *трех* событий, не являющихся несовместными, у нас не было никакой формулы. Тут удобнее действовать «через отрицание». Событие $\overline{A + B + C}$ заключается в том, что мишень не будет поражена. Это значит, что одновременно происходят события $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, т. е. $\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$. Имеем:

$$P(A + B + C) = 1 - P(\overline{A + B + C}) =$$
$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - 0,2^3 = 0,992.$$

г) Событие, состоящее в том, что мишень будет поражена ровно один раз, есть сумма трех событий: $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ (попал только первый выстрел), $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$ (попал только второй выстрел) и $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ (попал только третий выстрел). Так как эти три события попарно несовместны, то получаем:

$$P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) +$$
$$+ P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 =$$
$$= 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2^2 = 0,096.$$

Ответ: а) 0,512; б) 0,008; в) 0,992; г) 0,096.

Решение, приведенное в пункте г) примера 5, в конкретном случае повторяет доказательство знаменитой теоремы Бернулли, которая относится к одной из наиболее распространенных вероятностных моделей: *независимым повторениям одного и того же испытания с двумя возможными исходами.* Отличительная особенность многих вероятностных задач состоит в том, что испытание, в результате которого может наступить интересующее нас событие, можно многократно повторять. В каждом из таких повторений нас интересует вопрос о том, произойдет или не произойдет это событие. А во всей серии повторений нам важно знать, *сколько именно раз* может произойти или не произойти это событие. Например, игральный кубик бросили десять раз подряд. Какова вероятность того, что «четверка» выпадет ровно 3 раза? Произведено 10 выстрелов; какова вероятность того, что будет ровно 8 попаданий в мишень? Или же какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты «орел» выпадет ровно 4 раза?

Швейцарский математик начала XVIII века Якоб Бернулли объединил примеры и вопросы такого типа в единую вероятностную схему.

Пусть вероятность случайного события A при проведении некоторого испытания равна $P(A)$. Будем рассматривать это испытание как испытание только с двумя возможными исходами: один исход состоит в том, что событие A произойдет, а другой исход состоит в том, что событие A не произойдет, т. е. произойдет событие $\bar{A}$. Для краткости назовем первый исход (наступление события A) «успехом», а второй исход (наступление события $\bar{A}$) «неудачей». Вероятность $P(A)$ «успеха» обозначим p, а вероятность $P(\bar{A})$ «неудачи» обозначим q. Значит,

$$q = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

Теорема 3 (теорема Бернулли). **Пусть $P_n(k)$ — вероятность наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания. Тогда**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Эта теорема (мы приводим ее без доказательства) имеет огромное значение и для теории, и для практики.

Пример 6. В каждом из пунктов а) — г) определить значения n, k, p, q и выписать (без вычислений) выражение для искомой вероятности $P_n(k)$.

а) Чему равна вероятность появления ровно 7 «орлов» при 10 бросаниях монеты?

б) Каждый из 20 человек независимо называет один из дней недели. «Неудачными» днями считаются понедельник и пятница. Какова вероятность того, что «удач» будет ровно половина?

в) Бросание кубика «удачно», если выпадает 5 или 6 очков. Какова вероятность того, что ровно 5 бросаний из 25 будут «удачными»?

г) Испытание состоит в одновременном бросании трех различных монет. «Неудача»: «решек» больше, чем «орлов». Какова вероятность того, что будет ровно три «удачи» среди 7 бросаний?

Решение. а) $n = 10$, $k = 7$, $p = q = 0{,}5$,

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7} \cdot 0{,}5^{7} \cdot 0{,}5^{3} = C_{10}^{7} \cdot 0{,}5^{10}.$$

б) $n = 20$, $k = 10$. Вероятность «удачи» равна доле «удачных» дней среди всех дней недели, т. е. $p = \frac{5}{7}$, $q = \frac{2}{7}$. Значит,

$$P_{20}(10) = C_{20}^{10} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{10}\left(\frac{2}{7}\right)^{10} = C_{20}^{10} \cdot \frac{10^{10}}{7^{20}}.$$

в) $n = 25$, $k = 5$. «Удачные» результаты 5 и 6 составляют треть количества всех возможных результатов: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Значит, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, и потому

$$P_{25}(5) = C_{25}^{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{20} = C_{25}^{5} \cdot \frac{2^{20}}{3^{25}}.$$

г) $n = 7$, $k = 3$. «Удача» при одном бросании состоит в том, что «решек» выпало меньше, чем «орлов». Всего возможны 8 результатов: РРР, РРО, РОР, ОРР, РОО, ОРО, ООР, ООО (Р — «решка», О — «орел»). Ровно в половине из них «решек» меньше «орлов»: РОО, ОРО, ООР, ООО. Значит,

$$p = q = 0{,}5;\ P_7(3) = C_7^{3} \cdot 0{,}5^{3} \cdot 0{,}5^{4} = C_7^{3} \cdot 0{,}5^{7}.$$

Теорема Бернулли позволяет установить связь между статистическим подходом к определению вероятности и классическим определением вероятности случайного события. Чтобы описать эту связь, вернемся к терминам § 18 о статистической обработке информации. Рассмотрим последовательность из n независимых повторений одного и того же испытания с двумя исходами — «удачей» и «неудачей». Результаты этих испытаний составляют ряд данных, состоящий из некоторой последовательности двух вариант: «удачи» и «неудачи». Проще говоря, имеется последовательность длины n, составленная из двух букв У («удача») и Н («неудача»). Например, У, У, Н, Н, У, Н, Н, Н, ..., У или Н, У, У, Н, У, У, Н, Н, У, ..., Н и т. п. Подсчитаем кратность и частоту варианты У, т. е. найдем дробь $\frac{k}{n}$, где k — количество «удач», встретившихся среди всех n повторений. Оказывается, что при неограниченном возрастании n частота $\frac{k}{n}$ появления «успехов» будет практически неотличимой от вероятности p «успеха» в одном испытании. Этот довольно сложный математический факт выводится именно из теоремы Бернулли.

***Теорема 4.* При большом числе независимых повторений одного и того же испытания частота появления случайного события A со все большей точностью приближенно равна вероятности события A: $\frac{k}{n} \approx P(A)$.**

Например, при $n \geqslant 2000$ с вероятностью, большей чем 99%, можно утверждать, что абсолютная погрешность $\left|\frac{k}{n} - P(A)\right|$ приближенного равенства $\frac{k}{n} \approx P(A)$ будет меньше 0,03. Поэтому при социологических опросах достаточно бывает опросить около 2000 случайно выбранных людей (респондентов). Если, допустим, 520 из них положительно ответили на заданный вопрос, то $\frac{k}{n} = \frac{520}{2000} = 0{,}26$ и практически достоверно, что для любого большего числа опрошенных такая частота будет находиться в пределах от 0,23 до 0,29. Это явление называют явлением *статистической устойчивости*.

Итак, теорема Бернулли и следствия из нее позволяют (приближенно) находить вероятность случайного события в тех случаях, когда ее явное вычисление невозможно.

4. Геометрическая вероятность

Мы познакомились с классическим определением вероятности. Оно применимо к испытаниям с конечным числом равновозможных между собой исходов. Однако весьма часто встречаются испытания и с *бесконечным* числом исходов. Тут классическая вероятностная схема не применима.

Пример 7. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 5| \leqslant 10$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 1| \leqslant 1$?

Р е ш е н и е. Сначала решим каждое из неравенств. Вспомним геометрический смысл модуля разности $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b на числовой прямой. Поэтому неравенство $|x - 1| \leqslant 1$ означает, что расстояние между точками x и 1 не больше 1. Значит, решение неравенства — отрезок [0; 2] (верхняя штриховка на рис. 90), его длина равна 2.

Рис. 90

В свою очередь неравенство $|x - 5| \leqslant 10$ означает, что расстояние между точками x и 5 не больше 10. Значит, решение неравенства — отрезок [−5; 15] (нижняя штриховка на рис. 90), его длина равна 20.

Мы видим, что из всех решений неравенства $|x - 5| \leqslant 10$ только одну десятую часть составляют решения неравенства $|x - 1| \leqslant 1$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{10}$. ◁■

Сформулируем общее правило для нахождения геометрической вероятности: *если длину $l(A)$ промежутка A разделить на длину $l(X)$ промежутка X, который целиком содержит промежуток A, то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из промежутка X, окажется в промежутке A: $P = \frac{l(A)}{l(X)}$.*

Аналогично поступают и с множествами на числовой плоскости, и с пространственными телами. Но в этом случае длину следует заменить или на площади фигур, или, соответственно, на объемы пространственных тел.

Пример 8. В прямоугольнике $ABCD$, у которого $BC = 2AB$ (рис. 91), случайно выбирают точку. Найти вероятность того, что она расположена ближе к прямой AB, чем к прямой AD.

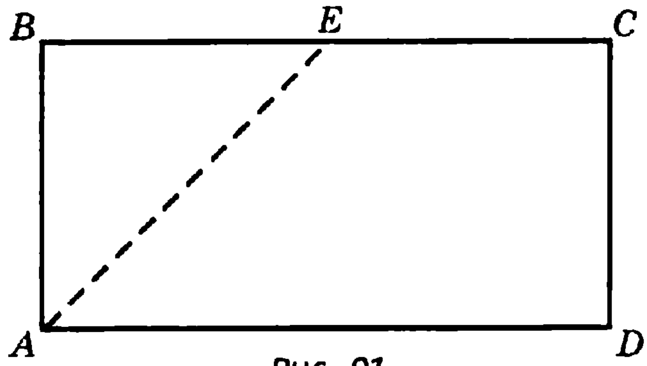


Рис. 91

Решение. Пусть AE — биссектриса угла A и $E \in BC$ (см. рис. 91). Тогда $AB = BE$, точки отрезка AE равноудалены от прямых AB и AD, а точки треугольника ABE (за исключением точек стороны AE) расположены к AB ближе, чем к AD. Это и есть интересующее нас множество. От включения (исключения) стороны площадь треугольника не меняется. Площадь ΔABE составляет четверть площади всего прямоугольника. В самом деле, $S_{ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot BE = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}AB \cdot BC = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Значит, искомая вероятность равна 0,25. ◁■

Упражнения

О22.1. На стойке для CD-дисков в беспорядке расположены 20 (с торца неразличимых) дисков с компьютерными играми. Из них 12 — «квесты», а остальные — «рокады». Десятиклассник случайным образом выбирает два диска. Какова вероятность того, что:

а) оба они окажутся с «квестами»;

б) оба они — с «рокадами»;

в) эти диски — с играми разных типов?

г) Чему равна сумма вероятностей в пунктах а), б), в)?

○22.2. Из колоды в 36 карт одновременно выбирают две карты. Найдите вероятность того, что:
а) обе они черной масти;
б) обе они пики;
в) обе они трефы;
г) одна из них пика, а другая трефа.

○22.3. В темном ящике 9 билетов, разложенных по одному в одинаковые конверты. Из них 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы наудачу вытаскиваете 3 конверта. Найдите вероятность того, что:
а) все билеты выигрышные;
б) есть ровно один проигрышный билет;
в) есть ровно один выигрышный билет;
г) есть хотя бы один выигрышный билет.

●22.4. Карточка лотереи «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выигрывают какие-то 6 чисел. Какова (в процентах) вероятность того, что на вашей карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано:
а) 0 чисел; б) 1 число; в) 2 числа; г) 3 числа?

○22.5. Красивых учеников в классе 22 человека, а умных — 18. Всего в классе 30 учеников и каждый из них умный или красивый. Какова вероятность того, что случайно вызванный по списку ученик:
а) и умный, и красивый;
б) умный, но не красивый;
в) красивый, но не умный.
Измените в условии общее количество учеников так, чтобы ответы в пунктах а) и в) были одинаковыми.

○22.6. При подготовке к экзамену один ученик решил 44 задачи из общего списка в 50 задач, а второй ученик решил 26 задач из этого же списка. Известно, что каждую задачу из данного общего списка кто-то из этих двух учеников решил. Какова вероятность того, что случайным образом выбранную из списка задачу:
а) решили оба ученика;
б) решил первый, но не решил второй ученик;
в) решил второй, но не решил первый ученик?
Измените в условии общее количество учеников так, чтобы ответы в пунктах а) и б) были одинаковыми.

О22.7. Опишите произведение следующих событий A и B:

а) A — у случайным образом составленного квадратного уравнения есть корни; B — дискриминант уравнения отрицателен;

б) A — у случайным образом составленного квадратного уравнения нет корней; B — дискриминант уравнения неположителен;

в) A — случайным образом выбранная функция $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ возрастает; B — верно неравенство $f(99) < f(100)$;

г) A — случайным образом выбранная числовая последовательность является геометрической прогрессией; B — первые два ее члена положительны, а следующие два — отрицательны?

О22.8. Найдите вероятность $P(A + B)$ суммы двух независимых событий A и B, если известно, что:

а) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$;

б) $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}1$;

в) $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}9$;

г) $P(A) = 0{,}99$, $P(B) = 0{,}01$.

О22.9. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятности попадания в мишень по отдельности равны, соответственно, 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что мишень:

а) будет поражена дважды;

б) не будет поражена ни разу;

в) будет поражена хотя бы один раз;

г) будет поражена ровно один раз.

О22.10. Пусть вероятность «успеха» в одном испытании Бернулли равна 0,7. Пользуясь теоремой Бернулли, составьте формулы для следующих событий:

а) при 3 независимых повторениях испытания будет ровно 2 «успеха»;

б) при 4 независимых повторениях испытания будет ровно 2 «неудачи»;

в) при 5 независимых повторениях испытания будет ровно 3 «успеха».

Вычислите вероятности в пунктах а) — в).

●**22.11.** Каждый из четырех приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачету. На зачете они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что:

а) каждому достался тот вопрос, который он выучил;

б) никому не достался вопрос, который он выучил;

в) только одному достался вопрос, который он не выучил;

г) хотя бы одному достался вопрос, который он выучил.

○**22.12.** Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $x^2 \leqslant 9$. Найдите вероятность того, что оно является решением неравенства:

а) $x^2 \leqslant 10$; б) $2x - 3 \leqslant 17$; в) $x^2 \geqslant 10$; г) $x^3 + 2x \geqslant 0$.

○**22.13.** Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $1 \leqslant |x - 3| \leqslant 5$. Найдите вероятность того, что оно является решением неравенства:

а) $|x| \leqslant 2$; б) $|x - 6| \leqslant 2$; в) $|x| \leqslant 1$; г) $1 \leqslant |x - 6| \leqslant 2$.

○**22.14.** В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 5$ случайно выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

а) ближе к прямой AB, чем к прямой CD;

б) ближе к вершине A, чем к вершине C;

в) ближе к прямой AB, чем к прямой BC;

г) ближе к A, чем к точке пересечения диагоналей.

●**22.15.** Внутри окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8, взята точка. Найдите вероятность того, что она:

а) лежит внутри треугольника;

б) лежит внутри окружности, вписанной в треугольник;

в) лежит вне треугольника;

г) лежит внутри треугольника, но не внутри вписанной в него окружности.

●**22.16.** (Продолжение задачи 22.4.) Карточка лотереи «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выигрывают какие-то 6 чисел. Какова (в процентах) вероятность того, что на вашей карточке, где отмечены 6 чисел, верно угадано:

а) хотя бы одно число;

б) не более одного числа;

в) не менее трех чисел;

г) 4, 5 или 6 чисел?

○22.17. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 одновременно выбирают три. Найдите вероятность того, что:

а) существует прямоугольный треугольник с такими сторонами;

б) существует треугольник с такими сторонами;

в) их произведение оканчивается на ноль;

г) их сумма меньше 10.

●22.18. Вы находитесь в круглом зале с 10 дверями, из которых какие-то 4 заперты. Вы случайным образом выбираете две двери. Найдите вероятность того, что:

а) вы не сможете выйти из зала;

б) вы сможете выйти из зала, но вернуться через другую дверь уже не сможете;

в) вы сможете через одну дверь выйти, а через другую вернуться в зал;

г) хотя бы через одну дверь вы сможете выйти из зала.

●22.19. У каждого из туристов есть или тугрики, или евро. У 100 туристов есть только тугрики, у 38 туристов есть только евро, а у 31% туристов есть обе валюты.

а) Сколько туристов имеют только одну валюту?

б) Сколько всего туристов?

в) Сколько туристов имеют тугрики?

г) Сколько туристов имеют евро?

○22.20. Вероятность $P(A + B)$ суммы двух независимых событий A и B равна 0,9. Найдите, чему равна вероятность $P(B)$ события B, если известно, что вероятность $P(A)$ события A равна:

а) 0,1; б) 0,5; в) 0,8; г) 0,89.

●22.21. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень одного из них равна 0,5. Найти вероятность попадания в мишень другого стрелка, если известно, что:

а) вероятность того, что мишень будет поражена дважды, равна 0,4;

б) вероятность того, что мишень не будет поражена ни разу, равна 0,45;

в) вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз, равна 0,8;

г) вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз, равна 0,999.

●22.22. Вероятность того, что стрелок поразит мишень одним выстрелом, равна 0,4. Стрелок независимо производит 5 выстрелов.

а) Заполните таблицу распределения вероятностей $P_5(k)$ того, что из 5 выстрелов будет ровно k попаданий:

Число попаданий, k						
$P_5(k) = C_5^k \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{5-k}$						

б) Найдите вероятность того, что стрелок ни разу не промажет.

в) Найдите вероятность того, что стрелок поразит мишень не менее двух раз.

г) Каково наиболее вероятное число попаданий в мишень?

●22.23. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $\sqrt{x} \leqslant 10$. Найдите вероятность того, что оно:

а) является решением неравенства $\sqrt{x} \leqslant 1$;

б) принадлежит области определения функции

$$y = \ln(40x - 39 - x^2);$$

в) является решением неравенства $\sqrt{x - 10} \leqslant 5$;

г) принадлежит области значений функции

$$y = 0{,}5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1.$$

○22.24. Произвольно выбирают числа x и y так, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Точку $(x; y)$ отмечают на координатной плоскости. Какова вероятность того, что:

а) эта точка лежит в первой координатной четверти;

б) $x + y < 0$;

в) эта точка лежит или во второй, или в четвертой координатной четверти;

г) $x + y > 0$, а $xy < 0$?

○22.25. Точка случайным образом выбрана из фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 3$. Найдите вероятность того, что она лежит:

а) левее прямой $x = 1$;

б) правее прямой $x = 2$;

в) выше прямой $y = 4$;

г) ниже прямой $y = 1$.

ГЛАВА 5 Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств

Изучая курс алгебры, вы постоянно решали уравнения и неравенства с одной переменной, системы уравнений с двумя переменными, системы неравенств с одной переменной. В этой главе, завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа, мы снова обращаемся к уравнениям и неравенствам, чтобы рассмотреть их с самых общих позиций. Это будет, с одной стороны, своеобразное подведение итогов и, с другой стороны, некоторое расширение и углубление ваших знаний.

§ 23. Равносильность уравнений

В этом параграфе речь пойдет о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие — нет; когда и как надо делать проверку найденных корней. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических уравнений. Теперь рассмотрим эти вопросы с самых общих позиций.

Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными,** если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и -2. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} = -3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. Если каждый корень уравнения

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \qquad (2)$$

то уравнение (2) называют **следствием уравнения** (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x-2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x-2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x-2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение:

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Схему решения любого уравнения можно описать так: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем уравнение (1); уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), и т. д.:

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to \ldots .$$

В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни. В этот момент и возникает главный вопрос: совпадает ли множество найденных корней последнего уравнения с множеством корней исходного уравнения (1)? Если все преобразования были равносильными, т. е. если были равносильны уравнения (1) и (2), (2) и (3), (3) и (4) и т. д., то ответ на поставленный вопрос положителен: да, совпадает. Это значит, что решив последнее уравнение цепочки, мы тем самым решим и первое (исходное) уравнение. Если же некоторые преобразования были равносильными, а в некоторых мы не уверены, но точно знаем, что переходили с их помощью к уравнениям-следствиям, то однозначного ответа на поставленный вопрос мы не получим.

Чтобы ответ на вопрос был более определенным, нужно все найденные корни последнего уравнения цепочки *проверить*, подставив их поочередно в исходное уравнение (1). Если проверка показывает, что найденный корень последнего уравнения цепочки не удовлетворяет исходному уравнению, его называют *посторонним корнем*; естественно, что посторонние корни в ответ не включают.

Вы, конечно, понимаете, что термин «более простое уравнение», вообще говоря, не поддается точному описанию. Обычно одно уравнение считают более простым, чем другое, по чисто внешним признакам. Например, решая уравнение $2^{\sqrt{2x+7}} = 2^{x-3}$, получаем сначала $\sqrt{2x+7} = x - 3$; это иррациональное уравнение проще заданного «показательно-иррационального» уравнения. Далее возведя обе части иррационального уравнения в квадрат, получим $2x + 7 = (x - 3)^2$; это рациональное уравнение проще, чем предыдущее иррациональное уравнение.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа.

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

1. Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?

2. Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?

3. Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?

4. В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Ответу на каждый из вопросов отведен отдельный пункт данного параграфа.

1. Теоремы о равносильности уравнений

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести *теоремах о равносильности* (все они в той или иной мере вам известны). Первые три теоремы — «спокойные», они гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

Теорема 1. **Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.**

Теорема 2. **Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.**

Теорема 3. **Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

Следующие три теоремы — «беспокойные», они работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений. Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

> ***Определение 3.*** **Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ)** называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4. **Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:**

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0,

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 5. **Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n = g(x)^n$.**

Теорема 6. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие

В этом пункте мы ответим на второй вопрос: какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие?

Частично ответ на этот вопрос связан с тремя последними теоремами. Можно сказать так: если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировке теоремы, то получится уравнение-следствие. Приведем примеры.

1) Уравнение $x - 1 = 3$ имеет один корень $x = 4$. Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим уравнение $(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$, имеющее два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы умножили обе части уравнения на одно и то же выражение, нарушив при этом условия теоремы 4. В этой теореме содержится требование: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, нигде не должно обращаться в 0. Мы же умножили обе части уравнения на выражение $x - 2$, которое обращается в 0 при $x = 2$; именно это значение оказалось посторонним корнем.

2) Возьмем то же самое уравнение $x - 1 = 3$ и возведем обе его части в квадрат. Получим уравнение $(x - 1)^2 = 9$, имеющее два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы возвели обе части уравнения в одну и ту же четную степень, нарушив при этом условие теоремы 5. В этой теореме содержится требование: обе части уравнения должны быть неотрицательны. Относительно выражения $x - 1$ это утверждать мы не можем.

3) Рассмотрим уравнение $\ln(2x - 4) = \ln(3x - 5)$. Потенцируя, получим уравнение $2x - 4 = 3x - 5$ с единственным корнем $x = 1$. Но этот корень является посторонним для заданного логарифмического уравнения, поскольку оба выражения под знаками логарифмов при $x = 1$ принимают отрицательные значения. Причина появления постороннего корня состоит в том, что мы, потенцируя (т. е. «освобождаясь» от знаков логарифмов), нарушили условия теоремы 6. В этой теореме содержится требование: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными; о выражениях $2x - 4$ и $3x - 5$ этого утверждать мы не можем, так как они при одних значениях x положительны, при других — отрицательны.

В последнем примере переход от логарифмического уравнения к уравнению $2x - 4 = 3x - 5$ привел к *расширению области определения уравнения*. Область определения логарифмического уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 3x - 5 > 0, \end{cases}$$

решив которую находим: $x > 2$. Область же определения уравнения $2x - 4 = 3x - 5$ есть множество всех действительных чисел. По сравнению с логарифмическим уравнением она расширилась:

добавился луч $(-\infty; 2]$. Именно в эту добавленную часть и «проник» посторонний корень $x = 1$.

Перечислим возможные *причины расширения области определения уравнения*:

1) освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину;

2) освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени;

3) освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведем итоги. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, *обязательна проверка всех найденных корней, если*:

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$.

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме (1) → (2) → (3) → (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Последовательно имеем:

$$\sqrt{5x-6} = 5 - \sqrt{2x+5};$$

$$\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(5-\sqrt{2x+5}\right)^2;$$

$$5x - 6 = 25 - 10\sqrt{2x+5} + 2x + 5;$$

$$10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x;$$

$$\left(10\sqrt{2x+5}\right)^2 = (36 - 3x)^2;$$

$$100(2x + 5) = 1296 - 216x + 9x^2;$$

$$9x^2 - 416x + 796 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{398}{9} = 44\frac{2}{9}.$$

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными. Замечаем, что в процессе решения уравнения дважды применялось неравносильное преобразование — возведение в квадрат; кроме того, расширилась область определения уравнения (были квадратные корни — были ограничения на переменную, не стало квадратных корней — не стало ограничений). Значит, решенное на последнем шаге первого этапа квадратное уравнение является уравнением-следствием для заданного уравнения. Проверка обязательна.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочередно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

Если $x = 2$, то получаем: $\sqrt{2 \cdot 2 + 5} + \sqrt{5 \cdot 2 - 6} = 5$, т. е. $3 + 2 = 5$ — верное равенство.

Если $x = 44\frac{2}{9}$, то получаем: $\sqrt{2 \cdot 44\frac{2}{9} + 5} + \sqrt{5 \cdot 44\frac{2}{9} - 6} = 5$.

Это неверное равенство, поскольку уже первое подкоренное выражение явно больше, чем 25, и потому корень из него больше, чем 5, т. е. уже больше правой части равенства; тем более что к этому квадратному корню прибавляется еще одно положительное число. Таким образом, $x = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

3. О проверке корней

В этом пункте мы ответим на третий вопрос: как сделать проверку корней, если их подстановка в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями? Видимо, в таких случаях надо искать обходные пути проверки.

Вернемся к примеру 1. Подстановка значения $x_1 = 2$ в заданное уравнение трудностей не представляла. Подстановку же второго значения $x_2 = 44\frac{2}{9}$ мы фактически заменили прикидкой. Мы прикинули, что $x_2 \approx 44$, значит, $\sqrt{2x_2 + 5} > 5$, и сразу стало ясно, что $x_2 = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень. Такая прикидка — один из обходных путей проверки.

Еще раз вернемся к примеру 1. Значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ можно было проверить не по исходному уравнению, а по полученному в процессе преобразований уравнению-следствию: $10\sqrt{2x + 5} = 36 - 3x$. По смыслу этого уравнения должно выполняться неравенство $36 - 3x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 12$.

Поскольку значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ этому условию не удовлетворяет, то x_2 — посторонний корень для уравнения $10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x$ и тем более для исходного уравнения.

Как правило, самый легкий обходной путь проверки — по области определения (ОДЗ) заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\ln(x+4) + \ln(2x+3) = \ln(1-2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом: «Сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x+4) + \ln(2x+3)$ выражением $\ln(x+4)(2x+3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\ln(x+4)(2x+3) = \ln(1-2x).$$

Потенцируя, получаем:

$$(x+4)(2x+3) = (1-2x);$$
$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;$$
$$2x^2 + 13x + 11 = 0;$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = -5{,}5.$$

Второй этап. В процессе решения произошло расширение области определения уравнения, значит, проверка обязательна.

Третий этап. Поскольку, кроме расширения области определения уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по ОДЗ исходного уравнения. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0. \end{cases}$$

Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству; это посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание 1. Каждый раз выделять при решении уравнения три этапа — технический, анализ, проверку — необязательно. Но все это нужно «держать в голове» и уж во всяком случае понимать следующее: если анализ показал, что проверка обязательна, а вы ее не сделали, то уравнение не может считаться решенным верно; тем более оно не может считаться решенным верно, если вы не сделали сам анализ.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Решение. Потенцируя, получаем:

$$x^2 - 1 = 5 - x;$$
$$x^2 + x - 6 = 0;$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3.$$

Для проверки корней выпишем условия, задающие ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ удовлетворяет всем условиям этой системы, а значение $x = -3$ не удовлетворяет второму условию; следовательно, $x = -3$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

Замечание 2. Не переоценивайте способ проверки по ОДЗ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения ОДЗ, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит; лучше, если это возможно, делать проверку подстановкой. Так, в примере 1 ОДЗ: $x \geqslant \frac{6}{5}$. В эту область попадают оба найденных значения: $x_1 = 2$, $x_2 = 44\frac{2}{9}$. Но, как мы видели, второй корень — посторонний. Так что ОДЗ здесь не помогла.

4. О потере корней

В этом пункте мы ответим на четвертый вопрос: в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений*:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ к уравнению $h(x)(f(x) - g(x)) = 0$

(а не к уравнению $f(x) = g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение $\lg x^2 = 4$ и решим его двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись определением логарифма, находим: $x^2 = 10^4$; $x_1 = 100$, $x_2 = -100$.

Второй способ. Имеем: $2 \lg x = 4$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

Обратите внимание: при решении вторым способом произошла потеря корня — «потерялся» корень $x = -100$. Причина в том, что вместо правильной формулы $\lg x^2 = 2 \lg |x|$ мы воспользовались неправильной формулой $\lg x^2 = 2 \lg x$, сужающей область определения выражения: область определения выражения $\lg x^2$ задается условием $x \neq 0$ (т. е. $x < 0$ или $x > 0$), тогда как область определения выражения $2 \lg x$ задается условием $x > 0$. Область определения сузилась, из нее «выпал» открытый луч $(-\infty; 0)$, где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей формулы были одинаковыми.

Есть еще одна причина, по которой может произойти потеря корней, ее мы упомянем в начале § 24.

Упражнения

23.1. Равносильно ли уравнение $2^x = 256$ уравнению:

а) $\log_2 x = 3$; в) $3x^2 - 24x = 0$;

б) $x^2 - 9x + 8 = 0$; г) $\frac{16}{x} = 2$?

23.2. Равносильно ли уравнение $\sin x = 0$ уравнению:

а) $\cos x = 1$; в) $\cos 2x = 1$;

б) $\operatorname{tg} x = 0$; г) $\sqrt{x-1} \cdot \sin x = 0$?

23.3. Придумайте три уравнения, равносильных уравнению:

а) $\sqrt{2x-1} = 3$; в) $\lg x^2 = 4$;

б) $\cos x = 3$; г) $x^{\frac{3}{5}} = -1$.

Равносильны ли уравнения:

23.4. а) $\sqrt{2x^2+2} = \sqrt{x^4+3}$ и $2x^2+2 = x^4+3$;

б) $\sqrt[4]{\sin^2 x + 1} = 1$ и $\sin^2 x = 0$?

23.5. а) $3^{\sqrt{x}+4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ и $\sqrt{x} + 4 - x = 0$;

б) $\sqrt{0{,}5^x} \cdot 2^{x^2}\sqrt{2} = 4$ и $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 2$?

23.6. а) $\frac{x^2+3x-1}{x^2+1} = 3$ и $x^2+3x-1 = 3x^2+3$;

б) $\frac{\sin x + 1}{\sin x + 2} = 0{,}5$ и $\sin x + 1 = 0{,}5 \sin x + 1$?

Докажите, что уравнение не имеет корней:

○23.7. а) $\sqrt{3x-5} = \sqrt{9-7x}$;

б) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{1-x^2} = 4$.

○23.8. а) $\lg(x^2-9) + \lg(4-x^2) = 1$;

б) $\lg(x^2-3x) - \lg(2x-x^2) = 0{,}5$.

Решите уравнение:

○23.9. а) $\sqrt{7x-6} = x$;

б) $x+3 = \sqrt{2x+9}$;

в) $\sqrt{6x-11} = x-1$;

г) $-x-5 = \sqrt{7x+23}$.

○23.10. а) $\sqrt{x^4-3x-1} = x^2-1$;

б) $\sqrt{x^4-3x-1} = 1-x^2$;

в) $\sqrt{x^4+x-9} = 1-x^2$;

г) $\sqrt{x^4+x-9} = x^2-1$.

●23.11. а) $(x^2-9)\left(\sqrt{3-2x} - x\right) = 0$;

б) $(x^2-16)\left(\sqrt{4-3x} - x\right) = 0$.

●23.12. Решите уравнение:

а) $\sin 2x \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0$;

б) $(\cos 2x - 1) \cdot \sqrt{9 - x^2} = 0$;

в) $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0$;

г) $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$.

§ 24. Общие методы решения уравнений

В этом параграфе мы поговорим об общих идеях, на которых основано решение уравнений, о наиболее общих методах, используемых при решении уравнений любых видов.

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Этот метод мы применяли:

при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;

при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;

при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$.

Этот метод можно применять только в том случае, когда $y = h(x)$ — монотонная функция, которая каждое свое значение принимает по одному разу. Например, $y = x^7$ — возрастающая функция, поэтому от уравнения $(2x + 2)^7 = (5x - 9)^7$ можно перейти к уравнению $2x + 2 = 5x - 9$, откуда находим $x = \frac{11}{3}$. Это — равносильное преобразование уравнения.

Если $y = h(x)$ — немонотонная функция, то указанный метод применять нельзя, поскольку *возможна потеря корней*. Нельзя, например, заменить уравнение $(2x + 2)^4 = (5x - 9)^4$ уравнением $2x + 2 = 5x - 9$, корнем которого, как мы видели выше, является $\frac{11}{3}$. При этом переходе «потерялся» корень $x = 1$; проверьте: значение $x = 1$ удовлетворяет уравнению $(2x + 2)^4 = (5x - 9)^4$. Причина в том, что $y = x^4$ — немонотонная функция. По той же причине нельзя переходить от уравнения $\sin 17x = \sin 7x$ к уравнению $17x = 7x$

с единственным корнем $x = 0$. На самом деле указанное тригонометрическое уравнение имеет бесконечное множество корней:

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}, \quad x = \frac{\pi n}{5};\ n \in \mathbf{Z}.$$

2. Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в следующем: уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$f(x) = 0; \quad g(x) = 0; \quad h(x) = 0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8) = 0.$$

Решение. Задача сводится к решению совокупности трех уравнений:

$$\sqrt{x+2} = 3; \quad 2^{x^2+6x+5} = 1; \quad \ln(x-8) = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x + 2 = 9$; $x_1 = 7$.

Из второго уравнения получаем: $x^2 + 6x + 5 = 0$; $x_2 = -1$, $x_3 = -5$.

Из третьего уравнения находим: $x - 8 = 1$; $x_4 = 9$.

Сделаем проверку. ОДЗ исходного уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x - 8 > 0, \end{cases}$$

откуда получаем: $x > 8$.

Из найденных четырех корней — x_1, x_2, x_3, x_4 — неравенству $x > 8$ удовлетворяет лишь $x_4 = 9$. Значит, $x = 9$ — единственный корень уравнения, а остальные — являются посторонними.

Ответ: 9.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Решение. Представив слагаемое $7x$ в виде $x + 6x$, получим последовательно:

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0;$$
$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$(x - 1)(x(x + 1) - 6) = 0;$$
$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0.$$

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x - 1 = 0; \quad x^2 + x - 6 = 0.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 1$; из второго — $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Поскольку все преобразования были равносильными, найденные три значения являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 1, 2, −3.

3. Метод введения новой переменной

Этим методом мы с вами часто пользовались при решении уравнений. Суть метода проста: если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$g(x) = u_1; \quad g(x) = u_2; \ \ldots; \quad g(x) = u_n,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения $p(u) = 0$.

Умение удачно ввести новую переменную приходит с опытом. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается», а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований. Примите совет: решая уравнение, не торопитесь начинать преобразования, сначала подумайте, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную. И еще: если вы ввели новую переменную, то решите полученное уравнение относительно новой переменной до конца, т. е. вплоть до проверки его корней (если это необходимо), и только потом возвращайтесь к исходной переменной.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Решение. Введя новую переменную $u = x^2 - x$, получим существенно более простое иррациональное уравнение:

$$\sqrt{u+2} + \sqrt{u+7} = \sqrt{2u+21}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7}\right)^2 = \left(\sqrt{2u + 21}\right)^2;$$

$$u + 2 + 2\sqrt{u+2}\sqrt{u+7} + u + 7 = 2u + 21;$$

$$\sqrt{(u+2)(u+7)} = 6;$$

$$u^2 + 9u + 14 = 36;$$

$$u^2 + 9u - 22 = 0;$$

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -11.$$

Проверка найденных значений (здесь она обязательна) их подстановкой в уравнение $\sqrt{u+2} + \sqrt{u+7} = \sqrt{2u+21}$ показывает, что $u_1 = 2$ — корень уравнения, а $u_2 = -11$ — посторонний корень.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем уравнение $x^2 - x = 2$, т. е. квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, решив которое находим два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Ответ: 2, –1.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{3^{x+1}+1}{7} = \frac{4}{3^{x-2}}$.

Решение. Так как $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$, а $3^{x-2} = 3^x : 3^2$, то заданное уравнение можно переписать в виде $\frac{3 \cdot 3^x + 1}{7} = \frac{4 \cdot 9}{3^x}$. Введем новую переменную $u = 3^x$; получим:

$$\frac{3u+1}{7} = \frac{36}{u};$$

$$3u^2 + u - 252 = 0;$$

$$u_1 = 9, \quad u_2 = -\frac{28}{3}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$3^x = 9; \quad 3^x = -\frac{28}{3}.$$

Из первого уравнения находим: $x = 2$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 2.

Пример 5. Решить уравнение $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

Решение. Есть смысл ввести новую переменную $u = \sin x$, понимая, что от $\cos 2x$ «добраться» до $\sin x$ сравнительно несложно:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2u^2.$$

Подставив в заданное тригонометрическое уравнение u вместо $\sin x$ и $1 - 2u^2$ вместо $\cos 2x$, получим рациональное уравнение: $(1 - 2u^2) - 5u - 3 = 0$; $2u^2 + 5u + 2 = 0$; $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = -2$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\sin x = -\frac{1}{2};\ \ \sin x = -2.$$

Из первого уравнения находим: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6. Решить уравнение $\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$.

Решение. Здесь новая переменная как бы «ощущается»: $u = \lg x$. Подготовимся к ее введению, для чего используем свойства логарифмов:

$$\lg^2 x^3 = (\lg x^3)^2 = (3\lg x)^2 = 9\lg^2 x;$$

$$\log_{0,1} 10x = \log_{(0,1)^{-1}}(10x)^{-1} = -\log_{10} 10x = -(\lg 10 + \lg x) =$$

$$= -(1 + \lg x).$$

Перепишем заданное уравнение в виде $9\lg^2 x - (1 + \lg x) - 7 = 0$ и введем новую переменную $u = \lg x$; получим:

$$9u^2 - (1 + u) - 7 = 0;$$

$$9u^2 - u - 8 = 0;$$

$$u_1 = 1,\ u_2 = -\frac{8}{9}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\lg x = 1;\ \ \lg x = -\frac{8}{9}.$$

Из первого уравнения находим: $x_1 = 10$, из второго — $x_2 = 10^{-\frac{8}{9}}$.

Ответ: 10; $10^{-\frac{8}{9}}$.

Мы рассмотрели в этом пункте различные уравнения: рациональное, показательное, тригонометрическое и логарифмическое. Как видите, тип уравнения не так уж важен, идея решения по сути одна и та же.

В заключение рассмотрим более сложный пример, где новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований.

Пример 7. Решить уравнение $x^2 + \dfrac{81x^2}{(9+x)^2} = 40$.

Решение. Заметив, что левая часть уравнения имеет структуру $A^2 + B^2$, где $A = x$, $B = \dfrac{9x}{9+x}$, выделим в левой части полный квадрат, прибавив и отняв $2AB$, т. е. $2x \cdot \dfrac{9x}{9+x}$. Получим:

$$\left(x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} - 2x \cdot \frac{9x}{9+x}\right) + 2x \cdot \frac{9x}{9+x} = 40;$$

$$\left(x - \frac{9x}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40;$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} - 40 = 0.$$

Новая переменная «проявилась»: $u = \dfrac{x^2}{9+x}$. Относительно этой новой переменной мы получили квадратное уравнение $u^2 + 18u - 40 = 0$. Находим его корни: $u_1 = 2$, $u_2 = -20$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\frac{x^2}{9+x} = 2; \quad \frac{x^2}{9+x} = -20.$$

Из первого уравнения находим: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}$.

4. Функционально-графический метод

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а затем найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Графическим методом вы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций (потому-то мы говорим не о графическом, а о *функционально-графическом методе* решения уравнений). Если, например, одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая — убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень (который иногда можно угадать). Этим приемом мы уже пользовались при решении иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.

Упомянем еще одну довольно красивую разновидность функционально-графического метода: *если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке X равносильно системе уравнений*

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

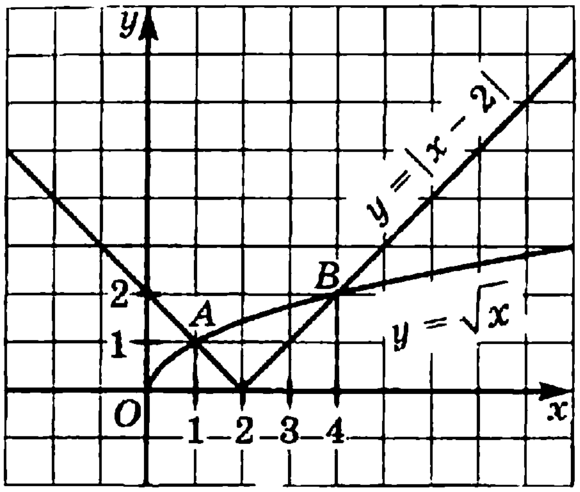


Рис. 92

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x} = |x - 2|.$$

Решение. Графики функций

$$y = \sqrt{x} \text{ и } y = |x - 2|$$

изображены на рисунке 92. Они пересекаются в точках $A(1;\ 1)$ и $B(4;\ 2)$. Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^5 + 5x - 42 = 0.$$

Решение. Замечаем, что $x = 2$ — корень уравнения, поскольку $2^5 + 5 \cdot 2 - 42 = 0$. Докажем, что это единственный корень.

Преобразуем уравнение к виду $x^5 = 42 - 5x$. Замечаем, что функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 10. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Замечаем, что $x = 2$ — корень уравнения, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$ — верное равенство. Докажем, что это единственный корень.

Разделив обе части уравнения на 4^x, преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Замечаем, что функция $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ убывает, а функция $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ возрастает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 11. Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Ее графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины параболы найдем из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2;$$
$$2x - 2 = 0;$$
$$x = 1.$$

Если $x = 1$, то $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$.

Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получили $y_{наим} = 1$. В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{наиб} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем: $x = 1$. Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, то оно является единственным решением системы и, следовательно, единственным корнем заданного уравнения.

Ответ: 1.

Упражнения

24.1. Будет ли уравнение вида $h(f(x)) = h(g(x))$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$:

а) $3^{2-x} = 3^{x^2-4x}$;

б) $(3x^2 - 2)^4 = (x - 3)^4$;

в) $\sqrt[3]{7 - x} = \sqrt[3]{5x + 1}$;

г) $\lg \frac{1}{x} = \lg (2x - 7)$?

Решите уравнение:

О24.2. а) $2^{\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2}\sqrt{32}$; б) $10^{\log_2(x-3)} \cdot 0{,}00001 = 0{,}1^{\log_2(x-7)}$.

О24.3. а) $0{,}5^{\sin x - \cos x} = 1$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{\sin^2 x - 1} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt[4]{729}$.

О24.4. а) $\log_3(x^2 - 10x + 40) = \log_3(4x - 8)$;

б) $\log_{\sqrt{3}} \frac{x-2}{2x-4} = \log_{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x+2}$.

О24.5. а) $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$;

б) $\left(\sqrt{6x-1} + 1\right)^9 = \left(\sqrt{6x+8}\right)^9$.

Решите уравнение:

О24.6. а) $(2^{2x} + 16)^{20} = (10 \cdot 2^x)^{20}$;

б) $(\log_{0,1}^2 x - 2)^3 = (2\log_{0,1} x + 1)^3$.

О24.7. а) $2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$; б) $27^{5-x^2} - 3^{x^3-1} = 0$.

О24.8. а) $(\sqrt{3})^{\operatorname{tg} x} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} x}}$; б) $(\sqrt{2})^{2\cos x} = \dfrac{1}{2 \cdot 2^{\cos x}}$.

О24.9. а) $\log_{\frac{2}{3}} (7x + 9) - \log_{\frac{2}{3}} (8 - x) = 1$;

б) $\log_{1,2} (3x - 1) + \log_{1,2} (3x + 1) = \log_{1,2} 8$.

Решите уравнение методом разложения на множители:

О24.10. а) $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$; б) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$.

О24.11. а) $\sqrt{x^5} - 3\sqrt{x^3} - 18\sqrt{x} = 0$;

б) $\sqrt[4]{x^9} - 2\sqrt[4]{x^5} - 15\sqrt[4]{x} = 0$.

О24.12. а) $2^x \cdot x - 4x - 4 + 2^x = 0$;

б) $3^x \cdot x - 3^{x+1} + 27 = 9x$.

О24.13. а) $2x^2 \sin x - 8 \sin x + 4 = x^2$;

б) $2x^2 \cos x + 9 = 18 \cos x + x^2$.

О24.14. а) $\sin 2x = \sin x$; в) $\sqrt{3} \cos 3x = \sin 6x$;

б) $\cos^2 (\pi - x) + \sin 2x = 0$; г) $\sin^2 \left(\pi + \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \sin x = 0$.

Решите уравнение методом введения новой переменной:

О24.15. а) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$; б) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$.

О24.16. а) $\sqrt{x^2 + 1 - 2x} - 6\sqrt{x - 1} = 7$;

б) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2 - x}$.

О24.17. а) $\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-1}} + 4\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+3}} = 4$; б) $\sqrt{\dfrac{5x-1}{x+3}} + 5\sqrt{\dfrac{x+3}{5x-1}} = 6$.

О24.18. а) $2^x + 2^{1-x} = 3$; в) $5^x + 4 = 5^{2x+1}$;

б) $25^{-x} - 50 = 5^{-x+1}$; г) $3^{x+1} - 29 = -18 \cdot 3^{-x}$.

О24.19. а) $7^{2x+1} - 50 \cdot 7^x = -7$;

в) $4\sin^2 x + 4 = 17\sin x$;

б) $\log_2^2 x + 12 = 7\log_2 x$;

г) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 = 0$.

О24.20. а) $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$;

в) $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0$;

б) $3^x + 3^{-x+1} = 4$;

г) $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$.

Решите уравнение, используя функционально-графические методы:

О24.21. а) $x = \sqrt[3]{x}$;

б) $|x| = \sqrt[5]{x}$.

О24.22. а) $2^x = 6 - x$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$.

О24.23. а) $(x - 1)^2 = \log_2 x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

О24.24. а) $1 - \sqrt{x} = \ln x$;

б) $\sqrt{x} - 2 = \frac{9}{x}$.

Решите уравнение:

О24.25. а) $(x - 1)^4 + 36 = 13(x^2 - 2x + 1)$;

б) $(2x + 3)^4 - 9 = 8(4x^2 + 12x + 9)$.

О24.26. а) $\sqrt{6x^2 - 3} = \sqrt{5x - 2}$;

б) $\sqrt{3x^2 - 5x} = \sqrt{x^2 + 2x - 5}$.

О24.27. а) $\sqrt{2x^2 - 11x + 6} = 2x - 9$;

б) $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 2x - 4$.

О24.28. а) $16x - 15\sqrt{x} - 1 = 0$;

в) $3x - 8\sqrt{x} + 5 = 0$;

б) $2 - x + 3\sqrt{2 - x} = 4$;

г) $5\sqrt{x + 3} + x + 3 = 6$.

О24.29. а) $\sqrt[5]{x} - \sqrt[10]{x} - 2 = 0$;

в) $\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 8 = 0$;

б) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x} - 3 = 0$;

г) $3\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x} - 2 = 0$.

О24.30. а) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{3}$.

Решите уравнение:

○24.31. а) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{6x+2}=\sqrt{9x+1}$;

б) $\sqrt{6x-14}+\sqrt{5-x}=\sqrt{5x-9}$.

○24.32. а) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$;

б) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

○24.33. а) $\sin^2 x+\cos^2 2x=1$; б) $\cos^2 3x-\sin^2 3x-\cos 4x=0$.

○24.34. а) $\cos 5x+\cos 7x-\cos 6x=0$;

б) $\sin 9x-\sin 5x+\sin 4x=0$.

○24.35. а) $\cos 6x-\cos 2x+\cos 8x-\cos 4x=0$;

б) $\sin 3x-\sin x+\cos 3x-\cos x=0$.

○24.36. а) $3\,\mathrm{tg}^2 x-8=4\cos^2 x$; б) $4\sin^2 x=4-9\,\mathrm{tg}^2 x$.

●24.37. а) $\sin x\cos x-6\sin x+6\cos x+6=0$;

б) $5\sin 2x-11\sin x=11\cos x-7$.

●24.38. а) $2^x\cdot 5^{\frac{1+x}{x}}=50$; в) $3^{x-1}\cdot 625^{\frac{x-2}{x-1}}=225$;

б) $3^x\cdot 5^{\frac{3}{x}}=24$; г) $5^x\cdot 625^{\frac{2+x}{x}}=40$.

●24.39. а) $2^{5x-1}\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\log_{0,5}(x+4)=0$;

б) $(\sin 2x+\cos 2x)\left(x-8\sqrt{2x-15}\right)=0$.

●24.40. а) $\sin\frac{5\pi}{4}x=x^2-4x+5$; б) $-\cos 7\pi x=x^2-6x+10$.

●24.41. а) $\sqrt{x^2-2x+2}+\log_3\sqrt{x^2-2x+10}=2$;

б) $(x-7)^6+\log_5\sqrt{x^2-14x+74}=1$.

●24.42. а) $\log_2(x^2-4x+8)=\sin\frac{5\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{2}$;

б) $\log_3(x^2+4x+13)=\cos\pi x-\sin\frac{\pi x}{4}$.

§ 25. Решение неравенств с одной переменной

В этом параграфе речь пойдет о принципиальных вопросах, связанных с решением неравенств с одной переменной: что такое равносильные неравенства, какие преобразования неравенств являются равносильными, а какие — нет. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических неравенств. Мы снова возвращаемся к этим вопросам, потому что, повторимся, завершая изучение курса алгебры, целесообразно переосмыслить общие идеи и методы.

1. Равносильность неравенств

Напомним, что *решением неравенства* $f(x) > g(x)$ называют всякое значение переменной x, которое обращает заданное неравенство с переменной в верное числовое неравенство. Иногда используют термин *частное решение*. Множество всех частных решений неравенства называют *общим решением*, но чаще употребляют термин *решение*. Таким образом, термин *решение* используют в трех смыслах: как общее решение, как частное решение и как процесс, но обычно по смыслу бывает ясно, о чем идет речь.

***Определение* 1.** Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют **равносильными**, если их решения (т. е. множества частных решений) совпадают.

Вы, конечно, понимаете, что использование в определении знака $>$ непринципиально. Можно и в этом определении, и во всех утверждениях, имеющихся в данном параграфе, использовать любой другой знак неравенства как строгого, так и нестрогого.

***Определение* 2.** Если решение неравенства

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

содержится в решении неравенства

$$p(x) > h(x), \qquad (2)$$

то неравенство (2) называют **следствием неравенства (1)**.

Например, неравенство $x^2 > 9$ является следствием неравенства $2x > 6$. В самом деле, преобразовав первое неравенство к виду $x^2 - 9 > 0$ и далее к виду $(x - 3)(x + 3) > 0$ и применив метод интервалов (рис. 93),

Рис. 93

получаем, что решением неравенства служит объединение двух открытых лучей: $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$. Решение второго неравенства $2x > 6$ имеет вид $x > 3$, т. е. представляет собой открытый луч $(3; +\infty)$. Решение второго неравенства является частью решения первого, а потому первое неравенство — следствие второго.

Интересно, что ситуация изменится радикальным образом, если в обоих неравенствах изменить знак неравенства: неравенство $2x < 6$ будет следствием неравенства $x^2 < 9$. В самом деле, решением первого неравенства служит открытый луч $(-\infty; 3)$. Преобразовав второе неравенство к виду $x^2 - 9 < 0$ и далее к виду $(x - 3)(x + 3) < 0$ и применив метод интервалов (см. рис. 93), получаем, что решением неравенства служит интервал $(-3; 3)$. Решение второго неравенства является частью решения первого, а потому первое неравенство — следствие второго.

При решении уравнений мы не очень опасались того, что в результате некоторых преобразований можем получить уравнение-следствие, поскольку посторонние корни всегда можно отсеять с помощью проверки. В неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество чисел, доводить дело до проверки нецелесообразно. Поэтому при решении неравенств стараются выполнять только равносильные преобразования.

Решение неравенств, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести теоремах о равносильности, в определенном смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений (см. § 23).

Теорема 1. **Если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.**

Теорема 2. **Если обе части неравенства возвести в одну и ту же нечетную степень, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному.**

Теорема 3. **Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно:**

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теорема 4. **а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, оставив при этом**

знак неравенства без изменения, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех x из области определения неравенства $f(x) > g(x)$, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

Теорема 5. **Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в области его определения (в ОДЗ), то после возведения обеих частей неравенства в одну и ту же четную степень n получится неравенство того же смысла $f(x)^n > g(x)^n$, равносильное данному.**

Теорема 6. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно:**

а) неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

Теоремами 1 и 4 вы активно пользовались в курсе алгебры 9-го класса, когда решали рациональные неравенства и их системы. Теорему 3 мы использовали выше, в § 8, для решения показательных неравенств. Теорему 6 мы использовали в § 13 для решения логарифмических неравенств. Теорема 5 будет использоваться далее в этом параграфе.

