ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК

ЧАСТЬ 1.
РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ
ЧАСТЬ 2.
Решения сборника задач
в электронном виде на www.legionr.ru

Подготовка к ЕГЭ-2014

ЛЕГИОН

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *О. Б. Кожевников* — к.ф.-м.н., доцент
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России.

Авторский коллектив:
Авилов Н. И., Войта Е. А., Дерезин С. В., Иванов С. О., Казьмин И. А., Коннова Е. Г., Корянов А. Г., Ольховая Л. С., Ольховой А. Ф., Прокофьев А. А., Резникова Н. М., Саакян Г. Р., Ханин Д. И.

М34 **Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014** : учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 240 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-9966-0440-1

Данный решебник поможет выпускнику быстро освоить весь необходимый материал и успешно подготовиться к ЕГЭ по математике. Он состоит из двух частей.

Часть I — настоящее пособие. Оно содержит решения всех вариантов учебно-тренировочных тестов пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова, за исключением решения варианта, представленного в упомянутой выше книге.

Часть II — решения сборника задач, которые размещены в **электронном виде** на сайте издательства www.legionr.ru в свободном доступе (бесплатно).

Пособие является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**, включающего такие книги, как «Математика. ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты», «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников“» (части 1 и 2) и др.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства http://forum.legionr.ru.

Следите за дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства http://legionr.ru в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ. (Доступ к материалам свободный.)

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0440-1

Оглавление

2. Зак. № 176

Решения вариантов тестов

Решение варианта 1

B1. Всего на теплоходе $860 + 33 = 893$ человека. Так как $\frac{893}{60} = 14\frac{53}{60}$, то требуется 15 шлюпок.

Ответ: 15.

B2. По рисунку определяем, что цена была наименьшей 24 января.

Ответ: 24.

B3. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC$ (см. рис. 1). $BH = 10 - 4 = 6$, $AC = 6 - 1 = 5$.

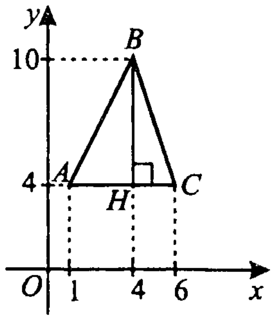


Рис. 1.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15.$

Ответ: 15.

B4. В случае выбора тарифного плана «Вера» клиент заплатит
$2000 + 5 \cdot 100 = 2500$ (рублей);
в случае выбора тарифа «Надежда» — $600 + 3 \cdot 700 = 2700$ (рублей);
в случае выбора тарифа «Любовь» — $50 + 2{,}5 \cdot 950 = 2425$ (рублей).

По наиболее выгодному тарифу клиент заплатит 2425 рублей.

Ответ: 2425.

B5. $11^{x-10} = 11 \Leftrightarrow x - 10 = 1 \Leftrightarrow x = 11.$

Ответ: 11.

B6. По условию $ABCD$ — трапеция (см. рис. 2), значит, $\angle A + \angle B = 180°$; $\angle B = 180° - \angle A$. $\cos\angle B = \cos(180° - \angle A) = -\cos\angle A =$
$= -\sqrt{1-\sin^2\angle A} = -\sqrt{1-\frac{21}{25}} = -\frac{2}{5} = -0{,}4.$

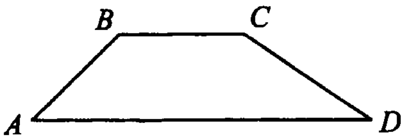


Рис. 2.

Ответ: $-0{,}4$.

B7. $\log_2 1{,}6 + \log_2 10 = \log_2(1{,}6 \cdot 10) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$.

Ответ: 4.

B8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, и на промежутках, где функция возрастает, производная положительна. Укажем точки, принадлежащие промежуткам возрастания. Итак, это точки x_1, x_2, x_5, x_6, x_9, x_{10}. Всего этих точек 6.

Ответ: 6.

B9. По теореме Пифагора гипотенуза треугольника в основании призмы равна $\sqrt{9^2+12^2} = 15$. Периметр этого треугольника равен $9 + 12 + 15 = 36$, поэтому площадь боковой поверхности призмы (равная произведению периметра основания на высоту) равна $36 \cdot 10 = 360$. Площадь основания равна $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (половина произведения катетов). Площадь всей поверхности равна $360 + 54 \cdot 2 = 468$.

Ответ: 468.

B10. Всего на конференцию приехали 20 учёных, из них 8 учёных из России. Вероятность указанного события равна $\frac{8}{20} = 0{,}4$, так как все учёные имеют равную вероятность оказаться третьим.

Ответ: 0,4.

B11. По условию цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Значит, в основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной, равной $a = 2r$, где r — радиус основания цилиндра.
$a = 2 \cdot 5 = 10$.

Объём прямоугольного параллелепипеда найдём по формуле
$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$, где h — высота параллелепипеда.
$V = 10^2 \cdot 5 = 500$.

Ответ: 500.

B12. По условию $pq \geqslant 315$; $p(300 - 60p) \geqslant 315$; $p(20 - 4p) \geqslant 21$; $4p^2 - 20p + 21 \leqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $p_1 = 1{,}5$, $p_2 = 3{,}5$. Решение этого неравенства — отрезок $[1{,}5; 3{,}5]$. Искомый максимальный уровень цены составляет 3,5 тыс. руб.

Ответ: 3,5.

B13. Автобус, выехавший из B, проехал $270 - 140 = 130$ (км). Его скорость равна $130 : 2{,}5 = 52$ (км/ч).

Ответ: 52.

B14. 1) $y' = -e^{x+10} + (10 - x)e^{x+10} = e^{x+10}(-1 + 10 - x) = e^{x+10}(9 - x)$.
2) Найдём возможные точки экстремума: $y' = 0 \Rightarrow 9 - x = 0,\ x = 9$.
3) При $x < 9$ $y' > 0$, а при $x > 9$ $y' < 0$, значит, $x = 9$ — точка максимума исходной функции.

Ответ: 9.

C1. а) $12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}$, $\left(\frac{12}{3}\right)^{\sin x} = 4^{\cos x}$, $4^{\sin x} = 4^{\cos x}$,

$\sin x = \cos x$, $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

б) Выполним отбор корней на отрезке $\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$.

$7\pi \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant \frac{17\pi}{2}$, $k \in Z$, $7 \leqslant \frac{1}{4} + k \leqslant \frac{17}{2}$, $6\frac{3}{4} \leqslant k \leqslant 8\frac{1}{4}$, $k = 7$, $k = 8$.

При $k = 7$ $x = \frac{\pi}{4} + 7\pi = \frac{29\pi}{4}$.

При $k = 8$ $x = \frac{\pi}{4} + 8\pi = \frac{33\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, б) $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{33\pi}{4}$.

C2. По условию пирамида $SABCD$ правильная, значит $ABCD$ — квадрат, SO — высота, O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Обозначим через K середину ребра SB. KD пересекает SO в точке T. Проведём через точку T EF параллельно AC, получим $KEDF$ — искомое сечение. Задача сводится к нахождению площади четырёхугольника $KEDF$ (см.

рис. 3). $BD = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$. Так как $DB \perp SAC$, то диагонали FE и KD четырёхугольника $KEDF$ перпендикулярны.

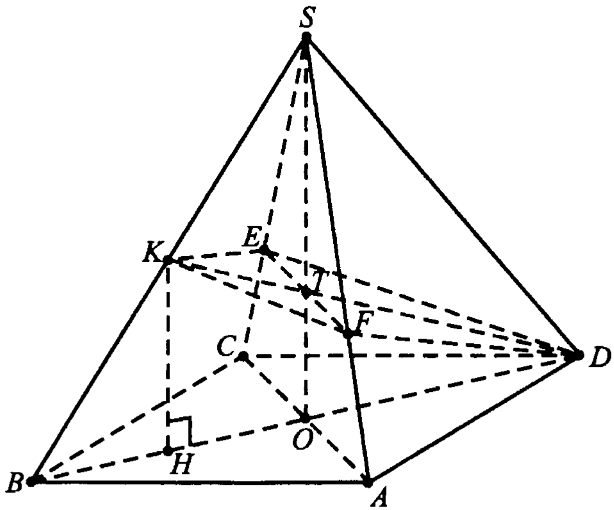


Рис. 3.

$$SO^2 = SD^2 - OD^2 = 24^2 - (6\sqrt{2})^2 = 576 - 72 = 504,\ SO = 6\sqrt{14}.$$

SO и KD — медианы $\triangle BSD$, $ST = \frac{2}{3}SO = 4\sqrt{14}$. В треугольниках ASC и FSE $\angle SAC = \angle SFE$ как соответственные при $AC \parallel EF$ и секущей SA, $\angle S$ общий, значит $\triangle ASC \sim \triangle FSE$ с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$.

$$EF = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 12\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

$$KD^2 = KH^2 + DH^2 = \left(\frac{SO}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}BD\right)^2 = (3\sqrt{14})^2 + \left(\frac{3 \cdot 12\sqrt{2}}{4}\right)^2 =$$
$$= 126 + 81 \cdot 2 = 288,\ KD = 12\sqrt{2}.$$

$$S_{KEDF} = \frac{1}{2} \cdot KD \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 96.$$

Ответ: 96.

C3. $$\begin{cases} \log_{3-x} \dfrac{x+5}{(x-3)^4} \geqslant -4, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{14x^2 + 5x - 15}{x-3} \leqslant 5. \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+5>0, \\ x\neq 3, \\ 3-x>0, \\ 3-x\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5, \\ x<3, \\ x\neq 2; \end{cases}$ $x\in(-5;2)\cup(2;3)$.

1) $\log_{3-x}\dfrac{x+5}{(x-3)^4}\geqslant -4$, $\log_{3-x}(x+5)-4\log_{3-x}(3-x)+4\log_{3-x}(3-x)\geqslant 0$, $\log_{3-x}(x+5)\geqslant 0$, $\log_{3-x}(x+5)-\log_{3-x}1\geqslant 0$, $(3-x-1)(x+5-1)\geqslant 0$, $(x-2)(x+4)\leqslant 0$, $-4\leqslant x\leqslant 2$. Учитывая ОДЗ, $x\in[-4;2)$.

2) $x^3+6x^2+\dfrac{14x^2+5x-15}{x-3}\leqslant 5$, $x^3+6x^2+\dfrac{14x^2}{x-3}\leqslant 0$,

$\dfrac{x^4-3x^3+6x^3-18x^2+14x^2}{x-3}\leqslant 0$, $\dfrac{x^4+3x^3-4x^2}{x-3}\leqslant 0$,

$\dfrac{x^2(x^2+3x-4)}{x-3}\leqslant 0$, $\dfrac{x^2(x-1)(x+4)}{x-3}\leqslant 0$

$x\in(-\infty;-4]\cup\{0\}\cup[1;3)$ (см. рис. 4). Учитывая ОДЗ, $x\in(-5;-4]\cup\{0\}\cup[1;2)\cup(2;3)$.

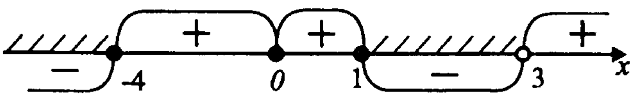


Рис. 4.

3) Решение исходной системы (см. рис. 5)

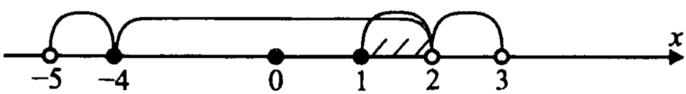


Рис. 5.

$x\in\{-4;0\}\cup[1;2)$.

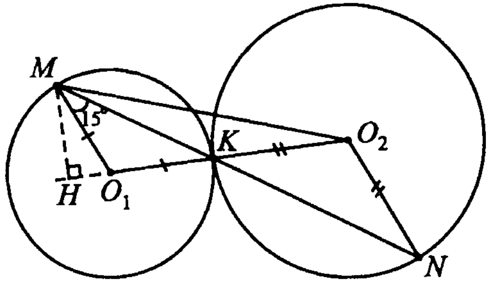
Ответ: $\{-4;0\}\cup[1;2)$.

С4. В зависимости от расположения окружностей могут представиться 2 случая (см. рис. 6). Тогда $S_{MNO_2}=S_{NKO_2}\pm S_{MKO_2}$.

1) Учитывая, что треугольники MO_1K и NO_2K равнобедренные и по условию $\angle KMO_1=15°$, получим: $\angle MO_1K=\angle NO_2K=150°$.

$S_{MKO_1}=\dfrac{1}{2}\cdot O_1M\cdot O_1K\cdot\sin\angle MO_1K=\dfrac{1}{2}\cdot O_1K\cdot MH$, где $MH\perp O_1K$.

Отсюда $MH=O_1K\cdot\sin\angle MO_1K=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$.



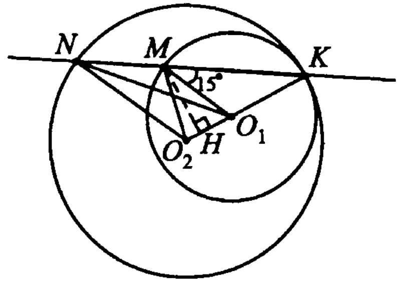


Рис. 6.

2) $S_{MKO_2} = \frac{1}{2} \cdot O_2K \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6.$

3) $S_{NKO_2} = \frac{1}{2} \cdot O_2K \cdot O_2N \cdot \sin \angle KO_2N = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 9.$

4) $S_{MNO_2} = 9 \pm 6,$
$S_{MNO_2} = 9 + 6 = 15$ или $S_{MNO_2} = 9 - 6 = 3.$

Ответ: 15 или 3.

С5. $\sqrt{-5-6x-x^2} + ax = 2a + 2$; $\sqrt{-5-6x-x^2} = 2a - ax + 2$. Рассмотрим две функции.

1) $y = \sqrt{-5-6x-x^2}$, $y \geqslant 0$. $y^2+x^2+6x+5=0$, $y^2+(x+3)^2 = 2^2$. График — полуокружность с центром в точке $(-3; 0)$ и радиусом 2.

2) $y = a(2-x)+2$ — семейство прямых, проходящих через точку $(2; 2)$. Построим графики (см. рис. 7).

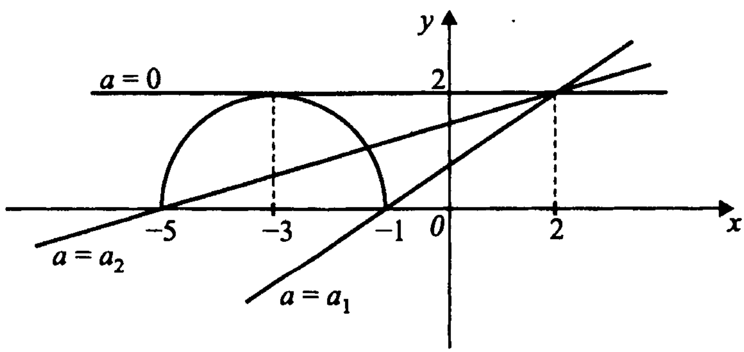


Рис. 7.

Уравнение имеет единственный корень, если графики имеют единственную общую точку.

Единственное решение при $a = 0$ (касание) или при $a \in [a_1; a_2)$.

При $a = a_1$ прямая $y = a(2 - x) + 2$ проходит через точку $(-1; 0)$: $0 = a_1 \cdot 3 + 2$, $a_1 = -\dfrac{2}{3}$.

При $a = a_2$ прямая $y = a(2 - x) + 2$ проходит через точку $(-5; 0)$: $0 = a_2 \cdot 7 + 2$, $a_2 = -\dfrac{2}{7}$.

Имеем $a \in \left[-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.

Ответ: $\left[-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.

С6. а) Очевидно, что если мы возьмём 11 единиц, то получим данное множество выписанных чисел.

б) Предположим, что такой набор существует. Тогда минимальное число в этом наборе равно 2, а сумма всех чисел равна 25. Тогда сумма всех чисел, за исключением одного минимального числа, должна быть равна $25 - 2 = 23$. Однако, 23 на доске не указано, и значит требуемого набора не существует.

в) Очевидно, что в искомый набор входит 7 как наименьшее число набора. Аналогично в набор входит 9, так как это число не может быть представлено как сумма семёрок, и по тем же самым причинам в исходный набор входит число 13, которое нельзя представить в виде суммы 7 и 9 в любом количестве.

На доске выписано число 16, равное $7 + 9$. Покажем, что 16 не входит в исходный набор. Действительно, если бы 16 входило в этот набор, то на доске необходимо было выписать число $32 = 7 + 9 + 16$, а оно не выписано. По тем же самым причинам в исходный набор не входят числа $20 = 7 + 13$ и $22 = 9 + 13$ ($20 + 7 + 9 = 36$, $22 + 7 + 9 = 38$, ни 36, ни 38 не выписаны на доске). Попутно заметим, что числа 7 и 9 в исходный набор входят по 1 разу, так как $7 + 7 = 14$ и $9 + 9 = 18$, ни 14, ни 18 не выписаны на доске. Если число 13 входит в набор 1 раз, то в набор должно входить число 26, иначе не получится сумма 39. Если 13 входит 2 раза, то оно должно входить и 3 раза, иначе мы не получили бы на доске число 39. Заметим, что ни одно из чисел, больших либо равных 27, не присутствует в исходном наборе, потому что $7 + 9 + 13 + 27 > 55$, а 55 — сумма всех чисел исходного набора. По той же причине число 26 не может входить в исходный набор более 1 раза. В завершении стоит отметить, что если исходный набор — это числа 7, 9, 13, 26 или 7, 9, 13, 13, 13, то на доске будут выписаны в точности заданные числа.

Ответ: а) 11 единиц; б) нет; в) 7, 9, 13, 26 или 7, 9, 13, 13, 13.

Решение варианта 2

В1. Так как $\frac{50}{6,3} = 7\frac{59}{63}$, то можно купить максимум 7 сырков.

Ответ: 7.

В2. Наименьшая среднесуточная влажность воздуха соответствует точке с наименьшей ординатой. По графику определяем: наименьшая ордината равна 71.

Ответ: 71.

В3. Данный треугольник ABC имеет высоту BH, равную 6, и основание AC, равное 8 (см. рис. 8)

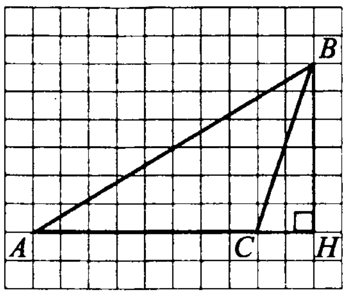


Рис. 8.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = 24.$$

Ответ: 24.

В4. Составим таблицу.

Наименование продуктов	**«Удача»**	**«Вкус»**	**«Высота»**
3 батона хлеба	$18 \cdot 3 = 54$	$20 \cdot 3 = 60$	$19 \cdot 3 = 57$
2 кг риса	$30 \cdot 2 = 60$	$32 \cdot 2 = 64$	$33 \cdot 2 = 66$
0,5 кг сыра	$270 : 2 = 135$	$256 : 2 = 128$	$250 : 2 = 125$
Стоимость покупки	249	252	248

Самая дешёвая покупка в магазине «Высота» — 248 рублей.

Ответ: 248.

B5. $x = 4\frac{4}{11} : \frac{3}{22}$,

$4\frac{4}{11} : \frac{3}{22} = \frac{48}{11} : \frac{3}{22} = \frac{48}{11} \cdot \frac{22}{3} = \frac{48 \cdot 22}{11 \cdot 3} = \frac{16 \cdot 2}{1} = 32$,
$x = 32$.

Ответ: 32.

B6. $\sin\angle ABD = \sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin\angle ABC = 0{,}4$.

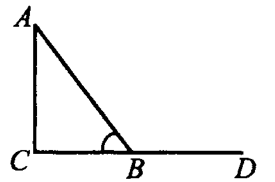


Рис. 9.

Ответ: 0,4.

B7. $3^{\sqrt{3}-1} \cdot 3^{3-\sqrt{3}} = 3^{(\sqrt{3}-1)+(3-\sqrt{3})} = 3^2 = 9$.

Ответ: 9.

B8. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox. Из треугольника ABC (см. рис. 10):

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{7}{5} = -1{,}4$.

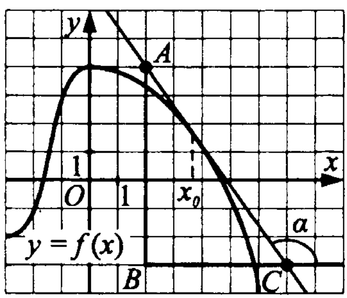


Рис. 10.

Ответ: −1,4.

B9. A_1C — диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4, 5, 6 (см. рис. 11). Найдём квадрат длины диагонали: $4^2 + 5^2 + 6^2 = 77$.

Ответ: 77.

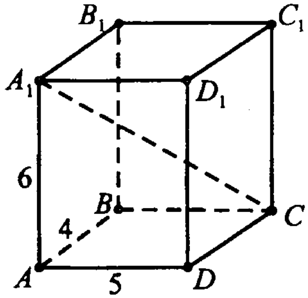


Рис. 11.

B10. Всего туристов — 20 человек. Так как за рейс забрасывают по 5 человек, то необходимо совершить 4 рейса. Вероятности туриста Н. полететь последним рейсом или любым другим рейсом равнозначны. Искомая вероятность равна $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

B11. По условию цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Значит, в основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной, равной двум радиусам окружности, лежащей в основании цилиндра.
Объём прямоугольного параллелепипеда найдём по формуле
$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$, $V = (2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 108$.

Ответ: 108.

B12. Подставим в формулу значения заданных величин.

$$100 = \frac{5 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5}{A}, \quad A = \frac{40}{100} = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4.

B13. За первые 1,5 часа автомобиль проехал $1{,}5 \cdot 40 = 60$ (км), за 2,5 часа — $2{,}5 \cdot 60 = 150$ (км), за оставшееся время $5 - (1{,}5 + 2{,}5) = 1$ (ч). — $1 \cdot 75 = 75$ (км). Итого, общее расстояние равно $60 + 150 + 75 = 285$ (км). Тогда $285 : 5 = 57$ (км/ч) и есть средняя скорость автомобиля на всём пути.

Ответ: 57.

B14. $y' = 3x^2 + 10x - 8$, $y' = 0$, $3x^2 + 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$

$-4 \in (-5; -2)$; $\frac{2}{3} \notin (-5; -2)$.

$y(-5) = (-5)^3 + 5 \cdot (-5)^2 - 8 \cdot (-5) + 1 = 41$;

$y(-4) = (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 1 = 49;$
$y(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) + 1 = 29.$
Из чисел 29, 41, 49 наибольшее число — 49.

Ответ: 49.

С1. а) $\left(64^{\cos x}\right)^{\sin x} = 4^{\frac{3\cos x}{2}}$, $4^{3\cos x \sin x} = 4^{\frac{3\cos x}{2}}$,

$3\cos x \sin x = \dfrac{3\cos x}{2}$, $6\cos x \sin x - 3\cos x = 0$,

$3\cos x(2\sin x - 1) = 0$,

1) $3\cos x = 0$, $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

2) $2\sin x - 1 = 0$, $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

б) Выполним отбор корней на отрезке $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (см. рис. 12): $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$.

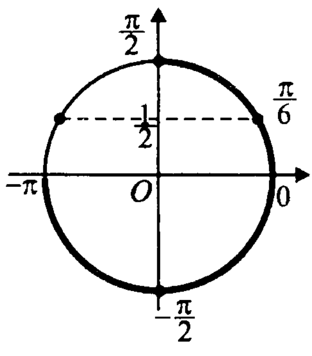


Рис. 12.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$, б) $\pm\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$.

С2. По условию пирамида $SABCD$ правильная, значит, $ABCD$ — квадрат, SO — высота, O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Построим сечение. Проведём через точку B прямую p параллельно AC. Прямая AD пересекает p в точке F. В плоскости ASD прямая FK пересекает SD в точке E. Так как пирамида симметрична относительно плоскости BSD, то точка N симметрична точке K. Сечение $BKEN$ искомое.

1) $NK \| AC, NK = \frac{2}{3}AC = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

2) В $\triangle BAF$ $\angle A = 90°$, $\angle F = 45° \Rightarrow AF = AB$, а так как $AB = AD$, то $AF = AD$. По условию $SK : KA = 2 : 1$, тогда SA и FE — медианы $\triangle SFD$ и $SE = ED = 2$ (см. рис. 13).

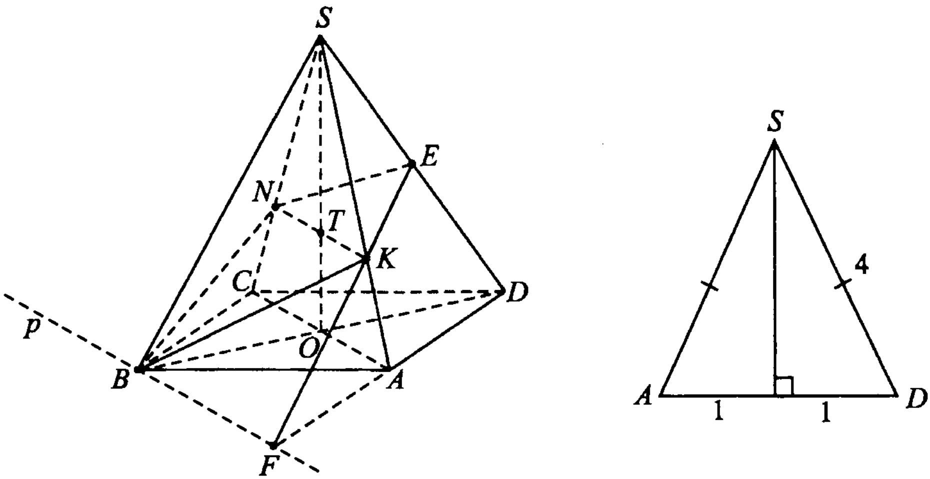


Рис. 13.

3) В $\triangle ASD$ $\cos\angle D = \frac{1}{4}$ (см. рис. 13).

4) В $\triangle EFD$ по теореме косинусов:

$$FE^2 = FD^2 + ED^2 - 2FD \cdot ED \cdot \cos D = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 16,$$

$FE = 4$, $KE = \frac{4}{3}$.

5) В $\triangle KSN$ и $\triangle ASC$ $\frac{SK}{SA} = \frac{SN}{SC}$, $\angle S$ общий, значит, $\triangle KSN \sim \triangle ASC$ с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. Из подобия следует:

$\angle SKN = \angle SAC \Rightarrow NK \| AC$ и $NK = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

6) В $\triangle KEN$ $EK = EN$, ET — медиана $\Rightarrow ET \perp KN$.

В $\triangle ETK$ $TE = \sqrt{KE^2 - KT^2} = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7) В $\triangle ABK$ по теореме косинусов:

$$BK^2 = AB^2 + AK^2 - 2AB \cdot AK \cdot \cos A = 2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \\ = \frac{36+16-12}{9} = \frac{40}{9}.$$

В $\triangle BTK$ $BT = \sqrt{BK^2 - KT^2} = \sqrt{\frac{40}{9} - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

8) $BE = BT + TE = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$.

9) $S_{BKEN} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot NK = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = \frac{8}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

С3. $\begin{cases} \log_{3-x}(9-x^2) \leqslant 1, \\ 2x + 7 + \dfrac{8x+29}{x^2+x-6} \geqslant -\dfrac{1}{x+3}. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} 3 - x > 0, \\ 3 - x \neq 1, \\ 9 - x^2 > 0, \\ x^2 + x - 6 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ x \neq 2, \\ |x| < 3; \end{cases}$ $x \in (-3; 2) \cup (2; 3)$.

1) $\log_{3-x}(9-x^2) - \log_{3-x}(3-x) \leqslant 0$, $(3-x-1)(9-x^2-3+x) \leqslant 0$, $(2-x)(x^2-x-6) \geqslant 0$, $(x-2)(x-3)(x+2) \leqslant 0$.

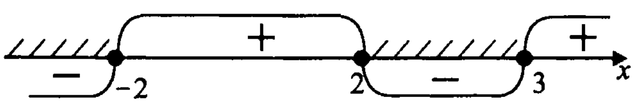


Рис. 14.

$x \in (-\infty; -2] \cup [2; 3]$ (см. рис. 14). Учитывая ОДЗ, $x \in (-3; -2] \cup (2; 3)$.

2) $2x + 7 + \frac{8x+29}{x^2+x-6} \geqslant -\frac{1}{x+3}$,

$$\frac{2x^3 + 2x^2 - 12x + 7x^2 + 7x - 42 + 8x + 29 + x - 2}{(x-2)(x+3)} \geqslant 0,$$

$$\frac{2x^3 + 9x^2 + 4x - 15}{(x-2)(x+3)} \geqslant 0, \quad \frac{(x+3)(x-1)(2x+5)}{(x-2)(x+3)} \geqslant 0,$$

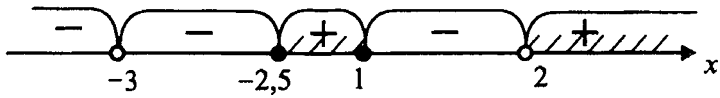


Рис. 15.

$x \in [-2{,}5; 1] \cup (2; +\infty)$ (см. рис. 15). Учитывая ОДЗ, $x \in [-2{,}5; 1] \cup (2; 3)$.

3) Решение исходной системы (см. рис. 16) $x \in [-2{,}5; -2] \cup (2; 3)$.

