МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов Ю. А. Глазков
И. И. Юдина

# Геометрия

# 11

## Рабочая тетрадь

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
Ю. А. Глазков И. И. Юдина

# Геометрия

## Рабочая тетрадь

## 11 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных организаций

**Базовый и профильный уровни**

*8-е издание*

Москва «Просвещение» 2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Б93

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 10—11» Л. С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом.

ISBN 978-5-09-030990-5

Глава V

# Метод координат в пространстве

## § 1 Координаты точки и координаты вектора

**1**

Заполните пропуски.

В пространстве задана прямоугольная система координат, если:

а) заданы три попарно ________________ прямые, проходящие через ________ точку пространства;

б) на каждой из этих прямых выбрано ________________

в) выбрана единица ________________ отрезков.

**2**

Заполните пропуски.

Если прямоугольная система координат обозначена $Oxyz$, то прямая $Ox$ называется осью ________, прямая $Oy$ — осью ________, прямая $Oz$ — ________________

**3**

Заполните пропуски.

Дана точка $M(2; -3; 0)$. Числа $2, -3,$ __ называются ________________ точки $M$; число 2 — это ________________ точки, число $-3$ — ________________, число 0 — ________________

**4**

Заполните пропуски.

Если аппликата точки $A$ равна $-2$, абсцисса равна 0 и ордината равна 3, то $A($__; __; __$)$.

## 5

Чему равна аппликата точки $A$, лежащей на: а) оси ординат; б) оси $Ox$; в) координатной плоскости $Oxy$?

Ответ. а) __ ; б) __ ; в) __

## 6

Заполните пропуски:

а) точка $C(0;\ -3;\ 0)$ лежит на оси ____________

б) точка $E(2;\ 0;\ -1)$ лежит на ____________

в) точка $M(0;\ 0;\ m)$ лежит на ____________

г) точка $T(0;\ t;\ 0)$ лежит на ____________

## 7

Дан вектор $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-0{,}5\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — координатные векторы. Запишите координаты вектора $\vec{a}$.

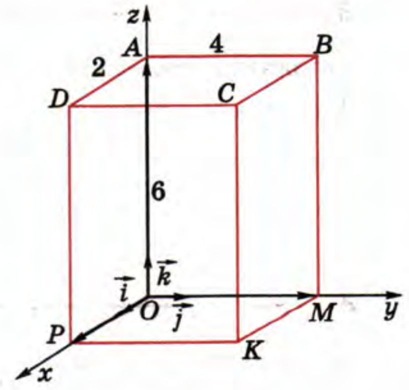
Решение.

Координатами вектора в данной ____________ координат называются ____________ $x$, $y$, $z$ разложения этого вектора по ____________ векторам. Для данного вектора $\vec{a}$ имеем $x=2$, $y=$ __ , $z=$ ___ , следовательно, $\vec{a}\{$__; $-1$; ___$\}$.

Ответ. $\vec{a}$ ____________

## 8

На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед с измерениями $AB=4$, $AD=2$ и $AO=6$. Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OM}$; в) $\overrightarrow{OP}$.




Решение.

Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — координатные векторы. Тогда:

а) $|\vec{k}|=$ __ , $|\overrightarrow{OA}|=$ __ , следовательно, $\overrightarrow{OA}=$ __ $\vec{k}$;

б) $|\vec{j}|=$ __ , $|\overrightarrow{OM}|=$ __ , следовательно, $\overrightarrow{OM}=$ __ $\vec{j}$;

в) $|\vec{i}| =$ ___ , $|\overrightarrow{OP}| =$ ___ , следовательно, $\overrightarrow{OP} =$ _____

**Ответ.** а) $\overrightarrow{OA}\{0;\ 0;$ __ $\}$; б) $\overrightarrow{OM}\{$______________$\}$; в) ______________

## 9

Разложите векторы $\vec{c}\{-1;\ 2;\ -3\}$ и $\vec{p}\{3;\ 0;\ -5\}$ по координатным векторам.

**Ответ.** $\vec{c} =$ __ $\vec{i} +$ ______ $-$ ______ ; $\vec{p} = 3$ ______________

## 10

Найдите значения $x$ и $z$, если $\vec{a}\{x;\ 2;\ -1\} = \vec{b}\{0;\ 2;\ z\}$.

**Решение.**

По условию задачи векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ __________, следовательно, их соответственные координаты __________ , т. е. $x =$ ___ , $z =$ ___

**Ответ.** ________________

## 11

Докажите, что для любых векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$.

**Доказательство.**

Координаты вектора — это __________________________ его разложения по координатным ________________ . Значит, $\vec{a} = x_1\vec{i} +$ __ $\vec{j} +$ __ $\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} +$ ________ $+$ ________

Используя законы сложения векторов и ________________ вектора на число, получаем

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} +$ ________ $+$ ________ $) + ($ ________ $+$ ________ $+ z_2\vec{k}) =$

$= (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) +$ __________________________ $=$

$=$ __________________________________________ ,

что означает: вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;$ ________ ; ________ $\}$.

## 12

Найдите координаты вектора $4\vec{a}$, если $\vec{a}\{2;\ 0;\ -0{,}5\}$.

**Решение.**

Каждая координата произведения вектора на ________ равна ______________ соответствующей координаты данного ________ на это число.

Поэтому вектор $4\vec{a}$ имеет координаты $\{4 \cdot 2;$ ______ ; ______ $\}$, и, значит, $4\vec{a}\{\_\_;\ \_\_;\ -2\}$.

**Ответ.** $4\vec{a}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$.

## 13

Найдите координаты вектора $\vec{p} = 4\vec{a} - 0{,}5\vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a}\{2;\ 0;\ -0{,}5\}$, $\vec{b}\{-4;\ 2;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ -3;\ 2\}$.

**Решение.**

Используя правило умножения вектора на ________ , получаем $4\vec{a}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, $-0{,}5\vec{b}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, $-\vec{c}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$.

Следовательно, координаты $x$, $y$, $z$ вектора $\vec{p}$ равны:

$x = 8 +$ __ $+$ __ $=$ _____ ; $y =$ _________ $=$ __ ; $z =$ _________ $=$ __

**Ответ.** $\vec{p}\{\_\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$.

## 14

Докажите утверждения:

а) если соответственные координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны;

б) если соответственные координаты двух векторов не пропорциональны, то векторы не коллинеарны.

**Доказательство.**

а) Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$.

Так как соответственные ____________________ векторов пропорциональны, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{\_\_} = \frac{\_\_}{\_\_} = k$.

Следовательно, $x_1 = kx_2$, $y_1 =$ _____ , $z_1 =$ _____ , т. е. вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_2;$ _____ ; _____ $\}$, поэтому $\vec{a} = \_\_\ \vec{b}$. Из определения

________________ вектора на число следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$
________________

б) Предположим, что векторы $\vec{a}$ и __ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда $\vec{b}=k\vec{a}$, где $k$ — некоторое число. Отсюда следует, что координаты векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ пропорциональны, что противоречит условию задачи. Следовательно, предположение ________, т. е. векторы __ и $\vec{b}$
________________

## 15

Даны векторы $\vec{m}\{2; 6; -3\}$, $\vec{n}\{0; -3; 1{,}5\}$, $\vec{p}\{-4; -12; 6\}$. Установите, какие из них являются коллинеарными.

Решение.

а) Сравним отношения соответственных координат векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $\frac{0}{2} \neq \frac{-3}{\_\_}$. Итак, абсциссы этих ________ не пропорциональны ________, поэтому векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ________________

б) Сравним ________ соответственных ________ векторов $\vec{m}$ и $\vec{p}$: $\frac{2}{-4} =$ ________ $=-0{,}5$. Координаты этих векторов ________________, значит, векторы $\vec{m}$ и ________________

в) Итак, векторы __ и __ коллинеарны, а вектор __ не коллинеарен вектору __, следовательно, он ________ быть коллинеарным вектору __

Ответ. Коллинеарны векторы __ и __

## 16

Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}\{-6; 4; -12\}$, $\vec{b}\{1{,}5; -1; 3\}$, $\vec{c}\{0; 4; -12\}$;

б) $\vec{p}\{-1; 0; 2\}$, $\vec{q}\{-1; 3; 0\}$, $\vec{t}\{2; 3; -6\}$?

Решение.

а) Любые три вектора, два из которых коллинеарны, являются ________________. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, так как их координаты ________________: $\frac{-6}{1{,}5} = \frac{4}{\_\_} =$ ______. Поэтому векторы $\vec{a}$, __ и $\vec{c}$ ________________

б) Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ______________________________, так как их __________

______________________________ не пропорциональны: $\frac{-1}{-1}$ __ $\frac{0}{3}$. В соответствии с

______________________________ компланарности трех _______________, если вектор $\vec{t}$

можно разложить по ______________________________ $\vec{p}$ и $\vec{q}$, то векторы $\vec{p}$, ___ и $\vec{t}$

______________________________

Проверим, можно ли вектор $\vec{t}$ ______________________________ по векторам $\vec{p}$ и ___, т. е. существуют ли _____________ $x$ и $y$, такие, что $\vec{t} = x\vec{p} +$ ________

Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} 2 = x \cdot (-1) + \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 3 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + y \cdot 3 \\ \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений: из третьего уравнения находим $x =$ ___, а из второго уравнения находим $y =$ ___. Подставляя найденные значения $x$ и $y$ в первое ______________________, получаем верное

____________________

Следовательно, пара чисел $x =$ ___ и $y = 1$ ______________________________ решением системы уравнений, т. е. $\vec{t} = -3\vec{p} +$ ___ $\vec{q}$. Поэтому векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{t}$ ______________________________

Ответ.

а) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ______________________________

б) Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{t}$ ______________________________

## 17

Запишите координаты радиуса-вектора точки $P(2; -1; 3)$.

Решение.

Радиусом-вектором точки $P$ является _______________, начало которого совпадает с _______________ координат, а конец — с точкой ___, т. е. вектор ______ с координатами $\{$___; ___; ___$\}$.

Ответ. $\overrightarrow{OP}\{$_______________$\}$.

## 18

Дан вектор $\overrightarrow{OT}\{2;\ -1;\ 0\}$. Запишите координаты точки $T$, если точка $O$ — начало координат.

**Решение.**

Так как началом вектора $\overrightarrow{OT}$ служит ____________ координат, то вектор _____ является ______________________________ точки $T$, поэтому $T($__; __; __$)$.

**Ответ.** ________________

## 19

Даны три точки: $A(5;\ -3;\ 2)$, $B(0;\ 1;\ -2)$, $C(2;\ -2;\ 0)$.

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

б) Разложите по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ вектор $\overrightarrow{BC}$.

**Решение.**

а) $\overrightarrow{AB}\{0-$__; __$-(-3)$; ________$\}$, т. е. $\overrightarrow{AB}\{$______; ______; ______$\}$;

б) $\overrightarrow{BC}\{2-$__; ______$-1$; ________$\}$, т. е. $\overrightarrow{BC}\{$________________________$\}$.

Следовательно, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-$__ $\vec{j}+$______

**Ответ.**

а) ________________________

б) ________________________

## 20

Даны точки $P(0;\ 1;\ -4)$, $M(-2;\ -1;\ 0)$, $E(3;\ 5;\ 0)$, $C(-1;\ 0;\ -2)$, $T(1;\ 3;\ 4)$.

а) Лежит ли точка $C$ на прямой $PM$?

б) Лежит ли точка $E$ на прямой $CM$?

в) Равны ли векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{EC}$?

г) Равны ли векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{ET}$?

**Решение.**

а) Если векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MC}$ коллинеарны, то точки $P$, $M$ и $C$ __________ на одной прямой. $\overrightarrow{PM}\{-2-0$; ________; ________$\}$, т. е. $\overrightarrow{PM}\{$___; ___; $4\}$. $\overrightarrow{MC}\{$________; $0-(-1)$; ________$\}$, т. е. $\overrightarrow{MC}\{$________$\}$.

Так как $\overrightarrow{PM} = \_\_ \overrightarrow{MC}$, то векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MC}$ ___________________________,
следовательно, точки $P$, $M$ и $C$ ______________ на одной прямой.

б) Выясним, являются ли коллинеарными __________________ $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$:
$\overrightarrow{CM}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{CE}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, следовательно, векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$
______________________________________. Значит, точки $C$, $M$ и $E$ ______________________
на одной прямой, иначе векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$ были бы ______________________

в) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{EC}$: $\overrightarrow{PM}\{-2;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}$,
$\overrightarrow{EC}\{\_\_\_;\ \_\_\_;\ -2\}$. Следовательно, $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{EC}$.

г) $\overrightarrow{PM}\{\_\_\_;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}$, $\overrightarrow{ET}\{\_\_\_;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}$, следовательно, $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{ET}$.

**Ответ.**

а) Точка $C$ __________________ на прямой $PM$;

б) точка $E$ __________________ на прямой ________

в) $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{EC}$;

г) $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{ET}$.

## 21

Какие из точек $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(5;\ -3;\ -3)$, $C(1;\ -1;\ -1)$, $E(2;\ -2;\ -1)$, $H(2;\ 1;\ -9)$ лежат в одной плоскости?

**Решение.**

Если векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$ компланарны, то точки $A$, $B$, __ и $E$ _______________ в одной плоскости, а если не компланарны, то точки $A$, $B$, __ и __ ______________________ в одной ______________________

1) Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}\{3;\ \_\_;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{AC}\{\_\_;\ 0;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{AE}\{\_\_;\ \_\_;\ 2\}$. Три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$ компланарны, если один из них _______________ разложить по двум другим, т. е. если существуют _______________ $x$ и $y$, такие, что $\overrightarrow{AB} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + y\overrightarrow{AE}$. Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} 3 = -1x + \_\_\ y \\ -2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 0 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Из двух первых уравнений системы получаем $x=$ ______ и $y=$ ______ Подставим эти значения в третье уравнение: $0=-3\cdot 2+$ ________ . Это равенство неверно, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$, ________ и $\overrightarrow{AE}$ ____________ ____________ , и, значит, точки $A$, $B$, $C$ и __ ______________ в одной плоскости.

2) Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AH}$: $\overrightarrow{AB}\{3; -2; \_\_\}$, $\overrightarrow{AC}\{\_\_; 0; 2\}$, $\overrightarrow{AH}\{\_\_; \_\_; \_\_\}$.

$$\begin{cases} 3=-x+\_\_\_\_\_\_ \\ -2=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Из двух первых ________________ системы получаем $x=$ ____ и $y=$ ____. Подставим эти значения в третье уравнение: ___ = = ________________ . Последнее равенство __________ , поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и ______ ________________________ , и, следовательно, точки $A$, $B$, $C$ и __ __________ в одной плоскости.

**Ответ.** В одной плоскости лежат точки ________________

## 22

Точки $A(3; 0; -2)$, $B(0; -3; 1)$ и $C(1; -2; 0)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

**Решение.**

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является ________________ каждой из диагоналей, поэтому достаточно найти координаты середины ________________ $AC$:

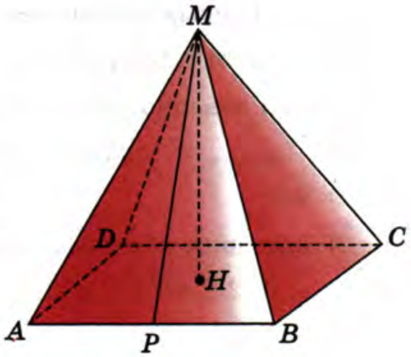
$x=\frac{1}{2}(3+\_\_\_\_)=\_\_\_\_$; $y=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_$; $z=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_$

**Ответ.** (___; ___; ___).

## 23

Точки $M(7; 7; 11)$, $A(0; 8; 1)$, $B(6; 0; 1)$ и $C(14; 6; 1)$ являются вершинами правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$. Найдите высоту, апофему и площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.




1) Высота правильной пирамиды проходит через __________ ее основания. Основанием правильной четырехугольной ____________ служит ____________ Его центр совпадает с точкой пересечения __________________, которая является __________________ каждой из диагоналей квадрата.

Найдем координаты точки $H$ — середины ______________________ $AC$:
$x=\frac{1}{2}(14+\_\_)=\_\_$; $y=$ ___________ $=\_\_$; $z=$ ___________ $=\_\_$. Итак, $H(7;\ \_\_;\ \_\_)$.

Вычислим высоту $MH$ пирамиды:
$$MH=\sqrt{(7-\_\_)^2+(\_\_\_\_\_\_\_\_)^2+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}=\sqrt{\_\_\_\_\_\_}=\_\_\_\_\_\_$$

2) Апофема правильной пирамиды — это отрезок, соединяющий ____________ пирамиды с ________________ стороны основания. Найдем координаты точки $P$ — середины ________________ $AB$ основания:
$x=\frac{1}{2}(0+\_\_)=\_\_$; $y=$ _________________; $z=$ _________________. Итак, $P(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$. Следовательно, $MP=\sqrt{(3-\_\_)^2+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}=$
$=$ __________________ $=\_\_\sqrt{5}$.

3) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна _________________ произведения ___________________ основания и апофемы пирамиды. Найдем сторону $AB$ ________________________ пирамиды:
$$AB=\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_$$

Вычислим площадь боковой ____________________________ пирамиды:
$S=\frac{1}{2}$ ______ $\cdot$ _________ $=$ ___________

Ответ.

Высота пирамиды равна ______. Апофема пирамиды равна ________

Площадь боковой поверхности пирамиды равна ___________

## 24

Докажите, что треугольник $ABC$, где $A(-5; 5; 1)$, $B(-4; 3; 0)$, $C(-5; 3; 1)$, является прямоугольным.

**Доказательство.**

Проверим, выполняется ли для данного треугольника условие теоремы, __________ теореме Пифагора. Найдем квадраты __________ треугольника: $AB^2 = (-4-(\_\_))^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 + \_\_\_\_\_\_ = 1^2 + \_\_ + \_\_ = \_\_$

$AC^2 =$ ______________________________________________

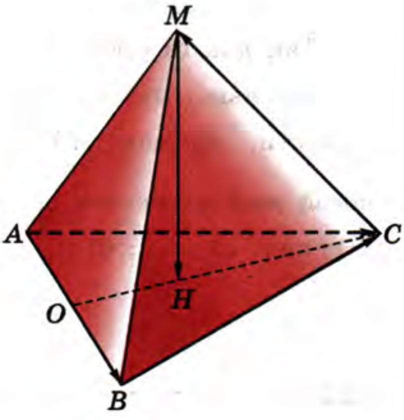
$BC^2 =$ ______________________________________________

Так как $AC^2 + BC^2 =$ ______, то по теореме, обратной теореме __________, треугольник $ABC$ ________________ прямоугольным, причем $\angle$ __ $= 90°$.

# § 2 Скалярное произведение векторов

## 25

Отрезок $MH$ — высота правильного тетраэдра $MABC$ с ребром, равным 2 см. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$; е) $\overrightarrow{MH}$ и $\overrightarrow{AB}$.