2. Системы и совокупности неравенств

Определение 3. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением *всех* заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств**. Множество всех частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто **решение системы неравенств**).

Решить систему неравенств — значит найти все ее частные решения. Решение системы неравенств представляет собой пересечение решений неравенств, образующих систему.

Определение 4. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств,** если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением *хотя бы одного* из заданных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств.** Множество всех частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств.**

Решение совокупности неравенств представляет собой объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой, а неравенства, образующие совокупность, — квадратной скобкой. Впрочем, для неравенств, образующих совокупность, вполне допустима запись в строчку через точку с запятой. Например, решение неравенства $\sin^2 x > \frac{1}{4}$ сводится к решению совокупности неравенств: $\sin x > \frac{1}{2}$; $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Пример 1. Решить систему и совокупность неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11; \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11. \end{array}\right.$

Решение. а) Решая первое неравенство системы, находим: $2x > 4$; $x > 2$. Решая второе неравенство системы, находим: $3x \geqslant 13$; $x \geqslant \frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной пря-

Рис. 94

мой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю (рис. 94). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы, т. е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. В рассматриваемом примере получаем луч $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$.

б) Решением совокупности неравенств будет объединение решений неравенств совокупности. В рассматриваемом примере получаем (см. рис. 94) открытый луч $(2; +\infty)$ — промежуток, на котором имеется хотя бы одна штриховка.

Ответ: а) $x \geqslant \frac{13}{3}$; б) $x > 2$.

Если в системе из нескольких неравенств одно является следствием другого (или других), то неравенство-следствие можно отбросить. Мы этим уже фактически пользовались. Рассмотрим еще раз пример решения логарифмического неравенства из § 13.

Пример 2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} (16 + 4x - x^2) \leqslant -4$.

Решение. Представим число -4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$: $-4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$. Это позволит переписать заданное неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{2}} (16 + 4x - x^2) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Учитывая, что здесь основанием логарифмов служит число меньше 1, составляем, пользуясь теоремой 6, систему неравенств, равносильную заданному логарифмическому неравенству:

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0, \\ 16 + 4x - x^2 > 16. \end{cases}$$

Если выполняется второе неравенство системы, то автоматически выполняется и первое (если $A \geqslant 16$, то тем более $A > 0$). Значит, первое неравенство — следствие второго и его можно отбросить. Решая второе неравенство, находим:

$$x^2 - 4x \leqslant 0;$$
$$x(x - 4) \leqslant 0;$$
$$0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Снова вернемся к § 13. Мы говорили, что при решении логарифмических неравенств переходят от неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad (3)$$

при $a > 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \qquad (4)$$

а при $0 < a < 1$ к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad (5)$$

Первые два неравенства каждой из этих систем определяют ОДЗ переменной для неравенства (3), а знак последнего неравенства каждой из систем либо совпадает со знаком неравенства (3) — в случае, когда $a > 1$, либо противоположен знаку неравенства (3) — в случае, когда $0 < a < 1$.

А теперь обратим внимание на одно обстоятельство, которое мы в общем виде в § 13 не обсуждали. В каждой из составленных систем есть по одному «лишнему» неравенству. В системе (4) имеем $f(x) > g(x)$, $g(x) > 0$; отсюда, по свойству транзитивности неравенств, можно сделать вывод, что $f(x) > 0$. Это значит, что первое неравенство системы (4) является следствием второго и третьего неравенств, а неравенство-следствие можно отбросить. Таким образом, систему (4) можно заменить более простой системой неравенств:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогично можно установить, что систему (5) можно заменить более простой системой неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

В примере 2 нам встретился типичный случай, когда решение заданного неравенства сводится к решению системы неравенств. Бывают и более сложные неравенства, сводящиеся к модели «совокупность систем неравенств». Это значит, что надо найти решения всех составленных систем неравенств, а затем эти решения объединить.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(2x - 3) > \log_{x-2}(24 - 6x).$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $x - 2 > 1$; 2) $0 < x - 2 < 1$.

В первом случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x - 3 > 0$ и $24 - 6x > 0$, мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, сохранив, согласно теореме 6, знак исходного неравенства: $2x - 3 > 24 - 6x$.

Во втором случае, записав условия, определяющие ОДЗ: $2x - 3 > 0$ и $24 - 6x > 0$, мы можем «освободиться» от знаков логарифмов, изменив, согласно теореме 6, знак исходного неравенства: $2x - 3 < 24 - 6x$.

Это значит, что заданное логарифмическое неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 > 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 > 24 - 6x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ 24 - 6x > 0, \\ 2x - 3 < 24 - 6x. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств находим: $\frac{27}{8} < x < 4$; из второй системы получаем: $2 < x < 3$.

Ответ: $2 < x < 3$; $\frac{27}{8} < x < 4$.

Замечание. В первой из составленных при решении примера 3 систем можно отбросить второе неравенство, а во второй — третье. Подумайте, почему это так.

3. Иррациональные неравенства

Обсудим решение неравенства вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x). \qquad (6)$$

Во-первых, запишем условие, определяющее ОДЗ, — $f(x) \geqslant 0$.

Во-вторых, заметим, что при $g(x) \leqslant 0$ неравенство (6) не имеет решений, значит, можно сразу потребовать выполнения условия $g(x) > 0$.

В-третьих, заметим, что при указанных условиях ($f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$) обе части неравенства (6) неотрицательны, значит, если по теореме 5 возвести их в квадрат, получим неравенство $f(x) < (g(x))^2$, равносильное данному.

Таким образом, иррациональное неравенство (6) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Обсудим решение неравенства вида

$$\sqrt{f(x)} > g(x). \qquad (7)$$

Во-первых, запишем условие, определяющее ОДЗ, — $f(x) \geqslant 0$.

Во-вторых, заметим, что при $g(x) < 0$ справедливость неравенства (7) не вызывает сомнений (поскольку $\sqrt{f(x)} \geqslant 0$). Это значит, что решения системы неравенств $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) < 0$ являются одновременно и решениями неравенства (7).

В-третьих, заметим, что если $g(x) \geqslant 0$, то обе части неравенства (7) неотрицательны (мы, естественно, учитываем, что $f(x) \geqslant 0$). Значит, если по теореме 5 возвести их в квадрат, получим неравенство $f(x) > (g(x))^2$, равносильное данному.

Таким образом, иррациональное неравенство (7) равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Первое неравенство второй системы можно опустить (подумайте, почему).

Пример 4. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$; б) $\sqrt{x^2 - x - 12} > x$.

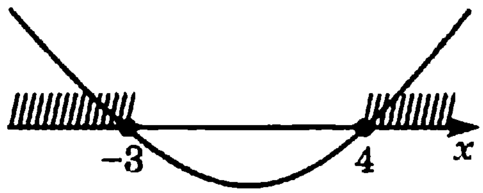


Рис. 95

Решение. а) Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}$$

Для решения квадратного неравенства $x^2 - x - 12 \geqslant 0$ найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 12$; получим: $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. Геометрическая иллюстрация, представленная на рисунке 95, помогает найти решение неравенства:

$$x \leqslant -3;\ x \geqslant 4.$$

Второе неравенство системы уже решено: $x > 0$. Из третьего неравенства находим $x > -12$.

Геометрическая иллюстрация, представленная на рисунке 96, помогает найти решение системы неравенств: $x \geqslant 4$.

б) Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 > x^2. \end{cases}$$

Геометрическая иллюстрация, представленная на рисунке 97, помогает найти решение первой системы: $x \leqslant -3$.

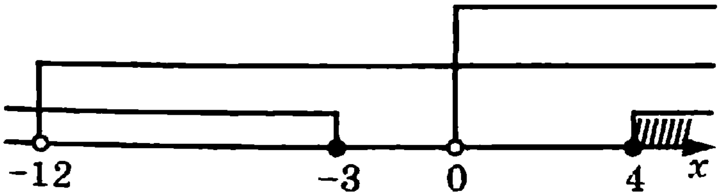


Рис. 96

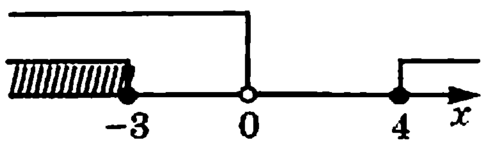


Рис. 97

Во второй системе можно опустить первое неравенство, поскольку оно является следствием третьего неравенства системы. Это позволяет переписать вторую систему в более простом виде:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < -12. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений. Значит, решение совокупности систем неравенств совпадает с решением первой системы: $x \leqslant -3$.

Ответ: а) $x \geqslant 4$; б) $x \leqslant -3$.

4. Неравенства с модулями

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, решаются различными способами. Мы покажем эти способы на достаточно простом примере.

Пример 5. Решить неравенство $|2x - 5| > 4$.

Решение. Первый способ. Имеем:

$$|2(x - 2{,}5)| > 4;$$

$$2|x - 2{,}5| > 4;$$

$$|x - 2{,}5| > 2.$$

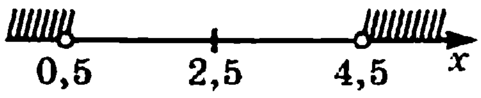


Рис. 98

Геометрически выражение $|x - 2{,}5|$ означает расстояние $\rho(x; 2{,}5)$ на координатной прямой между точками x и 2,5. Значит, нам нужно найти все такие точки x, которые удалены от точки 2,5 более чем на 2, — это точки из промежутков $(-\infty; 0{,}5)$ и $(4{,}5; +\infty)$ (рис. 98).

Итак, мы получили следующие решения неравенства:

$$x < 0{,}5; \qquad x > 4{,}5.$$

Второй способ. Поскольку обе части заданного неравенства неотрицательны, то по теореме 5 возведение их в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Получим:

$$|2x - 5|^2 > 4^2.$$

Воспользовавшись тем, что $|a|^2 = a^2$, получим:

$$(2x - 5)^2 > 4^2;$$

$$(2x - 5)^2 - 4^2 > 0;$$

$$(2x - 5 - 4)(2x - 5 + 4) > 0;$$

$$(2x - 9)(2x - 1) > 0;$$

$$2(x - 4{,}5) \cdot 2(x - 0{,}5) > 0;$$

$$(x - 4{,}5)(x - 0{,}5) > 0.$$

Рис. 99

Применив метод интервалов (рис. 99), получим: $x < 0{,}5$; $x > 4{,}5$.

Третий способ. Выражение $2x - 5$ может быть неотрицательным или отрицательным. Если $2x - 5 \geqslant 0$, то $|2x - 5| = 2x - 5$, и заданное неравенство принимает вид $2x - 5 > 4$.

Если $2x - 5 < 0$, то $|2x - 5| = -(2x - 5)$, и заданное неравенство принимает вид $-(2x - 5) > 4$.

Таким образом, получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0, \\ 2x - 5 > 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 5 < 0, \\ -(2x - 5) > 4. \end{cases}$$

Решая первую систему, получаем:

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ x > 4{,}5, \end{cases}$$

т. е. $x > 4{,}5$.

Решая вторую систему, получаем:

$$\begin{cases} x < 2{,}5, \\ x < 0{,}5, \end{cases}$$

т. е. $x < 0{,}5$.

Объединяя найденные решения двух систем неравенств, получаем: $x < 0{,}5$; $x > 4{,}5$.

Ответ: $x < 0{,}5$; $x > 4{,}5$.

Из указанных трех способов наиболее универсальным является третий. Но поскольку он представляется достаточно сложным с технической точки зрения, то, если возможно, стараются использовать второй и первый способы.

Пример 6. Решить неравенство $|x^2 - 3x + 2| \leqslant 2x - x^2$.

Решение. Здесь можно применить два из указанных в предыдущем примере способов решения: 1) рассмотрение двух случаев знака выражения, содержащегося под знаком модуля, и сведение заданного неравенства к совокупности систем неравенств; 2) возведение обеих частей неравенства в квадрат.

Первый способ. Если $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, то

$$|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2,$$

и заданное неравенство принимает вид $x^2 - 3x + 2 \leqslant 2x - x^2$.

Если $x^2 - 3x + 2 < 0$, то $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$, и заданное неравенство принимает вид $-(x^2 - 3x + 2) \leqslant 2x - x^2$.

Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 2x - x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0, \\ -(x^2 - 3x + 2) \leqslant 2x - x^2. \end{cases}$$

1) Решим первое неравенство первой системы. Найдем корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$; получим: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. С помощью метода интервалов (рис. 100) находим решение неравенства:

$$x \leqslant 1, \quad x \geqslant 2.$$

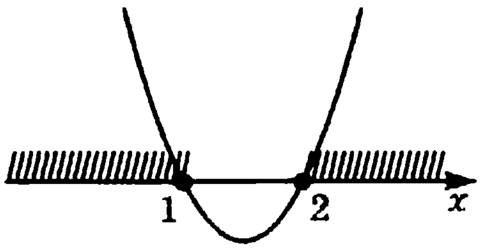


Рис. 100

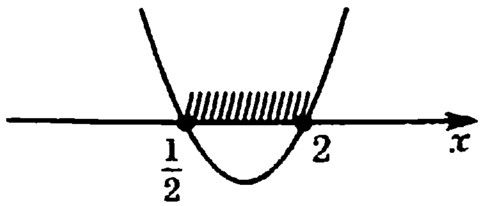


Рис. 101

2) Решим второе неравенство первой системы, но сначала преобразуем его к более простому виду: $2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0$. Найдем корни уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. С помощью метода интервалов (рис. 101) находим решение неравенства:

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2.$$

3) Отметив найденные решения первого и второго неравенств на координатной прямой, находим пересечение решений (рис. 102): $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$; $x = 2$. Это решение первой системы неравенств.

4) Решим первое неравенство второй системы. С помощью геометрической иллюстрации, представленной на рисунке 100, получаем решение неравенства: $1 < x < 2$.

5) Решим второе неравенство второй системы, но сначала преобразуем его к более простому виду:

$$-(x^2 - 3x + 2) \leqslant 2x - x^2,$$
$$-x^2 + 3x - 2 - 2x + x^2 \leqslant 0,$$
$$x \leqslant 2.$$

6) Отметив найденные решения первого и второго неравенств на координатной прямой, находим пересечение решений (рис. 103): $1 < x < 2$. Это решение второй системы неравенств.

7) Объединив найденные решения систем неравенств

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \quad x = 2; \quad 1 < x < 2,$$

получаем: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

<u>Второй способ</u>. Перепишем данное неравенство в виде

$$2x - x^2 \geqslant |x^2 - 3x + 2| \geqslant 0.$$

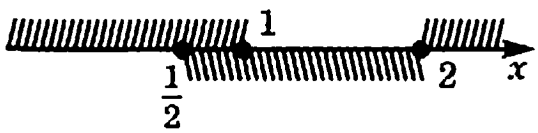


Рис. 102

Рис. 103

Отсюда следует, что $2x - x^2 \geqslant 0$. Значит, обе части заданного неравенства неотрицательны, и мы имеем право возвести их в квадрат. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geqslant 0, \\ |x^2 - 3x + 2|^2 \leqslant (2x - x^2)^2. \end{cases}$$

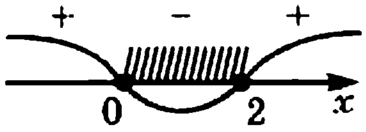


Рис. 104

Решим первое неравенство этой системы:

$$2x - x^2 \geqslant 0;$$
$$x^2 - 2x \leqslant 0;$$
$$x(x - 2) \leqslant 0,$$

откуда находим (рис. 104): $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Решим второе неравенство системы:

$$|x^2 - 3x + 2|^2 \leqslant (2x - x^2)^2;$$
$$(x^2 - 3x + 2)^2 \leqslant (2x - x^2)^2;$$
$$(x^2 - 3x + 2)^2 - (2x - x^2)^2 \leqslant 0;$$
$$((x^2 - 3x + 2) - ((2x - x^2))((x^2 - 3x + 2) + (2x - x^2)) \leqslant 0;$$
$$(2x^2 - 5x + 2)(-x + 2) \leqslant 0;$$
$$(2x^2 - 5x + 2)(x - 2) \geqslant 0.$$

Корни квадратного трехчлена $2x^2 - 5x + 2$ найдены выше: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. С их помощью составим разложение трехчлена на множители

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Это позволяет переписать последнее неравенство так:

$$2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) \geqslant 0;$$

$$(x - 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0.$$

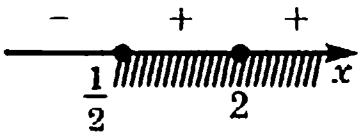


Рис. 105

Отметим точки $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$ на координатной прямой и расставим знаки функции

$$y = (x - 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

на полученных промежутках (рис. 105). Эта геометрическая иллюстрация позволяет сделать вывод о решении неравенства $(x - 2)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0$; получаем $x \geqslant \frac{1}{2}$.

Итак, для первого неравенства системы получили $0 \leqslant x \leqslant 2$; для второго неравенства системы получили: $x \geqslant \frac{1}{2}$. Значит, решение системы таково: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

Упражнения

25.1. Придумайте три неравенства, равносильных неравенству:

а) $x^2 - 9 \leqslant 0$; б) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$.

25.2. Являются ли равносильными неравенства:

а) $\sin x + 2\log_3 x > 20$ и $\sin x > 20 - 2\log_3 x$;

б) $\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 1$ и $\sin x \geqslant \sqrt{x^2+1}$;

в) $13 - 13^{x^2-4} \geqslant 10^x$ и $13 \geqslant 10^x + 13^{x^2-4}$;

г) $10^{4x-1} \cdot \lg(x^2 - 4) < 0$ и $\lg(x^2 - 4) < 0$?

25.3. Данное неравенство замените равносильным рациональным неравенством:

а) $\lg(x^2 + 9) > \lg(2x^2 + 4)$;

б) $1{,}4^{7x-9} \leqslant 1{,}4^{x^2-6}$;

в) $\sqrt[5]{4x - 9} \geqslant \sqrt[5]{7x + 9}$;

г) $\log_{0,2}(16x^2 + 8) < \log_{0,2}(x^2 + 1)$.

Решите систему неравенств:

○**25.4.** а) $\begin{cases} 3x - 11 > 2x + 13, \\ 17x + 9 < 9x + 99; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x + 2 \leqslant 4x + 24, \\ 2x - 1 \geqslant x + 7. \end{cases}$

○**25.5.** а) $\begin{cases} (x + 1)^2 - (x - 1)^2 \geqslant 12, \\ (x + 4)(x - 4) - (x + 2)^2 < 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x^3 < 8x, \\ 3x - 16 \leqslant x. \end{cases}$

○**25.6.** а) $\begin{cases} x^3 < x, \\ 3x^2 - x > 5 - 15x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x + 5}{x - 7} < 1, \\ \frac{3x + 4}{4x - 2} > -1. \end{cases}$

O25.7. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{24}{(x+2)^2} < 0, \\ -3x < 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 1{,}5x - 7}{(x-4)^2} > 0, \\ x^2 < 25. \end{cases}$

Решите совокупность неравенств:

O25.8. а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 > 0, \\ x - 6 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x(x+1) \leqslant 0, \\ 3x - 9 > 0. \end{array}\right.$

O25.9. а) $\left[\begin{array}{l} (x+3)^3 \geqslant 27, \\ 4x - 1 < 12x; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} (x+3)(x^2 - 3x + 9) < 54, \\ x^2 - 9 > 0. \end{array}\right.$

Решите неравенства, применяя теоремы о равносильности:

O25.10. а) $\log_{14}(x - 1) \leqslant \log_{14}(2x + 3)$;

б) $\log_{0,3}(2x + 1) < \log_{0,3}(x - 3)$.

O25.11. а) $\log_{\frac{1}{\pi}}(2x^2 - 5x) \geqslant \log_{\frac{1}{\pi}}(2x - 3)$;

б) $\lg(5x^2 - 15x) \leqslant \lg(2x - 6)$.

O25.12. а) $2^{\sqrt{x+4}} \geqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{128}$; б) $0{,}5^{\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}} \leqslant 1$.

O25.13. а) $(x^2 - 6x)^5 \geqslant (2x - 7)^5$;

б) $(x^2 - 2x)^9 \leqslant (2x - x^2 - 2)^9$.

●25.14. а) $(2^{x+1} + 1)^6 \geqslant (2^x + 17)^6$;

б) $(2 \cdot 0{,}1^x + 3)^{10} \leqslant (0{,}1^x + 103)^{10}$.

●25.15. а) $(3 - 3\log_{0,2} x)^{13} < (\log_{0,2} x + 7)^{13}$;

б) $(3\log_7 x - 24)^5 > (2\log_7 x - 22)^5$.

Решите неравенство методом введения новой переменной:

O25.16. а) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 \geqslant 0$; б) $2 \cdot 5^{2x} - 5^x - 1 \leqslant 0$.

O25.17. а) $3^{1+x} \cdot 2^{1-x} + 3^x \cdot 2^{-x} \leqslant 10{,}5$;

б) $2^x \cdot 5^{1-x} + 2^{x+1} \cdot 5^{-x} \geqslant 2{,}8$.

○25.18. а) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 > 0$; б) $\sqrt[5]{x} - 6\sqrt[10]{x} + 8 < 0$.

○25.19. а) $3^x + 3^{-x+1} \leqslant 4$; б) $25^{-x} - 50 > 5^{-x+1}$.

○25.20. а) $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 12 < 0$;

б) $3\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 10\log_{\frac{1}{3}} x + 3 \geqslant 0$.

●25.21. а) $\log_2^2 (x - 1) + 3\log_2 (x - 1) + 2 \geqslant 0$;

б) $9^{\log_{0,1} x} - 4 \cdot 3^{\log_{0,1} x} + 0{,}1^{\log_{0,1} 3} < 0$.

●25.22. а) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leqslant 0$;

б) $\cos^2 x - 5\cos x + 4 \leqslant 0$.

Решите неравенство, применяя функционально-графические методы:

○25.23. а) $3^x > 12 - 1{,}5x$; в) $3^x \leqslant 12 - 1{,}5x$;

б) $2^x > \sqrt{x}$; г) $2^x \leqslant \sqrt{x}$.

○25.24. а) $\log_2 x < 6 - x$; в) $\log_2 x \geqslant 6 - x$;

б) $\log_3 x \geqslant x^3$; г) $\log_3 x < x^3$.

●25.25. а) $x^2 + 1 \geqslant \cos x$; в) $x^2 + 1 \leqslant \cos x$;

б) $\sin x \leqslant -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1$; г) $\sin x \geqslant -\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1$.

Решите неравенство:

25.26. а) $9^{x+2} + 4 \cdot 3^{2x+2} \geqslant 4\frac{1}{3}$; б) $8^{x-2} + 3 \cdot 2^{3x-2} \leqslant 24\frac{1}{2}$.

25.27. а) $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 8 < 0$; б) $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0$.

●25.28. а) $(x - 2)\log_4 (x + 2) \geqslant 0$; б) $(3 - x)\sqrt{\log_3 (x + 5)} \leqslant 0$.

●25.29. а) $(2^x - 3)(3x - 4) \leqslant 0$;

б) $(3\log_3 x - 1)(3x - 4) \geqslant 0$.

●25.30. а) $(x + 3)\log_{\frac{1}{7}} x < 0$; в) $\dfrac{e^{3x-1} - 1}{x + 8} > 0$;

б) $(x - 5)\sqrt{x + 1} < 0$; г) $x\sqrt{x + 7} < 0$.

§ 26. Уравнения и неравенства с двумя переменными

Напомним, что **решением уравнения с двумя переменными** $p(x; y) = 0$ называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая обращает уравнение в верное числовое равенство. Например, уравнение $(2x - 6)^2 + (3y + 12)^4 = 0$ имеет только одно решение — пару $(3; -4)$, поскольку сумма двух неотрицательных чисел может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Но, как правило, решений у уравнения с двумя переменными бесконечно много. Например, уравнению $x^2 + y^2 = 9$ удовлетворяет любая пара $(x; y)$ такая, что точка координатной плоскости $M(x; y)$ принадлежит окружности радиусом 3 с центром в начале координат (рис. 106). Переход к геометрической модели — графику уравнения $p(x; y) = 0$ — является одним из наиболее удобных приемов решения уравнения с двумя переменными.

Если дано целое рациональное уравнение с несколькими переменными и с целочисленными коэффициентами и поставлена задача найти целочисленные (или, в более общем случае, рациональные) его решения, то говорят, что задано *диофантово уравнение* (в честь древнегреческого математика Диофанта).

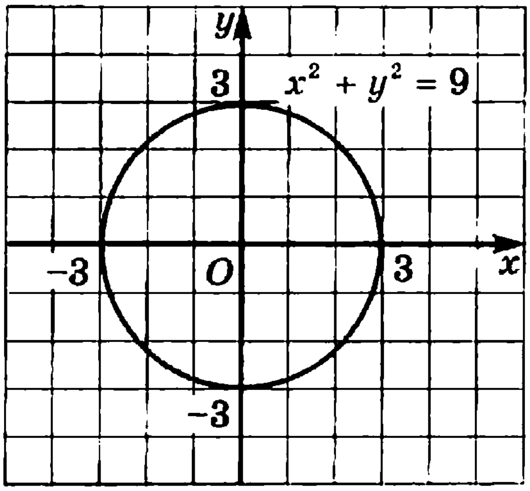


Рис. 106

В большинстве случаев решение диофантовых уравнений сопряжено со значительными трудностями. Иногда они преодолеваются с помощью теории делимости целых чисел — так будет обстоять дело в следующих ниже двух примерах.

Пример 1. Найти целочисленные решения уравнения

$$3x + 4y = 19.$$

Решение. Выразив из заданного уравнения x, получим $x = \dfrac{19 - 4y}{3}$. Нас интересуют лишь целочисленные решения уравнения, поэтому целое число $19 - 4y$ должно делиться без остатка на 3.

Для целого числа y имеются три возможности по отношению к его делимости на число 3: 1) число y делится на 3, т. е. $y = 3k$; 2) число y при делении на 3 дает в остатке 1, т. е. $y = 3k + 1$; 3) число y при делении на 3 дает в остатке 2, т. е. $y = 3k + 2$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

Если $y = 3k$, то $19 - 4y = 19 - 12k$; это число на 3 не делится ($12k$ делится на 3, а 19 — нет, значит, разность $19 - 12k$ не делится на 3).

Если $y = 3k + 1$, то $19 - 4y = 19 - 4(3k + 1) = 15 - 12k = 3(5 - 4k)$; это число делится на 3.

Если $y = 3k + 2$, то $19 - 4y = 19 - 4(3k + 2) = 11 - 12k$; это число не делится на 3.

Итак, нас устраивает единственная возможность: $y = 3k + 1$; тогда $x = \frac{19 - 4y}{3} = \frac{3(5 - 4k)}{3} = 5 - 4k$. Значит, целочисленным решением уравнения служит любая пара вида $(5 - 4k;\ 3k + 1)$, где $k \in \mathbf{Z}$. В самом деле, если в уравнение $3x + 4y = 19$ подставить $5 - 4k$ вместо x и $3k + 1$ вместо y, получим: $3(5 - 4k) + 4(3k + 1) = 19$; $19 = 19$ — верное равенство.

Чтобы вам был понятнее полученный результат, дадим параметру k несколько конкретных целочисленных значений.

Пусть $k = 0$; тогда пара $(5 - 4k;\ 3k + 1)$ превращается в $(5;\ 1)$. Подставив значения $x = 5$, $y = 1$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим: $15 + 4 = 19$ — верное равенство.

Пусть $k = 1$; тогда пара $(5 - 4k;\ 3k + 1)$ превращается в $(1;\ 4)$. Подставив значения $x = 1$, $y = 4$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим: $3 + 16 = 19$ — верное равенство.

Пусть $k = -1$; тогда пара $(5 - 4k;\ 3k + 1)$ превращается в $(9;\ -2)$. Подставив значения $x = 9$, $y = -2$ в уравнение $3x + 4y = 19$, получим $27 - 8 = 19$ — верное равенство.

Так же обстоит дело со всеми остальными целочисленными значениями параметра k.

Ответ: $(5 - 4k;\ 3k + 1)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Найти целочисленные решения уравнения $9x^2 - 4y^2 = 17$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(3x - 2y)(3x + 2y) = 17$. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Это произведение может равняться 17 лишь в четырех случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 17; когда первый множитель равен -1, а второй -17; когда первый множитель равен 17, а второй 1; когда первый множитель равен -17, а второй -1. Значит, задача сводится к решению совокупности четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 3x + 2y = 17; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 3x + 2y = -17; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 17, \\ 3x + 2y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = -17, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим: $x = 3$, $y = 4$; из второй — $x = -3$, $y = -4$; из третьей — $x = 3$, $y = -4$; из четвертой — $x = -3$, $y = 4$.

Ответ: $(3;\ 4)$, $(-3;\ -4)$, $(3;\ -4)$, $(-3;\ 4)$.

Пример 3. Купили несколько тетрадей в линейку по 8 р. и в клетку по 13 р., затратив на всю покупку 150 р. Сколько куплено тетрадей каждого вида?

Р е ш е н и е. Пусть x — число купленных тетрадей в линейку, а y — число купленных тетрадей в клетку. Тогда математической моделью задачи служит диофантово уравнение $8x + 13y = 150$. По смыслу задачи x может принимать значения 1, 2, 3, ..., 18 (значение $x = 19$ уже не подходит, поскольку $8 \cdot 19 > 150$), а y может принимать значения 1, 2, 3, ..., 11. Конечно, можно решить уравнение подбором, но перебор возможных пар $(x; y)$ состоит из $18 \cdot 11 = 198$ вариантов. Некоторые рассуждения помогут нам упростить этот процесс.

Во-первых, замечаем, что y не может быть нечетным числом, поскольку при нечетном y левая часть уравнения, т. е. $8x + 13y$, — нечетное число, 150 никак не получится. Значит, для y оставляем такие возможности: 2, 4, 6, 8, 10. Впрочем, удобнее представить y в виде $2n$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Во-вторых, переписав уравнение в виде $8x + 13 \cdot 2n = 150$, т. е. $4x + 13n = 75$, замечаем, что n — нечетное число, значит, для n оставляем три возможности: $n = 1, 3, 5$.

Теперь можно заняться вычислениями. Если $n = 1$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 15{,}5$; это нас не устраивает. Если $n = 3$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 9$; это нас устраивает. Если $n = 5$, то из уравнения $4x + 13n = 75$ находим, что $x = 2{,}5$; это нас не устраивает.

Итак, $x = 9$ при $n = 3$, т. е. при $y = 6$. Таким образом, уравнение имеет единственное решение (в натуральных числах): $x = 9$, $y = 6$.

Ответ: куплено 9 тетрадей в линейку и 6 тетрадей в клетку.

Теперь поговорим о решении неравенств вида $p(x; y) > 0$ ($p(x; y) < 0$), где $p(x; y)$ — алгебраическое выражение. **Решением неравенства $p(x; y) > 0$** называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому неравенству, т. е. обращает неравенство с переменными $p(x; y) > 0$ в верное числовое неравенство. Например, пара (2; 1) является решением неравенства $2x + 3y > 0$, поскольку $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство, тогда как пара $(0; -1)$ не является решением этого неравенства.

Чтобы найти все решения неравенства с двумя переменными, чаще всего опираются на график уравнения $p(x; y) = 0$. Как рассуждают дальше, покажем на примерах.

Пример 4. Решить неравенство $2x + 3y > 0$.

Р е ш е н и е. Графиком уравнения $2x + 3y = 0$ является прямая, проходящая через начало координат (0; 0) и, например, точку $(3; -2)$

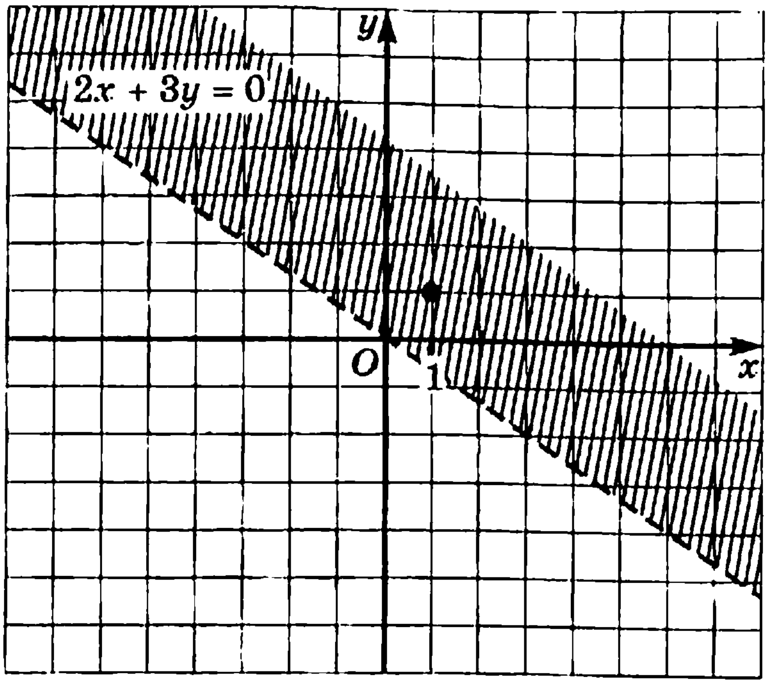


Рис. 107

(координаты обеих точек удовлетворяют уравнению $2x + 3y = 0$). Эта прямая изображена на рисунке 107. Все решения заданного неравенства геометрически изображаются точками полуплоскости, расположенной либо выше, либо ниже построенной прямой. Чтобы правильно выбрать нужную полуплоскость, возьмем любую точку одной из них и подставим координаты такой контрольной точки в заданное неравенство. Если получится верное числовое неравенство, то полуплоскость выбрана верно, если нет, то неверно.

Возьмем в качестве контрольной точку (1; 1) из верхней полуплоскости и подставим ее координаты в заданное неравенство. Получим $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство.

Итак, геометрической моделью решений заданного неравенства является полуплоскость, расположенная выше прямой $2x + 3y = 0$ (см. рис. 107).

Пример 5. Решить неравенство $xy < 2$.

Решение. Если $x = 0$, то неравенство принимает вид $0 < 2$, это верное неравенство, значит, все точки оси y (прямая $x = 0$) принадлежат множеству решений неравенства. Если $x > 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y < \frac{2}{x}$. Значит, в правой полуплоскости (при $x > 0$) следует взять точки, лежащие ниже правой ветви гиперболы $y = \frac{2}{x}$. Если $x < 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y > \frac{2}{x}$. Значит, в левой полуплоскости (при $x < 0$) следует взять точки, лежащие выше левой ветви

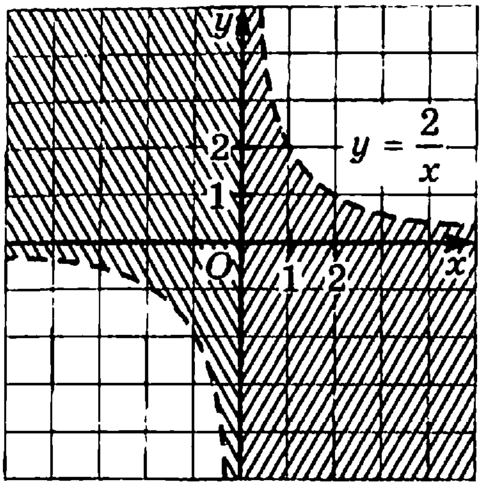


Рис. 108

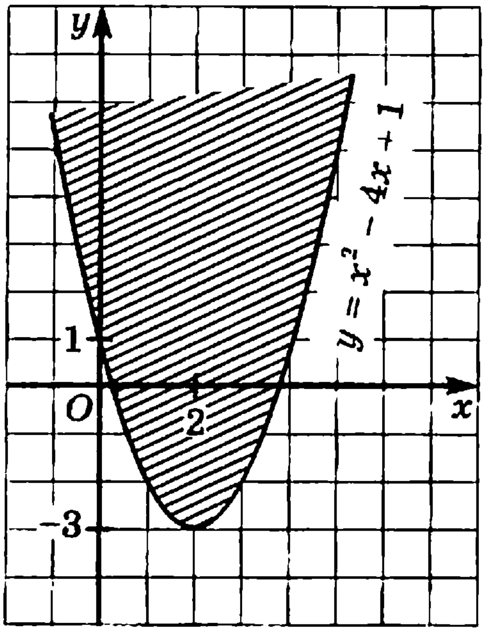


Рис. 109

гиперболы. Множество решений неравенства $xy < 2$ изображено на рисунке 108.

Выше мы говорили о решении неравенств с двумя переменными. Развивая эту линию, можно рассматривать и системы неравенств с двумя переменными. *Решить систему неравенств с двумя переменными* — это значит (с геометрической точки зрения) найти множество всех таких точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют *одновременно всем* неравенствам системы, т. е. речь идет о *пересечении* решений неравенств системы.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x + 1, \\ y \leqslant x - 3. \end{cases}$$

Решение. Надо найти пересечение множества решений неравенства $y \geqslant x^2 - 4x + 1$ (рис. 109) и неравенства $y \leqslant x - 3$ (рис. 110). Искомое множество решений изображено на рисунке 111 — *параболический сегмент.*

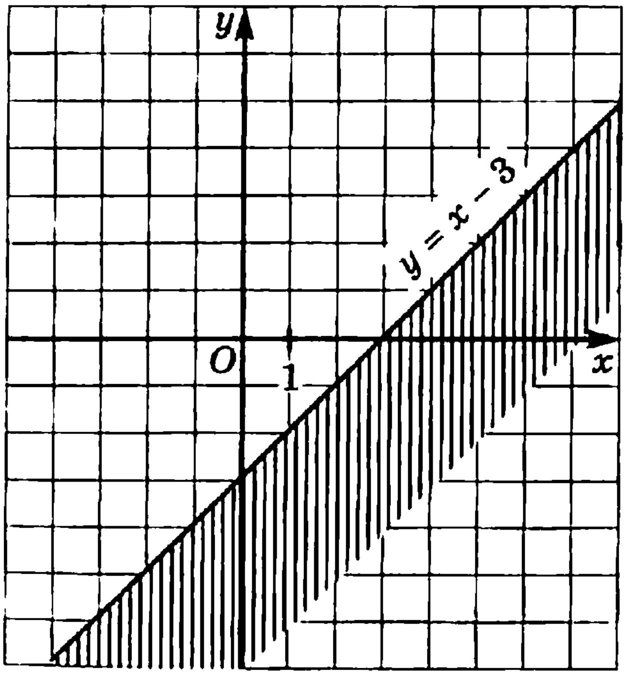


Рис. 110

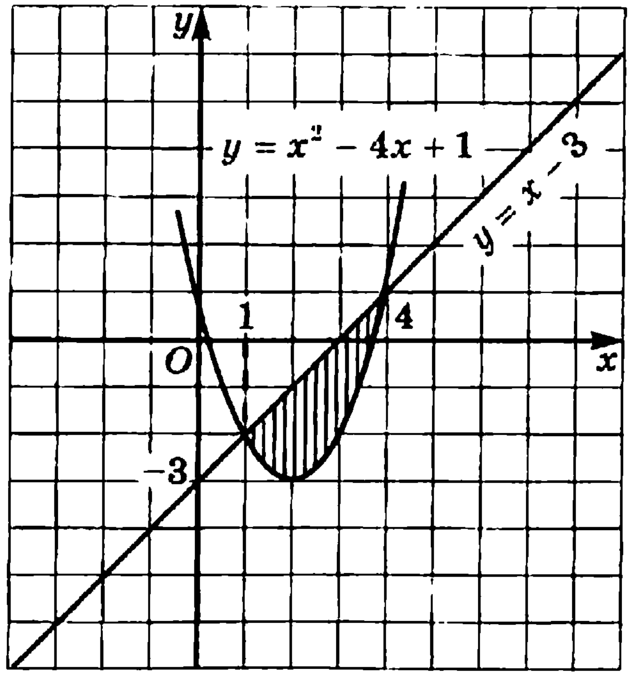


Рис. 111

Упражнения

Постройте график уравнения:

26.1. а) $x^2 = 1$; в) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $y^2 = 9$; г) $y^2 - 6y + 8 = 0$.

26.2. а) $x = y$; в) $x + y = 2$;

б) $3x - 4y = 12$; г) $2y - x - 4 = 0$.

○26.3. а) $x^2 - 3xy = 0$; в) $xy - 2y^2 = 0$;

б) $(x - 1)(y + 5) = 0$; г) $xy - 5x + y = 5$.

○26.4. а) $x^2 - y^2 = 0$; в) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$;

б) $x^2 + 7xy - 18y^2 = 0$; г) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.

○26.5. а) $\dfrac{x}{y} = 1$; в) $\dfrac{x - y}{x + y - 2} = 0$;

б) $\dfrac{2x + 3y - 5}{x + y} = 0$; г) $\dfrac{2x^2 - 4x - 2xy + 3y - 5}{x - y} = 2x$.

●26.6. а) $|x| + |y| = x + y$; в) $|x| + |y| = x - y$;

б) $|x| + |y| = y - x$; г) $|x| + |y| = -x - y$.

○26.7. а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; в) $y = -\sqrt{4 - x^2}$;

б) $|y| = \sqrt{4 - x^2}$; г) $x = \sqrt{4 - y^2}$.

○26.8. а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; в) $y + 2 = -\sqrt{1 - x^2}$;

б) $|y| = -\sqrt{1 - (x - 1)^2}$; г) $|y| = -\sqrt{1 - x^2} + 3$.

●26.9. а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

б) $(x - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$;

в) $(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

г) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 2)^2 = 16$.

●26.10. Постройте график уравнения и вычислите площадь фигуры, которая ограничена этим графиком:

а) $2|x| + 3|y| = 6$; б) $0{,}5|x| + \dfrac{1}{3}|y| = 2$.

Решите уравнение в целых числах:

○26.11. а) $x + 2y = 7$; б) $5x + y = 17$.

○26.12. а) $7x + 2y = 1$; б) $7x - 12y = 1$.

●26.13. а) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 2$; б) $x^2 + 2xy - 8y^2 = 7$.

Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

26.14. а) $x \leqslant 5$; б) $x > -4$; в) $y \geqslant -3$; г) $y < 2$.

26.15. а) $x + 2y \leqslant 3$; в) $3x + 2y \geqslant -5$;
б) $x - y > -4$; г) $x - 3y < 4$.

○26.16. Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} x + y \geqslant 3, \\ 2x - 3y \leqslant 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y \geqslant 3, \\ x + 3y \leqslant -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y \geqslant 1, \\ x + y \leqslant 1, \\ x \leqslant 2y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y \geqslant 2x, \\ x + y \leqslant 3y, \\ 5x \leqslant 2y - 7. \end{cases}$

Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

●26.17. а) $2|x - 3| + 2x - 3y \leqslant 0$; б) $x - 3 + |y + 2| \geqslant 2x + 5$.

●26.18. а) $|x + y| + 2x - y \geqslant 3$; б) $\frac{|x + y|}{x + y} x + |x + y| + y \leqslant 4$.

●26.19. а) $\sqrt{3x - y - 1} < \sqrt{2x + y - 1}$;

б) $\sqrt{1 - y} \leqslant \sqrt{1 - 2x^2}$;

в) $\sqrt{x + y - 1} > \sqrt{2x - y}$;

г) $\sqrt{y^2 - 1} \geqslant \sqrt{2x - 1}$.

○26.20. а) $xy \leqslant 2$; б) $y < \frac{2}{|x|}$; в) $|x| \cdot y < 2$; г) $|x| < \frac{2}{y}$.

●26.21. а) $|x| + |y| \leqslant 4$; б) $2|x| + 3|y| \leqslant 6$.

●26.22. а) $\dfrac{4 - x^2}{2x + 3y - 6} \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^2 + y^2 - 4}{|x| + |y| - 2} \leqslant 0$.

○26.23. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств:

а) $\begin{cases} x \leqslant 9, \\ y \leqslant 0, \\ 2x + 5y \geqslant 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y \leqslant 12, \\ y - x \leqslant 12, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

●26.24. а) Случайным образом выбирают одно из решений системы неравенств $\begin{cases} |x - y| \leqslant 2, \\ |x + y| \leqslant 2. \end{cases}$

Найдите вероятность того, что выбранная точка расположена:

а) ниже прямой $y = 1$; в) правее прямой $x = 1$;
б) выше прямой $y = 0{,}5$; г) выше параболы $y = x^2$.

§ 27. Системы уравнений

В курсе алгебры 7—9-го классов вы неоднократно встречались с системами двух рациональных уравнений с двумя переменными. Для их решения мы использовали метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод. В этом параграфе мы несколько расширим представления о решении систем уравнений.

Определение 1. Если поставлена задача — найти такие пары значений $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x; y) = 0$ и уравнению $q(x; y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют **систему уравнений**

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Пару значений $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого и второго уравнения системы, называют *решением системы уравнений*. Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Можно говорить и о системе из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} p(x;\ y;\ z) = 0, \\ q(x;\ y;\ z) = 0, \\ r(x;\ y;\ z) = 0. \end{cases}$$

В этом случае речь идет об отыскании троек чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы. Вообще можно говорить о системе, содержащей любое число уравнений с любым числом переменных.

Вы знаете, что основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. Если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка найденных корней, поскольку среди них могут оказаться посторонние для заданного уравнения. Так же обстоит дело и при решении систем уравнений.

Определение 2. Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые вы изучили ранее, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы мы применяли неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы, или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}, \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}. \end{cases}$

Решение. Перемножив уравнения системы, получим:

$$(xy - 6)(xy + 24) = \frac{y^3}{x} \cdot \frac{x^3}{y};$$

$$(xy - 6)(xy + 24) = x^2y^2.$$

Введем новую переменную $z = xy$. Получим $(z - 6)(z + 24) = z^2$; решив это уравнение, находим $z = 8$, т. е. $xy = 8$.

Итак, перемножив оба уравнения системы, мы получили довольно простую зависимость между переменными — $xy = 8$. Это уравнение рассмотрим совместно с одним из уравнений исходной системы, например с первым:

$$\begin{cases} xy = 8, \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$$

Теперь можно воспользоваться методом подстановки. Выразим из второго уравнения x через y и подставим полученное выражение вместо x в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} 8 - 6 = y^3 : \left(\dfrac{8}{y}\right), \\ x = \dfrac{8}{y}. \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение принимает вид $y^4 = 16$, откуда получаем: $y_1 = 2$, $y_2 = -2$. Используя соотношение $x = \dfrac{8}{y}$, находим соответственно: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Итак, получили два решения: (4; 2), (−4; −2). Но поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» (с точки зрения равносильности) метод умножения уравнений системы, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему.

Подставив $x = 4$, $y = 2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8 - 6 = \dfrac{2^3}{4}, \\ 8 + 24 = \dfrac{4^3}{2}; \end{cases}$$

это два верных числовых равенства.

Подставив $x = -4$, $y = -2$ в уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 8 - 6 = \dfrac{(-2)^3}{-4}, \\ 8 + 24 = \dfrac{(-4)^3}{-2}; \end{cases}$$

это тоже два верных числовых равенства.

Значит, обе найденные пары удовлетворяют заданной системе уравнений.

Ответ: (4; 2), (−4; −2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2,\\ 4y^2-1=3y(x-1).\end{cases}$$

Решение. Введем новую переменную $z=\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}$. Тогда первое уравнение системы примет вид $z+\dfrac{1}{z}=2$. Решим это уравнение:

$$z^2+1=2z;\;\; z^2-2z+1=0;\;\; (z-1)^2=0;\;\; z=1.$$

Возвращаясь к переменным x, y, получаем уравнение

$$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}=1.$$

Поработаем с этим уравнением:

$$\frac{3x-2y}{2x}=1^2;\quad 3x-2y=2x;\quad x=2y.$$

Итак, первое уравнение системы нам удалось заменить более простым уравнением: $x=2y$. Рассмотрев его совместно со вторым уравнением заданной системы, получим более простую систему уравнений:

$$\begin{cases}x=2y,\\ 4y^2-1=3y(x-1).\end{cases}$$

Здесь «напрашивается» метод подстановки, поскольку уже имеется готовое выражение переменной x через переменную y. Подставив $2y$ вместо x во второе уравнение системы, получим:

$$4y^2-1=3y(2y-1);$$
$$4y^2-1=6y^2-3y;$$
$$2y^2-3y+1=0;$$
$$y_1=1,\quad y_2=\frac{1}{2}.$$

Поскольку $x=2y$, то получаем соответственно: $x_1=2$, $x_2=1$.

Итак, получили два решения: (2; 1), $\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Но, поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» (с точки зрения равносильности) метод — возведение в квадрат обеих частей одного из уравнений, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему. Эта проверка показывает, что посторонних решений нет.

Ответ: (2; 1), $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 3. Составить уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки (1; 1), (2; 2) и (−1; 11).

Решение. Речь идет о нахождении коэффициентов a, b, c.

По условию парабола проходит через точку (1; 1). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 1$, $y = 1$, получим:

$$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c;$$
$$a + b + c = 1.$$

По условию парабола проходит через точку (2; 2). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 2$, $y = 2$, получим:

$$2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c;$$
$$4a + 2b + c = 2.$$

По условию парабола проходит через точку (−1; 11). Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = -1$, $y = 11$, получим:

$$11 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c;$$
$$a - b + c = 11.$$

В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя переменными a, b, c:

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ 4a + 2b + c = 2, \\ a - b + c = 11. \end{cases}$$

Выразим c из первого уравнения: $c = 1 - a - b$. Подставим полученное выражение вместо c во второе и третье уравнения системы:

$$4a + 2b + (1 - a - b) = 2;$$
$$3a + b = 1;$$

и соответственно

$$a - b + (1 - a - b) = 11;$$
$$-2b = 10;$$
$$b = -5.$$

Фактически мы получили более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} b = -5, \\ 3a + b = 1, \\ c = 1 - a - b. \end{cases}$$

Подставив значение $b = -5$ во второе уравнение, получим $a = 2$. Подставив найденные значения $a = 2$, $b = -5$ в третье уравнение, получим $c = 4$. Остается подставить найденные значения $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$ в уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Ответ: $y = 2x^2 - 5x + 4$.

Пример 4. Три трактора вспахивают поле. Чтобы вспахать все поле, первому трактору требуется времени на 1 ч больше, чем второму, и на 2 ч меньше, чем третьему. Первый и третий тракторы при совместной работе вспашут все поле за 2 ч 24 мин. Сколько времени уйдет на вспашку поля при совместной работе трех тракторов?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Напомним, что если речь идет о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане, т. е. не сказано, сколько деталей надо сделать, сколько гектаров земли вспахать и т. д., то объем работы считают равным 1, а части работы выражают в долях единицы.

Пусть x ч — время, необходимое первому трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

y ч — время, необходимое второму трактору, чтобы вспахать поле в одиночку;

z ч — время, необходимое третьему трактору, чтобы вспахать поле в одиночку.

Тогда согласно условиям задачи $x - y = 1$, $z - x = 2$.

Если все поле (т. е. 1) первый трактор может вспахать за x ч, то за 1 ч он вспашет часть поля, выражаемую дробью $\frac{1}{x}$:

$\frac{1}{x}$ — часть поля, которую вспашет первый трактор за 1 ч.

Аналогично,

$\frac{1}{y}$ — часть поля, которую вспашет второй трактор за 1 ч;

$\frac{1}{z}$ — часть поля, которую вспашет третий трактор за 1 ч.

По условию, работая вместе, первый и третий тракторы могут вспахать все поле за 2 ч 24 мин, т. е. за $\frac{12}{5}$ ч. Это значит, что

$\frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 1$, т. е. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}$.

В итоге получаем систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ z - x = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим z через x из второго уравнения системы $z = x + 2$. Подставим выражение $x + 2$ вместо z в третье уравнение системы $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$. Решая это рациональное уравнение, последовательно получаем:

$$\frac{1^{\backslash 12(x+2)}}{x} + \frac{1}{x+2}^{\backslash 12x} = \frac{5^{\backslash x(x+2)}}{12};$$

$$12x + 24 + 12x = 5x^2 + 10x;$$

$$5x^2 - 14x - 24 = 0;$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -\frac{6}{5}.$$

Оба найденных значения принадлежат ОДЗ рационального уравнения $x + 2 \neq 0$, $x \neq 0$, — т. е. являются корнями рационального уравнения.

Осталось найти соответствующие значения y и z. Для этого воспользуемся уравнениями $x - y = 1$ и $z - x = 2$.

Если $x = 4$, то из этих уравнений находим: $y = 3$, $z = 6$; если $x = -\frac{6}{5}$, то из тех же уравнений находим: $y = -\frac{11}{5}$, $z = \frac{4}{5}$.

Итак, составленная система уравнений имеет два решения: $(4; 3; 6)$ и $\left(-\frac{6}{5}; -\frac{11}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Во-первых, по смыслу задачи отрицательные значения переменных нас не устраивают, следовательно, оставляем только одну тройку значений $(4; 3; 6)$.

Во-вторых, нас спрашивают, сколько времени уйдет на вспашку поля при совместной работе трех тракторов? Будем рассуждать так.