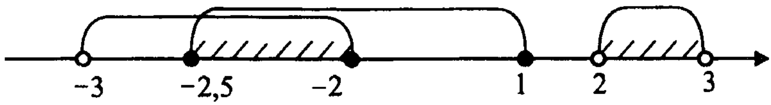


Рис. 16.

Ответ: $[-2{,}5; -2] \cup (2; 3)$.

С4. В зависимости от расположения окружностей могут представиться два случая (см. рис. 17). Тогда $S_{FEO_1} = S_{EPO_1} \pm S_{FPO_1}$.

1) Учитывая, что $\triangle PEO_2$ и $\triangle PFO_1$ равнобедренные и по условию $\angle PEO_2 = 30°$, получим: $\angle PO_2E = \angle PO_1F = 120°$.

2) $S_{\triangle FPO_1} = \frac{1}{2} FO_1 \cdot PO_1 \cdot \sin \angle PO_1F = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120° = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

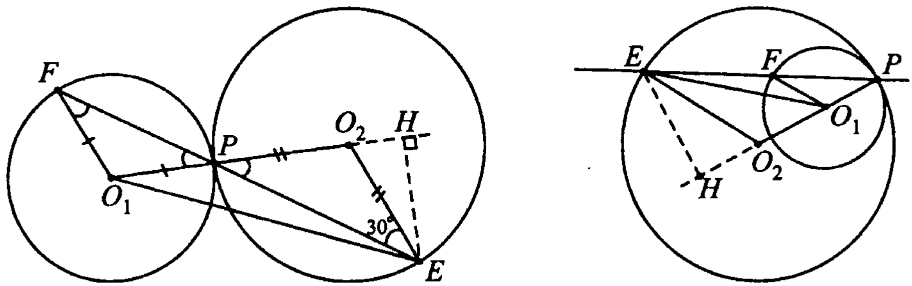


Рис. 17.

3) $\angle HO_2E = 180° - 120° = 60°$, $HE = O_2E \cdot \sin 60° = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

4) $S_{EPO_1} = \frac{1}{2} \cdot O_1P \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

5) $S_{FEO_1} = 18\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}$.

$S_{FEO_1} = 18\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 22\sqrt{3}$ или $S_{FEO_1} = 18\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$.

Ответ: $22\sqrt{3}$ или $14\sqrt{3}$.

С5. $12a + \sqrt{9+8x-x^2} = ax + 5$, $\sqrt{9+8x-x^2} = a(x-12) + 5$.
Рассмотрим две функции.

1) $y = \sqrt{9+8x-x^2}$, $y \geqslant 0$. $y^2 + x^2 - 8x - 9 = 0$, $(x-4)^2 + y^2 = 5^2$. График — полуокружность с центром в точке $(4; 0)$ и радиусом 5, лежащая в верхней полуплоскости.

2) $y = a(x-12) + 5$ — семейство прямых, проходящих через точку $(12; 5)$.

Построим графики (см. рис. 18). Уравнение имеет единственный корень, если графики имеют единственную общую точку.

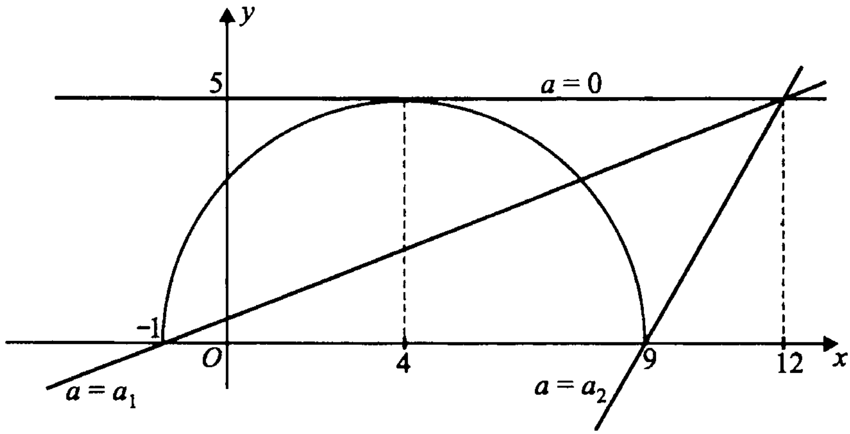


Рис. 18.

Единственное решение при $a = 0$ (касание) или при $a \in (a_1; a_2]$.

При $a = a_2$ прямая $y = a(x-12) + 5$ проходит через точку $(9; 0)$
$a(9-12) + 5 = 0, -3a = -5,\ a_2 = \dfrac{5}{3}$.

При $a = a_1$ прямая $y = a(x-12) + 5$ проходит через точку $(-1; 0)$
$a(-1-12) + 5 = 0,\ a_1 = \dfrac{5}{13}$.

При $a < 0$ и $a > a_2$ решений нет, при $a \in (0; a_1]$ есть два решения.

Имеем: $a \in \{0\} \cup \left(\dfrac{5}{13}; \dfrac{5}{3}\right]$.

Ответ: $\{0\} \cup \left(\dfrac{5}{13}; \dfrac{5}{3}\right]$.

С6. а) Введём обозначение $\alpha = 100a_3 + a_1$, $\beta = 100a_2 + a_0$, тогда $1\,743 = 10\alpha + \beta$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 9\,999$, $0 \leqslant \beta \leqslant 9\,999$, при этом α однозначно определяет значения a_3 и a_1, β — значения a_2 и a_0. Заметим, что

$0 \leqslant \alpha \leqslant 174$, всего 175 возможных значений, каждое из которых однозначно определяет значение β. Всего 175 способов.

б) Да. Рассмотрим, например, числа 1 740; 1 741; 1 742; 1 743; 1 744; 1 745; 1 746; 1 747; 1 748; 1 749. Для каждого из них $0 \leqslant \alpha \leqslant 174$, каждое α однозначно определяет значение β, 175 способов представления.

в) Среди чисел $0 \leqslant x \leqslant 9\,999$ найдётся ровно 10 требуемых чисел. Это только те числа, для которых $0 \leqslant \alpha \leqslant 174$, так как если $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma$, то найдётся $(\gamma + 1)$ способов выбора α. Ограничение $0 \leqslant x \leqslant 9\,999$ связано с тем, что при всех таких x при всех $\alpha \in [0; 9\,999]$ найдётся требуемое β.

Рассмотрим $x \geqslant 10\,000$. При $10\,000 \leqslant x \leqslant 100\,000$ вычтем из числа x слагаемое 10^3 несколько раз, чтобы получить число y, $9\,000 \leqslant y \leqslant 10\,000$. Для y существует не менее чем $(900 + 1)$ вариантов представления. Значит, для x существует тоже не менее 901 варианта представления (те же значения a_0, a_1, a_2, что и для y).

Заметим, что $x \leqslant 99\,000 + 9\,900 + 990 + 99 = 109\,989$. Рассмотрим $100\,000 < x \leqslant 109\,989$. При этом $x = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$. Пусть $b_i = 99 - a_i$, тогда $x = 109\,989 - b_3 \cdot 10^3 - b_2 \cdot 10^2 - b_1 \cdot 10 - b_0$.

Это число имеет 175 представлений, когда $b_3 \cdot 10^3 + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0$ имеет 175 представлений. Найдётся 10 решений (так как $b_3 \cdot 10^3 + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0 < 10\,000$).

Всего 20 решений.

Ответ: а) 175; б) да; в) 20.

Решение варианта 3

B1. Поезд находится в пути вечером 24 ч − 21 ч 40 мин = 2 ч 20 мин, а утром ещё 5 ч 10 мин. Всего будет потрачено времени
2 ч 20 мин + 5 ч 10 мин = 7 ч 30 мин = 7,5 ч.

Ответ: 7,5.

B2. Наибольшая среднесуточная скорость ветра соответствует точке с наибольшей ординатой. По графику определяем, что наибольшая ордината равна 20.

Ответ: 20.

B3. Найдём длины оснований и высоту трапеции $ABCD$ (см. рис. 19).

$AB = 3,\ \ CD = 7,\ \ BH = 9.\ \ S_{ABCD} = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot BH,$

$S_{ABCD} = \dfrac{3 + 7}{2} \cdot 9 = 45.$

Ответ: 45.

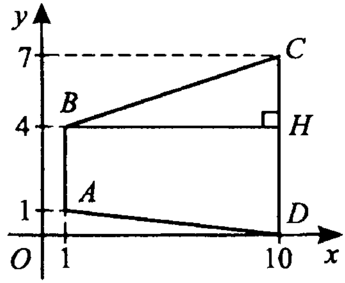


Рис. 19.

B4. Составим таблицу, используя исходные данные и формулу
$R = \dfrac{4S + 2C + 3F + 2Q + D}{10}$.

Модель	Рейтинг (R)
А	$\frac{1}{10}(4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1) = 3{,}6$
Б	$\frac{1}{10}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3) = 3{,}9$
В	$\frac{1}{10}(4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1) = 3{,}8$

Наивысший рейтинг среди моделей автомашин равен 3,9.

Ответ: 3,9.

B5. $x = 5\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{16}{3} \cdot 3 = \frac{16 \cdot 3}{3} = 16.$

Ответ: 16.

B6. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$; $\angle C = 180° - \angle B - \angle A =$
$= 180° - 2 \cdot \angle ABD - \angle A = 180° - 2 \cdot 7° - 94° = 72°.$

Ответ: 72.

B7. $(2x^4)^2 : 2x^8 = 2^2 \cdot (x^4)^2 : 2x^8 = 4x^8 : 2x^8 = 2.$

Ответ: 2.

B8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t^2 - 5t$, её скорость $v(t) = x'(t) = 6t^2 + 2t - 5$. $v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 5 = 99$ (м/с).

Ответ: 99.

B9. $S_{б.} = 2\pi r h$, где r — радиус окружности основания, h — высота цилиндра (см. рис. 20). $2r = d$, тогда $S_{б.} = \pi d h$; $h = \frac{S_{б.}}{\pi d}$; $h = \frac{27\pi}{\pi \cdot 6} = 4{,}5.$

Ответ: 4,5.

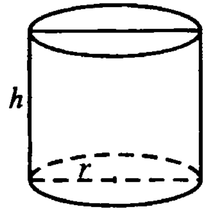


Рис. 20.

B10. В чемпионате участвуют 24 команды. Так как их разделили на 4 группы по 6 команд, то вероятности команды России попасть в каждую из четырёх групп равнозначны. Искомая вероятность равна $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

B11. Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$, а объём цилиндра по формуле $V = Sh$ (S — площадь основания, h — высота). Так как основание и высота у цилиндра и у конуса общие, то объём конуса составляет $\frac{1}{3}$ от объёма цилиндра и равен $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$.

Ответ: 20.

B12. По условию $I \leqslant 15$; $\frac{U}{R} \leqslant 15$; $\frac{240}{R} \leqslant 15$; $R \geqslant \frac{240}{15}$; $R \geqslant 16$. Искомое минимальное сопротивление равно 16 Ом.

Ответ: 16.

B13. Сначала цена куртки была 3200 рублей. В январе она снизилась на 4%, то есть куртка стала стоить $3200 - 3200 \cdot 0{,}04 = 3072$ (руб.). В феврале цена поднялась на 25%, куртка стала стоить
$3072 + 3072 \cdot 0{,}25 = 3840$ (руб.).

Ответ: 3840.

B14. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:
$y(-1) = 15 \cdot 1 - (-1)^3 = 15 + 1 = 16$, $y(10) = 15 \cdot 100 - 10^3 = 500$.

2) Найдём производную: $y' = 15 \cdot 2x - 3x^2 = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x)$.

3) Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю: $3x(10 - x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$.

4) Значение функции при $x = 10$ подсчитано в пункте 1), при $x = 0$ значение функции равно 0.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее: $y(10) = 500$.

Ответ: 500.

C1. а) $2\cos^2 x = -\cos x$; $2\cos^2 x + \cos x = 0$; $\cos x(2\cos x + 1) = 0$;

$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

$2\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

б) Найдите корни на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Из рисунка 21 видно, что это корни $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}; -\frac{5\pi}{2}$.

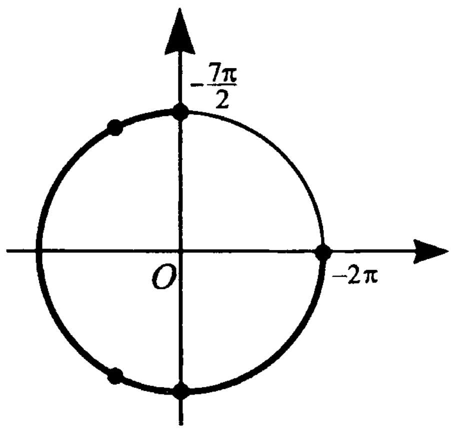


Рис. 21.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, k, n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}; -\frac{5\pi}{2}$.

C2. $CC_1 = 7,\ CK : KC_1 = 2 : 5$, тогда $CK = 2,\ KC_1 = 5$ (см. рис. 22).

Противоположные грани параллельны, поэтому стороны сечения $KD_1 = BP$ и $BK \parallel D_1P$, значит, $A_1P = KC = 2,\ PA = 5$.
$KB^2 = KC^2 + CB^2 = 11^2 + 2^2 = 125$.
$BP^2 = BA^2 + AP^2 = 10^2 + 5^2 = 125$.

$KB = BP \Rightarrow KBPD_1$ — ромб, его площадь $S = \frac{KP \cdot BD_1}{2}$.

$BD_1 = \sqrt{11^2 + 10^2 + 7^2} = \sqrt{270},\ KP = \sqrt{11^2 + 10^2 + 3^2} = \sqrt{230}$.

$S = \frac{\sqrt{270} \cdot \sqrt{230}}{2} = 15\sqrt{69}$.

Ответ: $15\sqrt{69}$.

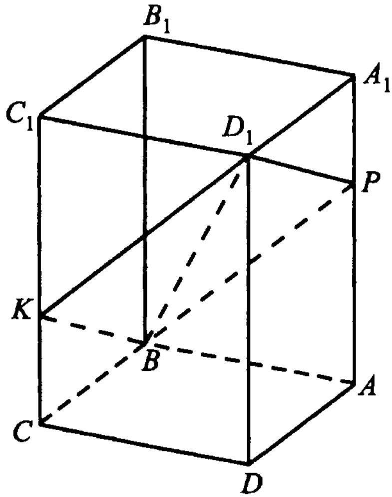


Рис. 22.

С3. Решим каждое неравенство системы по отдельности.

1) $\log_{8-x}\dfrac{-9-x}{x-8} \leqslant -1$; $\log_{8-x}\dfrac{9+x}{8-x} \leqslant -1$;

$\log_{8-x}(9+x) - 1 \leqslant -1$; $\log_{8-x}(9+x) \leqslant 0$;

$$\begin{cases} (8-x-1)(9+x-1) \leqslant 0, \\ 8-x>0, \\ 8-x \neq 1, \\ 9+x>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (7-x)(8+x) \leqslant 0, \\ x<8, \\ x \neq 7, \\ x>-9; \end{cases}$$

$x \in (-9; -8] \cup (7; 8)$ (см. рис. 23).

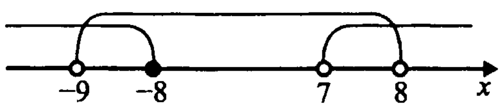


Рис. 23.

2) $\dfrac{2x^2-13x-46}{2x-15} + \dfrac{x^2+11x+8}{x+10} \geqslant 2x+2.$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-13x-46 & 2x-15 \\ \cline{2-2} \underline{2x^2-15x} & x+1 \\ 2x-46 & \\ \underline{2x-15} & \\ -31 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+11x\quad+8 & x+10 \\ \cline{2-2} \underline{x^2+10x}\qquad & \;x+1 \\ x\quad+8 & \\ \underline{x+10} & \\ -2 & \end{array}$$

$$x+1-\frac{31}{2x-15}+x+1-\frac{2}{x+10}\geqslant 2x+2,$$

$$\frac{31}{2x-15}+\frac{2}{x+10}\leqslant 0,\quad \frac{31x+310+4x-30}{(2x-15)(x+10)}\leqslant 0,$$

$$\frac{35x+280}{(2x-15)(x+10)}\leqslant 0,\quad \frac{x+8}{(2x-15)(x+10)}\leqslant 0.$$

$x\in(-\infty;-10)\cup[-8;7{,}5)$ (см. рис. 24).

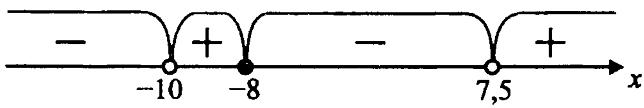


Рис. 24.

3) Решение данной системы $\{-8\}\cup(7;7{,}5)$.

Ответ: $\{-8\}\cup(7;7{,}5)$.

С4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке P, поэтому точки P, O_1 и O_2 лежат на одной прямой, $O_1P=22$, $O_2P=42$, тогда $O_1O_2=20$ (см. рис. 25).

По свойству параллельных прямых из того, что $\angle KO_1O_2=120°$, $O_2L\|O_1K\Rightarrow LO_2R=120°$. $\angle LO_2P=\angle KO_1P=60°$.

Проведём $KH\perp PO_1$ и $LT\perp PO_1$. Из ΔKHO_1 и ΔLO_2T $\angle HKO_1=\angle TLO_2=30°$, значит, $HO_1=0{,}5\cdot KO_1=11$, $TO_2=0{,}5\cdot LO_2=21$, $TO_1=21-20=1$, $HT=11-1=10$.

$$KH=KO_1\cdot\sin 60°=22\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=11\sqrt{3},\ LT=42\cdot\sin 60°=21\sqrt{3}.$$

Проведём $KN\perp LT$, $KN=HT=10$, $LN=LT-KH=10\sqrt{3}$, $KL=\sqrt{KN^2+NL^2}=\sqrt{10^2+(10\sqrt{3})^2}=20$.

Разберём случай, когда радиусы проведены по разные стороны от прямой PO_2. В этом случае искомым является расстояние KL_1.

$O_2R=O_2T=21$, $RL_1=TL=21\sqrt{3}$,
$KL_1{}^2=(KH+RL_1)^2+HR^2=$

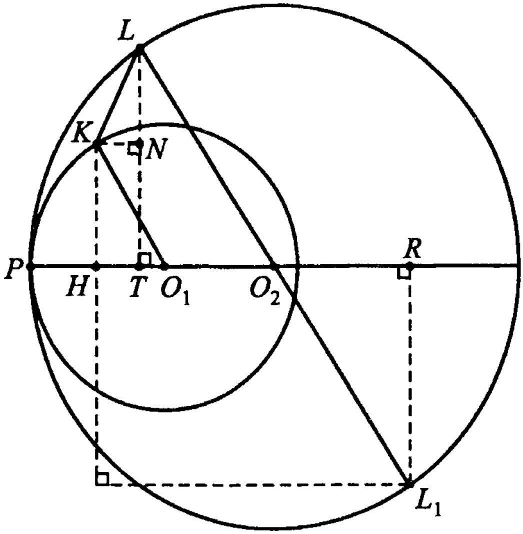


Рис. 25.

$= \left(11\sqrt{3} + 21\sqrt{3}\right)^2 + (HO_1 + O_1O_2 + O_2R))^2 =$
$= (32\sqrt{3})^2 + (11 + 20 + 21)^2 = 5776 = 76^2,\ KL_1 = 76.$

Ответ: 20 или 76.

C5. Пусть x_0 — корень уравнения. Тогда
$x_0{}^2 - |a - 5 + x_0| = |5 - a + x_0| - (a - 5)^2.$

Но $x = -x_0$ тоже будет корнем этого уравнения, так как
$(-x_0)^2 - |a - 5 - x_0| - |5 - a - x_0| + (a - 5)^2 =$
$= x_0{}^2 - |-a + 5 + x_0| - |-5 + a + x_0| + (a - 5)^2 =$
$= x_0{}^2 - |5 - a + x_0| - |a - 5 + x_0| + (a - 5)^2 = 0.$

Поэтому в уравнении будет единственный корень, если $x = 0$ — это корень и других корней нет. Найдём a, при которых $x = 0$ — корень.

$-|a-5| = |5-a| - (a - 5)^2,\ |a-5| + |5-a| = (a - 5)^2,\ 2|a-5| = |a-5|^2,$
$|a - 5| \cdot (|a - 5| - 2) = 0,$

$$\left[\begin{array}{l} |a-5| = 0, \\ |a-5| - 2 = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a = 5, \\ a = 3, \\ a = 7. \end{array}\right.$$

Пусть $a = 5$.
$x^2 - |x| = |x|,\ x^2 - 2|x| = 0,\ x = 0,\ x = 2,\ x = -2.$ При значении $a = 5$ уравнение имеет три корня, что не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a = 3$.
$x^2 - |x-2| = |x+2| - 4$, $x^2 + 4 = |x+2| + |x-2|$, $x = 0$ — единственный корень (см. рис. 26).

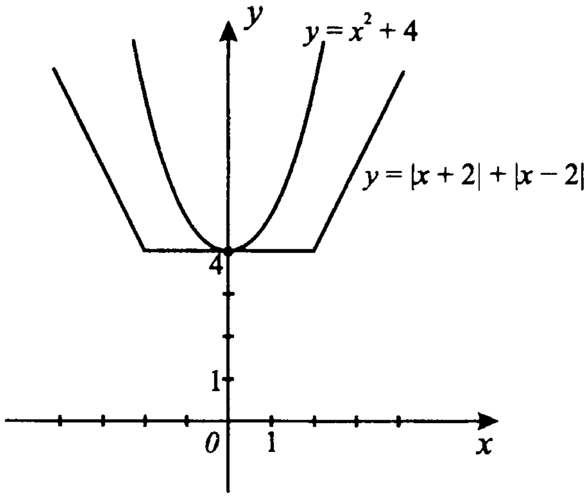


Рис. 26.

Пусть $a = 7$.
$x^2 - |2 + x| = |-2 + x| - 4$, уравнение получилось такое же, как и при $a = 3$.

Ответ: $\{3; 7\}$.

С6. а) Если было задумано n чисел, то на доске было бы записано $2^n - 1$ чисел. В приведённом наборе записано 7 чисел. $2^n - 1 = 7$, $2^n = 8$, $n = 3$. Значит, было задумано 3 числа.

Если бы было задумано 2 отрицательных числа, то в наборе самым меньшим числом была бы их сумма, и сами они тоже были бы в наборе, у нас это $-3 + (-2) = -5$, то есть отрицательные числа были бы -3 и -2.

Положительное число тогда было бы наибольшим в наборе, и это 7. Для чисел -3, -2, 7 получится заданный набор чисел.

Если бы было задумано 2 положительных числа, то их сумма была бы 7, а в наборе только числа $5 + 2$ дают в сумме 7, то есть положительные числа 2 и 5. Отрицательным числом тогда было бы наименьшее число набора, то есть -5. Для чисел 2, 5 и -5 в наборе должен был встретиться 0, а его нет. Значит, были задуманы числа -3, -2, 7.

б) Если среди задуманных различных чисел не было 0, то в полученном на доске наборе будет некоторое (может быть нулевое) число k получившихся нулей. Если добавить к числам нуль, то на доске добавится сам нуль, k нулевых сумм, полученных из ненулевых чисел, и k нулевых сумм с нулём, то есть $2k + 1$ нулей, а нечётное число не может быть равно 2. Значит в задуманном наборе нет нулей.

Пусть задумано 2 ненулевых числа. Тогда может быть получен только один нуль — их сумма.

Пусть задумано 3 ненулевых числа. Пусть среди них 2 отрицательных $a_1 < a_2$ и одно положительное a_3. Рассмотрим суммы. $a_1 + a_2 < 0$, $a_1 + a_2 + a_3 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3$, значит, среди этих сумм не более одного нуля.

Если среди 3 задуманных чисел $a_1 < a_2 < a_3$ два положительных, то $a_2 + a_3 > 0$, $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_2 + a_3$, значит, среди этих сумм тоже не более одной нулевой.

Рассмотрим числа -5; 2; 3; 5. Тогда на доске окажутся ровно два нуля. Значит, наименьшее количество задуманных чисел равно 4.

в) Для чисел -5; 2; 3 и -3; -2; 5 будет выписан одинаковый набор чисел -5, -3, -2, 0, 2, 3, 5. Значит, не всегда.

Ответ: а) -3; -2; 7; б) 4; в) нет.

Решение варианта 4

B1. На 19 кг вишни требуется $19 \cdot 1{,}5 = 28{,}5$ (кг) сахара. Поэтому нужно купить 29 килограммовых упаковок.

Ответ: 29.

B2. Из рисунка следует, что наибольшее количество осадков выпало 22-го марта.

Ответ: 22.

B3. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC$ (см. рис. 27).

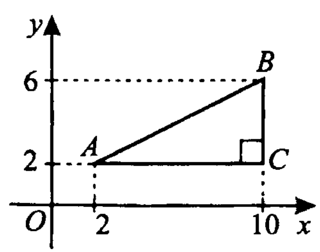


Рис. 27.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16.$

Ответ: 16.

B4. Составим таблицу, используя исходные данные и формулу $R = 2(F + 2Q) + D - 0{,}002P$.

Модель	Рейтинг ($R = 2(F + 2Q) + D - 0{,}002P$)
А	$2(4 + 2 \cdot 2) + 1 - 0{,}002 \cdot 2500 = 12$
Б	$2(3 + 2 \cdot 3) + 2 - 0{,}002 \cdot 3000 = 14$
В	$2(2 + 2 \cdot 2) + 4 - 0{,}002 \cdot 2800 = 10{,}4$

Наименьший рейтинг имеет модель В и он равен 10,4.

Ответ: 10,4.

B5. Приведём дроби к общему знаменателю: $\frac{5(x-2)}{5x} = \frac{3x}{5x}$. Так как дроби с одинаковыми знаменателями равны, то их числители тоже должны быть равны.

$5(x-2) = 3x$; $5x - 10 = 3x$; $5x - 3x = 10$; $2x = 10$; $x = 5$.

При $x = 5$ знаменатель $5x$ не равен нулю, значит, это корень исходного уравнения.

Ответ: 5.

B6. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

$\angle C = 180° - 2 \cdot \angle ABD - \angle A = 180° - 2 \cdot 6° - 93° = 75°$.

Ответ: 75.

B7. $\left(3\frac{1}{3} - 2\frac{2}{7}\right) \cdot 4{,}2 = \left(\frac{10}{3} - \frac{16}{7}\right) \cdot 4{,}2 = \frac{70-48}{21} \cdot 4{,}2 = \frac{22}{21} \cdot 4{,}2 =$
$= 22 \cdot 0{,}2 = 4{,}4.$

Ответ: 4,4.

B8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^3 + t^2 - 7t$, её скорость $v(t) = x'(t) = 9t^2 + 2t - 7$, $v(5) = 9 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 - 7 = 228$ (м/с).

Ответ: 228.

B9. $S_{б.} = 2\pi rh$, где r — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра. $2r = d$, d — диаметр основания. $S_{б.} = \pi dh$; $d = \frac{S_{б.}}{\pi h}$;

$d = \frac{18\pi}{\pi \cdot 10} = 1{,}8.$

Ответ: 1,8.

B10. Билетов, где нет вопроса по океанам, $30 - 6 = 24$ (билета). Тогда вероятность того, что в случайно выбранном билете нет вопроса по океанам, равна $\frac{24}{30} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

B11. Каждая боковая грань пирамиды является равнобедренным треугольником с основанием 14 и боковыми сторонами, равными 25. Проводя в этом треугольнике высоту (являющуюся одновременно медианой), мы можем найти её длину по теореме Пифагора: $h^2 = 25^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 576$; $h = 24$. Тогда площадь одной боковой грани равна $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 14 = 168$. Искомая площадь равна $168 \cdot 5 = 840$.

Ответ: 840.

B12. По условию $\pi(q) \geqslant 400\,000$; $q(p - v) - f \geqslant 400\,000$; $q(750 - 250) - 800\,000 \geqslant 400\,000$; $500q \geqslant 1\,200\,000$; $q \geqslant 2400$. Наименьший искомый объём производства равен 2400 единиц.

Ответ: 2400.

B13. Найдём время на прохождение всего пути: $\frac{200}{80} + \frac{190}{95} + \frac{150}{100} = 6$ (ч).
Найдём среднюю скорость автобуса на протяжении всего пути:
$(200 + 190 + 150) : 6 = 90$ (км/ч).

Ответ: 90.

B14. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:
$y(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - (-2^3) = 6 \cdot 4 + 8 = 24 + 8 = 32$,
$y(3) = 6 \cdot 9 - 27 = 54 - 27 = 27$.

2) Найдём производную: $y' = 12x - 3x^2$.

3) Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю: $12x - 3x^2 = 0, 3x(4 - x) = 0, x = 0, x = 4$.

4) Значение $x = 0$ принадлежит отрезку $[-2; 3]$. Найдём значение функции в этой точке: $y(0) = 6 \cdot 0 - 0 = 0$.

5) Выберем из пунктов 1 и 4 наименьшие значения функции. Видим, что из чисел 32; 27; 0 наименьшим является 0.

Ответ: 0.

C1. а) $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x;\quad -\sqrt{2}\cos x\sin x=\cos x,$

$$\cos x(\sqrt{2}\sin x+1)=0;\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sqrt{2}\sin x+1=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\ \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right.$$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

б) Найдём корни на отрезке $\left[\frac{13\pi}{2};8\pi\right]$.