**Решение.**

Все грани правильного тетраэдра — ________________________ треугольники, поэтому каждый из углов в этих треугольниках равен ______

а) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ отложены от ________________ точки, поэтому угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и ______ равен углу $BAC$, т. е. $\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}} =$ ______

Отсюда получаем $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \_\_\_\_ \cdot \cos \_\_\_\_\_\_ = 4 \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

б) Отложим от точки $B$ вектор $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB}$ (выполните построение на рисунке). Тогда угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ будет равен углу __________. Так как углы $A_1BC$ и $ABC$ ______________, то $\angle A_1BC =$

$= 180° -$ ______ $=$ ________ . Поэтому $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}} =$ ________ . Следовательно, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ___ $\cdot$ ___ $\cdot \cos$ ________ $=$ ________ $=$ ______

в) Отложим от точки $C$ векторы $\overrightarrow{CB_2} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{AC}$ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен углу ____________ . Так как углы $A_2CB_2$ и $ACB$ — ____________________ , то $\angle A_2CB_2 = \angle$ ________ $=$ ______ . Следовательно, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ___ $\cdot$ ___ $\times$
$\times$ __________ $=$ ___

г) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$ ____________________ , поэтому угол между ними равен ___ . Следовательно, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ____________

д) Так как отрезок $MH$ является ______________ правильного тетраэдра, то точка $H$ — __________ основания тетраэдра, поэтому точка $H$ лежит на ____________ треугольника $ABC$, и, значит, $CO \perp$ ______ . Поскольку прямая $CO$ является проекцией прямой _____ на плоскость $ABC$ и $CO \perp$ ______ , то по теореме о трех ____________________
$CM \perp$ ______ . Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CM}} =$ ______ . Поэтому $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} =$
$=$ ____________ $=$ ________ $=$ ___

е) Так как отрезок $MH$ — ____________ тетраэдра, то $MH$ ___ $ABC$. Следовательно, по определению прямой, ____________________ плоскости, прямая $MH$ ____________________ к ____________ прямой этой плоскости, в том числе $MH$ ___ $AB$. Поэтому $\widehat{\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB}} =$ ___

Ответ. а) ___ ; б) ___ ; в) ___ ; г) ___ ; д) ___ ; е) ___

## 26

Даны векторы $\vec{a}\{4; 0; 0\}$ и $\vec{b}\{1; 0; -\sqrt{3}\}$. Найдите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{b}\vec{a}$; в) $\vec{a}^2$; г) $|\vec{b}|$; д) $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

Решение.
а) $\vec{a}\vec{b} = 4 \cdot$ ___ $+$ ________ $+$ ________ $=$ ___

б) По ____________________ закону скалярного ____________ векторов имеем $\widehat{\vec{b}\,\vec{a}} =$ ______ $=$ ___

в) $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot$ ___ $= 4 \cdot$ ___ $+$ ________ $+$ ________ $=$ ______

г) $|\vec{b}| = \sqrt{\underline{\qquad}}$, где $\vec{b}^2 = 1^2 + \underline{\qquad} + (\underline{\qquad})^2 = \underline{\quad}$. Следовательно, $|\vec{b}| = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

д) $\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \dfrac{|4\cdot\underline{\quad}+\underline{\qquad}+\underline{\qquad}|}{\sqrt{4^2+\underline{\quad}+\underline{\quad}}\cdot 2} = \dfrac{\underline{\quad}}{4\cdot\underline{\quad}} = \underline{\quad}$. Следовательно, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \underline{\quad}$

## 27

При каком значении $x$ векторы $\vec{a}\{x;\ -1;\ 0\}$ и $\vec{b}\{2;\ 6;\ -3\}$ перпендикулярны?

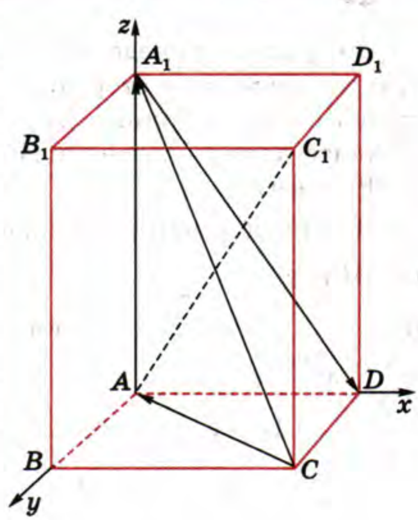
**Решение.**

Поскольку $\vec{a}\ \underline{\quad}\ \vec{0}$ и $\vec{b}\ \underline{\quad}\ \vec{0}$, то $\vec{a}\perp\underline{\quad}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = \underline{\quad}$. Из условия $\vec{a}\vec{b} = \underline{\quad}$ получаем $x\cdot\underline{\quad}+(\underline{\quad})\cdot 6+\underline{\qquad\quad} = 0$. Решим полученное уравнение: $2x - \underline{\quad} = 0$; $x = \underline{\quad}$

**Ответ.** $\underline{\qquad\quad}$

## 28

Точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 4;\ 0)$ и $A_1(0;\ 0;\ 5\sqrt{3})$ — вершины прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите: а) $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}$; б) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA_1}$; в) косинус угла $\varphi$ между прямыми $A_1D$ и $AC$; г) синус угла $\alpha$ между прямой $CA_1$ и плоскостью $ABC$; д) длину диагонали $A_1C$.




**Решение.**

а) Найдем координаты $\underline{\qquad\qquad}$ $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$: $\overrightarrow{AA_1}\{\underline{\quad};\ \underline{\quad};\ \underline{\qquad\quad}\}$, $\overrightarrow{A_1D}\{\underline{\quad};\ \underline{\quad};\ \underline{\qquad\quad}\}$.

Следовательно, $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1D} = 0\cdot\underline{\quad} + \underline{\qquad\quad} + \underline{\qquad\quad}\cdot(-5\sqrt{3}) = \underline{\qquad}$

б) $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \underline{\qquad})$, $\overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{A_1C} = -(\overrightarrow{A_1B_1} + \underline{\qquad} + \overrightarrow{A_1A}) = -(\overrightarrow{AB} + \underline{\qquad} - \underline{\qquad})$, где $\overrightarrow{AB}\{\underline{\qquad\qquad}\}$, $\overrightarrow{AD}\{\underline{\qquad\qquad}\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{\underline{\qquad\qquad}\}$. Значит, $\overrightarrow{CA}\{-3;\ \underline{\qquad};\ 0\}$, $\overrightarrow{CA_1}\{\underline{\qquad};\ -4;\ \underline{\qquad}\}$.

Отсюда получаем $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA_1} = 3\cdot\underline{\qquad} + \underline{\qquad} + \underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad}$

в) Направляющими векторами прямых $A_1D$ и $AC$ служат векторы $\overrightarrow{A_1D}\{\_\_\_;\ \_\_\_;\ \_\_\_\_\_\_\}$ и $\overrightarrow{AC}\{\_\_\_;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot\_\_\_+\_\_\_\cdot 4+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|}{\sqrt{\_\_\_+4^2+(\_\_\_\_\_\_)^2}\cdot\sqrt{\_\_\_+\_\_\_+\_\_\_}} = \frac{16}{\sqrt{91}\cdot\_\_\_\_\_\_} = \frac{16}{455}\sqrt{\frac{\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_}}$$

г) Синус угла $\alpha$ между прямой $CA_1$ и ______________ $ABC$ равен модулю ______________ угла $\beta$ между направляющим ______________ $\overrightarrow{CA_1}$ прямой $CA_1$ и вектором $\overrightarrow{AA_1}$, перпендикулярным плоскости ________. Так как $\overrightarrow{CA_1}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$, то $\sin\alpha = |\_\_\_\_\_\_| =$

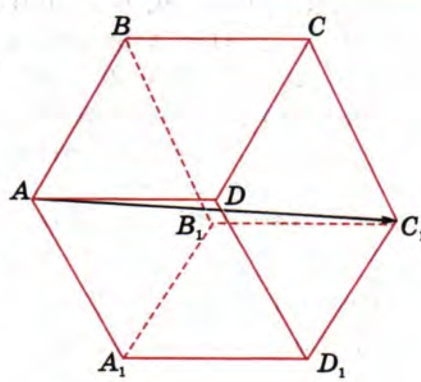
$$= \frac{|\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|}{\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}} = \frac{|\_\_\_\_\_\_|}{\_\_\_\_\_\_\cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\_\_\_\_\_\_}.$$

д) Длина отрезка $A_1C$ равна __________ вектора $\overrightarrow{CA_1}$, т. е. $A_1C = |\overrightarrow{CA_1}| = \sqrt{(\_\_\_\_\_\_)^2} = \sqrt{(-3)^2+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$

**Ответ.** а) ______; б) ______; в) ____________; г) ______; д) ______

## 29

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — ромбы со стороной $a$. Все углы граней при вершине $A$ равны 60°. Найдите длину диагонали $AC_1$.




**Решение.**

По правилу параллелепипеда получаем $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$. Так как $AC_1 = |\_\_\_\_\_\_| = \sqrt{\overrightarrow{AC_1}^2}$, найдем сначала $\overrightarrow{AC_1}^2$:

$$\overrightarrow{AC_1}^2 = (\_\_\_\_\_\_ + \overrightarrow{AB} + \_\_\_\_\_\_)^2 =$$

$$= (\overrightarrow{AA_1} + (\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_))^2 =$$

$$= \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AA_1}(\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_) + (\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_)^2 =$$

$$= \overrightarrow{AA_1}^2 + \_\_\_\_\_\_ + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB} + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) =$$

$$= a^2 + a^2 + \_\_\_\_\_\_\ 2(a^2\cos 60^\circ + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) =$$

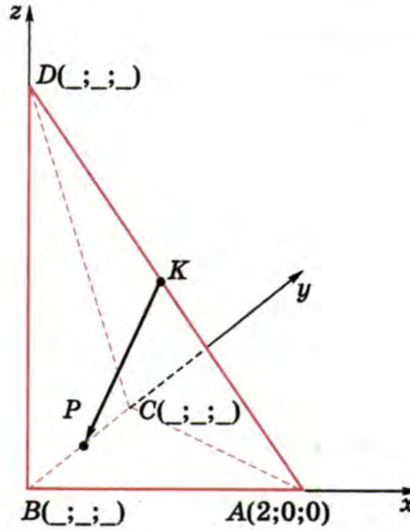
$$= \_\_\_\ a^2 + 2\cdot 3\ \_\_\_\ \cdot\frac{1}{2} = 6\ \_\_\_\_\_\_$$

Итак, $AC_1^2 = \_\_\_\ a^2$, следовательно, $AC_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

**Ответ.** ____________

## 30

В тетраэдре $ABCD$ $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 90°$, $AB = BD = 2$, $BC = 1$. Вычислите синус угла между прямой, проходящей через середины ребер $AD$ и $BC$ и плоскостью грани $ABD$. (Задача 470а учебника.)




**Решение.**

По условию $\angle ABC = \angle$ __________ $= \angle CBD =$ ___ . Поэтому можно ввести прямоугольную систему координат с началом в точке $B$ так, как показано на рисунке. Тогда $A(2;\ 0;\ \_\_)$, $C(0;\ \_\_;\ 0)$, $D(0;\ \_\_;\ \_\_)$.

1) Пусть точка $K$ — середина ребра $AD$, точка $P$ — середина ________ $BC$. Тогда $K(1;\ \_\_;\ \_\_)$, $P(\_\_;\ 0{,}5;\ \_\_)$.

2) Пусть $\varphi$ — угол между прямой $KP$ и ________________ грани $ABD$. Синус угла $\varphi$ равен модулю ____________ угла $\beta$ между ________________ вектором $\overrightarrow{KP}$ прямой $KP$ и вектором $\overrightarrow{BC}$, ________________ к плоскости $ABD$.

Так как $\overrightarrow{KP}\{-1;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}$, $\overrightarrow{BC}\{0;\ \_\_;\ \_\_\}$, то

$$\sin\varphi = |\cos \_\_| = \frac{|-1\cdot 0 + 0{,}5\cdot \_\_ + (\_\_)\cdot \_\_|}{\sqrt{1^2 + \_\_\_}\cdot\sqrt{0^2 + \_\_\_}} = \frac{|\_\_\_|}{\sqrt{\_\_\_}\cdot\sqrt{\_\_}} = \_\_$$

**Ответ.** ________

# § 3 Движения

## 31

Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(2;\ 0;\ -3)$, $C(0;\ -1;\ 2)$ при:

а) центральной симметрии относительно начала координат;

б) осевой симметрии относительно оси ординат;

в) зеркальной симметрии относительно плоскости $Oxz$.

Решение.

а) При центральной ______ относительно начала координат точка $M(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $M_1(-x;\ \_\_;\ \_\_)$. Следовательно, точка $A(2;\ -1;\ \_\_)$ переходит в точку $A_1(\_\_;\ \_\_;\ -3)$, точка $B(\_\_\_\_)$ — в точку $B_1(-2;\ \_\_;\ \_\_)$, точка $C(\_\_\_\_)$ — в точку $C_1(\_\_\_\_)$.

б) При осевой ______ относительно ______ ординат точка $M(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $M_2(\_\_;\ \_\_;\ -z)$. Следовательно, точка $A(\_\_;\ -1;\ 3)$ переходит в точку $A_2(-2;\ \_\_;\ \_\_)$, точка $B(2;\ \_\_;\ \_\_)$ — в точку $B_2(\_\_;\ \_\_;\ 3)$, точка $C(\_\_\_\_)$ — в точку $C_2(\_\_;\ -1;\ \_\_)$.

в) При ______ симметрии относительно ______ $Oxz$ точка $M(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $M_3(x;\ \_\_;\ \_\_)$. Следовательно, точка $A(2;\ \_\_;\ 3)$ переходит в точку $A_3(\_\_;\ 1;\ \_\_)$, точка $B(\_\_;\ 0;\ -3)$ — в точку $B_3(2;\ \_\_;\ \_\_)$, точка $C(\_\_\_\_)$ — в точку $C_3(\_\_;\ \_\_;\ \_\_)$.

Ответ.

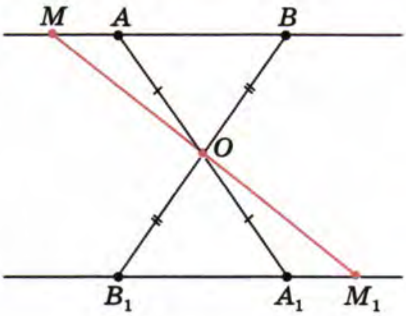
а) $A_1(\_\_\_\_)$, $B_1(\_\_\_\_)$, $C_1(\_\_\_\_)$;

б) $A_2(\_\_\_\_)$, ______

в) ______

## 32

Докажите, что при центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую. (Задача 479а учебника.)




Доказательство.

1) Рассмотрим центральную ______ с центром $O$ и произвольную прямую $AB$, не проходящую через точку $O$. Через прямую $AB$ и ______ $O$ проходит ______, и притом только ______. Обозначим ее буквой $\alpha$. Точки $A$ и $B$ переходят при данной симметрии в ______ $A_1$ и $B_1$, также лежащие в ______ $\alpha$. Поэтому и вся прямая $A_1B_1$ ______ в плоскости $\alpha$.

2) Докажем, что $A_1B_1 \parallel$ ______ . Так как $\triangle OAB$ ______ $\triangle OA_1B_1$ (по двум ____________ и ____________ между ними: $OA =$ ______ , ______ $= OB_1$, $\angle AOB = \angle$ ________), то $\angle ABO =$ ________ . Значит, равны __________ лежащие углы при пересечении прямых $AB$ и ______ секущей ______ Поэтому $AB$ ______ $A_1B_1$.

3) Осталось доказать, что при симметрии с центром $O$ прямая $AB$ __________________ на прямую ______ . Для этого нужно доказать, что при данной симметрии любая ______________ $M$ прямой $AB$ переходит в некоторую точку прямой ______ , и, обратно, произвольная точка $N_1$ прямой $A_1B_1$ симметрична какой-то точке ____________ $AB$.

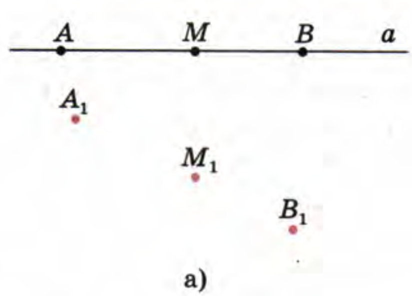
Рассмотрим произвольную точку $M$ на ____________ $AB$, отличную от точки $A$, и проведем прямую $MO$. Она пересекает ____________ $A_1B_1$ в точке $M_1$. Тогда $\angle MOA = \angle$ ________ (вертикальные углы), $\angle MAO = \angle$ ________ (______________________________ при пересечении ___________________________ прямых ________ и $A_1B_1$ секущей ______ ). Кроме того, $AO =$ ______ (точки $A$ и $A_1$ ______________________ относительно точки $O$). Следовательно, $\triangle MAO = \triangle$ ____________ (по стороне и ____________________________________). Отсюда следует, что $MO =$ $=$ ______ , и, значит, точка $M$ при симметрии с центром $O$ переходит в точку _____ , лежащую на прямой $A_1B_1$.

Аналогично доказывается, что любая точка $N_1$ прямой $A_1B_1$ симметрична некоторой __________ $N$ прямой $AB$.

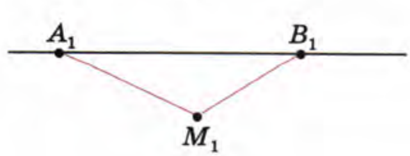
## 33

Докажите, что при движении прямая отображается на прямую. (Задача 486а учебника.)

Доказательство.



а)



б)

Рассмотрим произвольную прямую $a$. Пусть точки $A$ и $B$, лежащие на прямой ___ , при данном движении $f$ переходят в точки $A_1$ и $B_1$. Докажем, что при этом прямая $a$ отображается на ____________ $A_1B_1$, т. е.:

а) каждая точка $M$ прямой $a$ переходит в какую-то __________ прямой $A_1B_1$;

б) в каждую точку $M_1$ прямой $A_1B_1$ ____________________ какая-то точка прямой ___

Возьмем произвольную точку $M$ на ____________ $a$. Пусть для определенности точка $M$ лежит между ____________ $A$ и $B$ (при другом расположении точек доказательство аналогично). Тогда $AM+MB=$ ______

Пусть при данном движении $f$ точка $M$ переходит в какую-то ____________ $M_1$. Поскольку $f$ — движение, то $A_1M_1$ __ $AM$, $M_1B_1=$ $=$ ______, $A_1B_1=$ ______. Следовательно, $A_1M_1+M_1B_1=AM+$ ______ $=$ $=$ ______ $=A_1B_1$.

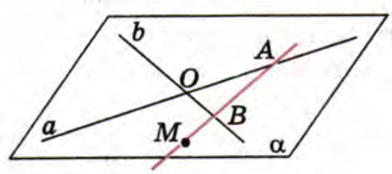
Итак, $A_1M_1+$ ______ $=A_1B_1$, т. е. точка $M_1$ лежит ____________ точками ______________ $B_1$ (в противном случае согласно неравенству ____________________ $A_1M_1$ __ $M_1B_1>A_1B_1$).

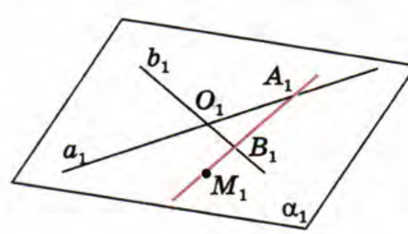
б) Аналогично можно доказать, что в ____________ точку $M_1$ прямой $A_1B_1$ переходит какая-то ____________________ $a$.

Таким образом, при движении прямая ____________________ на прямую.

## 34

Докажите, что при движении плоскость отображается на плоскость. (Задача 486б учебника.)




Доказательство.

Возьмем произвольную плоскость $\alpha$ и проведем в ней две пересекающиеся прямые $a$ и $b$ ($O$ — точка пересечения). При данном движении ____________ $a$ и $b$ переходят в некоторые ____________ $a_1$ и $b_1$, точка $O$ — в какую-то точку $O_1$. Так как $O\in$ __ и $O$ __ $b$, то $O_1$ __ $a_1$ и $O_1\in$ __, следовательно, прямые $a_1$ и $b_1$ ____________________ в точке $O_1$.

Через пересекающиеся прямые $a_1$ и __ проходит плоскость, и притом ____________________ (обозначим ее $\alpha_1$). Докажем, что при данном движении ______________ $\alpha$ отображается на плоскость $\alpha_1$.