За 1 ч первый трактор вспашет $\frac{1}{4}$ часть поля, второй — $\frac{1}{3}$, третий — $\frac{1}{6}$. Значит, при совместной работе они вспашут за 1 ч часть поля, выражаемую суммой трех дробей, т. е. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, а за t ч, соответственно, $t\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$, т. е. $\frac{3t}{4}$. Если они вспашут все поле, то $\frac{3t}{4} = 1$, откуда $t = \frac{4}{3}$.

Осталось лишь уточнить, что $\frac{4}{3}$ ч = 1 ч 20 мин.

Ответ: 1 ч 20 мин.

Упражнения

Решите систему уравнений методом подстановки:

О27.1. а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + 2y^2 - xy + 2x - 3y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{7 - 6x - y^2} = y + 5, \\ y = x - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x^2 + 3xy - 3y^2 = 6. \end{cases}$

О27.2. а) $\begin{cases} 3x = y + 1, \\ 7^{y-2x+2} = 7^{y-4x+1} + 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 2y, \\ \log_{\frac{1}{3}} (2y + x) + \log_{\frac{1}{3}} (x - y + 1) = \log_3 \frac{1}{y + 1}. \end{cases}$

Решите систему уравнений методом алгебраического сложения:

О27.3. а) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ x - y = -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y^2 = 2, \\ 2y^2 + x^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1, \\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ 3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[4]{y} = 1. \end{cases}$

О27.4. а) $\begin{cases} \log_2 x - \log_3 y = -5, \\ 2\log_2 x + 3\log_3 y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2^{x+2y} - \sqrt{2x + y} = 6, \\ 3\sqrt{2x + y} - 2^{x+2y} = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos x + \cos 2y = -0{,}5, \\ 3\cos 2y - \cos x = 2{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sin 2x + \operatorname{tg} 3y = 2, \\ 6\sin 2x - 2\operatorname{tg} 3y = 1. \end{cases}$

Решите систему уравнений методом введения новых переменных:

О27.5. а) $\begin{cases} \dfrac{5}{3x - y} + \dfrac{3}{x - 3y} = -2, \\ \dfrac{15}{3x - y} + \dfrac{2}{x - 3y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x + y} + \dfrac{6}{x - y} = -1, \\ \dfrac{5}{x + y} + \dfrac{9}{x - y} = -2. \end{cases}$

О27.6. а) $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ \log_6^2 xy + 1 = 2\log_6 xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 10 - 3\sqrt[4]{xy}, \\ 2x - 5y = 6. \end{cases}$

●27.7. а) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x + y} = \log_2 16x^2, \\ \log_2 x^2 + 2\sqrt[3]{x + y} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{x-y} - 7|2y - x| = 2, \\ |2y - x| - 3^{x-y-1} = -2. \end{cases}$

О27.8. Применяя графический метод, определите, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \cos x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0{,}1x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y + 2 = \sqrt{x + 4}, \\ y + x^3 = 0. \end{cases}$

Решите графически систему уравнений:

○27.9. а) $\begin{cases} y + x = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x(x - 4), \\ y + 8 = 2x. \end{cases}$

●27.10. а) $\begin{cases} y \cdot 2^{x+1} = 1, \\ \sqrt[3]{x + 2} = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 2^{x-1}, \\ |x - 3| = y + 1. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

○27.11. а) $\begin{cases} y + 2x = 3, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{y}{9} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, \\ y = \log_2 x. \end{cases}$

○27.12. а) $\begin{cases} 2\sin(x + y) - 3\cos(x - y) = 5, \\ 7\cos(x - y) + 5\sin(x + y) = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$

○27.13. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y - x}{2x}} - \sqrt{\dfrac{x}{x + y}} = \dfrac{1}{2}, \\ 16\sqrt{\dfrac{x}{x + y}} - 7\sqrt{\dfrac{y - x}{2x}} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{y+x} - 3^{x-y} = 1, \\ 2^{x+y} + 3^{x-y} = 3. \end{cases}$

○27.14. а) $\begin{cases} \sqrt{x + 1} - y = 2, \\ \log_7(4 - x) = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + x = 1, \\ 2^{x-y} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{2}. \end{cases}$

○27.15. а) $\begin{cases} (2x + y)(x + 3y) = 48, \\ \dfrac{2x + y}{x + 3y} = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x - 3}{y + 2} = 4, \\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 17. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

○27.16. а) $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x+3y}=4, \\ 2x-y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x+2y=10, \\ \sqrt{2x+y}+\sqrt{6x-3y}=2. \end{cases}$

○27.17. а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ xy=216; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1, \\ \sqrt{xy}=4. \end{cases}$

○27.18. а) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3y}{y+5}}+2=3\sqrt{\dfrac{y+5}{x+3y}}, \\ xy+2x=13-4y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+4x-y^2-3y=0, \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=4. \end{cases}$

○27.19. а) $\begin{cases} 2^x\cdot 0{,}25^{-y}=512, \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9^x\cdot 3^{y-3}=729, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1. \end{cases}$

○27.20. а) $\begin{cases} \log_{13}(x^2+y^2)=0{,}5\log_\pi \pi^2, \\ \log_3 x-1=\log_3 2-\log_3 y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_7(x+y)=4\log_7(x-y), \\ \log_7(x+y)=5\log_7 3-\log_7(x-y). \end{cases}$

○27.21. а) $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x+\cos y=0{,}5, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=1{,}75. \end{cases}$

●27.22. Решите систему трех уравнений с тремя переменными:

а) $\begin{cases} x+2y-3z=-3, \\ 2x-3y+z=8, \\ -x+y-5z=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-5y+z=-13, \\ x+3y-2z=5, \\ 2x-2y+5z=-6. \end{cases}$

●27.23. Решите систему трех уравнений с тремя переменными:

а) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - z = 2, \\ xy + xz + yz = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + 2y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5. \end{cases}$

●27.24. Составьте уравнение параболы $y = ax^3 + bx + c$, если известно, что она проходит через точки M, P, Q:

а) $M(1; -2)$, $P(-1; 8)$, $Q(2; -1)$;

б) $M(-1; 6)$, $P(2; 9)$, $Q(1; 2)$.

●27.25. Сумма цифр задуманного трехзначного числа равна 8, а сумма квадратов его цифр равна 26. Если к задуманному числу прибавить 198, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите задуманное число.

●27.26. Три числа в заданном порядке образуют конечную геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 6, то получится конечная арифметическая прогрессия. Если после этого третье число увеличить на 48, то снова получится геометрическая прогрессия. Найдите три исходных числа.

●27.27. Три бригады, работая вместе, выполняют норму по изготовлению подшипников за некоторое время. Если бы первые две бригады работали в 2 раза медленнее, а третья бригада — в 4 раза быстрее, чем обычно, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют норму в 2 раза быстрее, чем вторая бригада совместно с третьей. Во сколько раз первая бригада производит подшипников за 1 ч больше, чем третья?

§ 28. Уравнения и неравенства с параметрами

Если уравнение $f(x; a) = 0$ надо решить относительно переменной x, а буквой a обозначено произвольное действительное число, то $f(x; a) = 0$ называют **уравнением с параметром** a. Основная трудность, связанная с решением уравнений (и тем более неравенств) с параметром, состоит в следующем. При одних значениях параметра уравнение не имеет корней, при других — имеет бесконечно много корней, при третьих — оно решается по одним формулам, при четвертых — по другим. Как все это учесть? Сразу скажем, что решению уравнений и неравенств с параметрами посвящена масса учебно-методической литературы. Наша задача весьма скромна: завершая изучение курса алгебры в школе, дать вам некоторые представления о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами. Для этого рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Решить относительно x:

а) уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$;

б) неравенство $2a(a - 2)x > a - 2$.

Решение. а) Корень уравнения вида $bx = c$ мы находим без труда: $x = \frac{c}{b}$, поскольку в конкретном уравнении коэффициент b обычно отличен от нуля. В заданном уравнении коэффициент при x равен $2a(a - 2)$. Значение параметра a нам неизвестно, и в принципе оно может быть любым. Поэтому следует подстраховаться, т. е. сначала предусмотреть возможность обращения указанного коэффициента в нуль.

Рассмотрим следующие случаи:

$$1)\ a = 0;\quad 2)\ a = 2;\quad 3)\ a \neq 0,\ a \neq 2.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$; это уравнение не имеет корней.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$; этому уравнению удовлетворяют любые значения переменной x.

В третьем случае (при $a \neq 0$, $a \neq 2$) коэффициент при x отличен от нуля и, следовательно, на этот коэффициент можно разделить обе части уравнения. Получим $x = \frac{a-2}{2a(a-2)}$, т. е. $x = \frac{1}{2a}$.

б) Решая неравенство, нужно учитывать знак коэффициента при x. Поэтому для решения заданного неравенства нужно рассмотреть не три случая, как это было в пункте а), а пять:

$$1)\ a = 0;\quad 2)\ a = 2;\quad 3)\ a < 0;\quad 4)\ 0 < a < 2;\quad 5)\ a > 2.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > -2$; этому неравенству удовлетворяют любые значения переменной x.

Во втором случае (при $a = 2$) заданное неравенство принимает вид $0 \cdot x > 0$; это неравенство не имеет решений.

В третьем случае (при $a < 0$) коэффициент $2a(a - 2)$ положителен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует оставить таким, каким он был:

$$x > \frac{a - 2}{2a(a - 2)},\quad \text{т. е. } x > \frac{1}{2a}.$$

Сразу заметим, что так же будет обстоять дело и в пятом случае (при $a > 2$). В этом случае, как и в третьем, коэффициент $2a(a - 2)$ положителен и, решая заданное неравенство, получим $x > \frac{1}{2a}$.

Осталось рассмотреть четвертый случай, когда $0 < a < 2$. В этом случае коэффициент $2a(a - 2)$ отрицателен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, знак неравенства следует изменить на противоположный:

$$x < \frac{a-2}{2a(a-2)},\quad \text{т. е. } x < \frac{1}{2a}.$$

Ответ: а) Если $a = 0$, то корней нет; если $a = 2$, то x — любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$. б) Если $a = 2$, то решений нет; если $a = 0$, то x — любое действительное число; если $a < 0$ или $a > 2$, то $x > \frac{1}{2a}$; если $0 < a < 2$, то $x < \frac{1}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Р е ш е н и е. По виду это уравнение представляется квадратным. Но (внимание!) значение параметра a нам неизвестно, и оно вполне может оказаться равным 1; в этом случае коэффициент при x^2 обращается в нуль, и уравнение не будет квадратным, оно будет линейным. Квадратные и линейные уравнения решаются по различным алгоритмам.

Итак, нам следует рассмотреть два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

В первом случае (при $a = 1$) уравнение принимает следующий вид: $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т. е. $6x + 7 = 0$. Решив это линейное уравнение, получим $x = -\frac{7}{6}$.

Во втором случае (при $a \neq 1$) мы имеем квадратное уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Найдем его дискриминант:

$$D = (2(2a + 1))^2 - 4(a - 1)(4a + 3) = 4(4a^2 + 4a + 1) -$$
$$- 4(4a^2 - a - 3) = 20a + 16 = 4(5a + 4).$$

Итак, $D = 4(5a + 4)$.

Дальнейшие рассуждения зависят от знака дискриминанта. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два корня. Дискриминант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$, положителен при $a > -\frac{4}{5}$, отрицателен при $a < -\frac{4}{5}$. Именно эти три случая нам и предстоит теперь рассмотреть.

Начнем со случая, когда $a < -\frac{4}{5}$. В этом случае $D < 0$, и следовательно, квадратное уравнение не имеет корней.

Пусть теперь $a > -\frac{4}{5}$ (но, напомним, $a \neq 1$). В этом случае $D > 0$, и следовательно, квадратное уравнение имеет два корня, которые мы найдем по известной формуле корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-2(2a + 1) \pm \sqrt{4(5a + 4)}}{2(a - 1)}.$$

Полученное выражение можно упростить, если вынести из-под знака квадратного корня множитель 2 и сократить дробь на 2. Получим

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $a = -\frac{4}{5}$. Используя написанную формулу для корней квадратного уравнения, получаем

$$x_1 = x_2 = \frac{-\left(2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 1\right) \pm \sqrt{0}}{-\frac{4}{5} - 1} = \frac{-\left(-\frac{8}{5} + 1\right)}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет; если $a > -\frac{4}{5}$ (но $a \neq 1$), то $x_{1,2} = \dfrac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-a} = 2a - x$.

Решение. Сначала будем действовать по стандартной схеме — возведем обе части заданного иррационального уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$$\left(\sqrt{x-a}\right)^2 = (2a-x)^2;$$
$$x - a = 4a^2 - 4ax + x^2;$$
$$x^2 - (4a+1)x + 4a^2 + a = 0.$$

Найдем дискриминант: $D = (4a+1)^2 - 4(4a^2 + a) = 4a + 1$. Если $D < 0$, т. е. $a < -\frac{1}{4}$, то корней нет. Если $D = 0$, т. е. $a = -\frac{1}{4}$, квадратное уравнение принимает вид $x^2 = 0$, т. е. $x = 0$. Но при $x = 0$, $a = -\frac{1}{4}$ исходное уравнение обращается в неверное равенство $\sqrt{0 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} - 0$. Значит, и в этом случае данное уравнение не имеет корней. Если $D > 0$, т. е. $a > -\frac{1}{4}$, то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{4a + 1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Теперь надо выполнить проверку. Можно попытаться подставить поочередно каждый из найденных корней в исходное уравнение. Эта проверка, как нетрудно догадаться, будет весьма и весьма сложной.

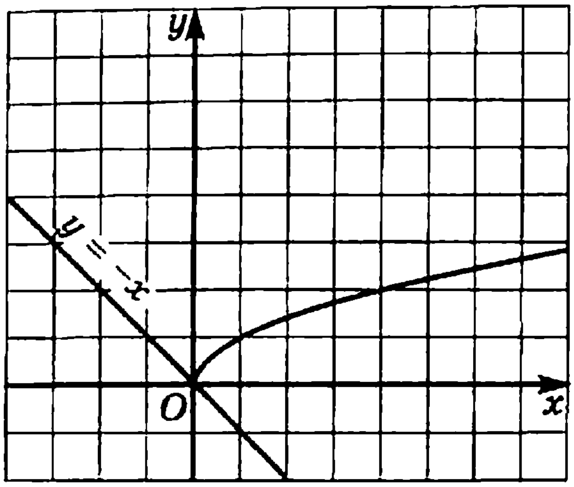


Рис. 112

Выберем другой способ — графический: построим графики функций $y = \sqrt{x-a}$ и $y = 2a - x$ и найдем точки их пересечения. При этом целесообразно рассмотреть три случая:

$$a = 0, \ \ a < 0, \ \ a > 0.$$

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x} = -x$. Построив графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ (рис. 112), убеждаемся, что они имеют одну общую точку (0; 0), а потому уравнение имеет только один корень $x = 0$.

Во втором случае (при $a < 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x-a}$ не пересекаются (рис. 113); значит, заданное уравнение не имеет корней.

В третьем случае (при $a > 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x-a}$ пересекаются в одной точке (рис. 114); значит, заданное уравнение имеет один корень. Следовательно, из двух полученных выше корней один является посторонним. Какой? Ответ можно почерпнуть из графической иллюстрации, представленной на рисунке 114. Абсцисса точки пересечения графиков меньше, чем $2a$ ($2a$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2a - x$ с осью x). Из двух найденных корней: $x_1 = \dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{4a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$ — второй больше, чем $2a$; чтобы в этом убедиться, достаточно переписать второй корень так: $x_2 = 2a + \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Значит, x_2 — посторонний корень.

Итак, если $a > 0$, то заданное уравнение имеет один корень

$$x = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

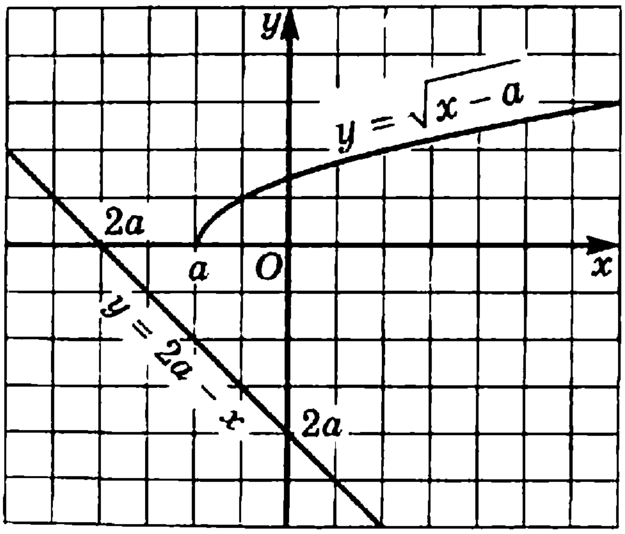


Рис. 113

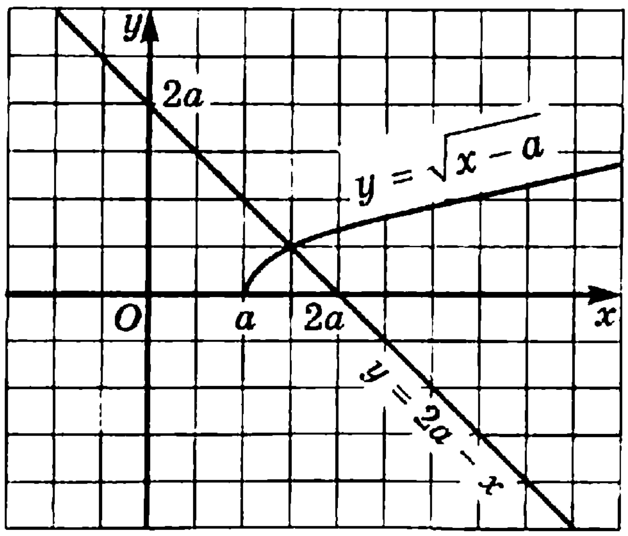


Рис. 114

Ответ: если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x = \dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

З а м е ч а н и е. В только что решенном примере ответ можно записать компактнее. Дело в том, что записанная при $a > 0$ формула корня уравнения пригодна и для случая $a = 0$; в самом деле, если $a = 0$, то по указанной формуле получаем $x = 0$. Поэтому ответ можно было записать так: если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то $x = \dfrac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

Пример 4. При каких значениях параметра a корни уравнения $2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ меньше 1?

Р е ш е н и е. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $-2x - 2 = 0$; корень этого уравнения $x = -1$ удовлетворяет заданному условию, он меньше 1.

Если $a \neq 0$, то заданное уравнение является квадратным. Графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2ax^2 - 2x - 3a - 2$, является парабола с ветвями вверх, если $2a > 0$, и ветвями вниз, если $2a < 0$. Поскольку корни уравнения по условию должны быть меньше 1, упомянутая выше парабола должна располагаться в координатной плоскости так, как изображено на рисунке 115 (для случая $2a > 0$) или на рисунке 116 (для случая $2a < 0$).

Дадим аналитическое описание геометрической модели, представленной на рисунке 115. Во-первых, напомним, при $2a > 0$ ветви параболы направлены вверх. Во-вторых, парабола обязательно пересекается с осью абсцисс (в крайнем случае касается ее), иначе у квадратного уравнения не будет корней. Корни есть, значит, дискриминант D неотрицателен, т. е. $D \geqslant 0$. В-третьих, в точке $x = 1$ имеем $f(1) > 0$. В-четвертых, $f'(1) > 0$, поскольку касательная к параболе в точке $x = 1$ составляет с осью абсцисс острый угол.

Итак, получаем систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рисунке 115:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) > 0, \\ f'(1) > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

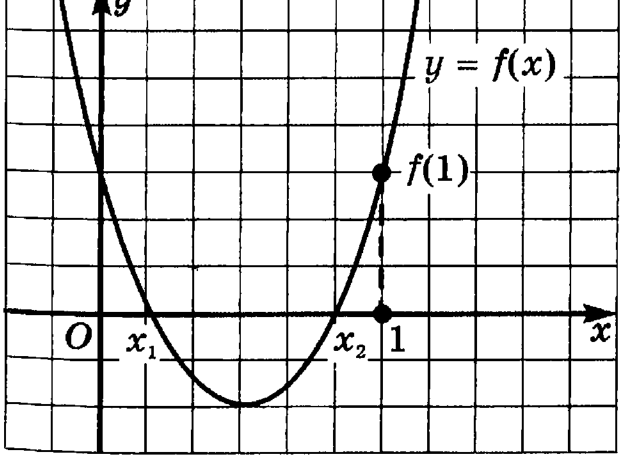


Рис. 115

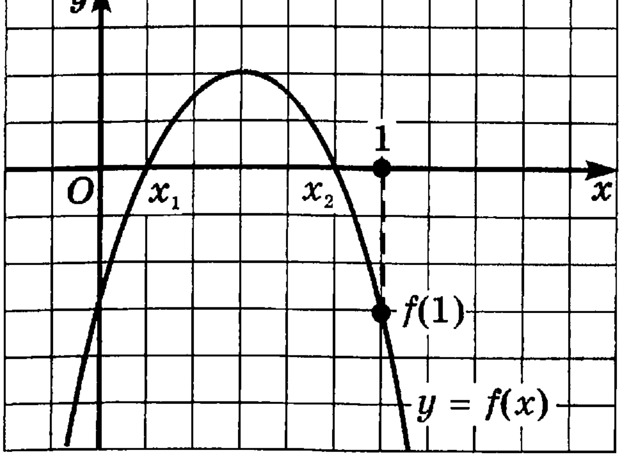


Рис. 116

Аналогичные рассуждения позволяют составить вторую систему неравенств — аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рисунке 116:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) < 0, \\ f'(1) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решим систему неравенств (1). Составим выражение для дискриминанта D квадратного трехчлена $2ax^2 - 2x - 3a - 2$:

$$D = 4 - 4 \cdot 2a \cdot (-3a - 2) = 24a^2 + 16a + 4.$$

Составим выражение для $f(1)$: $f(1) = 2a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3a - 2 = -a - 4$.

Составим выражение для $f'(1)$: $f'(x) = (2ax^2 - 2x - 3a - 2)' = 2a \cdot 2x - 2 = 4ax - 2$; $f'(1) = 4a - 2$.

Таким образом, для системы (1) получаем:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geqslant 0, \\ -a - 4 > 0, \\ 4a - 2 > 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства этой системы следует, что $a > 0$, а из третьего следует, что $a < -4$. Значит, система не имеет решений.

Для системы (2) получаем:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geqslant 0, \\ -a - 4 < 0, \\ 4a - 2 < 0. \end{cases}$$

Сразу обратим внимание на то, что квадратный трехчлен $24a^2 + 16a + 4$ имеет отрицательный дискриминант ($D = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 24 < 0$) и положительный старший коэффициент. Значит, при всех значениях a выполняется неравенство $24a^2 + 16a + 4 > 0$, а потому квадратное неравенство в данной системе неравенств можно отбросить. Далее имеем

$$\begin{cases} a < 0, \\ a > -4, \\ a < 0{,}5. \end{cases}$$

Решение этой системы достаточно очевидно: $-4 < a < 0$. Итак, мы нашли все значения параметра a:

$$a = 0; \ \ -4 < a < 0.$$

Ответ: $-4 < a \leqslant 0$.

Упражнения

○28.1. При каких значениях параметра m уравнение $mx - x + 1 = m^2$:

а) имеет ровно один корень;

б) не имеет корней;

в) имеет более одного корня?

○28.2. При каких значениях параметра b уравнение $b^2x - x + 2 = b^2 + b$:

а) имеет ровно один корень;

б) не имеет корней;

в) имеет более одного корня?

Решите уравнение (относительно x):

○28.3. а) $a^2x - 4x + 2 = a$; б) $\frac{x}{a} + x - 1 = a$.

○28.4. а) $mx - x + 1 \geqslant m^2$; б) $b^2x - x + 1 > b$.

○28.5. а) $b^2x - bx \geqslant b^2 + b - 2$; б) $\frac{x}{a} + x \leqslant a + 1$.

○28.6. При каких значениях a уравнение $ax^2 + 4x - a + 5 = 0$:

а) имеет два различных корня;

б) имеет ровно один корень;

в) не имеет действительных корней?

○28.7. При каком значении a:

а) прямая $y = 6x + a$ касается графика функции $y = x^2$;

б) прямая $y = 4x$ имеет только одну общую точку с графиком функции $y = x^2 + a$?

○28.8. При каких значениях b графики функций имеют общие точки:

а) $y = x^2 - 4x + 2$ и $y = -2x + b$;

б) $y = x^2 + 6x + 7$ и $y = 2x + b$?

○28.9. При каких значениях a система уравнений имеет решения:

а) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1, \\ y = 3x + a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 3x^2 - 4x - 2, \\ y = -10x + a? \end{cases}$

○28.10. При каких значениях a неравенство $ax^2 + 4x - 3 + a > 0$:

а) выполняется при любых x;

б) не имеет решений?

○28.11. При каких значениях a:

а) ось симметрии параболы $y = 2x^2 - 3ax + 2$ пересекает ось абсцисс левее точки $(-3; 0)$;

б) ось симметрии параболы $y = 5x^2 - 2ax + 2$ пересекает ось абсцисс правее точки $(4; 0)$?

●28.12. Решите неравенство (относительно x):

а) $\sqrt{x-2}\,(x-a) \geqslant 0$; б) $(6-x)\sqrt{x-a} > 0$.

●**28.13.** Найдите наименьшее целочисленное значение параметра b, при котором уравнение имеет два корня:

а) $x^2 - 2bx + b^2 - 4b + 3 = 0$;

б) $x^2 + 2(b - 2)x + b^2 - 10b + 12 = 0$.

●**28.14.** При каких значениях a:

а) вершина параболы $y = (3a + 1)x^2 + 2x - 5$ лежит внутри четвертой координатной четверти;

б) вершина параболы $y = 3x^2 + (4a - 1)x + 3$ лежит внутри первой координатной четверти?

●**28.15.** При каких значениях $a > 0$:

а) уравнение $(\log_3 a)x^2 - (2\log_3 a - 1)x + \log_3 a - 2 = 0$ имеет единственный корень;

б) уравнение $(\log_4 a)x^2 + (2\log_4 a + 1)x + \log_4 a + 2 = 0$ не имеет корней?

●**28.16.** Найдите, при каких значениях параметра a уравнение не имеет корней:

а) $48 \cdot 4^x + 27 = a + a \cdot 4^{x+2}$; б) $9^x + 2a \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$.

●**28.17.** При каких значениях a:

а) уравнение $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + a - 1 = 0$ имеет единственный корень;

б) уравнение $0{,}01^x - 2(a + 1) \cdot 0{,}1^x + 4 = 0$ не имеет действительных корней?

●**28.18.** При каких значениях a уравнение имеет ровно три корня:

а) $x(x + 3)^2 + a = 0$; б) $x^3 - 12x + 1 = a$?

●**28.19.** При каких значениях a:

а) уравнение $x^4 - 8x^2 + 4 = a$ не имеет корней;

б) уравнение $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = a$ имеет не менее трех корней?

ГЛАВА 6

Круглые тела

§ 29. Цилиндр, конус

Пусть в пространстве заданы две параллельные плоскости — α и α'. F — круг в одной из этих плоскостей, например α (рис. 117).

Рассмотрим ортогональное проектирование на плоскость α'. Проекцией круга F будет круг F'.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их ортогональными проекциями, называется *прямым цилиндром*, или просто *цилиндром*.

Круги F и F' называются *основаниями* цилиндра.

Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой цилиндра*.

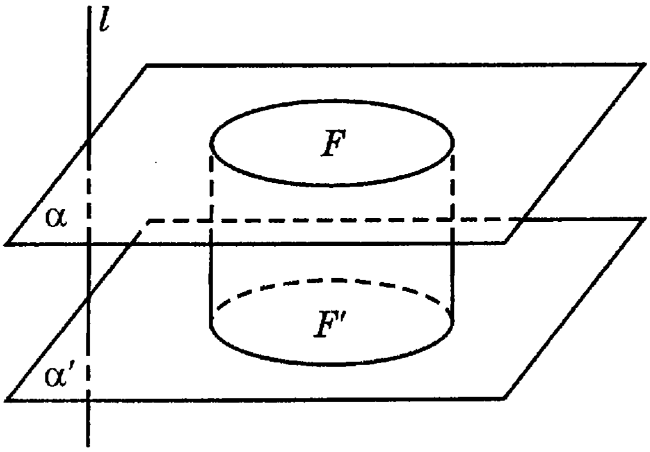


Рис. 117

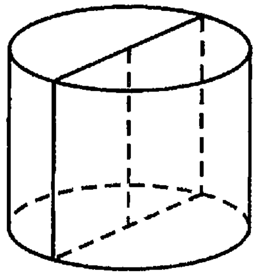


Рис. 118

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки окружности одного основания цилиндра с их ортогональными проекциями, называется *боковой поверхностью* цилиндра. Сами отрезки называются *образующими* цилиндра.

Прямая, проходящая через центры оснований цилиндра, называется *осью* этого цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением* (рис. 118).

В случае если вместо ортогонального взять параллельное проектирование в направлении наклонной к плоскости α', то фигура, образованная отрезками, соединяющими точки круга F с их параллельными проекциями, называется *наклонным цилиндром* (рис. 119).

Обычно цилиндр изображается в ортогональной проекции.

Пусть теперь в пространстве задана плоскость α и точка S, ей не принадлежащая. F — круг в плоскости α (рис. 120).

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку S с точками круга F, называется *конусом*.

Круг F называется *основанием* конуса, а точка S — вершиной конуса.

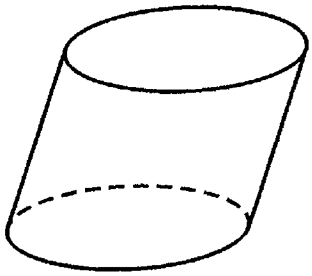


Рис. 119

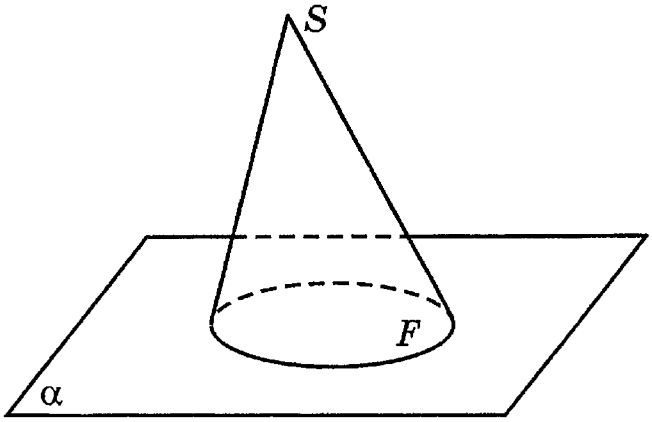


Рис. 120

Расстояние между вершиной конуса и плоскостью основания называется *высотой* конуса.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими вершину конуса с точками окружности его основания, называется *боковой поверхностью* конуса. Сами отрезки называются *образующими* конуса.

Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то его часть, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется *усеченным конусом* (рис. 121).

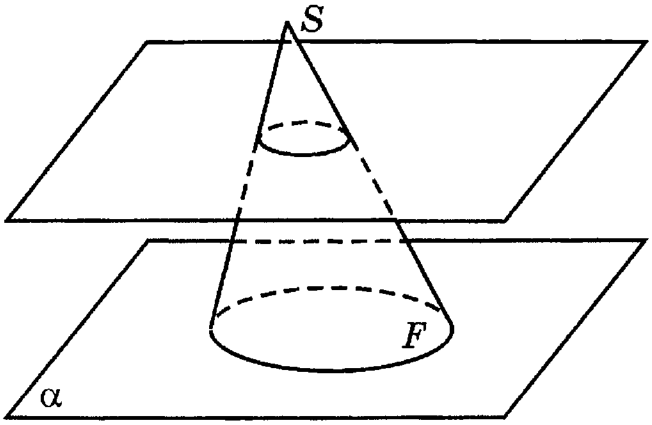
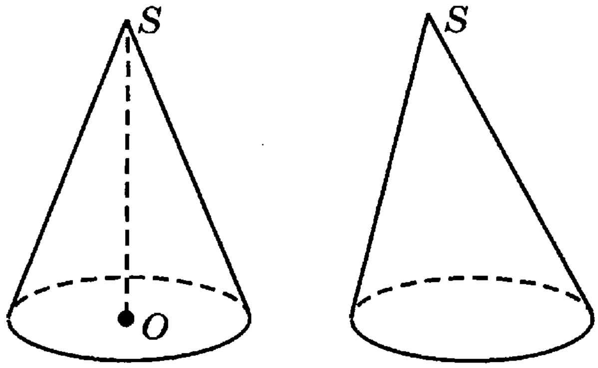


Рис. 121



а) б)

Рис. 122

Само сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, называется также *основанием* усеченного конуса.

Высотой усеченного конуса называется расстояние между плоскостями его оснований.

В случае если отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания, перпендикулярен плоскости основания, конус называется *прямым* (рис. 122, *а*). В противном случае он называется *наклонным* (рис. 122, *б*).

Прямые конусы будем называть просто конусами.

Прямая, проходящая через вершину и центр основания конуса, называется *осью* этого конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется *осевым сечением* (рис. 123).

Обычно конус и усеченный конус изображаются в ортогональной проекции.

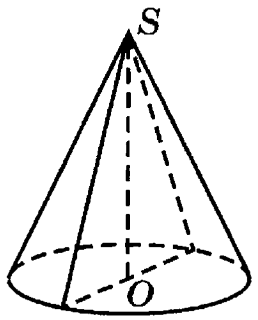


Рис. 123

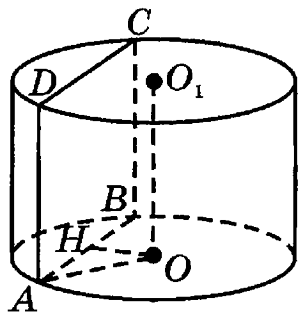


Рис. 124

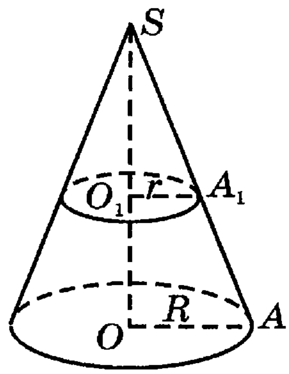


Рис. 125

Пример 1. Высота цилиндра равна 8 дм, радиус основания — 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние от этого сечения до оси.

Решение. Сечение $ABCD$ — квадрат (рис. 124), $AD = 8$ дм $= AB$, $AO = 5$ дм, OO_1 — ось цилиндра, OH, где H — середина хорды AB, является искомым расстоянием. Из прямоугольного треугольника AOH найдем $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (дм). ◁■

Пример 2. Высота конуса равна h. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

Решение. Пусть высота конуса $SO = h$ (рис. 125), $SO_1 = x$. Треугольник SO_1A_1 подобен треугольнику SOA: $\frac{x}{h} = \frac{r}{R}$, где $r = O_1A_1$ и $R = OA$, но $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, так как по условию $\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$.

Таким образом, $x = h\frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁■

Упражнения

29.1. Сколько образующих имеет цилиндр?

29.2. Что можно принять в цилиндре за его высоту?

29.3. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной основаниям?

29.4. Какой фигурой является осевое сечение цилиндра?

29.5. Какой фигурой является сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра?

29.6. Можно ли в сечении цилиндра плоскостью получить: а) прямоугольник; б) равнобедренный треугольник; в) круг?

29.7. Сколько существует плоскостей, рассекающих данный цилиндр: а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?

29.8. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной основанию?

29.9. Какой фигурой является осевое сечение конуса?

29.10. Сколько образующих имеет конус?

29.11. Может ли осевым сечением конуса быть: а) прямоугольник; б) равносторонний треугольник?

29.12. Может ли в сечении конуса плоскостью получиться равнобедренный треугольник, отличный от осевого сечения?

○ **29.13.** Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.

○ **29.14.** Радиус основания цилиндра равен r, диагональ осевого сечения — d. Найдите площадь осевого сечения.

29.15. Осевым сечением цилиндра является квадрат, площадь которого равна Q. Найдите радиус основания цилиндра.

○ **29.16.** Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна 16 см^2. Чему равна площадь основания цилиндра?

○ **29.17.** Радиус основания цилиндра равен 1, высота — 20, площадь сечения, параллельного оси, равна 20 кв. ед. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?

○ **29.18.** Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площадь каждого из которых равна Q. Определите площадь осевого сечения.

○ **29.19.** Найдите геометрическое место точек цилиндра, равноудаленных: а) от образующих; б) от оснований.

● **29.20.** Два цилиндра имеют две общие образующие. Какая фигура получится при пересечении этих цилиндров плоскостью, перпендикулярной их осям?

○ **29.21.** Радиус основания конуса равен 4 см. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.

○ **29.22.** Радиус основания конуса равен 1 см. Осевым сечением служит равносторонний треугольник. Найдите площадь осевого сечения.

○ **29.23.** Высота конуса равна 8 м, радиус основания — 6 м. Найдите образующую конуса.

○ **29.24.** Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник со стороной, равной 10 см. Найдите радиус основания и высоту конуса.

○ **29.25.** Высота конуса равна радиусу основания. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

○ **29.26.** Образующая конуса равна 6 м и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь основания конуса.

○ **29.27.** Образующая конуса равна 8 см, а угол при вершине осевого сечения составляет 60°. Найдите площадь осевого сечения.

● **29.28.** Радиус основания не превосходит высоты конуса. Какое сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет: а) наибольший периметр; б) наибольшую площадь?

§ 30. Фигуры вращения

Важный класс фигур в пространстве помимо многогранников образуют фигуры вращения.

Прежде чем дать определение фигуры вращения, рассмотрим понятие поворота в пространстве вокруг прямой, которое является аналогом понятия поворота на плоскости вокруг точки.

Напомним, что точка A' на плоскости α получается из точки A этой плоскости поворотом вокруг центра O на угол φ, если $OA' = OA$ и угол $A'OA$ равен φ (рис. 126).

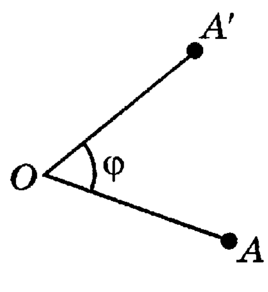


Рис. 126

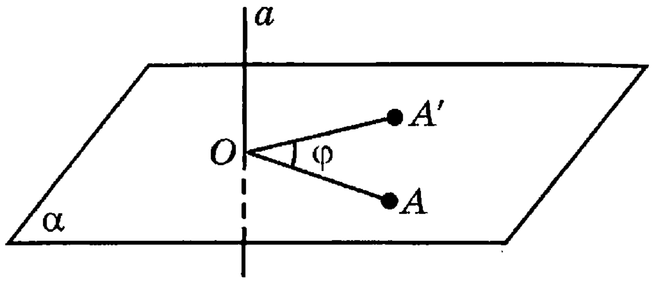


Рис. 127

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A, не принадлежащая этой прямой (рис. 127). Через точку A проведем плоскость α, перпендикулярную прямой a, и точку пересечения (a и α) обозначим O. Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ, если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ.

Определение. Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ, называется **поворотом** или **вращением**. Прямая a при этом называется **осью вращения**.

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a, если точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a. Фигура Φ при этом называется *фигурой вращения*.

Например, при вращении точки A вокруг прямой a (рис. 128) получается окружность с центром в точке O, являющейся пересечением прямой a с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a.

Сфера получается вращением окружности вокруг ее диаметра. Аналогично шар получается вращением круга вокруг какого-нибудь его диаметра (рис. 129).

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 130).

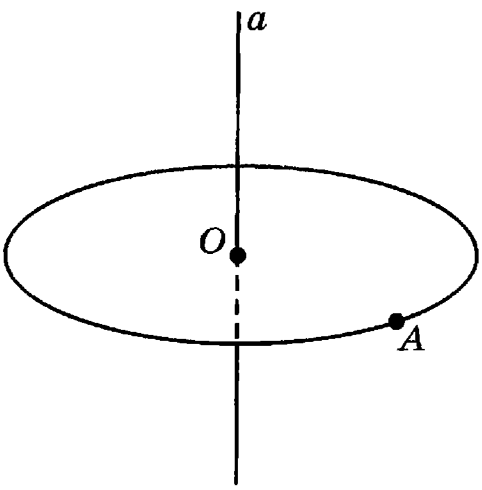


Рис. 128

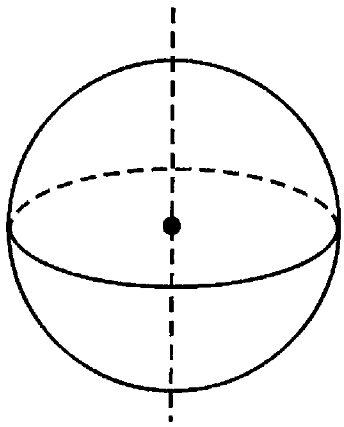


Рис. 129

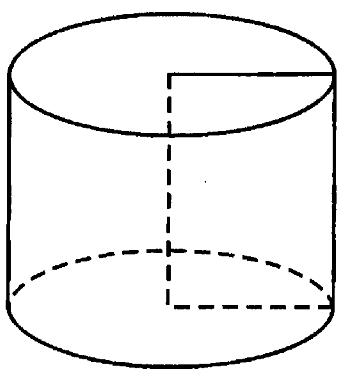
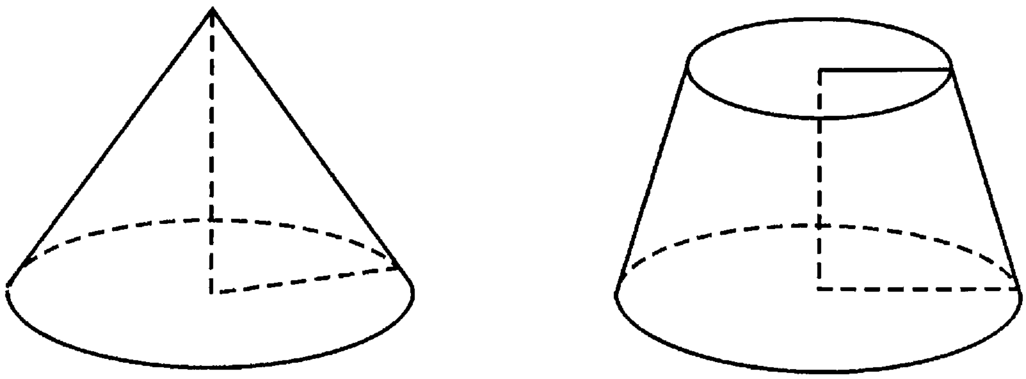


Рис. 130

Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 131, *а*).

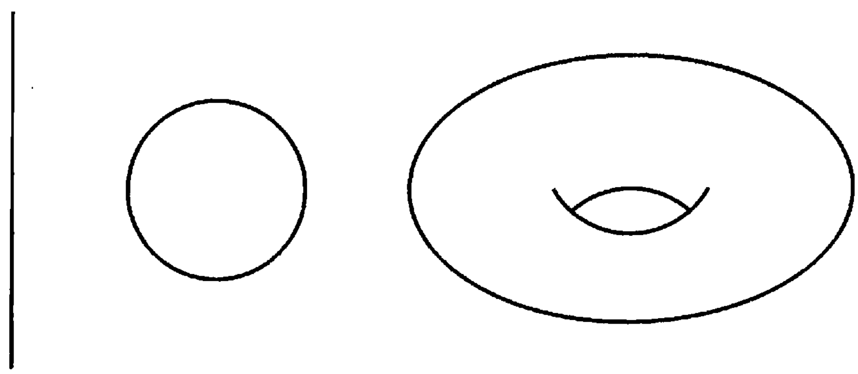
Усеченный конус получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу (рис. 131, *б*).



а) б)

Рис. 131

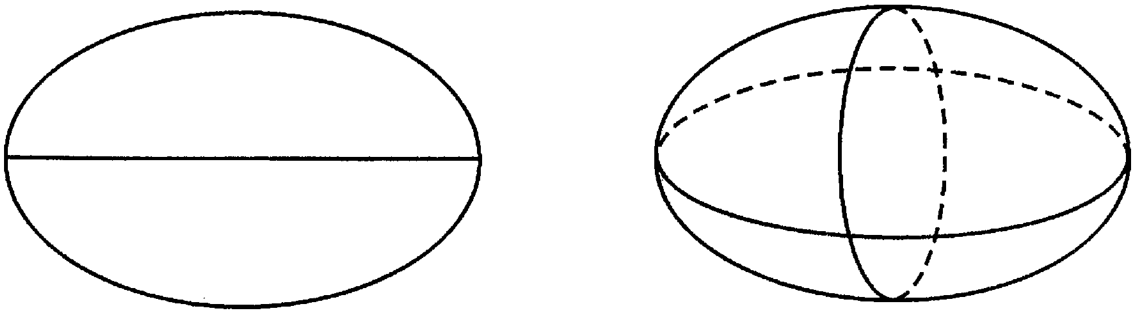
Если окружность вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек (рис. 132, *а*), то получится поверхность, называемая *тором*. Она по форме напоминает баранку или бублик (рис. 132, *б*).



а) б)

Рис. 132

При вращении эллипса вокруг его оси (рис. 133, *а*) получается поверхность, называемая *эллипсоидом вращения* (рис. 133, *б*).

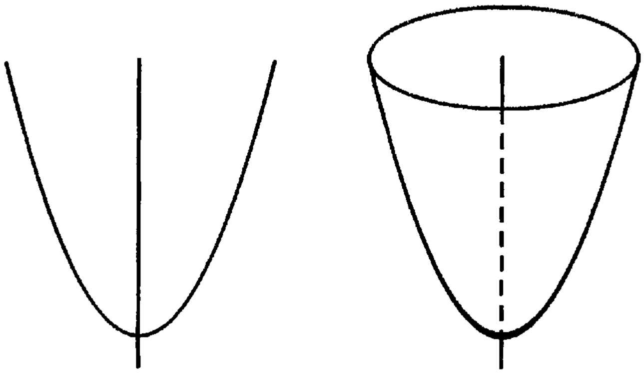


а) б)

Рис. 133

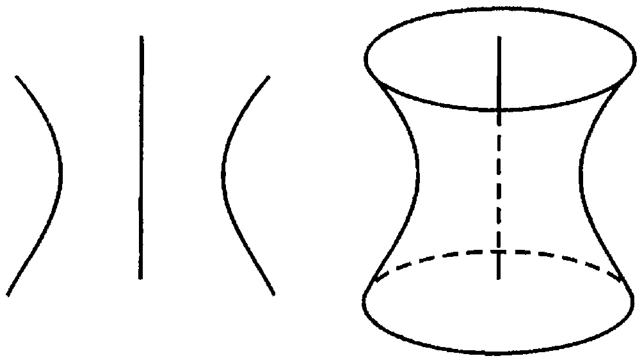
При вращении параболы вокруг ее оси (рис. 134, *а*) получается поверхность, называемая *параболоидом вращения* (рис. 134, *б*).

При вращении гиперболы вокруг ее оси (рис. 135, *а*) получается поверхность, называемая *гиперболоидом вращения* (рис. 135, *б*).



а) б)

Рис. 134

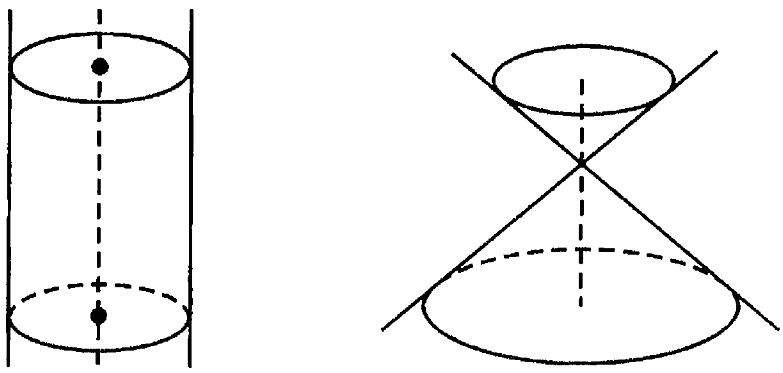


а) б)

Рис. 135

Выясним, какие фигуры могут получаться при вращении прямой.

Если прямая параллельна оси, то при вращении получается фигура, называемая *цилиндрической поверхностью* (рис. 136, *а*). Если прямая пересекает ось, то при вращении получается фигура, называемая *конической поверхностью* (рис. 136, *б*).



а) б)

Рис. 136

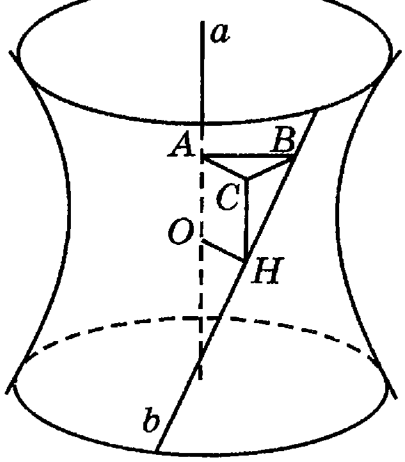


Рис. 137

Теорема*. **При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается гиперболоид вращения.**

Доказательство. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, OH — их общий перпендикуляр (рис. 137). Длина d отрезка OH будет расстоянием между прямыми a и b. Она является наименьшей из длин отрезков, соединяющих точки прямых a и b. Поэтому при вращении точек прямой b вокруг оси a окружность наименьшего радиуса будет получаться при вращении точки H. Рассмотрим произвольную точку B на прямой b, отличную от H, и опустим из нее перпендикуляр BA на прямую a. При вращении точка B описывает окружность, радиус которой равен AB. Выразим этот радиус через d. Для этого через точку H проведем прямую, параллельную a, и через точку A — прямую, параллельную OH. Точку пересечения этих прямых обозначим C. Пусть расстояние AB равно x, расстояние OA равно y и угол BHC равен α. Треугольник ABC прямоугольный, катет AC равен d, катет $BC = y \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому выполняется равенство

$$x^2 = d^2 + y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Перенеся слагаемое, содержащее y, в левую часть равенства и разделив обе части полученного равенства на d^2, получим уравнение

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2} = 1,$$

которое представляет собой уравнение гиперболы. Таким образом, искомая поверхность получается вращением гиперболы, т. е. является гиперболоидом вращения. ◀

Из доказанной теоремы, в частности, следует интересная особенность гиперболоидов вращения. Несмотря на искривленность их поверхностей, все они состоят из прямолинейных отрезков. Поэтому форма гиперболоида вращения часто используется в архитектурных сооружениях. Так, Шаболовская радиобашня в Москве, построенная по проекту замечательного русского инженера, почетного академика В. Г. Шухова (1853—1939), составлена из частей гиперболоидов вращения. Ее особенностью является то, что она в действительности состоит из прямолинейных конструкций — металлических стержней.

Заметим, что поверхность фигуры, получающейся при вращении многогранника, определяется вращением некоторых его ребер. При этом если ребро параллельно оси, то при вращении оно дает боковую поверхность цилиндра. Если ребро не параллельно оси, но лежит с ней в одной плоскости, то при вращении оно дает часть конической поверхности. А именно: а) если ребро не пересекает ось, то получается боковая поверхность усеченного конуса; б) если одна вершина ребра принадлежит оси, то получается боковая поверхность конуса; в) если ребро пересекает ось, то получается поверхность, состоящая из двух боковых поверхностей конусов с общей вершиной. Если же ребро многогранника скрещивается с осью вращения, то получается поверхность, являющаяся частью гиперболоида вращения.

Таким образом, поверхность вращения многогранника может состоять из боковых поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса и частей поверхностей гиперболоидов вращения. Никаких других поверхностей при вращении многогранника получиться не может.

Выясним, например, какая фигура получается при вращении куба $A...D_1$ вокруг диагонали AC_1.

Ребра этого куба, выходящие из вершины A и вершины C_1, при вращении дадут два конуса с этими вершинами. Поверхность вращения, заключенная между этими конусами, получается при вращении ребер куба, скрещивающихся с диагональю AC_1. Следовательно, она является частью гиперболоида вращения, и вся поверхность вращения выглядит так, как показано на рисунке 138.