$\frac{13\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi n\leqslant 8\pi;\ \ \frac{13}{2}-\frac{1}{2}\leqslant n\leqslant 8-\frac{1}{2};\ \ 6\leqslant n\leqslant 7{,}5;$

$n=6, x=\frac{13\pi}{2};\ \ n=7, x=\frac{15\pi}{2}$ (см. рис. 28).

$\frac{13\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{4}+2\pi n\leqslant 8\pi;\ \ \frac{13}{2}+\frac{1}{4}\leqslant 2n\leqslant 8+\frac{1}{4};\ \ \frac{27}{8}\leqslant n\leqslant 4\frac{1}{8};$

$n=4, x=-\frac{\pi}{4}+8\pi=\frac{31\pi}{4}.$

$\frac{13\pi}{2}\leqslant-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leqslant 8\pi;\ \ \frac{13}{2}+\frac{3}{4}\leqslant 2n\leqslant 8+\frac{3}{4};\ \ \frac{29}{8}\leqslant n\leqslant\frac{35}{8};$

$n=4, x=-\frac{3\pi}{4}+8\pi=\frac{29\pi}{4}.$

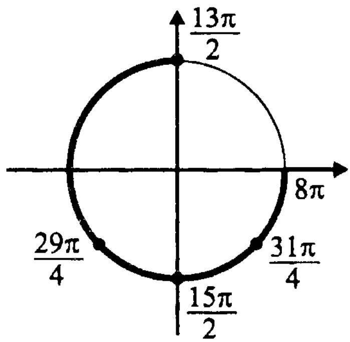


Рис. 28.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; б) $\frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}, \frac{31\pi}{4}, \frac{29\pi}{4}$.

С2. Рассмотрим сечение шара, проходящее через общий центр шаров O и центры кругов в исходных сечениях (см. рис. 29). Плоскость α пересекает это сечение по прямой TK, плоскость β по прямой AB (K — центр кругов в сечении плоскостью α, A — центр сечения большего шара плоскостью β). KP — радиус сечения меньшего шара плоскостью α, $S_1 = \pi \cdot KP^2 = 9$. KT — радиус сечения большего шара плоскостью α. $S_{\text{искомая}} = \pi \cdot KT^2$. AB — радиус сечения большего шара плоскостью β, $S_2 = \pi \cdot AB^2 = 6$.

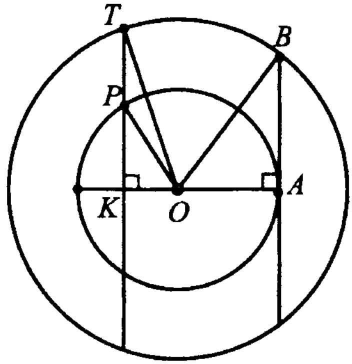


Рис. 29.

$TK \perp OK$, $AB \perp OK$, $TK \parallel AB$. Используя теорему Пифагора, получим: $OK^2 = OT^2 - TK^2 = OP^2 - KP^2$, $KT^2 = OT^2 - OK^2$.

$KT^2 = OT^2 - OP^2 + KP^2 = OB^2 - OA^2 + KP^2 = AB^2 + KP^2$.

$S_{\text{искомая}} = \pi \cdot KT^2 = \pi(AB^2 + KP^2) = S_1 + S_2 = 9 + 6 = 15$.

Ответ: 15.

С3. Решим I неравенство системы: $2 \cdot 9^x + 45 \cdot 3^x - 243 \geqslant 0$. Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда $2t^2 + 45t - 243 \geqslant 0$, $t \leqslant -27$, $t \geqslant 4{,}5$.

$t \geqslant 4{,}5$, $3^x \geqslant 4{,}5$; $x \geqslant \log_3 4{,}5$.

Решим II неравенство системы:

$$\frac{x^2(x^2-5x)+2(x^2-5x)+5}{x^2-5x} + \frac{1}{x} - x^2 + \frac{3}{x+6} - 2 \geqslant 0,$$

$$x^2 + 2 + \frac{5}{x^2-5x} + \frac{1}{x} - x^2 - 2 + \frac{3}{x+6} \geqslant 0,$$

$$\frac{5}{x^2-5x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x+6} \geqslant 0, \quad \frac{5+x-5}{x(x-5)} + \frac{3}{x+6} \geqslant 0,$$

$$\frac{x}{x(x-5)}+\frac{3}{x+6}\geqslant 0,\quad \begin{cases} x\neq 0,\\ \dfrac{1}{x-5}+\dfrac{3}{x+6}\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq 0,\\ \dfrac{x+6+3x-15}{(x-5)(x+6)}\geqslant 0,\end{cases}\quad \frac{4x-9}{(x-5)(x+6)}\geqslant 0,$$

$x\in(-6;0)\cup\left(0;\dfrac{9}{4}\right]\cup(5;+\infty)$ (см. рис. 30).

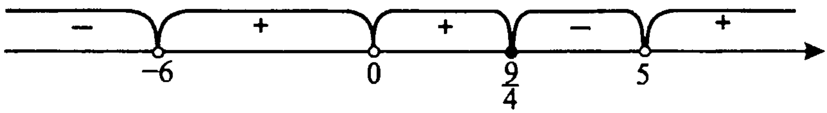


Рис. 30.

Решение исходной системы: $[\log_3 4{,}5;\ 2{,}25]\cup(5;+\infty)$.

Ответ: $[\log_3 4{,}5;\ 2{,}25]\cup(5;+\infty)$.

C4. Пусть C — вершина прямого угла (см. рис. 31), $O_1C=\dfrac{15\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{15\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}}=30$.

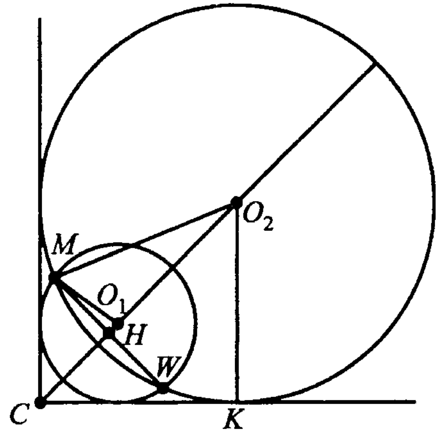


Рис. 31.

Случай (1): O_1 лежит на отрезке CO_2, тогда $O_2C=O_1C+O_1O_2=30+10=40$, тогда из ΔCO_2K получаем $O_2K=MO_2=R=40\sin 45^\circ=20\sqrt{2}$. Хорда $MW\perp O_1O_2$ и делится линией центров пополам, $MH=0{,}5MW$. По модифицированной формуле Герона для треугольника со сторонами a, b, c получаем:

$$S_{O_1MO_2} = \frac{\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(100\cdot 450+100\cdot 800+450\cdot 800)-(100^2+450^2+800^2)}}{4} = \frac{25\sqrt{47}}{2}.$$

$$MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \frac{5\sqrt{47}}{2},\quad MW = 5\sqrt{47}.$$

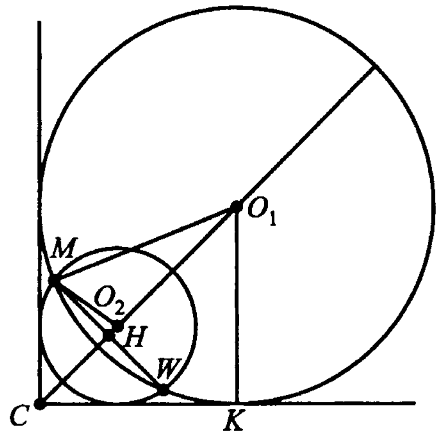


Рис. 32.

Случай (2): O_2 лежит на отрезке CO_1 (см. рис. 32), тогда $O_2C = O_1C - O_1O_2 = 20$, $R = 20\cdot\sin 45° = 10\sqrt{2}$. В $\triangle O_2O_1M$ высота $MH = 0{,}5MW$. Найдём $S_{O_1O_2M}$ по модифицированной формуле Герона:

$$S = \frac{\sqrt{2(100\cdot 200+100\cdot 450+200\cdot 450)-(100^2+200^2+450^2)}}{4} = \frac{25\sqrt{23}}{2}.$$

$$MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \frac{25\sqrt{23}}{10} = \frac{5\sqrt{23}}{2}.\quad MW = 2MH = 5\sqrt{23}.$$

Ответ: $5\sqrt{47}$ или $5\sqrt{23}$.

С5. $\log_{5-x}(a-x+8) = 2$ равносильно системе

$$\begin{cases} (a-x+8) = (5-x)^2, \\ x \neq 4, \\ x < 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 9x + 17 - a = 0, \\ x \neq 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

Построим график функции $a = x^2 - 9x + 17$ (см. рис. 33). Это парабола с вершиной $(4{,}5; -3{,}25)$. $a(2) = 3$; $a(5) = a(4) = -3$. Уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[2; 5)$, если $a \in [-3{,}25; -3) \cup (-3; 3]$.

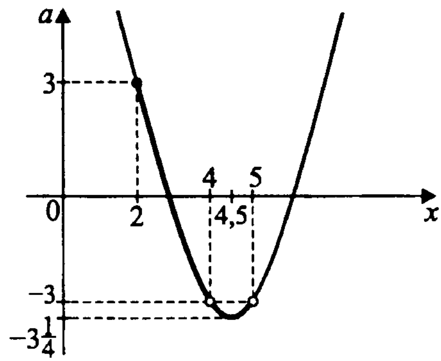


Рис. 33.

Ответ: $[-3{,}25; -3) \cup (-3; 3]$.

С6. Пусть числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию с первым членом a_1 и разностью d (если прогрессия убывающая, числа можно перенумеровать в обратном порядке). Сумма k её членов равна $\frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k$.

а) Да, например 2, 3, 4, 5 — арифметическая прогрессия, сумма чисел равна 14.

б) Так как прогрессия возрастающая, а её члены — натуральные числа, $d \geqslant 1$, $a_1 \geqslant 1$. Значит, $d(k-1) \geqslant k - 1$ и тогда

$$\frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k \geqslant \frac{2 + (k-1)}{2} \cdot k = \frac{(k+1)k}{2}; \quad \frac{k(k+1)}{2} < 800.$$

$k^2 + k < 1600$; $k^2 + k - 1600 < 0$, $k \leqslant 39$.

Укажем сумму с наибольшим значением k.

$1 + 2 + 3 + \ldots + 39 = 780$, наибольшее k равно 39.

в) $\frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k = 123$, $(2a_1 + d(k-1)) \cdot k = 246 = 2 \cdot 3 \cdot 41$.

Число k является делителем числа $2 \cdot 3 \cdot 41$. Если $k \geqslant 41$, то $k + 1 \geqslant 42$ и $\frac{(k+1)k}{2} \geqslant 861 > 123$. Значит, $k < 41$.

$k = 3$. Членами прогрессии могут быть 1, 41, 81.

$k = 6$. Членами прогрессии могут быть 18, 19, 20, 21, 22, 23.

Ответ: а) да; б) 39; в) 3 и 6.

Решение варианта 6

B1. На 8 недель понадобится $700 \cdot 8 = 5600$ листов бумаги. Учитывая, что в одной пачке 250 листов и $5600 : 250 = 22{,}4$, надо купить 23 пачки.

Ответ: 23.

B2. Из данных диаграммы следует, что самая высокая среднемесячная температура наблюдалась в 8-м месяце.

Ответ: 8.

B3. Пусть B — точка, симметричная точке A относительно оси Ox (см. рис. 34).

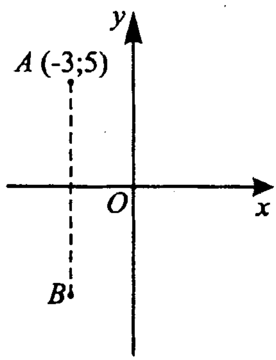


Рис. 34.

Точка B имеет координаты $(-3; -5)$, ордината равна -5.

Ответ: -5.

B4. Оплата в месяц при повременном тарифном плане:
$150 + 0{,}4 \cdot 800 = 470$ (руб.),
при комбинированном: $250 + 300 \cdot 0{,}3 = 340$ (руб.),
при безлимитном: 400 (руб.).

Оплата при наиболее выгодном тарифе составит 340 (руб.).

Ответ: 340.

B5. Заметим, что $16 = 2^4$. $2^{x+1} = 2^4$; $x + 1 = 4$; $x = 4 - 1$; $x = 3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 3.

B6. $\triangle AHB$ прямоугольный, $\angle AHB = 90°$; $AB = 8$, $\angle BAH = 60°$, значит, $\angle ABH = 30°$, AH лежит в треугольнике ABH напротив $\angle ABH = 30°$, $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{8}{2} = 4$.

Ответ: 4.

B7. $\dfrac{15}{7^{\log_7 6}} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5.$

Ответ: 2,5.

B8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, производная функции $f(x)$ отрицательна на тех промежутках, где функция убывает. Укажем точки, принадлежащие промежуткам убывания. Итак, это точки x_4, x_5, x_7. Всего точек 3.

Ответ: 3.

B9. Сделаем чертёж (см. рис. 35).

$$V_{ABCDEFA_1} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4.$$

Ответ: 4.

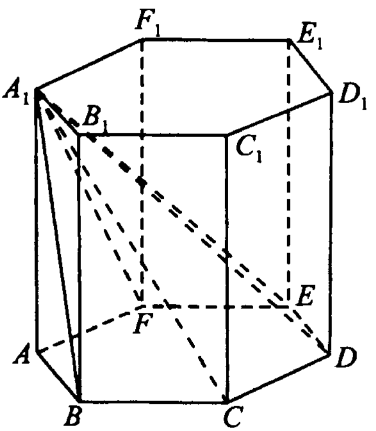


Рис. 35

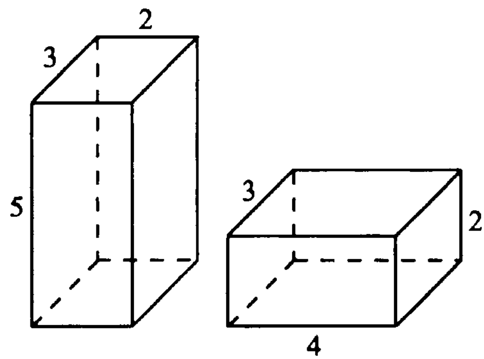


Рис. 36

B10. Событие «телефон прослужит больше года, но меньше двух лет» и событие «телефон прослужит более двух лет» несовместны, и их суммой является событие «телефон прослужит более одного года». Тогда вероятность того, что телефон прослужит меньше двух лет, но больше года, равна $0{,}96 - 0{,}87 = 0{,}09$.

Ответ: 0,09.

B11. Данный многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов (см. рис. 36). Их суммарный объём равен $5 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 54$.

Ответ: 54.

B12. Используя формулу $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)\cdot\dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}}+0{,}1}}$, найдём

$$R = 0{,}4 - \frac{0{,}4 - 0{,}21}{(19+1)\cdot\dfrac{0{,}02\cdot 19}{0{,}4+0{,}1}} = 0{,}4 - \frac{0{,}19\cdot 0{,}5}{20\cdot 0{,}38} = 0{,}4 - \frac{0{,}095}{7{,}6} = 0{,}3875.$$

Ответ: 0,3875.

B13. Найдём скорость сближения автомобилей:
$95 + 105 = 200$ (км/ч).

Найдём, через сколько часов автомобили встретятся:
$700 : 200 = 3{,}5$ (ч).

Ответ: 3,5.

B14. 1. $y' = -e^{19-x} + (19-x)\cdot\left(-e^{19-x}\right) = -e^{19-x}(1+19-x) =$
$= -e^{19-x}(20-x)$.

2. Найдём точки экстремума: $y' = 0$, $20 - x = 0$, $x = 20$.

3. При $x < 20$ $y' < 0$, а при $x > 20$ $y' > 0$, значит, $x = 20$ — точка минимума исходной функции.

Ответ: 20.

C1. а) Так как $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$, получим, что
$-\sin(2x) + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$; $2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 0$; $\cos x(\sqrt{3}\cos x - \sin x) = 0$.

1) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

2) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

б) Из серии $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ выберем корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$: $-3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi n \leqslant -2\pi$, $-\dfrac{7}{2} \leqslant n \leqslant -\dfrac{5}{2}$, $n = -3$, $x = -\dfrac{5\pi}{2}$.

Из серии $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$ выберем подходящие корни:
$-3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{3} + \pi k \leqslant -2\pi$, $-\dfrac{10}{3} \leqslant k \leqslant -\dfrac{7}{3}$, $k = -3$, $x = -\dfrac{8\pi}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $n, k \in Z$. б) $-\dfrac{5\pi}{2}$, $-\dfrac{8\pi}{3}$.

С2. $DD_1 \| CC_1$, а значит, угол между DD_1 и AC_1 равен углу между прямыми CC_1 и AC_1, т.е. $\sin\angle AC_1C = \frac{11}{13}$ (см. рис. 37). ΔACC_1 прямоугольный, $\sin\angle AC_1C = \frac{AC}{AC_1}$, откуда $\frac{AC}{AC_1} = \frac{11}{13}$, $\frac{AC}{13} = \frac{11}{13}$, $AC = 11$.

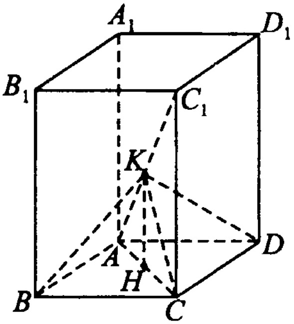


Рис. 37.

По теореме Пифагора из ACC_1 получим, что $CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. В плоскости ACC_1 проведём $KH \| CC_1$. Тогда $\Delta AKH \sim \Delta ACC_1$ по двум углам ($\angle A$ общий, а $\angle AKH = \angle AC_1C$ как соответственные углы при $KH \| C_1C$ и секущей AC_1). Коэффициент подобия $k = \frac{AK}{AC_1} = \frac{1}{2}$ по условию, а значит, $KH = kCC_1 = 2\sqrt{3}$. Рассмотрим квадрат $ABCD$. Его диагональ $AC = BC\sqrt{2}$, а потому $BC\sqrt{2} = 11$, $BC = \frac{11}{\sqrt{2}}$. $S_{ABCD} = BC^2 = \frac{121}{2}$.
$KH \perp (ABC)$, т.к. $KH \| CC_1$, а $CC_1 \perp (ABC)$. Таким образом, KH — высота пирамиды $ABCDK$.

$S_{ABCDK} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot KH = \frac{1}{3} \cdot \frac{121}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{121\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{121\sqrt{3}}{3}$.

С3. Решим каждое неравенство по отдельности.

1) $10^x + 6 \leqslant 3 \cdot 5^x + 2^{x+1}$, $10^x - 3 \cdot 5^x + 6 - 2 \cdot 2^x \leqslant 0$, $5^x(2^x - 3) - 2(2^x - 3) \leqslant 0$, $(5^x - 2)(2^x - 3) \leqslant 0$, $x \in [\log_5 2; \log_2 3]$.

2) $\log_{x^2}(3 + x) \geqslant \log_x 3$, ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

На ОДЗ выполняется $\log_{x^2}(3+x) \geqslant \log_x 3$, $\frac{1}{2}\log_x(3+x) \geqslant \log_x 3$, $\log_x(3+x) \geqslant \log_x 9$, $(x-1)(3+x-9) \geqslant 0$, $x \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$. С учётом ОДЗ $x \in (0; 1) \cup [6; +\infty)$.

3) Учитывая, что $\log_5 2 < 1 < \log_2 3$, запишем решение исходной системы: $x \in [\log_5 2; 1)$.

Ответ: $[\log_5 2; 1)$.

С4. Очевидно, что в прямоугольной трапеции боковая сторона, перпендикулярная основаниям, меньше другой боковой стороны. Возможны 2 случая.

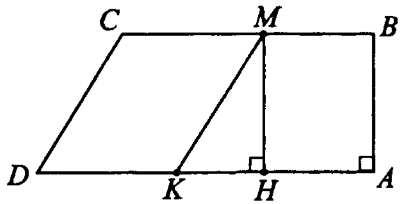


Рис. 38.

1) $CD = 8$, $AB = 6$ (см. рис. 38). Проведём $MH \| AB$, тогда $MHAB$ — прямоугольник и $MH = AB = 6$, $MB = AH$. Из $\triangle KHM$ по теореме Пифагора $KH = \sqrt{KM^2 - MH^2} = \sqrt{64-36} = 2\sqrt{7}$, т.к. $CDMK$ — параллелограмм и $MK = CD$. Обозначим $MB = a$. В трапецию $ABMK$ можно вписать окружность, значит, $MB + AK = MK + AB$, $2a + 2\sqrt{7} = 14$, $a = 7 - \sqrt{7}$. В параллелограмм $CDKM$ тоже можно вписать окружность, значит, $CM = CD = 8$. Меньшее основание $CB = CM + MB = 15 - \sqrt{7}$.

2) $CD = 6$, $AB = 8$ (см. рис. 39). В этом случае $MCDK$ — прямоугольник. В него можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом, $MC = CD = 6$. Пусть $BH \| MK$, тогда $AH = 2\sqrt{7}$. Обозначим BM через a, тогда $14 = 2a + 2\sqrt{7}$, $a = 7 - \sqrt{7}$, $BC = 13 - \sqrt{7}$.

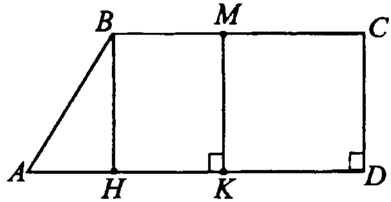


Рис. 39.

Ответ: $13 - \sqrt{7}$; $15 - \sqrt{7}$.

С5. Решим систему графически. Графиком первого уравнения является график функции

$$y = |2x-6| + |2x-18| = \begin{cases} 4x - 24 \text{ при } x \geqslant 9, \\ 12 \text{ при } x \in (3;9), \\ 24 - 4x \text{ при } x \leqslant 3. \end{cases}$$

Графиком второго уравнения является окружность (см. рис. 40) радиусом $|a|$ с центром в точке $(6; 12+a)$. Оба графика симметричны относительно прямой $x = 6$ и имеют общую точку $(6; 12)$ при любых значениях a. При $a < 0$ центр окружности лежит ниже прямой $y = 12$ и указанная точка пересечения единственная, как и при $a = 0$. Ровно 3 решения будет тогда, когда $a > 0$ и прямая $y = 24 - 4x$ имеет единственную точку пересечения с рассматриваемой окружностью, то есть уравнение $(12 - 4x - a)^2 + (x-6)^2 = a^2$ имеет единственное решение.

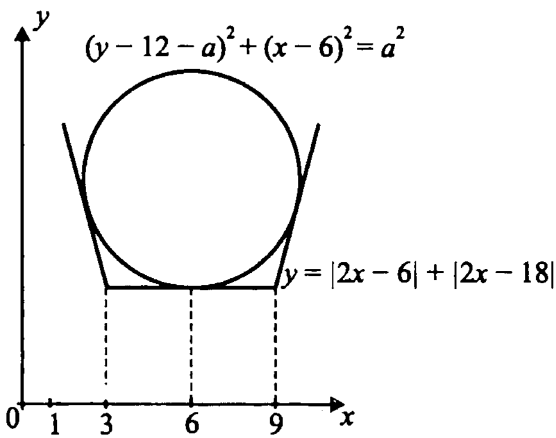


Рис. 40.

$17x^2 - 108x + 8ax + 180 - 24a = 0,$

$\dfrac{D}{4} = (54-4a)^2 - 17(180 - 24a) = 0,$

$(27-2a)^2 - 17(45-6a) = 0, \quad 4a^2 - 6a - 36 = 0, \quad 2a^2 - 3a - 18 = 0,$

$a = \dfrac{3 \pm \sqrt{153}}{4}$. Учитывая, что $a > 0$, $a = \dfrac{3+\sqrt{153}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3+\sqrt{153}}{4}$.

С6. а) Заметим, что $n! = n \cdot (n-1)!$. Если $n! = 2n$, то $n \cdot (n-1)! = 2n$ и $(n-1)! = 2$, значит, $n - 1 = 2$, $n = 3$.

б) $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ при $n \geqslant 3$. Если $n! = 30(n-1)$, то $n(n-2)! = 30$ выполняется при $n = 5$ и других решений нет, т.к. $f(n) = n \cdot (n-2)!$ — строго возрастающая функция от n, а $n = 2$ не является решением.

в) $n! + 1 = (2n+1)^2$. Заметим, что $n = 5$ — решение, и при $n < 5$ решений нет.

Докажем, что $n! + 1 > (2n+1)^2$ при $n \geqslant 6$. При $n = 6$ неравенство очевидно. Предположим, что это неравенство верно при $n = k$ ($k! + 1 > (2k+1)^2$), докажем его справедливость при $n = k + 1$.

$(k+1)! + 1 = (k+1)k! + 1 > (k+1)((2k+1)^2 - 1) + 1 =$
$= (k+1)(2k+1)^2 - (k+1) + 1 = 4k^3 + 8k^2 + 4k + 1.$

Осталось показать, что $4k^3 + 8k^2 + 4k + 1 > (2(k+1)+1)^2$. Заметим, что $(2(k+1)+1)^2 = (2k+3)^2 = 4k^2 + 12k + 9$, а тогда неравенство $4k^3 + 8k^2 + 4k + 1 > (2k+3)^2$ превращается в неравенство $4k^3 + 4k^2 - 8k - 8 > 0$, $(4k^2 - 8)(k+1) > 0$, $k^2 > 2$, что выполнено при $k \geqslant 6$.

Ответ: а) 3, б) 5, в) 5.

Решение варианта 7

B1. Всего в лагере $150 + 19 = 169$ человек. Так как $\frac{169}{35} = 4\frac{29}{35}$, то требуется 5 автобусов.

Ответ: 5.

B2. Из данных диаграммы следует, что больше всего посетителей было в 5-м месяце.

Ответ: 5.

B3. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (3 + 7) = 30$ (см. рис. 41).

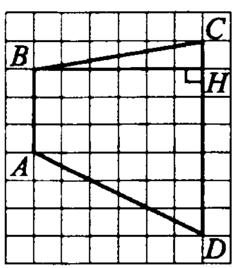


Рис. 41.

Ответ: 30.

B4. Определим стоимость указанного набора продуктов в каждом городе.
Ростов-на-Дону: $15 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 290 \cdot 2 = 730$ (руб.)
Краснодар: $14 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 270 \cdot 2 = 718$ (руб.)
Ставрополь: $17 \cdot 2 + 45 \cdot 3 + 280 \cdot 2 = 729$ (руб.)
Стоимость самого дешёвого набора составляет 718 рублей.

Ответ: 718.

B5. $7^{x-9} = 49$; $7^{x-9} = 7^2$; $x - 9 = 2$; $x = 11$.

Ответ: 11.

B6. $\sin\angle C = 0{,}8$ (по условию). $\cos\angle D = \cos(180^\circ - \angle C) = -\cos\angle C =$
$= -\sqrt{1 - \sin^2\angle C} = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -0{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$.

B7. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{5} = \log_{5^{-1}} 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_{5^{-1}} 5 = -\frac{1}{4}\log_5 5 = -0{,}25$.

Ответ: $-0{,}25$.

B8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$. На промежутках, где функция $y = f(x)$ возрастает, производная положительна. Укажем точки, принадлежащие промежуткам возрастания. Это точки x_1, x_2, x_3, x_5, x_6. Всего таких точек пять.

Ответ: 5.

B9. $\triangle COB$: $\angle COB = 90^\circ$; $CO = OB = R$ — радиус сферы (см. рис. 42).
$2CO^2 = CB^2$, $2CO^2 = (7\sqrt{2})^2$. $CO^2 = 49$, $CO = 7$.

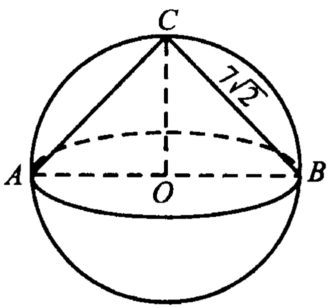


Рис. 42.

Ответ: 7.

B10. При подбрасывании монеты два раза всего возможно 4 исхода — *ОР*, *РО*, *РР*, *ОО*. Из них решка выпала один раз в двух вариантах. Значит, вероятность равна $\frac{2}{4} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

B11. Площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке, равна разности площадей поверхности прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 9, 11, 3 и двух прямоугольников со сторонами 4, 6.

$S = 2(9 \cdot 11 + 11 \cdot 3 + 9 \cdot 3) - 2 \cdot 4 \cdot 6 = 270.$

Ответ: 270.

B12. По условию должно выполняться неравенство $\frac{\varepsilon}{R+r} \leqslant \frac{10}{100} \cdot \frac{\varepsilon}{r}$. Решим это неравенство, подставив $r = 2$ и учитывая, что $\varepsilon > 0$ и $R > 0$. Имеем: $\frac{1}{R+2} \leqslant \frac{1}{20}$; $R + 2 \geqslant 20$; $R \geqslant 18$. Искомое наименьшее значение сопротивления равно 18 Ом.

Ответ: 18.

B13. Мотоциклист, выехавший из города A, проехал $280 - 80 = 200$ (км), его скорость равна $\frac{200}{4} = 50$ (км/ч).

Ответ: 50.

B14. 1) Найдём значение функции на концах отрезка:
$y(2) = (6-2)e^{10-2} = 4e^8$,
$y(9) = (6-9)e^{10-9} = -3e$.