Для этого надо доказать, что:

а) произвольная точка $M$ плоскости $\alpha$ переходит в некоторую ___________ $M_1$ плоскости __

б) в любую точку плоскости $\alpha_1$ переходит некоторая _______________ ____________ $\alpha$.

а) Через произвольную точку $M$ плоскости $\alpha$ проведем прямую, пересекающую ______________ $a$ и __ в каких-то точках $A$ и $B$. При данном движении точка $A$ __________________ в некоторую ___________ $A_1$ прямой $a_1$, точка $B$ — в ___________ $B_1$ прямой __, а прямая $AB$ — в прямую ____. При этом точка $M$ прямой $AB$ переходит в некоторую ___________ $M_1$, лежащую на __________________ $A_1B_1$. Так как $A_1$ __ $\alpha_1$ и $B_1$ __ $\alpha_1$, то прямая $A_1B_1$ лежит в _______________________, в частности $M_1$ __ $\alpha_1$.

б) Аналогично доказывается, что в любую точку __________________ $\alpha_1$ переходит ______________ точка плоскости __

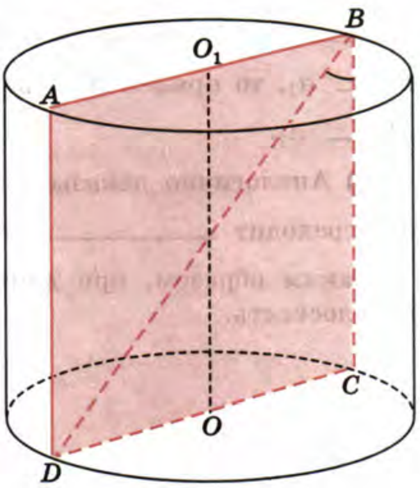
Таким образом, при движении плоскость __________________________ на плоскость.

Глава VI

# Цилиндр, конус и шар

## § 1 Цилиндр

**35**




**Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60°. Найдите:**

**а) высоту цилиндра;**

**б) радиус цилиндра;**

**в) площадь боковой поверхности цилиндра.**

**Решение.**

Осевое сечение цилиндра представляет собой ______________________, стороны $BC$ и $AD$ которого являются ______________________ цилиндра, а две другие стороны — ________________ оснований цилиндра. По условию задачи $BD=$ ______ см, $\angle DBC=$ ______

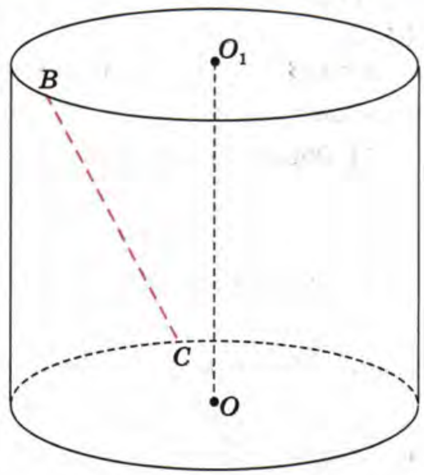
а) Высота цилиндра равна его ______________________________, а $BC=$ $=BD\cdot\cos$ ______ $=$ _____ $\cdot\frac{1}{2}=$ _____ (см), т. е. высота ________________ равна ______ см.

б) Радиус цилиндра — это ________________ основания цилиндра: $OC=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}BD\cdot$ ___________ $=\frac{1}{2}\cdot$ ____ $\cdot\frac{\sqrt{3}}{\_\_}=$ ________ (см).

в) Площадь боковой ____________________ цилиндра равна произведению __________ окружности ___________________________ цилиндра на ____________ цилиндра, т. е. $S_{бок}=2\pi$ __ $h=$ ______ $\cdot 2\sqrt{3}\cdot$ __ $=$ $=$ ______ $\sqrt{3}\pi$ (см²).

**Ответ.**

а) _______ см; б) ____________ см; в) __________________ см².




Концы отрезка $BC$ лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен 10 дм, $BC = 13$ дм, а расстояние между прямой $BC$ и осью цилиндра равно 8 дм. Найдите высоту цилиндра. (Задача 527а учебника.)

Решение.

1) Проведем образующую $AB$ цилиндра (выполните построение на рисунке). Так как $OO_1 \parallel AB$, то прямая $OO_1$ ____________________ плоскости $ABC$ (по ________________ параллельности прямой и плоскости).

2) Проведем перпендикуляр $OK$ к прямой $AC$ (выполните построение на рисунке). Так как $OK$ лежит в плоскости $AOC$ основания ________________, $OO_1$ __ $ABC$, то $OO_1$ __ $OK$.

Итак, $OO_1$ __ $AB$ и $OO_1$ __ $OK$, следовательно, $OK$ __ . Таким образом, прямая $OK$ перпендикулярна к двум пересекающимся прямым $AC$ и _____ плоскости _______ , следовательно, $OK$ __ $ABC$ (по ________ ____________________________________ прямой и плоскости). Поэтому расстояние между прямыми $AB$ и $OO_1$ равно _____ , т. е. $OK =$ _____ дм.

3) По условию задачи $AO =$ _____ дм (радиус ________________ ). В прямоугольном треугольнике $AKO$ катет $AK = \sqrt{AO^2 - \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_ - 8^2} =$ _____ (дм), поэтому $AC =$ _____ дм.

4) В треугольнике $ABC$ катет $AB = \sqrt{\_\_\_\_\_ - AC^2} = \sqrt{13^2 - \_\_\_\_\_} =$ _____ (дм).

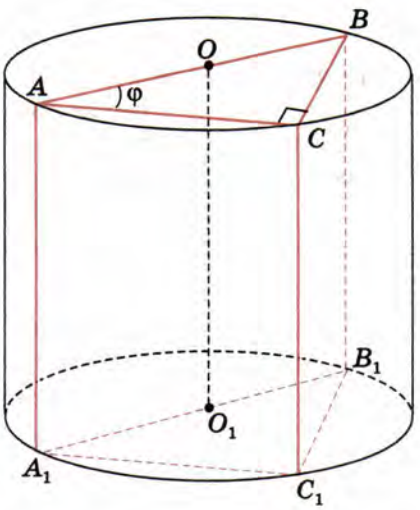
Ответ. _____ дм.

37

Через образующую $AA_1$ цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен φ. (Задача 532 учебника.)

Решение.

На рисунке изображены образующая $AA_1$ и секущие ________________ $CAA_1C_1$ и $BAA_1B_1$, причем плоскость $BAA_1B_1$ проходит через ось ________________




1) Образующая $AA_1$ ________________ ________________ к плоскости $ABC$ основания цилиндра, следовательно, $AA_1$ __ $AB$ и $AA_1$ __ $AC$. Поэтому $\angle BAC$ — ________________ угол двугранного угла, образованного секущими ________ ________________. По условию задачи $\angle BAC =$ __

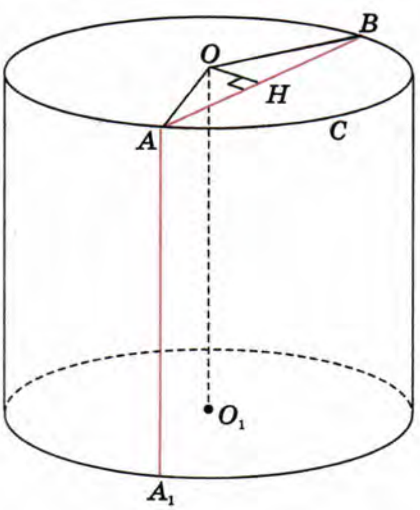
2) Так как плоскость $BAA_1B_1$ проходит через ________ цилиндра, то отрезок $AB$ — ________________ основания, и поэтому $\angle ACB = 90°$. В прямоугольном треугольнике $ABC$ катет $AC =$ ______ $\cos\varphi$.

3) $\dfrac{S_{CAA_1C_1}}{S_{BAA_1B_1}} = \dfrac{AC \cdot \_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_ \cdot AA_1} = \dfrac{AC}{\_\_\_\_\_\_} =$ ____________

Ответ. ____________

## 38

Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна $h$, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно $d$. (Задача 534 учебника.)




Решение.

Искомое сечение представляет собой ________________ $ABB_1A_1$ (закончите построение на рисунке).

1) По условию задачи $AA_1 =$ ______, $\smile ACB =$ ________. Проведем $OH \perp AB$, тогда $OH$ — ________________ к плоскости сечения. По условию задачи $OH =$ __

2) В равнобедренном ______________________ $AOB$ отрезок $OH$ — высота и, следовательно, ________________ и __________________________

Поэтому $AB=2$______, а так как $\angle AOB=$________, то $\angle AOH=$________

В прямоугольном треугольнике $AOH$ $AH=OH\cdot$ __________ $=$ __ $\sqrt{\_\_}$

3) Итак, $AB=$______ $AH=2d\sqrt{\_\_}$, $AA_1=$____________, следовательно, $S_{ABB_1A_1}=$ ______ $\cdot AA_1=2\sqrt{3}$ ______

Ответ. ______ $dh$.

## 39

Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S$. Найдите площадь осевого сечения цилиндра. (Задача 538 учебника.)

Решение.

Пусть $h$ — высота цилиндра, $r$ — его радиус. По условию задачи $S_{бок}=$ __, т. е.

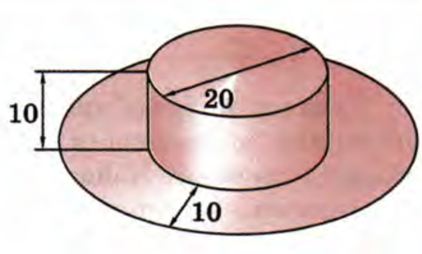
$$2\pi r \_\_ = S. \quad (1)$$

Осевым сечением цилиндра является __________________________ со сторонами $2r$ и __. Поэтому площадь осевого сечения равна ______ $\cdot h$. Учитывая равенство (1), получаем $2rh=\frac{S}{\_\_}$.

Ответ. ___________

## 40

Найдите площадь поверхности (внешней и внутренней) шляпы, размеры которой (в см) указаны на рисунке.




Решение.

Если дно шляпы опустить на плоскость ее полей, то получим круг радиуса $r=$______ см.

Площадь этого круга $S_{кр}=\pi$______ $=$________ (см$^2$).

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндрической части вычисляем по формуле $S_{бок}=$________ $r_1h$, где $r_1=$________ см, ________ $=10$ см.

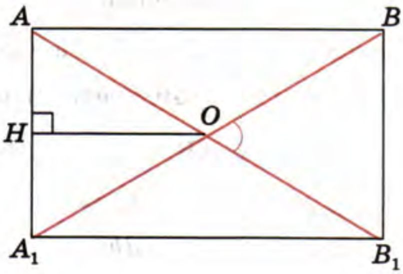
Следовательно, $S_{бок}=$______ $10\cdot10=$________ (см$^2$).

Итак, $S_{шляпы}=2(S_{кр}+$______$)=$__________ см$^2$.

Ответ. __________ см$^2$.

## 41

Угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра равен 60°, диагональ равна 6 м. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.




Решение.

На рисунке изображена развертка боковой ________________ цилиндра — прямоугольник $AA_1B_1B$, где $AA_1$ и $BB_1$ — ________________ цилиндра. По условию $\angle AOA_1 =$ ______, $AB_1 =$ ______

1) Так как в прямоугольнике $AA_1B_1B$ $AB_1$ ____ $A_1B$, $AO$ ____ $OB_1$ и $A_1O$ __ $OB$, то треугольник $AOA_1$ — ________________. Следовательно, его высота $OH$ является ____________ и ________________

Поэтому $AH =$ __ $AA_1$, $\angle AOH =$ ____, $AH = AO \cdot \sin$ ____ $=$ __ $\cdot \frac{\_\_}{2} =$ ____,
$HO = AO \cdot$ ________ $=$ __ $\cdot$ ____ $=$ ________, $AA_1 = -AH =$ ________,
$AB =$ __ $HO =$ ______

2) Пусть $r$ — радиус цилиндра, тогда $AB =$ _____ $r$, т. е. $2\pi r =$ $=$ ______, откуда $r = \frac{3\sqrt{\_\_}}{\_\_}$

3) $S_{цил} = S_{бок} + 2$ ________, где $S_{бок} = AB \cdot$ ________ $=$ ________ $=$ $=$ ______ (м$^2$), $S_{осн} = \pi$ _____ $=$ ______ (м$^2$).

Итак, $S_{цил} =$ ______ $+$ ______ $=$ ________ (м$^2$).

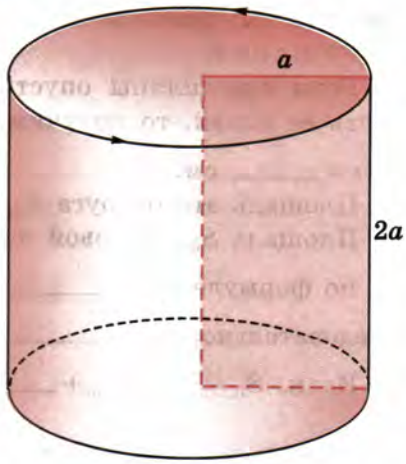
Ответ. ______________

## 42

Цилиндр получен вращением прямоугольника со сторонами $a$ и $2a$ вокруг большей стороны. Найдите площадь:

а) осевого сечения цилиндра;

б) боковой поверхности цилиндра.




Решение.

Пусть $r$ — радиус цилиндра, $h$ — его высота. По условию $r =$ __, $h =$ ____

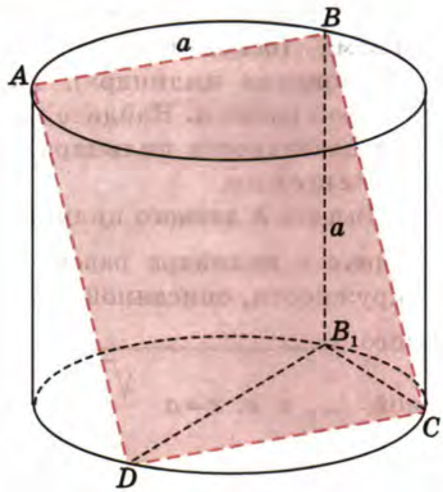
а) $S_{сеч} = 2a \cdot$ ____ $= 4$ ____

б) $S_{бок} = 2\pi$ __ $h =$ ____ $\cdot a \cdot$ ____ $=$ $=$ __ $\pi$ ____

Ответ. а) ______; б) ______

## 43

Вершины $A$ и $B$ прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности одного из оснований цилиндра, а вершины $C$ и $D$ — на окружности другого основания. Вычислите радиус цилиндра, если его образующая равна $a$, $AB = a$, а угол между прямой $BC$ и плоскостью цилиндра равен 60°. (Задача 602 учебника.)




Решение.

1) Пусть $BB_1$ — образующая цилиндра, тогда отрезок $BB_1$ — перпендикуляр к ________________ основания и поэтому прямая $B_1C$ — проекция прямой ______ на плоскость ________________ цилиндра. Следовательно, угол между ________________ $BC$ и плоскостью ________________ цилиндра равен углу ______. По условию $\angle BCB_1 =$ ______, $BB_1 =$ ___, поэтому $B_1C = \frac{BB_1}{\_\_\_\_\_\_} =$ ______

2) Так как по условию $BC \perp$ ______, то $B_1C \perp$ ______ (по обратной теореме ________________________________), т. е. $\angle B_1CD =$ ________

Поэтому отрезок $B_1D$ — ________________ основания цилиндра.

3) В прямоугольном треугольнике $B_1CD$ $CD =$ ______ $= a$, $B_1C =$ ______, следовательно, $B_1D = \sqrt{CD^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_} =$ ______. Поэтому радиус цилиндра равен ______

Ответ. ______

## 44

Найдите радиус цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, если периметр его осевого сечения равен 12 м.

Решение.

Пусть радиус цилиндра равен $r$, тогда высота цилиндра равна ___ $- 2r$,

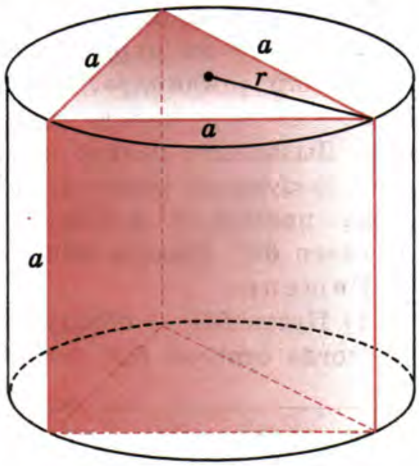
$$S_{бок} = \_\_\_\_\_\_ r(6 - 2\_\_\_) = 4\pi(-r^2 + \_\_\_\_\_\_).$$

Квадратный двучлен ________________ $+ 3r$ имеет корни $r =$ ___ и $r =$ ___

Поэтому $S_{бок}$ имеет наибольшее значение, если $r =$ _____ м.

Ответ. _______

## 45




В цилиндр вписана треугольная призма (основания призмы вписаны в основания цилиндра), каждое ребро которой равно $a$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

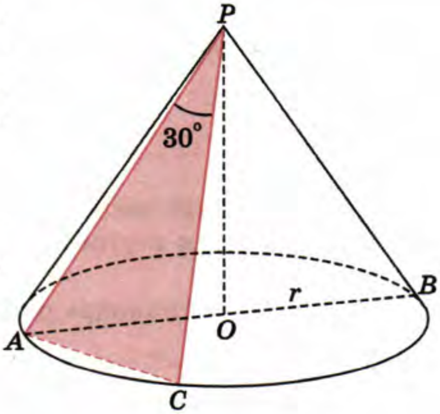
Высота $h$ данного цилиндра равна __, радиус $r$ цилиндра равен ________ окружности, описанной около правильного ____________ со стороной __, т. е. $r = a\dfrac{\sqrt{\_}}{\_} =$

$$S_{бок} = 2\pi \_\_\_ = \_\_\_ \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \_\_ =$$
$$= \_\_\_\_ a^2.$$

Ответ. ________

# § 2 Конус

## 46




Радиус основания конуса равен 2 м, а осевое сечение — прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 30°.

Решение.

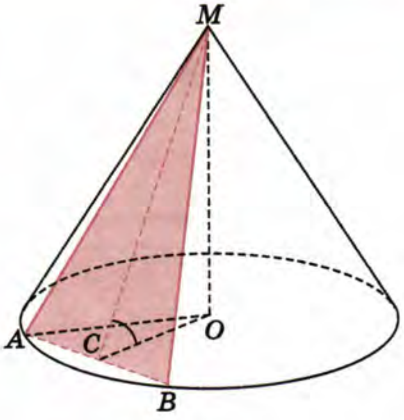
По условию задачи треугольник $APB$ — ____________, а так как $PA =$ ____, то $\angle PAO = 45°$. В прямоугольном треугольнике $PAO$ катет $PA = \dfrac{AO}{\cos \_\_\_} = \_\_\sqrt{2}$ м.

Пусть $\angle APC = 30°$, тогда сечение, проведенное через образующие $PA$ и

______, является ________________________________ треугольником, в котором $PC =$ ______ $= 2$ ______ м. Поэтому $S_{APC} = \frac{1}{2} PA^2 \cdot$ __________ $=$
$= \frac{1}{2}$ (________)$^2 \cdot \frac{1}{2} =$ __ (м$^2$).

Ответ. ________

## 47




Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол 45°. (Задача 555б учебника.)

Решение.

1) Так как хорда $AB$ стягивает дугу в 60°, то $AB = OA =$ ______

2) Проведем $OC$ перпендикулярно к $AB$. Тогда $AB \perp$ ______ (по теореме о трех ________________________ ) и $\angle MCO$ — ____________________ угол двуграннного угла с ребром ______. По условию $\angle MCO =$ ______

3) В треугольнике $MCO$ $CO =$ ______ $=$ ______ см, $MC =$ ________ см.