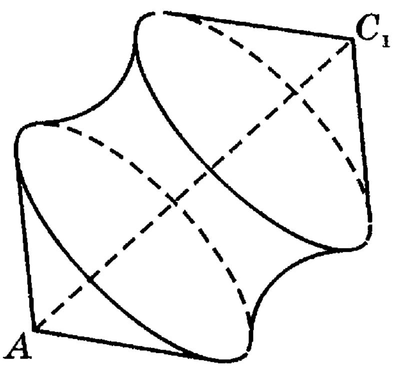
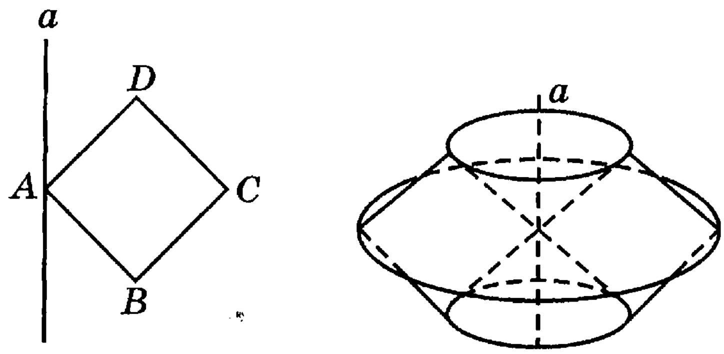


Рис. 138



а) б)

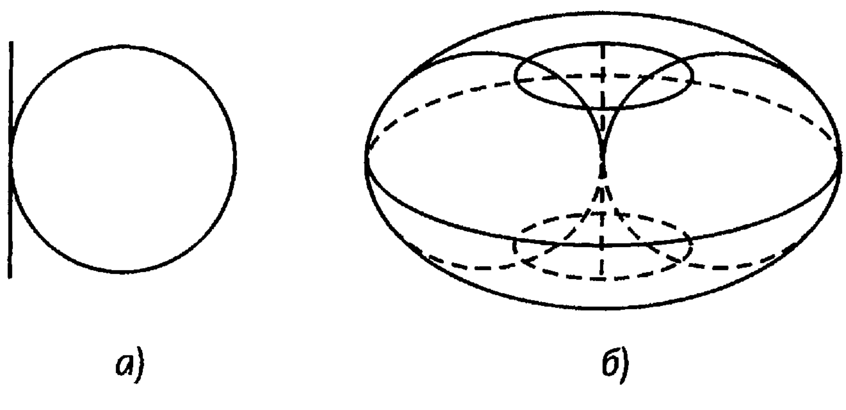
Рис. 139

Пример 1. Нарисовать фигуру, которая получается при вращении квадрата $ABCD$ вокруг прямой a, проходящей через вершину A и перпендикулярной диагонали AC (рис. 139, *а*).

Решение представлено на рисунке 139, *б*. ◁■

Пример 2. Нарисовать фигуру, которая получается при вращении круга вокруг касательной (рис. 140, *а*).

Решение представлено на рисунке 140, *б*. ◁■



а) б)

Рис. 140

Упражнения

30.1. Какая фигура получается при вращении отрезка OA вокруг прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной OA?

30.2. Назовите прямые, вращением вокруг которых данного прямоугольника получается цилиндр.

30.3. Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить цилиндр.

30.4. Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг высоты, опущенной на основание этого треугольника?

30.5. Назовите какие-нибудь фигуры, вращением которых можно получить: а) конус; б) усеченный конус.

30.6. Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг диаметра?

30.7. Какая фигура получится при вращении правильной n-угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований?

30.8. Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей: а) центры противоположных граней; б) середины противоположных ребер?

30.9. Какая фигура получается при вращении правильной пирамиды вокруг ее высоты?

○ **30.10.** Какая фигура получается при вращении пирамиды вокруг ее высоты?

● **30.11.** Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер?

● **30.12.** Найдите фигуру, которая получится при вращении октаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (называется осью октаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

○ **30.13.** Нарисуйте фигуры, полученные вращением треугольника ABC вокруг стороны AB (рис. 141, *а*, *б*). Как эту фигуру можно получить из конусов?

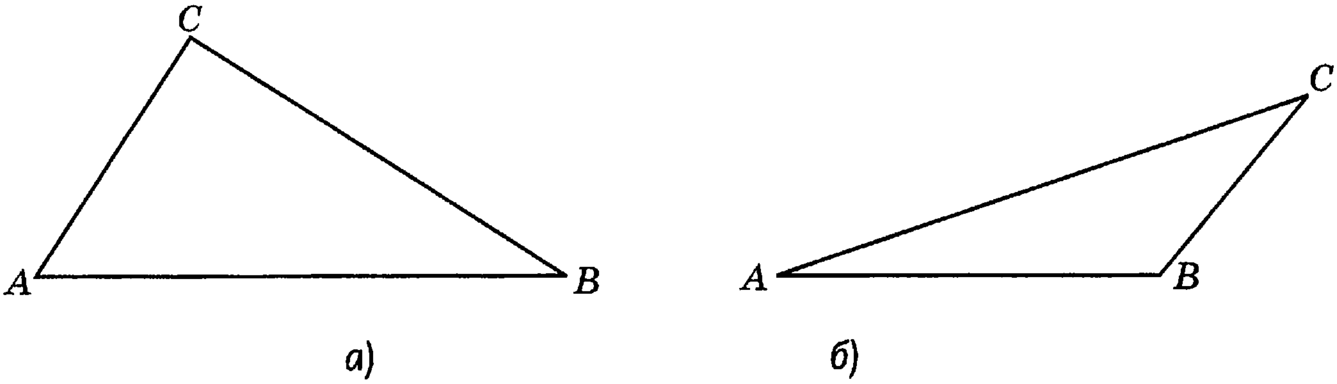


Рис. 141

○ **30.14.** Нарисуйте фигуру, полученную вращением треугольника вокруг прямой, проходящей через одну из его вершин и лежащей в плоскости треугольника. Как эту фигуру можно получить из конусов?

○ **30.15.** Нарисуйте фигуры, полученные вращением круга вокруг хорды, не являющейся диаметром круга.

○ **30.16.** Кривая задана уравнением $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. Нарисуйте поверхность, которая получается при вращении этой кривой вокруг оси Oy.

○ **30.17.** Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 4$, вокруг: а) биссектрисы первого и третьего координатных углов; б) биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

○ **30.18.** Высота цилиндра равна 15 см, радиус основания — 10 см. Дан отрезок, концы которого принадлежат окружностям обоих оснований и длина которого равна $3\sqrt{41}$ см. Найдите расстояние между данным отрезком и осью цилиндра.

○ **30.19.** Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к его высоте. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания — 5 см.

○ **30.20.** Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении кривой $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, вокруг оси Oy.

● **30.21.** Найдите фигуру, которая получится при вращении икосаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью икосаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

● **30.22.** Найдите фигуру, которая получится при вращении додекаэдра вокруг прямой, соединяющей: а) его противоположные вершины (которая называется осью додекаэдра); б) центры противоположных граней; в) середины противоположных ребер.

● **30.23.** Докажите, что если пространственная фигура Φ получается вращением пространственной фигуры F, то ее можно получить вращением плоской фигуры, лежащей в одной плоскости с осью вращения.

● **30.24.** Точка, находящаяся на боковой поверхности цилиндра, равномерно вращается вокруг оси цилиндра и одновременно равномерно движется в направлении образующей. Нарисуйте траекторию движения точки (винтовая линия).

§ 31. Взаимное расположение сферы и плоскости

По аналогии с понятием касательной прямой к окружности на плоскости определим понятие касательной плоскости к сфере в пространстве.

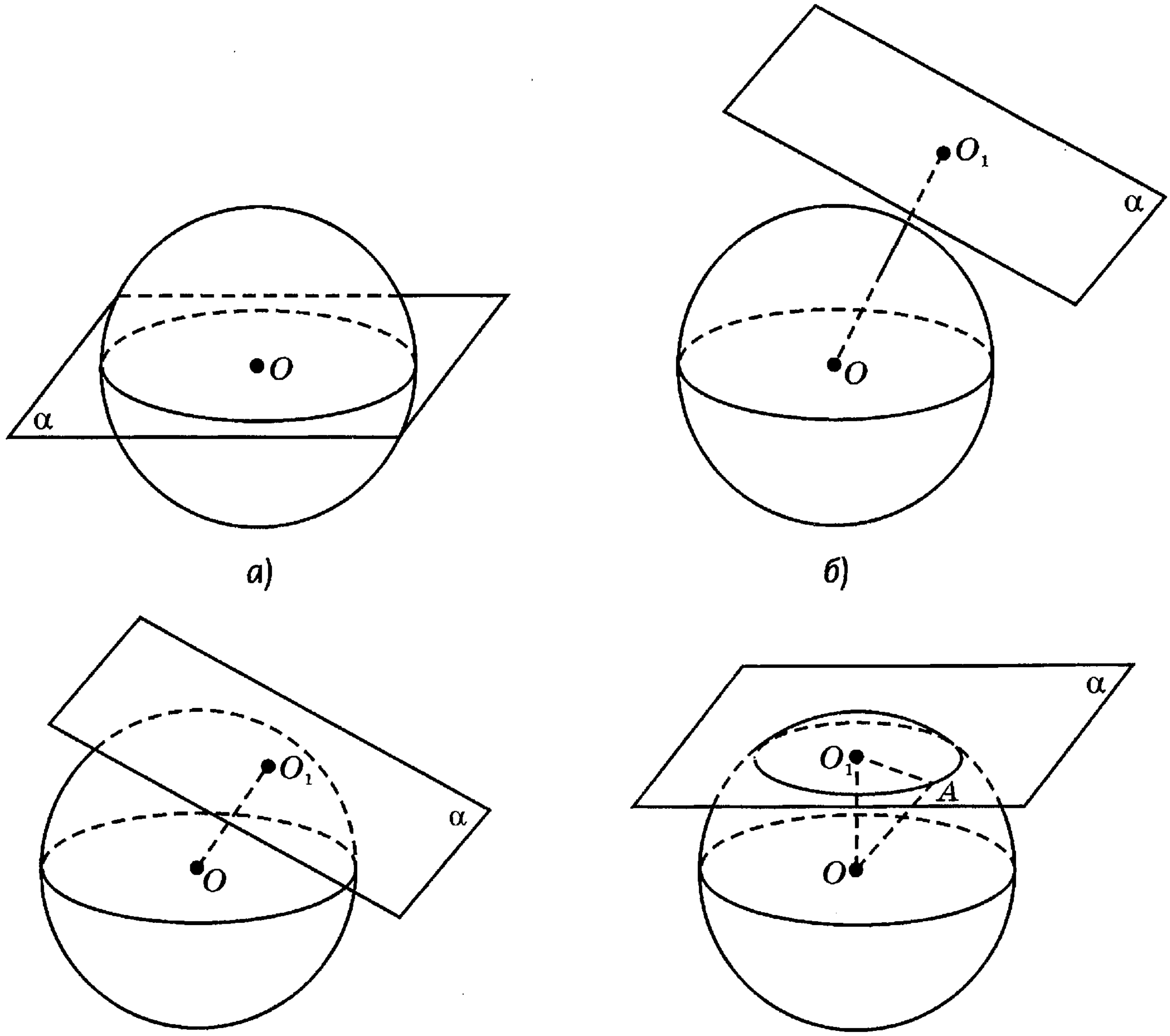
Определение. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью.**

Рассмотрим случаи взаимного расположения сферы и плоскости. Пусть в пространстве заданы сфера с центром в точке O и радиусом R и плоскость α.

Если эта плоскость проходит через центр сферы, то в сечении получается фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от точки O на расстояние R, т. е. окружность радиуса R (рис. 142, *а*).

Эта окружность называется *большой окружностью*. Соответствующий круг называется *большим кругом*.

Если плоскость не проходит через центр O сферы, то опустим из него на плоскость α перпендикуляр OO_1. При этом возможны следующие случаи:



а) б)

в) г)

Рис. 142

1. Длина этого перпендикуляра больше R. В этом случае расстояние от точки O до любой другой точки плоскости α и подавно больше R. Следовательно, в этом случае сфера и плоскость не имеют общих точек (рис. 142, *б*).

2. Расстояние от точки O до плоскости α равно R. В этом случае сфера и плоскость имеют единственную общую точку — O_1, т. е. α является касательной плоскостью (рис. 142, *в*).

3. Расстояние d от точки O до плоскости α меньше R. Докажем, что в этом случае пересечением сферы и плоскости является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 142, *г*).

Действительно, для произвольной точки A, принадлежащей пересечению сферы и плоскости α, из прямоугольного треугольника OO_1A, в котором $OO_1 = d$, $OA = R$, следует равенство $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$. Обратно, если для точки A плоскости α выполняется это равенство, то расстояние от точки O до точки A равно R, т. е. точка A принадлежит сфере.

Определение. Прямая, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной прямой.**

Для касательных прямых к сфере справедливы свойства, аналогичные свойствам касательных к окружности. В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема. **Все отрезки касательных, проведенных из одной точки к данной сфере, равны между собой.**

Доказательство. Пусть AB и AC — отрезки касательных к сфере, проведенных из точки A (рис. 143). Рассмотрим плоскость α, проходящую через точки A, B и C. Она пересекает сферу по окружности, касающейся прямых AB и AC в точках B и C соответственно. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности, имеем $AB = AC$. ◁■

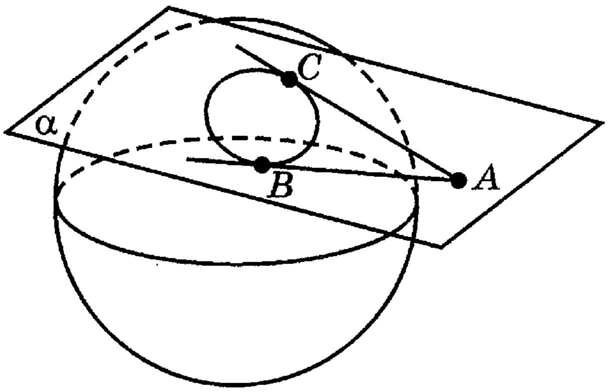


Рис. 143

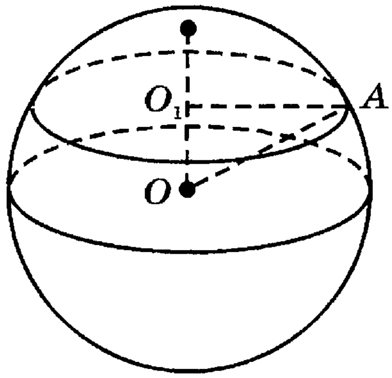


Рис. 144

Пример 1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Найти отношение площади полученного сечения к площади большого круга.

Решение. Пусть O, O_1 — центры соответственно шара и данного сечения (рис. 144), точка A принадлежит окружности сечения, R — радиус шара. Тогда по условию $OO_1 = \frac{R}{2}$ и $O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Площадь большого круга равна πR^2, сечения — $\frac{3}{4}\pi R^2$. Таким образом, искомое отношение равно $\frac{3}{4}$. ◁■

Пример 2. Доказать, что касательная прямая к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство. Через касательную и центр сферы проведем плоскость. Она пересечет сферу по большой окружности. Касательная к сфере будет касательной и к большой окружности. По свойству касательной к окружности она будет перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. ◁■

Пример 3. Найти геометрическое место касательных прямых к сфере, проходящих через заданную точку, принадлежащую сфере.

Решение. Все касательные прямые будут перпендикулярны радиусу, проведенному в точку касания (см. доказательство в примере 2), и все они будут лежать в касательной плоскости, проходящей через данную точку касания и перпендикулярную радиусу сферы, проведенному в точку касания. ◁■

Упражнения

31.1. Сколько сфер можно провести: а) через одну и ту же окружность; б) через окружность и точку, не принадлежащую ей?

31.2. Сколько сфер можно провести через четыре точки, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) равнобедренной трапеции; в) ромба?

31.3. Верно ли, что через любые две точки сферы проходит один большой круг?

31.4. При каком условии сечения сферы плоскостью: а) равны; б) одно больше другого?

31.5. Какое сечение шара плоскостью имеет наибольшую площадь?

31.6. Какой фигурой является пересечение двух больших кругов шара?

31.7. Сколько общих точек может иметь сфера: а) и прямая; б) и плоскость; в) и другая сфера?

31.8. Через какие две точки сферы можно провести несколько окружностей большого круга?

31.9. Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?

31.10. Исследуйте случаи взаимного расположения двух сфер. В каком случае две сферы: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

31.11. Какой фигурой является пересечение двух пересекающихся сфер?

● **31.12.** Что можно сказать о всех общих касательных прямых, проведенных к двум данным сферам: а) разных радиусов; б) одного радиуса?

○ **31.13.** Шар радиуса 5 см пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 3 см. Найдите радиус круга, получившегося в сечении.

○ **31.14.** Через середину радиуса шара проведена плоскость, перпендикулярная радиусу. Какую часть радиуса шара составляет радиус круга, получившегося в сечении?

○ **31.15.** Радиус шара равен R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом $60°$ к нему. Найдите площадь сечения.

○ **31.16.** Плоскость проходит через точку A и касается сферы с центром O и радиусом 3 см. Определите расстояние от этой точки до точки касания, если $OA = 5$ см.

○ **31.17.** Шар пересечен плоскостью, отстоящей от центра шара на 24 см. Найдите радиус шара, если длина окружности получившегося сечения составляет $\frac{3}{5}$ длины окружности его большого круга.

○ **31.18.** Сколько касательных плоскостей можно провести к данной сфере: а) через прямую, проходящую вне сферы; б) через точку, принадлежащую сфере; в) через точку, лежащую вне сферы?

○ **31.19.** Можно ли провести общую касательную плоскость к двум сферам при условии, что ни одна из них не лежит внутри другой?

○ **31.20.** Найдите геометрическое место центров сфер, которые касаются двух: а) параллельных плоскостей; б) пересекающихся плоскостей.

○ **31.21.** Исследуйте случаи взаимного расположения сферы и прямой. Когда они: а) не имеют общих точек; б) касаются; в) пересекаются?

○ **31.22.** Сколько можно провести прямых, касающихся сферы в одной и той же точке?

○ **31.23.** Сколько касательных прямых можно провести к данной сфере через данную точку: а) на сфере; б) вне сферы?

○ **31.24.** Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса R, которые касаются данной: а) прямой; б) плоскости; в) сферы?

○ **31.25.** Можно ли к двум сферам провести общую касательную прямую?

○ **31.26.** Докажите, что касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

● **31.27.** Сфера радиуса R касается граней двугранного угла величиной φ. Найдите расстояние от центра сферы до ребра этого двугранного угла.

§ 32*. Многогранники, вписанные в сферу

Эта тема аналогична соответствующей теме курса планиметрии, где, в частности, показывалось, что окружности можно описать около каждого треугольника и около каждого правильного многоугольника.

Аналогом окружности в пространстве является сфера. Аналогом многоугольника является многогранник. При этом аналогом треугольника является треугольная пирамида, аналогом правильных многоугольников — правильные многогранники.

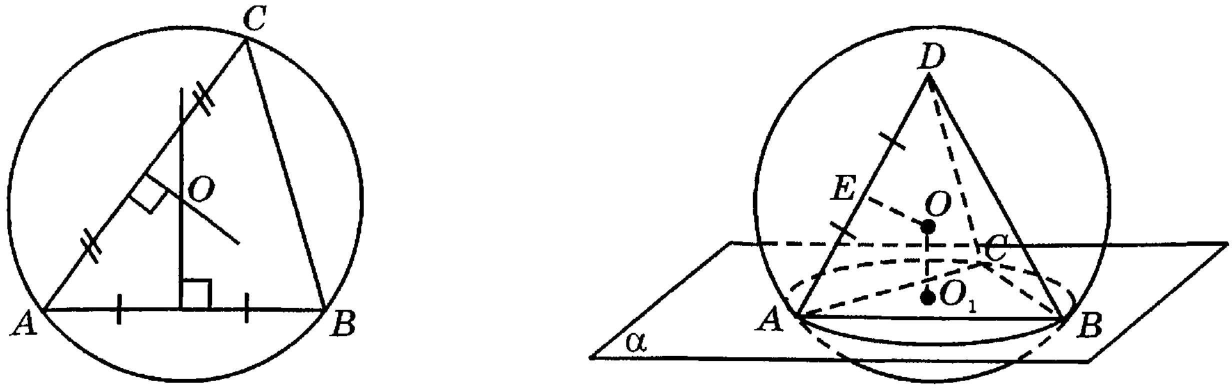
Определение. Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины принадлежат этой сфере. Сама сфера при этом называется **описанной около многогранника.**

Теорема. **Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу и притом только одну.**

Доказательство. Обратимся к доказательству аналогичной теоремы планиметрии. С чего мы начинали? Прежде всего находили геометрическое место точек, равноудаленных от двух вершин треугольника, например A и B (рис. 145, a).

Таким геометрическим местом является серединный перпендикуляр, проведенный к отрезку AB. Затем находили геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и C. Это серединный перпендикуляр к отрезку AC. Точка пересечения этих серединных перпендикуляров и будет искомым центром O описанной около треугольника ABC окружности.

Рассмотрим теперь пространственную ситуацию и попробуем сделать аналогичные построения.



а) б)

Рис. 145

Пусть дана треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 145, *б*). Точки A, B, C определяют плоскость α. Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех точек — A, B, C, является прямая a, перпендикулярная плоскости α и проходящая через центр O_1 описанной около треугольника ABC окружности. Геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A, D, является плоскость, назовем ее β, перпендикулярная отрезку AD и проходящая через его середину — точку E.

Плоскость β и прямая a пересекаются в точке O, которая и будет искомым центром описанной около треугольной пирамиды $ABCD$ сферы. Действительно, в силу построения точка O одинаково удалена от всех вершин пирамиды $ABCD$. Причем такая точка будет единственной, так как пересекающиеся прямая и плоскость имеют единственную общую точку. ◁■

Выясним, в каком случае около прямой призмы можно описать сферу.

Теорема. **Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность.**

Доказательство. Если около прямой призмы описана сфера, то все вершины основания призмы принадлежат сфере и, следовательно, окружности, являющейся линией пересечения сферы и плоскости основания (рис. 146). Обратно, пусть около основания прямой призмы описана окружность с центром в точке O_1 и радиусом r. Тогда и около второго основания призмы можно описать окружность с центром в точке O_2 и тем же радиусом. Пусть

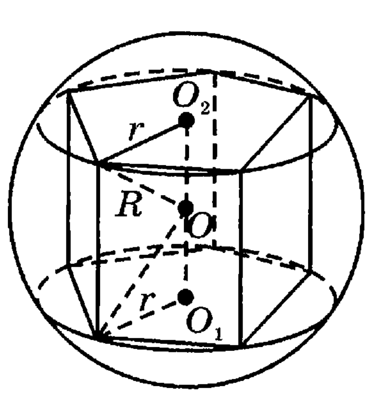
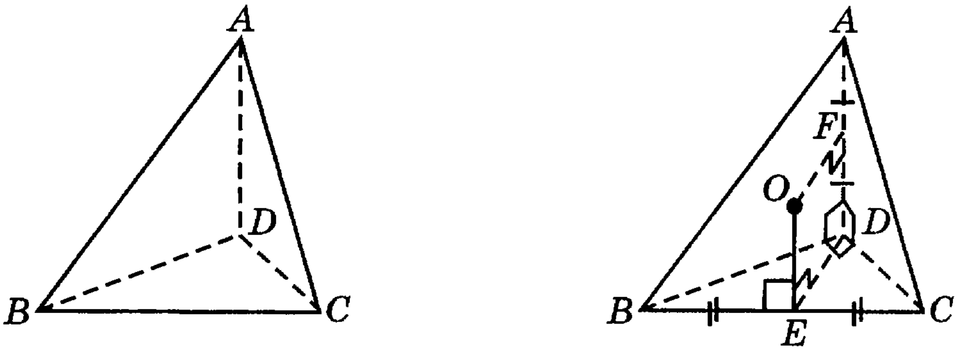


Рис. 146

$O_1O_2 = d$, O — середина отрезка O_1O_2. Тогда сфера с центром O и радиусом $R = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4}}$ будет искомой описанной сферой. ◁■

Пример 1. На рисунке 147, *а* изображена пирамида $ABCD$, у которой углы ADB, ADC и BDC прямые. Найти и нарисовать центр сферы, описанной около данной пирамиды.

Решение. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника BDC, является середина гипотенузы BC, обозначим ее E. Проведем $EO \parallel AD$, $EO = \frac{1}{2}AD$, точка O — центр искомой сферы (рис. 147, *б*). Действительно, EO — перпендикуляр к плоскости треугольника BDC, проходящий через центр окружности, описанной около него. Значит, любая точка прямой EO, в том числе и O, одинаково удалена от точек B, C и D. Далее $OEDF$, где F — середина AD, прямоугольник по построению, OF — серединный перпендикуляр к AD. Следовательно, точка O одинаково удалена от точек D и A. Таким образом, O одинаково удалена от всех вершин пирамиды и является центром сферы, описанной около пирамиды. ◁■



а) *б)*

Рис. 147

Пример 2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды — 4 м, высота тоже 4 м. Найти радиус описанной сферы.

Решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида (рис. 148), SH — ее высота. Все точки SH одинаково удалены от вершин A, B, C, D. Центр искомой сферы — точка O — будет находиться на пересечении серединного перпендикуляра

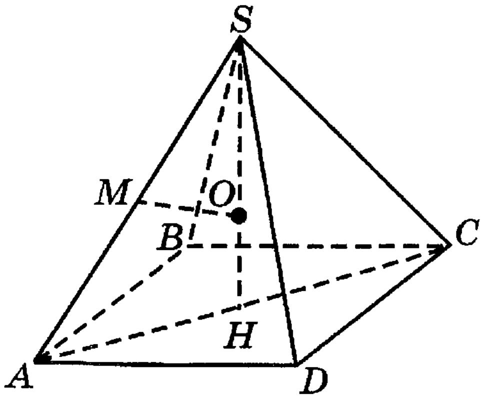


Рис. 148

бокового ребра, например SA ($SM = MA$), и высоты SH. Тогда O будет одинаково удалена от всех вершин данной пирамиды. Найдем радиус описанной сферы. Прямоугольные треугольники SAH и SOM подобны (по углам). Тогда $SA : SO = SH : SM$, $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$ (м). $SO = \frac{SA \cdot SM}{SH} = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{4} = 3$ (м). Итак, радиус описанной сферы равен 3 м.

Упражнения

32.1. Каким условиям должна удовлетворять прямая призма, чтобы около нее можно было описать сферу?

32.2. При каких условиях можно описать сферу около прямой призмы, в основании которой лежит трапеция?

32.3. Можно ли описать сферу около наклонной призмы?

32.4. Можно ли описать сферу: а) около куба; б) около прямоугольного параллелепипеда; в) около параллелепипеда, одной из граней которого является параллелограмм; г) около параллелепипеда, одной из граней которого является ромб?

32.5. Приведите пример прямой призмы, около которой нельзя описать сферу.

32.6. В основании прямой призмы лежит ромб. Можно ли эту призму вписать в сферу?

32.7. Может ли центр сферы, описанной около треугольной пирамиды, находиться вне этой пирамиды?

32.8. Приведите пример пирамиды, около которой нельзя описать сферу.

32.9. Каким свойством должен обладать многоугольник, лежащий в основании пирамиды, чтобы около нее можно было описать сферу?

32.10. Около треугольной призмы описана сфера, центр которой лежит вне призмы. Какой треугольник является основанием призмы?

32.11. При каком условии центр сферы, описанной около прямой треугольной призмы, будет находиться: а) внутри призмы; б) на одной из боковых граней призмы; в) вне призмы?

32.12. Можно ли описать сферу около пирамиды, в основании которой лежит: а) прямоугольник; б) ромб?

○ **32.13.** Ребро куба равно a. Найдите радиус сферы, описанной около него.

○ **32.14.** Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите радиус сферы.

○ **32.15.** Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых ребер равно 2 дм и перпендикулярно основанию. Найдите радиус описанной сферы.

○ **32.16.** На рисунке 149 изображена пирамида $ABCD$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания; угол ACB равен 90°. Укажите на чертеже точку O — центр сферы, описанной около пирамиды.

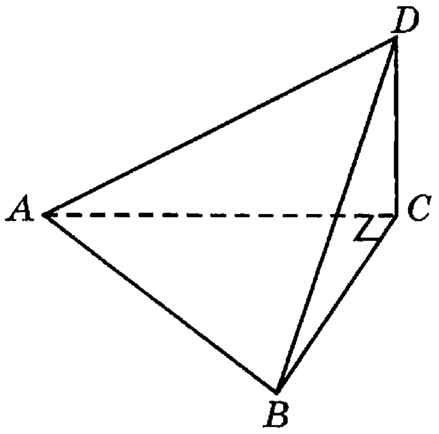


Рис. 149

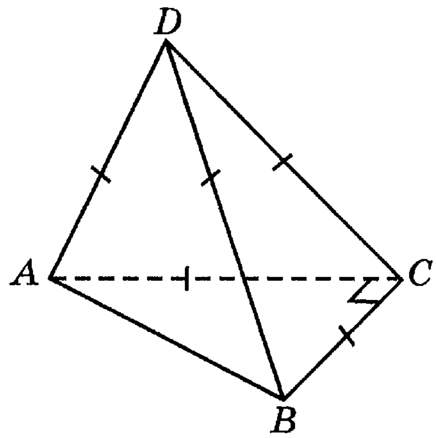


Рис. 150

○ **32.17.** На рисунке 150 изображена пирамида $ABCD$, у которой угол ACB прямой. $AC = CB = CD = DB = AD = a$. Найдите ее высоту и центр сферы, описанной около нее.

○ **32.18.** На рисунке 151 показана треугольная пирамида $ABCD$, у которой $AC = BC$, ребро DC перпендикулярно плоскости ABC и угол ACB равен 120°. Найдите центр сферы, описанной около пирамиды.

○ **32.19.** На рисунке 152 изображена пирамида $ABCD$, у которой ребро AC перпендикулярно плоскости BCD и угол BDA прямой. Покажите, что точка O — центр сферы, описанной около пирамиды.

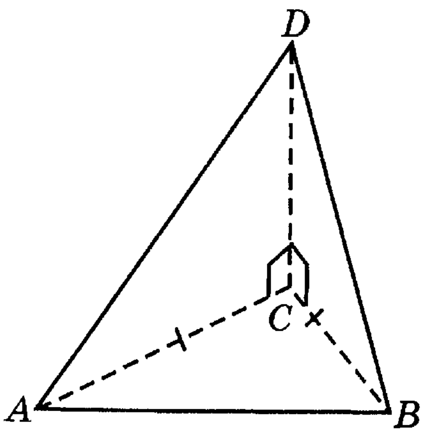


Рис. 151

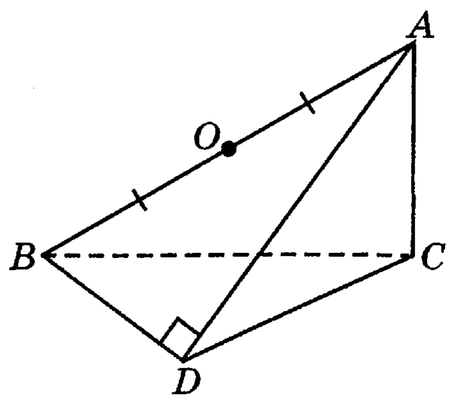


Рис. 152

○ **32.20.** Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами, равными 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы составляет 24 см. Найдите радиус описанной сферы.

● **32.21.** Докажите, что около любой правильной усеченной пирамиды можно описать сферу.

● **32.22.** Докажите, что около любого правильного многогранника можно описать сферу.

● **32.23.** Ребро тетраэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

● **32.24.** Ребро октаэдра равно a. Найдите радиус описанной около него сферы.

§ 33*. Многогранники, описанные около сферы

Здесь мы рассмотрим многогранники, описанные около сферы, но сначала напомним соответствующие понятия для многоугольников и окружностей.

Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны этого многоугольника касаются окружности. Сам многоугольник при этом называется описанным около окружности.

В планиметрии доказывалось, что в любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Для нахождения центра O вписанной в треугольник ABC окружности нужно провести биссектрисы углов A и B. Их точка пересечения O будет одинаково удалена от всех сторон треугольника и, следовательно, будет искомым центром вписанной окружности (рис. 153). Перейдем теперь к пространственным фигурам.

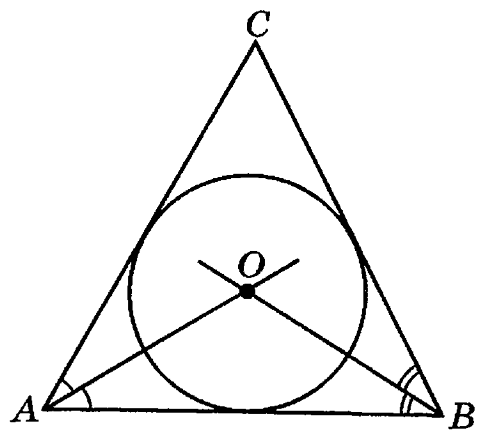


Рис. 153

Определение. Сфера называется **вписанной в многогранник**, если все грани этого многогранника касаются сферы. Сам многогранник при этом называется **описанным около сферы.**

Выясним сначала, какие сферы касаются одновременно двух пересекающихся плоскостей.

Пусть даны две плоскости — α и β, пересекающиеся по прямой c. Через прямую c проведем плоскость γ, делящую угол между пло-

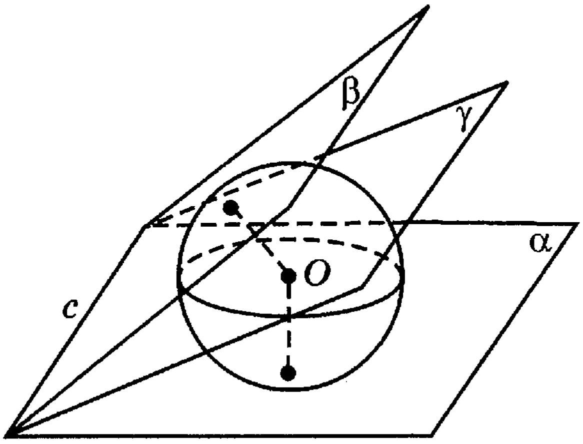


Рис. 154

скостями α и β пополам (рис. 154). Такая плоскость называется *биссектральной*. Точки плоскости γ, не принадлежащие прямой *c*, обладают тем свойством, что расстояния от них до плоскостей α и β одинаковы. Если это расстояние принять за радиус сферы *R*, то сфера с центром на биссектральной плоскости и радиусом *R* будет касаться плоскости α и плоскости β. Сама биссектральная плоскость без прямой *c* дает геометрическое место центров сфер, касающихся одновременно плоскостей α и β.

Теорема. **В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу и притом только одну.**

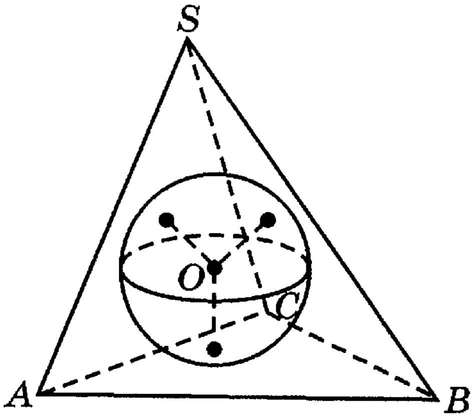


Рис. 155

Доказательство. Ясно, что центром вписанной сферы будет точка, одинаково удаленная от всех граней треугольной пирамиды. Для ее нахождения рассмотрим три биссектральные плоскости, образованные боковыми гранями пирамиды с основанием. Точка пересечения этих плоскостей будет одинаково удалена как от боковых граней, так и от основания, т. е. будет искомым центром вписанной сферы (рис. 155). ◁■

Выясним, в каком случае в прямую призму можно вписать сферу.

Теорема. **В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание этой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности.**

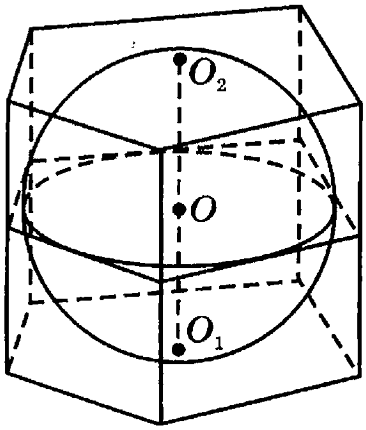


Рис. 156

Доказательство. Пусть в прямую призму вписана сфера с центром в точке *O* и радиусом *R* (рис. 156). Тогда высота призмы равна $2R$. Через центр *O* проведем сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям. В сечении призмы будет многоугольник, равный многоугольнику основания, описанный около окружности, являющейся сечением сферы плоскостью. Таким образом, в основание призмы можно вписать окружность. Обратно, предположим, что в основание прямой призмы можно вписать окружность радиусом R, а высота призмы равна $2R$. Пусть O — середина отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания. Тогда сфера с центром O и радиусом R будет искомой сферой, вписанной в призму. ◁■

Пример 1. Найти радиус сферы, вписанной в прямую призму, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой c.

Решение. Диаметр данной сферы равен высоте призмы и диаметру окружности, вписанной в основание призмы. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, можно вычислить по формуле $r = \frac{2S}{P}$, где S — площадь треугольника, P — его периметр.

В нашем случае стороны прямоугольного треугольника равны c, $c \cdot \sin\alpha$, $c \cdot \cos\alpha$; $P = c(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$; $S = \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Таким образом, радиус искомой сферы равен $\frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$. ◁■

Пример 2. Найти радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна h, а угол между боковой гранью и основанием равен 60°.

Решение. Проведем $SP \perp AB$ (рис. 157). SH — высота пирамиды, H — центр правильного треугольника ABC. Тогда центр O вписанной сферы является точкой пересечения биссектрисы угла SPH и высоты SH, OH — радиус искомой сферы. $\angle SPH = 60°$, значит, $PH = \frac{\sqrt{3}}{3}h$. Прямоугольные треугольники SPH и POH подобны (по углам). Отсюда следует, что $SH : PH = PH : OH$, $OH = \frac{h}{3}$. ◁■

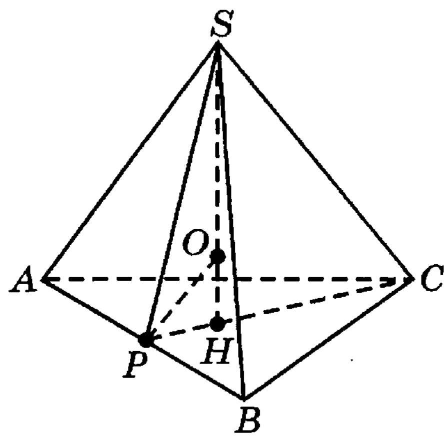


Рис. 157

Упражнения

33.1. Можно ли вписать сферу в куб? Что будет центром вписанной сферы?

33.2. Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед?

33.3. При каком условии в прямую призму можно вписать сферу?

33.4. В основании прямой призмы лежит ромб. Можно ли эту призму вписать в сферу?

33.5. Приведите пример призмы, в которую нельзя вписать сферу.

33.6. Ребро куба равно 1. Найдите радиус вписанной сферы.

33.7. Докажите, что в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.

33.8. Приведите пример n-угольной пирамиды, в которую можно вписать сферу.

33.9. В любую ли правильную пирамиду можно вписать сферу?

33.10. Приведите пример пирамиды, в которую нельзя вписать сферу.

● **33.11.** Во всякий ли правильный многогранник можно вписать сферу?

● **33.12.** Верно ли утверждение о том, что центр описанной и вписанной сфер правильного тетраэдра является также центром сферы, касающейся всех его ребер в их серединах. Можно ли этот результат обобщить для всех правильных многогранников?

○ **33.13.** Найдите радиус сферы, вписанной в прямую призму, высота которой равна h.

○ **33.14.** Найдите радиус сферы, вписанной в прямую призму, в основании которой лежит ромб со стороной 4 см и углом 60°.

○ **33.15.** Докажите, что в пирамиду, у которой двугранные углы при основании равны, всегда можно вписать сферу.

○ **33.16.** Сфера касается боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды и ее основания. Определите радиус сферы, если диагональным сечением пирамиды является равносторонний треугольник, сторона которого равна a.

○ **33.17.** По ребру a правильного тетраэдра найдите радиус вписанной сферы.

○ **33.18.** По ребру a октаэдра найдите радиус вписанной сферы.

○ **33.19.** Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, основанием которой служит ромб со стороной a и острым углом α. Углы между боковыми гранями и основанием равны φ.

● **33.20.** Дана треугольная пирамида $SABC$. Грань SCB перпендикулярна плоскости основания; ребра SC и SB равны a; плоские углы при вершине равны между собой и равны 60°. Определите радиус вписанной сферы.

● **33.21.** При каком условии в правильную четырехугольную усеченную пирамиду можно вписать сферу?

● **33.22.** Докажите, что в любой правильный многогранник можно вписать сферу. Причем центры вписанной и описанной сфер совпадают.

§ 34*. Сечения цилиндра плоскостью

Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию. Если же плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

Рассмотрим связь сечений цилиндра плоскостью с тригонометрическими функциями. Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам (рис. 158). Затем свернем этот лист в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиусом 1, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 159). Через диаметр OD полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол 45°. В этом случае сечением будет эллипс.

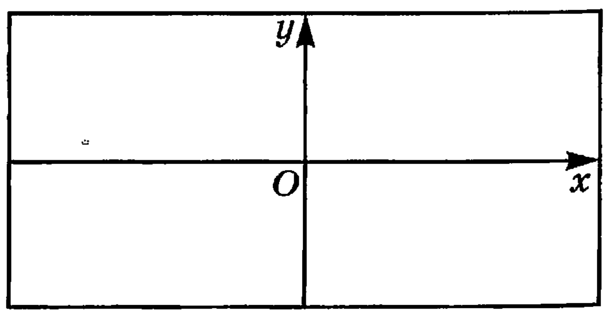


Рис. 158

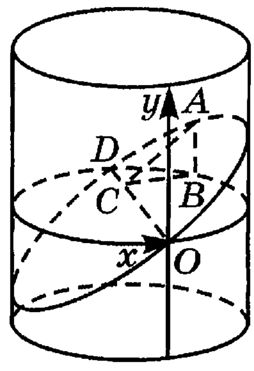


Рис. 159

Развернем цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс развернется в кривую, являющуюся частью синусоиды. Для доказательства этого из произвольной точки A на эллипсе опустим перпендикуляры на плоскость окружности и на диаметр окружности OD. Получим соответственно точки B и C. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 45°$. Следовательно, $AB = BC$. Заметим, что $BC = \sin x$, где x — длина дуги OB. Для этого достаточно обратиться к рисунку 160 и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB = \sin x$, где $x = OB$, т. е. эта кривая является частью синусоиды с уравнением $y = \sin x$ (рис. 161).

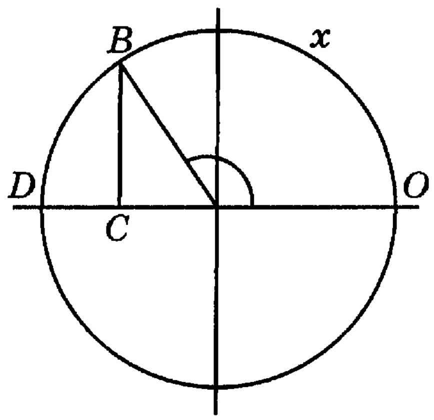


Рис. 160

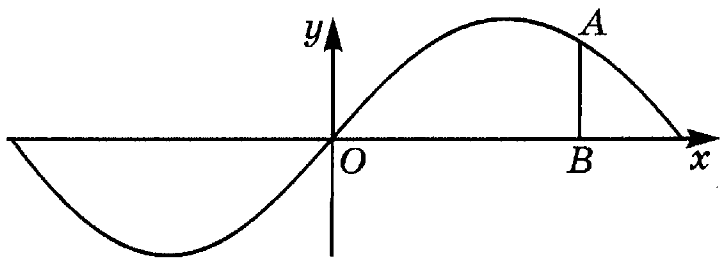


Рис. 161

Упражнения

34.1. Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклоненном стакане?

○ **34.2.** Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.

○ **34.3.** В основании цилиндра круг радиусом R. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

○ **34.4.** Докажите, что если сечение цилиндра, свернутого из бумаги, проводить не под углом 45°, а под углом φ, то уравнение соответствующей кривой будет иметь вид $y = k \cdot \sin x$, где $k = \operatorname{tg} \varphi$.

○ **34.5.** Нарисуйте кривые, соответствующие углам наклона плоскости сечения: а) $\varphi = 30°$; б) $\varphi = 60°$.

○ **34.6.** Докажите, что если исходный прямоугольник свернуть в прямой круговой цилиндр не единичного, а некоторого другого радиуса a и произвести с этим цилиндром аналогичные операции, то получится кривая, задаваемая уравнением $y = a \cdot \sin\left(\frac{x}{a}\right)$.

○ **34.7.** Нарисуйте график функции:

а) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; б) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$.

○ **34.8.** Докажите, что если плоскость сечения проходит не через точку O, а через диаметр, образующий с OD (см. рис. 159) угол φ_0, то получится кривая, задаваемая уравнением $y = \sin(x - \varphi_0)$;

○ **34.9.** Нарисуйте график функции:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

○ **34.10.** Какой угол φ_0 нужно взять, чтобы получить график функции $y = \cos x$?

● **34.11.** Возьмите прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нем осями координат (см. рис. 158). Сверните этот лист в боковую поверхность правильной четырехугольной призмы (рис. 162). Сторону основания призмы примите за 1. Через точки O и D проведите сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45°. Разверните лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая. Что изменится, если сечение проводить под другими углами?

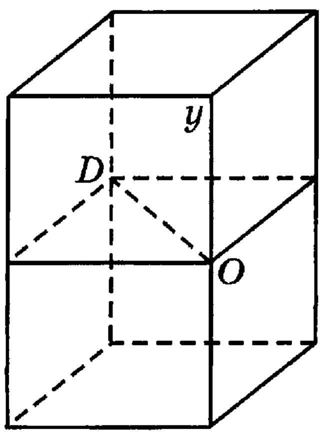


Рис. 162

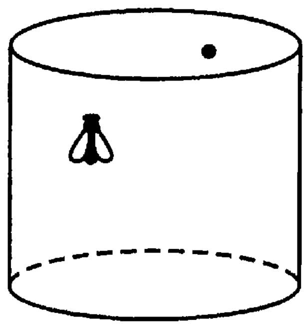


Рис. 163

● **34.12.** На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки в 3 см от верхнего края находится капля меда. А на наружной стенке в диаметрально противоположной точке уселась муха (рис. 163). Чему равен кратчайший путь, по которому муха может доползти до медовой капли? Диаметр банки равен 12 см.

§ 35. Симметрия пространственных фигур

По словам известного немецкого математика Г. Вейля (1885—1955), «симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство». Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения искусства.

Понятие симметрии фигур на плоскости рассматривалось в курсе планиметрии. В частности, определялись понятия центральной и осевой симметрий. Для пространственных фигур понятие симметрии определяется аналогичным образом.

Определение. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно точки** O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O называется **центром симметрии** (рис. 164).

Фигура Φ в пространстве называется *центрально-симметричной* относительно точки O, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно точки O некоторой точке A' фигуры Φ.

Рис. 164

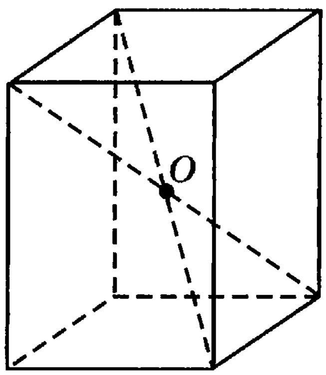


Рис. 165

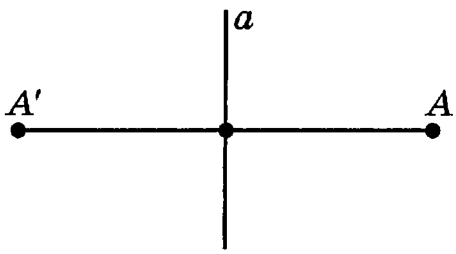


Рис. 166

Например, прямоугольный параллелепипед центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей (рис. 165). Шар центрально-симметричен относительно своего центра и т. д.

Определение. Точки A и A' пространства называются **симметричными относительно прямой** a, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку (рис. 166). Прямая a при этом называется **осью симметрии.**

Фигура Φ в пространстве называется *симметричной относительно оси* a, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой оси некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней (рис. 167), прямой круговой цилиндр симметричен относительно своей оси и т. д.

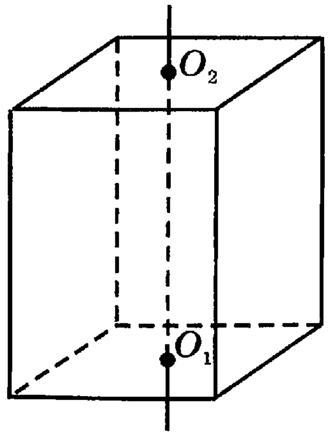


Рис. 167

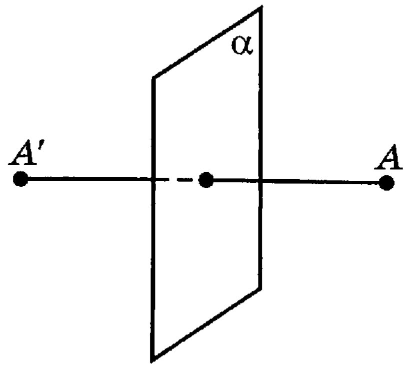


Рис. 168

Определение. Точки A и A' в пространстве называются **симметричными относительно плоскости** α, если эта плоскость проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Плоскость α при этом называется **плоскостью симметрии** (рис. 168).

Симметрия относительно плоскости называется также *зеркальной симметрией*.

Фигура Φ в пространстве называется *зеркально-симметричной* относительно плоскости α, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой плоскости некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из пар противоположных граней (рис. 169). Цилиндр зеркально-симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось и т. д.

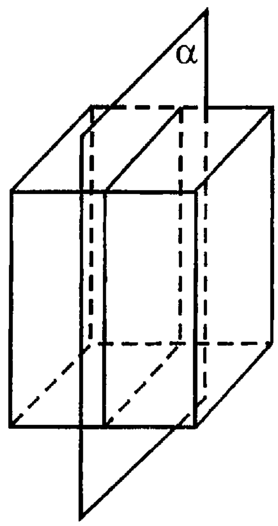


Рис. 169

Помимо осей симметрии, определенных выше, рассматриваются также оси симметрии n-го порядка, $n \geqslant 2$.

Определение*. Прямая a называется **осью симметрии n-го порядка** фигуры Φ, если при повороте фигуры Φ на угол $\frac{360°}{n}$ вокруг прямой a фигура Φ совмещается сама с собой.

Например, в правильной n-угольной пирамиде прямая, проходящая через вершину и центр основания, является осью симметрии n-го порядка (рис. 170).

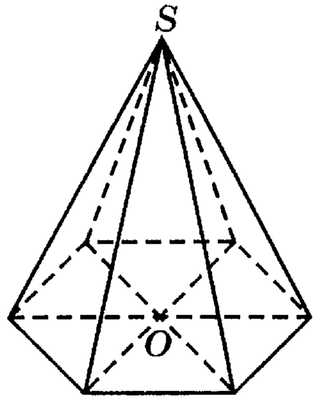


Рис. 170

Ясно, что ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Отметим, что из многогранников наиболее симметричными являются правильные многогранники.

Например икосаэдр имеет:

1. Центр симметрии — центр икосаэдра.

2. Шесть осей симметрии 5-го порядка, проходящих через противоположные вершины; десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противоположных граней; пятнадцать осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противоположных ребер икосаэдра.

3. Пятнадцать плоскостей симметрии, проходящих через пары противоположных ребер икосаэдра.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Как отмечалось ранее, кристаллы являются природными многогранниками. Их свойства определяются особенностями их геометрического строения, в частности, симметричным расположением атомов в кристаллической решетке. Внешние формы кристаллов являются следствием их внутренней симметрии.

Первые еще смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных доказательств атомного строения вещества. Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены в середине XIX века, а к концу этого века были четко и точно выведены законы симметрии, которым подчинены атомные структуры в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся российский математик и кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1853—1919). Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело — в каждую из этих областей Е. С. Федоров внес немалый вклад. В 1890 году он строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Е. С. Федоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь ученого были названы федоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью было доказано существование самой кристаллической решетки. Существование 230 федоровских групп является одним из важнейших геометрических законов современной структурной кристаллографии. «Гигантский научный подвиг Е. С. Федорова, сумевшего подвести под единую геометрическую схему весь природный “хаос” бесчисленных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. Это открытие сродни открытию периодической таблицы Д. И. Менделеева. “Царство кристаллов” является незыблемым памятником и конечной вершиной классической федоровской кристаллографии», — сказал академик А. В. Шубников.

Пример 1. Для двух данных точек пространства найти прямую, относительно которой они симметричны. Сколько решений имеет задача?

Решение. Пусть даны две точки — A и A' — пространства. Проведем через них произвольную плоскость α и в ней через точку O — середину отрезка AA' — проведем прямую $a \perp AA'$, a — искомая прямая. Задача имеет бесконечно много решений. Все искомые прямые проходят через точку O и лежат в плоскости, перпендикулярной AA'. ◁■

Пример 2. Найти элементы симметрии правильной треугольной призмы.

Решение. 1) Три оси симметрии, каждая из которых проходит через середину бокового ребра и центр противоположной грани. 2) Четыре плоскости симметрии, три из которых проходят через оси симметрии и перпендикулярны основаниям и одна проходит через середины боковых ребер. 3) Одна ось симметрии 3-го порядка, она проходит через центры оснований. ◁■

Пример 3. Сколько у правильной n-угольной пирамиды: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

Решение. а) Одна ось симметрии n-го порядка, проходящая через центр основания и вершину пирамиды; б) n плоскостей симметрии, проходящих через вершину пирамиды и оси симметрии основания. ◁■

Упражнения

35.1. Приведите примеры центрально-симметричных и нецентрально-симметричных фигур.