2) Найдём производную: $y' = -e^{10-x} + (6-x)e^{10-x} \cdot (-1) =$
$= -e^{10-x}(1 + 6 - x) = -e^{10-x}(7-x)$.

3) Найдём значения x, при которых производная равна нулю:
$-e^{10-x}(7-x) = 0, x = 7; 7 \in [2; 9]$.

4) Найдём значения функции при $x = 7$: $y(7) = (6-7)e^{10-7} = -e^3$.

5) Среди найденных значений функции выберем наименьшее значение:
$y(7) = -e^3$, оно достигается при $x = 7$.

Ответ: 7.

C1. а) $\sin(2x + x) = 4 \sin x \cos 2x$,
$\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 4 \sin x \cos 2x$, $\sin 2x \cos x = 3 \sin x \cos 2x$,
$\sin x(2\cos^2 x - 3\cos 2x) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ 2\cos^2 x - 3(2\cos^2 x - 1) = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z, \\ 4\cos^2 x = 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z, \\ |\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

$x = \pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi m,\ n, m \in Z$.

б) Найдём корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.

$0 < \pi n < \frac{3\pi}{2}; 0 < n < \frac{3}{2}, n = 1,\ x_1 = \pi.$

$0 < \frac{\pi}{6} + \pi m < \frac{3\pi}{2},\ -\frac{1}{6} < m < \frac{4}{3},\ m = 0,\ m = 1;$

$x_2 = \frac{\pi}{6}; x_3 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$

$0 < -\frac{\pi}{6} + \pi m < \frac{3\pi}{2},\ \frac{1}{6} < m < \frac{5}{3}, m = 1;$

$x_4 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$

Ответ: а) $\pi n;\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi m,\ n, m \in Z$; б) $\frac{\pi}{6}; \pi; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$.

С2. $ABCD$ — тетраэдр, все рёбра которого равны 5, следовательно, все его грани — правильные, равные между собой треугольники (см. рис. 43).

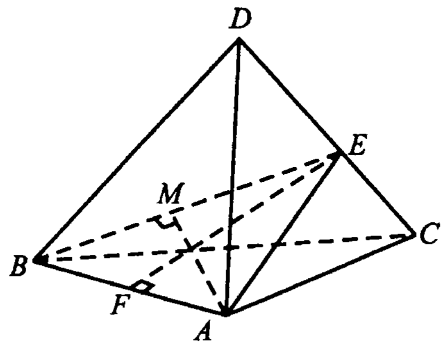


Рис. 43.

BE и AE — медианы треугольников BCD и ACD соответственно, причём $BE = AE = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle BEA$ равнобедренный с высотами EF и AM. Очевидно, расстояние от точки A до прямой BE равно AM.

$S_{\triangle BEA} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AB = \frac{1}{2} AM \cdot BE,\ \ AM = \frac{EF \cdot AB}{BE}.$

В $\triangle BEF$ $EF = \sqrt{BE^2 - BF^2} = \sqrt{\dfrac{25 \cdot 3}{4} - \dfrac{25}{4}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

$AM = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 5\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

С3. Решим каждое неравенство по отдельности:

1) $49^{x^2+5x-49} + 7^{x^2+5x-48} \leqslant 98$,

$7^{2(x^2+5x-49)} + 7^{x^2+5x-48} \leqslant 98$,

$7^{x^2+5x-49} = t$, $t > 0$.

$t^2 + 7t - 98 \leqslant 0$,

$(t+14)(t-7) \leqslant 0$,

$-14 \leqslant t \leqslant 7$, учитывая, что $t > 0$, имеем: $0 < t \leqslant 7$,

$0 < 7^{x^2+5x-49} \leqslant 7$, $x^2+5x-49 \leqslant 1$, $x^2+5x-50 \leqslant 0$, $(x+10)(x-5) \leqslant 0$,

$-10 \leqslant x \leqslant 5$.

2) $\dfrac{\log_{0,5} x + 2}{|\lg(2x-1)|} > 0$, $\dfrac{-\log_2 x + 2}{|\lg(2x-1)|} > 0$.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-1 > 0, \\ x > 0, \\ 2x - 1 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$-\log_2 x + 2 > 0$, $\log_2 x < 2$, $x < 4$.

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 4)$.

3) Решение исходной системы неравенств:

$\begin{cases} -10 \leqslant x \leqslant 5, \\ \dfrac{1}{2} < x < 4, \\ x \neq 1. \end{cases}$ $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 4)$ (см. рис. 44).

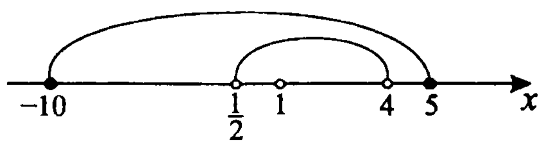


Рис. 44.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 4)$.

С4. По условию $\triangle ABC$ описан около окружности с центром O, следовательно, O — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$, то есть AO и BO — биссектрисы.

Этот же треугольник вписан в окружность (см. рис. 45). Так как AO — биссектриса $\angle BAC$, то $\smile MC = \smile MB$. Аналогично $\smile CN = \smile NA$. $\triangle MNA$ равнобедренный (так как $AM = MN$), тогда $\angle MNA = \angle MAN$ $\Rightarrow \smile MB + \smile BA = \smile MC + \smile CN \Rightarrow \angle C = \dfrac{\angle ABC}{2}$.

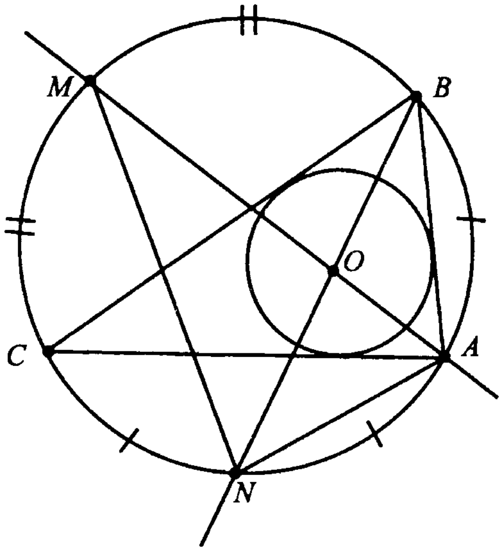


Рис. 45.

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle B = 2\alpha$, $\angle A = 180° - 3\alpha$.

1) $\angle C = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 90°$.

2) $\angle B = 30°$, $\angle C = 15°$, $\angle A = 180° - 45° = 135°$.

3) $\angle A = 30°$, $180° - 3\alpha = 30°$, $3\alpha = 150°$, $\alpha = 50°$, $\angle C = 50°$, $\angle B = 100°$.

Ответ: 100 и 50; 90 и 60; 15 и 135.

С5. Данное уравнение квадратное, поэтому имеет один корень, когда его дискриминант равен нулю.

$D = (3^a - 1)^2 + 3 \cdot 4(9^{a-1} - 3^{a-2}) =$

$= (3^a)^2 - 2 \cdot 3^a + 1 + 12 \cdot 9^{a-1} - 12 \cdot 3^{a-2} =$

$$= (3^a)^2 - 3^a\left(2 + \frac{12}{9}\right) + 12 \cdot 3^{2a} \cdot \frac{1}{3^2} + 1 =$$

$$= (3^a)^2\left(1 + \frac{12}{9}\right) - 3^a\left(\frac{30}{9}\right) + 1 = (3^a)^2 \cdot \frac{7}{3} - 3^a \cdot \frac{10}{3} + 1 = 0.$$

Обозначим $3^a = t,\ t > 0$.

$7t^2 - 10t + 3 = 0,\ t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{7}$.

1) $3^a = 1;\ a = 0$.

2) $3^a = \frac{3}{7};\ a = \log_3 \frac{3}{7}$.

Ответ: $0; \log_3 \frac{3}{7}$.

С6. а) Пусть $x = \overline{8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1}$. Если проделать указанную операцию, то получится число $\overline{x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1 8}$, которое по условию равно x. Два натуральных числа равны, если равны все цифры, то есть $8 = x_7$, $x_7 = x_6,\ x_6 = x_5,\ x_5 = x_4,\ x_4 = x_3,\ x_3 = x_2,\ x_2 = x_1, x_1 = 8$, откуда $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 8$ и искомое число равно 88 888 888.

б) Обозначим получившееся семизначное число через y . Тогда исходное число равно $6{\cdot}10^7{+}y$. По условию $6{\cdot}10^7{+}y = 16y, y = \frac{6}{15}{\cdot}10^7 = 4\,000\,000$, значит, исходное число 64 000 000.

в) Обозначим первую цифру через α, а число, записанное последующими семью цифрами, через y (если после α стоят нули, то их не учитываем). Тогда $1 \leqslant \alpha \leqslant 6$ и исходное число равно $\alpha \cdot 10^7 + y$.

По условию $(\alpha + 3) \cdot 10^7 + y = 3 \cdot (\alpha \cdot 10^7 + y)$, откуда $2\alpha \cdot 10^7 + 2y = 3 \cdot 10^7$.

Если $\alpha > 1$, то $2\alpha \cdot 10^7 + 2y > 3 \cdot 10^7$ (так как $y \geqslant 0$), значит, $\alpha = 1$.

Но тогда $2y = 3 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^7, y = 5 \cdot 10^6 = 5\,000\,000$.

Исходное число равно 15 000 000.

Ответ: а) 88 888 888; б) 64 000 000; в) 15 000 000.

Решение варианта 8

В1. На 15 дней понадобится $183 \cdot 15 = 2745$ пачек сахара. Учитывая, что в одной упаковке 16 пачек и $2745 : 16 = 171{,}5625$, то надо купить 172 упаковки.

Ответ: 172.

B2. По рисунку определяем, что 8-го августа наибольшая температура составляет 30°C (такая температура была в 18:00).

Ответ: 30.

B3. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (BC + AD)$ (см. рис. 46).

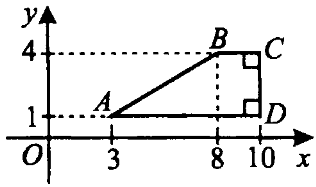


Рис. 46.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2 + 7) = 13{,}5.$

Ответ: 13,5.

B4. Определим стоимость набора продуктов в каждом городе.
Астрахань: $30 \cdot 3 + 260 \cdot 1 + 42 \cdot 2 = 434$ (руб.)
Новочеркасск: $35 \cdot 3 + 250 \cdot 1 + 45 \cdot 2 = 445$ (руб.)
Омск: $40 \cdot 3 + 240 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 440$ (руб.)
Стоимость самого дешёвого набора составляет 434 рубля.

Ответ: 434.

B5. $\frac{1}{2x - 7} = \frac{1}{5x + 8}$,

$2x - 7 = 5x + 8$,

$2x - 5x = 8 + 7$,

$-3x = 15, \quad x = -5$.

Ответ: -5.

B6. $\frac{CB}{AB} = \cos\angle B$ (см. рис. 47), откуда

$AB = \frac{CB}{\cos\angle B} = 8 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. По теореме Пифагора $AC^2 = 80 - 64 = 16$, откуда $AC = 4$.

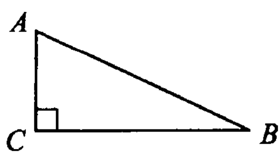


Рис. 47.

Ответ: 4.

B7. $\dfrac{\left(4^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{21}}{10^8} = \dfrac{\left(4^{\frac{2}{7}}\right)^{21}\cdot\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{21}}{10^8} = \dfrac{4^6\cdot 5^7}{10^8} = \dfrac{2^{12}\cdot 5^7}{(2\cdot 5)^8} =$

$= \dfrac{2^{12}\cdot 5^7}{2^8\cdot 5^8} = \dfrac{2^4}{5} = \dfrac{16}{5} = 3{,}2.$

Ответ: 3,2.

B8. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$. На промежутках, где производная отрицательна, функция $y = f(x)$ убывает. Найдём точки, принадлежащие промежуткам убывания. Это точки x_4, x_6, x_7, x_8, x_9. Всего таких точек пять.

Ответ: 5.

B9. $\triangle COB$: $\angle COB = 90°$; $OB = 3\sqrt{2}$ (по условию).

CB — образующая конуса (см. рис. 48).

$CB = \sqrt{CO^2 + OB^2} = \sqrt{2OB^2} = OB\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6.$

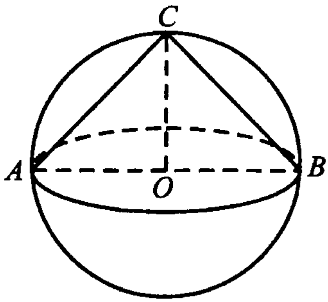


Рис. 48.

Ответ: 6.

B10. Вероятность того, что первая батарейка исправна, равна $1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Аналогично относительно второй батарейки вероятность, что вторая батарейка исправна, равна 0,9. Тогда вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными, равна произведению независимых событий $0{,}9\cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

Ответ: 0,81.

B11. Площади передней и задней граней равны $7\cdot 8 - (7-3)\cdot(8-4) = 40$ каждая; суммарная площадь верхних граней равна площади нижней грани и равна $3\cdot 8 = 24$; суммарная площадь правых граней равна площади левой грани и равна $7\cdot 3 = 21$. Таким образом, площадь всей поверхности многогранника равна $40\cdot 2 + 24\cdot 2 + 21\cdot 2 = 170$.

Ответ: 170.

B12. По условию $U \geqslant 80$; $\dfrac{\varepsilon R}{R+r} \geqslant 80$; $\dfrac{100R}{R+1} \geqslant 80$; $100R \geqslant 80R + 80$; $20R \geqslant 80$; $R \geqslant 4$. Искомое наименьшее сопротивление равно 4 Ом.

Ответ: 4.

B13. Пусть x км — расстояние между городами. Тогда в первый день автомобиль проехал $\left(\dfrac{x}{4}+40\right)$ км, во второй день — $\left(\dfrac{x}{3}+30\right)$ км, а в третий день — $\left(\dfrac{17}{60}x+45\right)$ км. Составим и решим уравнение.

$\dfrac{x}{4}+40+\dfrac{x}{3}+30+\dfrac{17}{60}x+45=x,$

$15x+60\cdot 40+20x+60\cdot 30+17x+45\cdot 60=60x,\quad 60x-52x=6900,$
$8x=6900,\quad x=862{,}5.$

Ответ: 862,5.

B14. $y=(5-x)e^{5-x}$.

$y'=-1\cdot e^{5-x}+(5-x)e^{5-x}\cdot(-1)=e^{5-x}(-1-5+x)=e^{5-x}(x-6).$

$y'=0,\ \ e^{5-x}(x-6)=0,\ \ x=6.$

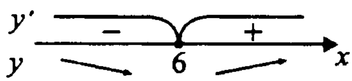


Рис. 49.

$x=6$ — точка минимума функции $y=(5-x)e^{5-x}$.

Ответ: 6.

C1. а) $6\sin^2 x-5+2\sin^2 2x=0,\ 2\sin^2 2x-3(1-2\sin^2 x)-2=0.$
$2\sin^2 2x-3\cos 2x-2=0,\ 2(1-\cos^2 2x)-3\cos 2x-2=0,$
$2\cos^2 2x+3\cos 2x=0,\ \cos 2x(2\cos 2x+3)=0.$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \cos 2x=-\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Так как $|\cos 2x|\leqslant 1$, то $\cos 2x=0$.

$2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

б) $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}<\dfrac{3\pi}{2},\ n\in Z.$

$\dfrac{1}{2}<n<\dfrac{5}{2}, n=1,\ n=2.$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$.

С2. 1) Пусть O — основание высоты пирамиды.
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = 45°$ (см. рис. 50),
$\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$ (по катету SO и острому углу).

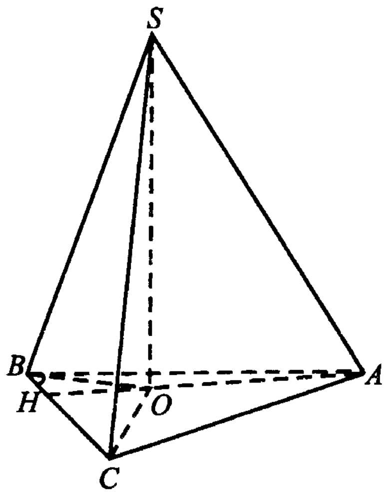


Рис. 50.

2) $AO = BO = CO$, следовательно, точка O равноудалена от вершин треугольника и является центром описанной окружности. Обозначим $AO = R$. Так как $\angle OSA = \angle SAO = 45°$, то $R = OA = SO = 4$.

3) $\triangle ABC$ равнобедренный, и один из углов равен $60°$, значит, $\triangle ABC$ равносторонний.

4) Так как в равностороннем треугольнике $a = R\sqrt{3}$, где a — сторона треугольника, то $a = 4\sqrt{3}$, а площадь $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$$S = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

5) $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 12\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.$

Ответ: $16\sqrt{3}$.

С3. 1) $(x^2 - 2x + 3)\log_2 x < 0$, ОДЗ: $x > 0$.
$x^2 - 2x + 3 > 0$ при любом x, тогда $\log_2 x < 0$, $0 < x < 1$.

2) Сделаем замену $3x^2+5x+2 = t$. Тогда $1+\log_4\left(1+\frac{5}{t}\right) > \log_4(t+5)$,

$\log_4 \frac{5+t}{t} > \log_4 \frac{t+5}{4}$.

ОДЗ: $\begin{cases} t+5>0, \\ t>0; \end{cases}$ $t > 0$.

$\frac{t+5}{t} > \frac{t+5}{4}$; $\frac{1}{t} > \frac{1}{4}$; $t < 4$.

Итак, $0 < t < 4$.

Вернёмся к исходной переменной:

$t > 0$; $3x^2 + 5x + 2 > 0$, $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

$t < 4$; $3x^2 + 5x - 2 < 0$, $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2) < 0$, $x \in \left(-2; \frac{1}{3}\right)$. Решением второго неравенства является $x \in (-2; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3) Найдём общее решение системы неравенств: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ (см. рис. 51).

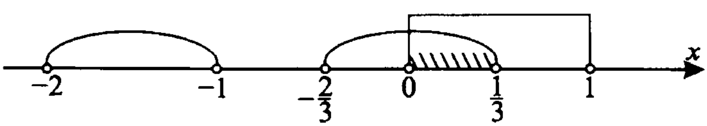


Рис. 51.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

С4. 1) Пусть O — точка пересечения диагоналей MP и NQ (см. рис. 52).

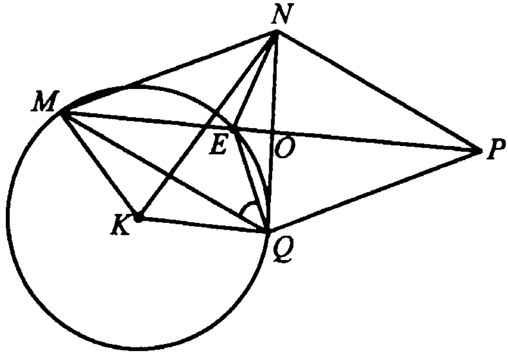


Рис. 52.

Вокруг $ENPQ$ можно описать окружность. Значит, по свойству хорд $EO \cdot OP = NO \cdot OQ$, $EO \cdot \frac{7}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}$, $EO = \frac{25}{4} : \frac{7}{2} = \frac{25}{14}$.

$ME = \frac{7}{2} - \frac{25}{14} = \frac{49-25}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$.

2) KQ — радиус окружности, описанной около $\triangle MEQ$, тогда $2 \cdot KQ = \frac{ME}{\sin \angle MQE}$ (по теореме синусов).

$ME = \frac{12}{7}$, $\sin \angle MQE = \frac{1}{2}$ (по условию),

$KQ = \frac{ME}{2 \sin \angle MQE} = \frac{12}{7 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12}{7}$; $KQ = \frac{12}{7}$.

3) Заметим, что $OE \cdot OM = \frac{25}{14} \cdot \frac{7}{2} = \frac{25}{4}$, $OQ^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, то есть $OQ^2 = OE \cdot OM$, значит, OQ — касательная. Тогда радиус $KQ \perp NQ$.

$$NK = \sqrt{NQ^2 + KQ^2} = \sqrt{25 + \frac{144}{49}} = \sqrt{\frac{1369}{49}} = \frac{37}{7}.$$

Ответ: $\frac{37}{7}$.

С5. Параметр a может принимать только значения $a > 0$, $a \neq 1$. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{a}$, $x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{a}}$.

$\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$, $\log_{ax} x = \dfrac{1}{\log_x ax} = \dfrac{1}{1 + \log_x a}$;

$\log_{ax^2} x = \dfrac{1}{\log_x ax^2} = \dfrac{1}{2 + \log_x a}$.

$\dfrac{2}{\log_x a} + \dfrac{1}{1 + \log_x a} + \dfrac{3}{2 + \log_x a} = 0$; обозначим $\log_x a = t$.

$\dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{3}{2+t} = 0$,

$\dfrac{6t^2 + 11t + 4}{t(t+1)(t+2)} = 0$, $t \neq 0$, $t \neq -1$, $t \neq -2$.

$6t^2 + 11t + 4 = 0, t_1 = -\dfrac{4}{3}$, $t_2 = -\dfrac{1}{2}$.

1) $\log_x a = -\dfrac{4}{3}$, $a = x^{-\frac{4}{3}}$, $a^{-\frac{3}{4}} = x$,

$8 \leqslant a^{-\frac{3}{4}} \leqslant 9$, $2^3 \leqslant a^{-\frac{3}{4}} \leqslant 3^2$, $(3)^{2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} \leqslant a \leqslant (2^3)^{-\frac{4}{3}}$,

$3^{-\frac{8}{3}} \leqslant a \leqslant 2^{-4}$, $\dfrac{1}{3^2\sqrt[3]{9}} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{16}$,

$\dfrac{\sqrt[3]{3}}{9\cdot 3} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{16}$, $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{27} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{16}$.

Проверим, выполняются ли условия $ax \neq 1$ и $ax^2 \neq 1$.

$ax = a \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{1}{4}} \neq 1, a \neq 1$.

$ax^2 = a \cdot \left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^2 = a^{-\frac{1}{2}}$; $a^{-\frac{1}{2}} \neq 1, a \neq 1$.

Таким образом, $a \in \left[\dfrac{\sqrt[3]{3}}{27}; \dfrac{1}{16}\right]$.

2) $\log_x a = -\dfrac{1}{2}$, $a = x^{-\frac{1}{2}}$; $a^{-2} = x$, $8 \leqslant a^{-2} \leqslant 9$,

$9^{-\frac{1}{2}} \leqslant a \leqslant 8^{-\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; $\dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Таким образом, $a \in \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

Проверим, выполняются ли условия $ax \neq 1$ и $ax^2 \neq 1$.

$ax = a \cdot a^{-2} = a^{-1}$; $a^{-1} \neq 1, a \neq 1$.

$ax^2 = a^{-3}$; $a^{-3} \neq 1, a \neq 1$.

3) Хотя бы один корень принадлежит отрезку $[8; 9]$ при $a \in \left[\frac{\sqrt[3]{3}}{27}; \frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

Ответ: $a \in \left[\frac{\sqrt[3]{3}}{27}; \frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

С6. а) Если к десятичной записи числа a приписать справа цифру 6, то получится $10a + 6$. По условию $10a + 6 = 4a^2$, $4a^2 - 10a - 6 = 0$, $a = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$. Так как $a \in N$, то $a = 3$.

б) Пусть приписанная цифра равна α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 9$.
Тогда по условию $10a + \alpha - a^2 = 8a$, $a^2 - 2a - \alpha = 0$, $a = 1 \pm \sqrt{1+\alpha}$.
Заметим, что $\sqrt{1+\alpha}$ является целым при $\alpha = 0, \alpha = 3, \alpha = 8$.
В этих случаях $a = 2; 3; 4$.
в) По условию имеем, что $a \cdot 10^4 + x = a^6$, где $0 \leqslant x \leqslant 9999$, $x \in Z$.
Заметим, что $a \cdot 10^4 + x < a \cdot 10^4 + 10^4 = (a+1) \cdot 10^4$.
Докажем, что $(a + 1) \cdot 10^4 < a^6$ при $a \geqslant 7$. Рассмотрим $f(a) = a^6 - (a+1)10^4$, будем считать, что $a \in R$, тогда $f'(a) = 6a^5 - 10^4$.
Пусть $f'(a_0) = 0$, тогда $4 < a_0 < 5$ (так как $f'(4) < 0$, $f'(5) > 0$ и $f'(a)$ непрерывна и возрастает на $a \in [0; +\infty)$).
Заметим, что $f(7) > 0$, значит $f(a) > 0$ при $a \geqslant 7$.
При $a \leqslant 4$ $a^6 < 10\,000$, но $a \cdot 10^4 \geqslant 10\,000$. Подстановкой убедимся, что $a = 5; 6$ также не являются решениями. Таким образом, решений нет.

Ответ: а) 3; б) 2, 3, 4; в) нет решений.

Решение варианта 9

В1. Всего требуется $5 \cdot 9 = 45$ таблеток. В одной упаковке 10 таблеток. Так как $\frac{45}{10} = 4{,}5$, то требуется 5 упаковок.

Ответ: 5.

В2. По рисунку определяем, что 13-го мая наименьшая температура составляет $10°C$.

Ответ: 10.

В3. По рисунку 53 найдём длины оснований и высоту трапеции $ABCD$. $AB = 3$, $DC = 5$, $AH = 9$. $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AH$,

$S_{ABCD} = \frac{3+5}{2} \cdot 9 = 36$.

Ответ: 36.

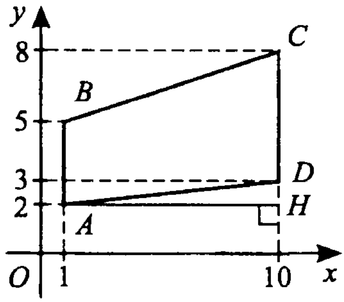


Рис. 53.

B4. Стоимость покупки в следующих возможных случаях:
1) $2600 + 450 + 300 = 3350$ (руб.);
2) $2600 + 450 = 3050$ (руб.), компьютерную мышь купит за сертификат;
3) $2600+300 = 2900$ (руб.), сертификат не получает, так как стоимость покупки меньше 3000 рублей. После оплаты 450 рублей за клавиатуру сумма покупки составит 3350 рублей.

То есть во 2-м случае покупка стоит меньше всего — 3050 рублей.

Ответ: 3050.

B5. Решим уравнение: $(x+3)^3 = -27$.
$(x+3)^3 = (-3)^3$, $x + 3 = -3$, $x = -6$.

Ответ: -6.

B6. Треугольник LMK прямоугольный. Центр окружности, описанной около треугольника LMK, лежит на гипотенузе и является её серединой. Найдём гипотенузу LK.
$LK = \sqrt{LM^2 + MK^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
$R = \dfrac{LK}{2}$; $R = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

В ответе запишем: $2R\sqrt{5} = 2 \cdot \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = 15$.

Ответ: 15.

B7. $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, значит, $\sin\alpha < 0$.

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \dfrac{15}{16}} = -\dfrac{1}{4} = -0{,}25$.

Ответ: $-0{,}25$.

B8. На отрезке $[-5; 3]$ производная меняет знак с «+» на «−» в единственной точке $x = -2$. Следовательно, $x = -2$ — точка максимума.

Ответ: -2.

B9. $\triangle CAB$ — осевое сечение конуса, $CA = CB$ — образующие, CO — высота конуса (см. рис. 54).

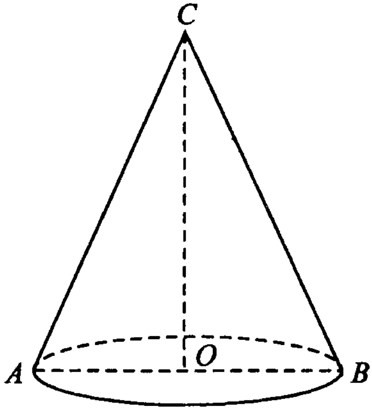


Рис. 54.

В $\triangle COB$ $\angle COB = 90°$, $OB = 5$, $CO = 12$.
$CB = \sqrt{CO^2 + OB^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Ответ: 13.

B10. Событие A «Петя решит больше 8 задач» и B «Петя решит ровно 8 задач» несовместны. Объединением этих событий является событие C «Петя решит больше 7 задач». $P(C) = P(A) + P(B)$, откуда $P(B) = 0{,}85 - 0{,}78 = 0{,}07$.

Ответ: 0,07.

B11. Обозначим через h общую высоту параллелепипеда и пирамиды, V_1 — объём пирамиды, V_2 — объём параллелепипеда. Тогда искомый объём $V_1 = \frac{1}{3}S_{ACD}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD}h = \frac{1}{6}V_2 = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$.

Ответ: 5.

B12. По условию $v \geqslant 120$; $\sqrt{2 \cdot 2a} \geqslant 120$; $\sqrt{a} \geqslant 60$; $a \geqslant 3600$. Искомое наименьшее ускорение равно 3600 км/ч^2.

Ответ: 3600.

B13. В 3-х литрах 12%-го водного раствора $3 \cdot 0{,}12 = 0{,}36$ (л) некоторого вещества, в 5-ти литрах 20%-го водного раствора $5 \cdot 0{,}20 = 1$ (л) некоторого вещества, получается $3 + 5 = 8$ (л) раствора, в котором содержится $0{,}36 + 1 = 1{,}36$ (л) вещества. Найдём концентрацию полученного раствора: $\frac{1{,}36}{8} \cdot 100\% = 17\%$.