4) Из треугольника $AOC$ получаем $OA = \frac{\quad}{\cos 30°} =$ ______ см. Поэтому $AB =$ ________ см.

5) $S_{MAB} = \frac{1}{2}$ ______ $\cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot$ ________ $=$ __________ (см$^2$).

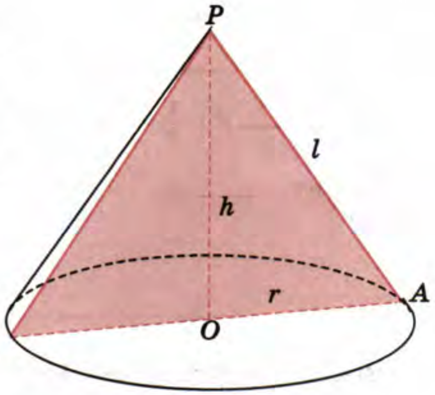
Ответ. ________________

## 48

Развертка боковой поверхности конуса — сектор с радиусом 4 м и дугой в 90°. Найдите радиус основания и высоту конуса.

**Решение.**

Обозначим радиус основания данного ______________ буквой $r$, высоту — буквой $h$, образующую — буквой $l$. По условию $l =$ __ м, площадь развертки (сектора) равна $\frac{\_\_ l^2}{360} \cdot$ ______ $=$ __ $\pi$ м$^2$. Поэтому $S_{бок} = \pi$ __ $l = 4\pi$, откуда получаем $r =$ __ м.




Из прямоугольного треугольника $POA$ находим: $h = \sqrt{l^2 - \_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} =$

$= \sqrt{\_\_\_\_\_\_}$ (м).

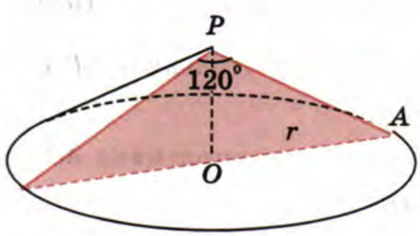
**Ответ.** $r =$ ________; $h =$ ________

## 49

Осевое сечение конуса — треугольник со стороной 8 см и прилежащим углом 120°. Найдите площадь полной поверхности конуса.

**Решение.**

Осевым сечением конуса является ______________________________ треугольник. По условию задачи один из углов этого треугольника равен ________, следовательно, это угол, противолежащий ______________ стороне треугольника, а потому боковые стороны треугольника равны __ см, т. е. образующая $l$ конуса равна __ см. Из прямоугольного треугольника $POA$ находим радиус основания конуса: $r = l \cdot$ ____________ $=$ __ $\frac{\sqrt{3}}{2} =$ _________ (см). Таким образом, $S_{бок} = \pi$ ______ $=$ __ $\cdot 4\sqrt{3} \cdot$ __ $=$ ____________ (см$^2$), $S_{кон} = S_{бок} +$ _________ $=$

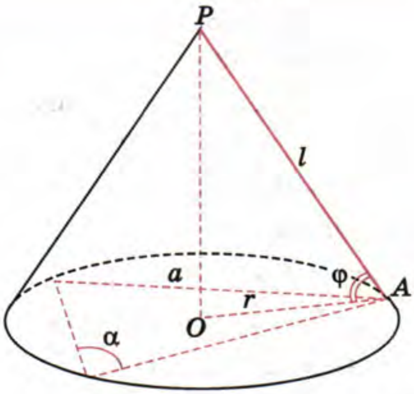



$=$ ____________ $+ ($__________$)^2 \pi = 16\,($____________$)\,\pi$ (см$^2$).

**Ответ.** ______________________

## 50

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна $a$, а противолежащий угол равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса. (Задача 564 учебника.)




Решение.

1) Находим радиус основания конуса: $r = \frac{\quad}{2 \sin \alpha}$.

2) Из прямоугольного треугольника

$POA$ находим образующую: $l = PA = \frac{\quad}{\cos \varphi} =$

$= \frac{a}{2 \sin \alpha \cdot \underline{\qquad}}$

3) $S_{бок} = \pi \underline{\qquad} = \frac{\quad}{4 \sin^2 \alpha \cos \varphi}$,

$S_{осн} = \pi \underline{\qquad} = \frac{\pi a^2}{\underline{\qquad}}$,

$S_{кон} = \underline{\qquad} + S_{осн} = \frac{\pi a^2}{\underline{\qquad}} + \frac{\quad}{4 \sin^2 \alpha} = \underline{\qquad} \left( \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right)$.

Ответ. ____________________

## 51

Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна $m$, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника. (Задача 566 учебника.)

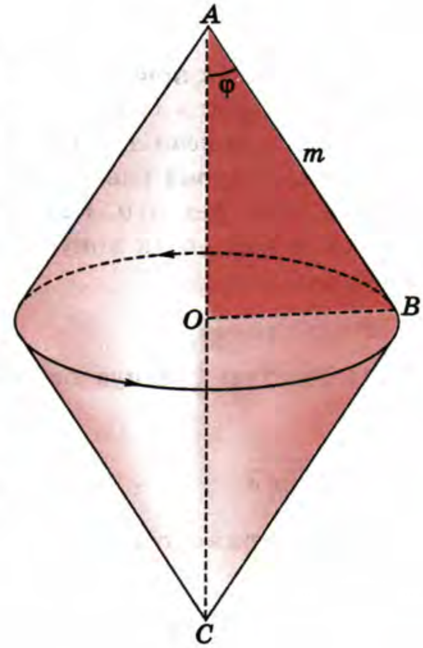
**Решение.**

1) Тело, полученное при вращении равнобедренного треугольника $ABC$ вокруг основания $AC$, состоит из двух ________________ с общим основанием, радиусом которого служит отрезок ______. Искомая площадь равна удвоенной площади ____________ поверхности конуса: $S =$ __ $S_{бок} =$ ______ $OB \cdot$ ______

2) В прямоугольном треугольнике $AOB$ $AB =$ ___, $OB =$ ___ $\cdot \sin \varphi$. Следовательно, $S =$ ______ $\cdot\, m \cdot$ ____________ $=$

$=$ ________ $\sin \varphi$.

**Ответ.** ________________

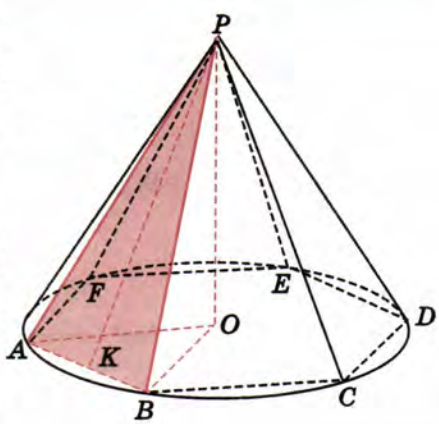



## 52

Высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см. Вычислите площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус. (Задача 617в учебника.)

**Решение.**

1) Пирамида вписана в конус, если ее основание вписано в основание ____________, а вершина пирамиды совпадает с ________________ конуса. Пусть правильная шестиугольная ________________ $PABCDEF$ вписана в ____________ с высотой $PO$. По условию $PO =$ ____ см, $OA = OB =$ ____ см.




2) Сторона правильного шестиугольника равна радиусу ____________________ около него ____________________, поэтому $AB =$ ______ $=$ ____ см.

Площадь основания пирамиды $S_{осн}$ в ___ раз больше площади ____________________ $AOB$, т. е. $S_{осн} = 6$ ________ $=$ ___ $OA^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_}=$

$=$ __________ $=$ __________ (см²).

3) Из прямоугольного ______________________________ $POA$ находим:

$PA = \sqrt{PO^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_$ (см).

4) Проведем апофему $PK$ пирамиды. В прямоугольном треугольнике $APK$ $AK = \_\_ AB = \_\_$ см, $PA = \_\_$ см. Поэтому $PK = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - AK^2} =$

$= \sqrt{25 - \_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$ (см).

5) Площадь боковой поверхности $S_{бок}$ пирамиды в ___ раз больше площади ________________ грани $PAB$, поэтому

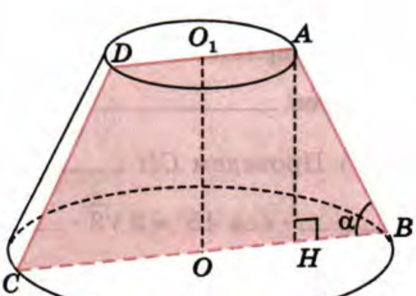
$S_{бок} = 6$ ________ $= 6 \cdot \_\_ AB \cdot \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ \frac{\sqrt{91}}{\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ (см²),

$S_{пир} = S_{бок} + S_{осн} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 4{,}5\ (\sqrt{91} + \_\_\_\_\_\_)$ (см²).

Ответ. ________________________

## 53

Радиусы оснований усеченного конуса равны $R$ и $r$, где $R > r$, а площадь осевого сечения равна $(R^2 - r^2)\sqrt{3}$. Найдите угол $\alpha$ между образующей и плоскостью основания конуса.




Решение.

Изобразим данный усеченный конус и построим его осевое сечение $ABCD$, которое является ____________________ трапецией. По условию задачи $O_1A = \_\_$, $OB = \_\_$

1) Проведем $AH \parallel OO_1$. Тогда $AH$ — перпендикуляр к ____________ основания конуса, и, следовательно, $\angle ABH = \alpha$ — угол между ________ $AB$ и __________________ основания.

2) В прямоугольном треугольнике $ABH$ $AH =$ ______ $\text{tg}\,\alpha$. Так как $HB = OB -$ ______ $=$ ______ $- AO_1 = R -$ __ , то $AH = ($__ $-$ __$)\,\text{tg}\,\alpha$.

3) $S_{ABCD} = \dfrac{BC + \_\_\_\_}{2} \cdot AH = \dfrac{2R + \_\_\_\_}{2}(\_\_ - \_\_)\,\text{tg}\,\alpha = (R^2 - \_\_)$ ______

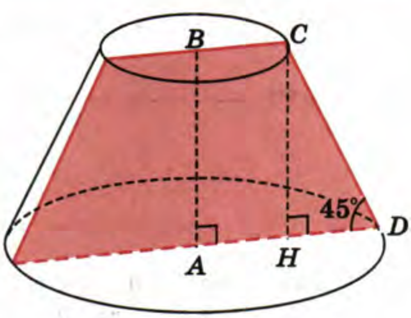
4) По условию задачи $S_{ABCD} = ($______$)\sqrt{3}$. Следовательно, $\text{tg}\,\alpha =$ $=$ ______, откуда $\alpha =$ ______

Ответ.

______

## 54

В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, $BC = 4$ см, $CD = 3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны $AB$. (Задача 571 учебника.)




Решение.

При вращении данной трапеции получается ______________ конус.

1) Проведем $CH \perp$ ______. Тогда $HD =$ $=$ ______ $\cdot \cos 45° = 3\sqrt{2} \cdot$ ______ $=$ __ см, $AD = AH +$ ______ $=$ ______ $+ HD =$ $=$ __ см.

2) $S_{бок} = \pi(BC +$ ______$) \cdot$ ______ $=$ __ $($__ $+ 7) \cdot 3\sqrt{2} =$ ______ $\pi\sqrt{\_\_}$ (см$^2$).

3) $S_{полн} = S_{бок} + \pi BC^2 +$ ________ $=$ ________ $+$ ________ $+ 49\pi =$ $=($______ $+ 65)\pi$ (см$^2$).

Ответ.

________ см$^2$ и ______________

**В усеченный конус вписана правильная усеченная треугольная пирамида (т. е. основания пирамиды вписаны в основания усеченного конуса). Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 5 см, а высота равна 4 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды. (Задача 631а учебника.)**

Решение.

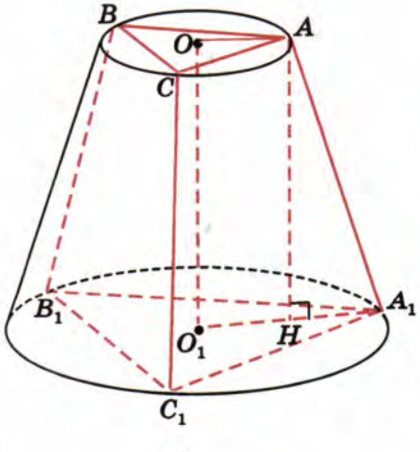
Пусть правильная усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$ вписана в усеченный конус с осью $OO_1$ (см. рис. *а*). По условию задачи $OA =$ ___ см, $O_1A_1 =$ ___ см, $OO_1 =$ ___ см.

1) Радиус $OA$ окружности, описанной около правильного ____________________ $ABC$, выражается через сторону $AB$ формулой $OA = AB\,\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $AB = OA \cdot \sqrt{\_\_\_} =$ ____ (см), $S_{ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_\_} =$ ____ (см$^2$).

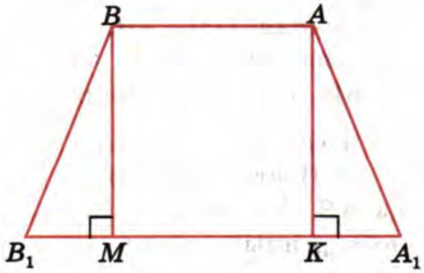
Аналогично получаем $A_1B_1 =$ ______ см, $S_{A_1B_1C_1} = A_1B_1{}^2 \cdot$ ______ = = ______ (см$^2$).

2) Проведем $AH \perp O_1A_1$. Тогда $AH = OO_1 =$ ___ см, $HA_1 = O_1A_1 -$ _____ = = _____ $- OA =$ _______ = ___ (см). В прямоугольном треугольнике $AHA_1$

$AA_1 = \sqrt{AH^2 + \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_} =$ ___ (см).




а)




б)

3) Боковая грань $AA_1B_1B$ усеченной пирамиды (см. рис. *б*) является ______________________ трапецией, основания которой равны ______ см и ______ см, а боковая сторона равна __ см.

Проведем в трапеции высоты $AK$ и $BM$. Тогда $KA_1 = \frac{1}{2}(\_\_\_\_ - AB) =$ $= \_\_\_\_\sqrt{3}$ см, $AK = \sqrt{AA_1{}^2 - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (см).

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AB + \_\_\_\_}{2} \cdot \_\_\_\_ = \frac{2\sqrt{3} + \_\_\_\_}{\_\_\_} \cdot \frac{\sqrt{73}}{\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ (см}^2\text{)}.$$

4) Площадь боковой поверхности $S_{бок}$ усеченной пирамиды в __ раза больше площади ____________ грани, т. е. $S_{бок} = 3S_{AA_1B_1B} = \_\_\_\_\_\_\_\_$ см$^2$.

5) $S_{полн} = S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1} + \_\_\_\_\_\_ = 3\sqrt{3} + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ =$ $= \frac{\_\_\sqrt{3}}{\_\_\_}(\_\_\_\_ + \_\_\sqrt{73})$ (см$^2$).

Ответ. ______________________

# § 3 Сфера

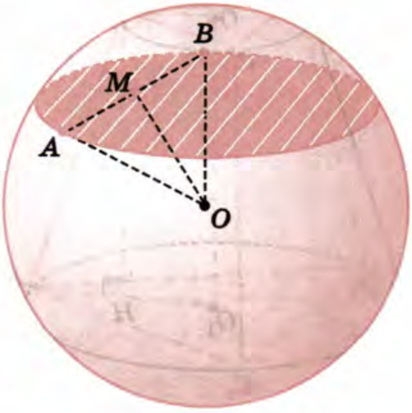
## 56

Точки $A$ и $B$ лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка $M$ лежит на отрезке $AB$. Докажите, что:

а) если $M$ — середина отрезка $AB$, то $OM \perp AB$;

б) если $OM \perp AB$, то $M$ — середина отрезка $AB$.

(Задача 573 учебника.)




Доказательство.

а) Пусть точка $M$ — середина отрезка $AB$, $R$ — радиус сферы. $\triangle AOB$ равнобедренный, так как ____________ $= R$, поэтому медиана $OM$ является также ________________, т. е. __________ $AB$.

б) Пусть $OM \perp AB$. Треугольник $AOB$ равнобедренный, и $OM$ — его высота по ________________, следовательно, $OM$ — его ________________, т. е. $M$ — ______________________________

## 57

Точки $A$ и $B$ лежат на сфере с центром $O$, радиус которой равен 15 см. Найдите расстояние от центра сферы до прямой $AB$, если $\angle AOB = \arccos \frac{3}{5}$.

Решение.

Пусть $M$ — середина отрезка $AB$ (см. рис. к задаче 56), тогда $OM \perp$ ______ (задача 56), и, следовательно, $OM$ — искомое ____________ ______________________________________________. Треугольник $OMB$ прямоугольный ($\angle M =$ ______), поэтому $OM = OB \cdot \cos \angle$ ______, $\angle BOM = \frac{1}{2} \angle$ ______. По условию $\cos \angle AOB = \frac{3}{5}$, следовательно, $\cos \frac{1}{2} \angle AOB =$ = ________________________ (так как $\cos^2 \frac{\alpha}{2} =$ __________). Итак, $OM =$ = ______________________ (см).

Ответ. ______ см.

## 58

Напишите уравнение сферы с центром в точке $P(-1;\ 3;\ 5)$ и радиусом $\frac{9}{4}$.

Решение.

$(x$ ______$)^2 + (y$ ______$)^2 + (z$ ______$)^2 =$ ______

## 59

Напишите уравнение сферы с центром в точке $P(2;\ 3;\ -3)$, проходящей через точку $M(2;\ -1;\ 1)$.

Решение.

$R = PM =$ ______________________________________. Уравнение сферы имеет вид $(x -$ ____$)^2 + (y -$ ____$)^2 + (z +$ ____$)^2 =$ ______

## 60

Напишите уравнение сферы с диаметром $MN$, если $M(-3;\ 5;\ 0)$, $N(1;\ -7;\ -2)$.

**Решение.**

Пусть $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — центр искомой сферы. Так как точка $C$ — середина отрезка $MN$, то $x_0 = \frac{\_\_\_\_\_\_}{2} = \_\_\_\_\_\_$; $y_0 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; $z_0 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; $C$ ( ____________ ). Радиус сферы равен отрезку $CM$, поэтому

$$R = \sqrt{(\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2} = \_\_\_\_\_\_$$

Итак, уравнение сферы имеет вид

$$(x\ \_\_\_\_\_\_)^2 + (y\ \_\_\_\_\_\_)^2 + (z\ \_\_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_$$

## 61

Найдите координаты центра $C$ и радиус $R$ сферы, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}$;

б) $(x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 13$;

в) $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+8)^2 = 25$.

**Решение.**

а) $C($________$)$, $R =$ ______

б) $C($________$)$, $R =$ ______

в) $C($________$)$, $R =$ ______

## 62

Докажите, что данное уравнение является уравнением сферы, и найдите координаты центра и радиус этой сферы:

а) $x^2 - 8x + y^2 + z^2 - 16 = 0$;

б) $x^2 - 6x + 2y + z^2 + y^2 - 10z = 14$.

Решение.

а) Уравнение $x^2-8x+y^2+z^2-16=0$ можно записать в виде $x^2-8x+$ $+16+y^2+z^2=32$ или $(x$ ______$)^2+(y$ ______$)^2+(z$ ______$)^2=$ ______, поэтому оно является уравнением сферы с центром $C($__________$)$ и радиусом $R=$______

б) Уравнение $x^2-6x+2y+z^2+y^2-10z=14$ можно записать в виде $(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)+(z^2-10z$ ______$)=$______ или $(x$ _____$)^2+(y+$______$)^2+$ $+(z$ ______$)^2=$______, поэтому оно является уравнением сферы с центром $C($__________$)$ и радиусом $R=$______

## 63

Напишите уравнение сферы, радиус которой равен единице, если известно, что сфера проходит через точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ -1)$.