35.2. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?

35.3. Найдите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.

35.4. Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?

35.5. Сколько осей симметрии имеет шар?

35.6. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?

35.7. Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии, и наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

● **35.8.** Приведите примеры пространственных фигур с осями симметрии 3-го, 4-го и т. д. порядков.

● **35.9.** Осью симметрии какого порядка является диагональ куба?

35.10. Какими видами симметрии обладает куб?

35.11. Сколько у правильной шестиугольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

● **35.12.** Может ли фигура иметь ровно два центра симметрии?

○ **35.13.** Для двух точек пространства найдите точку, относительно которой они центрально-симметричны.

○ **35.14.** Постройте прямую, зеркально-симметричную данной прямой относительно данной плоскости. Рассмотрите различные случаи.

○ **35.15.** Постройте плоскость, центрально-симметричную данной плоскости относительно данной точки. Рассмотрите различные случаи.

○ **35.16.** Найдите элементы симметрии правильной четырехугольной призмы.

○ **35.17.** Найдите элементы симметрии правильной семиугольной пирамиды.

○ **35.18.** Сколько у правильной $(2n - 1)$-угольной призмы: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

○ **35.19.** Каким видом симметрии обладает наклонная призма, в основании которой лежит правильный многоугольник с четным числом сторон?

○ **35.20.** В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

○ **35.21.** Какими видами симметрии обладает наклонный параллелепипед?

○ **35.22.** Имеет ли центр симметрии наклонная призма, основанием которой является правильный девятиугольник?

○ **35.23.** Найдите число осей и плоскостей симметрии правильной пирамиды, в основании которой лежит многоугольник: а) с четным числом сторон: б) с нечетным числом сторон?

○ **35.24.** Сколько у правильной n-угольной усеченной пирамиды: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии?

○ **35.25.** Может ли неправильная пирамида иметь: а) ось симметрии; б) плоскости симметрии? Приведите примеры таких пирамид.

○ **35.26.** Существуют ли центрально-симметричные усеченные пирамиды?

● **35.27.** Докажите, что если две пересекающиеся перпендикулярные прямые в пространстве являются осями симметрии данной фигуры Φ, то и прямая, проходящая через точку пересечения и перпендикулярная этим прямым, также будет осью симметрии фигуры Φ.

● **35.28.** Докажите, что фигура в пространстве не может иметь четное (ненулевое) число осей симметрии.

§ 36*. Ориентация плоскости. Лист Мёбиуса

Пусть в пространстве задана плоскость и поворот этой плоскости вокруг точки O на угол φ. На рисунке 171, *а* мы смотрим на плоскость сверху, и этот поворот выглядит как поворот против часовой стрелки. Однако если смотреть на плоскость снизу, то этот же поворот будет выглядеть как поворот по часовой стрелке (рис. 171, *б*).

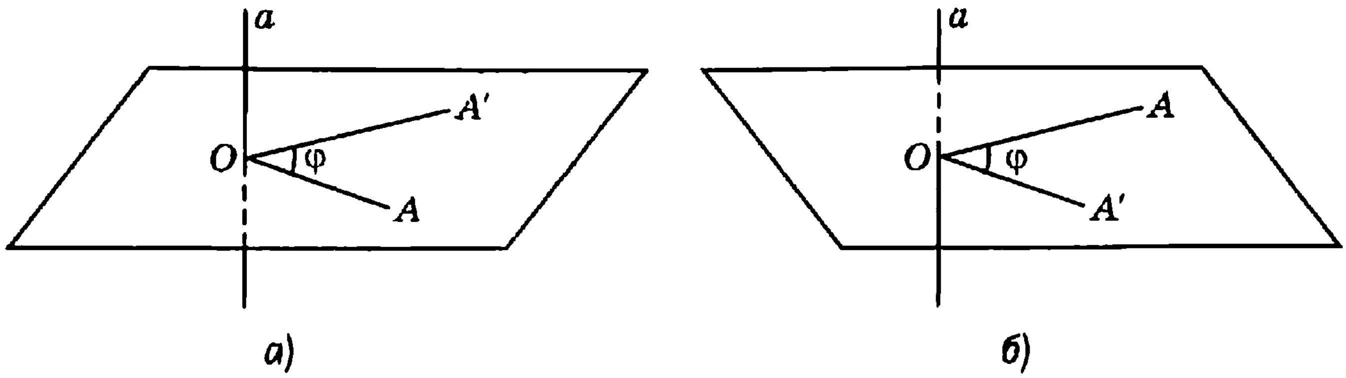


Рис. 171

Таким образом, направление поворота не является свойством, изначально присущим плоскости, и зависит от выбора стороны, с которой мы смотрим на плоскость. Такой выбор стороны называется *ориентацией плоскости*.

Аналогичным образом можно определить понятие ориентации и для других двусторонних поверхностей, среди которых: сфера, поверхность многогранника, поверхности цилиндра, конуса и др. Выбирая сторону поверхности, мы как бы производим мысленное закрашивание этой стороны.

Оказывается, однако, что это можно сделать не для любой поверхности. Первым примером такой неориентируемой поверхности была поверхность, называемая *листом*, или *лентой*, Мёбиуса, открытая в 1858 году немецким астрономом и математиком А. Ф. Мёбиусом (1790—1868).

Изготовить модель листа Мёбиуса очень просто. Возьмем бумажную полоску в форме прямоугольника $ABCD$ (рис. 172).

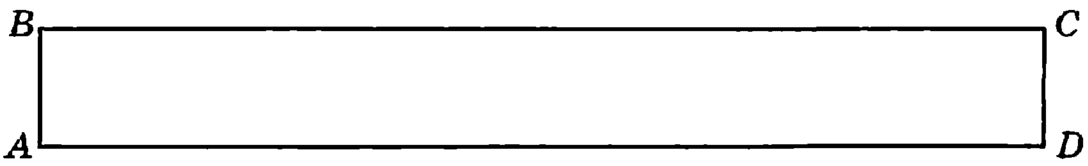
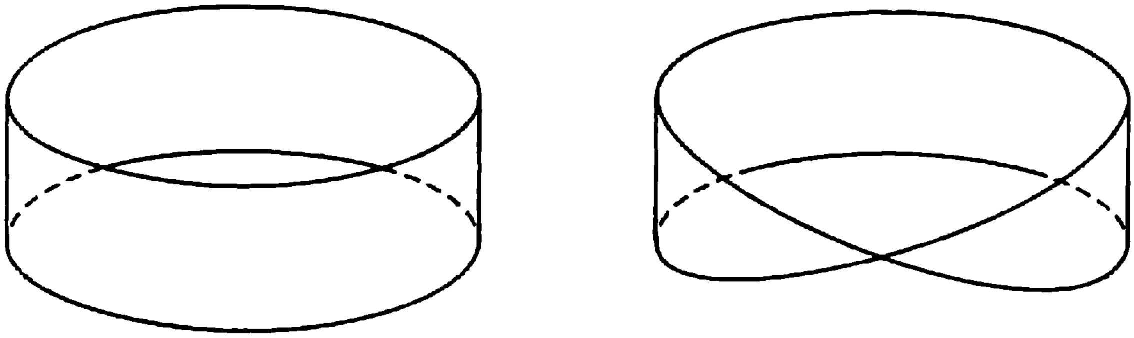


Рис. 172

Если склеить противоположные стороны AB и CD, совместив точку A с точкой D, а точку B с точкой C, то получим боковую поверхность цилиндра (рис. 173, *а*). Если же перед склеиванием противоположных сторон одну из них повернуть на 180° и соединить точку A с точкой C, точку B с точкой D (рис. 173, *б*), то получим лист Мёбиуса.



а) б)

Рис. 173

Несмотря на свою простоту, лист Мёбиуса обладает рядом неожиданных свойств. Например, попытаемся ответить на вопрос: «Сколько краев имеет лист Мёбиуса?» В отличие от боковой поверхности цилиндра, краями которой являются две окружности, лист Мёбиуса имеет один край. Чтобы убедиться в этом, нужно выбрать в любом месте края точку и перемещать ее вдоль этого края. В результате мы придем в то же самое выбранное место.

Кроме этого, лист Мёбиуса имеет только одну сторону. До сих пор мы имели дело с поверхностями, у которых две стороны: плоскость, сфера, тор, цилиндрическая и коническая поверхности.

Убедиться в односторонности листа Мёбиуса можно следующим образом. Начнем закрашивать лист с любого места, постепенно перемещаясь по поверхности. В результате вся поверхность окажется закрашенной. Отметим, что если то же самое мы проделаем с боковой поверхностью цилиндра, то, начав закрашивание с внешней стороны, мы закрасим эту внешнюю сторону, а внутренняя сторона останется незакрашенной. Наоборот, начав с внутренней стороны, мы закрасим эту внутреннюю сторону, а внешняя сторона окажется незакрашенной.

Муравью, ползущему по листу Мёбиуса, не надо переползать через его край, чтобы попасть на противоположную сторону, как это видно на гравюре М. Эшера (рис. 174).

Свойство односторонности листа Мёбиуса используется при изготовлении ременных передач. Если ремень сделать в виде ленты Мёбиуса (рис. 175), то он будет изнашиваться вдвое медленнее, чем обычный. Это объясняется тем, что в работе ремня, изготовленного в виде ленты Мёбиуса, принимает участие вся поверхность, а не только внутренняя ее часть, как у обычной ременной передачи.

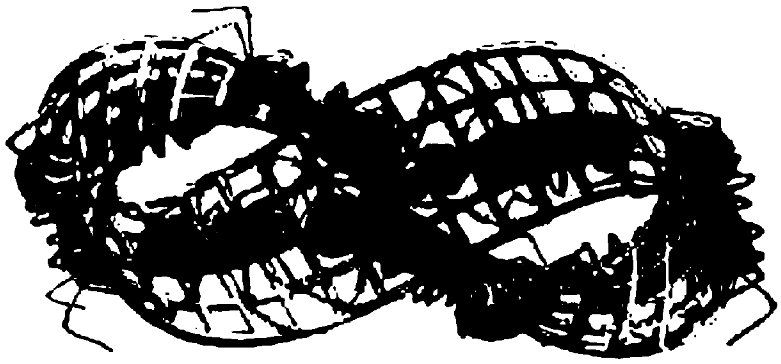


Рис. 174

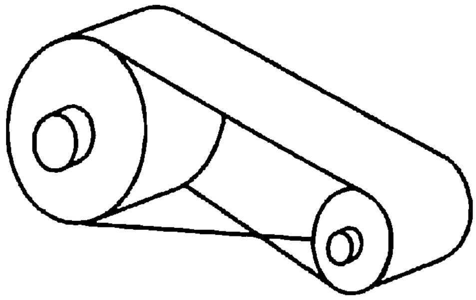


Рис. 175

Проделаем еще один опыт. Проведем на листе Мёбиуса среднюю линию (это легко сделать на клетчатой бумаге) и ответим на вопрос: «Что получится, если лист Мёбиуса разрезать по средней линии?» Кажется, что лист должен распасться на два отдельных куска. Однако это не так, при разрезании листа Мёбиуса по средней линии получается дважды перекрученная лента, в чем легко убедиться опытным путем.

Упражнения

36.1. Сколько сторон имеет поверхность: а) пирамиды; б) цилиндра?

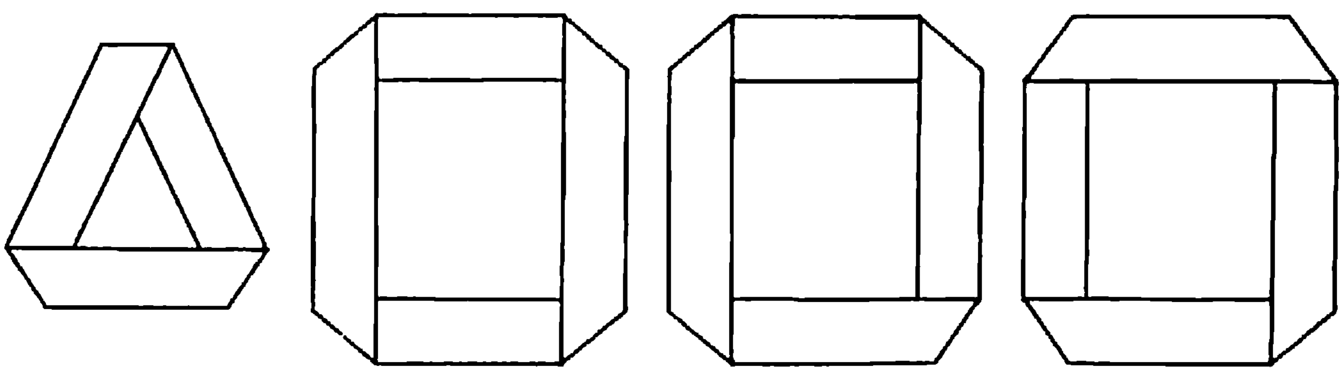
36.2. Какая поверхность получится, если у прямоугольника склеить противоположные стороны (без перекручивания)?

36.3. Являются ли ориентируемой: а) сфера; б) боковая поверхность цилиндра; в) поверхность конуса?

36.4. Сколько сторон имеет тор (напомним, это поверхность, полученная вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей эту окружность)?

36.5. Является ли ориентируемой поверхностью: а) дважды перекрученная лента; б) трижды перекрученная лента?

36.6. На рисунке 176 укажите изображения листа Мёбиуса.



а) б) в) г)

Рис. 176

36.7. Сколько сторон имеет поверхность, полученная при разрезании листа Мёбиуса по средней линии?

36.8. Что получится, если дважды перекрученную ленту Мёбиуса разрезать по средней линии?

36.9. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать не по средней линии, а отступив от края на треть ширины ленты?

○ **36.10.** Сделайте модель листа Мёбиуса.

○ **36.11.** Изобразите лист Мёбиуса.

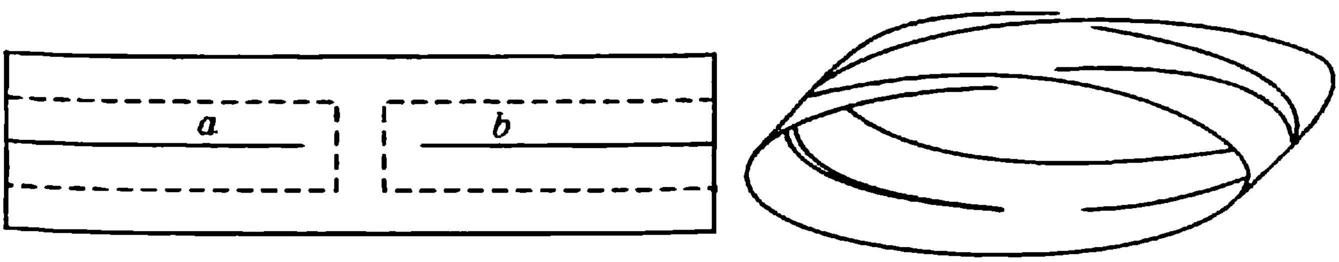
○ **36.12.** Сделайте модель дважды перекрученной ленты Мёбиуса.

○ **36.13.** Лист Мёбиуса получен из прямоугольника со сторонами a, b. Найдите площадь поверхности листа Мёбиуса.

○ **36.14.** Лист Мёбиуса получен из прямоугольника со сторонами a, b склеиванием сторон длины a. Найдите длину края листа Мёбиуса.

○ **36.15.** В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ склеиваются противоположные стороны AB и EF, CD и GH. Сколько сторон имеет получившаяся поверхность, если: а) оба склеивания производятся без перекручивания; б) одно склеивание производится с перекручиванием, а другое — без; в) оба склеивания производятся с перекручиванием?

○ **36.16.** Возьмите полоску бумаги и сделайте два разреза — a и b (рис. 177, *а*). Соедините между собой пары концов, как у листа Мёбиуса, перекручивая их в разных направлениях. В результате получится фигура, изображенная на рисунке 177, *б*, называемая *сиамским листом Мёбиуса*. Что получится, если разрезать ее вдоль пунктирной линии (рис. 177, *а*)? Сколько будет частей, краев и перекручиваний?



а) б)

Рис. 177

● **36.17.** Отрезок AB, параллельный прямой a, вращается вокруг этой прямой и одновременно вращается вокруг своего центра в плоскости отрезка AB и прямой a. За время полного оборота вокруг прямой a отрезок совершает поворот на 180° вокруг своего центра. Какую фигуру в пространстве описывает этот отрезок? Какую фигуру в пространстве будет описывать этот отрезок, если за время полного оборота вокруг прямой a он совершит поворот на 360° вокруг своего центра?

● **36.18.** Представим себе боковую поверхность цилиндра, сделанную из эластичного материала. Вырежем в ней круглое отверстие (рис. 178, *а*), проденем в него один конец цилиндра и склеим окружности оснований. Получившаяся поверхность изображена на рисунке 178, *б*. Она называется *бутылка Клейна*. Сколько у нее сторон?

● **36.19.** В круге вырезали два круглых отверстия и к их краям приклеили основания боковой поверхности цилиндра (рис. 178, *в*, *г*). Сколько сторон имеет образовавшаяся поверхность?

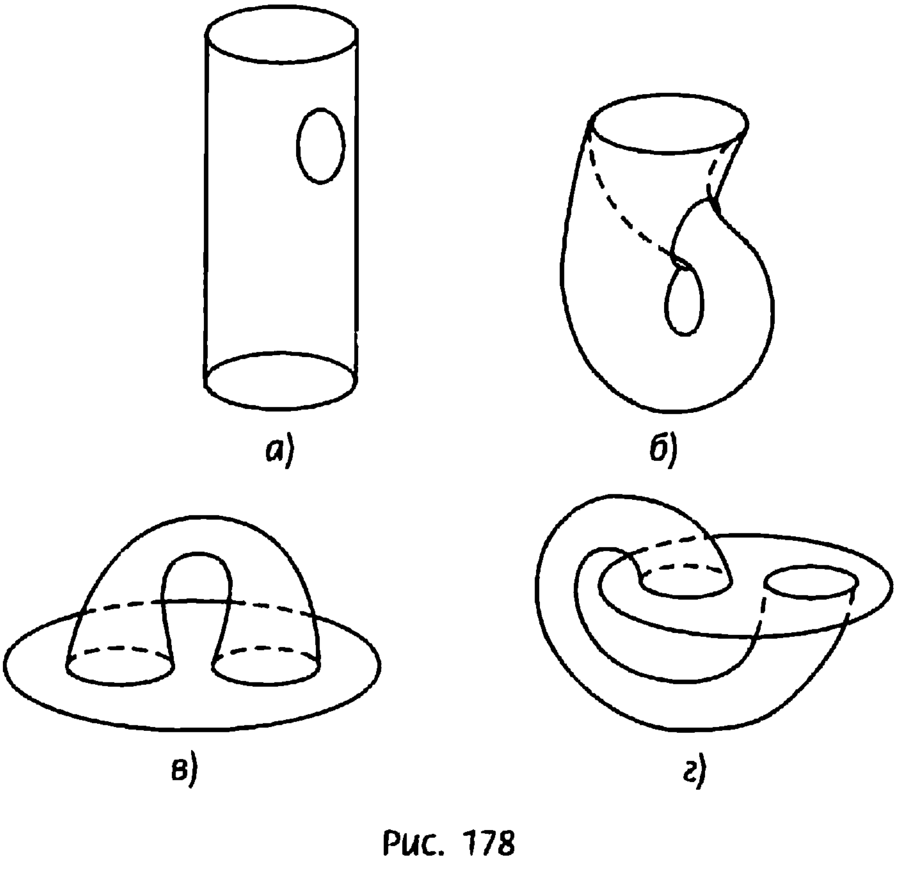


Рис. 178

ГЛАВА 7

Объем и площадь поверхности

§ 37. Объем фигур в пространстве. Объем цилиндра

Проблема нахождения объемов пространственных фигур с древних времен привлекала к себе внимание ученых. Вычислением объемов простейших пространственных фигур занимались Демокрит, Евдокс, Архимед. В Средние века нахождением объемов пространственных фигур занимались И. Кеплер (1571—1630), Б. Кавальери (1598—1647), П. Ферма (1601—1655) и др. Появление интегрального исчисления в конце XVII века в работах И. Ньютона (1643—1727) и Г. Лейбница (1646—1716) дало мощный метод вычисления объемов произвольных пространственных фигур.

Рассмотрим понятие объема, его свойства и вычисление объемов основных пространственных фигур.

Измерение объема фигуры основано на сравнении этой фигуры с фигурой, объем которой принимается за единицу. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Определение. Число V, показывающее сколько раз единица измерения объема укладывается в данной фигуре, называется **объемом** этой фигуры.

Это число может быть натуральным, рациональным или даже иррациональным.

Ясно, что объем фигуры зависит от единицы измерения. Поэтому на практике после этого числа указывают единицу измерения объема. Например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объемов пространственных фигур справедливы *свойства*, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1) объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом;

2) равные фигуры имеют равные объемы;

3) если фигура Ф составлена из двух неперекрывающихся фигур — $Ф_1$ и $Ф_2$, то объем фигуры Ф равен сумме объемов фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, т. е.

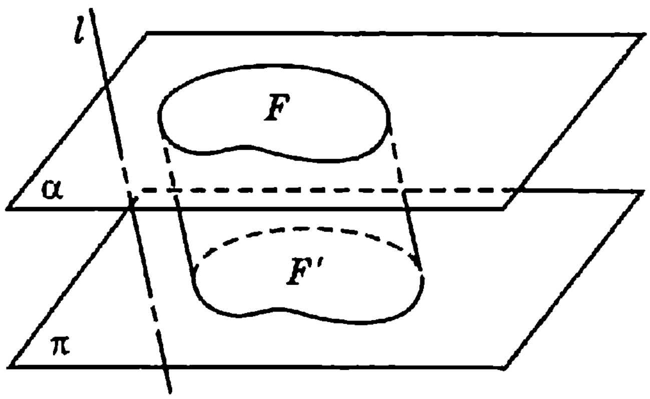
$$V(Ф) = V(Ф_1) + V(Ф_2).$$

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

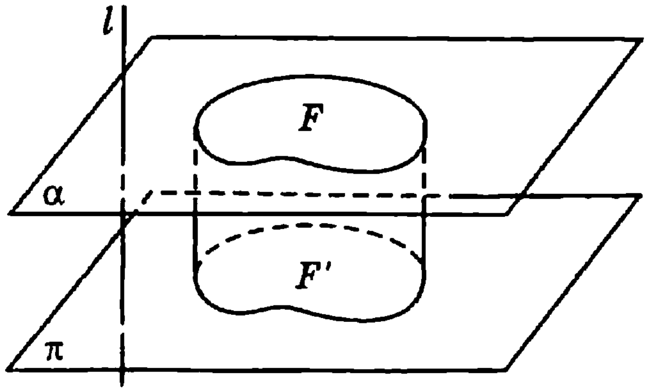
Для нахождения объемов фигур удобно объединить некоторые фигуры в один класс. С этой целью дадим общее определение цилиндра.

Пусть α и π — две параллельные плоскости, l — пересекающая эти плоскости прямая; F — фигура на одной из этих плоскостей, F' — ее параллельная проекция на другую плоскость в направлении прямой l (рис. 179, *а*). Отрезки, соединяющие точки фигуры F с их проекциями, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть *цилиндром*. Фигуры F и F' называются *основаниями* цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называют *высотой* цилиндра.

Если в качестве параллельной проекции берется ортогональная, т. е. прямая l перпендикулярна плоскостям α и π, то цилиндр называется *прямым* (рис. 179, *б*). В противном случае цилиндр называется *наклонным*.



а)



б)

Рис. 179

Заметим, что частным случаем цилиндра является призма. Если основание F цилиндра является кругом, то цилиндр называется круговым.

Ранее мы рассматривали только круговые цилиндры и называли их просто цилиндрами.

Здесь мы выведем формулу для вычисления объема прямого цилиндра, основанием которого является произвольная плоская фигура.

***Теорема.* Объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.**

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда в основании цилиндра $Ф_1$ квадрат со стороной, равной единице, и высота которого равна h (рис. 180, *а*). Так как единица измерения длины укладывается в высоте h раз, то и единичный куб будет укладываться в этом цилиндре h раз, и, следовательно, объем цилиндра равен h.

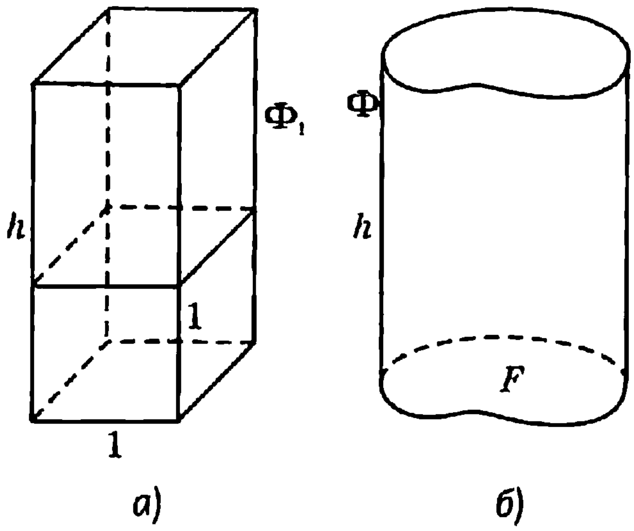


Рис. 180

Пусть теперь Ф — прямой цилиндр, основанием которого служит фигура F площадью S, и высота которого равна h (рис. 180, *б*). Так как единичный квадрат укладывается в основании S раз, то и цилиндр $Ф_1$ будет укладываться в цилиндре Ф S раз.

Таким образом, единица измерения объема укладывается в цилиндре $Ф_1$ h раз и цилиндр $Ф_1$ укладывается в цилиндре Ф S раз. Следовательно, единица измерения объема будет укладываться в цилиндре Ф $S \cdot h$ раз, т. е. имеет место формула

$$\boxed{V = S \cdot h,}$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра. ◁■

Параллелепипед, призма и круговой цилиндр являются частными случаями цилиндра.

Следствие 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c,}$$

где a, b, c — ребра параллелепипеда.

Следствие 2. Объем прямой призмы равен произведению площади его основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$\boxed{V = S \cdot h,}$$

где S — площадь основания, h — высота призмы.

Следствие 3. Объем прямого кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h.}$$

Пример 1. Осевое сечение прямого кругового цилиндра — квадрат со стороной, равной a. Найти объем цилиндра.

Решение. Высота данного цилиндра равна a, диаметр основания также равен a. Площадь основания равна $\frac{\pi a^2}{4}$. Таким образом, $V = \frac{\pi a^3}{4}$.

Пример 2. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений равны 3 м^2 и 6 м^2. Найти объем параллелепипеда.

Решение. Найдем высоту данного параллелепипеда. Известно, что $h \cdot d_1 = 3$ м^2 и $h \cdot d_2 = 6$ м^2, где d_1 и d_2 — диагонали ромба, лежащего в основании данного параллелепипеда. Значит, $d_1 : d_2 = 1 : 2$ и $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 1$ м^2, т. е. $d_1 = 1$ м и $d_2 = 2$ м. Отсюда $h = 3$ м и $V = 3$ м^3.

Пример 3. Через вершину A и ребро B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ провели плоскость. Какая из частей призмы, на которые она разбивается плоскостью, имеет больший объем?

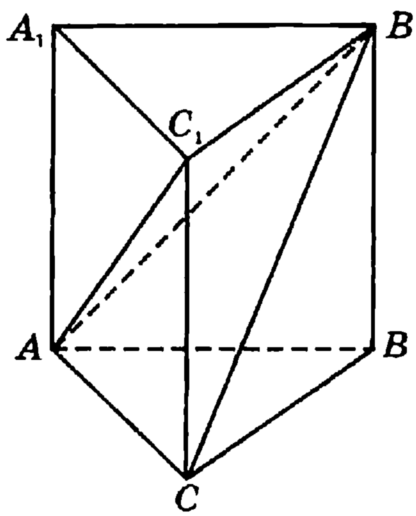


Рис. 181

Решение. На рисунке 181 плоскость AB_1C_1 разбивает правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на пирамиду $AA_1B_1C_1$ и многогранник AB_1C_1CB, который в свою очередь можно разбить на две треугольные пирамиды — B_1ABC и C_1ACB_1. Причем пирамиды $AA_1B_1C_1$ и B_1ABC равны (треугольник AB_1C_1 равен треугольнику B_1AC по сторонам). Значит, равны и их объемы. Таким образом, объем многогранника AB_1C_1CB больше объема пирамиды $AA_1B_1C_1$.

Упражнения

37.1. Может ли объем фигуры в пространстве быть: а) отрицательным числом; б) нулем?

37.2. Приведите примеры равновеликих, но не равных пространственных фигур?

37.3. Чему равен объем пространственного креста (рис. 182), если ребра образующих его кубов равны единице?

37.4. Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке 183?

37.5. Дан куб с ребром, равным 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см (рис. 184). Найдите объем оставшейся части.

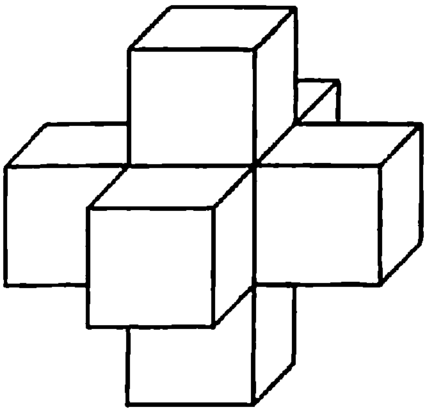


Рис. 182

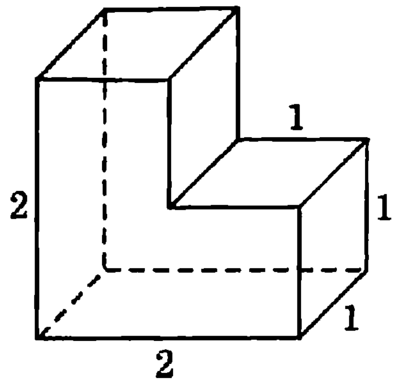


Рис. 183

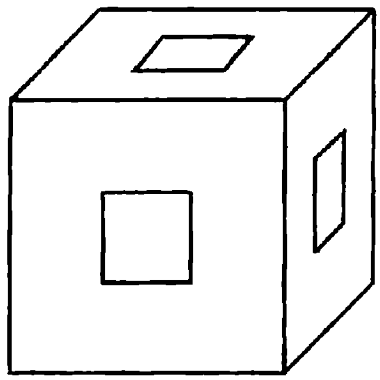


Рис. 184

37.6. Через два противоположных ребра куба провели плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

37.7. Является ли частным случаем цилиндра: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) наклонный параллелепипед; г) пирамида?

37.8. Одна кружка вдвое выше другой, зато другая в полтора раза шире. Какая кружка вместительнее?

37.9. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.

37.10. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота — 8 см.

37.11. Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз;

б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, и n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

37.12. Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) $1 : 2$; б) $1 : 3$; в) $1 : n$?

○ **37.13.** Диагональ куба равна 2 см. Найдите его объем.

○ **37.14.** Найдите высоту правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания равна 20 см, а объем — 4800 см^3.

○ **37.15.** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

○ **37.16.** Найдите формулу объема правильной n-угольной призмы, высота которой равна h, а сторона основания равна a.

○ **37.17.** Объем правильной шестиугольной призмы равен V. Определите объем призмы, вершинами оснований которой являются середины сторон оснований данной призмы.

○ **37.18.** Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника со сторонами, равными 5 см и 3 см, вокруг неравных сторон. Как относятся объемы цилиндров?

○ **37.19.** Найдите объем фигуры, которая получается при вращении квадрата вокруг его стороны, равной a.

○ **37.20.** Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.

○ **37.21.** В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 5 см и образуют угол в 60°. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определите объем этого параллелепипеда.

○ **37.22.** Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите объем цилиндра.

○ **37.23.** В цилиндрический сосуд, диаметр которого равен 9 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали?

○ **37.24.** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого?

● **37.25.** Через точку окружности основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под углом φ к этому основанию. Радиус основания цилиндра равен R. Найдите объем части цилиндра, отсекаемой плоскостью.

● **37.26.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через центр куба, делит его на две равновеликие части.

● **37.27.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через середину оси прямого кругового цилиндра, делит его на две равновеликие части.

● **37.28.** Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной, равной 1, а высота равна 0,5.

§ 38. Принцип Кавальери

Рассмотрим метод вычисления объемов пространственных фигур, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур — Φ_1 и Φ_2 — в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 185), то объемы исходных пространственных фигур равны.

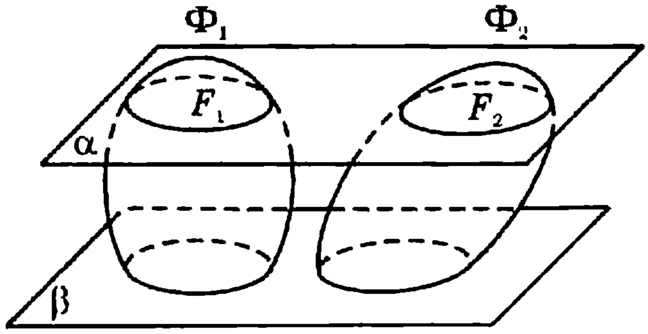


Рис. 185

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2, составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными некоторой заданной плоскости (рис. 185). Считая слои прямыми цилиндрами, из равенства площадей их оснований и равенства высот получаем, что равны и объемы соответствующих слоев. Следовательно, равны и объемы фигур Φ_1 и Φ_2, составленных из этих слоев.

Теорема. **Объем наклонного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.**

Доказательство. Для данного наклонного цилиндра с основанием F площади S и высотой h рассмотрим прямой цилиндр с таким же основанием и высотой. Расположим эти два цилиндра

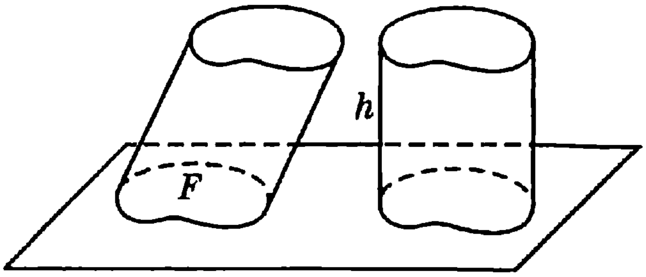


Рис. 186

так, чтобы их основания находились на одной плоскости (рис. 186). Тогда сечения данных цилиндров плоскостями, параллельными этой плоскости, дадут фигуры, равные фигуре F, и, следовательно, они будут иметь равные площади. По принципу Кавальери отсюда следует равенство объемов цилиндров, и значит, для объема наклонного цилиндра имеет место формула

$$\boxed{V = S \cdot h,}$$

где S — площадь основания, h — высота цилиндра. ◁■

Следствие 1. Объем наклонной призмы с площадью основания S и высотой h вычисляется по формуле

$$\boxed{V = S \cdot h.}$$

Следствие 2. Объем наклонного кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h.}$$

Дадим общее определение конуса, позволяющее объединить в один класс рассмотренные ранее конусы и пирамиды.

Пусть F — фигура на плоскости π, S — точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть *конусом* (рис. 187).

Фигура F называется *основанием* конуса, точка S — *вершиной* конуса, а отрезки — *образующими* конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется *высотой* конуса.

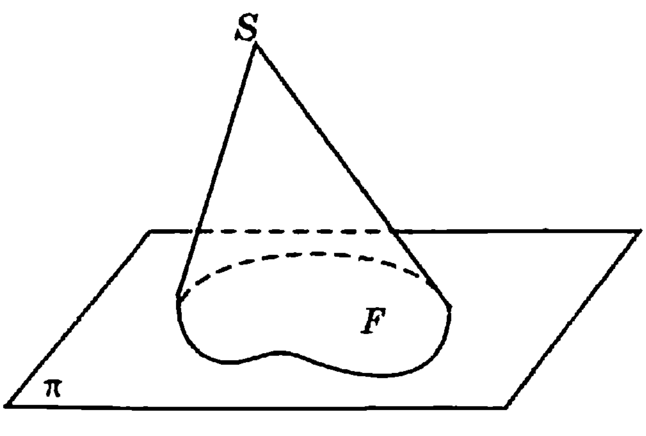


Рис. 187

В случае если F является кругом, конус называется *круговым*. Если высота кругового конуса проходит через центр основания, то такой конус называется *прямым круговым*. Раньше мы рассматривали прямые круговые конусы и называли их просто конусами. Заметим, что в новом понимании частным случаем конуса является также пирамида.

Используя принцип Кавальери, докажем следующую теорему.

***Теорема.* Если два конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.**

Доказательство. Пусть конусы Φ_1 и Φ_2 имеют высоты, равные h, а основания площади S расположены в одной плоскости α (рис. 188). Проведем плоскость, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant h$. Тогда фигуры F_1 и F_2, получающиеся в сечениях конусов этой плоскостью, подобны соответствующим основаниям конусов, и коэффициент подобия k в обоих случаях равен $(h - x) : h$. Следовательно, площади S_1 и S_2 фигур F_1 и F_2 соответственно выражаются формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ и, значит, равны. Из принципа Кавальери получаем, что объемы конусов равны. ◁■

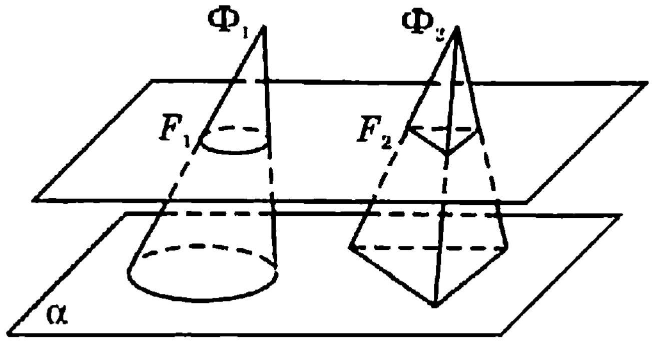


Рис. 188

Пример 1. Найти объем наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом 45°.

Решение. Площадь основания цилиндра равна πR^2, а высота $h = b \cdot \sin 45° = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $V = \frac{\pi R^2 b\sqrt{2}}{2}$. ◁■

Пример 2. Основанием призмы является треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 3 см; боковое ребро равно 4 см и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найти ребро равновеликого куба.

Решение. В основании данной призмы лежит равнобедренный треугольник, его высота, опущенная на основание 2 см, равна $\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ (см), площадь треугольника равна $2\sqrt{2}$ см^2. Высота призмы равна $4 \cdot \sin 45° = 2\sqrt{2}$ (см). Следовательно, $V = 8$ см^3. Таким образом, $x^3 = 8$, где x — сторона искомого куба, $x = 2$ см. ◁■

Пример 3. Доказать, что из всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро данной длины, наибольший объем имеет прямая призма.

Р е ш е н и е. Пусть у данных призм S — площадь основания, b — боковое ребро. Тогда объем прямой призмы будет равен $S \cdot b$, а наклонной — $S \cdot b \cdot \sin\varphi$, где φ — угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Поскольку $0 < \sin\varphi < 1$, имеем: $S \cdot b > S \cdot b \cdot \sin\varphi$. Таким образом, из данных призм наибольший объем имеет прямая призма. ◁

Упражнения

38.1. Верно ли, что две призмы, имеющие общее основание, равновелики?

38.2. Верно ли, что две пирамиды, имеющие общее основание и вершины, расположенные в плоскости, параллельной основанию, равновелики?

38.3. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований наклонного кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?

38.4. Основаниями наклонной призмы являются квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?

38.5. Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь основания одного в два раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

38.6. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину и центр основания наклонного кругового конуса, делит его на равновеликие части?

38.7. Основанием пирамиды является квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?

38.8. Два конуса имеют равные высоты, а площадь основания одного в три раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

○ **38.9.** Найдите объем наклонной призмы, площадь основания которой равна S, а боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом φ.

○ **38.10.** Стороны основания параллелепипеда равны 6 дм и 8 дм, угол между ними составляет 45°. Боковое ребро равно 7 дм и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем параллелепипеда.

○ **38.11.** Найдите объем наклонного параллелепипеда, у которого площадь основания равна Q, а боковое ребро, равное b, наклонено к плоскости основания под углом φ.

○ **38.12.** Найдите объем наклонного кругового цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая b наклонена к плоскости основания под углом φ.

○ **38.13.** Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в $60°$ и равно 2 м. Найдите объем параллелепипеда.

○ **38.14.** Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна d. Найдите объем призмы.

● **38.15.** Докажите, что любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей наклонного параллелепипеда, делит его на две равновеликие части.

● **38.16.** Даны три параллелепипеда. Проведите плоскость так, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объема.

● **38.17.** Пусть в сечениях пространственных фигур Φ_1 и Φ_2 параллельными плоскостями получаются фигуры F_1 и F_2 соответственно, причем площади фигур F_2 в k раз больше площадей фигур F_1. Как связаны между собой объемы фигур Φ_1 и Φ_2?

● **38.18.** Докажите, что фигура Φ, полученная вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $y = 1$, вокруг оси Oy, равновелика прямой призме, в основании которой прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными единице, высота которой равна π. Нарисуйте фигуру Φ и найдите ее объем.

§ 39. Объем пирамиды

Первые упоминания о вычислении объема пирамиды найдены в папирусах древних вавилонян и египтян (свыше 3000 лет до н. э.). Любопытно, что они не вывели общей формулы для нахождения объема пирамиды, а вычисляли объемы конкретных пирамид. Так, им удалось найти объем правильной четырехугольной пирамиды с основанием, равным единице измерения, и высотой, равной 0,5. Для этого они брали куб с ребром, равным единице измерения, и разбивали его на шесть равных правильных четырехугольных пирамид. Основаниями этих пирамид будут грани куба, а вершина каждой из них будет находиться в центре куба (рис. 189). Все шесть полученных пирамид равны, отсюда получаем, что объем каждой из них равен одной шестой объема куба.

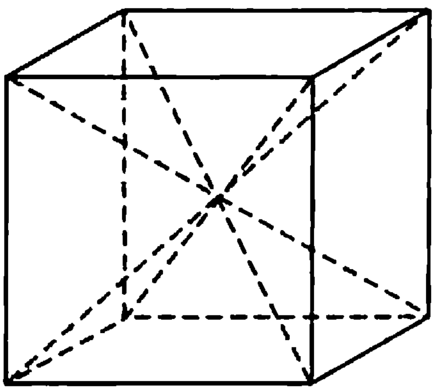


Рис. 189

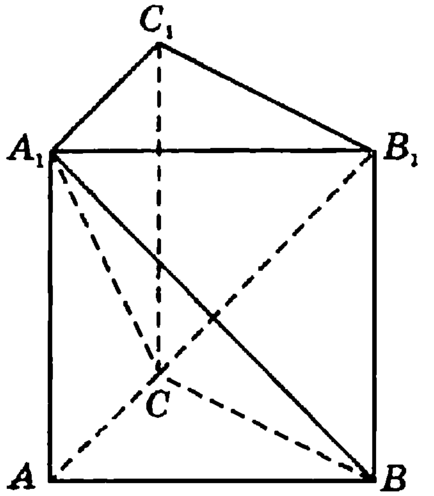


Рис. 190

***Теорема.* Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.**

Доказательство. Рассмотрим сначала случай треугольной пирамиды. Пусть A_1ABC треугольная пирамида. Достроим ее до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 190). Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1, разбивают эту призму на три пирамиды — A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ — с вершинами в точке A_1. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1, так как диагональ CB_1 разбивает параллелограмм CBB_1C_1 на два равных треугольника. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, пирамиды имеют равные объемы. Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота.

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой — многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа объемы этих пирамид равны и, следовательно, имеет место формула

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S \cdot h,}$$

где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота. ◁■

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Впервые формулу объема пирамиды в общем виде вывел Архимед. Для этого он разработал следующий метод: высота пирамиды разбивается на n равных частей, и через точки деления проводят плоскости, параллельные основанию пирамиды. При этом пирамида разбивается на слои. Для каждого такого слоя строятся две призмы, одна из которых содержится в слое, а другая содержит слой (чертеж к этой задаче получил название «чертовой лестницы», рисунок 191).

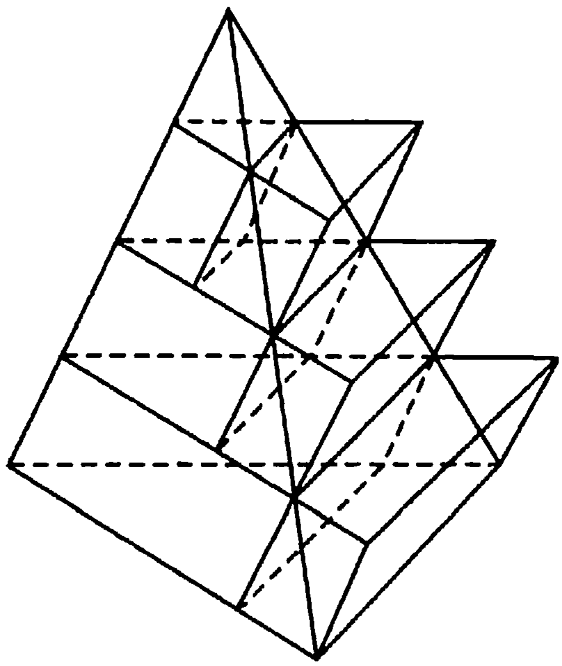


Рис. 191

Зная, что объем призмы есть произведение площади основания на высоту, получают, что сумма объемов призм, содержащихся в слоях, равна $\frac{1}{3}SH\left(1-\frac{1}{n}\right)^3$, где S — площадь основания пирамиды и H — высота; сумма объемов призм, содержащих слои, равна $\frac{1}{3}SH\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$. Тогда если V — объем пирамиды, то

$$\frac{1}{3}SH\left(1-\frac{1}{n}\right)^3 < V < \frac{1}{3}SH\left(1+\frac{1}{n}\right)^3.$$

При увеличении n левая и правая части сколь угодно мало отличаются от $\frac{1}{3}SH$, и следовательно, получаем формулу объема пирамиды $V = \frac{1}{3}SH$.

Пример 1. Найти объем тетраэдра с ребром, равным 1.

Решение. Высота правильного треугольника со стороной 1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, площадь такого треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Высоту данного тетраэдра $ABCD$ находят из прямоугольного треугольника DOM, где DO — высота тетраэдра, O — центр треугольника ABC, M — середина ребра AB. $MO = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Таким образом, $DO = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Следовательно, объем равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$. ◀

Пример 2. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a, угол между боковой гранью и основанием составляет 45°. Найти объем пирамиды.

Решение. Пусть в основании данной пирамиды лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$, SO — высота пирамиды, O — центр $ABCDEF$; $\angle SMO = 45°$, M — середина какой-нибудь стороны шестиугольника, например AB. Тогда $SO = MO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Площадь правильного шестиугольника со стороной a равняется $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Итак, объем данной пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{4}a^3$. ◀

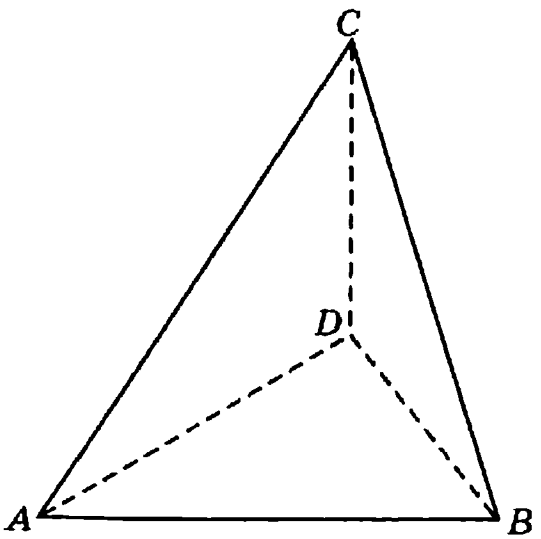


Рис. 192

Пример 3. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найти объем пирамиды.

Решение. Пусть дана треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 192). $\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 90°$, $AD = BD = CD = b$. Примем треугольник ABD за основание пирамиды. Тогда CD будет ее высотой. Поэтому объем пирамиды будет равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot b = \frac{1}{6}b^3$. ◀

Упражнения

39.1. Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объема призмы составляет объем пирамиды?

39.2. Найдите объем пирамиды, высота которой равна h, а в основании — прямоугольник со сторонами a и b.

39.3. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, высота — h.

39.4. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна h, а диагональ основания — d.

39.5. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.

39.6. Как относятся объемы правильной треугольной пирамиды и правильной треугольной призмы, если основания и высоты у них равны?

39.7. Как относятся объемы двух правильных пирамид с равными основаниями, но разными высотами h_1 и h_2?

39.8. Через середину высоты пирамиды параллельно ее основанию проведено сечение. Найдите объем отсеченной пирамиды, если объем данной пирамиды равен 48 см^3.

39.9. Верно ли, что пирамиды, имеющие общее основание и вершины, расположенные в плоскости, параллельной основанию, равновелики?

39.10. Как изменится объем правильной пирамиды, если высота ее будет увеличена в n раз, а сторона основания уменьшена во столько же раз?

○ **39.11.** Напишите формулу объема правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

○ **39.12.** Напишите формулу объема правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и боковым ребром b.

○ **39.13.** В правильной четырехугольной пирамиде высота — 3 м, боковое ребро — 5 м. Найдите ее объем.

○ **39.14.** Объем правильной шестиугольной пирамиды равен 6 см^3. Сторона основания — 1 см. Найдите боковое ребро.

○ **39.15.** Напишите формулу объема правильной n-угольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

○ **39.16.** Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна b, а плоские углы при вершине равны $60°$, $90°$ и $90°$.

○ **39.17.** Пирамида, объем которой равен V, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объем оставшейся части пирамиды.

○ **39.18.** В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объем тетраэдра.

○ **39.19.** Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1.

○ **39.20.** Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объем.

○ **39.21.** В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны a, проведите сечение, проходящее через вершину D параллельно ребру AC и точку M — середину ребра BC. Определите:

а) вид сечения;

б) площадь сечения;

в) угол φ между плоскостью сечения и плоскостью ABC тетраэдра;

г) объемы многогранников, на которые разбивается данный многогранник плоскостью сечения.

● **39.22.** Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной a. Найдите объем этой пирамиды.

● **39.23.** Два куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на угол $60°$ по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

● **39.24.** Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Один из них повернут на $60°$ по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

● **39.25.** Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объем общей части этих тетраэдров.

§ 40. Объем конуса

Напомним, что конусом в пространстве мы называем фигуру, образованную отрезками, соединяющими точки некоторой плоской фигуры, называемой основанием конуса, с точкой, лежащей вне плоскости основания и называемой вершиной конуса.

Теорема. **Объем конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.**

Доказательство. Для данного конуса с основанием площадью S и высотой h рассмотрим какую-нибудь пирамиду с той же площадью основания и высотой (рис. 188 на с. 337). Тогда эти пирамида и конус имеют равные объемы. Но для объема пирамиды имеет место формула

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h.$$

Следовательно, она имеет место и для объема произвольного конуса. ◄■

В частности, для кругового конуса, в основании которого круг радиуса R и высота которого равна h, имеет место формула

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.}$$

Для данного конуса рассмотрим плоскость, параллельную основанию и пересекающую конус. Часть конуса, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется *усеченным конусом* (рис. 193).

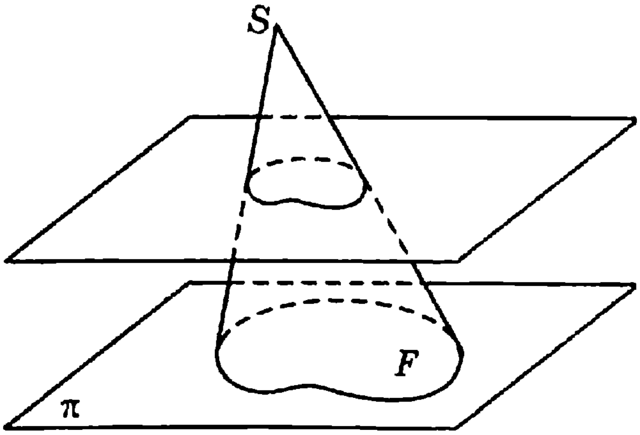


Рис. 193

Полученное при этом сечение конуса также называется *основанием* усеченного конуса. Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой* усеченного конуса.

Теорема.* **Объем усеченного конуса выражается формулой**

$$\boxed{V = \frac{1}{3}g(S + \sqrt{Ss} + s),}$$

где S, s — площади оснований, g — высота усеченного конуса.

Доказательство. Представим усеченный конус как разность большого и меньшего конусов. Тогда объем усеченного конуса находится как разность объемов большого и меньшего конусов.