Ответ: 17.

B14. $y = 6 + 81x - \frac{x^3}{3}, x \in R.$

$y' = 81 - \frac{3x^2}{3} = 81 - x^2;\ y' = 0,\ x^2 = 81,\ x = \pm 9.$

$x = 9$ является точкой максимума (см. рис. 55).

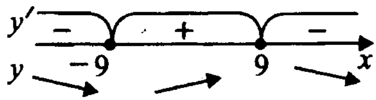


Рис. 55.

Ответ: 9.

C1. а) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{8}{3}.$

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

$\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{8}{3} = 0,$

$3\operatorname{tg}^4 x - 8\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0, \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{3} \text{ — корней нет,} \\ \operatorname{tg}^2 x = 3. \end{array} \right.$

$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3},$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

б) Выполним отбор корней на промежутке $\left(2\pi; \frac{7\pi}{2}\right)$ (см. рис. 56).

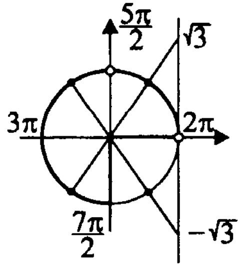


Рис. 56.

$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$,

$x_2 = 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$,

$x_3 = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}$.

C2. 1) Прямая A_1K лежит в плоскости A_1AD_1, прямая BF пересекает плоскость A_1AD_1 в точке F. Точка F не принадлежит прямой A_1K, следовательно, прямые BF и A_1K — скрещивающиеся прямые по признаку скрещивающихся прямых.

2) Введём прямоугольную систему координат (см. рис. 57) и запишем координаты точек, необходимых для решения задачи $B(0;0;0)$, $F(3;4;1)$, $A_1(3;0;2)$, $K(3;1;0)$.

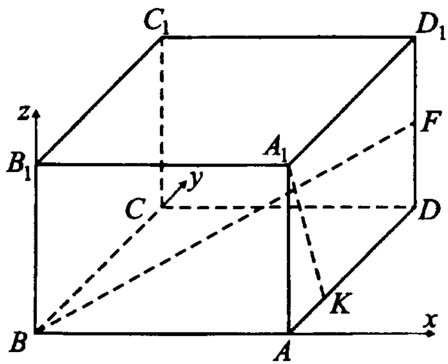


Рис. 57.

3) Найдём уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$, проходящей через прямую A_1K параллельно прямой BF.

Пусть $\vec{n}(a;b;c)$ —вектор нормали к этой плоскости, тогда $\vec{n} \perp \overrightarrow{A_1K}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{BF}$. $\overrightarrow{A_1K}(0;1;-2)$; $\overrightarrow{BF}(3;4;1)$.

Учитывая, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1K} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + 4b + c = 0, \\ b - 2c = 0. \end{cases}$$

Обозначим $a = t$, $t \in R$, $t \neq 0$. Система примет вид:
$\begin{cases} 3t + 4b + c = 0, \\ b - 2c = 0; \end{cases}$ $\quad b = -\frac{2}{3}t,\ c = -\frac{1}{3}t.$

Следовательно, $\vec{n}\left(t; -\frac{2}{3}t; -\frac{1}{3}t\right)$.

Если, например $t = 3$, то $\vec{n}(3; -2; -1)$.
Уравнение плоскости примет вид $3x - 2y - z + d = 0$.
Точка $A_1(3; 0; 2)$ лежит в этой плоскости, значит её координаты удовлетворяют этому уравнению: $3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 2 + d = 0$, $d = -7$.
Отсюда $3x - 2y - z - 7 = 0$ — искомое уравнение плоскости.

4) Расстояние от точки B до найденной плоскости

$$\rho = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

С3. $\begin{cases} 25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x \geqslant 25, \\ 2 \log_{\log_3 x} 3 < 1. \end{cases}$

1. Решим первое неравенство системы:
$(25 \cdot 2^x - 25) - (2^x \cdot 5^x - 5^x) \geqslant 0$, $25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) \geqslant 0$,
$(2^x - 1)(5^x - 25) \leqslant 0$, $x(x - 2) \leqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2. Решим второе неравенство системы: $\log_{\log_3 x} 9 < 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x > 0, \\ \log_3 x \neq 1; \end{cases}$ $\quad x \in (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

$\log_{\log_3 x} 9 - \log_{\log_3 x} (\log_3 x) < 0$, $\quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 9) > 0$,
$\left[\begin{array}{l} \log_3 x < 1, \\ \log_3 x > 9. \end{array} \right.$

С учётом ОДЗ имеем: $1 < x < 3, x > 3^9$.

3. Запишем решение исходной системы неравенств:
$1 < x \leqslant 2$ (см. рис. 58).

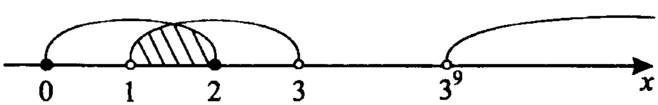


Рис. 58.

Ответ: $(1; 2]$.

С4. I случай.

Пусть продолжение стороны BC пересекает окружность в точке M (см. рис. 59). Угол ABM вписанный, его величина 90°, следовательно, AM — диаметр, $AM = 2\sqrt{3}$. В прямоугольном треугольнике ABM

$BM = \sqrt{AM^2 - AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3.$

По теореме о касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, имеем: $KC^2 = MC \cdot BC$, $KC^2 = (MB + BC) \cdot BC$.

Обозначим $BC = x$, $x > 0$, тогда $9 = x(3 + x)$, $x^2 + 3x - 9 = 0$,

$x_1 = \dfrac{-3 + 3\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)$,

$x_2 = \dfrac{-3 - 3\sqrt{5}}{2}$, не удовлетворяет условию $x > 0$.

Отсюда $AD = BC = \dfrac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

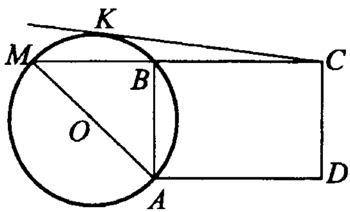


Рис. 59

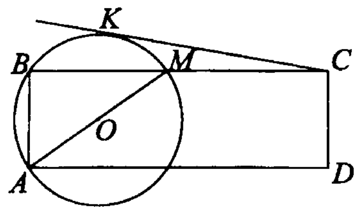


Рис. 60

II случай.

Сторона BC пересекается с окружностью в точках B и M (см. рис. 60), тогда из первого случая следует, что $BM = 3$.

$KC^2 = BC \cdot MC = (BC - BM) \cdot BC.$

Обозначим $BC = x$, $x > 0$, тогда $9 = x(x - 3)$, $x^2 - 3x - 9 = 0$.

$x_1 = \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

$x_2 = \dfrac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$, не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$.

С5. $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 2} + \dfrac{1}{\log_y 2} = 4, \\ y = a(x - 4) + 3. \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение системы:

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$

На ОДЗ уравнение примет вид: $\log_2 x + \log_2 y = 4$, $xy = 16$, $y = \dfrac{16}{x}$ (см. рис. 61).

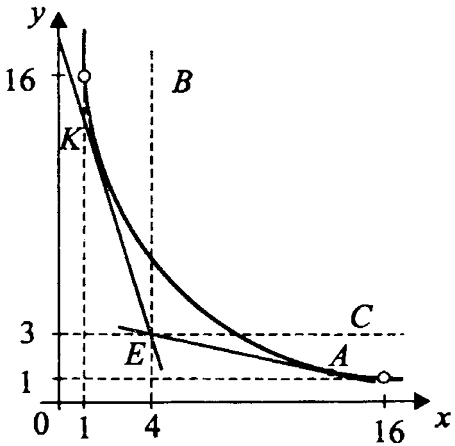


Рис. 61.

Изобразим ветвь гиперболы $y = \dfrac{16}{x}$ при $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$.

Все прямые $y = a(x-4)+3$ проходят через точку $E(4;3)$.

Прямые EK и EA — касательные к гиперболе, значит, все прямые вида $y = a(x-4)+3$, проходящие между сторонами углов AEC и BEK, пересекают гиперболу в двух точках. Найдём угловые коэффициенты прямых EK и EA, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{16}{x} = a(x-4)+3, \\ a = -\dfrac{16}{x^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{16}{x} = -\dfrac{16}{x^2}(x-4)+3, \\ a = -\dfrac{16}{x^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 32x + 64 = 0, \\ a = -\dfrac{16}{x^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = \dfrac{8}{3}, \end{array}\right. \\ a = -\dfrac{16}{x^2}; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{4}, \\ a = -\dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Следовательно, $a \in \left(-\infty; -\dfrac{9}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right)$.

Найдём, при каких значениях a прямая $y = a(x-4)+3$ проходит через точки $(1; 16)$ или $(16; 1)$.

$y(1) = 16,\ \ a(1-4)+3 = 16,\ \ a = -\dfrac{13}{3} \in \left(-\infty; -\dfrac{9}{4}\right)$,

$y(16) = 1,\ \ a(16-4)+3 = 1,\ \ a = -\dfrac{1}{6} \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right)$.

При $a = -\dfrac{13}{3}$ и $a = -\dfrac{1}{6}$ система будет иметь только одно решение, что противоречит условию задачи.

Следовательно, $a \in \left(-\infty; -\dfrac{13}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{13}{3}; -\dfrac{9}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{6}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{6}; 0\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{13}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{13}{3}; -\dfrac{9}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{6}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{6}; 0\right)$.

С6. а) Все x_n — нечётные, каждое очередное x_n получается как разность двух нечётных чисел плюс один. Тогда $x_k \neq 0$ и $x_k \in Z$, то есть $|x_k| \geqslant 1$. При этом $|x_3| = |3 - 5 + 1| = 1$.

б) Выпишем несколько первых членов: $x_1 = 100$, $x_2 = 300$, $x_3 = -200$, $x_4 = 500$, $x_5 = -700$. Докажем по индукции, что при $k \geqslant 3$ $x_k < 0$ для нечётных k и $x_k > 0$ для чётных k. База индукции уже выписана. Пусть k чётное, тогда $x_{k+1} = x_{k-1} - x_k$, $x_{k-1} < 0$ и $x_k > 0$ по предположению индукции, следовательно, $x_{k+1} < 0$ и $|x_{k+1}| > |x_k|$. Аналогично для нечётных k $x_{k+1} > 0$ и $|x_{k+1}| > |x_k|$. Таким образом, при $k \geqslant 3$ последовательность $|x_k|$ возрастает. Среди чисел $|x_1|, |x_2|, |x_3|$ наименьшим является 100.

в) Заметим, что $x_{n+2}x_{n+1} = x_n x_{n+1} - 3$ при $x_{n+1} \neq 0$. Тогда $x_1x_2 = 2013$, $x_2x_3 = 2013 - 3$, $x_3x_4 = 2013 - 2 \cdot 3$, ..., $x_kx_{k+1} = 2013 - (k-1)3$. Заметим, что $x_{672}x_{673} = 0$ и $x_mx_{m+1} \neq 0$ при $m < 672$. Значит, $x_m \neq 0$ и определены при $m \leqslant 672$ и $x_{672+1} = 0$. Таким образом, наименьшее значение $|x_k|$ равно $|x_{673}| = 0$.

Ответ: а) 1 ; б) 100 в) 0.

Решение варианта 10

B1. Взрослых жителей в городе $100\% - 20\% = 80\%$, то есть $300\,000 \cdot \frac{80}{100} = 240\,000$ человек. Из них работают $100\% - 40\% = 60\%$, то есть $240\,000 \cdot \frac{60}{100} = 144\,000$ человек.

Ответ: 144 000.

B2. Из данных диаграммы следует, что наименьшая норма осадков была зафиксирована во 2-м месяце.

Ответ: 2.

B3. $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ и $AB = CD = 3$ (см. рис. 62).

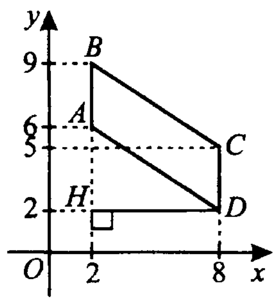


Рис. 62.

Тогда $S_{ABCD} = DH \cdot AB = 6 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18.

B4. Перевозка А: так как $10 < \frac{49}{4{,}5} < 11$, нужно 11 автомобилей, стоимость перевозки $11 \cdot 18 \cdot 3800 = 752\,400$ (руб.)

Перевозка Б: нужно 7 автомобилей, стоимость перевозки $7 \cdot 18 \cdot 6400 = 806\,400$ (руб.)

Перевозка В: так как $5 < \frac{49}{9} < 6$, нужно 6 автомобилей, стоимость перевозки $6 \cdot 18 \cdot 7200 = 777\,600$ (руб.)

Самая дешёвая перевозка — 752 400 рублей.

Ответ: 752 400.

B5. Найдём корень уравнения $(x-7)^3 = 64$, $(x-7)^3 = 4^3$, $x - 7 = 4$, $x = 11$.

Ответ: 11.

B6. $\angle CBO = 90° - \angle COB$ ($\triangle COB$ прямоугольный, так как BC — касательная, $BC \perp OC$).
$\angle COB = 67°$ ($\angle COB$ центральный, измеряется величиной дуги AC).
$\angle CBO = 90° - 67°$, $\angle CBO = 23°$.

Ответ: 23.

B7. $\sqrt{435^2 - 300^2} = \sqrt{(435-300)(435+300)} = \sqrt{135 \cdot 735} =$
$= \sqrt{(3^3 \cdot 5)(7^2 \cdot 3 \cdot 5)} = \sqrt{3^4 \cdot 7^2 \cdot 5^2} = 3^2 \cdot 7 \cdot 5 = 315.$

Ответ: 315.

B8. На отрезке $[-2; 3]$ функция принимает наименьшее значение в точке, в которой производная меняет знак с «$-$» на «$+$», то есть в точке минимума. Такой точкой является $x = 2$.

Ответ: 2.

B9. Обозначим длину ребра куба через a. Так как квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений, то $\left(\sqrt{48}\right)^2 = a^2 + a^2 + a^2$; $3a^2 = 48$; $a = 4$. Отсюда находим объём куба: $V = a^3 = 4^3 = 64$.

Ответ: 64.

B10. Событие A «в автобусе меньше 22 пассажиров» и событие B «в автобусе от 22 до 29 пассажиров» несовместны, их сумма — событие C «в автобусе меньше 30 пассажиров». Тогда $P(A) + P(B) = P(C)$, $P(B) = P(C) - P(A) = 0{,}92 - 0{,}61 = 0{,}31$.

Ответ: 0,31.

B11. Примем за основание пирамиды треугольник ABS (см. рис. 63), тогда высота пирамиды $h = CS$. Площадь прямоугольного треугольника ABS равна $S = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot BS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$. Объём пирамиды равен

$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36.$

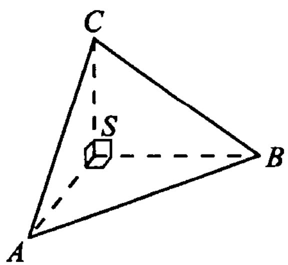


Рис. 63.

Ответ: 36.

B12. По условию $R \geqslant 30$; $\dfrac{120R_2}{120+R_2} \geqslant 30$; $4R_2 \geqslant 120 + R_2$; $R_2 \geqslant 40$. Искомое наименьшее сопротивление равно 40 Ом.

Ответ: 40.

B13. Пусть 31%-го раствора взяли x, тогда и 23%-го раствора тоже взяли x (по условию). Получившегося раствора будет $2x$, а чистого вещества будет $0{,}31x + 0{,}23x = 0{,}54x$. Узнаем, сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора: $\dfrac{0{,}54x}{2x} \cdot 100\% = 27\%$.

Ответ: 27.

B14. $y' = 6 + 2x$. $y' = 0$ при $x = -3$; $y' < 0$ при $x < -3$, $y' > 0$ при $x > -3$. $x = -3$ — точка минимума.

Ответ: -3.

C1. а) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{4}{\sin^2 x} + 6 = 0$.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos \neq 0. \end{cases}$ $x \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

$1 + \operatorname{tg}^2 x - 4 - 4\operatorname{ctg}^2 x + 6 = 0$,

$\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{4}{\operatorname{tg}^2 x} + 3 = 0$,

$\operatorname{tg}^4 x + 3\operatorname{tg}^2 x - 4 = 0$, $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ \operatorname{tg}^2 x = -4 \text{ — корней нет.} \end{array}\right.$

$\operatorname{tg} x = \pm 1$,

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Можно записать ответ по-другому: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

б) Выполним отбор корней на промежутке $\left(-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right)$ (см. рис. 64).

$x_1 = -\dfrac{7\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{13\pi}{4}$;

$x_2 = -3\pi + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{11\pi}{4}$;

$x_3 = -2\pi - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{9\pi}{4}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $-\dfrac{13\pi}{4}$; $-\dfrac{11\pi}{4}$; $-\dfrac{9\pi}{4}$.

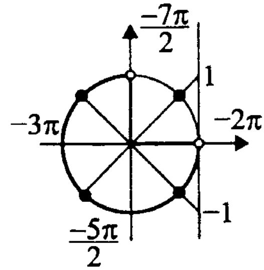


Рис. 64.

С2. 1) Прямая BC_1 лежит в плоскости CBB_1, прямая AE пересекает плоскость CBB_1 в точке E. Точка E не принадлежит прямой BC_1, следовательно, по признаку скрещивающихся прямых BC_1 и AE — скрещивающиеся прямые.

2) Введём прямоугольную систему координат (см. рис. 65) и запишем координаты точек, необходимых для решения задачи $B(0;0;0)$, $C_1(0;2;4)$, $A(3;0;0)$, $E(0;2;2)$.

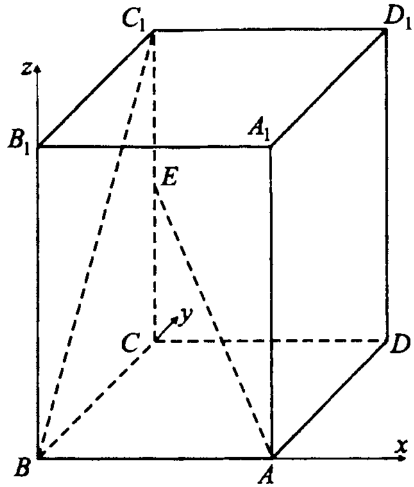


Рис. 65.

3) Найдём уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$, проходящей через прямую BC_1 параллельно прямой AE. Пусть $\vec{n}(a;b;c)$ — вектор нормали к этой плоскости, тогда $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC_1}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{AE}$. $\overrightarrow{BC_1}(0;2;4)$; $\overrightarrow{AE}(-3;2;2)$. Составим и решим систему уравнений.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b + 4c = 0, \\ -3a + 2b + 2c = 0. \end{cases}$$

Обозначим $a = t$, $t \in R$, $t \neq 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} 2b + 4c = 0, \\ 3t - 2b - 2c = 0; \end{cases} \quad c = -1{,}5t, \;\; b = 3t.$$

Имеем $\vec{n}(t; 3t; -1{,}5t)$. Если, например $t = 2$, то $\vec{n}(2; 6; -3)$.
Уравнение плоскости примет вид $2x + 6y - 3z + d = 0$.
Точка $B(0; 0; 0)$ лежит в этой плоскости, значит её координаты удовлетворяют уравнению плоскости: $2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + d = 0, d = 0$.
Отсюда $2x + 6y - 3z = 0$ — искомое уравнение плоскости.
4. Расстояние от точки $A(3; 0; 0)$ до найденной плоскости

$$\rho = \frac{|3 \cdot 2 + 6 \cdot 0 - 3 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{7}.$$

Ответ: $\frac{6}{7}$.

С3. $$\begin{cases} (\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} - 10 < 0, \\ \lg^2(100x) + \lg^2\left(\dfrac{10}{x}\right) \geqslant \lg x^5 + 4. \end{cases}$$

1. Решим первое неравенство системы:

$$(\sqrt[10]{3})^{2x} + \frac{(\sqrt[10]{3})^x}{(\sqrt[10]{3})^{10}} - 10 < 0,$$

$$3(\sqrt[10]{3})^{2x} + (\sqrt[10]{3})^x - 30 < 0.$$

Обозначим $(\sqrt[10]{3})^x = t, t > 0$.

$$\begin{cases} 3t^2 + t - 30 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} -\dfrac{10}{3} < t < 3, \\ t > 0; \end{array}\right. \quad t \in (0; 3).$$

Получим $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x < 3, \frac{x}{10} < 1, x < 10$.

2. Решим второе неравенство системы:
ОДЗ: $x > 0$.

$(\lg 100 + \lg x)^2 + (\lg 10 - \lg x)^2 - 5 \lg x - 4 \geqslant 0,$
$(2 + \lg x)^2 + (1 - \lg x)^2 - 5 \lg x - 4 \geqslant 0,$
$4 + 4 \lg x + \lg^2 x + 1 - 2 \lg x + \lg^2 x - 5 \lg x - 4 \geqslant 0,$
$2 \lg^2 x - 3 \lg x + 1 \geqslant 0.$

$$(\lg x - 1)(\lg x - \tfrac{1}{2}) \geqslant 0, \quad \left[\begin{array}{l} \lg x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \lg x \geqslant 1. \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ имеем: $0 < x \leqslant \sqrt{10}; x \geqslant 10$.

3. Запишем решение исходной системы неравенств: $0 < x \leqslant \sqrt{10}$ (см. рис. 66).

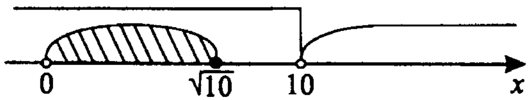


Рис. 66.

Ответ: $(0; \sqrt{10}]$.

С4. В $\triangle ABC$ проведём медиану BH (см. рис. 67).

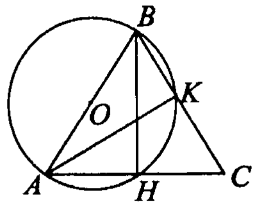


Рис. 67.

По условию $\triangle ABC$ равнобедренный, AB и BC — боковые стороны, тогда медиана BH является высотой.

Так как AB — диаметр и $\angle AHB = 90°$, то окружность пересекает основание треугольника в точке H. Проведём AK, где K — точка пересечения окружности с боковой стороной BC, тогда $\angle AKB = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр.

Прямоугольные треугольники BHC и AKC имеют общий угол C, значит, подобны. Из подобия треугольников следует: $\dfrac{HC}{KC} = \dfrac{BC}{AC}$.

Обозначим $HC = x$, тогда $AC = 2x$, $x > 0$. Могут представиться два случая.

I случай

$BK : KC = 2 : 3$, тогда $BK = 6$, $KC = 9$.

$\dfrac{x}{9} = \dfrac{15}{2x}$, $x = \dfrac{3\sqrt{30}}{2}$, $AC = 3\sqrt{30}$.

II случай

$KC : BK = 2 : 3$, тогда $KC = 6$, $BK = 9$.

$\dfrac{x}{6} = \dfrac{15}{2x}$, $x = 3\sqrt{5}$, $AC = 6\sqrt{5}$.

Ответ: $6\sqrt{5}$ или $3\sqrt{30}$.

C5. $\begin{cases} y = a(x-4), \\ \dfrac{1}{\log_x 3} + \dfrac{1}{\log_y 3} = 1. \end{cases}$

Рассмотрим второе уравнение системы:

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x \neq 1, \\ y \neq 1. \end{cases}$

На ОДЗ уравнение имеет вид: $\log_3 x + \log_y = 1,\ xy = 3,\ y = \dfrac{3}{x}$.

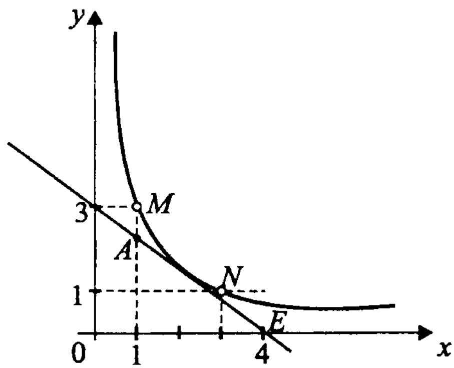


Рис. 68.

Изобразим ветвь гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$ (см. рис. 68) при $x > 0,\ y > 0,$ $x \neq 1,\ y \neq 1$.

Все прямые $y = a(x-4)$ проходят через точку $E(4;0)$. Исходная система не имеет решений в двух случаях.

1) Прямые вида $y = a(x-4)$ при $x < 4$ лежат внутри угла OEA, где прямая AE – касательная к графику функции $y = \dfrac{3}{x}$. Найдём угловой коэффициент прямой AE, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} = a(x-4), \\ a = -\dfrac{3}{x^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3}{x} = -\dfrac{3}{x^2}(x-4), \\ a = -\dfrac{3}{x^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ a = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Следовательно, $a \in \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$.

2) Прямая проходит через точки $M(1;3)$ и $N(3;1)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{1-3}$, $x-1=-y+3$, $y=-x+4$.
Прямая $y=-x+4$ проходит через точку E, значит при $a=-1$ прямая $y=a(x-4)$ и гипербола $y=\frac{3}{x}$, $x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ y\neq 1$ не имеют общих точек, а следовательно, исходная система не имеет решений. Система не имеет решений и при $a=0$. Следовательно, $a\in\{-1\}\cup\left(-\frac{3}{4};0\right]$.

Ответ: $\{-1\}\cup\left(-\frac{3}{4};0\right]$.

С6. а) Заметим, что $S(n)\geqslant n$ для любого $n\in N$. Тогда $n\leqslant 14$. Легко убедиться, что только $n=13$ удовлетворяет указанному условию.

б) Так как $Q(n)=\frac{24}{23}$ (23 — простое число), хотя бы один из делителей n делится на 23, а значит и n делится на 23. То есть n имеет вид $23m$. Очевидно, $n=23$ — решение. При $m>1$ $Q(n)\geqslant 1+\frac{1}{23}+\frac{1}{m}>\frac{24}{23}$, значит, других решений нет.

в) Легко проверить, что $Q(n)=\frac{S(n)}{n}$. Действительно, пусть $n=d_1d_2$, тогда $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{d_1+d_2}{n}$; если $n=d^2$, то $\frac{1}{d}=\frac{d}{n}$.

Таким образом, все слагаемые в $Q(n)$ распадаются на числа вида $\frac{d_1}{n}$, $\frac{d_2}{n}$ и, быть может, ещё одно слагаемое $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Приведение к общему знаменателю n доказывает, что $Q(n)=\frac{S(n)}{n}$. В нашем случае $S(n)=195$, $\frac{S(n)}{n}=\frac{65}{24}$.

Значит, $\frac{195}{n}=\frac{65}{24}$ и $n=72$.

Ответ: а) 13 ; б) 23 в) 72.

Решение варианта 11

B1. Присутствовали на занятиях $100\% - 5\% = 95\%$, то есть $1200 \cdot \frac{95}{100} = 1140$ учеников. Из них обедали в столовой $1140 \cdot \frac{40}{100} = 456$ человек.

Ответ: 456.

B2. По рисунку определяем, что наименьшее значение цены на графике достигается 25-го числа.

Ответ: 25.

B3. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. 69), MN — её средняя линия.

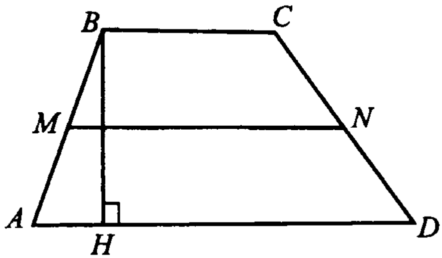


Рис. 69.

$MN = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD)$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (BC + AD)$, тогда $MN = \frac{S_{ABCD}}{BH} = \frac{225}{15} = 15$.

Ответ: 15.

B4. Заказ в фирме А: $64 \cdot (320 \cdot 0{,}125 + 85) = 8000$ (рублей).

Заказ в фирме Б: $64 \cdot (360 \cdot 0{,}125 + 75) = 7680$ (рублей).

Заказ в фирме В: $64 \cdot (440 \cdot 0{,}125 + 50) = 6720$ (рублей).

Стоимость самого дешёвого заказа — 6720 рублей.

Ответ: 6720.

B5. Найдём корень уравнения $\frac{1}{2x+3} = -2$, $2x + 3 \neq 0$, $x \neq -\frac{3}{2}$.
$-2(2x+3) = 1$, $-4x - 6 = 1$, $-4x = 7$, $x = -1{,}75$.

Ответ: $-1{,}75$.

B6. По теореме Пифагора $CB^2 = AB^2 - CA^2 = 36, CB = 6$ (см. рис. 70).

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{CB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

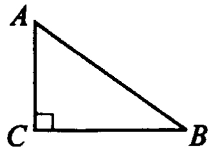


Рис. 70.

Ответ: 0,75.

B7. Сначала упростим выражение

$$\frac{n^{\frac{7}{4}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{6}}} = n^{\frac{7}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6}} = n^{\frac{21-1-2}{12}} = n^{\frac{18}{12}} = n^{\frac{3}{2}}.$$

При $n = 36$ имеем $\left(6^2\right)^{\frac{3}{2}} = 6^3 = 216.$

Ответ: 216.

B8. Производная функции положительна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку возрастания функции, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует. По рисунку определяем абсциссы таких точек: -6, -5, -4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7. Таких точек 10.

Ответ: 10.