Решение.

Уравнение сферы имеет вид

$$(\_\_ - x_0)^2+(\_\_\_\_\_\_)^2+(\_\_\_\_\_\_)^2=R^2=\_\_$$

Так как координаты данных точек должны удовлетворять этому уравнению, то, подставляя их в уравнение, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \\ x_0^2+(1-y_0)^2+z_0^2=1 \\ x_0^2+y_0^2+(-1-z_0)^2=1 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2y_0$ ______, т. е. $y_0=$______, а вычитая из третьего уравнения первое, находим: $z_0=-\frac{1}{2}$. Подставив найденные значения $y_0$ и $z_0$ в первое уравнение, найдем $x_0$: $x_0=$______

Следовательно, уравнение сферы имеет вид (два решения):

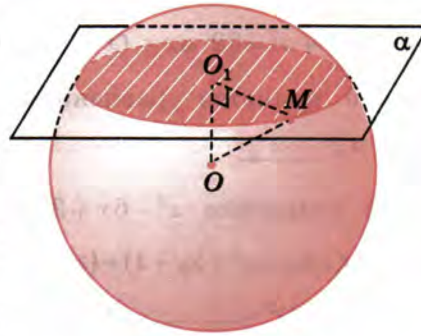
$(x-$______$)^2+(y-$______$)^2+(z+$______$)^2=1$

и

$(x+$______$)^2+(y-$______$)^2+(z+$______$)^2=$__

## 64

Шар радиуса 17 см пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 8 см от центра. Найдите площадь сечения.



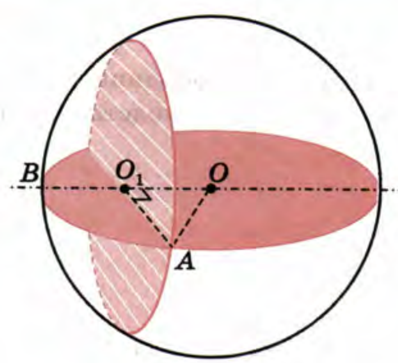

**Решение.**

Пусть точка $O$ — центр шара радиуса $R=17$ см, $\alpha$ — секущая плоскость и $OO_1 \perp \alpha$. По условию задачи расстояние $OO_1$ от центра шара до секущей плоскости меньше радиуса шара, поэтому сечением шара плоскостью $\alpha$ является ________, площадь которого $S=$ __ $r^2$, где __ — радиус сечения. Возьмем точку $M$ на линии пересечения сферы и плоскости $\alpha$, тогда треугольник $OO_1M$ ____________________ ($\angle O_1 =$ ________, $OM = R =$ __________, $OO_1 =$ __ см), откуда находим: $O_1M = r =$ __________, $S_{сеч} =$ _______________

**Ответ.** __________ см$^2$.

## 65

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к этому радиусу плоскость. Найдите отношение площади полученного сечения к площади большого круга.




**Решение.**

Пусть точка $O$ — центр данного шара, $OB = R$ — его радиус, точка $O_1$ — середина радиуса $OB$. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к $OB$ и проходящей через точку $O_1$, есть ________, радиус которого $r =$ ______. Из ________

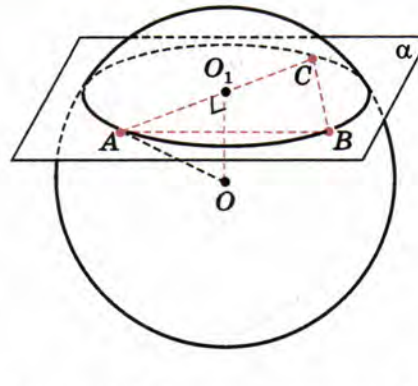
__________________________________ $OO_1A$

находим: $r^2 =$ ____________________. Следовательно, $\dfrac{S_{сеч}}{S_{бол.\ кр}} =$ __________________

**Ответ.** ______

## 66

Вершины треугольника $ABC$ лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно $\sqrt{26}$ см, $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см.




Решение.

Пусть точки $A$, $B$ и $C$ лежат на сфере с центром $O$. Через точки $A$, $B$ и $C$ проведем плоскость α, а из точки $O$ — перпендикуляр $OO_1$ к этой плоскости. Тогда в сечении сферы плоскостью α получим

________________________ с центром в __________ $O_1$, а точки $A$, $B$ и $C$ будут лежать на ____________________ . Таким образом, точка $O_1$ является центром окружности, ________________ около __________________ . По условию $AC = 25$ см, $BC = 24$ см, $AB = 7$ см, следовательно, треугольник $ABC$ __________________ (по теореме, обратной __________________ : $25^2 =$ _____ + _____ ). Поэтому $AC$ — диаметр окружности с центром $O_1$, $O_1A =$ _____ см.

Так как $OO_1 \perp \alpha$, то $\triangle AO_1O$ — ____________________ и $R = AO =$

$=$ __________ $=$ _______________ $=$ _________ $=$ _____ (см).

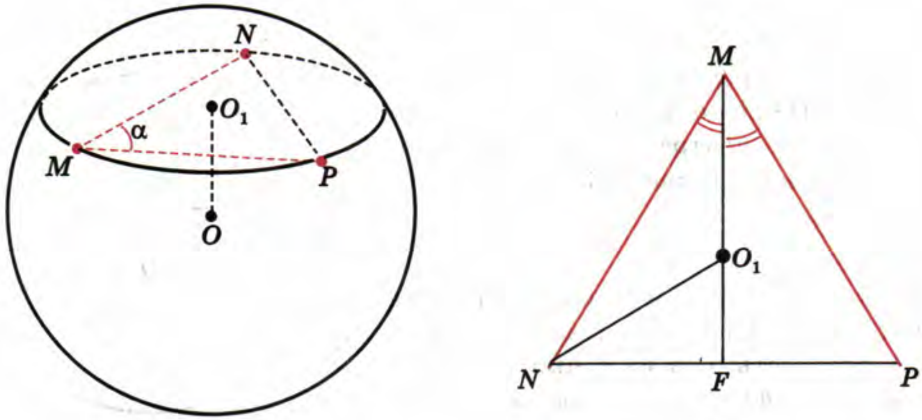
Ответ. $R =$ _________

## 67

Точки $M$, $N$ и $P$ лежат на сфере радиуса $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $MN = MP = 3$, $\angle NMP = \alpha$. На каком расстоянии от центра сферы находится плоскость $MNP$?

Решение.

Пусть точки $M$, $N$ и $P$ лежат на сфере с центром $O$, $OO_1$ — перпендикуляр, проведенный из точки $O$ к плоскости $MNP$ (см. рис. *а*). Сечение сферы плоскостью $MNP$ является __________________ с центром ____________ , а точки $M$, $N$ и $P$ лежат на ____________________
Следовательно, $O_1$ — центр ____________________________
около __________________________




а) б)

Найдем радиус $r$ этой окружности. Так как $MN=MP$, то треугольник $MNP$ ____________________________ (см. рис. *б*), поэтому $NP=$ ___ $MN$ __________ = __________

С другой стороны, $\frac{NP}{\sin\alpha}=2$ ___ (теорема синусов), поэтому $r=O_1M=$

$$=\frac{NP}{\rule{2cm}{0.4pt}}=\frac{\rule{2cm}{0.4pt}}{\rule{2cm}{0.4pt}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\rule{2cm}{0.4pt}}{\rule{2cm}{0.4pt}}$$

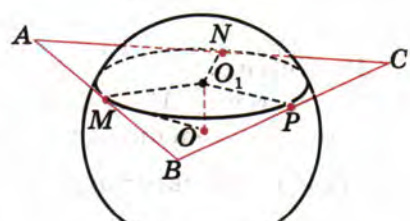
Так как $OO_1\perp MNP$, то $\triangle MO_1O$ прямоугольный и $O_1O=$

$$=\sqrt{\frac{\rule{2cm}{0.4pt}}{\rule{2cm}{0.4pt}}}=\frac{\rule{3cm}{0.4pt}}{\rule{3cm}{0.4pt}}=\frac{3}{2\cos\frac{\alpha}{2}\rule{2cm}{0.4pt}}=\frac{\rule{1cm}{0.4pt}}{\rule{1cm}{0.4pt}}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Ответ. ______________

## 68

Все стороны треугольника $ABC$ касаются сферы с центром $O$. Найдите радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости $ABC$ равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $AB=3$ см, $BC=5$ см, $AC=7$ см.




Решение.

Пусть $M$, $N$ и $P$ — точки касания сферы со сторонами треугольника $ABC$, $OO_1$ — перпендикуляр, проведенный из центра сферы к плоскости $ABC$. Сечением сферы плоскостью $ABC$ является окружность с центром $O_1$, вписанная в ______________________

Найдем радиус этой окружности:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$ (см$^2$).

С другой стороны, $S_{ABC} = p \cdot r$, где $p$ — ______________________, а $r$ — ______________________________________. Поэтому $\frac{15\sqrt{3}}{4} = \_\_\_\_\_\_\_\_$, откуда $r = \_\_\_\_\_\_$ см.

Так как $OO_1 \perp ABC$, то треугольник $OO_1M$ ______________________ ($\angle O_1 = 90°$, $OO_1 = \_\_\_\_\_\_$ см, $O_1M = \_\_\_\_\_\_$ см), поэтому $R = OM = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ (см).

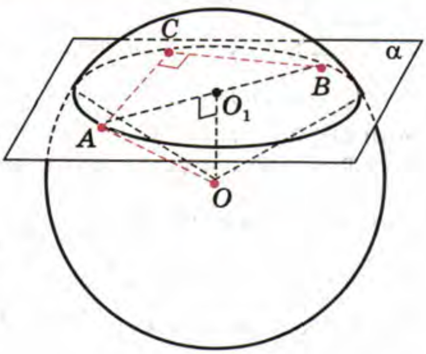
Ответ. ______ см.

## 69

Вершины прямоугольного треугольника с катетами 1,8 см и 2,4 см лежат на сфере.

а) Докажите, что если радиус сферы равен 1,5 см, то центр сферы лежит в плоскости треугольника.

б) Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 6,5 см. (Задача 620 учебника.)




Решение.

а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $\sqrt{\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$ (см), т. е. равна ______________ сферы. Поэтому центр сферы является ______________ гипотенузы и, следовательно, лежит в плоскости ______________________________

б) Пусть вершины прямоугольного треугольника $ABC$ с катетами $AC = 1{,}8$ см и $BC = 2{,}4$ см лежат на сфере с центром $O$, $OO_1$ — перпендикуляр, проведенный из точки $O$ к плоскости $ABC$. Сечение сферы этой плоскостью является ______________________ с центром

____________, а прямоугольный треугольник $ABC$ ____________ в эту окружность. Следовательно, точка $O_1$ — ____________ гипотенузы $AB$, а так как $AB =$ ____________ $=$ ____________ $=$ ______ $=$ ___ (см), то $AO_1 =$ __________

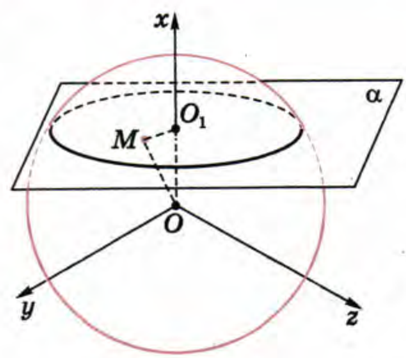
Так как $OO_1 \perp \alpha$, то треугольник $AO_1O$ ____________________

$OO_1 =$ ____________ $=$ ____________ $=$ ________ (см).

Ответ. б) ________ см.

## 70

Найдите радиус сечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ плоскостью, проходящей через точку $M(2;\ 4;\ 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс. (Задача 623 учебника.)



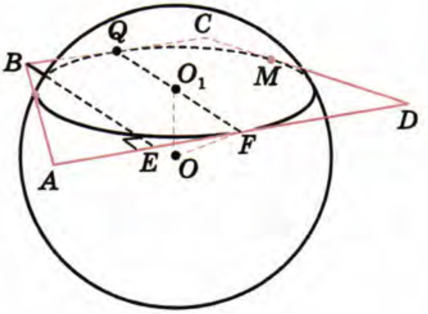

Решение.

Центром данной сферы является точка $O$(___; ___; ___), а ее радиус $R$ равен ___. Пусть $OO_1$ — перпендикуляр, проведенный из точки $O$ к секущей плоскости. Так как секущая плоскость по условию перпендикулярна к ____________________, то отрезок $OO_1$ лежит на ____________________. Абсцисса любой точки секущей плоскости равна абсциссе данной точки $M$, т. е. равна _____. Поэтому $OO_1 =$ ______, а искомый радиус $r$ сечения находим по формуле $r = O_1M = \sqrt{R^2 - \_\_\_\_\_\_}$, т. е. $r = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_} =$ _______

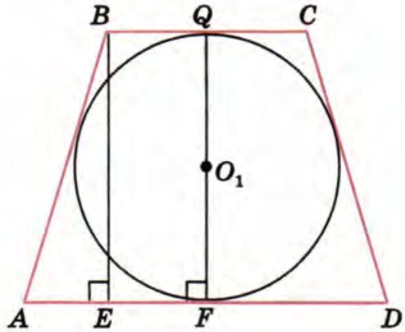
Ответ. ____________

## 71

Все стороны равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) касаются сферы, радиус которой равен $a\sqrt{3}$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости трапеции, если $AB = CD = a\sqrt{5}$, $AD = a(1 + \sqrt{5})$.




а)




б)

Решение.

Пусть стороны трапеции $ABCD$ касаются сферы с центром $O$ и радиусом $R$, отрезок $OO_1$ — перпендикуляр, проведенный из точки $O$ к плоскости трапеции. Тогда точки касания сторон трапеции и сферы лежат на окружности, ____________ в эту трапецию, и $O_1$ — ______________

________________________________ (см. рис. *а*). Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. *б*). Пусть $r$ — радиус вписанной в нее окружности, $BE$ — высота трапеции. Так как в трапецию можно вписать окружность, то

$2AB =$ ____________, откуда $BC =$ ____________________ $=$ ______________

Далее, $AE = \frac{1}{2}$ ____________ $=$ ________________________ $=$ ___

Из ____________________________________ треугольника $BEA$ находим: $BE =$ _______ $=$ _____. Но $BE = 2r$, поэтому $O_1F = r =$ ____. Так как $F$ — точка касания сферы и трапеции, $OO_1 \perp$ ________, то $OF =$ _______ и из ______________________ треугольника $OO_1F$ (см. рис. *а*) находим: $OO_1 =$ ________________ $=$ _______

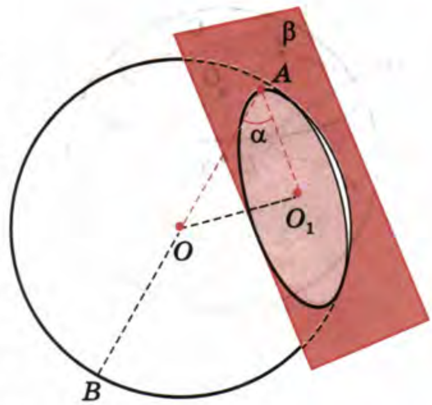
Ответ. ________________

## 72

Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса $R$ так, что угол между диаметром и плоскостью равен $\alpha$. Найдите длину окружности, получившейся в сечении. (Задача 589 учебника.)

**Решение.**

Пусть секущая плоскость $\beta$ проходит через конец $A$ диаметра $AB$ сферы с центром $O$ и радиусом $R$, а окружность с центром $O_1$ и радиусом $O_1A$ является сечением сферы плоскостью $\beta$. Тогда $OO_1 \perp$ ______ и $\angle$ ________ $= \alpha$, так как это угол между прямой $AB$ и ______________ ______________________ на плоскость $\beta$. Из ____________________ треугольника $OAO_1$ находим радиус окружности сечения: $AO_1 =$ ________________. Длина этой окружности равна ________________



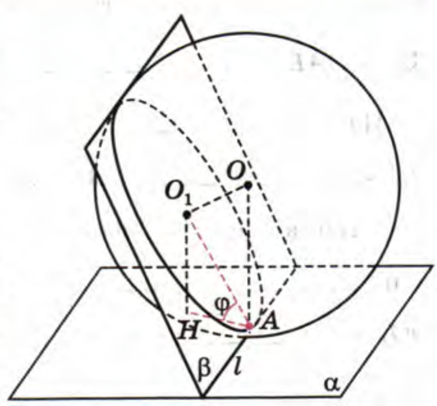

**Ответ.** ________________

## 73

Плоскость $\alpha$ касается сферы в точке $A$. Докажите, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку $A$ и образующими равные углы с плоскостью $\alpha$, имеют равные радиусы.

**Доказательство.**

Пусть секущая плоскость $\beta$, проведенная через точку $A$, лежащую на сфере с центром $O$ и радиусом $R$, образует угол $\varphi$ с плоскостью $\alpha$, касающейся этой сферы в точке $A$. Тогда $OA \perp$ ___. Пусть $O_1$ — центр, $r$ — радиус полученного сечения, $l$ — линия пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$, $O_1H$ — перпендикуляр к плоскости $\alpha$.




1) Так как $l \perp O_1A$ ($l$ — ____________________________ к окружности с центром $O_1$, $O_1A$ — радиус ____________________________, проведенный ____________________ касания), то $l \perp HA$ (теорема ____________________ ________________). Поэтому $\angle$ ________ $= \varphi$ (линейный ____________________

__________ между ____________________).

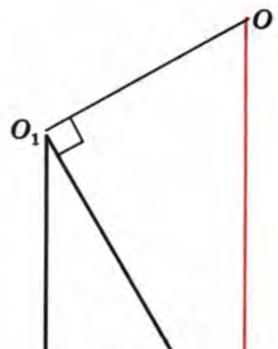
2) Поскольку $OA \perp \alpha$ и $O_1H \perp \alpha$, то $OA$ __ $O_1H$, и, следовательно, отрезки $AH$, $O_1A$ и $OA$ лежат в одной ________________, а значит, $\angle OAO_1 =$ ________

3) Из ____________________ треугольника $AO_1O$ получаем $r = O_1A =$ ____________________ $=$ __________

Итак, радиус окружности, полученной в сечении сферы плоскостью $\beta$, зависит лишь от радиуса __________ и угла между ________________ __________. Отсюда следует, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку $A$ и образующими равные углы с плоскостью $\alpha$, имеют равные радиусы.

## 74

Через точку $A$ сферы проведены две плоскости, одна из которых является касательной к сфере, а другая наклонена под углом в 60° к касательной плоскости. Найдите расстояние от центра сферы до секущей плоскости, если радиус сферы равен 13 см.




Решение.

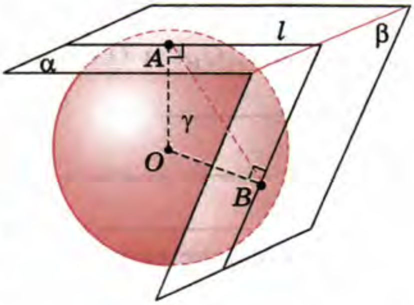
Пусть секущая плоскость $\beta$, проведенная через точку $A$, лежащую на сфере с центром $O$ и радиусом $OA = 13$ см, образует угол в 60° с плоскостью $\alpha$, касающейся этой сферы в точке $A$ (см. рисунок к задаче 73 и ее решение). Рассмотрим плоскость, заданную параллельными прямыми $O_1H$ и $OA$ (см. рис.), где ______ — искомое расстояние от центра сферы до секущей плоскости $\beta$. Так как $\angle$ ________ $= 60°$ (по ____________), то $\angle OAO_1 =$ ______ $=$ $=$ ________ $=$ ______ (см).

Поэтому в прямоугольном треугольнике ______ $OO_1 =$ ____ $OA =$ $=$ _____ (см).

Ответ. ______ см.