Если площади оснований большого и меньшего конусов равны соответственно S, s, а высоты — H, h, то объем усеченного конуса находится по формуле

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выразить высоты H и h через высоту g усеченного конуса и площади оснований. Ясно, что $H = g + h$. Выразим h через g, S и s. Заметим, что в сечении конуса плоскостью, параллельной основанию, получается фигура, подобная основанию, и коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины конуса до плоскости сечения и плоскости основания. Кроме того, отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Следовательно, имеем равенство

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{g+h}\right)^2, \text{ или } \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{h}{g+h},$$

из которого можно найти неизвестную высоту h.

$$h = \frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}.$$

Подставляя теперь h в выражение для объема усеченного конуса, получим

$$V = \frac{1}{3}\left(S\left(\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}+g\right)-s\frac{g\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{3}\left(g\frac{S\sqrt{S}-s\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}g(S + \sqrt{Ss} + s).$$ ◀

Формула объема усеченного конуса, в частности, применима к нахождению объемов усеченной пирамиды и усеченного прямого кругового конуса. Так, например, объем усеченного прямого кругового конуса, в основаниях которого круги радиусов R и r, а высота равна h, выражается формулой

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R\cdot r + r^2).}$$

Пример 1. По высоте h равностороннего конуса найти его объем.

Решение. Равносторонним называется конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник. Таким образом, радиус R основания конуса равен половине стороны равностороннего треугольника, высота которого равна h. Отсюда $R = \frac{\sqrt{3}}{3}h$, и объем конуса равен $\frac{1}{3} \cdot \pi \frac{3}{9} \cdot h^2 \cdot h = \frac{\pi}{9} h^3$. ◀

Пример 2*. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 3 м, стороны оснований — 5 м и 1 м. Найти объем.

Решение. Воспользуемся формулой объема усеченного конуса. В нашем случае площадь S нижнего основания равна 25 м^2, площадь s верхнего основания равна 1 м^2. Найдем высоту OO_1, которая соединяет центры нижнего и верхнего оснований (рис. 194).

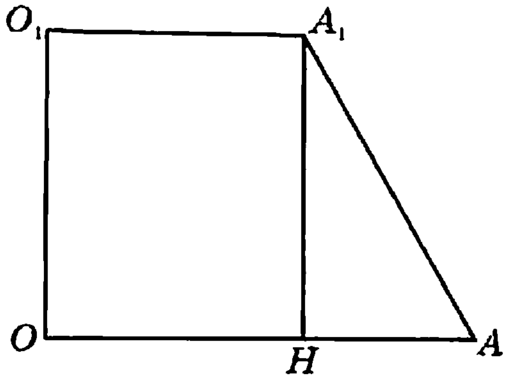


Рис. 194

В прямоугольной трапеции OO_1A_1A находим: $OA = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5$ м (половина диагонали нижнего основания), $O_1A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м (половина диагонали верхнего основания). Проведем $A_1H \perp OA$. Тогда $AH = AO - OH = AO - O_1A_1 = 2\sqrt{2}$ (м); $AA_1 = 3$ м; $OO_1 = A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 1$ (м). Итак, объем равен

$\frac{1}{3} \cdot 1(25 + 5 + 1) = 10\frac{1}{3}$ (м^3). ◀

Пример 3*. Усеченный прямой круговой конус, радиусы оснований которого равны 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?

Решение. По условию задачи $\frac{1}{3}\pi h(25 + 15 + 9) = \frac{1}{3}\pi h \cdot R^2$, где R — искомый радиус. Следовательно, $R = 7$ см. ◀

Упражнения

40.1. Во сколько раз увеличится объем кругового конуса, если: а) высоту увеличить в 3 раза; б) радиус основания увеличить в 2 раза?

40.2. Изменится ли объем кругового конуса, если радиус основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в два раза?

40.3. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 40 π см^3.

40.4. Объем конуса равен V. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. В каком отношении находятся объемы полученных частей конуса?

40.5. Высота конуса h равна 4, образующая l — 5. Найдите объем конуса.

40.6. Высота прямого кругового конуса равна 3 см, образующая — 5 см. Найдите его объем.

40.7. Диаметр основания прямого кругового конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения — 90°. Вычислите объем конуса.

40.8. Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг катета, равного 3 см.

○ **40.9.** Напишите формулу объема прямого кругового конуса с радиусом основания R и образующей b.

○ **40.10.** Образующая прямого кругового конуса равна 4 дм, угол при вершине осевого сечения равен 90°. Найдите объем конуса.

○ **40.11.** Объем прямого кругового конуса равен V, радиус основания равен R. Найдите площадь осевого сечения.

○ **40.12.** Образующая прямого кругового конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.

○ **40.13.** Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объем тела вращения.

○ **40.14.** Два конуса получены от вращения неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг каждого из катетов. Равны ли объемы этих конусов?

○ **40.15.** Равнобедренная трапеция, основания которой равны 4 см и 6 см, а высота — 3 см, вращается относительно оси симметрии. Найдите объем тела вращения.

○ **40.16.** Равносторонний треугольник со стороной, равной единице, вращается вокруг оси, проходящей через вершину и параллельной высоте треугольника. Найдите объем тела вращения.

● **40.17.** Площади оснований усеченной пирамиды равны 245 м^2 и 80 м^2, а высота исходной пирамиды равна 35 м. Найдите объем.

● **40.18.** Найдите объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, если стороны ее оснований a и b, боковое ребро составляет с основанием угол 30° ($a > b$).

● **40.19.** Радиусы оснований усеченного прямого кругового конуса — R и r. Образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите его объем.

● **40.20.** Объем усеченного прямого кругового конуса равен 584π см^3, а радиусы оснований — 10 см и 7 см. Найдите высоту усеченного конуса.

§ 41. Объем шара

Рассмотрим вопрос о нахождении формулы объема шара.

Теорема. **Объем шара радиуса R выражается формулой**

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Доказательство. Пусть дан полушар радиусом R, основание которого расположено на плоскости α. Рассмотрим цилиндр, основание которого — круг радиусом R, расположенный в той же плоскости α, и высота которого равна R (рис. 195).

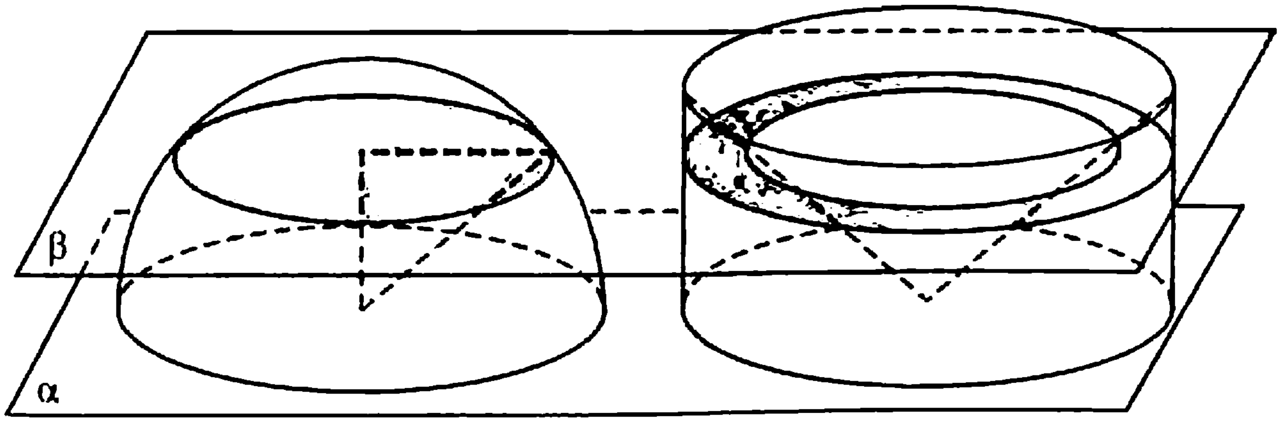


Рис. 195

В цилиндр впишем конус, основанием которого будет верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания цилиндра. Докажем, что фигура, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, и данный полушар имеют равные объемы.

Проведем плоскость β, параллельную плоскости α, на расстоянии x от нее, $0 \leqslant x \leqslant R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиусом $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площадью $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении другой фигуры получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего — R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и построенная фигура имеют равные объемы. Вычислим этот объем. Он равен разности объемов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_{ц} - V_{к} = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше объема полушара и, следовательно, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$ ◁■

Шаровым кольцом называется фигура, заключенная между поверхностями двух шаров с общим центром.

Шаровым сегментом называется меньшая часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара (рис. 196). Круг, образованный сечением шара этой плоскостью, называется *основанием* шарового сегмента. Часть радиуса шара, лежащая внутри шарового сегмента и перпендикулярная его основанию, называется *высотой* шарового сегмента.

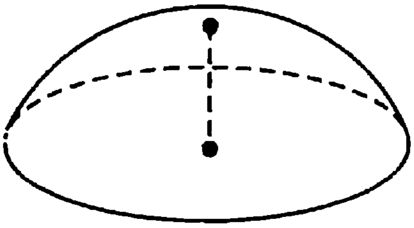


Рис. 196

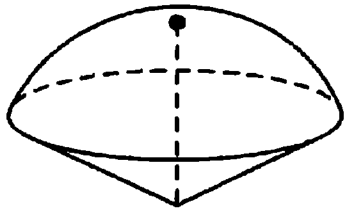


Рис. 197

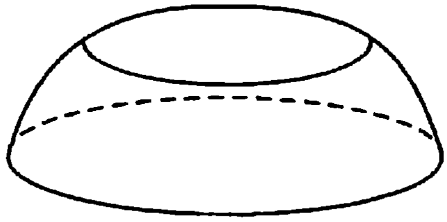


Рис. 198

Теорема*. **Объем шарового сегмента высоты h, отсекаемого от шара радиуса R, выражается формулой**

$$\boxed{V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).}$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, изображенную на рисунке 195, и предположим, что плоскость β отсекает от полушара сегмент высоты h. Тогда она отсекает от цилиндра и вписанного в него конуса цилиндр и усеченный конус высоты h. По принципу Кавальери объем V шарового сегмента будет равен разности объемов этих цилиндра и усеченного конуса. Объем $V_ц$ цилиндра равен $\pi R^2 h$. Объем $V_{ус.к}$ усеченного конуса равен разности объемов большого и маленького конусов, т. е.

$$V_{ус.к} = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R-h)^3 = \pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Следовательно,

$$V = V_ц - V_{ус.к} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

Шаровым сектором называется часть шара, составленная из шарового сегмента и конуса, основанием которого является основание шарового сегмента, а вершиной — центр шара (рис. 197).

Шаровым поясом будем называть часть шара, заключенную между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 198).

Сечения шара этими плоскостями называются *основаниями* шарового пояса, а расстояние между ними называется *высотой* шарового пояса.

Пример 1. Найти объем шара, если площадь его сечения, делящего радиус пополам, равна 9π.

Решение. Пусть O и O_1 — соответственно центры данного шара и сечения; R, r — радиусы соответственно шара и сечения (рис. 199).

Тогда $OO_1 = \frac{R}{2}$ и $r^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2$. Площадь сечения $\pi r^2 = 9\pi$, следовательно, $r = 3$. Поэтому $R^2 = 12$, $R = 2\sqrt{3}$, и, таким образом, объем шара равен $\frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 32\sqrt{3}\pi$.

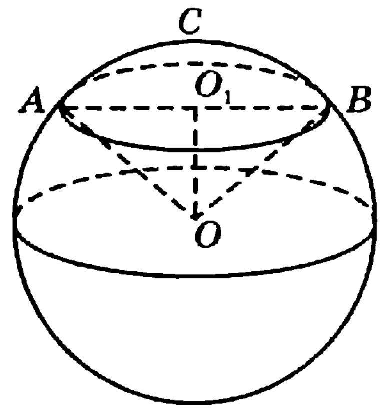


Рис. 199

Пример 2. Найти объем шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен α.

Решение. Радиус вписанного шара равен $\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ (см. пример 2 § 33*, на рисунке 157 в нашем случае $PH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\angle OPH = \frac{\alpha}{2}$). Таким образом, искомый объем равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{54}a^3\mathrm{tg}^3\,\frac{\alpha}{2}$.

Пример 3*. Высота шарового сегмента равна $0{,}1D$, где D — диаметр шара. Найти отношение объемов этого сегмента и шара.

Решение. Высота данного шарового сегмента $h = \frac{D}{10} = \frac{R}{5}$, где R — радиус шара. Таким образом, объем шарового сегмента равен $\pi\frac{R^2}{25} \cdot \left(R - \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{5}\right) = \frac{14}{25 \cdot 15}\pi R^3$. Таким образом, искомое отношение равно $\left(\frac{14}{25 \cdot 15}\pi R^3\right) : \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 7 : 250$. ◀

Упражнения

41.1. Радиус шара равен 1 см. Найдите его объем.

41.2. Найдите объем шара, диаметр которого равен 4 см.

41.3. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить: а) в 3 раза; б) в 4 раза?

41.4. Радиусы трех шаров равны 3 см, 4 см и 5 см. Определите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

41.5. Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиуса 6 см?

○ **41.6.** Во сколько раз объем Земли больше объема Луны? (Диаметр Земли равен 13 тыс. км, диаметр Луны — 3,5 тыс. км.)

○ **41.7.** Найдите объем шара, описанного около куба с ребром, равным 1.

○ **41.8.** Свинцовый шар, диаметр которого равен 20 см, переплавляется в шарики с диаметром, в 10 раз меньшим. Сколько таких шариков получится?

● **41.9.** Найдите формулу объема шарового кольца, заключенного между поверхностями шаров радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$).

○ **41.10.** Запишите формулу объема шара через его диаметр (D).

○ **41.11.** Диаметр одного шара в 6 раз больше диаметра другого шара. Найдите отношение их объемов.

○ **41.12.** Докажите, что объемы шаров относятся как кубы их радиусов (диаметров).

○ **41.13.** Найдите диаметр шара, если при погружении в воду он вытесняет 36π см^3 воды.

○ **41.14.** Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем шара.

○ **41.15.** Медный куб, ребро которого равно 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Потерями металла при переплавке можно пренебречь.)

○ **41.16.** Найдите высоту прямого кругового цилиндра, равновеликого шару радиуса R, если диаметр основания цилиндра равен диаметру шара.

● **41.17.** Найдите объем шара, вписанного в октаэдр с ребром a.

● **41.18.** Найдите объем шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

● **41.19.** Шар радиуса 10 см пересечен плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объем отсеченного шарового сегмента.

● **41.20.** Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

● **41.21.** Найдите формулу объема шарового сектора радиуса R с углом при вершине φ.

§ 42. Площадь поверхности

Площадью поверхности многогранника по определению считают сумму площадей многоугольников, входящих в эту поверхность.

Площадь поверхности призмы состоит из площади боковой поверхности и площадей оснований.

Площадь поверхности пирамиды состоит из площади боковой поверхности и площади основания.

Рассмотрим вопрос о нахождении площадей поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса. Будем, как и раньше, называть их просто цилиндром и конусом.

Теорема. **Площадь поверхности цилиндра, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой**

$$\boxed{S = 2\pi R(R + b).}$$

Доказательство. Поверхность цилиндра состоит из поверхностей оснований и боковой поверхности (рис. 200). Разверткой боковой поверхности является прямоугольник с основанием $2\pi R$

и высотой b. Поэтому площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi Rb$, а площадь полной поверхности S вычисляется по формуле

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rb = 2\pi R(R + b).$$

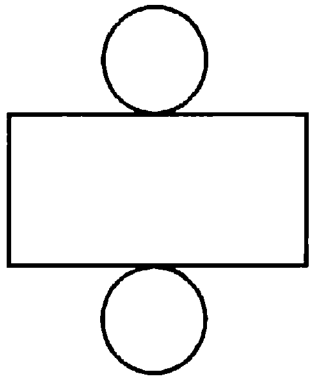


Рис. 200

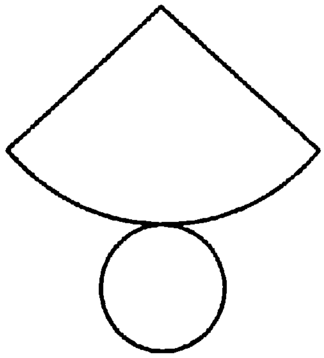


Рис. 201

***Теорема.* Площадь поверхности конуса, радиус основания которого равен R и образующая равна b, выражается формулой**

$$\boxed{S = \pi R(R + b).}$$

Доказательство. Поверхность конуса состоит из поверхности основания и боковой поверхности конуса. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (рис. 201), радиус которого равен образующей, а длина дуги — длине окружности основания конуса. Поэтому площадь боковой поверхности конуса равна πRb, а полная поверхность S вычисляется по формуле

$$S = \pi R(R + b).$$

Пример 1. Площадь боковой поверхности и объем цилиндра выражаются одним и тем же числом. Найти диаметр основания цилиндра.

Решение. Обозначим данное число m. Тогда $2\pi Rb = m$ и $\pi R^2 b = m$, где R, b — соответственно радиус основания и образующая данного цилиндра. Значит, $R = \frac{m}{2\pi b}$; $\pi \cdot \frac{m^2}{4\pi^2 b^2} \cdot b = m$, откуда $m = 4\pi b$. Таким образом, $R = 2$, а диаметр основания равен 4.

Пример 2. В основании пирамиды, боковые грани которой образуют с основанием равные углы, лежит ромб. Площадь одной из боковых граней равна Q. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Из условия задачи следует, что основанием высоты данной пирамиды является центр окружности, вписанной в ромб, т. е. точка пересечения его диагоналей. Все боковые грани являются равными треугольниками (по трем сторонам). Следовательно, площадь боковой поверхности равна $4Q$. ◁■

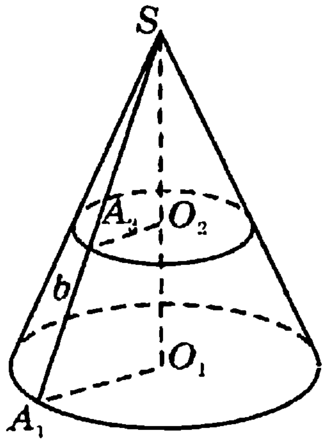
Пример 3*. Найти площадь поверхности усеченного конуса (прямого кругового) с основаниями радиусов R_1, R_2 и образующей b. Нарисуйте развертку поверхности усеченного конуса.

Решение. Найдем площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{бок}$). Она равна разности $S_1 - S_2$ боковых поверхностей двух конусов: одного с образующей b_1, другого — b_2, радиусы их оснований соответственно равны R_1 и R_2 (рис. 202, *а*). Образующая b усеченного конуса равна $b_1 - b_2$. Тогда $S_{бок} = S_1 - S_2 = \pi R_1 b_1 - \pi R_2 b_2$. Из подобных треугольников SO_1A_1 и SO_2A_2 имеем: $b_1 : b_2 = R_1 : R_2$. Учитывая, что $b_1 = b_2 + b$, получим $R_2 b_2 = R_1 b_2 - R_2 b$. Подставляя это выражение в формулу для площади боковой поверхности, будем иметь: $S_{бок} = \pi R_1(b_2 + b) - \pi(R_1 b_2 - R_2 b) = \pi(R_1 + R_2)b$.

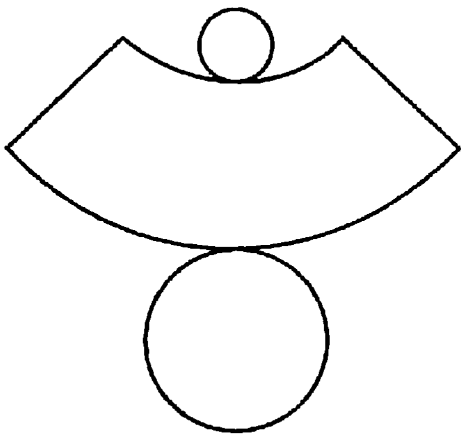
Таким образом, площадь S полной поверхности усеченного конуса выражается формулой

$$\boxed{S = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi(R_1 + R_2)b.}$$

На рисунке 202, *б* показана развертка поверхности усеченного конуса. ◁■



а)



б)

Рис. 202

Упражнения

42.1. Что принимается за боковую поверхность: а) цилиндра; б) конуса?

42.2. Чему равна площадь поверхности куба с ребром, равным 1?

42.3. Чему равна площадь поверхности: а) правильного тетраэдра с ребром, равным 1; б) икосаэдра с ребром, равным 1?

42.4. Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности.

42.5. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота — 3 м. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

42.6. Из прямоугольного листа бумаги образуйте боковую поверхность цилиндра. Сколькими способами это можно сделать? Сравните их площади.

42.7. Высота конуса h равна 6, радиус основания R — 8. Найдите площадь боковой поверхности.

42.8. Как изменится площадь боковой поверхности конуса, если радиус основания уменьшить: а) в 2 раза; б) в 4 раза; в) в 6 раз?

○ **42.9.** По высоте h равностороннего конуса найдите площадь его полной поверхности.

○ **42.10.** Как относятся между собой площади основания, боковой поверхности и полной поверхности в равностороннем конусе?

○ **42.11.** Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

○ **42.12.** Осевое сечение цилиндра — квадрат. Площадь основания равна 5. Найдите площадь поверхности цилиндра.

○ **42.13.** Радиус основания конуса равен 3 м, высота — 4 м. Найдите площадь поверхности конуса.

○ **42.14.** Образующая конуса равна 4 см, угол при вершине осевого сечения равен 90°. Найдите площадь боковой поверхности.

○ **42.15.** Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.

○ **42.16.** Найдите площадь поверхности правильной n-угольной призмы со стороной основания a и боковым ребром b.

○ **42.17.** В каком отношении делится боковая поверхность правильной треугольной призмы плоскостью, проходящей через средние линии ее оснований?

○ **42.18.** Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной призмы равна Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

○ **42.19.** Определите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

○ **42.20.** Развертка поверхности правильной треугольной пирамиды представляет собой равносторонний треугольник, площадь которого равна 80 см^2. Найдите площадь грани пирамиды.

○ **42.21.** Площадь боковой поверхности правильной пирамиды в два раза больше площади основания. Определите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

○ **42.22.** Площади боковых поверхностей двух конусов, полученных от вращения прямоугольного треугольника вокруг каждого из его катетов, равны. Определите вид треугольника.

● **42.23.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус таким образом, что его основание вписано в основание пирамиды, а вершина совпадает с вершиной пирамиды. Как относятся площади боковых поверхностей этих фигур?

● **42.24.** Радиусы оснований усеченного конуса — R и r. Образующая наклонена к плоскости основания под углом: а) 60°; б) 45°. Найдите площадь полной поверхности.

§ 43. Площадь поверхности шара

Для нахождения площади поверхности шара уже нельзя, как мы это делали для цилиндра и конуса, воспользоваться разверткой, так как поверхность шара нельзя развернуть на плоскость. Поэтому воспользуемся другим методом нахождения площади поверхности шара.

Опишем около шара радиуса R какой-нибудь многогранник, проводя касательные плоскости к этому шару. Представим полученный многогранник составленным из пирамид, вершины которых совпадают с центром шара, а основаниями являются грани многогранника (рис. 203).

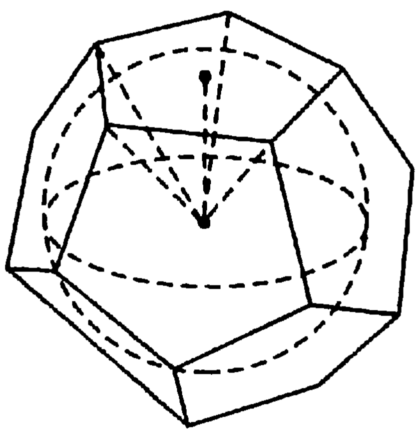


Рис. 203

Ясно, что высоты этих пирамид равны радиусу шара. Отсюда объем многогранника вычисляется по формуле

$$V_м = \frac{1}{3} S_м R,$$

где $S_м$ — площадь поверхности многогранника.

Будем и дальше проводить касательные плоскости к шару, отсекая вершины многогранников. Получающиеся при этом многогранники будут все больше и больше приближаться к шару, а их поверхности будут приближаться к поверхности шара. Учитывая, что при этом все время сохраняется приведенная выше формула объема, получаем, что для объема шара V и его площади поверхности S также будет выполняться формула $V = \frac{1}{3}SR$. С другой стороны, объем шара выражается формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Следовательно, имеет место равенство $\frac{1}{3}SR = \frac{4}{3}\pi R^3$, из которого получаем формулу площади поверхности шара

$$\boxed{V = 4\pi R^2.}$$

Пример 1. Через середину радиуса шара перпендикулярно ему проведена плоскость. Площадь сечения равна 48 см^2. Найти площадь поверхности шара.

Решение. Площадь поверхности шара равна $4\pi R^2$, где R — радиус шара. По условию задачи $R^2 = \frac{4}{3}r^2$, где r — радиус сечения; $4\pi\frac{4}{3}r^2 = \frac{16}{3}\pi r^2$, но $\pi r^2 = 48$. Итак, искомая площадь равна $16^2 = 256$ (см^2). ◁■

Пример 2. Шар пересечен двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, одна из которых проходит через центр шара, а другая — через точку, делящую диаметр шара в отношении 4 : 9. Найти площадь поверхности шара, если диаметр меньшей окружности равен 60 см.

Решение. На рисунке 204, *а* изображены сечения, одним из которых является большой круг (O — центр шара, O_1 — центр второго сечения). По условию $AO_1 : O_1B = 4 : 9$, $CD = 60$ см. Обратимся к рисунку 204, *б*, где изображена окружность большого круга. Если $AB = d$, то $AO_1 = \frac{4}{13}d$ и $O_1B = \frac{9}{13}d$. Из прямоугольного треугольника ACB ($\angle C$ прямой, так как опирается на диаметр окружности) следует, что $AO_1 : CO_1 = CO_1 : O_1B$, $\frac{4}{13} \cdot \frac{9}{13}d^2 = 30^2$;

$d^2 = \dfrac{13^2 \cdot 30^2}{4 \cdot 9}$. Итак, площадь поверхности шара равна $\pi d^2 = \pi \cdot 65^2 =$

$= 4225\pi$ (см^2). ◁■

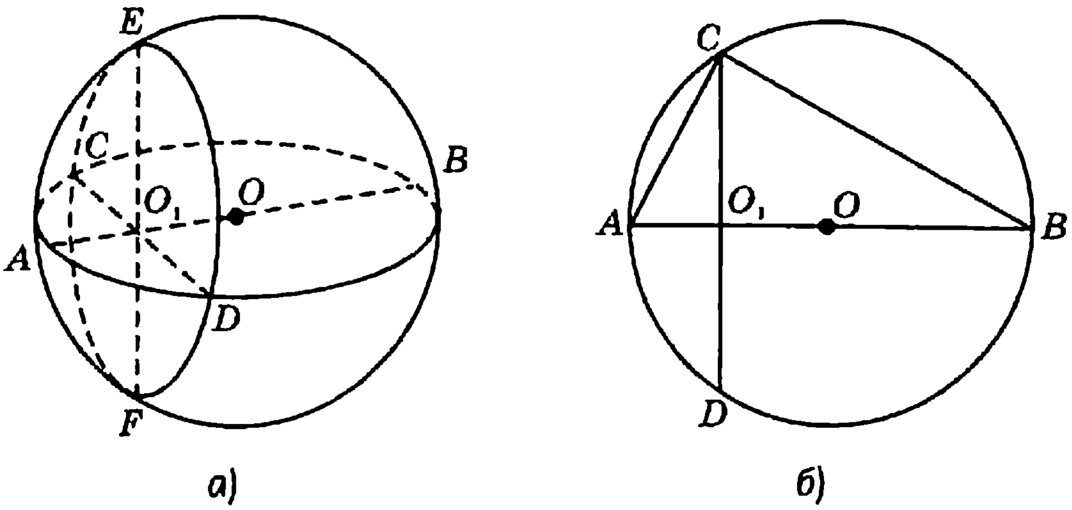


Рис. 204

Упражнения

43.1. Площадь большого круга шара равна 3 см^2. Найдите площадь поверхности шара.

43.2. Как изменится площадь поверхности шара, если увеличить радиус шара: а) в 2 раза; б) в 3 раза; в) в n раз?

43.3. Что произойдет с радиусом шара, если площадь его поверхности: а) уменьшится в 25 раз; б) увеличится в 2 раза?

○ **43.4.** Во сколько раз площадь поверхности Земли больше площади поверхности Луны (диаметр Земли равен 13 тыс. км, диаметр Луны — 3,5 тыс. км)?

○ **43.5.** Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности шара.

43.6. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их диаметров.

43.7. Площади поверхностей двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?

43.8. Объемы двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их площади поверхностей?

○ **43.9.** Длина окружности большого круга шара равна 28π см. Найдите площадь поверхности шара.

○ **43.10.** Площадь поверхности шара равна 625π см^2. Найдите диаметр шара.

○ **43.11.** Шар с центром в точке O касается плоскости α в точке A. Точка B принадлежит плоскости α, $OB = 26$ см, $AB = 24$ см. Найдите площадь поверхности шара.

○ **43.12.** Площадь поверхности шара равна 225π м^2. Найдите его объем.

○ **43.13.** Длина образующей конуса равна диаметру основания. Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса.

○ **43.14.** Во сколько раз площадь поверхности шара, описанного около куба, больше площади поверхности шара, вписанного в этот же куб?

● **43.15.** В шаре проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения; площади их равны 49π дм^2 и 4π м^2, а расстояние между ними — 9 дм. Найдите площадь поверхности шара.

● **43.16.** Около октаэдра, ребро которого равно 2 дм, описан шар. Найдите площадь поверхности шара.

ГЛАВА 8. Координаты и векторы

§ 44. Прямоугольная система координат в пространстве

В курсе планиметрии мы познакомились с прямоугольной системой координат на плоскости. Напомним, что *координатной прямой* называется такая прямая, на которой выбраны точка O, называемая началом координат, и единичный вектор $\overrightarrow{OE}$, указывающий положительное направление координатной прямой. *Прямоугольной системой координат на плоскости* называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Оно обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy и называются соответственно осью абсцисс и осью ординат (рис. 205).

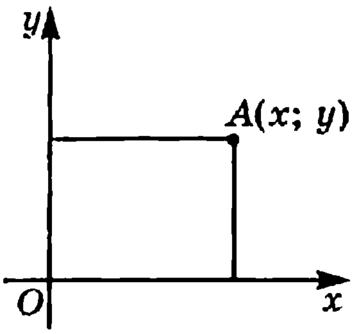


Рис. 205

Каждой точке на координатной прямой соответствует число, называемое *координатой* этой точки, а каждой точке на плоскости с заданной системой координат соответствует пара чисел $(x; y)$, называемых *координатами точки на плоскости* относительно данной системы координат.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596—1650). Поэтому прямоугольную систему координат называют также *декартовой системой координат*, а сами координаты — *декартовыми координатами*. Введение прямоугольных координат на плоскости и в пространстве позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, — алгебраические задачи к геометрическим. Метод, основанный на этом сведении, называется *методом координат*.

Определение. **Прямоугольной системой координат в пространстве** называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой O, а координатные прямые обозначаются Ox, Oy, Oz и называются соответственно осью

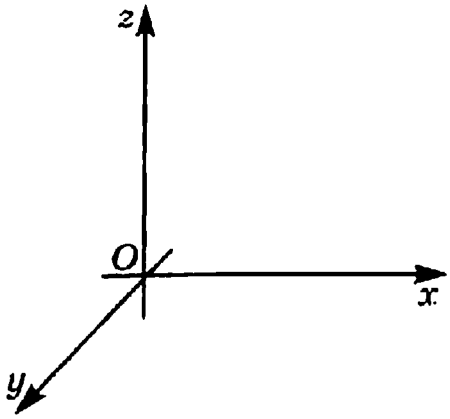


Рис. 206

абсцисс, осью ординат и осью аппликат (рис. 206). Плоскости, проходящие через пары координатных прямых, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oxz и Oyz соответственно.

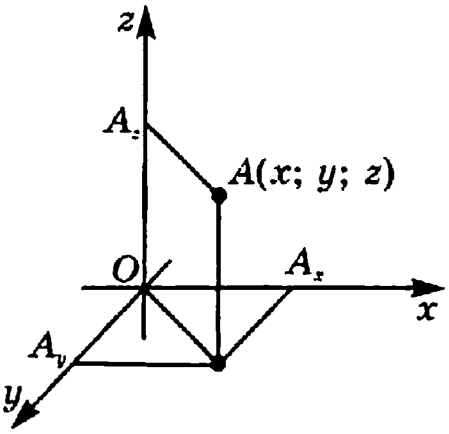


Рис. 207

Пусть A — произвольная точка пространства, в котором выбрана прямоугольная система координат. Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox, и точку ее пересечения с осью Ox обозначим A_x (рис. 207).

Координата этой точки на оси Ox называется *абсциссой* точки A и обозначается x. Аналогично на осях Oy и Oz определяются точки A_y и A_z, координаты которых называются соответственно *ординатой* и *аппликатой* точки A и обозначаются y и z соответственно. Тройка чисел $(x;\ y;\ z)$ называется *координатами точки* A в пространстве.

В планиметрии доказывалось, что расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ на плоскости выражается формулой

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

В пространстве имеет место аналогичная формула.

***Теорема*. Расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ в пространстве выражается формулой**

$$\boxed{A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.}$$

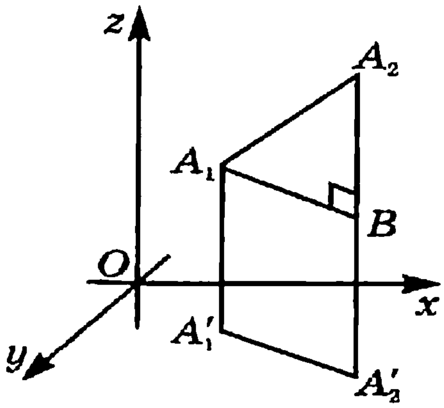


Рис. 208

Доказательство. Для точек $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ пространства рассмотрим прямую A_1A_2. Она не может быть параллельна одновременно всем осям координат. Предположим, например, что она не параллельна оси Oz, и пусть A_1', A_2' — ортогональные проекции соответственно точек A_1, A_2 на плоскость Oxy (рис. 208).

Ясно, что эти проекции имеют координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ соответственно. Расстояние между точками A_1', A_2' выражается формулой

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

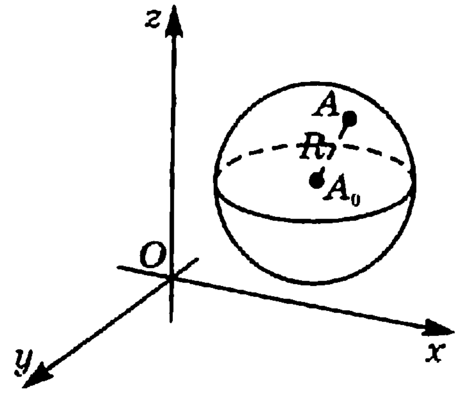


Рис. 209

Через точку A_1 проведем прямую, параллельную $A_1'A_2'$, и точку ее пересечения с прямой $A_2'A_2$ обозначим B. Тогда треугольник A_1A_2B прямоугольный, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_1 - z_2|$. Следовательно, по теореме Пифагора имеем

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$ ◁■

Непосредственно из определения шара и сферы следует, что координаты точек шара с центром в точке $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R удовлетворяют неравенству

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < R^2,}$$

а координаты точек соответствующей сферы — равенству

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.}$$

Последнее равенство называется *уравнением сферы* с центром в точке $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R (рис. 209).

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рене Декарт — один из выдающихся ученых XVII века. Поражает широта его интересов. Ученым получены глубокие результаты в области философии, математики, физики, биологии, медицины и др.

Философию Декарт рассматривал как универсальную науку, способную найти объяснение многим явлениям реального мира, вскрыть законы, которые управляют природой и человеческим сознанием. Декарт является основоположником известного философского учения — картезианства (Картезий — латинизированное имя Декарта), в котором он изложил свои взгляды на развитие естественных научных теорий. В частности, он исследовал вопрос о научном объяснении происхождения Солнечной системы и выдвинул свою гипотезу.

Биология обязана Декарту учением о живом организме как о сложной машине, действующей по определенным естественным законам. Ему принадлежит первоначальное понятие об условном рефлексе.

Наибольшую известность и славу принесла Декарту книга, вышедшая в 1637 году (когда Декарту был уже 41 год). По обычаям того времени она имела довольно длинное название: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». В этом сочинении Декарт сформулировал «главные правила метода».

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем это не признано несомненно истинным, т. е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои рассуждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчетливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчеркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчеты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

«Геометрия» Декарта, являющаяся приложением к «Рассуждению о методе...» произвела переворот в геометрии того времени. За короткое время «Геометрия» выдержала четыре издания и была настольной книгой каждого математика XVII века. В XVIII — XIX веках на основе метода координат Декарта возникли многомерная, а затем и бесконечномерная геометрии. Сегодня без метода координат невозможно представить себе ни математику, ни физику.

Пример 1. Дан куб $A...D_1$, ребро которого равно 1. Начало координат находится в точке B. Положительные лучи осей координат соответственно BA, BC и BB_1. Назвать координаты всех вершин куба.

Решение. Обратимся к рисунку 210. Вершины данного куба имеют следующие координаты: $A(1;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 0;\ 0)$; $C(0;\ 1;\ 0)$; $D(1;\ 1;\ 0)$; $A_1(1;\ 0;\ 1)$; $B_1(0;\ 0;\ 1)$; $C_1(0;\ 1;\ 1)$; $D_1(1;\ 1;\ 1)$. ◁

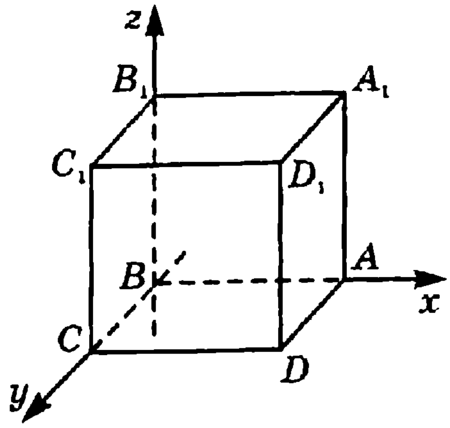


Рис. 210

Пример 2. Пусть в пространстве заданы точки $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Найти координаты середины отрезка A_1A_2.

Решение. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — середина отрезка A_1A_2. Спроектируем его на плоскость Oxy (т. е. проведем из точек A_1, A_2 прямые, перпендикулярные плоскости Oxy). В плоскости Oxy получим соответственно точки $A_1'(x_1;\ y_1;\ 0)$, $M'(x;\ y;\ 0)$, $A_2'(x_2;\ y_2;\ 0)$. Причем по теореме Фалеса M' — середина отрезка $A_1'A_2'$ имеет координаты $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Для того чтобы найти выражение для z, нужно спроектировать отрезок на плоскость Oxz (или Oyz), получим $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Итак, $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2};\ \dfrac{y_1 + y_2}{2};\ \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$. ◁

Пример 3. Как расположена сфера радиуса 2 с центром в точке с координатами (1; 2; 3) относительно координатных плоскостей?

Решение. Точка с координатами (1; 2; 3) удалена: от плоскости Oxy — на расстояние 3; от плоскости Oxz — на расстояние 2; от плоскости Oyz — на расстояние 1. Учитывая, что радиус сферы равен 2, получаем, что сфера: не имеет общих точек с плоскостью Oxy; касается плоскости Oxz; пересекается с плоскостью Oyz. ◁

Упражнения

44.1. Как определяются координаты точки в пространстве?

44.2. Найдите координаты ортогональных проекций точек $A(1;\ 3;\ 4)$ и $B(5;\ -6;\ 2)$: а) на плоскость Oxy; б) на плоскость Oyz; в) на ось Ox; г) на ось Oz.

44.3. Что представляет собой геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна нулю; б) вторая координата равна нулю; в) третья координата равна нулю; г) первая и вторая координаты равны нулю; д) первая и третья координаты равны нулю; е) вторая и третья координаты равны нулю; ж) все координаты равны нулю?

44.4. На каком расстоянии находится точка $A(1; -2; 3)$ от координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz?

44.5. На каком расстоянии находится точка $A(1; -2; 3)$ от координатных прямых: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

44.6. Каким является геометрическое место точек пространства, для которых: а) первая координата равна единице; б) первая и вторая координаты равны единице?

44.7. Какому условию удовлетворяют координаты точек пространства, одинаково удаленные: а) от двух координатных плоскостей Oxy, Oyz; б) всех трех координатных плоскостей?

44.8. Найдите расстояние между точками $A_1(1; 2; 3)$ и $A_2(-1; 1; 1)$, $B_1(3; 4; 0)$ и $B_2(3; -1; 2)$.

44.9. Какая из точек $A(2; 1; 5)$ или $B(-2; 1; 6)$ лежит ближе к началу координат?

44.10. Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением:

а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 9$;

б) $x^2 + (y - 6)^2 + (z + 1)^2 = 11$.

○ **44.11.** Для данного изображения прямоугольной системы координат в пространстве изобразите точки с координатами $E(1; 2; 3)$, $F(2; -1; 1)$, $G(-1; 3; 2)$.

○ **44.12.** Куб $A...D_1$ помещен в прямоугольную систему координат так, что началом координат является центр нижнего основания куба, ребра куба параллельны соответствующим осям координат, вершина A имеет координаты $(-2; 2; 0)$. Найдите координаты всех остальных вершин куба.

○ **44.13.** Центром октаэдра является начало координат. Две его вершины имеют координаты $(1; 0; 0)$ и $(0; 1; 0)$. Найдите координаты остальных вершин октаэдра.

○ **44.14.** Для данной системы координат в пространстве изобразите точки $A(1; 1; -1)$ и $B(1; -1; 1)$. Нарисуйте отрезок AB. Пересекает ли он какую-нибудь ось координат? плоскость координат? Найдите координаты точек пересечения (если они есть). Проходит ли отрезок AB через начало координат?

○ **44.15.** Точка A имеет координаты (x; y; z). Найдите координаты симметричной точки относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

○ **44.16.** Напишите уравнение сферы: а) с центром в точке $O(0; 0; 0)$ и радиусом 1; б) с центром в точке $C(1; -2; 3)$ и радиусом 4.

○ **44.17.** Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(1; 2; -1)$, касающейся координатной плоскости: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

○ **44.18.** Напишите уравнение сферы с центром в точке $O(3; -2; 1)$, касающейся координатной прямой: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

○ **44.19.** Найдите уравнения сфер радиуса R, касающихся трех координатных плоскостей.

○ **44.20.** Докажите, что уранение $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$ задает сферу в пространстве. Найдите ее радиус и координаты центра.

○ **44.21.** Точка $A(0; \sqrt{2}; \sqrt{5})$ принадлежит сфере с центром $O(3; 0; 0)$. Напишите уравнение этой сферы. Принадлежат ли этой сфере точки $M(5; 0; 2\sqrt{3})$ и $K(4; -1; 0)$?

○ **44.22.** Как расположена точка $A(5; 1; 2)$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$?

● **44.23.** Как расположены относительно друг друга сферы $(x - 1)^2 + (y - 2)^3 + (z + 1)^2 = 1$, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$?

● **44.24.** Напишите уравнение окружности, лежащей в плоскости Oxy и являющейся пересечением сферы $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$ с этой плоскостью.

● **44.25.** Что представляет собой геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$?

§ 45. *Векторы в пространстве*

В планиметрии изучались векторы на плоскости, здесь же мы рассмотрим векторы в пространстве. Их определение и свойства аналогичны определению и свойствам векторов на плоскости.

Определение. **Вектором в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец.**

Рассматривается также нулевой вектор, у которого начало совпадает с концом.

Вектор с началом в точке A_1 и концом в точке A_2 обозначается $\overrightarrow{A_1A_2}$. Будем также обозначать векторы строчными латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и т. д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Длиной, или *модулем*, вектора называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ или $|\vec{a}|$. Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора в пространстве называются *одинаково (противоположно) направленными*, если они лежат в одной плоскости и в этой плоскости одинако (противоположно) направлены.

Два вектора считаются *равными*, если они имеют одинаковые длины и направления.

Так же как и на плоскости, для векторов в пространстве определяются операции сложения и умножения на число.

Для того чтобы сложить два вектора — $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число t длина вектора умножается на $|t|$, а направление остается прежним, если $t > 0$, и изменяется на противоположное, если $t < 0$. При умножении вектора на нуль получается нулевой вектор. Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + (-1)\vec{b}$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для операций сложения векторов и умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам этих операций для векторов на плоскости. Среди них:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.

4. $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$.

5. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$.

Доказательство этих свойств проводится непосредственной проверкой аналогично тому, как это делалось для плоскости.

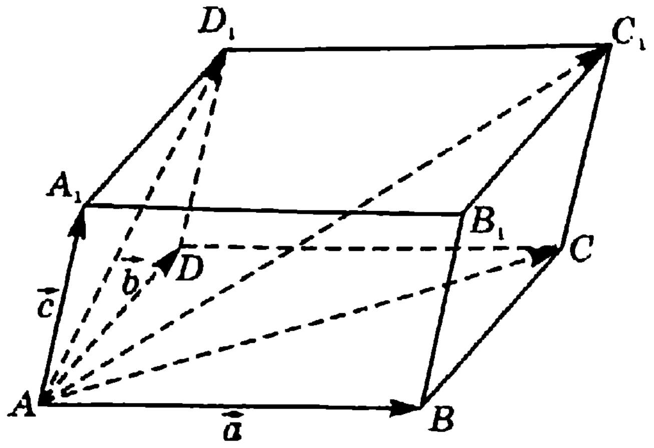


Рис. 211

Докажем, например, выполнимость свойства 2. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от общего начала A. Если эти векторы лежат в одной плоскости, то соответствующее равенство $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ следует из свойств векторов на плоскости. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости, то это равенство следует из рассмотрения параллелепипеда (рис. 211), $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AD_1}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Таким образом, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AC_1}$; $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$. Следовательно, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Пример 1. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}$.

Решение. Заметим, что $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$ и $-\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{FG}$. Теперь воспользуемся свойством 1 ($\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$) и перепишем выражение в следующем виде $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$. ◀

Пример 2. $A...D_1$ — куб. Упростить выражение $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA}$.

Решение. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$; $-\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{C_1C}$; $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{B_1A}$; $-\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1D}$. Итак, $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1D}$. ◀

Упражнения

45.1. Как определяются сложение векторов и умножение вектора на число?

45.2. В параллелепипеде $A...D_1$ назовите пары: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

45.3. В параллелепипеде $A...D_1$ назовите векторы, равные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{A_1B}$.

45.4. Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ быть равными между собой?

45.5. Всегда ли верно равенство $|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$?

45.6. В каком случае длина суммы векторов равна сумме длин слагаемых?

○ **45.7.** Для данного вектора $\vec{a}$ постройте векторы $-\vec{a}$, $2\vec{a}$, $\frac{5}{2}\vec{a}$.

○ **45.8.** Точка B — середина отрезка AC, а точка C — середина отрезка BD. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

○ **45.9.** Для параллелепипеда $A...D_1$ выясните, верны ли следующие утверждения:

а) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_1D}$;

г) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A}$?

○ **45.10.** Изобразите тетраэдр $ABCD$ и вектор, равный: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$.

○ **45.11.** В параллелепипеде $A...D_1$ укажите векторы, равные $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{C_1C}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

○ **45.12.** $A...D_1$ — параллелепипед. Упростите выражение

$$\overrightarrow{B_1D_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{A_1D_1}.$$

○ **45.13.** Докажите выполнимость свойств 3, 4, 5.

○ **45.14.** Докажите, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

○ **45.15.** Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

○ **45.16.** Точка O — середина отрезка AB. Докажите, что для произвольной точки X пространства выполняется равенство: $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

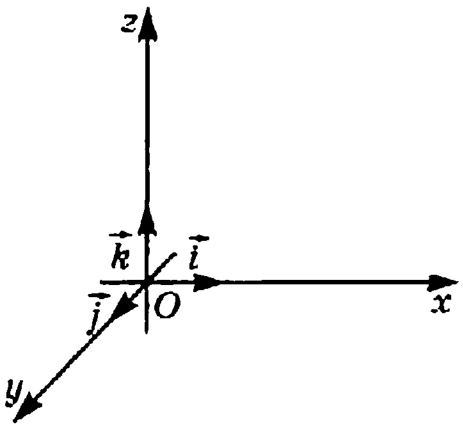
● **45.17.** Точка O — центр описанной окружности равностороннего треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

● **45.18.** Точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

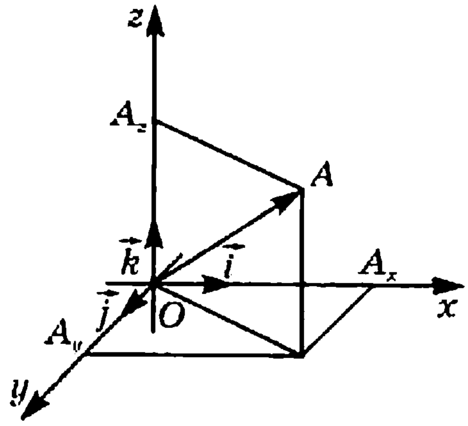
§ 46. Координаты вектора

Определим понятие координат вектора в пространстве с заданной прямоугольной системой координат. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются *координатами вектора*.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторы с координатами (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы отложенными от начала координат и называть их *координатными векторами* (рис. 212, *а*).



а)



б)

Рис. 212

Теорема. **Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x; y; z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.**

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ (рис. 212, *б*). Точка A имеет координаты (x; y; z)

тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overline{OA_x} = x\vec{i}$, $\overline{OA_y} = y\vec{j}$, $\overline{OA_z} = z\vec{k}$, и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Теорема. **Сумма $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ имеет координаты $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$.**

Доказательство. Разложим векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ по координатным векторам:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Тогда для суммы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ имеет место равенство

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

и, следовательно, тройка чисел $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ является координатами вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются. Аналогичным образом показывается, что при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Из этих свойств, в частности, следует, что разность $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ векторов $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ имеет координаты

$$(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

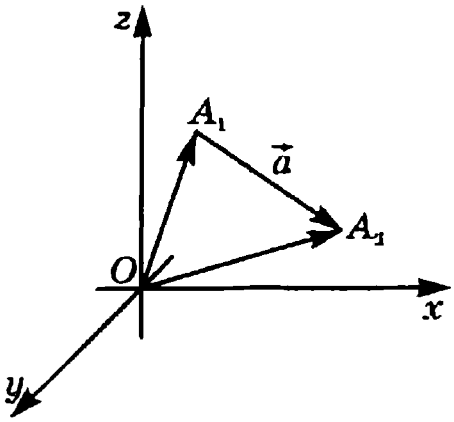


Рис. 213

Рассмотрим теперь вопрос о том, как найти координаты вектора, отложенного не от начала координат. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет своим началом точку $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом — точку $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 213). Тогда его можно представить как разность векторов, а именно: $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$, и следовательно, он имеет координаты

$$\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Длина вектора $\vec{a}(x;\ y;\ z)$ выражается через координаты по формуле

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

Если вектор $\overline{A_1A_2}$ задан координатами начальной и конечной точек — $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его длина выражается формулой

$$\boxed{|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Пример 1. Найти координаты точки G, если $\overrightarrow{GH}$ $(5;\ -4;\ -3)$ и $H(0;\ -1;\ 2)$.

Решение. Пусть $G(x;\ y;\ z)$. Тогда $0 - x = 5$, $-1 - y = -4$ и $2 - z = -3$, откуда $x = -5$, $y = 3$ и $z = 5$. ◁■

Пример 2. Найти длину вектора $\vec{a} = -\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение. Из условия следует, что $\vec{a}(-1;\ -8;\ 2)$. Значит, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{69}$. ◁■

Пример 3. Найти условие, при котором вектор $\vec{m}(x;\ y;\ z)$ будет перпендикулярен координатной плоскости Oxz.

Решение. У вектора, перпендикулярного координатной плоскости Oxz, координаты x, z равны нулю, т. е. $\vec{m}(0;\ y;\ 0)$. ◁■

Упражнения

46.1. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$; г) $\vec{d} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$.

46.2. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2;\ -6;\ 9)$, $B(-5;\ 3;\ -7)$; б) $A(1;\ 3;\ -8)$, $B(6;\ -5;\ -10)$; в) $A(-3;\ 1;\ -20)$, $B(5;\ 1;\ -1)$.

46.3. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(a;\ b;\ c)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

46.4. Найдите длину вектора $\vec{a}(1;\ 1;\ 1)$.

46.5. Найдите длину вектора $\overrightarrow{CD}$, если $C(0;\ 0;\ 2)$, $D(2;\ 2;\ 0)$.

46.6. Найдите координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}(0;\ 3;\ -4)$.

46.7. Найдите координаты векторов $2\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{a}$, если $\vec{a}(-2; 0; 3)$.

46.8. Найдите координаты точки F, если вектор $\overline{EF}(1; 0; 1)$, $E(0; 2; 0)$.

○ **46.9.** В прямоугольном параллелепипеде $OABCO_1A_1B_1C_1$ вершина O — начало координат, ребра OA, OC, OO_1 лежат на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно и $OA = 2$, $OC = 3$, $OO_1 = 4$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$.

○ **46.10.** Даны векторы $\vec{a}(-1; 2; 8)$ и $\vec{b}(2; -4; 3)$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $-\vec{a} + 5\vec{b}$.

○ **46.11.** Найдите координаты точки N, если вектор $\overline{MN}$ имеет координаты $(4; -3; 0)$ и точка $M(1; -3; -7)$.

○ **46.12.** Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости Oxy; б) параллелен координатной прямой Ox?