B9. $S_{\text{бок. пов.}} = \frac{1}{2} P \cdot SR$ (см. рис. 71), где P — периметр основания,

SR — апофема.
$P = 3AB = 3 \cdot 6 = 18.$
$S_{\text{бок. пов.}} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 9 = 81.$

Ответ: 81.

B10. Вероятность того, что оба банкомата неисправны, равна $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$. Искомая вероятность равна $1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

Ответ: 0,99.

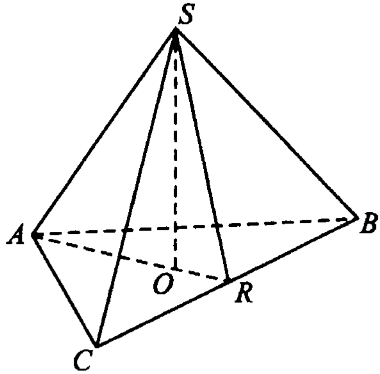


Рис. 71.

B11. Так как объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 64$; $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{64} = 4$. Отсюда отношение площадей поверхностей $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 4^2 = 16$.

Ответ: 16.

B12. По условию $\eta \geqslant 20$; $\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100 \geqslant 20$; $T_1 - T_2 \geqslant 0{,}2T_1$; $0{,}8T_1 \geqslant T_2$; $0{,}8T_1 \geqslant 310$; $T_1 \geqslant 387{,}5$. Искомая минимальная температура равна 387,5 K.

Ответ: 387,5.

B13. Пусть в книге x страниц, тогда Оля прочитала книгу за $\frac{x}{50}$ ч, а Дима прочитал книгу за $\frac{x}{30}$ ч. Учитывая, что Оля раньше закончила читать книгу на 36 мин $= 0{,}6$ часа, составим уравнение: $\frac{x}{30} - \frac{x}{50} = 0{,}6$; $x = 45$ (страниц).

Ответ: 45.

B14. $y' = 12x - 3x^2 = 3x(4 - x)$. $y' = 0$ при $x = 0$; $x = 4$.

1) $y' > 0$ при $0 < x < 4$.

2) $y' < 0$ при $x > 4$ и $x < 0$.

$x = 4$ — точка максимума.

Ответ: 4.

C1. $\log_{100}\left(2\cos^2 x + 5\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 11\right) = 0{,}5,$

$2\cos^2 x + 5\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 11 = 10,$

$2 - 2\sin^2 x - 5\sin x + 11 = 10,$

$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0,\quad (2\sin x - 1)(\sin x + 3) = 0.$

Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то $\sin x + 3 > 0$ при любом значении x,

$2\sin x - 1 = 0,\quad \sin x = \frac{1}{2},\quad x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

б) Промежутку $\left(-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ принадлежат корни $-\frac{11\pi}{6}$ и $-\frac{7\pi}{6}$ (см. рис. 72).

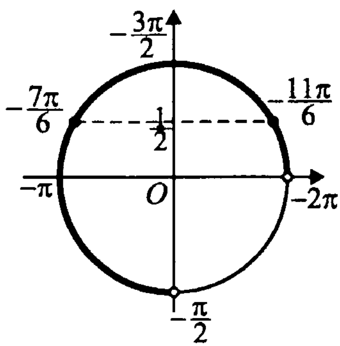


Рис. 72.

Ответ: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

C2. Пусть N — середина A_1C_1, P — середина AB (см. рис. 73). Тогда NM и KP — средние линии треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC соответственно, плоскости NMP и C_1B_1B параллельны.

Проведём $C_1T||KM$, $C_1T = KM$. Тогда угол между прямыми KM и AC_1 равен углу между прямыми AC_1 и C_1T. Так как $KM||CBB_1$, то точка T лежит в плоскости CBB_1. Опустим перпендикуляр TH на BC.

$CH = KP = \frac{1}{2}CB = 2$. $AH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (высота в правильном треугольнике). По теореме Пифагора:

$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29},$

$C_1T = KM = \sqrt{KP^2 + PM^2} = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26},$

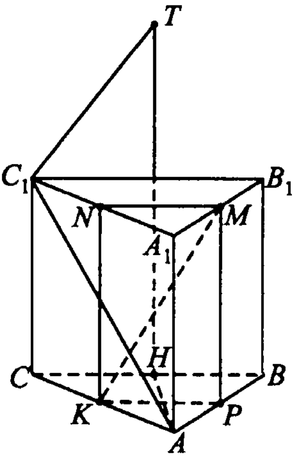


Рис. 73.

$$AT = \sqrt{AH^2 + TH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 20^2} = \sqrt{412} = 2\sqrt{103}.$$

По теореме косинусов:

$$AT^2 = C_1T^2 + AC_1^2 - 2C_1T \cdot AC_1 \cdot \cos\angle AC_1T,$$

$$103 = 26 + 29 - 2\sqrt{26 \cdot 29} \cdot \cos\angle AC_1T,$$

$\cos\angle AC_1T = -\dfrac{24}{\sqrt{754}}$. Так как в качестве угла между прямыми мы выбираем острый угол, то нужно взять смежный угол с углом AC_1T, его косинус равен $\dfrac{24}{\sqrt{754}}$.

Ответ: $\dfrac{24}{\sqrt{754}}$.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |x| > 1, \\ |x| \neq \sqrt{2}. \end{cases}$

1) $\log_{x^2-1}(x^2 + 1) + 2\log_{x^2+1}(x^2 - 1) \leqslant 3$. Обозначив $t = \log_{x^2+1}(x^2 - 1)$, получаем $\dfrac{1}{t} + 2t \leqslant 3$, $\dfrac{2t^2 - 3t + 1}{t} \leqslant 0$,

$\dfrac{(2t-1)(t-1)}{t} \leqslant 0$, $\left[\begin{array}{l} t < 0, \\ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{array}\right.$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{x^2+1}(x^2-1)<0, \\ \begin{cases} \log_{x^2+1}(x^2-1)\geqslant 0{,}5, \\ \log_{x^2+1}(x^2-1)\leqslant 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Так как $x^2+1>1$, то

$$\left[\begin{array}{l} x^2-1<1, \\ \begin{cases} (x^2-1)^2\geqslant x^2+1, \\ x^2-1\leqslant x^2+1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2<2, \\ x^4-3x^2\geqslant 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x|<\sqrt{2}, \\ |x|\geqslant\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем: $x\in(-\infty;-\sqrt{3}]\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup[\sqrt{3};+\infty)$.

2) $25^x-10^x-10^{x+1}+6\cdot 4^{x+1}\leqslant 0$;

$5^{2x}-11\cdot 10^x+24\cdot 2^{2x}\leqslant 0$;

$2{,}5^{2x}-11\cdot 2{,}5^x+24\leqslant 0$, $(2{,}5^x-3)(2{,}5^x-8)\leqslant 0$, $3\leqslant 2{,}5^x\leqslant 8$, $x\in[\log_{2,5}3;\log_{2,5}8]$.

3) Докажем, что $\log_{2,5}3<\sqrt{2}$. Это равносильно $2{,}5^{\sqrt{2}}>3 \Leftrightarrow 2{,}5^{3\sqrt{2}}>27$, что верно ввиду $2{,}5^{3\sqrt{2}}>2{,}5^4=6{,}25^2>27$. Также $\log_{2,5}8>\sqrt{3}$, так как $\log_{2,5}8>\log_{2,5}6{,}25=2>\sqrt{3}$. Пересекая найденные по отдельности решения неравенств, получаем
$x\in[\log_{2,5}3;\sqrt{2})\cup[\sqrt{3};\log_{2,5}8]$.

Ответ: $[\log_{2,5}3;\sqrt{2})\cup[\sqrt{3};\log_{2,5}8]$.

С4. 1) Пусть точки M и N лежат на сторонах $\triangle ABC$ (см. рис. 74).

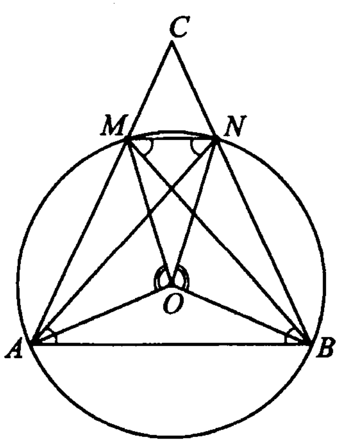


Рис. 74.

Тогда $\angle NAB = \angle MBA = \angle NMB = \angle MNA = 30°$ как вписанные углы, опирающиеся на дуги с центральным углом $60°$. Так как $\angle MNA = \angle BAN$, то $MN || AB$, $AMNB$ — равнобедренная трапеция. Опустим на AB перпендикуляры CK и NH (см. рис. 75).

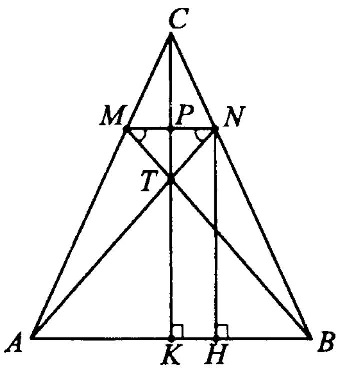


Рис. 75.

$\triangle MTN \sim \triangle ATB$ (по двум углам), поэтому $\frac{PT}{TK} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{4}$. $PK = NH = 10$, откуда $TK = 8$. $AK = TK \operatorname{ctg} 30° = 8\sqrt{3}$.

$AH = NH \operatorname{ctg} 30° = 10\sqrt{3}$, $KH = AH - AK = 2\sqrt{3}$.

$BH = KB - KH = AK - KH = 6\sqrt{3}$.

$S_{\triangle NBH} = \frac{1}{2} \cdot NH \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$.

$\triangle CBK \sim \triangle NBH$ (прямоугольные с общим острым $\angle B$), поэтому $S_{\triangle CBK} = \left(\frac{KB}{BH}\right)^2 \cdot S_{\triangle NBH} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 30\sqrt{3} = \frac{16 \cdot 30\sqrt{3}}{9} = \frac{160\sqrt{3}}{3}$.

$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CBK} = \frac{320\sqrt{3}}{3}$.

2) Пусть точки M и N лежат на продолжениях сторон $\triangle ABC$. Аналогично предыдущему случаю $\angle NAB = \angle MBA = \angle NMB = \angle MNA = 30°$, $AMNB$ — равнобедренная трапеция, $\triangle MTN \sim \triangle ATB$ (см. рис. 76).

Как и в предыдущем случае $KH = 2\sqrt{3}$, $NH = 6\sqrt{3}$. $\triangle CBP \sim \triangle BNH$ (прямоугольные, $\angle CBP = \angle CNK$ как соответственные), коэффициент подобия $k = \frac{PB}{NH} = \frac{1}{3}$ (так как $KN : PB = 4 : 1$).

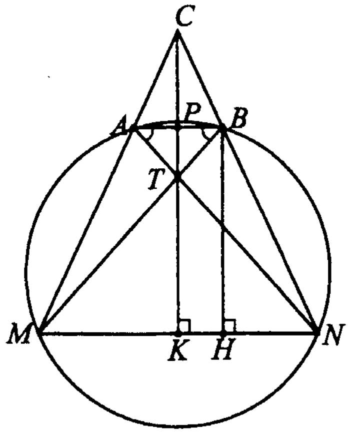


Рис. 76.

$$S_{\triangle CBP} = k^2 \cdot S_{\triangle BNH} = k^2 \frac{1}{2} \cdot BH \cdot NH = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CBP} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{320\sqrt{3}}{3}; \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

С5. При $a < 0$ первое неравенство системы неразрешимо.

При $a = 0$ первое неравенство имеет решение $(0; 0)$, которое является решением системы.

Пусть теперь $a > 0$. Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ является решением системы, то решением является также пара $(-x_0; y_0)$. Следовательно, можно искать значения a, при которых система имеет решения при положительных x и y.

Графиком $x^2 + y^2 \leqslant a^3$ является круг с центром в начале координат и радиусом $a\sqrt{a}$. Графиком $|x| \cdot y \geqslant 4a$ при $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ является ветвь гиперболы $y = \dfrac{4a}{x}$ и участок плоскости выше неё. Заметим, что оба графика симметричны относительно прямой $y = x$, причём на этой прямой находится наиболее близкая к началу координат точка графика $y = \dfrac{4a}{x}$ (см. рис. 77).

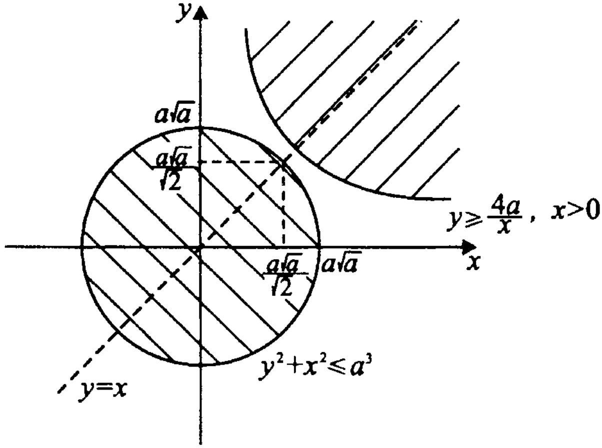


Рис. 77.

В первой четверти окружность $x^2 + y^2 = a^3$ пересекает прямую $y = x$ в точке $\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2}}; \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right)$. Следовательно, для существования решений необходимо, чтобы $y\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$, где $y(x) = \frac{4a}{x}$.

$\frac{\sqrt{2} \cdot 4a}{a\sqrt{a}} \leqslant \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$; $a^2 \geqslant 8$; $a \geqslant 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\{0\} \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$.

С6. а.1) Оценка. Всего бригад 5, и каждая бросает в котёл не более пяти яблок, поэтому в котле не может быть более 25 яблок. Заметим также, что хотя бы одна бригада должна собрать чётное число яблок (иначе в сумме пять нечётных чисел дадут нечётное число, а у нас сумма 336 — чётное). Следовательно, хотя бы одна бригада бросит в котёл не более 4-х яблок (остаток чётного числа при делении на 6 чётен), а всего в котле не более $5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 24$ яблок.

а.2) Пример. Бригады собрали 11, 11, 11, 11, 292 яблока. Остатки после деления на 6 равны 5, 5, 5, 5, 4. В котле $5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 24$ яблока.

б.1) Оценка. Пусть всего было n бригад, в них k_1, k_2, ..., k_n школьников. Тогда они кинули в котёл не более $k_1 - 1$, $k_2 - 1$, ..., $k_n - 1$ яблок соответственно, всего не более $k_1 - 1 + k_2 - 1 + \ldots + k_n - 1 = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) - n = 30 - n$ яблок. Однако, если бригада была всего одна, то в котле всего 6 яблок ($336 = 30 \cdot 11 + 6$). Следовательно, в котле не более $30 - 2 = 28$ яблок.

6.2) Пример. Пусть в одной бригаде 29 школьников, в другой — 1 школьник, они собрали соответственно 279 яблок и 57 яблок. Тогда первая бригада бросит в котёл 28 яблок, вторая — 0, всего 28 яблок.

Ответ: а) 24; б) 28.

Решение варианта 12

B1. Футболом интересуются 100% − 70% = 30% жителей, то есть $50\,000 \cdot \frac{30}{100} = 15\,000$ человек. Из них финал смотрели 60%, то есть $15\,000 \cdot \frac{60}{100} = 9000$ человек.

Ответ: 9000.

B2. Искомым минимумом на графике является значение $4180 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$.

Ответ: 4180.

B3. Площадь квадрата равна площади прямоугольника.
$S_{\text{прямоуг.}} = 2 \cdot 18 = 36$.
$S_{\text{квадрата}} = 36 = 6^2$, то есть сторона квадрата равна 6.

Ответ: 6.

B4. Стоимость услуги фирмы А: $12 \cdot 80 = 960$ (руб.);
фирмы Б: $150 + (80 - 20) \cdot 14 = 990$ (руб.);
фирмы В: $50 + 50 + 65 \cdot 13 = 945$ (руб.).
Самая дешёвая поездка обойдётся в 945 рублей.

Ответ: 945.

B5. По определению арифметического корня чётной степени имеем $49 - 3x = 4$; $3x = 45$; $x = 15$.

Ответ: 15.

B6. Обозначим через α внешний угол при вершине B.
$\sin\alpha = \sin(\pi - \angle ABC) = \sin\angle ABC = \frac{AC}{AB}$ (см. рис. 78). По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 100 - 19 = 81$, $AC = 9$. Значит, $\sin\alpha = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

B7. $\dfrac{\sqrt[2]{\sqrt[6]{a}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}\sqrt[4]{a}}} = \dfrac{\sqrt[12]{a}}{\frac{1}{3}\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt[12]{a}}{\sqrt[12]{a}} = 3.$

Ответ: 3.

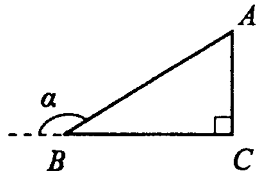


Рис. 78.

B8. На отрезке $[-7; 10]$ функция $f(x)$ имеет две точки максимума (это точки, в которых производная данной функции меняет знак с плюса на минус).

Ответ: 2.

B9. $S_{\text{бок. пов.}} = \frac{1}{2}P \cdot SM$ (см. рис. 79), где P — периметр основания, SM — апофема. $P = 3AB$.

$15 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AB \cdot 5, \quad AB = 2.$

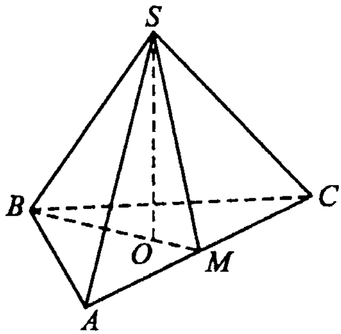


Рис. 79.

Ответ: 2.

B10. Вероятность того, что футбольная команда A выиграет на своём поле, равна (по условию) 0,4, а в гостях — 0,3.
Тогда, по формуле нахождения вероятности произведения (пересечения) независимых событий, искомая вероятность равна $0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

Ответ: 0,12.

B11. Обозначив через h_1 и r_1 соответственно высоту и радиус основания большего конуса, получаем, что высота меньшего конуса $h_2 = \frac{h_1}{2}$. Из подобия треугольников, являющихся осевыми сечениями конусов, следует, что радиус основания меньшего конуса $r_2 = \frac{r_1}{2}$. Тогда искомый объём $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \frac{h_1}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{8} \cdot V_1 = \frac{1}{8} \cdot 20 = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

B12. По условию лебёдка может функционировать без проверки рабочим при $\varphi \leqslant 2400$; $20t + \frac{4t^2}{2} \leqslant 2400$; $t^2 + 10t - 1200 \leqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $x_1 = -40$ и $x_2 = 30$. Решением неравенства является отрезок $[-40; 30]$. Искомое время равно 30 минут.

Ответ: 30.

B13. Пусть x км — расстояние от города A до места, где автомобили встретятся, тогда x км — расстояние, которое прошёл первый автомобиль, $850 - x$ км прошёл второй автомобиль до встречи.

Время первого автомобиля до встречи $\frac{x}{75}$ часов, время второго автомобиля до встречи $\frac{850 - x}{80}$ часов.

Составляем уравнение: $\frac{x}{75} = \frac{850 - x}{80} + 1$.

$80x = 850 \cdot 75 - 75x + 75 \cdot 80$, $(80 + 75)x = 75(850 + 80)$,

$x = \frac{930 \cdot 75}{155}$, $x = 450$.

Ответ: 450.

B14. 1) Найдём значения функции на концах отрезка:
$y(-4) = -2{,}25 - 4 + 16 = 9{,}75$, $y(-1) = -9 - 1 + 16 = 6$.

2) Найдём производную: $y' = -\frac{9}{x^2} + 1$.

3) Найдём стационарные точки: $y' = 0$, $-\frac{9}{x^2} + 1 = 0$, $\frac{9}{x^2} = 1$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$.

4) Найдём значение функции при $x = -3$: $y(-3) = -3 - 3 + 16 = 10$.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее:
$y(-3) = 10$.

Ответ: 10.

С1. $\log_8\left(2\sin^2 x - 9\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 5\right) = \frac{1}{3}$,

$2 - 2\cos^2 x + 9\cos x + 5 = 2$,

$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0, \quad (2\cos x + 1)(\cos x - 5) = 0.$

Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $\cos x - 5 < 0$ при любом значении x,

$2\cos x + 1 = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z.$

б) Промежутку $\left(-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$ принадлежат корни $-\frac{10\pi}{3}$ и $-\frac{8\pi}{3}$ (см. рис. 80).

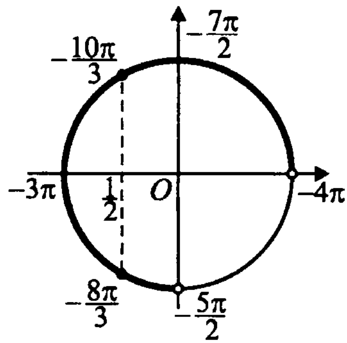


Рис. 80.

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$; б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

С2. Отметим на ребре A_1C_1 точку N, на ребре AB точку P так, что $A_1N : NC_1 = AP : PB = 2 : 1$ (см. рис. 81). Тогда $NM \parallel B_1C_1$, $KP \parallel BC$, $NM = KP = \frac{2}{3} \cdot BC = 4$ ($\triangle A_1NM \sim \triangle A_1C_1B_1$, $\triangle AKP \sim \triangle ACB$), плоскости NMP и C_1B_1B параллельны.

Проведём $C_1T \| KM$, $C_1T = KM$. Тогда угол между прямыми KM и AC_1 равен углу между прямыми AC_1 и C_1T. Так как $KM \| CBB_1$, то точка T лежит в плоскости CBB_1. Опустим перпендикуляр TH на BC. $CH = KP = 4$. По теореме косинусов $AH^2 = CA^2 + CH^2 - 2 \cdot CA \cdot CH \cdot \cos 60°$,

$AH^2 = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28.$

По теореме Пифагора:

$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$,

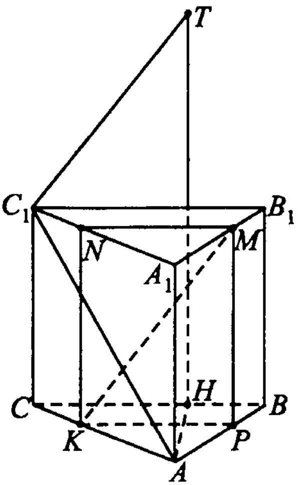


Рис. 81.

$C_1T = KM = \sqrt{KP^2 + PM^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$,
$AT = \sqrt{AH^2 + TH^2} = \sqrt{28 + (10+10)^2} = \sqrt{428} = 2\sqrt{107}$.

По теореме косинусов:

$AT^2 = C_1T^2 + AC_1^2 - 2C_1T \cdot AC_1 \cdot \cos\angle AC_1T$,

$107 = 29 + 34 - 2\sqrt{29 \cdot 34} \cdot \cos\angle AC_1T$,

$\cos\angle AC_1T = -\dfrac{22}{\sqrt{986}}$. Так как в качестве угла между прямыми мы выбираем острый угол, то нужно взять смежный угол с углом AC_1T, его косинус равен $\dfrac{22}{\sqrt{986}}$.

Ответ: $\dfrac{22}{\sqrt{986}}$.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |x| > 1, \\ |x| \neq \sqrt{2}. \end{cases}$

1) $\log_{x^2-1}(x^2 + 1) - 2\log_{x^2+1}(x^2 - 1) \leqslant 1$. Обозначив $t = \log_{x^2+1}(x^2 - 1)$, получаем $\dfrac{1}{t} - 2t \leqslant 1$, $\dfrac{2t^2 + t - 1}{t} \geqslant 0$,

$\dfrac{(2t-1)(t+1)}{t} \geqslant 0$, $\left[\begin{array}{l} -1 \leqslant t < 0, \\ t \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{x^2+1}(x^2-1) \geqslant -1, \\ \log_{x^2+1}(x^2-1) < 0, \end{cases} \\ \log_{x^2+1}(x^2-1) \geqslant 0{,}5. \end{array}\right.$$

Так как $x^2+1>1$, то

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-1 \geqslant \dfrac{1}{x^2+1}, \\ x^2-1<1, \end{cases} \\ (x^2-1)^2 \geqslant x^2+1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^4-1 \geqslant 1, \\ x^2<2, \end{cases} \\ x^4-3x^2 \geqslant 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{2} \leqslant |x| < \sqrt{2}, \\ |x| \geqslant \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем:
$x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup (-\sqrt{2}; -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}; \sqrt{2}) \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

2) $7^{2x+2} - 4\cdot 14^x - 1{,}25\cdot 14^{x+2} + 5\cdot 2^{2x+2} \leqslant 0$;

$7^{2x+2} - 7^x\cdot 2^{x+2} - 5\cdot 7^{x+2}\cdot 2^x + 5\cdot 2^{2x+2} \leqslant 0$;

$7^x(7^{x+2}-2^{x+2}) - 5\cdot 2^x(7^{x+2}-2^{x+2}) \leqslant 0$;

$(7^x - 5\cdot 2^x)(7^{x+2}-2^{x+2}) \leqslant 0$;

$(3{,}5^x-5)(3{,}5^{x+2}-1) \leqslant 0$, что равносильно неравенству

$(x-\log_{3,5}5)(x+2) \leqslant 0$,

$x \in [-2; \log_{3,5}5]$.

3) Докажем, что $\log_{3,5}5 < \sqrt{2}$.

Это равносильно $3{,}5^{\sqrt{2}} > 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3{,}5^{3\sqrt{2}} > 125$, что верно ввиду того, что $3{,}5^{3\sqrt{2}} > 3{,}5^4 > 12^2 > 125$. Также $\log_{3,5}5 > \sqrt[4]{2}$. Это равносильно $3{,}5^{\sqrt[4]{2}} < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3{,}5^{5\cdot\sqrt[4]{2}} < 3125$, что верно ввиду того, что $2 < (1{,}2)^4$; $\sqrt[4]{2} < 1{,}2$ и $3{,}5^{5\cdot\sqrt[4]{2}} < 3{,}5^{5\cdot 1{,}2} = 3{,}5^6 < 13^3 < 3125$.

Пересекая найденные по отдельности решения неравенств, получаем $x \in [-2; -\sqrt{3}] \cup (-\sqrt{2}; -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}; \log_{3,5}5]$.

Ответ: $[-2; -\sqrt{3}] \cup (-\sqrt{2}; -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}; \log_{3,5}5]$.

С4. 1) Пусть точки M и N лежат на сторонах $\triangle ABC$ (см. рис. 82).

Тогда $\angle NAB = \angle MBA = \angle NMB = \angle MNA = 30°$ как вписанные, опирающиеся на дуги с центральным углом $60°$. Так как $\angle MNA = \angle BAN$, то $MN \| AB$, $AMNB$ — равнобедренная трапеция. Опустим на AB перпендикуляры CK и NH (см. рис. 83).

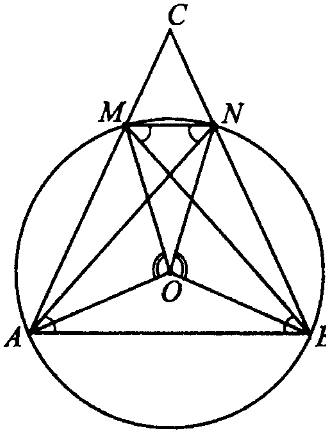


Рис. 82

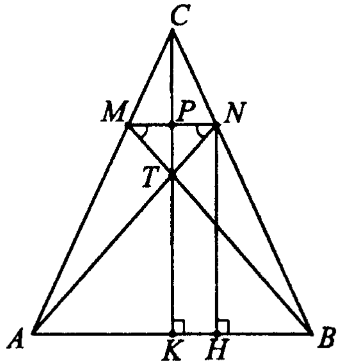


Рис. 83

$\triangle MTN \sim \triangle ATB$ (по двум углам), поэтому $\frac{PT}{TK} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$. Обозначим искомое расстояние через x, тогда $PK = NH = x$, откуда $TK = \frac{3x}{4}$. $AK = TK \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{3x\sqrt{3}}{4}$. $AB = 2AK = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$.

$AH = NH \operatorname{ctg} 30^\circ = x\sqrt{3}$. $KH = AH - AK = x\sqrt{3} - \frac{3x\sqrt{3}}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{4}$.

$BH = AB - AH = \frac{3x\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$S_{\triangle NBH} = \frac{1}{2} \cdot NH \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

$\triangle CBK \sim \triangle NBH$ (прямоугольные с общим острым $\angle B$), поэтому $S_{\triangle CBK} = \left(\frac{KB}{BH}\right)^2 \cdot S_{\triangle NBH} = \left(\frac{3x\sqrt{3}}{4} : \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{16}$.

$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CBK} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{8}$. Так как по условию $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$, то $x^2 = 8$, $x = 2\sqrt{2}$.

2) Пусть точки M и N лежат на продолжениях сторон $\triangle ABC$. Аналогично предыдущему случаю $\angle NAB = \angle MBA = \angle NMB = \angle MNA = 30^\circ$, $AMNB$ — равнобедренная трапеция, $\triangle MTN \sim \triangle ATB$ (см. рис. 84).

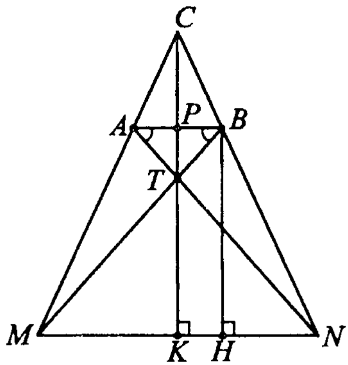


Рис. 84.