## 75

Две касательные плоскости к сфере пересекаются по прямой $l$. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна $l$.



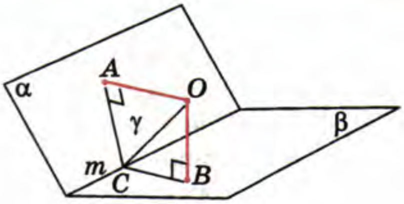

Доказательство.

Пусть $A$ и $B$ — точки касания сферы с центром $O$ и плоскостей $\alpha$ и $\beta$, $l$ — линия пересечения этих плоскостей. Тогда $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$ (так как радиус, проведенный в ________ касания сферы и ________________________________ к этой плоскости). Через пересекающиеся прямые $OA$ и $OB$ проведем плоскость $\gamma$. Так как $OA \perp \alpha$, то прямая $OA$ перпендикулярна к любой ____________, лежащей ________________, и, следовательно, $OA \perp l$. Аналогично $OB \perp$ __

Таким образом, прямая $l$ перпендикулярна к двум пересекающимся прямым (_____ и _____), лежащим ____________________ $\gamma$. Поэтому $l \perp$ __, а так как прямая $AB$ лежит ____________________, то $l \perp$ _____

## 76

Сфера касается граней двугранного угла 120°. Найдите радиус сферы и расстояние между точками касания, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно $a$. (Задача 591 учебника.)




Решение.

Пусть полуплоскости $\alpha$ и $\beta$ — грани данного двугранного угла, прямая $m$ — ребро этого угла, а точка $O$ — центр сферы, касающейся граней двугранного угла в точках $A$ и $B$. Тогда $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$ (так как радиус, ________________________________________________________________).

Проведем через пересекающиеся прямые $OA$ и $OB$ плоскость $\gamma$. Она пересечет ребро $m$ в некоторой точке $C$.

1) $m \perp OA$, так как $OA$ ________, аналогично $m$ ________, поэтому $m \perp \gamma$ (по признаку ____________________________________________

______________________________). Отсюда следует, что угол $ACB$ линейный

__________________________________________________, т. е. $\angle ACB =$ ________,

а $OC =$ ______

2) Точка $O$ равноудалена от сторон угла $ACB$, так как ______ = = ______ $= R$, где $R$ — радиус сферы, следовательно, она лежит на его

____________________________, т. е. $\angle OCB =$ ______ . Из ____________________

треугольника $OCB$ находим: $OB = R =$ ______________________ = ________ ,

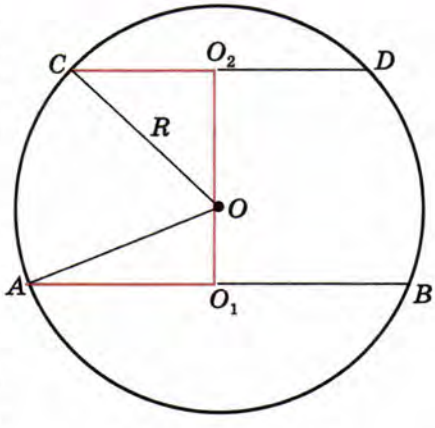
$BC =$ ______ . Аналогично получаем $AC =$ ______

3) Из равнобедренного треугольника $ACB$, в котором $AC =$ ______ = = ______ , $\angle ACB =$ __________ , находим $AB$: $AB = 2 \cdot AC \cdot \sin$ ______ = = ________

Ответ. ________, ________

## 77

Радиусы двух параллельных сечений сферы, расположенных по разные стороны от ее центра, равны 3 см и 4 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 7 см. Найдите площадь сферы.




Решение.

Рассмотрим сечение сферы радиуса $R$ плоскостью, проходящей через ее центр $O$ и перпендикулярной секущим плоскостям. В сечении получим окружность с центром $O$ и радиусом $R$ (окружность большого ________________), хорды $AB$ и $CD$ которой — диаметры ________________

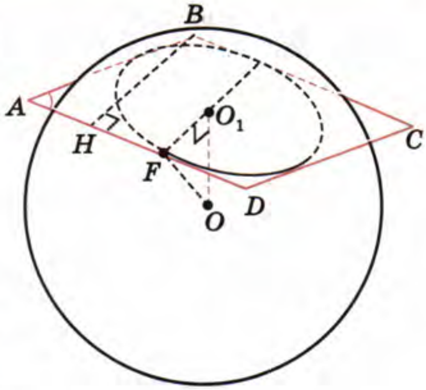
________________, причем $AB \parallel$ ______. Пусть $OO_1 \perp AB$, $OO_2 \perp CD$, тогда $OA =$ ______ = ______, $O_1A = 4$ см, $O_2C = 3$ см, $O_1O_2 = 7$ см. Пусть $OO_1 = x$ (см), тогда $OO_2 =$ ________ (см). Из ________________________________ треугольников $AO_1O$ и $CO_2O$ получаем $R^2 =$ ___ + ___ и $R^2 =$ _________ + + ___, откуда $x^2+16 =$ _________________________ и $x =$ ___

Итак, $OO_1 =$ ______ см, поэтому $R =$ ______ см, $S_{сферы} =$ _________ = = _________ = _________ (см$^2$).

Ответ. ________ см$^2$.

## 78

Все стороны ромба касаются сферы. Сторона ромба равна 2 см, а угол равен 60°. Расстояние от центра сферы до плоскости ромба равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сферы.



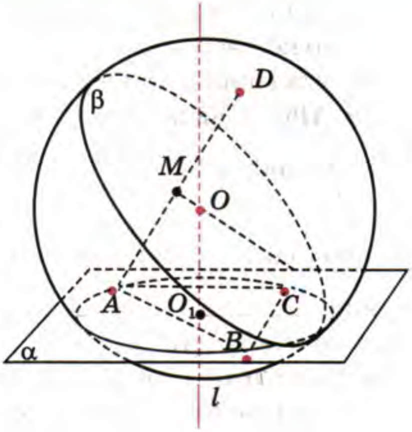

Решение.

Пусть стороны ромба $ABCD$ касаются сферы с центром $O$ и радиусом $R$, отрезок $OO_1$ — перпендикуляр, проведенный из точки $O$ к плоскости ромба. Тогда точки касания сторон ромба и сферы лежат на окружности, _________________ _____________ в этот ромб и $O_1$ — центр ______________________. Проведем высоту $BH$ ромба. Радиус $r$ вписанной окружности равен ______ $BH$. Из прямоугольного треугольника $ABH$ находим: $BH = AB \cdot$ ___________ = = ___________ = ______ (см), следовательно, $r =$ ____________. Пусть $F$ — точка касания стороны $AD$ ромба и сферы. Из ________________________ треугольника $O_1OF$, в котором $OO_1 =$ ______ см, $O_1F =$ ______ см, находим радиус сферы: $R = OF =$ __________________ = ______ = ______ (см). $S_{сферы} =$ ___________ = __________ = ______ (см$^2$).

Ответ. ________ см$^2$.

## 79

Докажите, что через четыре точки, не лежащие в одной плоскости, проходит сфера, и притом только одна.




Доказательство.

Пусть данные точки $A$, $B$, $C$ и $D$ не лежат в одной плоскости. Через любые три из них, например через точки $A$, $B$ и $C$, проведем плоскость $\alpha$ и в ней отметим точку $O_1$ — центр окружности, ______

______

Множество всех точек пространства, равноудаленных от точек $A$, $B$ и $C$, есть прямая $l$, проходящая через ______ окружности, описанной около треугольника ______ и перпендикулярная ______

Множеством всех точек пространства, равноудаленных от двух точек, например $A$ и $D$, является плоскость $\beta$, перпендикулярная ______ и проходящая через его ______

Докажем, что прямая $l$ пересекается с плоскостью $\beta$. Предположим, что прямая $l$ не пересекает плоскость $\beta$. Тогда $l \parallel \beta$ либо $l \subset \beta$, и так как $l \perp$ __, то $\beta \perp$ __. Отсюда следует, что $AD \subset$ __ (поскольку $AD \perp$ __ и $A \in$ __), а значит, все данные точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат в ______, что противоречит условию. Итак, прямая $l$ пересекает плоскость $\beta$ в некоторой точке $O$. Точка $O$ равноудалена от ______ $A$, ______ и, следовательно, является центром сферы, проходящей через ______

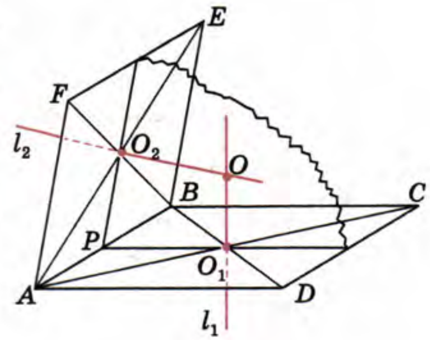
Единственность сферы, проходящей через точки $A$, $B$, $C$ и $D$, следует из того, что центр такой сферы лежит как на прямой $l$, так и в плоскости $\beta$ и, следовательно, совпадает с точкой $O$.

## 80

Два прямоугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины данных прямоугольников лежат на одной сфере.

Доказательство.

Пусть $ABCD$ и $ABEF$ — данные прямоугольники с общей стороной ____




Множеством всех точек пространства, равноудаленных от вершин прямоугольника $ABCD$, является прямая $l_1$, перпендикулярная к ____

____

и проходящая через точку $O_1$ пересечения ____

Аналогично множество всех точек пространства, равноудаленных от вершин прямоугольника $ABEF$, есть прямая $l_2$, перпендикулярная к

____

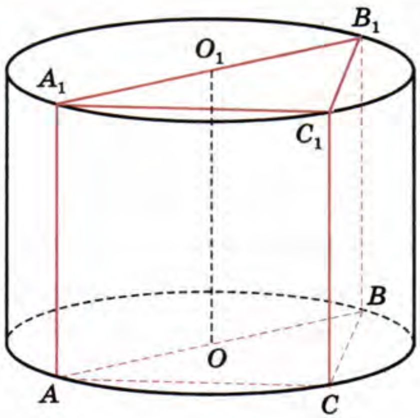
и проходящая через точку $O_2$ ____

Докажем, что прямые $l_1$ и $l_2$ пересекаются. Для этого рассмотрим плоскость $O_1PO_2$, где точка $P$ — середина ____. В плоскости $O_1PO_2$ через точки $O_1$ и $O_2$ проведем прямые, перпендикулярные соответственно $PO_1$ и ____. Они пересекаются в некоторой точке $O$. $AB \perp O_1PO_2$, так как $AB \perp$ ____ и $AB \perp$ ____. Следовательно, прямая $AB$ ____ прямым $O_1O$ и ____, лежащим в плоскости $O_1PO_2$. Так как $O_1O \perp PO_1$ и $O_1O \perp$ ____, то $O_1O \perp ABC$ (по признаку ____

____). Аналогично доказывается, что $O_2O \perp$ ____. Отсюда следует, что прямые $l_1$ и $O_1O$ ____ и также совпадают прямые ____, а это означает, что прямые $l_1$ и $l_2$ ____ в точке ____. Итак, $OD =$ ____ $=$ ____ $=$ ____ $=$ ____ $= OE$, т. е. точка $O$ — центр сферы, проходящей через точки $A$, ____, ____, ____, ____ и ____

## Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

## 81




Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны. (Задача 629 учебника.)

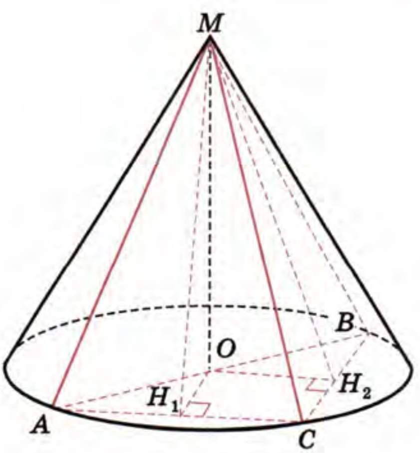
Доказательство.

На рисунке изображена призма $ABCA_1B_1C_1$, вписанная в цилиндр так, что ее боковая грань $AA_1B_1B$ проходит через ось $OO_1$ цилиндра.

Требуется доказать, что боковые грани $AA_1C_1C$ и $BB_1C_1C$ взаимно перпендикулярны, т. е. двугранный угол с ребром $CC_1$, образованный плоскостями этих граней,— прямой.

Боковые ребра вписанной призмы являются образующими цилиндра, поэтому они перпендикулярны ______________________________, в частности $CC_1 \perp ABC$. Отсюда следует, что $CC_1 \perp CA$ и $CC_1 \perp$ __________, а значит, угол $ACB$ линейный ______________________________________________________________________. Так как грань $AA_1B_1B$ проходит через точку $O$, то $AB$ — ________________ основания цилиндра. Поэтому $\angle ACB =$ ________, т. е. указанный двугранный угол с ребром $CC_1$ _______________, что и требовалось доказать.

## 82




В конус с высотой 12 см вписана треугольная пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамиды и конуса.

Решение.

На рисунке изображена пирамида $MABC$, вписанная в конус с осью $MO$ так, что ее вершина $M$ совпадает с вершиной конуса, а прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $AC = 8$ см и $BC = 6$ см вписан в основание конуса. Отрезок $MO$ — высота конуса и по условию $MO=$ __________. Так как треугольник $ABC$ ______________________________, то гипотенуза $AB$ является ____________ основания конуса, $AB=$ __________ и точка $O$ — __________________ отрезка $AB$.

Из __________________________ треугольника $AMO$, в котором $MO=$ __________, $AO=$ __________, находим: $AM=\sqrt{\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_}=$ $=\sqrt{12^2+\_\_\_\_\_\_}=13$ (см).

Боковые ребра пирамиды $MA$, ______ и ______ являются ______________ конуса, поэтому $MA=$ ______ $=$ ______ $=$ __________. Пусть $MH_1$ и $MH_2$ — высоты треугольников $AMC$ и ________, тогда

$$MH_1=\sqrt{AM^2-\_\_\_\_\_\_}=\sqrt{\_\_\_\_\_\_-\_\_\_\_\_\_}=\_\_\_\_\_\_\ \text{(см)},$$

$$MH_2=\sqrt{MB^2-\_\_\_\_\_\_}=\sqrt{\_\_\_\_\_\_-9}=\_\_\_\_\_\_\ \text{(см)}.$$

$$S_{\text{полн. пир}}=S_{ABC}+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_=$$

$$=\frac{1}{2}(AC\cdot\_\_\_\_\_\_+AB\cdot\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_)=$$

$$=\frac{1}{2}(8\cdot6+10\cdot12+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_)=$$

$$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ (\text{см}^2),$$

$$S_{\text{кон}}=\pi r(\_\_\_+\_\_\_)=\pi\cdot\_\_\_(\_\_\_+\_\_\_)=\_\_\_\_\_\_\ (\text{см}^2).$$

$$\frac{S_{\text{пир}}}{S_{\text{кон}}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ответ. __________

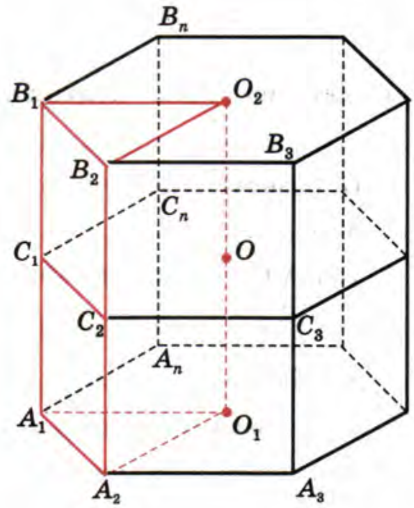
## 83

Докажите, что если в правильную призму можно вписать сферу, то центром сферы является середина отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы. (Задача 632 учебника.)

Доказательство.

Центр сферы, вписанной в многогранник, в частности в правильную призму, является точкой, равноудаленной от плоскостей всех ________________. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_nB_1B_2B_3\ldots B_n$ — правильная призма, в которую можно вписать сферу, точка $O$ — центр вписанной сферы, $O_1$ и $O_2$ — центры оснований призмы.

Так как точка $O$ равноудалена от плоскостей граней $A_1A_2B_2B_1$ и $A_1A_nB_nB_1$, то она лежит в полуплоскости (обозначим ее $\alpha$), делящей пополам ______________ угол с ребром ______________. Полуплоскость $\alpha$ проходит через ребро __________ и параллельную ему прямую ______________, поскольку углы $A_2A_1A_n$ и $B_2B_1B_n$ являются ______________________________ двугранного угла с ребром __________, а лучи $A_1O_1$ и $B_1O_2$ — ______________________ __________ этих линейных углов. Точно так же точка $O$ лежит в полуплоскости $\beta$, делящей пополам двугранный угол с ребром $A_2B_2$. Полуплоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекаются по ______________________. Следовательно, точка $O$ лежит на ______________________



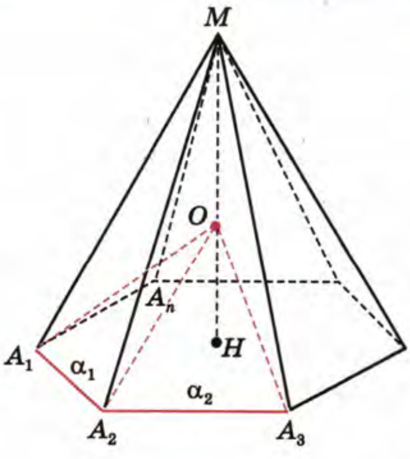

С другой стороны, так как точка $O$ равноудалена от плоскостей оснований призмы, то она лежит в плоскости, параллельной плоскостям оснований и проходящей через ________________ отрезка $O_1O_2$. Итак, точка $O$ есть ______________________________________, что и требовалось доказать.

## 84

Докажите, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте этой пирамиды. (Задача 633 учебника).

Доказательство.

На рисунке изображена правильная $n$-угольная пирамида $MA_1A_2...A_n$, $MH$ — ее высота. Обозначим через $\alpha_1$ полуплоскость, делящую пополам двугранный угол пирамиды при ребре $A_1A_2$; через $\alpha_2$ — полуплоскость, делящую пополам ____________________________ при ребре



$A_2A_3$; ...; через $\alpha_n$ — ________________

________________. В силу правильности пирамиды каждая из этих полуплоскостей пересекается с высотой $MH$ в ________________ (обозначим ее $O$). Следовательно, точка $O$ равноудалена от всех ________________ и потому является ________________

Точка $O$ — единственная общая точка полуплоскостей $\alpha_1$, ________

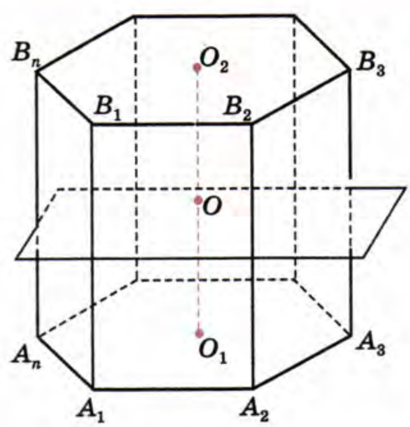
В самом деле, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ пересекаются по лучу ______, а луч $A_2O$ имеет с полуплоскостью $\alpha_3$ только ________________ точку — точку $O$. Итак, в правильную пирамиду можно ________________, причем центр вписанной сферы лежит ________________

## 85

Докажите, что центр сферы, описанной около:

а) правильной призмы, лежит на середине отрезка, соединяющего центры оснований призмы;

б) правильной пирамиды, лежит на высоте пирамиды или ее продолжении. (Задача 637 учебника.)




Доказательство.