○ **46.13.** Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке $A(1; 2; 3)$: а) и перпендикулярного плоскости Oxy; б) и параллельного прямой Ox.

○ **46.14.** Найдите длину векторов: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $8\vec{i} + \vec{k}$; в) $-\vec{j} + 2\vec{k}$.

○ **46.15.** Длина вектора равна трем. Найдите координаты вектора, если известно, что все они равны.

○ **46.16.** Найдите длины векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1; 0; 2)$, $\vec{b}(0; 3; -4)$.

§ 47. Скалярное произведение векторов

Угол между векторами и скалярное произведение векторов в пространстве определяются аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости. А именно, угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю. В остальных случаях векторы откладываются от общего начала, и угол между ними определяется как угол между векторами, лежащими в одной плоскости.

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скалярное произведение таких векторов считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$. По определению

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cos \varphi,}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* и обозначается $\vec{a}^2$. Из формулы скалярного произведения следует равенство $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Ясно, что скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между ними равен 90°, поскольку именно в этом случае косинус угла между этими векторами равен нулю.

Скалярное произведение векторов имеет простой физический смысл и связывает работу A, производимую постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении тела на вектор $\vec{a}$, составляющий с направлением силы $\vec{F}$ угол φ, а именно имеет место следующая формула:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \varphi,$$

означающая, что работа является скалярным произведением силы на перемещение.

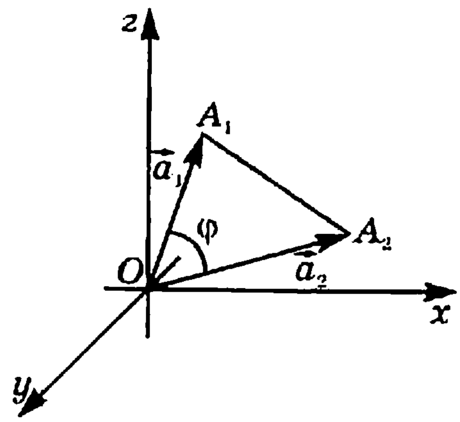


Рис. 214

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты. Пусть даны векторы $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1), \vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Отложим их от начала координат и их концы обозначим A_1, A_2 соответственно (рис. 214).

По теореме косинусов имеем равенство

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos \varphi$$

и, следовательно, равенство $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Выразим из последнего равенства скалярное произведение и воспользуемся равенствами:

$$\vec{a}_1^2 = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad \vec{a}_2^2 = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)^2 = |\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Получим:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - - (z_2 - z_1)^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\boxed{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства, аналогичные свойствам произведения чисел:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Доказательство непосредственно следует из формулы, выражающей скалярное произведение через координаты векторов.

Пример 1. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, найти скалярное произведение: а) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA}$; б) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD}$, где M, N — середины соответственно ребер CD и AB.

Решение. а) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}$ ($\angle ADB = 60°$ как угол равностороннего треугольника ABD); б) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$, так как $MN \perp DC$ ($DC \perp AM$ и $DC \perp BM$, т. е. DC перпендикулярна плоскости ABM по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, значит, DC перпендикулярна любой прямой этой плоскости). ◁■

Пример 2. Доказать, что если длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны.

Решение. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, так как по условию $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким образом, скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ равно нулю, и значит, эти векторы перпендикулярны. ◁■

Упражнения

47.1. Дан куб $A...D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{D_1C}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$.

47.2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}_1(-1; 2; 3)$ и $\vec{a}_2(2; -1; 0)$.

47.3. Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой?

47.4. Найдите скалярное произведение векторов $3\vec{a}$ и $-\vec{b}$, если $\vec{a}(1; 0; 5)$, $\vec{b}(2; -3; 4)$.

47.5. Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Почему?

47.6. Как расположены относительно друг друга векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$?

47.7. Найдите угол между векторами $\vec{a}(1; 1; 1)$, $\vec{b}(-2; -2; -2)$.

47.8. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $-\vec{a}$.

○ **47.9.** Используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

из определения скалярного произведения, найдите угол между векторами:

а) $\vec{a}_1(2; 3; -1)$ и $\vec{a}_2(1; -2; 4)$; б) $\vec{a}_1(1; 2; -2)$ и $\vec{a}_2(1; 0; -1)$.

○ **47.10.** При каком значении z векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ перпендикулярны?

○ **47.11.** Используя формулу скалярного произведения, докажите, что для вектора $\vec{a}(x; y; z)$ имеют место равенства: $x = \vec{a} \cdot \vec{i}$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j}$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k}$.

○ **47.12.** Докажите, что каковы бы ни были векторы $\vec{a}(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3)$, $\vec{b}(\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3)$ и $\vec{c}(\vec{c}_1; \vec{c}_2; \vec{c}_3)$, справедливы следующие равенства: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

○ **47.13.** Какой угол φ образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?

○ **47.14.** При каком значении t вектор $2\vec{a} + t\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} - \vec{a}$, если $\vec{a}(2; -1; 0)$, $\vec{b}(4; 3; 1)$?

○ **47.15.** Докажите, что в треугольнике ABC, где $A(2; 1; 3)$, $B(1; 1; 4)$ и $C(0; 1; 3)$, угол B прямой.

○ **47.16.** Докажите, что единичный вектор, образующий с координатными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ углы α, β, γ соответственно, имеет координаты $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

○ **47.17.** Найдите углы, которые образует с координатными векторами вектор: а) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; б) $-3\vec{j} - \vec{k}$; в) $-5\vec{i}$; г) $\vec{a}(0; 3; 4)$.

○ **47.18.** Найдите координаты единичного вектора, если известно, что он перпендикулярен векторам с координатами $(1; 1; 0)$, $(0; 1; 1)$.

● **47.19.** Докажите, что точки $A(2; 4; -4)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$, $D(-1; 3; 4)$ являются вершинами параллелограмма, и вычислите величину угла между его диагоналями.

● **47.20.** Точки M, N, P — середины ребер AB, AD, DC правильного тетраэдра с ребром a. Найдите скалярные произведения: а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{BA}$; е) $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PC}$.

§ 48. Уравнение плоскости в пространстве

В курсе планиметрии доказывалось, что прямая на плоскости задается уравнением $ax + by + c = 0$, в котором a, b, c — действительные числа, причем a, b не равны нулю одновременно. В пространстве имеет место аналогичная теорема.

Теорема. **Плоскость в пространстве задается уравнением**

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,}$$

где a, b, c, d — действительные числа, причем a, b, c не равны нулю одновременно и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого *вектором нормали*.

Доказательство. Пусть точка $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ принадлежит плоскости, $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ — вектор, перпендикулярный этой плоскости (рис. 215). Тогда произвольная точка $A(x;\ y;\ z)$ будет принадлежать этой плоскости в том и только в том случае, когда вектор

$$\overrightarrow{A_0A}\,(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$$

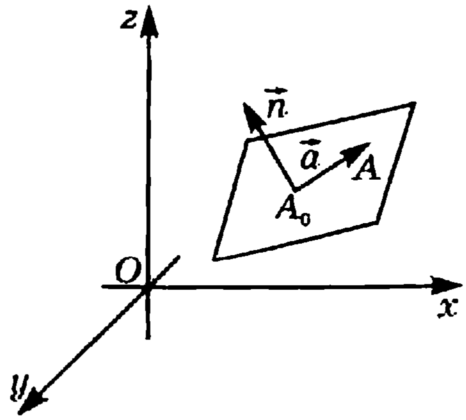


Рис. 215

будет перпендикулярен вектору $\vec{n}$, т. е. скалярное произведение $\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{n}$ равно нулю. Расписывая скалярное произведение через координаты данных векторов, получим уравнение

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,}$$

которое задает плоскость, проходящую через точку $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ с вектором нормали $\vec{n}(a;\ b;\ c)$.

Обозначая $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ и преобразовав это уравнение, получим требуемое уравнение плоскости, а именно:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении плоскостей в пространстве с точки зрения их уравнений. Заметим, что две плоскости в пространстве параллельны или совпадают, если их нормали $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ одинаково или противоположно направлены, и следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{n}_2 = t\vec{n}_1$.

Для плоскостей, заданных уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;\quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \qquad (1),$$

векторы нормалей имеют координаты $(a_1;\ b_1;\ c_1)$, $(a_2;\ b_2;\ c_2)$. Поэтому такие плоскости параллельны или совпадают, если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$. При этом если $d_2 = td_1$, то уравнения (1) определяют одну и ту же плоскость, если же $d_2 \neq td_1$, то — параллельные плоскости.

Если плоскости не параллельны и не совпадают, то они пересекаются по прямой, и угол φ между ними равен углу между их нормалями $\vec{n}_1(a_1;\ b_1;\ c_1)$, $\vec{n}_2(a_2;\ b_2;\ c_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.}$$

В частности, плоскости перпендикулярны, если скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ равно нулю, т. е. выполняется равенство

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 4)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}(-3; -1; 0)$.

Решение. Уравнение данной плоскости имеет вид

$$-3(x - 1) - (y + 2) = 0 \text{ или } 3x + y - 1 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку $K(4; -5; -1)$ и параллельна координатной плоскости Oyz.

Решение. Плоскость Oyz имеет вектор нормали $\vec{n}(1; 0; 0)$. Искомая плоскость параллельна плоскости Oyz и, следовательно, имеет тот же вектор нормали. Уравнение этой плоскости имеет вид $x + d = 0$. Для нахождения d подставим координаты точки K, получим: $4 + d = 0$, $d = -4$. Итак, окончательно получаем уравнение $x - 4 = 0$.

Упражнения

48.1. Как на плоскости задается прямая?

48.2. Как в пространстве задается плоскость?

48.3. Каковы уравнения координатных прямых на плоскости?

48.4. Каковы уравнения координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz?

48.5. Даны точки $A(3; 2; 5)$, $B(-1; -2; 2)$, $C(7; 0; -9)$, $D\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6}; 6\right)$.

Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$.

48.6. Дана плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Найдите точки ее пересечения с осями координат.

48.7. Найдите координаты точек пересечения плоскости $ax + by + cz + d = 0$ с осями координат.

48.8. Приведите примеры уравнений: а) параллельных плоскостей; б) перпендикулярных плоскостей.

○ **48.9.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A_0(1; 2; 0)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1; 1; 1)$.

○ **48.10.** Точка $H(-2; 4; -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

○ **48.11.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ и $C(0; 0; 1)$; б) $M(3; -1; 2)$, $N(4; 1; -1)$ и $K(2; 0; 1)$.

○ **48.12.** Напишите уравнение плоскости, которая: а) проходит через точку $M(1; -2; 4)$ и параллельна координатной плоскости Oxz; б) проходит через точку $M(0; 2; 0)$ и перпендикулярна оси ординат; в) проходит через точки $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ и параллельна оси аппликат.

○ **48.13.** Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:

а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;
б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;
г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

○ **48.14.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 3; -1)$ параллельно плоскости: а) $3x + y - z + 5 = 0$; б) $x - y + 5z - 4 = 0$.

○ **48.15.** Приведите примеры уравнений взаимно перпендикулярных плоскостей.

○ **48.16.** Перпендикулярны ли плоскости: а) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 1 = 0$; б) $7x - y + 9 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

○ **48.17.** Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями: а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$; б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

○ **48.18.** Докажите, что плоскости $x + y + z = 1$, $2x + y + 3z + 1 = 0$, $x + 2z + 1 = 0$ не имеют ни одной общей точки.

● **48.19.** Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

● **48.20.** Вычислите расстояние от начала координат до плоскости: а) $2x - 2y + z - 6 = 0$; б) $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

§ 49*. Уравнение прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

задающих пару пересекающихся плоскостей.

Рассмотрим другой способ аналитического задания прямой. Для этого заметим, что для задания прямой в пространстве достаточно задать или пару точек $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, через которые проходит эта прямая, или точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{e}\,(a; b; c)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней.

Если прямая задана двумя точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ с координатами $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, а в качестве точки A_0 какую-нибудь из точек A_1, A_2.

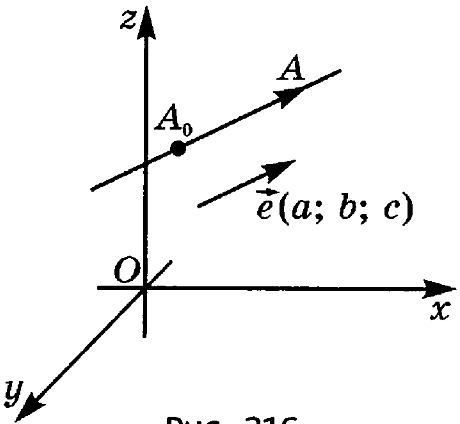


Рис. 216

Найдем условия, которым должны удовлетворять координаты точки $A(x; y; z)$, чтобы она принадлежала прямой a, проходящей через точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}\,(a; b; c)$ (рис. 216).

В этом случае вектор

$$\overrightarrow{A_0A}\,(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

должен быть одинаково или противоположно направлен с вектором $\vec{e}(a; b; c)$, и следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct, \end{cases}$$

где t — действительное число.

Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве.*

Если прямая в пространстве задана двумя точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $\overrightarrow{A_1A_2}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$

Заметим, что если вместо направляющего вектора $\vec{e}\,(a; b; c)$ в параметрических уравнениях прямой взять вектор $k\vec{e}\,(ka; kb; kc)$, $k \neq 0$, то параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = kat + x_0, \\ y = kbt + y_0, \\ z = kct + z_0 \end{cases}$$

будут задавать ту же самую прямую.

Обычно в физических задачах параметр t играет роль времени, а параметрические уравнения прямой рассматриваются как уравнения движения точки. Так, моменту времени $t = 0$ соответствует точка $A_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой. При изменении параметра t точка A с координатами $(x; y; z)$, удовлетворяющими параметрическим уравнениям, будет перемещаться по прямой. Докажем, что перемещение точки по прямой является равномерным движением, и найдем его скорость.

Рассмотрим промежуток времени от t_1 до t_2, $T = t_2 - t_1$. Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ точки на прямой за этот промежуток времени будет иметь координаты $(aT; bT; cT)$. Разделив вектор перемещения на время T, получим, что вектор скорости имеет координаты $(a; b; c)$. Он совпадает с направляющим вектором $\vec{e}$ и не зависит от выбора промежутка времени. Следовательно, движение точки по прямой является равномерным. Длина вектора скорости

$$|\vec{e}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

представляет собой скорость движения точки по прямой.

Пример 1. Какими параметрическими уравнениями задается ось абсцисс?

Решение. Ось абсцисс — координатная прямая Ox. Ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Пример 2. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t_1 = 0$ точка находилась в положении $A_1(1; -2; 3)$, а в момент времени $t_2 = 3$ — в положении $A_2(-4; 3; -1)$. Найти скорость движения точки.

Решение. Направляющий вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ имеет координаты $(-5; 5; -4)$. Поэтому движение точки задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = -5t + 1, \\ y = 5t - 2, \\ z = -4t + 3. \end{cases}$$

Длина направляющего вектора определяет искомую скорость. $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{25 + 25 + 16} = \sqrt{66}$.

Упражнения

49.1. Какими уравнениями задаются координатные прямые?

○ **49.2.** Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; -2; 3)$ с направляющим вектором $\vec{e}\,(2; 3; -1)$.

○ **49.3.** Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2; 1; -3)$, $A_2(5; 4; 6)$.

○ **49.4.** Какой вид имеют параметрические уравнения прямых, параллельных оси: а) Ox; б) Oy; в) Oz?

○ **49.5.** Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 2; -3)$ и перпендикулярную плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

○ **49.6.** В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1t + x_1, \\ y = b_1t + y_1, \\ z = c_1t + z_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a_2t + x_2, \\ y = b_2t + y_2, \\ z = c_2t + z_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

○ **49.7.** Определите взаимное расположение прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 5t, \\ y - 1 = 4t, \\ z - 1 = 7t, \end{cases}$$

и плоскости, заданной уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

○ **49.8.** Найдите координаты точки пересечения плоскости $2x - y + z - 3 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(-1;\ 0;\ 2)$ и $B(3;\ 1;\ 2)$.

○ **49.9.** Определите взаимное расположение прямых, задаваемых уравнениями

$$\begin{cases} x - 1 = 2t, \\ y - 1 = -t, \\ z - 1 = 3t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3 = t, \\ y = 8t, \\ z - 4 = 2t. \end{cases}$$

○ **49.10.** Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\vec{e}\,(1;\ 2;\ 3)$. В начальный момент времени $t = 0$ она имела координаты $(-1;\ 1;\ -2)$. Какие координаты она будет иметь в момент времени $t = 4$?

○ **49.11.** Параметрические уравнения движения материальной точки в пространстве имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -t + 2, \\ z = 3t - 3. \end{cases}$$

Найдите скорость.

○ **49.12.** Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени $t = 2$ она имела координаты $(3;\ 4;\ 0)$, а в момент времени $t = 6$ — координаты $(2;\ 1;\ 3)$. Какова скорость движения точки?

§ 50*. Аналитическое задание пространственных фигур

Ранее было показано, что сфера с центром в точке $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Шар, поверхностью которого служит эта сфера, задается неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant R^2.$$

Плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь вопрос об аналитическом задании других пространственных фигур и начнем с многогранников.

Заметим, что если плоскость задана уравнением (1), то неравенства $ax + by + cz + d \geqslant 0$ и $ax + by + cz + d \leqslant 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка $A(x;\ y;\ z)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения плоскости. Если получившееся значение больше или равно нулю, то точка принадлежит первому полупространству. Если меньше или равно нулю — то второму полупространству.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0.$$

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, неравенства

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ z \leqslant 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве (рис. 217).

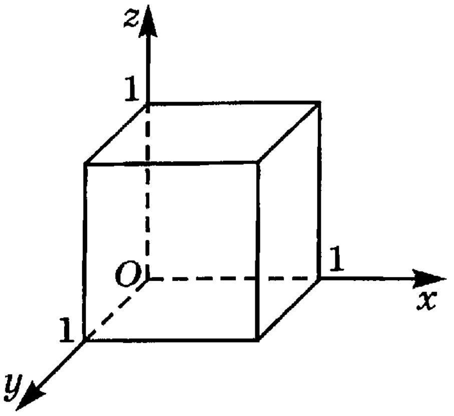


Рис. 217

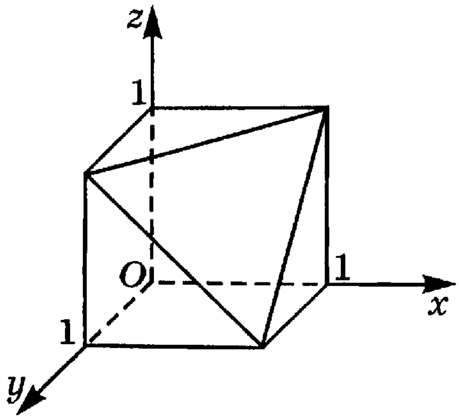


Рис. 218

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y + z \leqslant 2,$$

то соответствующий многогранник получается из куба отсечением пирамиды (рис. 218).

С помощью уравнений и неравенств можно задавать и другие пространственные фигуры. Например, цилиндр с радиусом основания R и высотой h (рис. 219) можно задать неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0 \leqslant z \leqslant h. \end{cases}$$

Параболоид вращения (рис. 220) можно задать уравнением

$$z = a(x^2 + y^2).$$

В сечении этого параболоида плоскостью $y = c$ получается парабола $z = a(x^2 + c^2)$, а в сечениях плоскостями $z = c$ получаются окружности $x^2 + y^2 = \frac{c}{a}$.

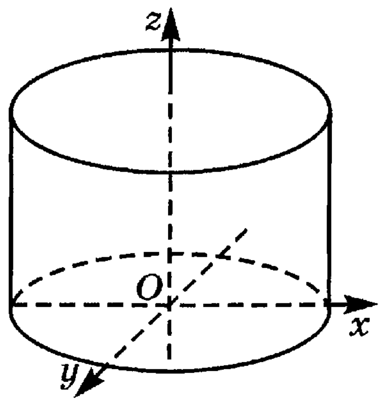


Рис. 219

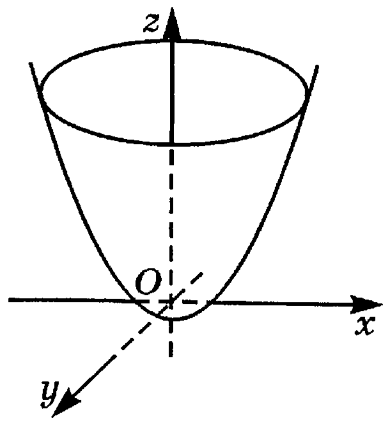


Рис. 220

Пример 1. Определить, какому полупространству $x + 3y - 4z - 1 \geqslant 0$ или $x + 3y - 4z - 1 \leqslant 0$ принадлежат точки $A(0; -1; 2)$ и $B(-1; 5; 3)$.

Решение. Подставим координаты точек в левую часть данных неравенств. Для точки A будем иметь: $-3 - 8 - 1 = -12 < 0$, следовательно, точка A принадлежит второму полупространству. Для точки B: $-1 + 15 - 12 - 1 = 1 > 0$, следовательно, точка B принадлежит первому полупространству. ◀

Пример 2. Изобразить многогранник, который определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$$

Найдите координаты его вершин.

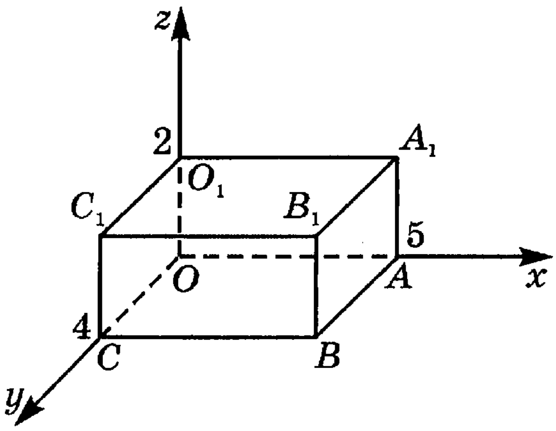


Рис. 221

Решение. Данная система неравенств определяет прямоугольный параллелепипед $ABCOA_1B_1C_1O_1$ с измерениями 5, 4, 2 (рис. 221). Вершины параллелепипеда имеют следующие координаты: $A(5; 0; 0)$, $B(5; 4; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $O(0; 0; 0)$, $A_1(5; 0; 2)$, $B_1(5; 4; 2)$, $C_1(0; 4; 2)$, $O_1(0; 0; 2)$. ◀

Упражнения

50.1. Два полупространства задаются неравенствами

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полупространств?

50.2. Определите, какому полупространству $5x + 3y - z - 2 \geqslant 0$ или $5x + 3y - z - 2 \leqslant 0$ принадлежит точка: а) $A(1; 0; 0)$; б) $B(0; 1; 0)$; в) $C(0; 0; 1)$.

50.3. Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4? \end{cases}$$

○ **50.4.** Какая фигура в пространстве задается неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leqslant R^2, \\ 0 \leqslant y \leqslant h? \end{cases}$$

Изобразите ее.

○ **50.5.** Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами

а) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \leqslant y \leqslant 8, \\ 0 \leqslant z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4, \\ x + y + z - 6 \geqslant 0. \end{cases}$

○ **50.6.** Найдите неравенства, задающие правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты: (1; 1; –1), (1; –1; 1), (–1; 1; 1), (–1; –1; –1).

○ **50.7.** Изобразите поверхность, задаваемую уравнением:
а) $z = = x^2 - y^2$ (гиперболический параболоид);
б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (коническая поверхность).

○ **50.8.** Напишите неравенства, определяющие конус с вершиной в точке $S(0;\ 0;\ h)$ и основание которого — круг радиуса R, лежащий в плоскости Oxy.

§ 51*. Многогранники в задачах оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые *задачи оптимизации*. Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;

задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации этих задач, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В качестве примера задачи оптимизации рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на четыре завода — $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ — требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья на складе, т		Потребность в сырье на заводе, т			
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние от склада до завода, км			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	5	6	4	10
$С_2$	3	7	3	7

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т. е. составим *математическую модель*. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y - z$ тонн сырья, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8 - x$, $10 - y$, $12 - z$, $x + y + z - 5$ тонн сырья. Запишем эти данные в виде таблицы 3.

Таблица 3

Склад	Кол-во сырья, перевезенного на заводы, т			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	x	y	z	$20-x-y-z$
$С_2$	$8-x$	$10-y$	$12-z$	$x+y+z-5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0,\ \ 10 - y \geqslant 0,\ \ 12 - z \geqslant 0, \\ 20 - x - y - z \geqslant 0, \\ x + y + z - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строкой данной системы. На рисунке 222 это параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение $20 - x - y - z = 0$ определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед, образует многоугольник $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение $x + y + z - 5 = 0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует в нем треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_2E_1E_3O_1$, где $M_1(8; 10; 2)$, $M_2(0; 10; 10)$, $M_3(0; 8; 12)$, $C_1(8; 0; 12)$, $C(8; 0; 0)$, $B(8; 10; 0)$, $A(0; 10; 0)$, $E_1(5; 0; 0)$, $E_2(0; 5; 0)$, $E_3(0; 0; 5)$, $O_1(0; 0; 12)$, выполняются все условия данной системы. Назовем его многогранником ограничений.

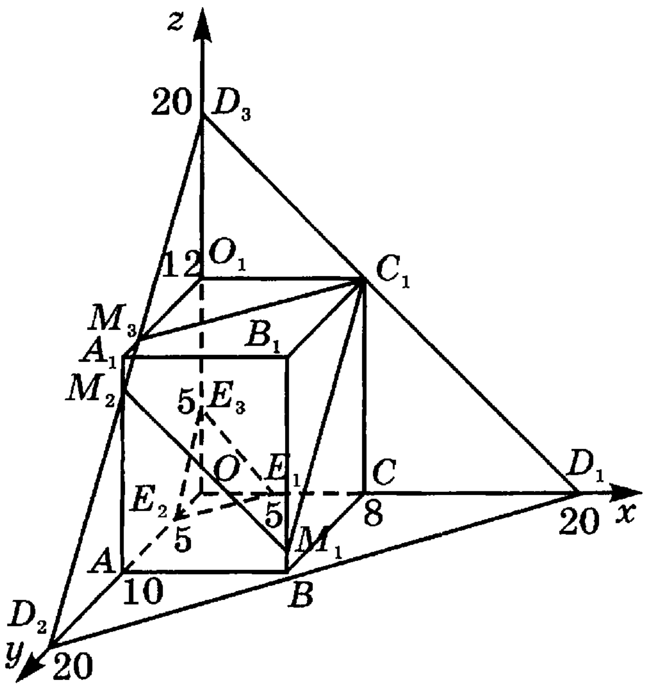


Рис. 222

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров выражается формулой

$$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) +$$
$$+3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{\min} = 295 - f_{\max}$.

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ ($c > 0$) принимает свое наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

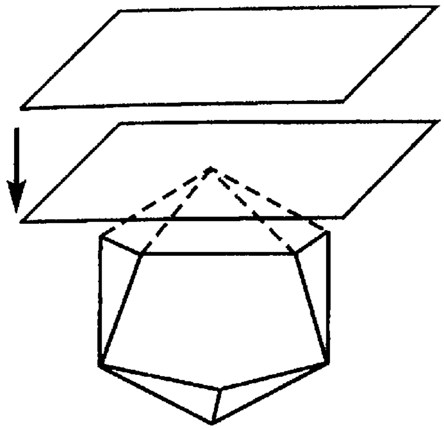


Рис. 223

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ задает плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, а в точках, расположенных ниже этой плоскости, — значения, меньшие d. Если число d выбрать достаточно большим, то плоскость $ax + by + cz = d$ расположится выше многогранника.

Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, до тех пор, пока она не соприкоснется с многогранником. Такое касание произойдет при некотором d_0 в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 223), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

В точках касания линейная функция принимает значение d_0, а поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0. Таким образом, d_0 — искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений:

$$f(M_1) = 52,\ f(M_2) = 60,\ f(M_3) = 56,\ f(C_1) = 32,\ f(C) = 8,\ f(B) = 48,$$
$$f(A) = 40,\ f(E_2) = 20,\ f(E_1) = 5,\ f(E_3) = 10,\ f(O_1) = 24.$$

Легко увидеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{\min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0;\ 10;\ 10)$.

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Кол-во сырья, перевезенного на заводы, т			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	0	10	10	0
$С_2$	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трем, и поэтому в процессе ее решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства и n-мерных многогранников с очень большим n. При решении таких задач используются компьютеры.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трехмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики — *многомерной геометрии*.

Упражнения

○ **51.1.** Найдите множество точек пространства, определяемое следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ x \leqslant 8,\ y \leqslant 8,\ z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12. \end{cases}$$

○ **51.2.** Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?

○ **51.3.** Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy?

○ **51.4.** Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

○ **51.5.** Что произойдет с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если: а) c увеличить на единицу; б) c уменьшить на единицу?

○ **51.6.** Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 2 + 2x + y \geqslant 0, \\ 2 - x + y \geqslant 0, \\ 5 - x - y \geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

§ 1

1.4. а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **1.10.** а) $[2; 3]$; б) $[2; 3]$; в) $[2; 3]$; г) $[3; 4]$. **1.15.** а) 1; 8; б) 1; 9; в) -7; 4; г) -4; -3. **1.16.** а) $\sqrt[3]{5}$, 2, $\sqrt[4]{17}$; б) $\sqrt[5]{100}$, 4, $\sqrt[3]{75}$; в) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{40}$, 3; г) $\sqrt[6]{60}$, 2, $\sqrt[4]{20}$. **1.17.** а) $\sqrt[4]{0{,}1}$, -1, $\sqrt[3]{-5}$; б) 0, $\sqrt[3]{-0{,}25}$, $\sqrt[5]{-29}$; в) $\sqrt[5]{-1{,}5}$, -2, $\sqrt[3]{-9}$; г) $\sqrt[3]{2}$, 1, $\sqrt[3]{-2}$. **1.18.** а) $-$; б) $+$; в) $-$; г) $-$. **1.19.** а) $\sqrt[5]{-12}$, $\frac{\pi}{2}$, 2, $\sqrt[6]{70}$; б) $\sqrt[5]{-\pi}$, $\frac{3}{\pi}$, 1, $\sqrt[7]{\pi}$; в) $\sqrt[3]{-2}$, $\frac{\pi}{3}$, 2,5, $\sqrt{2\pi}$; г) $\sqrt[5]{-0{,}5}$, 0, $\sqrt[3]{200}$, 2π.

§ 2

2.8. а) $(0; 0)$, $(1; 1)$; б) $(0; 0)$, $(1; 1)$; в) $(0; 0)$, $(1; 1)$; г) $(-1; -1)$. **2.9.** а) 0; б) 1; в) 1; г) -1; 0. **2.10.** а); б); одно решение; в) три решения; г) нет решений. **2.16.** а) $[2; +\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; в) $[4; +\infty)$; г) $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

2.18. а) $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$; б) $[-3; 5]$; в) $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$; г) $[-4; 1]$.

2.19. а) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \text{È} \left[8; +\infty\right)$; б) $x \neq -1\frac{1}{3}$; в) $x \neq 3{,}5$; г) $\left(-4{,}5; \frac{3}{7}\right]$.

2.20. а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$. **2.21.** а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-3; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **2.22.** а) 0; б) 1.

§ 3

3.16. а) $\sqrt[4]{26} > \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$; в) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[6]{47}$; г) $-\sqrt[4]{4} > -\sqrt[3]{3}$. **3.18.** а) $\sqrt[4]{27b^5}$; б) $\sqrt[6]{32a^8}$; в) $\sqrt[3]{a^4}$; г) $\sqrt[6]{3y^5}$. **3.19.** а) $\sqrt[6]{4a^3b^3}$; б) $\sqrt[10]{a^{13}b^8}$; в) $\sqrt[6]{125a^7b^{10}}$; г) $\sqrt[24]{216x^7z^{23}}$. **3.20.** а) $\sqrt[4]{a}$; б) $\sqrt[12]{b^{-5}}$; в) $\sqrt[12]{a^7}$; г) $\sqrt[20]{a^{11}b^{21}}$. **3.25.** а) 200; б) $\frac{1}{2}$.

3.26. а) 2; б) -2; в) 3; г) 2. **3.27.** а) 0; 64; б) 16; 81; в) $\frac{1}{64}$; г) 1.

§ 4

4.6. а) $|a|\sqrt{b}$; б) $a\sqrt[3]{b}$; в) $|a|\sqrt[4]{b}$; г) $a^2\sqrt{ab}$. **4.10.** а) $\sqrt[3]{3}$; б) $4\sqrt[7]{3}$; в) $7\sqrt[5]{2}$; г) $3\sqrt[4]{2}$. **4.11.** а) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{18}$, $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{40}$, $\sqrt[5]{4}$; в) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[15]{30}$, $\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{4}$. **4.15.** а) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; б) $\sqrt[3]{k^2} - \sqrt[3]{kl} + \sqrt[3]{l^2}$; в) $\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{n^2}$; г) $\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$. **4.16.** а) $\frac{\sqrt{2b} - \sqrt{3}}{\sqrt{3b} - 1}$; б) $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{1 - \sqrt[3]{y}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3k}}{\sqrt[4]{k} - \sqrt[4]{2}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{d}}{\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{ad}}$.

4.17. а) $\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}}$; г) $a\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}$. **4.18.** а) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{b}$;

б) $x\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^3}+1$; в) $\sqrt[4]{b}-a\sqrt{a}$; г) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab^3}+b$. **4.19.** а) $\sqrt[3]{2mn^2}$; б) $\sqrt[10]{9x^4y^7}$; в) $\sqrt[15]{64k^2l^5}$; г) $\sqrt[35]{2p^3q^6}$. **4.20.** а) $\sqrt[10]{8}$; б) $\sqrt[24]{\frac{1024}{243}}$; в) $\sqrt[18]{\frac{32}{243}}$; г) $\sqrt[3]{9}$.

4.21. а) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; б) $5\sqrt[4]{x}+5\sqrt{xy}$. **4.22.** а) $-\sqrt[5]{2\sqrt[4]{10}} < -\sqrt[4]{\sqrt[5]{99}}$; б) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[4]{3} > \sqrt[8]{6\sqrt{2}}$; г) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}} > -\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

4.23. а) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}}$, $\sqrt[6]{100}$, $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$; б) $\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3}}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[10]{25}$; в) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}$, $\sqrt[5]{3\sqrt{4}}$; г) $\sqrt[48]{7\sqrt{7}}$, $\sqrt[4]{2\sqrt{1{,}25}}$, $\sqrt[16]{64}$. **4.24.** а) -1; б) 3; в) 1; г) $\frac{1}{3}$. **4.25.** а) $1-a$; б) $m-n$. **4.26.** а) $\sqrt[3]{3ax}-\sqrt[3]{3bx}$; б) $\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{5y}$.

4.27. а) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$; б) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{y^3})$; в) $(a+b)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$; г) $\sqrt{ab}(1+\sqrt{b})(1-\sqrt{ab})$. **4.28.** а) $(\sqrt[8]{m}-3)(\sqrt[8]{m}+2)$; б) $(\sqrt[4]{m}+2)(\sqrt[4]{m}+3)$; в) $(\sqrt[10]{a}+4)(\sqrt[10]{a}+3)$; г) $(\sqrt[6]{x}-1)(2\sqrt[6]{x}+1)$.

4.29. а) $\frac{3\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{x}-2}{3\sqrt[4]{x}-1}$. **4.30.** а) $\frac{b}{b-a}$; б) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$.

4.31. а) 8; б) 27.

§ 5

5.6. а) 243; б) 0,064; в) $\frac{81}{16}$; г) 0,01. **5.10.** а) $\frac{7}{25}$; б) $\frac{1}{2700}$. **5.19.** а) a; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{c^4}}$; в) x^2; г) 1. **5.20.** а) 10; б) 4; в) $\frac{1}{49}$; г) 125. **5.21.** а) 4; б) 9; в) 8; г) 1. **5.22.** а) 12; б) 6; в) 30; г) 20. **5.23.** а) $\frac{1}{m}$; б) $\frac{4}{x}$; в) $\sqrt{x}$; г) $\frac{x^3}{27}$. **5.24.** а) $x^{\frac{2}{5}}$; б) y; в) c^2; г) a^5b^4. **5.29.** а) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}$; б) $m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}$.

5.30. а) $1+c$; б) $m^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{2}{3}}$; в) $x+y$; г) $-2\sqrt[4]{bc}$. **5.31.** а) $4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; б) a^3+25a.

5.32. а) $x-1$; б) $\sqrt{k}-\sqrt{l}$. **5.33.** а) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\frac{x+y}{x-y}$.

§ 6

6.15. а) 4; б) 1; в) 0; 1; г) 8. **6.16.** а) (1; 1); б) (1; 1); в) (0; 0), (1; 1); г) (1; 1). **6.20.** а) $2x^{\frac{1}{4}}$; б) $3x$; в) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}}$; г) x^{-2}. **6.21.** а) $\frac{1}{4}x^{-2}$; б) x^4; в) $9x^{-\frac{2}{3}}$; г) x^{-8}. **6.27.** а) 1,5; б) 1; в) -3; г) 2. **6.28.** а) $\frac{3}{4}$; б) $-1\frac{2}{9}$; в) $\frac{2}{3}$; г) 0.

6.29. а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$. **6.30.** а) $y = -4x$; б) $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$; в) $y = 16x - 32$; г) $y = \frac{11}{27} - \frac{1}{27}x$. **6.31.** а) Убывает на [0; 4], возрастает на [4; +∞); $x = 4$ — точка минимума, $y_{\min}=-\frac{8}{3}$; б) возрастает на [0; 1], убывает на [1; +∞), $x = 1$ — точка максимума, $y_{\max} =\frac{1}{2}$. **6.32.** а) $-\frac{8}{3}$; 0; б) $y_{наиб}=\frac{1}{2}$; $y_{наим}$ не существует; в) $y_{наим} =-\frac{8}{3}$; $y_{наиб}$ не существует; г) −2; $\frac{1}{2}$. **6.34.** а) $0 \leqslant x < 4$; б) $x \geqslant 1$; в) $x \geqslant 1$; г) $0 \leqslant x < 8$. **6.35.** а) 1; б) 1; 16; в) 8; г) 64. **6.36.** а) $y = x + 3$; б) $y = 4 - 3x$ и $y = -4 - 3x$. **6.37.** а) $x = \frac{1}{4}$ — точка максимума; б) $x = -\frac{4}{3}$ — точка минимума. **6.38.** а) 2; б) 2. **6.39.** а) $y = \frac{1}{4}x + 1$; б) $y = 3x$.

ГЛАВА 2

§ 7

7.10. а) $\frac{7}{3}$; б) 1; в) −1,5; г) $\frac{3}{5}$. **7.12.** а) 4; б) 3,5; в) −0,5; г) −5,5. **7.13.** а) 2; б) −3; в) 2,5; г) −4,5. **7.19.** а) $2^{-\sqrt{2}}$, 1, $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{1,4}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{1,5}$; б) $0{,}3^{9}$, $0{,}3^{\frac{1}{2}}$, $0{,}3^{\frac{1}{3}}$, 1, $0{,}3^{-\sqrt{5}}$, $0{,}3^{-9}$. **7.23.** а) $x \leqslant -4$; б) $x < -2$; в) $x \geqslant -3$; г) $x > -8$. **7.26.** [−1; 5]. **7.27.** [−4; 3]. **7.31.** а) 1; б) −1; в) 1; г) −1. **7.32.** а) 2; б) −2; в) 0; г) −1. **7.33.** а) $x > 0$; б) $x < 0$; в) $x > 0$; г) $x < 0$. **7.34.** а) $x > 1$; б), г) при любых; в) $x > 2$. **7.35.** а) $x < -1$; б) нет таких значений; в) $x > 0$; г) $x < 1$. **7.36.** а) $f(-3) = -8$; $f(-2{,}5) = -6{,}5$; $f(0) = 1$; $f(2) = 4$; $f(3{,}5) = 8\sqrt{2}$. **7.37.** а) $f(-3)=\frac{1}{64}$; $f(-2{,}5)=\frac{1}{32}$; $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(2) = -3$. **7.38.** а) $f(-5) = 32$; $f(-2{,}5)=4\sqrt{2}$; $f(0) = 1$; $f(4) = 3$; $f(1{,}69) = 2{,}3$. **7.39.** а) $f(-3) = 64$; $f(-2) = 16$; $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 8$; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$. **7.40.** а) (0; +∞); б) (0; +∞); в) (0; +∞); г) (0; +∞). **7.41.** а) (1; +∞); б) (6; +∞); в) (−2; +∞); г) (−8; +∞).

§ 8

8.6. а) −2; б) −8; в) 2; г) 0,2. **8.7.** а) ±1; б) 0; в) ±1; г) $\pm\sqrt{3}$. **8.8.** а) −2; б) 1,5; в) 3; г) $\frac{2}{3}$. **8.9.** а) −1; б) 2,5. **8.10.** а) $-\frac{1}{3}$, 3; б) −6, −2. **8.11.** а) $\frac{1}{6}$; б) $1\frac{5}{18}$. **8.12.** а) 2, 5; б) ±2; в) 8; г) 3. **8.13.** а) 1; б) 1; в) −3; г) 0,4. **8.14.** а) 1, 2; б) 2; в) −1; г) 0. **8.15.** а) ±1; б) ±1; в) 1; г) 1. **8.16.** а) ±1; б) 1; в) 1; г) 1. **8.17.** а) 3; б) −3; в) ±1; г) −2. **8.18.** а) 6; б) 5. **8.19.** а) 0;

б) 0; в) 0; г) 0. **8.20.** а) 0; б) 0. **8.21.** а) 4; б) 2. **8.22.** а) −1; б) 1. **8.23.** а) −1; б) −1; в) −1; г) 0. **8.24.** а) −2; б) 1; в) −1; г) 2. **8.25.** а) 2; б) 1, 2. **8.26.** а)—г) 0. **8.27.** а) 1; б) −1; в) −1; г) 1. **8.28.** а) (1; 3); б) (1; −2); в) (2; 1); г) (−1; 3). **8.29.** а) (2; 1); б) (−0,6; 0,2); в) (−1; 2); г) (2,2; −0,4). **8.34.** а) $x < -5$; б) $x \geqslant -1$; в) $x \geqslant 7$; г) $x > 1$. **8.35.** а) $x \leqslant -0{,}8$; б) нет решений; в) $x \geqslant -5$; г) $-\infty < x < +\infty$. **8.36.** а) $x \geqslant 0{,}5$; б) $x \leqslant \frac{1}{4}$; в) $x > -\frac{1}{2}$; г) $x > 13{,}5$. **8.37.** а) $2 < x < 3$; б) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; в) $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; г) $4 < x < 6$. **8.38.** а) $-\infty < x < +\infty$; б) $x < 1$; $x > 3$; в) $-2 \leqslant x \leqslant 1$; г) $\frac{1}{3} < x < 4$. **8.39.** а) $x \leqslant 2$; б) $x < 1$; в) $x < -1\frac{2}{3}$; г) $x \leqslant \frac{1}{6}$. **8.40.** а) $0 \leqslant x \leqslant 1$; б) $x \geqslant 0$; в) $x < 0$; $x > 1$; г) $x > 0$. **8.41.** а) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 1$; б) $-1 < x < 1$; в) $x > 1$; г) $x \leqslant 1$. **8.42.** а) $x > 0$; б) $x \geqslant 0$; в) $x \geqslant 0$; г) $x < 0$. **8.43.** а) $x \leqslant 1$; б) $x < 0$; в) $x \geqslant 1$; г) $x > -2$. **8.44.** а) $x < -2$, $x \geqslant 1{,}5$; б) $-\frac{1}{7} < x < 2$; в) $-6 < x \leqslant 1{,}8$; г) $x < 2$; $x > 6$. **8.45.** а) $0 < x < 4$; б) $0 < x \leqslant \frac{1}{7}$; в) $0 < x < 2$; г) $x \leqslant -\frac{1}{6}$, $x > 0$. **8.46.** а) $x \leqslant 2$; б) $x < 2$; в) $x \leqslant 2$; г) $x > 2$. **8.47.** а) 2; б) 4. **8.48.** а) −1; б) 1; в) 0; г) −1. **8.49.** а) 5; б) 3; в) 5; г) 2. **8.50.** а) $x = 1$; б) $(-\infty; +\infty)$.

§ 9

9.5. а) 4; б) 5; в) $-2\frac{1}{3}$; г) −6. **9.6.** а) 0; б) 2,5; в) 9; г) $-\frac{1}{3}$. **9.8.** а) 72; б) 28; в) $\frac{5}{9}$; г) 24,5. **9.9.** а) 9; б) $\frac{1}{8}$; в) 16; г) $\frac{1}{9}$. **9.14.** а) 3; б) $\frac{1}{16}$; в) 2; г) $\frac{1}{512}$. **9.16.** а) $\log_3 14 - 1$; б) $\frac{\log_4 10 + 4}{5}$; в) $3 - \log_{\frac{2}{7}} 11$; г) $\frac{8 - \log_{\sqrt{5}} 6}{9}$. **9.17.** а) 1, $\log_2 3$; б) 0, $\log_4 5$; в) 1, $\log_3 4$; г) 1, $\log_7 2$. **9.18.** а) $x \geqslant \log_2 9$; б) $x \leqslant \log_{12} 7$; в) $x > -\log_3 4$; г) $x < -1$. **9.19.** а) $x \leqslant 1$, $x \geqslant \log_2 3$; б) $0 \leqslant x \leqslant \log_4 5$; в) $1 < x < \log_3 4$; г) $-\infty < x < +\infty$.

§ 10

10.5. а) $\log_2 0{,}1$, $\log_2 \frac{1}{6}$, $\log_2 0{,}7$, $\log_2 2{,}6$, $\log_2 3{,}7$; б) $\log_{0,3} 17$, $\log_{0,3} 3$, $\log_{0,3} 2{,}7$, $\log_{0,3} \frac{2}{3}$, $\log_{0,3} \frac{1}{2}$. **10.6.** а) $\log_3 4 < \sqrt[3]{9}$; б) $\log_{0,5} 3 < \sin 3$; в) $\log_2 5 > \sqrt[3]{7}$; г) $\lg 0{,}2 < \cos 0{,}2$. **10.9.** а) $\left[\frac{1}{9}; 81\right]$; б) [2; 8]. **10.10.** а) −2; б) не существует. **10.11.** а) 3; б) $\frac{1}{2}$; в) 5; г) $\frac{1}{3}$. **10.19.** а) $x \geqslant 1$; б) $0 < x < 1$; в) $0 < x \leqslant 1$; г) $x > 1$. **10.20.** а) $0 < x \leqslant 3$; б) $x > \frac{1}{2}$; в) $x \geqslant 5$; г) $0 < x < \frac{1}{3}$. **10.21.** а) $f(-8) = 27$; $f(-6) = 21$; $f(0) = 3$; $f(3) = -1$; $f(9) = -2$. **10.23.** а) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$; б) $(-7; 2)$; в) $(-\infty; 1) \cup (12; \infty)$; г) $(-1; 9)$. **10.24.** а), б), в), г) $(-\infty; \infty)$.

§ 11

11.4. а) 1; б) –1; в) 5; г) 1. **11.5.** а) –0,25; б) –2,5. **11.6.** а) $3c$; б) $4a$. **11.7.** а) $a + 1$; б) $m + 1$. **11.8.** а) $b - 1$; б) $n - 1$. **11.9.** а) $x = 8$; б) $x = 64$; в) $x = \frac{1}{7}$; г) $x = \frac{1}{1000}$. **11.10.** а) $x = 1,5$; б) $x = 12$; в) $x = 40$; г) $x = \frac{1}{3}$. **11.11.** а) $x = \frac{392}{27}$; б) $x = 18$; в) $x = \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}$; г) $x = \sqrt{5}$.

11.13. а) 4; б) –1,5; в) –12; г) 3. **11.14.** а) 20; б) 3,2; в) 24; г) $\frac{3}{64}$. **11.15.** а) 64; б) 49; в) 9; г) 216. **11.16.** а) 27; б) 169; в) 9; г) 625. **11.17.** а) 18; б) 5; в) 35; г) 3. **11.18.** а) 3,5; б) $2\frac{3}{11}$; в) 2; г) 3,5. **11.19.** а) 3; б) 2. **11.20.** а) 2; б) $\frac{2}{3}$; в) 2; г) $\frac{5}{6}$. **11.21.** а), б), в), г) 1. **11.22.** а) –1,5; б) $-\frac{1}{6}$. **11.29.** а) 2; б) 2; в) 3; г) 5.

11.32. а) –1; б) 1; в) 1; г) 1. **11.33.** а) $a + b$; б) $2a + b$; в) $a + 2b$; г) $3a + 2b$.

11.34. а) $\log_3 4 > \sqrt[4]{2}$; б) $\log_2 3 < \sqrt[3]{7}$.

§ 12

12.2. а) 2, 3; б) 10; в) 7; г) –10. **12.3.** а) –7, 3; б) 1, 9; в) 5, 7; г) 3, 5. **12.4.** а) 2, 9; б) –4, 3; в) –3, 6; г) –5, 2. **12.5.** а) 1; б) 2; в) 2, –4; г) нет корней. **12.6.** а) 2, 8; б) $\frac{1}{4}$, 16; в) 2, 4; г) 0,04, 125. **12.7.** а) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{25}$; б) $\sqrt[3]{4}$, 16; в) 0,0081, $\frac{\sqrt{30}}{3}$; г) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, 4. **12.9.** а) 5; б) 4; в) 3; г) 2. **12.10.** а) 3; б) нет корней; в) 4; г) –1. **12.11.** а) 1; б) нет корней; в) 2, 4; г) –4. **12.12.** а) 2; б) 3. **12.13.** а) 100; б) 81; в) 10; г) 32. **12.14.** а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{100}$; 100. **12.15.** а) 0, 1; б) 0, 1. **12.16.** а) $\frac{1}{9}$, 9; б) $\frac{1}{4}$, 4; в) $\frac{1}{4}$, 4; г) $\frac{1}{9}$, 9. **12.17.** а) $\frac{1}{9}$, 3; б) $\frac{1}{8}$, 2; в) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{27}$. **12.18.** а) (1; 1), (2; 4); б) (–12; 31); (2; 3). **12.19.** а) (2; 3), (3; 2); б) (3; 6). **12.20.** а) (4; 1); б) (4; 4). **12.21.** а) (1; 3), (3; 1); б) (1; 2). **12.22.** а) (2; 1); б) (–1; –4).

§ 13

13.3. а) $-\frac{1}{3} < x < 8$; б) $0 < x \leqslant 12$; в) $0 < x < 1,25$; г) $1,5 < x < 6$.

13.4. а) $1\frac{1}{3} < x < 2$; б) $x > 1$; в) $1,8 < x \leqslant 9$; г) $1 \leqslant x < 1\frac{1}{3}$.

13.5. а) $1,8 < x \leqslant 5$; б) $-\frac{1}{6} < x \leqslant 7$; в) $x < 0$; г) $x < -1$. **13.6.** а) $2 < x < 3$; б) нет решений; в) $-10 \leqslant x < -2\sqrt{2}$; г) $x > 14$. **13.7.** а) $x \leqslant -3$; $2 \leqslant x < 6$;

б) $0 < x < 2$, $x > 11$; в) нет решений; г) $3\sqrt{3} < x < 9$. **13.8.** а) $x < -1$, $x > 8$; б) $x \leqslant -1$; $x \geqslant \frac{1}{2}$; в) $2 < x < 4$; г) $0 < x \leqslant \frac{1}{9}$, $1 \leqslant x < 1\frac{1}{9}$.

13.9. а) $0 < x < 2$, $x > 8$; б) $2 < x < 4$; в) $\frac{1}{16} \leqslant x \leqslant 4$; г) $0{,}04 < x \leqslant 125$, $x \geqslant 125$. **13.10.** а) $x > 9$; б) $x > 3$; в) $0 < x \leqslant 5$; г) $0 < x \leqslant 2$.
13.11. а) $0 < x < 1$, $3 < x < 4$; б) $1 \leqslant x \leqslant 6$; в) $2 < x < 5$; г) $0 < x \leqslant 1$, $9 \leqslant x < 10$. **13.12.** а) $0 < x \leqslant 0{,}04$, $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$; б) $0{,}0081 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{30}}{3}$; в) $\sqrt[3]{4} < x < 16$; г) $0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $x > 9$. **13.13.** а) $\sqrt[4]{0{,}5} \leqslant x \leqslant 16$; б) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$; в) $\frac{1}{27} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; г) $\frac{1}{5^8} < x < \sqrt[4]{5}$. **13.14.** а) 2; б) 1; в) 3; г) 6. **13.15.** а) 6; б) 0; в) 2; г) 4. **13.16.** а) $x > 2$; б) $0{,}25 < x < 0{,}8$.
13.17. а) $x > 5$; б) $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$. **13.18.** а) Нет решений; б) $1 \leqslant x \leqslant 3$.