Как и в предыдущем случае $BH = x$, $KH = \frac{x\sqrt{3}}{4}$, $NH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. $\triangle CBP \sim \triangle BNH$ (прямоугольные, $\angle CBP = \angle CNK$ как соответственные), коэффициент подобия $k = \frac{PB}{NH} = \frac{1}{2}$.

$$S_{\triangle CBP} = k^2 \cdot S_{\triangle BNH} = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BH \cdot NH = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{16}.$$

$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CBP} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{8}$. Так как по условию $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$, то $\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{8} = 9\sqrt{3}$, $x^2 = 72$, $x = 6\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}; 6\sqrt{2}$.

C5. При $a < 0$ первое неравенство системы неразрешимо.

При $a = 0$ первое неравенство имеет решение $(0; 0)$, которое является решением системы.

Пусть теперь $a > 0$. Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ является решением системы, то решением является также пара $(x_0; -y_0)$. Следовательно, можно искать значения a, при которых система имеет решения при положительном y.

Графиком $x^2 + y^2 \leqslant a^5$ является круг с центром в начале координат и радиусом $a^2\sqrt{a}$. Графиком $-x \cdot |y| \geqslant 9a$ при $y > 0$, $a > 0$ является ветвь гиперболы $y = -\frac{9a}{x}$ и участок плоскости выше неё. Заметим, что оба графика симметричны относительно прямой $y = -x$, причём на этой прямой находится наиболее близкая к началу координат точка графика $y = -\dfrac{9a}{x}$ (см. рис. 85).

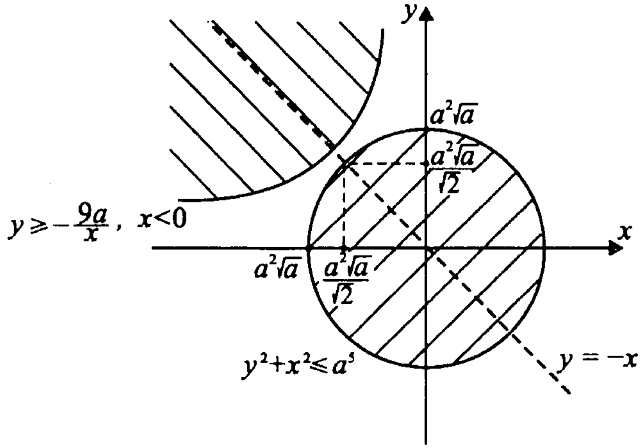


Рис. 85.

Во второй четверти окружность $x^2 + y^2 = a^5$ пересекает прямую $y = -x$ в точке $\left(-\dfrac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt{2}}; \dfrac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right)$. Следовательно, для существования решений необходимо, чтобы $y\left(-\dfrac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \dfrac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$, где $y(x) = -\dfrac{9a}{x}$.

$$-9a : \left(-\frac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \frac{a^2\sqrt{a}}{\sqrt{2}}; \quad 9a \leqslant \frac{a^5}{2}; \quad a^4 \geqslant 18; \quad a \geqslant \sqrt[4]{18}.$$

Ответ: $\{0\} \cup [\sqrt[4]{18}; +\infty)$.

С6. а.1) Оценка. Всего бригад 7, и каждая бросает в котёл не более трёх яблок, поэтому в котле не может быть более 21 яблока. Заметим также, что хотя бы одна бригада должна собрать чётное число яблок (иначе в сумме семь нечётных чисел дадут нечётное число, а у нас сумма 304 — чётное). Следовательно, хотя бы одна бригада бросит в котёл не более 2-х яблок (при делении чётного числа на 4 возможны лишь остатки 0 и 2), а всего в котле не более $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 20$ яблок.

а.2) Пример. Бригады собрали 47, 43, 43, 43, 43, 43, 42 яблока. Остатки после деления на 4 равны 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2. В котле $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 20$ яблок.

б.1) Оценка. Пусть всего было n бригад, в них k_1, k_2, ..., k_n школьников. Тогда они кинули в котёл не более $k_1 - 1$, $k_2 - 1$, ..., $k_n - 1$ яблок соответственно. Всего не более $k_1 - 1 + k_2 - 1 + ... + k_n - 1 = (k_1 + k_2 + ... + k_n) - n = 28 - n$ яблок. Если бригада была всего одна, то в котле всего 24 яблока ($304 = 28 \cdot 10 + 24$). Следовательно, в котле не более $28 - 2 = 26$ яблок.

б.2) Пример. Пусть в одной бригаде 27 школьников, в другой — 1 школьник, они собрали соответственно 251 яблоко и 53 яблока. Тогда первая бригада бросит в котёл 26 яблок, вторая — 0, всего 26 яблок.

Ответ: а) 20; б) 26.

Решение варианта 13

B1. Розничная цена составляет $100\% + 30\% = 130\%$ от оптовой, поэтому оптовая цена равна $156 \cdot \frac{100}{130} = 120$ рублей. Так как $\frac{5000}{120} = 41\frac{80}{120}$, то купить по оптовой цене можно максимум 41 учебник.

Ответ: 41.

B2. По рисунку определяем, что среднемесячная температура ниже $10° C$ была первые три месяца года и последние три месяца года, всего 6 месяцев.

Ответ: 6.

B3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AC}| = AC = 15$, так как AC — бóльшая диагональ ромба.

Ответ: 15.

B4. Автобусом: 35 мин + 2 ч 24 мин + 25 мин = 204 мин.

Электричкой: 44 мин + 1 ч 58 мин + 30 мин = 192 мин.

Маршрутным такси: 35 мин + 1 ч 46 мин + 76 мин = 217 мин.

Наименьшее возможное время в пути — 192 мин = 3,2 часа.

Ответ: 3,2.

B5. По определению арифметического корня чётной степени имеем $51 - 13x = 25$, $13x = 26$, $x = 2$.

Ответ: 2.

B6. $\angle ABC = 90°$, диагональ делит его в отношении $2 : 1$, тогда $\angle DBC = 30°$; $\angle ABD = 60°$. Аналогично $\angle BDA = 30°$ (см. рис. 86). $BD = 2AB = 10$.

Ответ: 10.

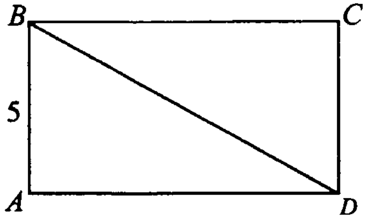


Рис. 86.

B7. $\frac{12\sin 76^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ} = \frac{12 \cdot 2\sin 38^\circ \cdot \cos 38^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin(90^\circ - 38^\circ)} =$

$= \frac{24\cos 38^\circ}{\cos 38^\circ} = 24.$

Ответ: 24.

B8. Промежуткам возрастания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции положительна. По графику определяем, что в эти промежутки входят целые точки $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 7, 8$ и 9. Всего 9 точек.

Ответ: 9.

B9. $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ (см. рис. 87).

Так как по условию конус вписан в шар и радиус его основания равен радиусу шара, то высота этого конуса тоже равна радиусу шара. Получаем, $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^3$, а $V_{\text{шара}} = 4V_{\text{конуса}}$. $V_{\text{шара}} = 4 \cdot 15 = 60$.

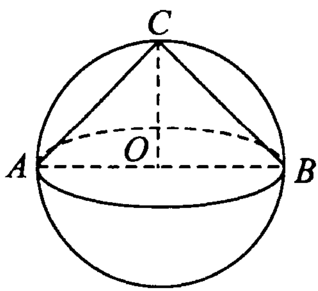


Рис. 87.

Ответ: 60.

B10. Натуральных чисел от 30 до 39 — 10, из них делятся на три: 30, 33, 36, 39, то есть 4 числа. Вероятность того, что выбранное число делится на три: $\frac{4}{10} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

B11. Обозначим через V объём параллелепипеда. Тогда $V_{A_1ABD} = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot AA_1 \cdot AB \cdot AD = = \frac{1}{6} \cdot V = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$. Аналогично $V_{A_1DD_1C_1} = 2$, $V_{A_1BB_1C_1} = 2$ и $V_{C_1BCD} = 2$. Найдём искомый объём:

$V_{A_1DBC_1} = V - V_{A_1ABD} - V_{A_1DD_1C_1} - V_{A_1BB_1C_1} - V_{C_1BCD} =$
$= 12 - 2 - 2 - 2 - 2 = 4$.

Ответ: 4.

B12. По условию $f \geqslant 270$; $250 \cdot \frac{c+20}{c-5} \geqslant 270$; $25(c+20) \geqslant 27(c-5)$; $25c + 500 \geqslant 27c - 135$; $2c \leqslant 635$; $c \leqslant 317{,}5$.

Ответ: 317,5.

B13. Первая фирма внесла $150 \cdot 0{,}2 = 30$ млн рублей, вторая фирма (по условию) — 22,5 млн рублей, третья фирма — $150 \cdot 0{,}3 = 45$ млн рублей. Итого: 97,5 млн рублей.

Оставшаяся часть составляет $\frac{150 - 97{,}5}{150} \cdot 100\% = 35\%$ уставного капитала. Таким образом, сумма от общей прибыли, причитающейся для четвёртой фирмы, составляет $100 \cdot 0{,}35 = 35$ (млн).

Ответ: 35.

B14. $y' = -\frac{9}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 9}{x^2}$, $x \neq 0$. $y' = 0$ при $x = \pm 3$.

1. $y' < 0$ при $-3 < x < 3$;

2. $y' > 0$ при $x < -3$ или $x > 3$.

Точка $x = 3$ — точка минимума функции $y = \frac{9}{x} + x + 16$.

Ответ: 3.

C1. а) $\sin 2x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) + 1 = 0$, $\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$, $2 \sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1 + 1 = 0$, $\cos x(\sin x + \cos x) = 0$.

1) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $\sin x + \cos x = 0.\ \operatorname{tg} x = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z.$

б) Найдём корни, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right).$

$-2\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k < -\frac{\pi}{2},\ -2 \leqslant \frac{1}{2} + k < -\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{2} \leqslant k < -1,\ k = -2,$

$x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}.$

Пусть $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,$

$-2\pi \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi n < -\frac{\pi}{2},\ -2 \leqslant -\frac{1}{4} + n < -\frac{1}{2},\ -1\frac{3}{4} \leqslant n < -\frac{1}{4},\ n = -1;$

$x = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4}.$

Корни: $-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{4}.$

Ответ: а)$\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ k, n \in Z,$ б)$-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{4}.$

С2. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке M (см. рис. 88).

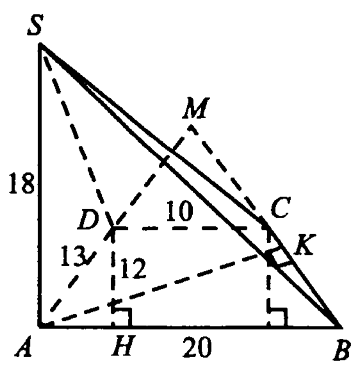


Рис. 88.

$DC \parallel AB,\ DC = \frac{1}{2}AB \Rightarrow\ DC$— средняя линия $\triangle AMB$ и
$AM = MB = 13 \cdot 2 = 26$.

Если $DH \perp AB$, то $AH = \frac{20-10}{2} = 5;\ DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 12$.

Высота треугольника AMB, проведённая из точки M, равна $h = 12 \cdot 2 = 24$.

Проведём $AK \perp CB$, тогда из равенств $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AK \cdot MB$ и $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot h$ имеем: $AK \cdot MB = h \cdot AB,\ AK = \frac{24 \cdot 20}{26} = \frac{240}{13}$.

Угол α между плоскостями ABC и SCB равен углу SKA, так как из $SA \perp ABC,\ AK \perp CB$ следует $SK \perp CB$ по теореме о трёх перпендикулярах.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SA}{AK} = \frac{18 \cdot 13}{240} = 0{,}975.$

Ответ: $\operatorname{arctg} 0{,}975$.

С3. Решим каждое неравенство по отдельности.

1. Решим первое неравенство методом рационализации.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x + 3 > 0, \\ x \neq -5; \end{cases}\quad \begin{cases} x > 0, \\ \log_3 27x > 0; \end{cases}\quad \Leftrightarrow\ x > \frac{1}{27}.$

$\frac{\lg(\log_3^2 x + 1) - \lg(\log_3 x + 3)}{x+5} \geqslant 0;\ \frac{\log_3^2 x + 1 - (\log_3 x + 3)}{x+5} \geqslant 0;$

$\frac{\log_3^2 x - \log_3 x - 2}{x+5} \geqslant 0;\ \frac{(\log_3 x - 2)(\log_3 x + 1)}{x+5} \geqslant 0$. При $x > 0$ знаменатель положителен.

$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \geqslant 2, \\ \log_3 x \leqslant -1; \end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 9, \\ 0 < x \leqslant \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

С учётом ОДЗ имеем $x \in \left(\frac{1}{27}; \frac{1}{3}\right] \cup [9; +\infty)$.

2. Решим второе неравенство.

ОДЗ: $x > 0$.

$6^x \cdot 6^x - 6^x \cdot \sqrt[4]{6} - 6^x \cdot 6^2 + 36\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{6}\log_6 0{,}5x + 6^x \log_6 0{,}5x < 0,$

$6^x(6^x - 36 + \log_6(0{,}5x)) - \sqrt[4]{6}(6^x - 36 + \log_6 0{,}5x) < 0,$

$(6^x - \sqrt[4]{6})(6^x - 36 + \log_6(0{,}5x)) < 0,$

$\left(6^x - 6^{\frac{1}{4}}\right)(6^x + \log_6 x - 36 + \log_6 0{,}5) < 0,$

$6^x - 6^{\frac{1}{4}} = 0;\ \ x = \frac{1}{4}.$

$6^x + \log_6 x = 36 - \log_6 0{,}5;\ \ 6^x + \log_6 x = 6^2 + \log_6 2.$
Так как $f(x) = 6^x + \log_6 x$ возрастает как сумма возрастающих функций, $x = 2$ — единственный корень.

$x \in \left(\frac{1}{4}; 2\right)$ (см. рис. 89).

Рис. 89.

3. Решением исходной системы будет $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$ (см. рис. 90).

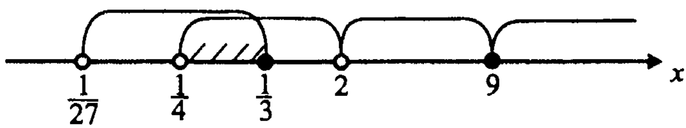


Рис. 90.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

C4. $AB \perp OB$, $r^2 + l^2 = (r + a)^2$ (см. рис. 91),

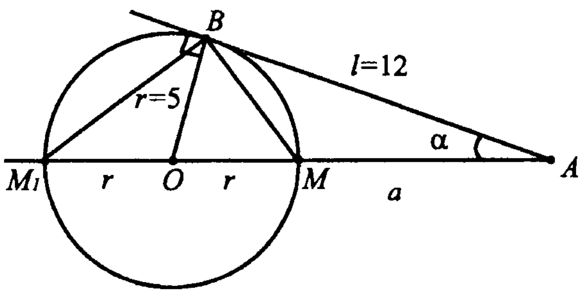


Рис. 91.

$l^2 = a^2 + 2ra,\ 12^2 = a^2 + 10a,\ a = 8.$

$\cos\alpha = \frac{l}{a + r} = \frac{12}{13};\ \ \sin\alpha = \frac{r}{r + a} = \frac{5}{13}.$

Пусть R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABM$.
I случай. Воспользуемся рисунком 91.

$$BM = \sqrt{l^2 + a^2 - 2la\cos\alpha} = \sqrt{l^2 + a^2 - \frac{2l^2a}{a+r}} =$$

$$= \sqrt{12^2 + 8^2 - \frac{2\cdot 12^2\cdot 8}{13}} = 4\sqrt{3^2 + 2^2 - \frac{144}{13}} = \frac{20}{\sqrt{13}}.$$

$$BM_1 = \sqrt{l^2 + (a+2r)^2 - 2l(a+2r)\cos\alpha} =$$

$$\sqrt{l^2 + (a+2r)^2 - \frac{2l^2(a+2r)}{a+r}} = \sqrt{12^2 + 18^2 - \frac{2\cdot 12^2\cdot 18}{13}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{(6^2+9^2)\cdot 13 - (12\cdot 3)^2}{13}} = 2\sqrt{\frac{39^2 - 36^2}{13}} = \frac{30}{\sqrt{13}}.$$

$$\frac{BM}{\sin\alpha} = 2R;\ \ R = \frac{BM}{2\sin\alpha} = \frac{20}{\sqrt{13}\cdot 2\cdot\frac{5}{13}} = 2\sqrt{13}.$$

II случай. Поменяем местами точки M и M_1. Теперь $BM = \dfrac{30}{\sqrt{13}}$,

$$\frac{BM}{\sin\alpha} = 2R;\ \ R = \frac{30}{\sqrt{13}\cdot 2\cdot\frac{5}{13}} = 3\sqrt{13}.$$

Ответ: $2\sqrt{13}$ или $3\sqrt{13}$.

С5. $2ax^2 - 6|x| + a^2x^2 + 4a + 2a^2 - 7 = 0$,
$(2a + a^2)x^2 + 2(2a + a^2) - 6|x| - 7 = 0$, $(2a + a^2)(x^2 + 2) = 6|x| + 7$,
$2a + a^2 = \dfrac{6|x| + 7}{x^2 + 2}$.

Обозначим $2a + a^2 = b$ и рассмотрим функцию $y = \dfrac{6x+7}{x^2+2}$ на промежутке $x \geqslant 0$.

$$y = \frac{6x+7}{x^2+2},\ y' = \frac{6(x^2+2) - 2x(6x+7)}{(x^2+2)^2} = \frac{-6x^2 - 14x + 12}{(x^2+2)^2}.$$

$y' = 0$; $x_1 = \dfrac{2}{3}$; $x_2 = -3$ (см. рис. 92).

$y(0) = 3{,}5$; $y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{9}{2}$.

$y(-x) = y(x)$.

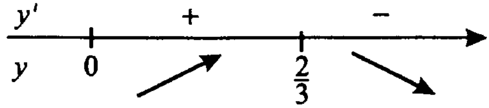


Рис. 92.

Заметим, что $y(x) > 0$.
Построим график $y = y(x)$ (см. рис. 93).

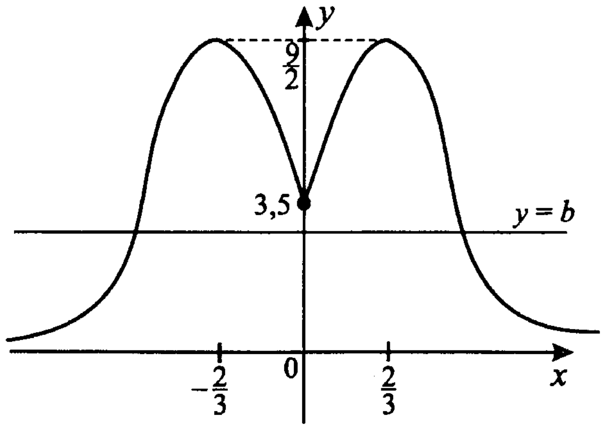


Рис. 93.

Два корня в уравнении будет, если график функции имеет с прямой $y = b$ ровно две общие точки, то есть $b = \dfrac{9}{2}$ и $0 < b < 3{,}5$.

$$2a + a^2 = \frac{9}{2},\ a^2 + 2a - \frac{9}{2} = 0,\ a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{11}{2}} = -1 \pm \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$\begin{cases} 2a + a^2 > 0, \\ 2a + a^2 < 3{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} a(a+2) > 0, \\ a^2 + 2a - 3{,}5 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 0, \\ a < -2, \end{array}\right. \\ -1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} < a < -1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

$a \in (-1 - 1{,}5\sqrt{2}; -2) \cup (0; -1 + 1{,}5\sqrt{2})$.

Итак, $a \in \left\{ -1 \pm \dfrac{\sqrt{22}}{2} \right\} \cup (-1 - 1{,}5\sqrt{2}; -2) \cup (0; -1 + 1{,}5\sqrt{2})$.

Ответ: $\left\{ -1 \pm \dfrac{\sqrt{22}}{2} \right\} \cup (-1 - 1{,}5\sqrt{2}; -2) \cup (0; -1 + 1{,}5\sqrt{2})$.

С6. а) Каждую из букв можно выбрать двумя способами, 7-буквенных слов может быть $2^7 = 128$.

б) Обозначим за A_i количество слов из i букв, которые начинаются с буквы А, аналогично B_i — количество слов из i букв, начинающихся с буквы У. Очевидно, что A_1 и B_1 равны 1.

$A_2 = 1 = B_1$.

К первой букве А можно добавить все слова, начинающиеся с буквы У, а их B_{i-1}. $A_i = B_{i-1}$. Аналогично $B_i = A_{i-1} + B_{i-1}$, так как к первой букве У можно приписать как все слова, начинающиеся с буквы А, а их A_{i-1}, так и слова, начинающиеся с буквы У, их B_{i-1}. Итак, $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $A_i = B_{i-1}$, $B_i = A_{i-1} + B_{i-1} = B_{i-2} + B_{i-1}$. При этом искомая величина равна $A_9 + B_9 = B_9 + B_8 = B_{10}$.

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

в) Пусть $Q(n)$ — количество слов длины n, которые начинаются с буквы У. Тогда $Q(n) = Q(n-2)+Q(n-3)$, т.к. если слово начинается с буквы У, то оно начинается с УАУ или УААУ, при этом $Q(1) = 1$, $Q(2) = 1$, $Q(3) = 2$. Всего количество подходящих слов обозначим $D(n)$, тогда очевидно, $D(n) = Q(n) + Q(n-1) + Q(n-2)$, т.к. слово начинается либо с У, либо с АУ, либо с ААУ. В этом случае

$$D(10) = Q(10) + Q(9) + Q(8) = Q(9) + 2Q(8) + Q(7) =$$
$$= 2Q(8) + 2Q(7) + Q(6) = 2Q(7) + 3Q(6) + 2Q(5) =$$
$$= 3Q(6) + 4Q(5) + 2Q(4) = 4Q(5) + 5Q(4) + 3Q(3) =$$
$$= 7Q(3) + 5Q(4) + 4Q(2) = 9Q(2) + 7Q(3) + 5Q(1) = 28.$$

Ответ: а) 128, б) 89, в) 28.

Решение варианта 14

В1. В одном подъезде $12 \cdot 3 = 36$ квартир. В первом подъезде находятся квартиры с 1 по 36, во втором — с 37 по 72, в третьем — с 73 по 108, в четвёртом — с 109 по 144. Так как $128 - 109 = 19$ и первые 18 квартир четвёртого подъезда находятся на первых шести этажах, то Маша живёт на 7-м этаже.

Ответ: 7.

В2. По рисунку определяем, что число посетителей впервые превысило 40 тысяч человек в 3-м месяце.

Ответ: 3.

B3. $S_{\text{квадрата ABCD}} = \frac{1}{2}BD^2$ (см. рис. 94).

$18 = \frac{1}{2}BD^2;\ BD^2 = 36,\ BD = 6.$

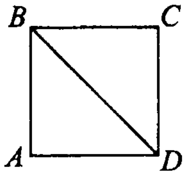


Рис. 94.

Ответ: 6.

B4.

Банк	Стоимость 100 евро в рублях
1	$41{,}2 \cdot 100 = 4120$
2	$\frac{819}{20} \cdot 100 = 4095$
3	$\frac{1028}{25} \cdot 100 = 4112$

Наименьшая сумма, заплаченная за 100 евро, равна 4095 рублей.

Ответ: 4095.

B5. По определению логарифма имеем: $2x = 2^3;\ 2x = 8;\ x = 4.$

Ответ: 4.

B6. $\angle AOC = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$ (см. рис. 95).
$\smile DA = \angle AOD = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ.$

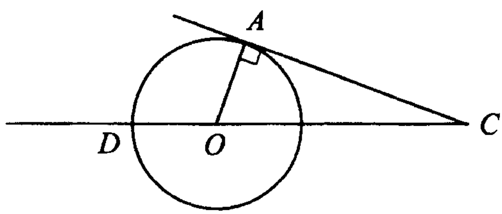


Рис. 95.

Ответ: 124.

B7. $\dfrac{15\sin 68^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin 56^\circ} = \dfrac{15 \cdot 2\sin 34^\circ \cdot \cos 34^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin(90^\circ - 34^\circ)} = \dfrac{30\cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = 30.$

Ответ: 30.

B8. Касательные к графику заданной функции $y = f(x)$, параллельные прямой $y = 4$ (или совпадающие с ней), проходят через точки с абсциссами -5, -2, 2 и 5. Всего 4 точки.

Ответ: 4.

B9. В правильном треугольнике ABC точка пересечения медиан совпадает с точкой пересечения высот, отсюда точка O — основание высоты пирамиды (см. рис. 96).

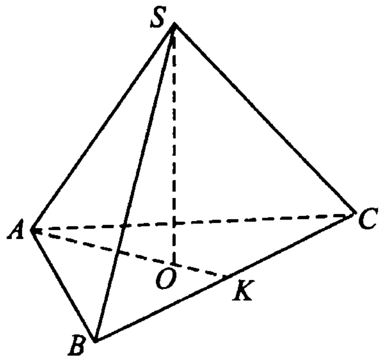


Рис. 96.

$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot 6 = 2S_{\triangle ABC}$ (см. рис. 96).

$S_{\triangle ABC} = \frac{V_{SABC}}{2} = \frac{54}{2} = 27.$

Ответ: 27.

B10. Участников чемпионата, с которыми может сыграть Василий Зайцев, $16 - 1 = 15$.

Участников из России, с которыми может сыграть Василий Зайцев, $4 - 1 = 3$.

Тогда вероятность того, что в первом туре Василий Зайцев будет играть с каким-либо шахматистом из России, равна $\frac{3}{15} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

B11. Так как объём воды в цилиндрическом сосуде прямо пропорционален высоте уровня воды ($V = Sh$), то, обозначив искомый объём через x, получим $\frac{5000}{24} = \frac{x}{18}$; $x = \frac{5000 \cdot 18}{24} = 3750$ см^3.

Ответ: 3750.

B12. На высоте не менее семи метров мяч будет находиться при всех t, для которых $h(t) \geqslant 7$; $-5t^2 + 13t + 1 \geqslant 7$; $-5t^2 + 13t - 6 \geqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $t_1 = 0{,}6$ и $t_2 = 2$. Решением неравенства является отрезок $[0{,}6; 2]$. Искомый промежуток времени равен $2 - 0{,}6 = 1{,}4$ (с).

Ответ: 1,4.

B13. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда $(16 - x)$ км/ч — собственная скорость лодки; скорость лодки, если она движется против течения реки, равна $(16 - 2x)$ км/ч.
Расстояние между пунктами равно $16 \cdot 3 = 48$ (км).

Составим уравнение $\dfrac{48}{16 - 2x} = 5$, $48 = 5(16 - 2x)$, $10x = 80 - 48$, $x = 3{,}2$. Скорость течения реки 3,2 км/ч.

Ответ: 3,2.

B14. $y' = -\left(\dfrac{x^2 + 9 - 2x \cdot x}{(x^2+9)^2}\right) = -\dfrac{9 - x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{x^2 - 9}{(x^2+9)^2}$. $y' = 0$, $x^2 - 9 = 0$ при $x = \pm 3$.

1) $y' > 0$ при $x < -3$ или $x > 3$;

2) $y' < 0$ при $-3 < x < 3$.

Точка $x = 3$ — точка минимума.

Ответ: 3.

C1. а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos x \cos 5x - \sin 5x \cdot \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(x + 5x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 6x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$6x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, $x = \pm\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{\pi k}{3}$.

б) Найдём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{5\pi}{24}\right)$.

Пусть $x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{\pi k}{3} < -\dfrac{5\pi}{24}$, $-36 \leqslant 2 + 24k < -15$,

$-\dfrac{38}{24} \leqslant k < -\dfrac{17}{24}$, $k = -1$; $x = \dfrac{\pi}{36} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{11\pi}{36}$.

Пусть $x = -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{36} + \dfrac{\pi k}{3} < -\dfrac{5\pi}{24}$,

$-36 \leqslant -2 + 24k < -15, \ -\frac{34}{24} \leqslant k < -\frac{13}{24},$

$k = -1; \ x = -\frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{13\pi}{36}.$

Промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{24}\right)$ принадлежат корни: $-\frac{11\pi}{36}; \ -\frac{13\pi}{36}.$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}, \ k \in Z,$ б) $-\frac{11\pi}{36}; \ -\frac{13\pi}{36}.$

С2. Найдём высоту призмы (см. рис. 97).

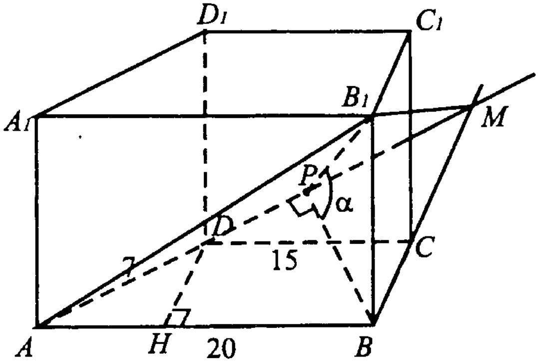


Рис. 97.