Центр сферы, описанной около многогранника, является точкой, равноудаленной от всех ________________

а) Пусть $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2...B_n$ — правильная призма, точки $O_1$ и $O_2$ — центры ее оснований. Множеством всех точек пространства, равноудаленных от вершин основания $A_1A_2...A_n$, является ________________, проходящая через ________________ и перпендикулярная ________________ этого основания, т. е. прямая ________. Эта же прямая является множеством всех точек пространства, равноудаленных от ________________

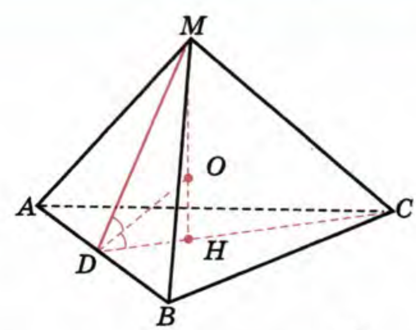
Следовательно, центр сферы, описанной около правильной призмы, лежит на ________________

Множеством всех точек пространства, равноудаленных от точек $A_1$ и $B_1$, является ________________, проходящая через ________________ ________________ и перпендикулярная ____________. Эта плоскость пересекается с отрезком $O_1O_2$ в его ________________. Таким образом, центром сферы, описанной около ________________________________, является ________________________________

б) Множеством всех точек пространства, равноудаленных от вершин основания правильной пирамиды, является ____________, проходящая через ______________________ и ______________________________ ________________________. Эта прямая содержит ____________ пирамиды, поэтому центр описанной ____________________________ ________________ сферы лежит ____________________________ или ______________________

## 86

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $a$, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.




Решение.

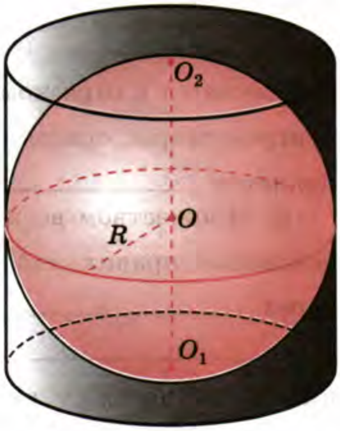
Пусть $MABC$ — правильная треугольная пирамида, $MH$ — ее высота. Центр $O$ вписанной в пирамиду сферы лежит на высоте $MH$ и $OH = r$ — искомый ________________________________. Пусть $CD \perp AB$, тогда $H \in$ ______ и $\angle MDC$ — линейный ________________________________ при ребре $AB$. По условию он равен ________. Так как точка $O$ — центр вписанной сферы, то она является точкой пересечения полуплоскости, делящей пополам ________________________________ при ребре $AB$, и ее высоты $MH$. Поэтому луч $DO$ — ____________ угла $MDC$ и $\angle ODH =$ ______

Из ______________________ треугольника ________ находим радиус сферы: $OH =$ ________________________________ $=$ ______

Ответ. ________________

## 87

Сфера вписана в цилиндр (т. е. она касается оснований цилиндра и каждой его образующей). Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра. (Задача 642 учебника.)




Решение.

На рисунке изображена сфера с центром $O$ и радиусом $R$, вписанная в цилиндр с осью $O_1O_2$ (точки $O_1$ и $O_2$ — центры ______________________________).

Центр сферы делит отрезок $O_1O_2$ ________________. $OO_1$ = _______ = _______. Плоскость, проходящая через центр сферы $O$ и перпендикулярная оси цилиндра $O_1O_2$, пересекает сферу по ___________________________________________, а боковую поверхность цилиндра — по окружности, равной ____________________________________. Таким образом, радиус основания цилиндра равен ______, а высота цилиндра равна ______. Так как $S_{\text{сферы}}$ = ____________, $S_{\text{полн. цил}}$ = ____________________ = = __________________, то $S_{\text{сферы}} : S_{\text{полн. цил}}$ = ____________ : ____________ = __________

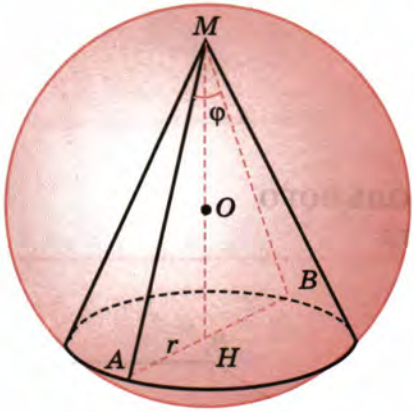
Ответ. ______________________

## 88

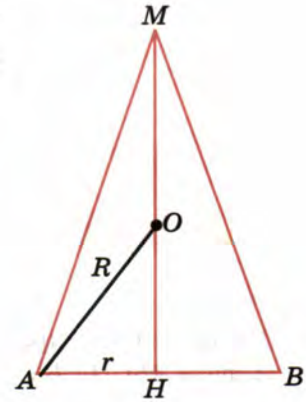
Конус с углом $\varphi$ при вершине осевого сечения и радиусом основания $r$ вписан в сферу радиуса $R$ (т. е. вершина конуса лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы). Найдите угол $\varphi$, если $R = 2r$. (Задача 646в учебника.)

Решение.

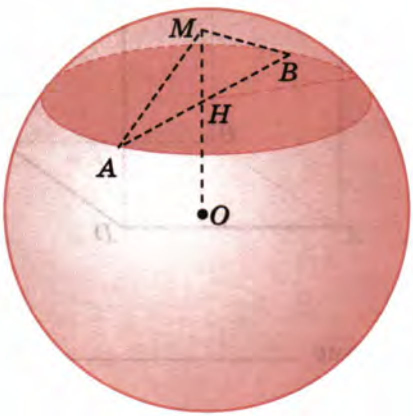
На рисунке изображен конус с высотой $MH$, вписанный в сферу с центром $O$ и радиусом $R$. Так как отрезок $MH$ перпендикулярен к плоскости ______________________________ и отрезок $OH$, соединяющий центр ____________ с центром сечения ________________________________________________________________________, перпендикулярен к плоскости основания, то прямые ______ и ______ совпадают, а значит, $O \in$ ______. Возможны два случая:



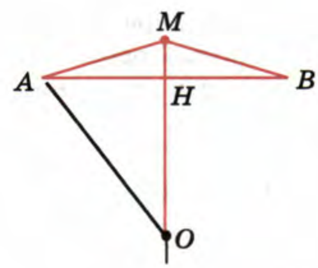

а)




б)




в)




г)

1) точка $O$ лежит между точками $M$ и ____ (см. рис. *а* и *б*);

2) точка $H$ лежит между точками ____ и ___ (см. рис. *в* и *г*).

1) Рассмотрим осевое сечение конуса — ______________________ треугольник _________ (см. рис. *б*). В этом треугольнике $\angle AMB =$ ____, поэтому $\angle AMH =$ ______, а так как $OM =$ ______ $= R$, то $\angle OAM = \angle$ ___________ $=$ $=$ ______. Угол $AOH$ — внешний угол _________________ $AOM$, поэтому $\angle AOH =$ ______ $+$ ______ $=$ ____. В ______________________ треугольнике $AOH$ $AO =$ ____, $AH =$ ____, а так как по условию $R =$ ______, то $\frac{AH}{AO} =$ $=$ ______ $= \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle AOH =$ ______, т. е. $\varphi =$ ________

2) Второй случай рассмотрите самостоятельно.

Ответ. __________________

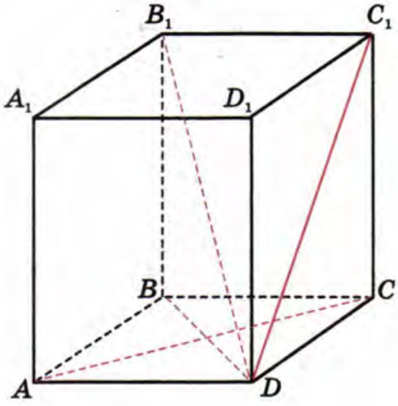
Глава VII

# Объемы тел

## § 1 Объем прямоугольного параллелепипеда

**89**

Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC = 15$ см, $DC_1 = 4\sqrt{13}$ см, $DB_1 = 17$ см.




Решение.

Пусть $V$ — искомый объем, тогда $V = AB \cdot AD \cdot AA_1$. Из определения прямоугольного параллелепипеда следует, что его боковые ребра ______________ к плоскости основания, а основанием является ______________________

1) $\triangle B_1BD$ — ______________________,

так как $B_1B$ __________ $ABC$, причем

$BD =$ _____ $=$ _____ см, $DB_1 =$ _____ см. По теореме ______________

$BB_1 =$ ________________ $=$ __________ (см).

2) $\triangle B_1C_1D$ — ______________________, так как $B_1C_1$ ____________,

причем $DC_1 =$ __________ см, $B_1D =$ _____ $=$ _____ см. Следовательно,

$B_1C_1 =$ ________________ $=$ __________ (см).

3) $\triangle BAD$ — ______________________ и $BD =$ _____ $=$ _____ см, $AD =$

$=$ ________ $=$ ________ см, поэтому $AB =$ ________________ $=$ __________ (см).

Итак, $V = AB \cdot$ ________________ $=$ ________________ $=$ ________ (см$^3$).

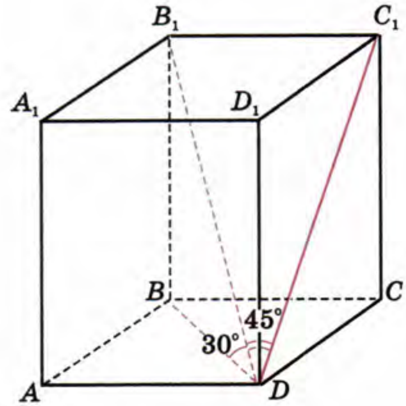
Ответ. ________ см$^3$.

**90**

Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если известно, что его диагональ равна $4\sqrt{2}$ см и составляет с плоскостью основания угол в 30°, а с плоскостью боковой грани угол в 45°.

Решение.

На рисунке изображен данный прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.




1) Так как прямая $BD$ — проекция прямой ______ на ____________________ ____________________, то $\angle B_1DB =$ ____________

Из ______________________ треугольника $B_1DB$ находим: $BB_1 =$ ____________ $=$ $=$ __________ (см), $BD = 4\sqrt{2}\ \cdot$ ____________ $=$ $=$ __________ (см).

2) Так как прямая $C_1D$ — проекция ____________________ на плоскость $D_1CC_1$, то $\angle B_1DC_1 =$ ____________. Из ____________________________ треугольника $B_1DC_1$ находим: $B_1C_1 =$ ________ $=$ $= B_1D :$ ______ $=$ ______ (см).

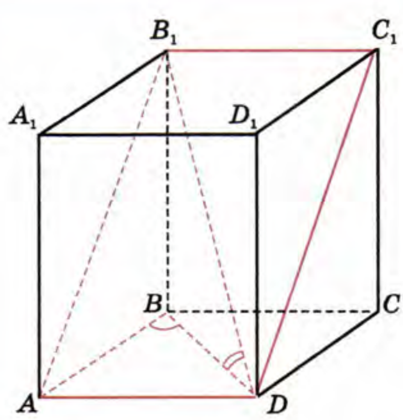
3) $\triangle BAD$ ______________________________________, $BD =$ ______________, $AD =$ $=$ ________ $=$ ________ см, поэтому $AB =$ ____________ $=$ ______ $=$ __________ (см).

Итак, $V = AB\ \cdot$ __________________ $=$ ________________________ $=$ ____________

Ответ. ____________________

## 91

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ $B_1D$ составляет с плоскостью основания угол в 45°, а двугранный угол $A_1B_1BD$ равен 60°. Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания равна 12 см. (Задача 656 учебника.)




Решение.

На рисунке изображен данный прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) По условию $\angle B_1DB = 45°$, поэтому из ____________________________ треугольника $B_1BD$ находим: $BB_1 =$ ______ $=$ ________

2) $\angle ABD$ — линейный угол ______________________________ угла $A_1B_1BD$ (так как $BA \perp$ ________ и $BD \perp$ ________), поэтому $\angle ABD = 60°$, $AB =$ ________, $AD =$ ________ $=$ ________ (см).

Итак, $V = AB \cdot$ ________________ $=$ ______________ $=$ ____________________________

**Ответ.** ________________________

## 92

Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{10}$ см и $\sqrt{13}$ см. Найдите объем параллелепипеда.

**Решение.**

На рисунке к задаче 91 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $BD = \sqrt{5}$ см, $DC_1 = \sqrt{10}$ см, $BC_1 = \sqrt{13}$ см.

Тогда $\begin{cases} AB^2 + AD^2 = \_\_\_\_\_\_ \\ AB^2 + CC_1^2 = \_\_\_\_\_\_ \\ AD^2 + CC_1^2 = \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$. Отсюда

$2AB^2 + 2AD^2 + 2CC_1^2 =$ ______, $AB^2 + AD^2 + CC_1^2 =$ ______, $AC_1 =$ ______ см (так как в прямоугольном параллелепипеде ______________________________
__________________________________________________________________).

Теперь находим измерения параллелепипеда:

$$AB = \sqrt{AC_1^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$AD = \sqrt{AC_1^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)}.$$

Итак, $V =$ ______________________________ $=$ ________ (см$^3$).

**Ответ.** ______ см$^3$.

## 93

Сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна 4 см и составляет с диагональю основания угол в 30°. Через данную сторону и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, плоскость которого составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

Решение.

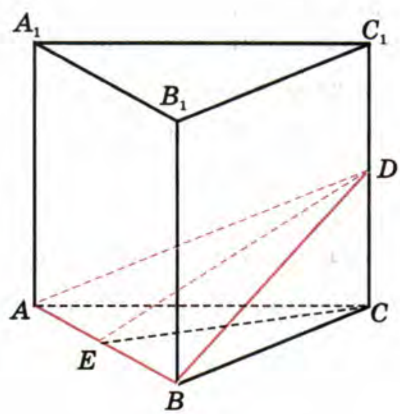
На рисунке к задаче 91 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $AD=4$ см, $\angle CAD=30°$. Из прямоугольного треугольника $ADC$ находим: $DC=$ ________________ = ____________ = = ________ (см). Плоскость сечения, проходящего через ребра $AD$ и $B_1C_1$, составляет с плоскостью основания $ABCD$ угол в 60°, поэтому $\angle C_1DC=$ ______ (как __________________ двугранного угла __________).
Из __________________________________ треугольника $CC_1D$ находим: $CC_1=$ ____________________ = ____________________ = __________

Итак, $V=AD\cdot$ ______________ = ______________ = _________ (см³).

Ответ. _________ см³.

## § 2 Объем прямой призмы и цилиндра

### 94




В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону $AB$ нижнего основания и середину ребра $CC_1$ проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 30°. Найдите объем призмы, если ее боковое ребро равно $2b$.

Решение.

На рисунке изображена правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка $D$ — середина ребра $CC_1$ и $\triangle ADB$ — проведенное сечение. Поскольку призма правильная, то $CC_1 \perp$ ________ и объем $V$ призмы равен $S_{ABC}\cdot$ ______. Так как $AD=BD$ (как гипотенузы равных ________________________________ $ADC$ и ________), то треугольник $ADB$ ____________________________
Пусть точка $E$ — середина $AB$. Тогда $DE\perp$ ______ и $CE\perp$ ______, и, следовательно, $\angle DEC$ — ________________________ двугранного __________

______. По условию $\angle DEC =$ ______, поэтому из ____________________ треугольника $DCE$, в котором $DC =$ ___, находим: $EC = b :$ __________ = = __________

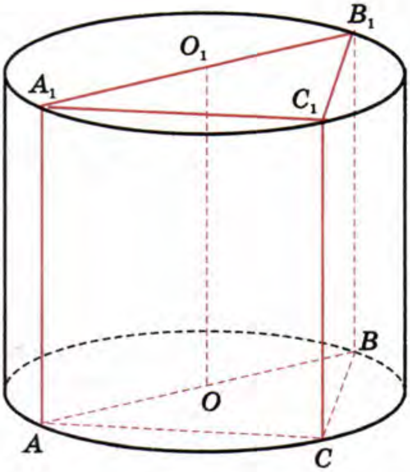
В ____________________ треугольнике $ACE$ $\angle ACE =$ ______, поэтому $AE = EC \cdot$ ________________ = ___, и, следовательно, $AB = 2$ ______ = ______, $S_{ABC} =$ __________ = __________

Итак, $V =$ __________ $\cdot CC_1 =$ __________ $\cdot$ ______ = __________

**Ответ.** ________________

## 95

В цилиндр, площадь осевого сечения которого равна 24 см², вписана призма. Основанием призмы является прямоугольный треугольник с катетом, равным $2\sqrt{3}$ см, и прилежащим к нему углом в 30°. Найдите объем цилиндра.




**Решение.**

На рисунке изображены цилиндр и вписанная в него призма $ABCA_1B_1C_1$. Из определения вписанной в цилиндр призмы следует, что $AA_1 \perp$ ________, и основания призмы вписаны в ________________
________________________________________

Имеем: __________________________ треугольник $ABC$ вписан в окружность основания цилиндра, поэтому его гипотенуза ______ является ______________ ________________________________, а прямоугольник $AA_1B_1B$ — осевое ________________________________. Из треугольника $ABC$ находим: $AB = AC :$ ____________ = ____________ = ______ (см).

Следовательно, радиус цилиндра $r =$ ________________ = __________

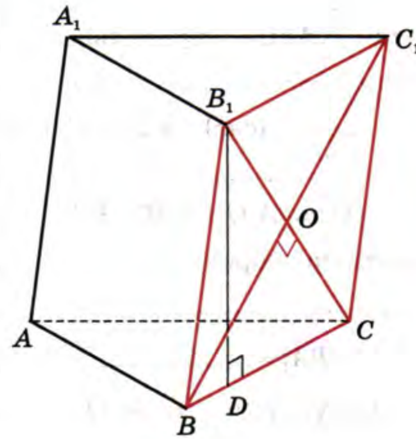
По условию $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot$ __________ = ______ (см²), откуда $AA_1 =$ ________

$V_ц = \pi \cdot$ __________ = ____________ = ________ (см³).

**Ответ.** ________ см³.

# § 3 Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса

## 96




Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что ее основания — правильные треугольники, боковая грань $BB_1C_1C$ является ромбом и образует с плоскостью $ABC$ угол в 90°, причем $B_1C = 12$ см, $BC_1 = 16$ см.

Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма. Так как $V_{призмы} = S_{осн} \cdot$ ______, то требуется найти ________________________________

________________________________

1) Четырехугольник $BB_1C_1C$ — ромб с диагоналями $B_1C = 12$ см и $BC_1 = 16$ см. Поскольку $\triangle BOC$ — ________________

и его катеты $BO = \frac{1}{2}$ __________ = __________, $CO =$ ________ = ________,

то сторона ромба $BC =$ __________, $S_{ABC} =$ ______________ = ______________ =

= __________ (см²).

2) По условию плоскости $BB_1C_1$ и $ABC$ ________________________,

поэтому высота $B_1D$ ромба $BB_1C_1C$ является и ________________________

Таким образом, надо найти высоту $B_1D$ ромба. В треугольнике $BB_1C$ имеем: $BO \cdot B_1C = BC \cdot$ ______________, откуда $B_1D =$ __________________ =

= __________ = ______ (см).

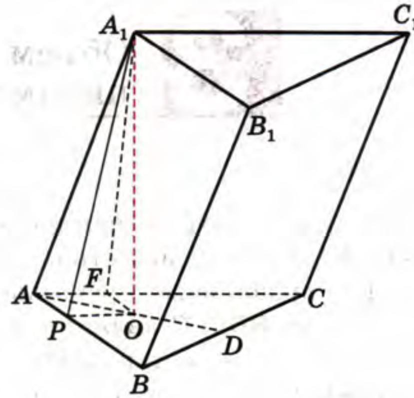
Итак, $V_{призмы} =$ ________________ = __________ (см³).