§ 14

14.1. а) 0; б) 2; в) 0; г) −1. **14.2.** а) $\frac{1}{a}$; б) $-\frac{1}{a}$; в) $\frac{2}{a}$; г) $-\frac{2}{a}$. **14.3.** а) $\frac{2}{b}$; б) $-\frac{2}{b}$; в) $\frac{3}{b}$; г) $-\frac{4}{b}$. **14.4.** а) a; б) $\frac{1 + 2a}{3}$; в) $2a$; г) $\frac{1 + 3a}{3}$. **14.7.** а) 16; б) 27.

14.8. а) 9, $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; б) 8, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **14.9.** а) 20; б) 4; в) 16,5; г) 18. **14.10.** а) 6; б) 6.

14.11. а) $1 + \frac{b}{2a}$; б) $\frac{2b + a}{a + b}$; в) $-\frac{b}{a}$; г) $-\frac{3a + b}{b}$. **14.12.** а) $\frac{a + b}{b}$; б) $\frac{2a + b}{3}$; в) $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}a$; г) $\frac{2 + b}{a + b}$. **14.13.** а) $\frac{1}{9}$, 3; б) 5, 25; в) 343, $\frac{1}{49}$; г) 2, 512.

14.14. а) 4; б) 7. **14.15.** а) 0,5, 1; б) −0,25. **14.16.** а) $-3 < x < -\frac{1}{9}$; б) $x < -4$, $-\frac{1}{8} < x < 0$.

§ 15

15.4. а) $\frac{4}{e^2}$; б) $\frac{4e}{3}$; в) −9,9; г) $-\frac{1}{2e}$. **15.5.** а) −1; б) −1; в) $5 - e$; г) 3.

15.6. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3}{4}\pi$; в) $\frac{3}{4}\pi$; г) $\frac{\pi}{6}$. **15.7.** а) $y = ex$; б) $y = e^2x - e^2$; в) $y = x + 1$; г) $y = \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$. **15.8.** а) $y = 3x$; б) $y = 0{,}5$; в) $y = -2x + 2$; г) $y = 1$.

15.11. а) Возрастает на $(-\infty; -2]$, $[0; +\infty)$, убывает на $[-2; 0]$, $x = 0$ — точка минимума, $x = -2$ — точка максимума; б) возрастает на $[-0,5; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0,5]$, $x = -0,5$ — точка минимума; в) убывает на $(-\infty; -3]$, возрастает на $[-3; +\infty)$, $x = -3$ — точка минимума; г) убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$, $x = 1$ — точка минимума. **15.12.** а) $0, e$; б) $0, e$; в) $\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}$; г) $e, 9e^3$. **15.16.** а) $y = 4x - 3$; б) $y = x - 1$; в) $y = -4x + 2e$; г) $y = x - 1$. **15.17.** а) $y = 2x - \frac{1}{2}$; б) $y = \frac{7}{e}x - \frac{11}{e}$; в) $y = 4e^2x - 3e^3$; г) $y = -2x + 3$. **15.18.** а) Убывает на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$, $x = 1$ — точка минимума; б) убывает на $(0; 1]$, возрастает на $[1; +\infty)$, $x = 1$ — точка минимума. **15.19.** а) Возрастает на $\left(-\infty; \ln\frac{1}{2}\right]$ и на $[0; +\infty)$, убывает на $\left[\ln\frac{1}{2}; 0\right]$, $x = \ln\frac{1}{2}$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума; б) убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[\ln 1,5; +\infty)$, возрастает на $[0; \ln 1,5]$; $x = 0$ — точка минимума, $x = \ln 1,5$ — точка максимума. **15.20.** а) Возрастает на $(0; 2]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $[2; 3]$, $x = 2$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $[0; 1]$, $x = 1$ — точка минимума. **15.21.** а) $1, e - 1$; б) $e - 1, e^2 - 2$. **15.22.** а) $-4 + \ln 4, -1$; б) $1, 4 - \ln 4$. **15.23.** а) $y = 2ex$; б) $y = x - \frac{1}{3} + \ln 3$. **15.24.** а) -5; б) $-\frac{13}{6}$; в) $\frac{9}{7}$; г) нет решений. **15.25.** а) $-\infty < x < +\infty)$; б) $x < \frac{3}{4}$; в) $x < -2$; г) $x < -2\frac{1}{3}$. **15.26.** а) $y = \frac{e}{2}x$; б) $y = \frac{1}{e}x$; в) $y = \frac{e}{3}x$; г) $y = \frac{3}{e}x$. **15.27.** а) -1; б) -1. **15.28.** а) $a \in (-7; -1] \cup [0; 6)$; б) $a \in (-1; 0)$; в) $a \in (-\infty; -7] \cup [6; +\infty)$; г) нет таких a.

ГЛАВА 3

§ 16

16.8. а) x; б) $-\cos x$; в) $\operatorname{tg} x$; г) $-\operatorname{ctg} x$. **16.9.** а) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$; в) $\frac{1}{4}\sin(4x-3)$; г) $2\cos\left(2-\frac{x}{2}\right)$. **16.10.** а) $\frac{1}{6(6x+1)}$; б) $\frac{2}{7}\sqrt{7x-9}$; в) $\frac{-1}{7(7x-3)}$; г) $-\frac{2}{3}\sqrt{42-3x}$. **16.11.** а) $-\frac{1}{2}\cos 2x$; б) $\frac{1}{2}e^{2x-5} - \frac{1}{3}\sin 3x$; в) $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(3x-1)^4} - \frac{1}{7}\ln|2-7x|$. **16.12.** а) $-\cos x + \frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{3}\sin 3x - 1$; в) $\sin x + 0,5$; г) $2 - 2\cos\frac{x}{2}$. **16.13.** $s = t^2 + t - 1$.

16.14. $S = \frac{4}{3}\cos 3t + \frac{2}{3}$. 16.15. $S = 6\sqrt{2t+1} - 3$. 16.16. $s = \frac{1}{6}(1+t)^4 + \frac{1}{3}t + \frac{5}{6}$; $v = \frac{2}{3}(1+t)^3 + \frac{1}{3}$. 16.17. а) $-4\cos x + 3$; б) $\sin x + 15$; в) $\sin x + 7$; г) $\sin x + 14$. 16.18. а) $x^2 + 3x + 2{,}25$; б) $(3x-1)^4$. 16.19. 8. 16.20. а) $x^2 + \frac{9}{4}$; б) $\frac{3}{4}x^4 + 7$. 16.21. а) $x = 2$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) $x = 1$ — точка минимума, $x = 5$ — точка максимума; в) $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; г) $x = -3$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума. 16.22. а) $F(a) > F(b)$; б) $F(a) < F(b)$.

§ 17

17.4. а) $\frac{2}{e}(e^2-1)$; б) $\frac{e^4-1}{2e}$; в) $4(e^2-1)$; г) $\frac{e^2}{2}(e-1)$. 17.5. а) $-\frac{3}{8}\left(1 - 3\sqrt[3]{3}\right)$; б) $\frac{3}{8}$; в) 87,5; г) $\frac{3}{5}\left(2 - \sqrt[3]{3}\right)$. 17.6. а) $\ln 2$; б) $e^2 - e + \ln 2$; в) $0{,}1\ln 2$; г) $\frac{1}{2}(e^4 - e^2) + 2\ln 2$. 17.7. а) $\frac{1}{2}\ln 2{,}2$; б) $\frac{1}{5}\ln\frac{11}{6}$; в) $\frac{1}{4}\ln 3$; г) $\ln 4$. 17.8. а) 12 см; б) 1,2 см; в) 27 см; г) $\frac{6}{7}$ см. 17.9. а) 60; б) $\frac{1}{6}$; в) $9\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$. 17.10. а) 9,5; б) 6,5. 17.11. а) $21\frac{1}{3}$; б) 20,5; в) 9; г) 6,6. 17.12. а) 8; б) $10\frac{2}{3}$. 17.13. а) 0,5; б) 4. 17.14. а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2}$. 17.15. а) $\pi + 1$; б) π. 17.16. а) $5\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $2\frac{2}{3}$. 17.17. а) 16; б) 54. 17.18. а) $e^3 - 1$; б) $\frac{e^4-1}{e^4}$; в) $\frac{e^2-1}{e}$; г) $e^2 - 1$. 17.19. а) $\frac{(e-1)^2}{e}$; б) $e - 2$; в) $e^2 - 2$; г) $2(e^2-1)$. 17.20. а) 1; б) $\ln 3$; в) 2; г) $\frac{1}{3}\ln 10$. 17.21. а) $e^3 - e^2 + \ln\frac{2}{3}$; б) $4 - \ln 5$; в) $4\frac{2}{3} - \ln 4$; г) $e - 2$. 17.22. а) 12; б) $\frac{\pi}{2} - 1$; в) $10\frac{2}{3}$; г) 2. 17.23. а) 4,5; б) $1\frac{1}{3}$; в) $10\frac{2}{3}$; г) 4,5. 17.24. а) $2\frac{2}{3}$; б) $21\frac{1}{3}$; 17.25. а) $2\frac{2}{3}$; б) 9. 17.26. а) $2\frac{1}{3}$; б) $2\frac{1}{3}$. 17.27. а) $19\frac{2}{3}$; б) 4,75. 17.28. а) 4π; б) $6{,}25\pi$. 17.29. а) 2π; б) $\frac{\pi}{4}$. 17.30. а) $\frac{\pi}{2} + 1$; б) $\frac{16}{3}(2\pi + 3\sqrt{3})$. 17.31. а) 4,5; б) 4,5. 17.32. а) $\frac{6-\pi}{12}$; б) $\frac{4(3+\pi)}{3\pi}$; в) $\frac{6-\pi}{\pi}$; г) $\frac{4(3+\pi)}{3\pi}$. 17.33. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{12}$. 17.34. а) 6,75; б) 6,75.

ГЛАВА 4

§ 18

18.1. а) 2,2, 3,3,3,3,3, 4,4,4,4,4,4,4,4,4, 5,5,5,5; б) мода 4, ее кратность 9;

в)

	Варианта				Сумма
	«2»	«3»	«4»	«5»	
Кратность	2	5	9	4	20

г) 3,75.

18.2. а) 4, 2, 2, 0, 4, 1, 4, 3, 1, 2; б) 0, 1,1, 2,2,2, 3, 4,4,4

	Варианта					Сумма
	0	1	2	3	4	
Кратность	1	2	3	1	3	10
Частота	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3	1
Частота, %	10	20	30	10	30	100

г) 2,3.

18.3. а) 7,2; б) 67 000; в) № 1 — 980, № 2 — 960, № 3 — 1000, № 4 — 400, № 5 — 990; г) нет, не пройдет, так как за нее проголосовало 4330 избирателей — менее 6,5% участников.

18.4. а) 9 вариант; объем равен 50; б) 8 — размах, 7 — мода;

в)

	Варианта									Сумма
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Кратность	5	6	3	7	4	11	5	4	5	50

г) 6,04.

18.5. а) Частота букв «т» и «у» равна $\frac{2}{17}$, всех остальных — $\frac{1}{17}$; б) всего 38 букв, из них 11 букв «г, р, о, м»; частота равна $\frac{11}{38}$, в процентах — примерно 29% ; в) мода буква «с», ее кратность равна 6; г) 6, 2, 1, 9, 4 / 5, 4, 1, 3, 7 / 1, 1, 3, 4, 5, 5 / 4, 2, 7, 6, 4 / 1, 3, 8,2, 6.

18.7. в)

	Варианта				Сумма
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
Кратность	20	$x = 5$	$y = 10$	15	50
Частота	0,4	0,1	0,2	0,3	1
Частота, %	40	10	20	30	100

г) варианта № 1.

18.8. а) $1, \underbrace{2, 2, 2, 2, 2}_{5}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3}_{6}, \underbrace{4, 4, \ldots 4}_{8}, \underbrace{5, 5, 5, 5, 5}_{5}$;

б)

	Отметка по литературе					Сумма
	«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	
Кратность	1	5	6	8	5	25

г) $\dfrac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 5}{25} = 3{,}44$.

18.9. а) $\underbrace{1, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 2}_{3}, \underbrace{3, 3, \ldots, 3, 3}_{11}, \underbrace{4, 4, 4, 4, 4, 4}_{6}, \underbrace{5, 5, 5}_{3}$;

б)

	Отметка по русскому языку					Сумма
	«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	
Кратность	2	3	11	6	3	25

г) $\dfrac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{25} = 3{,}2$.

18.10. а) 4; б) 5;

в)

	Итоговая отметка				Сумма
	«2»	«3»	«4»	«5»	
Кратность	4	7	9	5	25

18.11. а)

Кратность	1	5	6	8	5
Отклонение от среднего	−2,44	−1,44	−0,44	0,56	1,56
Квадрат отклонения	5,9536	2,0736	0,1936	0,3136	2,4336

Сумма квадратов равна $1 \cdot 5{,}9536 + 5 \cdot 2{,}0736 + 6 \cdot 0{,}1936 + 8 \cdot 0{,}3136 +$ $+ 5 \cdot 2{,}4336 = 32{,}16$; $D = \dfrac{32{,}16}{25} = 1{,}2864$, $\sigma = \sqrt{D} \approx 1{,}134$;

б)

Кратность	2	3	11	6	3
Отклонение от среднего	−2,2	−1,2	−0,2	0,8	1,8
Квадрат отклонения	4,84	1,44	0,04	0,64	3,24

Сумма квадратов равна $2 \cdot 4{,}84 + 3 \cdot 1{,}44 + 11 \cdot 0{,}04 + 6 \cdot 0{,}64 + 3 \cdot 3{,}24 = 28$; $D = \dfrac{28}{25} = 1{,}12$, $\sigma = \sqrt{D} \approx 1{,}0583$; в) по литературе; г) по русскому языку.

§ 19

19.1. а) 0,28; б) 0,46; в) 0,78; г) 0,78. **19.2.** а) 0,6; б) 0,4; в) 0,24; г) 0,4. **19.3.** а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{4}{9}$; в) $\dfrac{5}{9}$; г) 0. **19.4.** а) 0,96; б) 0,28; в) 0,2; г) 0,36. **19.7.** а) 0,5;

б) 0,19; в) 0,99; г) 0,94. **19.8.** а) $\frac{25}{36}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{11}{12}$; г) $\frac{8}{9}$. **19.9.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{13}{14}$; г) $\frac{15}{28}$. **19.10.** а) $\frac{32}{33}$; б) $\left(\frac{10}{33}\right)^2 \approx 0{,}092$; в) $1-\left(\frac{12}{13}\right)^2 \approx 0{,}868$; г) $\frac{64}{33^2} \approx 0{,}059$. **19.11.** а) 0,5; б) 0,1; в) 0,2; г) 0,25. **19.12.** а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{1}{210}$.

§ 20

20.1. а) 42; б) 20; в) 24; г) 14. **20.2.** а) $5! = 120$; б) $(5!)^2 = 14\,400$; в) $5! \cdot 3! = 720$; г) $5! \cdot 4! = 2880$. **20.3.** а) 54; б) 1; в) 0; г) 5184. **20.4.** а) 401; б) 19; в) 4; г) 11. **20.5.** а) 2; б) 3; в) 6; г) 24. **20.6.** а) $C_{17}^2 = 136$; б) 17; в) 119; г) 17. **20.9.** а) 26; б) 6; в) 224; г) 0. **20.10.** а) 8; б) 6; в) 7; г) 4. **20.11.** а) $x = 9$ или $x = 10$; б) $x = 11$; в) 8; г) 31. **20.12.** а) 15; б) 5; в) 8; г) 12. **20.13.** а) 7; б) 8; в) 12; г) 3. **20.14.** а) $5! = 120$; б) $C_5^2 = 10$; в) $C_5^3 \cdot 2 = 20$; г) $4! = 24$. **20.15.** а) 210; б) 35; в) 15; г) 10. **20.16.** а) $C_{36}^5 = 376\,992$; б) $C_{32}^1 = 32$; в) $C_9^5 = 126$; г) $4 \cdot C_9^5 = 504$. **20.17.** а) $10^5 = 100\,000$; б) $8^5 = 32\,768$; в) $2^5 = 32$; г) $2 \cdot 8^4 = 8192$. **20.18.** а) 12; б) 13; в) 12; г) 15. **20.19.** а) $C_{20}^3 = 1140$; б) $C_{12}^3 = 220$; в) 180; г) 748. **20.20.** а) 14 112; б) 10 976; в) 7056; г) 28.

§ 21

21.1. в) $x^{10} + 10x^8 + 40x^6 + 80x^4 + 80x^2 + 32$; г) $1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}$. **21.2.** а) $C_7^1 \cdot 1^6 \cdot 1^1 = 7$; б) $C_4^1 \cdot 1^4 \cdot 3^1 = 12$; в) $C_5^1 \cdot 3^4 \cdot (-2)^1 = -810$; г) $C_5^4 \cdot 1^1 \cdot 2^4 - C_4^3 \cdot 2^1 \cdot 1^3 = 72$. **21.3.** а) 108; б) -720; в) 8; г) $-\frac{4}{9}$. **21.4.** а) 60; б) $C_9^3 \cdot 3^6 = 61\,236$. **21.5.** а) $10x^8$; б) $120x^4$; в) $210x^{-2}$; г) 252. **21.6.** а) $C_{10}^5 = 252$ один член $C_{10}^5 a^5b^5$; б) $C_9^4 = 126$, два члена — $C_9^4 a^4b^5$ и $C_9^5 a^5b^4$.

§ 22

22.1. а) $\frac{33}{95}$; б) $\frac{14}{95}$; в) $\frac{48}{95}$; г) 1. **22.2.** а) $\frac{17}{70}$; б) $\frac{2}{35}$; в) $\frac{2}{35}$; г) $\frac{9}{70}$. **22.3.** а) $\frac{5}{42}$; б) $\frac{10}{21}$; в) $\frac{5}{14}$; г) $\frac{20}{21}$. **22.4.** а) 43,6; б) 41,3; в) 13,2; г) 1,77. **22.5.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{15}$; в) 0,4. Заменить 30 на 29. **22.6.** а) 0,4; б) 0,48; в) 0,12. Заменить 50 на 48. **22.7.** а) Невозможное событие; б) дискриминант этого уравнения отрицателен; в) само событие A; г) невозможное событие. **22.8.** а) 0,75; б) 0,91; в) 0,99; г) 0,9901. **22.9.** а) 0,48; б) 0,08; в) 0,92; г) 0,44. **22.10.** а) $C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1$, $P = 0{,}441$; б) $C_4^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2$, $P = 0{,}2646$; в) $C_5^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2$, $P = 0{,}3087$. **22.11.** а) $C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = 0{,}25^4 \approx 0{,}004$; б) $C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 = 0{,}75^4 \approx 0{,}316$; в) $C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^{4-3} =$

$= 4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}047$; г) $1 - P_4(0) \approx 0{,}684$. **22.12.** а) 1; б) 1; в) 0; г) 0,5. **22.13.** а) 0,5; б) 0,5; в) 0,25; г) 0,25. **22.14.** а) 0,5; б) 0,5; в) 0,2; г) 0,21. **22.15.** а) $\frac{24}{25\pi} \approx 0{,}306$; б) 0,16; в) $\approx 0{,}7$; г) $\frac{24 - 4\pi}{25\pi} \approx 0{,}146$. **22.16.** а) 56,4; б) 84,9; в) 1,9; г) 0,13. **22.17.** а) 0,1; б) 0,3; в) 0,5; г) 0,6. **22.18.** а) $\frac{2}{15}$; б) $\frac{8}{15}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{13}{15}$. **22.19.** а) 138; б) 200; в) 162; г) 100. **22.20.** а) $\frac{8}{9}$; б) 0,8; в) 0,5; г) $\frac{1}{11}$. **22.21.** а) 0,8; б) 0,1; в) 0,6; г) 0,998.

22.22. а)

Число попаданий, k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k) = C_5^k \cdot 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{5-k}$	0,078	0,259	0,346	0,23	0,077	0,01

б) 0,01; в) $0{,}346 + 0{,}23 + 0{,}077 + 0{,}01 = 0{,}663$; г) наибольшая вероятность получается при $k = 2$.

22.23. а) 0,01; б) 0,38; в) 0,25; г) 0,01. **22.24.** а) 0,25; б) 0,5; в) 0,5; г) 0,25. **22.25.** а) $\frac{1}{27}$; б) $\frac{19}{27}$; в) и г) $\frac{7}{27}$.

ГЛАВА 5

§ 23

23.9. а) 1, 6; б) 0; в) 2, 6; г) нет корней. **23.10.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) нет корней; г) $-2{,}5$; 2. **23.11.** а) 1, -3; б) 1, -4. **23.12.** а) 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 2; б) 0, ± 3; в) ± 1, $\pm\frac{\pi}{4}$; г) 0, $\pm\pi$, ± 4.

§ 24

24.2. а) 5,25; б) 11. **24.3.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$. **24.4.** а) 6, 8; б) 0. **24.5.** а) 1, 7; б) $2\frac{5}{6}$. **24.6.** а) 1, 3; б) 10, 0,001. **24.7.** а) 3, 0; б) ± 2. **24.8.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **24.9.** а) $-\frac{11}{23}$; б) 1. **24.10.** а) 0, 4, 5; б) -3, -1, 3. **24.11.** а) 0, 6; б) 0, 5. **24.12.** а) 2, -1; б) 2, 3. **24.13.** а) ± 2, $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) ± 3, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **24.14.** а) πn, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$,

$-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$; в) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $(-1)^n\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$; г) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **24.15.** а) -1, $\frac{1}{2}$; б) ± 1. **24.16.** а) 50; б) -34. **24.17.** а) $1\frac{1}{6}$; б) 1, $-3{,}8$. **24.18.** а) 1, 0; б) $-\log_5 10$; в) 0; г) 2, $\log_3 2-1$. **24.19.** а) ± 1; б) 8, 16; в) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$; г) 64. **24.20.** а) 10, $10^{-\frac{5}{4}}$; б) 0, 1; в) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; г) 1, 4. **24.21.** а) 0, ± 1; б) 0, 1. **24.22.** а) 2; б) -1. **24.23.** а) 1, 2; б) $\frac{1}{2}$. **24.24.** а) 1, б) 9. **24.25.** а) 3, 4, -1, -2; б) 0, -3. **24.26.** а) 1; б) 2,5. **24.27.** а) 5, 7,5; б) 2, 4. **24.28.** а) 1; б) 1; в) 1, $\frac{25}{9}$; г) -2. **24.29.** а) 1024; б) 1; в) 64, 4096; г) 1. **24.30.** а) 1; б) 1, 13. **24.31.** а) $\frac{1}{3}$; б) 5, $2\frac{1}{3}$. **24.32.** а) 6, -2; б) 4, -1. **24.33.** а) $\frac{\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi n}{5}$. **24.34.** а) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9}$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$. **24.35.** а) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{2}$; б) πn, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$. **24.36.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **24.37.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\pi n$. **24.38.** а) 1, $\log_2 5$; б) 1, $\log_3 2$; в) 3, $\log_3 0{,}12$; г) 1, $\log_5 4$. **24.39.** а) -3, $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n (n\in \mathbf{Z},\ n\geqslant 0)$; б) 8, 120, $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2} (n\in\mathbf{Z},\ n\geqslant 6)$. **24.40.** а) 2; б) 3. **24.41.** а) 1; б) 7. **24.42.** а) 2; б) -2.

§ 25

25.4. а) Нет решений; б) $8\leqslant x\leqslant 11$. **25.5.** а) $x\geqslant 3$; б) $-1<x\leqslant 8$. **25.6.** а) $x<-5$, $\frac{1}{3}<x<1$; б) $x<-\frac{2}{7}$, $\frac{1}{2}<x<7$. **25.7.** а) $-3<x<-2$, $-2<x<4$; б) $-5<x<-2$, $3{,}5<x<4$, $4<x<5$. **25.8.** а) $-\infty<x<+\infty$; б) $-1\leqslant x\leqslant 0$, $x>3$. **25.9.** а) $x>-\frac{1}{8}$; б) $x<3$, $x>3$. **25.10.** а) $x>1$; б) $x>3$. **25.11.** а) $2{,}5<x\leqslant 3$; б) нет решений. **25.12.** а) $x\geqslant 2{,}25$; б) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2\pi n$. **25.13.** а) $x\leqslant 1$, $x\geqslant 7$; б) $x=1$. **25.14.** а) $x\geqslant 4$; б) $x\geqslant -2$. **25.15.** а) $0<x<5$; г) $x>49$. **25.16.** а) $x\geqslant 1$; б) $x\leqslant 0$. **25.17.** а) $x\leqslant 1$; б) $x\leqslant 1$. **25.18.** а) $x>64$; б) $2^{10}<x<2^{20}$. **25.19.** а) $0\leqslant x\leqslant 1$; б) $x<\log_5 0{,}1$. **25.20.** а) $8<x<16$; б) $0<x\leqslant\frac{1}{27}$, $x\geqslant\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **25.21.** а) $1<x\leqslant 1{,}25$, $x\geqslant 1{,}5$; б) $0{,}1<x<1$. **25.22.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; б) $x=2\pi n$. **25.23.** а) $x>2$; б) $x\geqslant 0$;

в) $x \leqslant 2$; г) нет решений. **25.24.** а) $0 < x < 4$; б) нет решений; в) $x \geqslant 4$; г) $x > 0$. **25.25.** а) $-\infty < x < +\infty$; б) $x = -\frac{\pi}{2}$; в) $x = 0$; г) $-\infty < x < +\infty$.

25.26. а) $x \geqslant -1{,}5$; б) $x \leqslant \frac{5}{3}$. **25.27.** а) $0 < x < 9$; б) $0 < x < 4$.

25.28. а) $-2 < x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$; б) $x \geqslant 3$, $x = -4$. **25.29.** а) $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant \log_2 3$;

б) $0 < x \leqslant \frac{4}{3}$, $x \geqslant \sqrt[3]{3}$. **25.30.** а) $x > 1$; б) $-1 < x < 5$; в) $x < -8$, $x > \frac{1}{3}$;

г) $-7 < x < 0$.

§ 26

26.10. а) 12; б) 48. **26.11.** а) $x = 7 - 2k$, $y = k$, $k \in Z$; б) $x = k$, $y = 17 - 5k$, $k \in Z$. **26.12.** а) $x = 1 - 2k$, $y = 7k - 3$, $k \in Z$; б) $x = 12k - 5$, $y = 7k - 3$, $k \in Z$. **26.13.** а) (4; 1), (−4; −1), (−1; −1), (1; 1); б) (5; −1), (3; 1), (−5; 1), (−3; −1). **26.23.** а) 3,2; б) 144. **26.24.** а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{9}{32}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{7}{24}$.

§ 27

27.1. а) (1; 2), (1,5; 1,5); б) (−1; −2); в) (2; 3), (3; 2); г) (3; −1), (9; −4).

27.2. а) (0; −1); б) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. **27.3.** а) (−1; 2); б) (4; 1); в) (1; 1), (1, −1);

г) (8; 1). **27.4.** а) $\left(\frac{1}{8}; 9\right)$; б) $\left(\pi + 2\pi k; \pm\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$; в) $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$;

г) $\left((-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}\right)$. **27.5.** а) (2; 1); б) (1; −2). **27.6.** а) (3; 2); б) (8; 2).

27.7. а) (2; 6), (−2; 10); б) (5; 3), (3; 1). **27.8.** а) 2; б) 3; в) 7; г) 1. **27.9.** а) (1; 2), (2; 1); б) (2; −4), (4; 0). **27.10.** а) (−1; 1); б) (1; 1). **27.11.** а) (1; 1), (1,4; 0,2); б) (2; 1). **27.12.** а) $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi(n + k); -\frac{\pi}{4} + \pi(n - k)\right)$; б) (2; 1), (−2; 1), (2; −1),

(−2; −1). **27.13.** а) $(a; 3a)$, где $a \neq 0$; б) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **27.14.** а) (3; 0); б) (2; −1).

27.15. а) (2; 2), (−2; −2); б) (7; −1), (−1; −3). **27.16.** а) (4; 4), (3; 2); б) (1; 2). **27.17.** а) (8; 27), (27; 8), б) (16; 1). **27.18.** а) (3; 1), (2; 1,5); б) (−4; 0), $\left(-\frac{40}{9}; -\frac{32}{9}\right)$. **27.19.** а) (1; 4), $\left(\frac{49}{9}; \frac{16}{9}\right)$; б) (4; 1). **27.20.** а) (2; 3), (3; 2);

б) (42; 39). **27.21.** а) $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. **27.22.** а) (2; −1; 1); б) (−1; 2; 0).

27.23. а) (1; −2; −1), (−3; 2; −5); б) (2; 0; −1), $\left(-\frac{20}{11}; \frac{14}{11}; \frac{3}{11}\right)$. **27.24.** а) $y = 2x^2 - 5x + 1$; б) $y = 3x^2 - 2x + 1$. **27.25.** а) 143. **27.26.** 3, 9, 27. **27.27.** 4.

§ 28

28.1. а) $m \neq 1$; б) таких значений m нет; в) $m = 1$. **28.2.** а) $b \neq \pm 1$; б) $b = -1$; в) $b = 1$. **28.3.** а) $x = \frac{1}{a+2}$, если $a \neq \pm 2$; x — любое действительное число, если $a = 2$; нет корней, если $a = -2$; б) $x = a$, если $a \neq -1, 0$; x — любое действительное число, если $a = -1$; нет корней, если $a = 0$. **28.4.** а) $x \geqslant m + 1$, если $m > 1$; $x \leqslant m + 1$, если $m < 1$; $-\infty < x < +\infty$, если $m = 1$; б) $x > \frac{1}{b+1}$, если $b < -1$, $b > 1$; $x < \frac{1}{b+1}$, если $-1 < b < 1$; $-\infty < x < +\infty$, если $b = -1$; нет решений, если $b = 1$. **28.5.** а) $x \geqslant \frac{b+2}{b}$, если $b > 1$, $b < 0$; $x \leqslant \frac{b+2}{b}$, если $0 < b < 1$; $-\infty < x < +\infty$, если $b = 0$, $b = 1$; б) $x \leqslant a$, если $a > 0$, $a < -1$; $x \geqslant a$, если $-1 < a < 0$; $-\infty < x < +\infty$, если $a = -1$; нет решений, если $a = 0$. **28.6.** а) $a < 0$, $0 < a < 1$, $a > 4$; б) $a = 0, 1, 4$; в) $1 < a < 4$. **28.7.** а) −9; б) 4. **28.8.** а) $b \geqslant 1$; б) $b \geqslant 3$. **28.9.** а) $a \geqslant -7$; б) $a \geqslant -5$. **28.10.** а) $a > 4$; б) $a < -1$. **28.11.** а) $a < -4$; б) $a > 20$. **28.12.** а) $x \geqslant 2$, если $a \leqslant 2$; $x \geqslant a$ или $x = 2$, если $a > 2$; б) $a < x < 6$, если $a < 6$; нет решений, если $a \geqslant 6$. **28.13.** а) 1; б) 2. **28.14.** а) $a < -\frac{2}{5}$; б) $-\frac{5}{4} < a < \frac{1}{4}$. **28.15.** а) $a = 1$; $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; б) $a > \sqrt{2}$. **28.16.** а) $a \leqslant 3$, $a \geqslant 27$; б) $a > -1$. **28.17.** а) $a = \frac{13}{4}$, $a \leqslant 1$; б) $a < 1$. **28.18.** а) $0 < a < 4$; б) $-15 < a < 17$. **28.19.** а) $a < -12$; б) $-5 \leqslant a \leqslant 0$.

ГЛАВА 6

§ 29

29.1. Бесконечно много. **29.3.** Кругом. **29.4.** Прямоугольником. **29.5.** Прямоугольником. **29.6.** а), в) Да; б) нет. **29.7.** а) Одна; б) бесконечно много. **29.8.** Кругом. **29.9.** Равнобедренным треугольником. **29.10.** Бесконечно много. **29.11.** а) Нет; б) да. **29.12.** Да. **29.13.** 5 м. **29.14.** $2r\sqrt{d^2 - 4r^2}$. **29.15.** $\frac{\sqrt{Q}}{2}$. **29.16.** 4π см². **29.17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **29.18.** $Q\sqrt{2}$. **29.19.** а) Точки цилиндра, принадлежащие оси; б) круг. **29.20.** Фигура, состоящая из двух кругов. **29.21.** 16 см². **29.22.** $\sqrt{3}$ см². **29.23.** 10 м. **29.24.** 5 см и $5\sqrt{3}$ см. **29.25.** 90°. **29.26.** 9π м². **29.27.** $16\sqrt{3}$ см². **29.28.** а), б) Осевое сечение.

§ 30

30.1. Круг. **30.2.** Прямые, содержащие или параллельные одной из сторон прямоугольника и пересекающие прямоугольник. **30.4.** Конус. **30.6.** Шар. **30.7.** Цилиндр. **30.8.** а) Цилиндр; б) фигура, ограниченная двумя частями гиперболоида вращения. **30.9.** Конус. **30.11.** Фигура, ограниченная гиперболоидом вращения. **30.12.** а) Фигура, составленная из двух конусов с общим основанием; б) фигура, ограниченная гиперболоидом вращения; в) фигура, ограниченная двумя частями гиперболоида вращения. **30.18.** 8 см. **30.19.** 24 см^2. **30.21.** а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и гиперболоидом вращения между ними; б) фигура, ограниченная тремя гиперболоидами вращения; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперболоидами вращения. **30.22.** а) Фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух конусов и трех гиперболоидов вращения между ними; б) фигура, ограниченная боковыми поверхностями двух усеченных конусов и гиперболоидом вращения; в) фигура, ограниченная четырьмя гиперболоидами вращения.

§ 31

31.1. а) Бесконечно много; б) одну. **31.2.** а), б) Бесконечно много; в) ни одной. **31.3.** Нет. **31.4.** а) Находятся на одинаковом расстоянии от центра; б) меньшее находится на большем расстоянии от центра. **31.5.** Проходящее через центр шара. **31.6.** Общим диаметром. **31.7.** а) Ни одной, одну или две; б), в) ни одной, одну, бесконечно много. **31.8.** Диаметрально противоположные. **31.9.** Окружности должны иметь общий центр. **31.10.** а) Если расстояние между центрами сфер больше суммы или меньше разностей их радиусов, то сферы не имеют общих точек; б) если расстояние между центрами сфер равно сумме или разности их радиусов, то сферы касаются; в) если расстояние между центрами сфер меньше суммы и больше разностей их радиусов, то сферы пересекаются. **31.11.** Окружностью. **31.12.** а) Пересекаются в одной точке; б) параллельны. **31.13.** 4 см. **31.14.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **31.15.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **31.16.** 4 см. **31.17.** 30 см. **31.18.** а) Две; б) одну; в) бесконечно много. **31.19.** Да. **31.20.** а) Плоскость, параллельная данным; б) две биссектральные плоскости без линии их пересечения. **31.21.** а) Если расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса, то сфера и прямая не имеют общих точек; б) если расстояние от центра сферы до прямой равно радиусу, то прямая касается сферы; в) если расстояние от центра сферы до прямой меньше радиуса, то сфера и прямая пересекаются. **31.22.** Бесконечно много. **31.23.** а), б) Бесконечно много. **31.24.** а) Цилиндрическая поверхность, осью которой является данная прямая; б) две плоскости, параллельные данной плоскости; в) две сферы или одна сфера, концентрические с данной сферой. **31.25.** Да, если одна из сфер не содержится в другой. **31.27.** $R : \sin \frac{\varphi}{2}$.

§ 32

32.1. Около основания призмы можно описать окружность. **32.2.** Трапеция равнобедренная. **32.3.** Нет. **32.4.** а), б) Да; в), г) нет. **32.5.** Призма, в основании которой ромб. **32.6.** Нет. **32.7.** Да. **32.8.** Пирамида, в основании которой ромб. **32.9.** Около него можно описать окружность. **32.10.** Тупоугольный. **32.11.** В основании призмы: а) остроугольный треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник. **32.12.** а) Да; б) нет. **32.13.** $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. **32.14.** 1,5 дм. **32.15.** 2 дм. **32.17.** Высота — $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, центр — середина AB. **32.20.** 13 см. **32.23.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **32.24.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

§ 33

33.1. Да, центр куба. **33.2.** Нет. **33.3.** Высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание. **33.4.** Да, если высота призмы равна высоте ромба. **33.5.** Прямая призма, в основании которой прямоугольник. **33.6.** $\frac{1}{2}$. **33.8.** В правильную пирамиду можно вписать сферу. **33.9.** Да. **33.10.** Пирамида, в основании которой прямоугольник. **33.11.** Да. **33.12.** Да. **33.13.** $\frac{h}{2}$. **33.14.** $\sqrt{3}$ см. **33.16.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **33.17.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **33.18.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **33.19.** $\frac{1}{2}a \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **33.20.** $\frac{a\sqrt{3}}{4+\sqrt{2}}$. **33.21.** Если в сечении усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через центры оснований и параллельной ребру основания, получается трапеция, в которую можно вписать окружность.

§ 34

34.1. Эллипс. **34.3.** а) $2\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^2$; б) $\sqrt{2}\pi R^2$; в) $2\pi R^2$. **34.10.** $-\frac{\pi}{2}$. **34.12.** $6\sqrt{\pi^2+1}$ см.

§ 35

35.1. Центрально-симметричные: куб, прямоугольный параллелепипед, шар и др.; нецентрально-симметричные: пирамида, конус и др. **35.2.** Может. **35.3.** Центр симметрии — точка пересечения данных прямых. Оси симметрии — две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованные данными прямыми, и прямая, проходящая через точку пересечения данных прямых и перпендикулярная их плоскости. Если данные прямые перпендикулярны, то сами они также являются осями симметрии. Плоскости симметрии: плоскость данных прямых и две плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованные данными прямыми, и перпендикулярные их плоскости. **35.4.** Девять осей симметрии. **35.5.** Бесконечно много. **35.6.** Три плоскости симметрии. **35.7.** Пирамида, в основании которой параллелограмм, имеет ось симметрии, но не имеет плоскости симметрии. Правильная треугольная пирамида имеет плоскости симметрии, но не имеет осей симметрии. **35.8.** Правильные 3-угольные, 4-угольные пирамиды. **35.9.** Третьего. **35.10.** Центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии третьего порядка. **35.11.** а) Семь осей симметрии; б) семь плоскостей симметрии. **35.12.** Нет. **35.13.** Середина отрезка, соединяющего данные точки. **35.16.** Центр симметрии, ось симметрии 4-го порядка и четыре оси симметрии 2-го порядка, пять плоскостей симметрии. **35.17.** Ось симметрии 7-го порядка, семь плоскостей симметрии. **35.18.** а) $2n - 1$ осей симметрии, одна ось симметрии $(2n - 1)$-го порядка; б) $2n$ плоскостей симметрии. **35.19.** Центром симметрии. **35.20.** а) 3 оси симметрии; б) 3 плоскости симметрии. **35.21.** Центром симметрии. **35.22.** Нет. **35.23.** а) Одна ось симметрии, n плоскостей симметрии; б) нет осей симметрии, n плоскостей симметрии (n — число сторон основания пирамиды). **35.24.** а) Одна, если n четно, и ни одной, если n нечетно; б) n плоскостей симметрии. **35.25.** Может, например, пирамида, в основании которой ромб, иметь ось симметрии и две плоскости симметрии. **35.26.** Нет.

§ 36

36.1. а), б) Две. **36.2.** Боковая поверхность цилиндра. **36.3.** а), б), в) Да. **36.4.** Две. **36.5.** а) Да; б) нет. **36.6.** а). **36.7.** Две. **36.8.** Две сцепленные дважды перекрученные ленты. **36.9.** Сцепленные лист Мёбиуса и четырежды перекрученная лента. **36.13.** $2ab$. **36.14.** $2b$. **36.15.** а) Две; б), в) одна. **36.17.** Лист Мёбиуса; дважды перекрученная лента. **36.18.** Одна. **36.19.** в) Две; г) одну.

ГЛАВА 7

§ 37

37.1. а) Нет; б) да. **37.2.** Куб со стороной, равной 1, и прямоугольный параллелепипед со сторонами 1, 2 и 0,5. **37.3.** Семь куб. ед. **37.4.** Три куб. ед. **37.5.** 20 см^3. **37.6.** 1 : 1. **37.7.** а), б), в) Да; г) нет. **37.8.** Та, которая шире. **37.9.** 60 см^3. **37.10.** 200 см^3. **37.11.** а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) увеличится в 4 раза, в 9 раза, в n^2 раз; в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз. **37.12.** а) 1 : 8; б) 1 : 27; в) 1 : n^3. **37.13.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ см^3. **37.14.** 12 см. **37.15.** 1 : 3. **37.16.** $V = \dfrac{n \cdot a^2h}{4\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$.

37.17. $\frac{3V}{4}$. **37.18.** 5 : 3. **37.19.** $\pi \cdot a^3$. **37.20.** 3 см. **37.21.** 140 см^3.

37.22. $V = \dfrac{\pi \cdot d^3}{4} \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi$. **37.23.** 243π см^3. **37.24.** 4 см. **37.25.** $\pi R^3 \operatorname{tg}\varphi$.

37.28. $\frac{1}{6}$.

§ 38

38.1. Нет. **38.2.** Да. **38.3.** Да. **38.4.** Да. **38.5.** 2 : 1. **38.6.** Да. **38.7.** Да. **38.8.** 3 : 1. **38.9.** $V = S \cdot b \cdot \sin \varphi$. **38.10.** 168 дм^3. **38.11.** $Q \cdot b \cdot \sin \varphi$. **38.12.** $\pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \sin \varphi$. **38.13.** $\sqrt{2}$ м^3. **38.14.** $\frac{\sqrt{3}}{8} ad\sqrt{4a^2 - d^2}$. **38.17.** Объем фигуры $Ф_2$ в k раз больше объема фигуры $Ф_1$.

§ 39

39.1. Одну треть. **39.2.** $\frac{1}{3}abh$. **39.3.** $\frac{\sqrt{3}a^2h}{12}$. **39.4.** $\frac{d^2h}{6}$. **39.5.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **39.6.** 1 : 3. **39.7.** $h_1 : h_2$. **39.8.** 6 см^3. **39.9.** Нет. **39.10.** Уменьшится в n раз. **39.11.** $V = \frac{1}{3}a^2h$. **39.12.** $\frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$. **39.13.** 32 м^3. **39.14.** 7 см. **39.15.** $V = \frac{1}{12}na^2h \cdot \operatorname{ctg} \frac{180°}{n}$. **39.16.** $\frac{\sqrt{3}}{12}b^3$. **39.17.** $\frac{1}{2}V$. **39.18.** $\frac{1}{3}$. **39.19.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **39.20.** $\frac{1}{6}$. **39.21.** а) Равнобедренный треугольник; б) $\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$; в) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{33}}{33}$; г) $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ и $\frac{\sqrt{2}}{16}a^3$. **39.22.** $\frac{a^3}{24}$. **39.23.** $\frac{3a^3}{4}$. **39.24.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **39.25.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

§ 40

40.1. а) В 3 раза; б) в 4 раза. **40.2.** Увеличится в 2 раза. **40.3.** 120π см^3. **40.4.** 1 : 7. **40.5.** 12π см^3. **40.6.** 16π см^3. **40.7.** 72π см^3. **40.8.** 9π см^3. **40.9.** $V = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{b^2 - R^2}$. **40.10.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ дм^3. **40.11.** $\frac{3V}{\pi R}$. **40.12.** $\frac{\pi l^3}{8}$. **40.13.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **40.14.** Нет. **40.15.** 19π см^3. **40.16.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$. **40.17.** 2325 м^3. **40.18.** $\frac{a^3 - b^3}{2}$. **40.19.** $\frac{\pi(R^3 - r^3)}{3}$. **40.20.** 8 см.

§ 41

41.1. $\frac{4}{3}\pi$ см^3. **41.2.** $\frac{32\pi}{3}$ см^3. **41.3.** а) В 27 раз; б) в 64 раза. **41.4.** 6 см. **41.5.** 27. **41.6.** $\left(3\frac{5}{7}\right)^3 \approx 50$ раз. **41.7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. **41.8.** 1000. **41.9.** $\frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)$. **41.10.** $V = \frac{1}{6}\pi D^3$. **41.11.** 216 : 1. **41.13.** 6 см. **41.14.** $\frac{4000}{3}\pi$ см^3.

41.15. $5\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ см. **41.16.** $\frac{4}{3}R$. **41.17.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. **41.18.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **41.19.** 288π см^3. **41.20.** $\frac{7}{250}$. **41.22.** $V = \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)$.

§ 42

42.1. Площадь: а) прямоугольника; б) кругового сектора. **42.2.** 6. **42.3.** а) $\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{3}$. **42.4.** 24 м^2. **42.5.** 12π м^2. **42.6.** Двумя способами, в обоих площади равны. **42.7.** 80π. **42.8.** Уменьшится: а) в 2 раза; б) в 4 раза; в) в 6 раз. **42.9.** πh^2. **42.10.** 1 : 2 : 3. **42.11.** 4π м^2. **42.12.** 30. **42.13.** 24π м^2. **42.14.** $8\sqrt{2}\pi$ см^2. **42.15.** $a\left(3b + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. **42.16.** $\frac{1}{2}na^2\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} + nab$. **42.17.** 2 : 1. **42.18.** $2\sqrt{2}Q$. **42.19.** $\frac{a}{2}$. **42.20.** 20 см^2. **42.21.** 60°. **42.22.** Равнобедренный. **42.23.** π : 4. **42.24.** а) $3\pi R^2 - \pi r^2$; б) $(\sqrt{2} + 1)\pi R^2 + (1 - \sqrt{2})\pi r^2$.

§ 43

43.1. 12 см^2. **43.2.** Увеличится: а) в 4 раза; б) в 9 раз; в) в n^2 раз. **43.3.** а) Уменьшится в 5 раз; б) увеличится в $\sqrt{2}$ раз. **43.4.** ≈13,8 раза. **43.5.** 400π см^2. **43.6.** 2 : 3. **43.7.** $m\sqrt{m} : n\sqrt{n}$. **43.8.** $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$. **43.9.** 784π см^2. **43.10.** 25 см. **43.11.** 400π см^2. **43.12.** $\frac{1125\pi}{2}$ м^3. **43.14.** В 3 раза. **43.15.** 2500π дм^2. **43.16.** 8π дм^2.

ГЛАВА 8

§ 44

44.2. а) (1; 3; 0), (5; −6; 0); б) (0; 3; 4), (0; −6; 2); в) (1; 0; 0), (5; 0; 0); г) (0; 0; 4), (0; 0; 2). **44.3.** а) Плоскость Oyz; б) плоскость Oxz; в) плоскость Oxy; г) ось Oz; д) ось Oy; е) ось Ox; ж) начало координат. **44.4.** а) 3; б) 2; в) 1. **44.5.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **44.6.** а) Плоскость, параллельная плоскости Oyz и проходящая через точку (1; 0; 0); б) прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку (1; 1; 0). **44.7.** а) $z = x$; б) $x = y = z$. **44.8.** 3, $\sqrt{29}$. **44.9.** Точка A. **44.10.** а) (2; −5; 0), 3; б) (0; 6; −1), $\sqrt{11}$. **44.12.** $B(-2; -2; 0)$, $C(2; -2; 0)$, $D(2; 2; 0)$, $A_1(-2; 2; 4)$, $B_1(-2; -2; 4)$, $C_1(2; -2; 4)$, $D_1(2; 2; 4)$. **44.13.** (−1; 0; 0), (0; −1; 0), (0; 0; 1), (0; 0; −1). **44.14.** Пересекает ось Ox в точке с координатами (1; 0; 0); не проходит через начало координат. **44.15.** а) $(-x; y; z)$, $(x; -y; z)$, $(x; y; -z)$; б) $(-x; -y; z)$, $(-x; y; -z)$, $(x; -y; -z)$; в) $(-x; -y; -z)$. **44.16.** а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

б) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. **44.17.** а) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$; б) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$; в) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$. **44.18.** а) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=10$; в) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=13$. **44.19.** 8 сфер, $(x\pm R)^2+(y\pm R)^2+(z\pm R)^2=R^2$. **44.20.** Уравнение сферы $(x-2)^2+y^2+z^2=4$, радиус равен 2, центр — $(2; 0; 0)$. **44.21.** $(x-3)^2+y^2+z^2=16$, точка M принадлежит сфере, а точка K нет. **44.22.** Лежит внутри сферы. **44.23.** Не имеют общих точек. **44.24.** $(x-1)^2+(y-2)^2=3$. **44.25.** Цилиндрическая поверхность.

§ 45

45.4. Да, если A совпадает с B. **45.5.** Да. **45.6.** Если векторы одинаково направлены. **45.8.** а) Да; б) нет. **45.9.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **45.12.** $\overrightarrow{B_1D}$.

§ 46

46.1. а) $(-2; 6; 1)$; б) $(1; 3; 0)$; в) $(0; -3; 2)$; г) $(-5; 0; 5)$. **46.2.** а) $(-7; 9; -16)$; б) $(5; -8; -2)$; в) $(8; 0; 19)$. **46.3.** $(-a; -b; -c)$. **46.4.** $\sqrt{3}$. **46.5.** $2\sqrt{3}$. **46.6.** $(1; 3; -2)$, $(1; -3; 6)$. **46.7.** $(-4; 0; 6)$ и $\left(-1; 0; \frac{3}{2}\right)$. **46.8.** $(1; 2; 1)$. **46.9.** $(2; 0; 4)$, $(2; 3; 4)$, $(0; 0; 4)$, $(0; 3; 0)$. **46.10.** а) $(1; -2; 30)$; б) $\left(-1; 2; 3\frac{1}{4}\right)$; в) $(11; -22; 7)$. **46.11.** $(5; -6; -7)$. **46.12.** а) Первая и вторая координаты равны нулю; б) вторая и третья координаты равны нулю. **46.13.** а) $(1; 2; 4)$, $(1; 2; 2)$; б) $(2; 2; 3)$, $(0; 2; 3)$. **46.14.** а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{65}$; в) $\sqrt{5}$. **46.15.** $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3})$. **46.16.** $\sqrt{14}$; $\sqrt{46}$.

§ 47

47.1. а) 90°; б) 135°; в) 90°; г) 120°; д) 135°. **47.2.** -4. **47.3.** а) Плюс; б) минус. **47.4.** -66. **47.5.** 0. **47.6.** Перпендикулярны. **47.7.** 180°. **47.8.** $-|\vec{a}|^2$. **47.9.** а) $\cos\varphi=-\frac{4\sqrt{6}}{21}$; б) $\varphi=45°$. **47.10.** $z=2$. **47.13.** 60°. **47.14.** $t=0$. **47.17.** а) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 90°, $\cos\varphi=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{10}}{10}$; в) 180°, 90°, 90°; г) 90°, $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\cos\varphi=\frac{4}{5}$. **47.18.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **47.20.** а), б) $\frac{a^2}{2}$; в) $-\frac{a^2}{2}$; г) $\frac{a^2}{4}$; д) $-\frac{a^2}{4}$; е) 0.

§ 48

48.4. $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$. **48.5.** A, C, D. **48.6.** $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{3}$.

48.7. $(-\frac{d}{a};\ 0;\ 0)$, $(0;\ -\frac{d}{b};\ 0)$, $(0;\ 0;\ -\frac{d}{c})$. **48.9.** $-x + y + z - 1 = 0$.

48.10. $2x - 4y + z + 21 = 0$. **48.11.** а) $x + y + z - 1 = 0$; б) $x + 4y + 3z - 5 = 0$. **48.12.** а) $y = -2$; б) $y = 2$; в) $x + y = 3$. **48.13.** а), в). **48.14.** а) $3x + y - z - 7 = 0$; б) $x - y + 5z + 7 = 0$. **48.16.** а) Да; б) нет. **48.17.** а) $\cos\varphi = \frac{1}{3}$;

б) $\cos\varphi = \frac{16}{21}$. **48.19.** а) $ax + by - cz + d = 0$, $ax - by + cz + d = 0$, $-ax + by + cz + d = 0$; б) $ax - by - cz + d = 0$, $-ax + by - cz + d = 0$, $-ax - by + cz + d = 0$; в) $-ax - by - cz + d = 0$. **48.20.** а) 2; б) 2.

§ 49

49.1. Ось Ox $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ Ось Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0. \end{cases}$ Ось Oz $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$

49.2. $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$ **49.3.** $\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$ **49.4.** а) $\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0, \\ z = z_0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0 + t. \end{cases}$ **49.5.** $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$ **49.6.** $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

49.7. Перпендикулярны. **49.8.** $\left(\frac{5}{7};\ \frac{3}{7};\ 2\right)$. **49.9.** Перпендикулярны.

49.10. (3; 9; 10). **49.11.** $\sqrt{14}$. **49.12.** $\frac{\sqrt{19}}{4}$.

§ 50

50.1. Системой этих неравенств. **50.2.** а), б) Первому; в) второму. **50.3.** Прямоугольный параллелепипед. **50.4.** Цилиндр. **50.6.** $|x + y| + z \leqslant 1$, $|x - y| - z \leqslant 1$. **50.8.** $x^2 + y^2 \leqslant \left(R\frac{h-z}{h}\right)^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

§ 51

51.2. Плоскость. **51.3.** Параллелен. **51.4.** Проходит через начало координат. **51.5.** а) Поднимется на единицу; б) опустится на единицу. **51.6.** -2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 6. *Круглые тела*

ГЛАВА 7. *Объем и площадь поверхности*

ГЛАВА 8. *Координаты и векторы*