Ответ. ________________

## 97

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник со стороной $AB = 6$ см, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$, $AA_1 = 8$ см. Найдите объем призмы.

Решение.




На рисунке изображена данная наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$. Ее объем вычисляется по формуле $V = S \cdot H$, где $S$ — площадь треугольника ________, $H$ — ____________________. Так как по условию $\triangle ABC$ — правильный, то его площадь $S =$ ____________ $=$ ____________ $=$ $=$ ________ (см$^2$). Остается найти ________ ____________________________________

Пусть $A_1O \perp ABC$, $OP \perp AB$, $OF \perp AC$, тогда по теореме ______________________ ____________________________________ $A_1P \perp$ ______ и $A_1F \perp$ ______

$\triangle APA_1 =$ __________ по гипотенузе ($AA_1$ — __________ гипотенуза) и острому углу ($\angle A_1AP =$ __________ $=$ ______ по условию), поэтому $OP =$ ______, и, следовательно, луч $AO$ — ______________________ ________, а значит, $\angle OAP =$ ______

Из ____________________ треугольников $A_1AP$, $APO$ и $A_1AO$ находим последовательно: $AP = AA_1 \cdot$ ________________ $=$ __________ $=$ $=$ ______ см, $AO = AP \cdot$ __________ $=$ ______________ $=$ __________ см и $A_1O = \sqrt{\text{______________}} =$ ______________ $=$ ________ см.

Итак, $V =$ ________________ $=$ ________ (см$^3$).

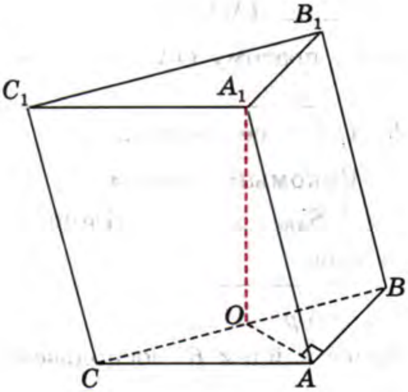
Ответ. ________ см$^3$.

## 98

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $AB = 7$ см и $AC = 24$ см. Вершина $A_1$ равноудалена от вершин $A$, $B$ и $C$. Найдите объем призмы, если ребро $AA_1$ составляет с плоскостью основания угол в 45°. (Задача 679 учебника.)

Решение.

На рисунке изображена данная призма $ABCA_1B_1C_1$. Середина $O$ гипотенузы $BC$ треугольника $ABC$ является центром окружности, _________________________________________________________________. Так как по условию точка $A_1$ равноудалена от вершин $A$, $B$ и $C$, то она лежит на прямой, перпендикулярной к __________________________ и проходящей через центр ______________________________________________________________ — точку $O$,




поэтому $A_1O \perp$ ______, т. е. $A_1O$ — ___________________________________ призмы

Объем призмы вычисляется по формуле $V = S_{ABC} \cdot A_1O$, следовательно, нужно найти $S_{ABC}$ и $A_1O$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ ______________ = ________________ = _______ (см$^2$).

Из __________________________ треугольника $AOA_1$ найдем высоту $A_1O$. Так как прямая $AO$ — проекция _______________________ на плоскость __________, то $\angle A_1AO$ — угол между _________________ и плоскостью __________. По _______________ $\angle A_1AO = 45°$, поэтому $A_1O =$ _______ = _______ $CB =$ _______ (см).

Итак, $V =$ _____________ = __________ (см$^3$).

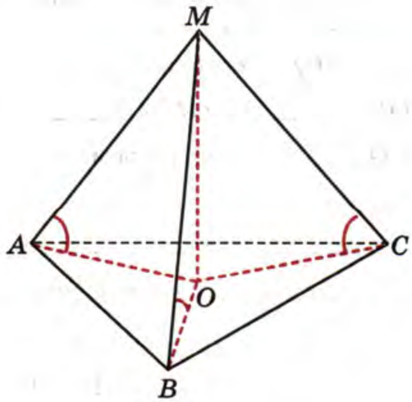
Ответ _________ см$^3$.

## 99

В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник со сторонами 10, 10 и 12 см. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Решение.

Пусть $MABC$ — данная пирамида, отрезок $MO$ — ее высота. Тогда $\angle MAO =$ _____________ = _____________ = _______ ________________________________ треугольники $MAO$, $MBO$ и _________ равны по



______ ($MO$ — ______________) и ______________

углу, поэтому $OA=$ ______ $=$ ______, а значит, точка $O$ — центр ______

______________________________________________

$R=OA$ — ее радиус.

Искомый объем ______________ вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot$ ______. Площадь треугольника $ABC$ находим по формуле Герона:

$S_{ABC}=\sqrt{p\cdot \_\_\_\_\cdot \_\_\_\_\cdot \_\_\_\_}=$ ______________ $=$ ______ (см²).

Далее найдем $R$, воспользовавшись формулой $R=(abc):$ ______. Получаем $R=$ ______ см.

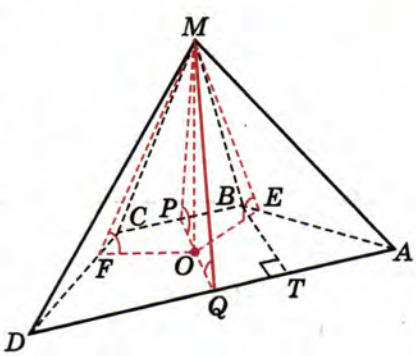
Из ______________ треугольника $MAO$ находим ______

$MO=R\cdot$ __________ $=$ ______ (см).

Итак, $V=$ ______________ $=$ ______________ $=$ ______ (см³).

Ответ. ______ см³.

## 100




В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом в 30°. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 60°, высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.

Решение.

Пусть $MABCD$ — данная пирамида, отрезок $MO$ — ее высота, $ME$, $MP$, $MF$, $MQ$ —высоты боковых граней. Тогда $OE\perp$ ______, $OP\perp$ ______, $OF\perp$ ______, $OQ\perp$ ______ (по теореме о ______________

______________), и, следовательно, $\angle MEO=$ ______ $=$

$=$ ______ $=$ ______ $=$ ______ (как ______________ углы ______

______ углов между ______________________

______). ______________ треугольники $MOE$, $MOP$,

______ и ______ равны по катету ($MO$ — ______________) и

______, поэтому $OE =$ ______ $=$ ______ $=$

$=$ ______ . Отсюда следует, что окружность с центром $O$ радиуса ______ является ______

Из ______ треугольника $MOP$ находим: $OP = MO \cdot$ ______ $=$ ______ $=$ ____ (см).

Пусть $BT$ — высота трапеции, тогда $BT =$ ______ $= 2 \cdot$ ____ $= 6$ (см). Из ______ треугольника $ABT$, в котором $\angle A =$ ______ , находим: $AB = 2 \cdot$ ______ $= 12$ см.

Так как в равнобедренную трапецию $ABCD$ можно вписать ______ , то $BC + AD = 2 \cdot$ ______ $= 24$ (см). Следовательно,

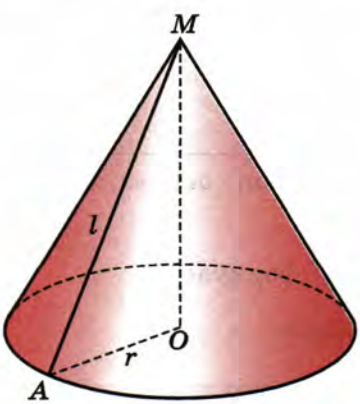
$S_{ABCD} =$ ______ $\cdot BT =$ ______ $\cdot$ ______ $=$ ______ (см$^2$),

$V_{MABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot$ ______ $=$ ______ $=$ ______ (см$^3$).

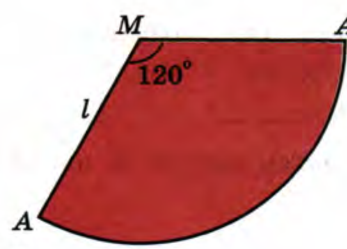
Ответ. ______ см$^3$.

## 101

Угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120°, а площадь боковой поверхности конуса равна $24\pi$. Найдите объем конуса.




а)




б)

**Решение.**

Данный конус с вершиной $M$ и высотой $MO$ изображен на рисунке *а*, развертка его боковой поверхности — на рисунке *б*. Пусть образующая конуса равна $l$, а радиус основания равен $r$. Тогда по

____________ $S_{бок} = \pi$ ______ $= 24\pi$, откуда $rl =$ ______. С другой стороны,

$S_{бок} = S_{развертки} = \frac{\pi}{360°} \cdot$ __________ $=$ __________ $l^2 = 24\pi$. Отсюда получаем:

$l =$ ________, $r = 24 :$ ________ $=$ ________

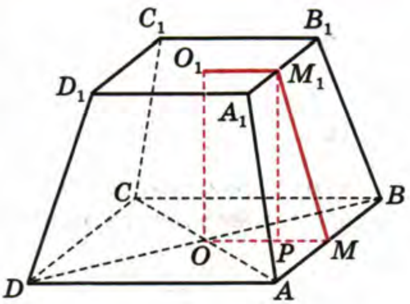
Из ________________________ треугольника $MOA$ находим: $MO =$
$= \sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_\_} =$ ______ . Объем $V$ конуса вычисляем

по формуле $V =$ __________ $=$ __________ $=$ ________

**Ответ.** ____________________

## 102

В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 3 см и 6 см, апофема пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. Найдите объем усеченной пирамиды.




**Решение.**

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ —данная правильная четырехугольная усеченная пирамида, тогда ее основаниями являются

________________________ $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$,

отрезок $OO_1$, соединяющий центры оснований — ____________________
а отрезок $MM_1$, соединяющий середины сторон оснований $AB$ и $A_1B_1$,— ______________________________

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \_\_\_\_\_\_ (S_1 + \_\_\_\_\_\_),$$

где $h$ — ____________________________, $S$ и ____________________________

Так как $AB = 6$ см, $A_1B_1 = 3$ см, то $S =$ ______________, $S_1 =$ ______________

Для нахождения высоты пирамиды рассмотрим четырехугольник $OO_1M_1M$, который является ______________________________

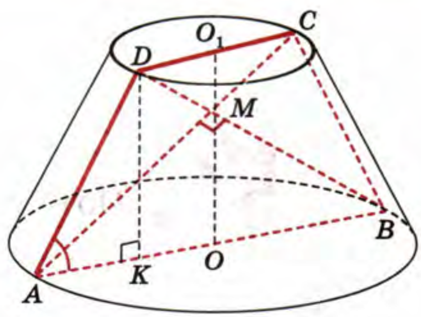
Пусть $M_1P \parallel OO_1$, тогда $MP =$ _______ $- M_1O_1 =$ ____________ $=$ ___________ и из ____________________ треугольника $MPM_1$ находим: $MP =$
$= \sqrt{\qquad\qquad\qquad} =$ ______________ $=$ ________ $=$ ________ (см).

Следовательно, $OO_1 =$ ________ см.

Итак, $V =$ ________________________________________ $=$ ________ (см³).

**Ответ.** ________ см³.

## 103




В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью большего основания угол в 60° и равна 4 см. Найдите объем усеченного конуса.

**Решение.**

Пусть точки $O$ и $O_1$ — центры оснований данного усеченного конуса, ________________________ трапеция $ABCD$ — осевое сечение, $M$ — точка пересечения его диагоналей. Тогда $\angle DAB$ — это угол, который составляет образующая $AD$ конуса с плоскостью большего основания, т. е. $\angle DAB =$ ______, $AO = r$ и $DO_1 = r_1$ — радиусы оснований усеченного конуса. Поскольку $\angle AMB =$ ______, то $\angle MAB =$ $=$ __________ $=$ ______. Поэтому в треугольнике $ADC$ имеем $AD = 4$ см, $\angle ACD =$ __________ $=$ ______, $\angle DAC =$ ____________ $=$ ______. По теореме ____________ $\frac{AD}{\sin \angle DCA} =$ ____________, откуда получаем: $CD =$ ____ $=$
$=$ ____________ $=$ ______________ (см), а $r_1 = \frac{1}{2}$ ______ $=$ __________ (см).

В треугольнике $ABC$ $BC =$ ______ см, $\angle A =$ ______, $\angle B =$ ______, а $\angle C =$ $= 180° -$ ____________ $=$ ______. По ______________________ $\frac{AB}{\sin 75°} =$

= ________, откуда находим: $AB =$ ________________ = ______________,

а $r = \frac{1}{2}$ _____ = ________________

Проведем высоту $DK$ трапеции, она является высотой __________

______________. Из ____________________ треугольника $ADK$

находим: $DK =$ ___________ = __________ = ________ (см), т. е. высота $h$

усеченного конуса равна __________

Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3} h \cdot (S + S_1 +$ ________), где $S$ и $S_1$ —

__________________________. Итак, $V =$ __________ $(\pi r^2 +$ ____ $+$ _____$) =$

= ____________________________________________ = __________________ =

= ________________ = ____________ (см$^3$).

Ответ. ____________ см$^3$.

## § 4 Объем шара и площадь сферы

**104**

Найдите отношение объемов шара и цилиндра, если высота цилиндра равна его диаметру, а радиус шара равен радиусу цилиндра.

Решение.

Пусть $r$ — радиус цилиндра, тогда его высота равна _____, а радиус шара равен $r$. Следовательно, $V_{\text{цил}} =$ _______________ = __________,

$V_{\text{шара}} =$ __________ и $\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{цил}}} =$ __________ = ______

Ответ. _______________________

**105**

Шар и цилиндр имеют равные объемы, причем радиус шара равен $\frac{3}{5}$ высоты цилиндра. Найдите отношение радиусов шара и цилиндра.

Решение.

Объемы данных тел вычисляются по формулам $V_{\text{шара}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot R^3$, $V_{\text{цил}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot h$, где $R$ — ________________, $r$ — ____________________________________________, $h$ — ________________

Так как по условию объемы шара и цилиндра равны, то ________ = = ________, откуда $\frac{4}{3}R^3 =$ ________. Поскольку по условию $R = \frac{3}{5}h$, то $h =$ ____________, и поэтому $\frac{4}{3}R^3 =$ ____________. Отсюда получим $\frac{R^2}{r^2} =$ ______, т. е. $\frac{R}{r} =$ ______

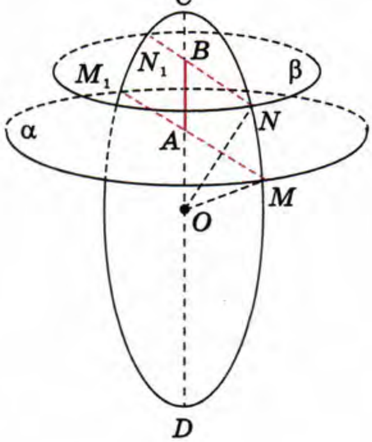
Ответ. ____________________

## 106

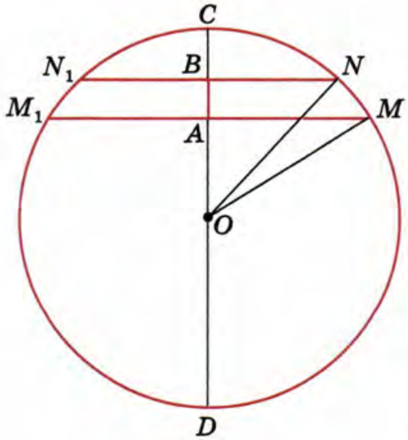
Расстояние между двумя плоскостями, перпендикулярными диаметру шара и расположенными по одну сторону от его центра, равно 1 см, радиусы сечений равны $3\sqrt{3}$ см и $4\sqrt{2}$ см. Найдите объем шарового слоя, заключенного между этими плоскостями.

Решение.

Пусть шар с центром $O$ пересечен плоскостями $\alpha$ и $\beta$, перпендикулярными его диаметру $CD$, $A$ и $B$ — точки пересечения диаметра $CD$ этими плоскостями (см. рис. *а*). Тогда $AB = 1$, а объем слоя, т. е. части



а)



б)

шара, заключенной между этими плоскостями, равен разности объемов двух шаровых сегментов, один из которых имеет высоту $AC$, а другой — ______

Так как объем шарового сегмента вычисляется по формуле $V_{\text{сегм}}=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)$, где $R$ — ____________________, $h$ — ________________ __________________, то необходимо найти $R$ и высоты $h_1=AC$ и $h_2=BC$.

Рассмотрим сечение шара плоскостью, проходящей через диаметр $CD$. Эта плоскость пересекает основания указанных шаровых сегментов по их диаметрам $MM_1$ и $NN_1$ (см. рис. *б*). В ____________________ треугольниках $OAM$ и $OBN$ имеем: $OM=ON=$ ______, $AM=$ ____________, $BN=$ ______________. Пусть $OA=x$, тогда $OB=$ __________

По теореме Пифагора $R^2=x^2+$ ______, $R^2=$ ________ $+27$. Отсюда получаем $x^2+32=(1+x)^2+27$, или $x^2+32=$ ______________________, и, следовательно, $x=OA=$ __________

Далее, $R=\sqrt{x^2+\_\_\_\_\_\_}=\sqrt{\_\_\_\_\_\_}=$ ______ (см), $h_1=AC=OC-$ ______ $=$ $=$ ________ $-$ ________ $=4$ см, $h_2=BC=AC-$ ______ $=$ ________ $-$ ________ $=$ $=$ ________

Таким образом, $V_{\text{слоя}}=\pi h_1^2\left(R-\frac{1}{3}h_1\right)-$ ____________________________ $=$ $=$ ______________________________ $=$ ______________________ $=$ ________ (см$^3$).

Ответ ________ см$^3$.

## СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

| Номера пунктов учебника | Тема | Номера задач тетради |
|---|---|---|
| 46, 47 | Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора | 1—16 |
| 48 | Связь между координатами векторов и координатами точек | 17—21 |
| 49 | Простейшие задачи в координатах | 22—24 |
| 50, 51 | Угол между векторами. Скалярное произведение векторов | 25—27 |
| 52 | Вычисление углов между прямыми и плоскостями | 28—30 |
| 54—57 | Центральная симметрия. Осевая симметрия. Зеркальная симметрия. Параллельный перенос | 31—34 |
| 59 | Понятие цилиндра | 35—38 |
| 60 | Площадь поверхности цилиндра | 39—45 |
| 61 | Понятие конуса | 46, 47 |
| 62 | Площадь поверхности конуса | 48—53 |
| 63 | Усеченный конус | 54, 55 |
| 64 | Сфера и шар | 56, 57 |
| 65 | Уравнение сферы | 58—63 |
| 66 | Взаимное расположение сферы и плоскости | 64—72 |
| 67 | Касательная плоскость к сфере | 73—76 |
| 68 | Площадь сферы | 77—80 |
| | Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар | 81—88 |
| 74, 75 | Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда | 89—93 |
| 76 | Объем прямой призмы | 94 |
| 77 | Объем цилиндра | 95 |
| 79 | Объем наклонной призмы | 96—98 |
| 80 | Объем пирамиды | 99—102 |
| 81 | Объем конуса | 103 |
| 82 | Объем шара | 104, 105 |
| 83 | Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора | 106 |

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

**Бутузов** Валентин Федорович
**Глазков** Юрий Александрович
**Юдина** Ирина Игоревна

# ГЕОМЕТРИЯ

**Рабочая тетрадь**

## 11 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художники *Е. В. Соганова, О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *В. В. Брагина*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технические редакторы *Е. А. Сиротинская, Л. В. Марухно*
Корректоры *И. А. Григалашвили, Н. И. Новикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.03.13. Формат $70\times100^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,52. Тираж 17 000 экз. Заказ № 6734.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Тульская типография» ОАО «Издательство «Высшая школа».
Россия, 300600, г. Тула, пр. Ленина, д. 109.