$V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = \frac{DC + AB}{2} \cdot DH \cdot AA_1 = \frac{15 + 20}{2} \cdot \sqrt{7^2 - 5^2} \cdot AA_1 =$

$= \frac{35}{2} \cdot \sqrt{24} \cdot AA_1 = 840\sqrt{6}.$

$AA_1 = \frac{840\sqrt{6} \cdot 2}{35\sqrt{24}} = 24.$

$CB = DH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

Продолжим AD и BC до пересечения в точке M.

$\triangle AMB$ прямоугольный.

Найдём высоту BP из равенства $AB \cdot BM = AM \cdot BP, \ BP = \frac{AB \cdot BM}{AM},$

$\triangle MDC \sim \triangle MAB$ (т.к. $DC \parallel AB$), $\frac{DC}{AB} = \frac{DM}{AM}. \ DM = AM - AD,$

$\frac{15}{20} = \frac{AM - 7}{AM}; \ AM = 28.$

Аналогично $\dfrac{DC}{AB} = \dfrac{CM}{BM}$; $CM = BM - 2\sqrt{6}$; $\dfrac{15}{20} = \dfrac{BM - 2\sqrt{6}}{BM}$, $BM = 8\sqrt{6}$.

$BP = \dfrac{20 \cdot 8\sqrt{6}}{28} = \dfrac{40\sqrt{6}}{7}$.

Искомый угол α равен углу между плоскостями ABM и ADB_1.

$B_1B \perp BPA$, $BP \perp MA$, следовательно, $B_1P \perp MA$, отсюда $\alpha = \angle B_1PB$.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BB_1}{BP} = \dfrac{24 \cdot 7}{40\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{10}$, $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}7\sqrt{6}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 0{,}7\sqrt{6}$.

С3. Решим каждое неравенство системы по отдельности.

1. ОДЗ: $\begin{cases} 5\log_7 x + 10 > 0, \\ 3\log_7 x + 14 > 0, \\ 3\log_7 x + 10 > 0; \\ \ln(3\log_7 x + 10) - \ln 4 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_7 x > -2, \\ \log_7 x > -\dfrac{14}{3}, \\ \log_7 x > -\dfrac{10}{3}; \\ \log_7 x \neq -2; \end{cases}$

$\log_7 x > -2$, $x > 7^{-2}$, $x > \dfrac{1}{49}$.

$$\frac{\ln(5\log_7 x + 10) - \ln(3\log_7 x + 14)}{\ln(3\log_7 x + 10) - \ln 4} \leqslant 0;$$

$$\frac{5\log_7 x + 10 - (3\log_7 x + 14)}{3\log_7 x + 10 - 4} \leqslant 0;$$

$\dfrac{2\log_7 x - 4}{3\log_7 x + 6} \leqslant 0$; $\dfrac{\log_7 x - 2}{\log_7 x + 2} \leqslant 0$; $\begin{matrix} \log_7 x - 2 = 0, \\ \log_7 x + 2 = 0; \end{matrix}$ $\begin{matrix} x = 49, \\ x = \dfrac{1}{49}. \end{matrix}$

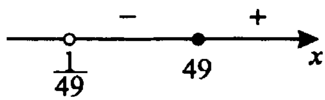


Рис. 98.

Решение первого неравенства $x \in \left(\dfrac{1}{49}; 49\right]$ (см. рис. 98).

2. ОДЗ: $x > 0$.

$2^{2x} - 2^x \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 2^x \log_2 0{,}25x - \sqrt[3]{2}\log_2 0{,}25x + 16\sqrt[3]{2} - 16 \cdot 2^x > 0$,

$2^x\left(2^x-2^{\frac{1}{3}}\right)+\log_2 0{,}25x(2^x-\sqrt[3]{2})-16(2^x-\sqrt[3]{2})>0,$

$\left(2^x-2^{\frac{1}{3}}\right)(2^x-2^4+\log_2 0{,}25x)>0,$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)(2^x+\log_2 x-(2^4+\log_2 4))>0,$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)(2^x+\log_2 x-(2^4+\log_2 4))=0,\ x=\frac{1}{3};\ x=4.$

Так как $y=2^x+\log_2 x$ возрастает как сумма двух возрастающих функций, то $2^x+\log_2 x=2^4+\log_2 4$ имеет единственный корень.

$x\in\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(4;+\infty)$ (см. рис. 99)

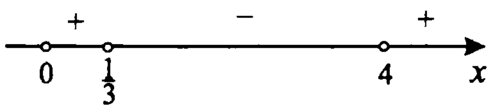


Рис. 99.

3. Решение исходной системы: $x\in\left(\frac{1}{49};\frac{1}{3}\right)\cup(4;49]$.

Ответ: $\left(\frac{1}{49};\frac{1}{3}\right)\cup(4;49]$

C4. Обозначим $AM=a$, $AB=l$, $OB=R$, $O_1K=r$. $OB\perp AB\Rightarrow$ $\triangle AOB$ прямоугольный (см. рис. 100).

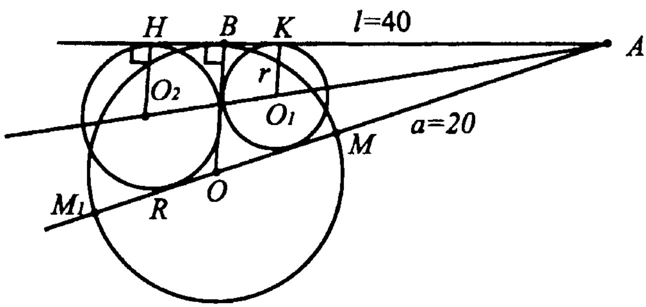


Рис. 100.

$AB^2+OB^2=OA^2,\ R^2+l^2=(R+a)^2,\ l^2=2aR+a^2.$

$R=\frac{l^2-a^2}{2a}=\frac{40^2-20^2}{2\cdot 20}=30.$

I случай. Найдём радиус r окружности, вписанной в $\triangle ABO$.

$2r + 2AO = P_{AOB}$, $r = \dfrac{P_{ABO} - 2AO}{2} = \dfrac{120 - 2 \cdot 50}{2} = 10.$

II случай. Окружность касается $\triangle OBA$ внешним образом (продолжения AB и AM). Центры окружностей в I и II случаях лежат на биссектрисе угла BAO, $O_1K \perp AB$, $O_2H \perp AB \Rightarrow O_1K \parallel O_2H$.

$\triangle AO_1K \sim \triangle AO_2H$, тогда $\dfrac{r}{O_2H} = \dfrac{AK}{AH}$, $AK = AB - r$, $AH = AB + O_2H$, $\dfrac{r}{O_2H} = \dfrac{AB - r}{AB + O_2H}$.

Пусть $O_2H = x$, $\dfrac{r}{x} = \dfrac{AB - r}{AB + x}$, $\dfrac{r}{x} = \dfrac{40 - r}{40 + x}$; $\dfrac{10}{x} = \dfrac{40 - 10}{40 + x}$;
$10(40 + x) = 30x$, $20x = 400$, $x = 20$. $O_2H = 20$.

Ответ: 10 или 20.

C5. $|x|(3a|x| - 4) + a(ax^2 + 9) + 3a^2 + 11 = 0,$
$3ax^2 - 4|x| + a^2 \cdot x^2 + 9a + 3a^2 + 11 = 0,$
$(a^2 + 3a)(x^2 + 3) = 4|x| - 11,$
$a^2 + 3a = \dfrac{4|x| - 11}{x^2 + 3}.$

Пусть $b = a^2 + 3a$. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{4|x| - 11}{x^2 + 3}$, $y(-x) = y(x)$ — функция чётная.
На промежутке $x \geqslant 0$
$y(x) = \dfrac{4x - 11}{x^2 + 3}$, $y = \dfrac{4x - 11}{(x^2 + 3)}$, $y(0) = \dfrac{-11}{3}$.

$y = 0$ при $x = \dfrac{11}{4}$, $y(x) > 0$ при $x > \dfrac{11}{4}$.

$y' = \dfrac{4(x^2 + 3) - 2x(4x - 11)}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{-4x^2 + 22x + 12}{(x^2 + 3)^2}.$

$y' = 0$; $2x^2 - 11x - 6 = 0$, $x_1 = 6$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ (см. рис. 101).

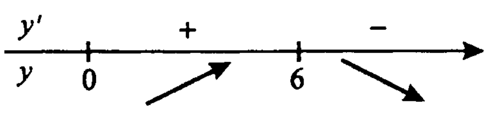


Рис. 101.

$y(6) = \frac{1}{3}$. Построим график $y = y(x)$ (см. рис. 102). Видно, что 2 решения при $b = \frac{1}{3}$ и при $b \in \left(-\frac{11}{3}; 0\right]$.

$a^2 + 3a = \frac{1}{3}$, $3a^2 + 9a - 1 = 0$, $a = \frac{-9 \pm \sqrt{93}}{6}$.

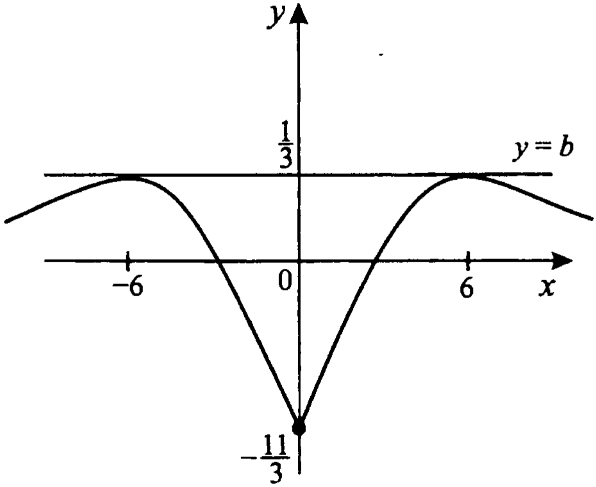


Рис. 102.

$$\begin{cases} a^2 + 3a > -\frac{11}{3}, \\ a^2 + 3a \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + 3a + \frac{11}{3} > 0, \\ a(a+3) \leqslant 0; \end{cases} \quad -3 \leqslant a \leqslant 0.$$

Ответ: $[-3; 0] \cup \left\{-\frac{9 \pm \sqrt{93}}{6}\right\}$.

C6. а) Число перестановок из 6 букв равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

б) Посчитаем количество слов, в которых определённая буква встречается дважды, а все остальные различны. Выбрать два места, на которых стоит эта буква, можно $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (способами). Разместить на оставшихся четырёх местах четыре из пяти оставшихся букв можно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ способами. Значит, для каждой буквы — $15 \cdot 120$ слов. Столько же слов для любой из пяти оставшихся удвоенных букв, то есть всего $15 \cdot 120 \cdot 6 = 10800$ слов.

в) Рассмотрим несколько допустимых случаев.

1) Все буквы различны. Таких слов $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

2) Одна буква встречается дважды, а остальные различны. Всего $15 \cdot 720$ вариантов (см. пункт б).

3) Ровно две буквы встречаются дважды. Для первой повторяющейся буквы места можно выбрать C_6^2 способами, для второй после этой — C_4^2 способами, т.е. всего $\frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{8}$ вариантов выбрать места для этих букв. Выбрать буквы, стоящие на этих местах, можно $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами.

Остальные буквы можно расставить $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Всего $\frac{720}{8} \cdot 15 \cdot 12 = \frac{720 \cdot 15 \cdot 3}{2}$ вариантов.

4) В слове фигурирует ровно три повторяющиеся буквы. Места можно выбрать $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{6!}{(2!)^3} = \frac{720}{8} = 90$ способами. Сами буквы можно выбрать $6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Однако не важно, какая из этих пар повторяющихся букв первая, какая — вторая, какая — третья. Таких слов $\frac{720}{8} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 720 \cdot \frac{5}{2}$. Всего слов $720(1 + 15 + \frac{45}{2} + \frac{5}{2}) = 29520$.

Ответ: а) 720, б) 10 800, в) 29 520.

Решение варианта 15

B1. На первом этаже находятся квартиры с 1 по 5, на втором — с 6 по 10 и т. д. Квартиры с 36 по 40 находятся на восьмом этаже.

Ответ: 8.

B2. По рисунку найдём наименьшую удельную теплоёмкость для диапазона температур от $20°C$ до $90°C$, она равна $4170\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °C}$. (Цена деления равна 10 единицам измерения.)

Ответ: 4170.

B3. Обозначим через S площадь заштрихованной части круга (см. рис. 103). $S = \pi R^2 - \pi r^2$, где R — радиус большего круга, r — радиус меньшего круга.

$\frac{R}{r} = \frac{5}{3}$, $R = \frac{5}{3}r$.

Тогда $S = \pi\left(\frac{25}{9}r^2 - r^2\right) = \frac{16}{9}\pi r^2$, по условию $\pi r^2 = 9\pi$, тогда $S = 16\pi$.

В ответе запишем $\frac{S_{\text{фигуры}}}{\pi} = \frac{16\pi}{\pi} = 16$.

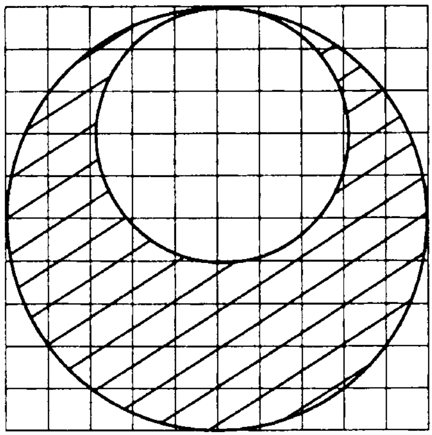


Рис. 103.

Ответ: 16.

B4. Составим таблицу.

Описание скидки	**Величина скидки (в рублях)**
30% на звонки абонентов других сотовых компаний	$400 \cdot 0{,}3 = 120$
10% на звонки в другие регионы	$600 \cdot 0{,}1 = 60$
20% на услуги мобильного интернета	$500 \cdot 0{,}2 = 100$

Наиболее выгодная скидка — это 30 % на звонки абонентов других сотовых компаний и она составит $400 \cdot 0{,}3 = 120$ (рублей).

Ответ: 120.

B5. $4 + x = 4$; $x = 4 - 4$; $x = 0$.

Проверка: $\log_3(4 + 0) = \log_3 4$; $x = 0$ — корень уравнения.

Ответ: 0.

B6. $\sin\angle A = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{3}$ (см. рис. 104), откуда $CB = \frac{1}{3} \cdot AB = 6$.

$\triangle CHB \sim \triangle ACB$, $\angle HCB = \angle BAC$; $\frac{HB}{CB} = \frac{1}{3}$, значит, $HB = 2$.

Ответ: 2.

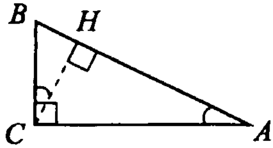


Рис. 104.

B7. $\dfrac{7\,\mathrm{tg}\,138^\circ}{0{,}2\,\mathrm{tg}\,42^\circ} = 35 \cdot \dfrac{\mathrm{tg}\,138^\circ}{\mathrm{tg}\,42^\circ} = 35 \cdot \dfrac{\mathrm{tg}(180^\circ - 42^\circ)}{\mathrm{tg}\,42^\circ} =$

$= 35 \cdot \dfrac{-\,\mathrm{tg}\,42^\circ}{\mathrm{tg}\,42^\circ} = -35.$

Ответ: -35.

B8. Угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = -8x + 1$, то есть равен -8. Так как $(2x^2 - 2x + 9)' = 4x - 2$, то в точке касания выполняется $4x - 2 = -8$, откуда $x = -1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

B9. $S_{\text{полн. поверхн. цилиндра}} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi r(l + r)$, где l — образующая цилиндра, r — радиус основания цилиндра (см. рис. 105).
Шар вписан в цилиндр, значит, $l = 2r$.
$S_{\text{поверхности шара}} = 4\pi r^2$.

По условию $S_{\text{поверхности шара}} = 18$, $4\pi r^2 = 18$, $\pi r^2 = \dfrac{18}{4} = 4{,}5$.

$S_{\text{полн. поверхности цилиндра}} = 2\pi r(2r + r) = 6\pi r^2 = 6 \cdot 4{,}5 = 27$.

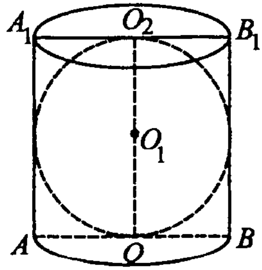


Рис. 105.

Ответ: 27.

B10. Вероятность того, что часовая стрелка «застыла», достигнув отметки 4 и не дойдя до отметки 7, равна $\dfrac{7-4}{12} = \dfrac{3}{12} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

B11. Объём воды в сосуде равен произведению площади основания на высоту (см. рис. 106).

$V_1 = S_{\triangle ABC} \cdot AA_2,\ AA_2 = 18$ см.

Пусть сторона основания a, тогда $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 18 = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}$.

Пусть высота другого сосуда равна h, а в другом сосуде сторона основания в 3 раза больше стороны основания первого сосуда, тогда

$V_2 = \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$.

$V_1 = V_2$, тогда $\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h;\ h = 2$.

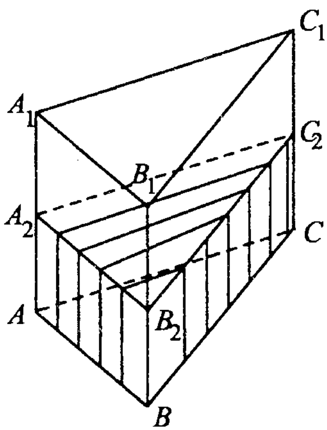


Рис. 106.

Ответ: 2.

B12. По условию должно выполняться неравенство $-\dfrac{1}{100}x^2 + x \geqslant 14 + 2$;

$x^2 - 100x + 1600 \leqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $x_1 = 20$ и $x_2 = 80$. Решением неравенства является отрезок $[20; 80]$. Искомое наибольшее расстояние равно 80 м.

Ответ: 80.

B13. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда составим таблицу:

S (км)	v (км/ч)	t (ч)
21 км	$8+x$	$\frac{21}{8+x}$
21 км	$8-x$	$\frac{21}{8-x}$
Итого		$(16-8)-1=7$

Составляем уравнение: $\frac{21}{8+x}+\frac{21}{8-x}=7$. Решим уравнение:

$3\cdot(8-x)+3\cdot(8+x)=64-x^2$, $24-3x+24+3x=64-x^2$, $64-x^2=48$, $x^2=16$, $x=4$.

Ответ: 4.

B14. $y=4x-\ln(4x+2)-8$, $4x+2>0$, $4x>-2$, $x>-0{,}5$.

$y'=4-\frac{4}{4x+2}$;

$y'=0$. $4-\frac{4}{4x+2}=0$.

$4x+2=1$,

$4x=-1$,

$x=-0{,}25$.

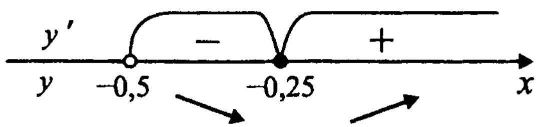


Рис. 107.

На промежутке $(-0{,}5;\ +\infty)$ заданная функция имеет единственную точку экстремума — точку минимума $x=-0{,}25$, следовательно, в этой точке она принимает наименьшее значение (см. рис. 107).

$y(-0{,}25)=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\ln\left(4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+2\right)-8=-1-\ln 1-8=-9.$

Ответ: -9.

C1. а) Так как $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, то

$2\sin x\cos x=\cos x$, $\cos x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$.

Корни уравнения: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

б) Корни уравнения $\cos x = 0$ изображаются точками A и B, а корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ точками C и D. В промежутке $\left(\frac{5\pi}{6};\ 3\pi\right]$ содержатся четыре корня уравнения: $\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}$ (см. рис. 108).

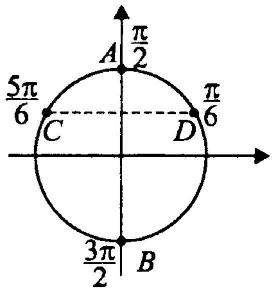


Рис. 108.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$; б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}$.

С2. Пусть SO — высота пирамиды (см. рис. 109), тогда O — центр квадрата $ABCD$.

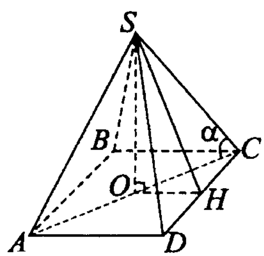


Рис. 109.

Обозначим $AB = a$, тогда $OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, SC = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

В равнобедренном треугольнике SCD имеем $HC = \frac{a}{2}$, тогда

$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = a.$

Очевидно, $\angle SHO$ искомый, тогда $\cos\angle SHO = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{a}{2} : a = \dfrac{1}{2}$,

значит $\angle SHO = 60°$.

Ответ: 60°.

С3. $\log_3 x + \log_x 3 > 2$.
ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

$\log_3 x + \dfrac{1}{\log_3 x} > 2.$

Относительно $t = \log_3 x$ неравенство имеет вид $t + \dfrac{1}{t} > 2$,

$\dfrac{t^2 - 2t + 1}{t} > 0,$

$\dfrac{(t-1)^2}{t} > 0, \quad \begin{cases} t > 0, \\ t \neq 1. \end{cases}$

Значит, $\log_3 x > 0, x > 1$ и $\log_3 x \neq 1, x \neq 3$.
С учётом области допустимых значений переменной получаем решение исходного неравенства $x \in (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(1; 3) \cup (3; +\infty)$.

С4. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Возможны два случая:
1) $\triangle ABC$ остроугольный (см. рис. 110).

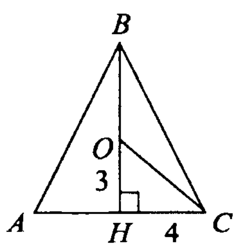


Рис. 110.

$HC = \dfrac{1}{2}AC = 4$, $OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = 5$, тогда
$R = OB = OC = OA = 5$.
Из прямоугольного треугольника BHC получим $BH = BO + OH = 8$ и $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = 4\sqrt{5}$.

2) $\triangle ABC$ тупоугольный (см. рис. 111).

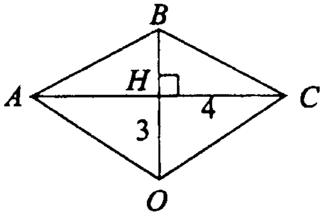


Рис. 111.

$R = OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = 5$, тогда $BH = BO - HO = 2$, $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$.

С5. Пусть $f(x) = (a-1)x^2 + (2a+3)x + a$.

При $a - 1 > 0$ графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Только меньший из корней уравнения $f(x) = 0$ принадлежит промежутку $(-2; 3)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(-2) > 0, \\ f(3) < 0, \\ a - 1 > 0 \end{cases}$ (см. рис. 112).

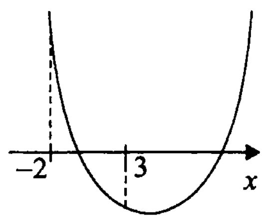


Рис. 112.

Аналогично при $a - 1 < 0$ только меньший из корней уравнения $f(x) = 0$ принадлежит промежутку $(-2; 3)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(3) > 0, \\ a - 1 < 0 \end{cases}$ (см. рис. 113).

$f(-2) = (a-1)(-2)^2 + (2a+3)\cdot(-2) + a = a - 10$;

$f(3) = (a-1)\cdot(3)^2 + (2a+3)\cdot 3 + a = 16a$;

$\begin{cases} a - 10 > 0, \\ 16a < 0, \\ a > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 10, \\ a < 0; \end{cases}$ решений нет.

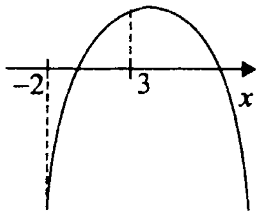


Рис. 113.

$$\begin{cases} a-10<0, \\ 16a>0, \\ a<1; \end{cases} \quad \begin{cases} a<10, \\ a>0, \\ a<1; \end{cases} \quad a \in (0;1).$$

Теперь найдём значения a, при которых меньший корень уравнения $f(x)=0$ равен 3.

$f(3)=0,\ 16a=0,\ a=0.$

При $a=0$ исходное уравнение примет вид $-x^2+3x=0$, корнями которого являются числа 0 и 3, то есть число 3 не меньший из корней. Значит, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \in (0;1)$.

С6. а) Разобьём квадрат 8×8 на 9 прямоугольников, как показано на рисунке 114.

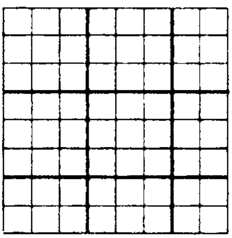


Рис. 114

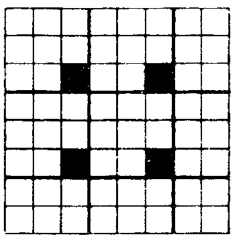


Рис. 115

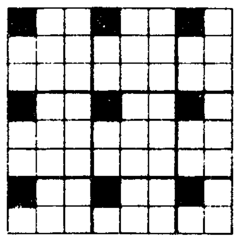


Рис. 116

Так как в каждом квадрате 3×3 должна быть закрашенная клетка, то закрашенных клеток не меньше 4. Пример, когда их ровно 4, изображён на рисунке 115.

Очевидно, в каждом из полученных 9-ти прямоугольников не более одной клетки (так как каждый из этих прямоугольников содержится в каком-то квадрате 3×3), то есть всего не более 9-ти закрашенных клеток. Пример, когда их ровно 9, изображён на рисунке 116.

б) Если $m = ck$ для некоторого целого числа c, то квадрат $m \times m$ можно разбить на c^2 квадратов $k \times k$ и тогда закрашенных клеток в нём ровно c^2. Если же $m = ck + r$, $c \in N$, $0 < r < k$, разобьём квадрат на прямоугольники, как показано на рисунке 117.

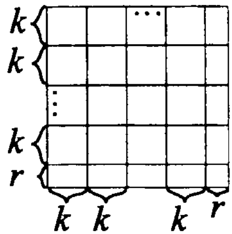


Рис. 117.

Наименьшее количество закрашенных клеток получится, если в прямоугольниках $r \times k$ и $r \times r$ нет закрашенных клеток. Пример аналогичен пункту а): в каждом выделенном квадрате $k \times k$ закрасим правую нижнюю клетку, тогда получим c^2 закрашенных клеток.

в) Аналогично пункту а) наибольшее количество закрашенных клеток получится, если в каждом выделенном прямоугольнике есть закрашенная клетка. Тогда закрашенных клеток получится $(c+1)^2$. Пример: в каждом выделенном прямоугольнике закрасим левую верхнюю клетку.

Ответ: а) 4; 9.
Если $m = ck$, $c \in N$, то б) c^2; в) c^2;
Если же $m = ck + r$, $c \in N$, $0 < r < k$, то б) c^2; в) $(c+1)^2$.

Решение варианта 16

B1. Цена была снижена на $600 - 330 = 270$ (рублей), что в процентах составляет $\frac{270}{600} \cdot 100\% = 45\%$.

Ответ: 45.

B2. По рисунку определяем, что 4 мм осадков впервые выпало 16-го сентября.

Ответ: 16.

B3. $S = S_{ABCD} - S_{KLMN}$ (см. рис. 118).

$ABCD$ и $KLMN$ — квадраты, тогда
$S_{ABCD} = AB^2 = OA^2 + OB^2 = 50$, $S_{KLMN} = KL^2 = OK^2 + OL^2 = 8$,
$S = 50 - 8 = 42$.

Ответ: 42.

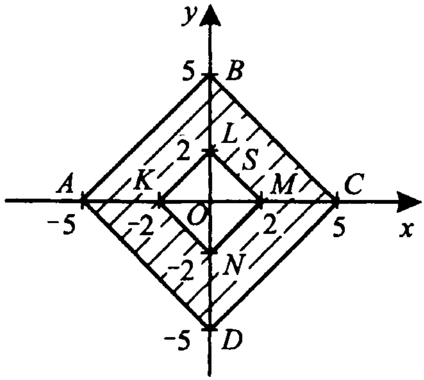


Рис. 118.

B4. Составим таблицу.

Время суток	Месячный расход в кВт · ч	Оплата по однотарифному счётчику (в рублях) в месяц	Оплата по двухтарифному счётчику (в рублях) в месяц
День	150	$150 \cdot 2{,}80 = 420$	$150 \cdot 2{,}80 = 420$
Ночь	70	$70 \cdot 2{,}80 = 196$	$70 \cdot 1{,}10 = 77$
Итого:	220	$420 + 196 = 616$	$420 + 77 = 497$

$616 - 497 = 119$ (руб.), $119 \cdot 12 = 1428$ (руб.)

Ответ: 1428.

B5. $17^{x+2} = \left(\frac{1}{17}\right)^x$. Заметим, что $\frac{1}{17} = 17^{-1}$; $17^{x+2} = 17^{-x}$; $x + 2 = -x$; $2x = -2$; $x = -1$.

Ответ: -1.

B6. $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\angle A$ (см. рис. 119). По теореме Пифагора:
$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 153 - 144 = 9$; $\operatorname{ctg} A = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$, откуда $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}25$.

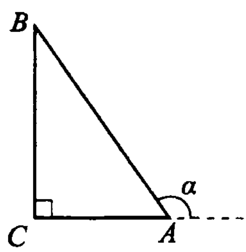


Рис. 119.

Ответ: $-0{,}25$.

B7. $\dfrac{9}{4\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{113\pi}{3}\right)} = \dfrac{9}{4\cos\left(-4\frac{1}{6}\pi\right)\cdot\sin\left(38\pi-\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= \dfrac{9}{4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{9}{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\dfrac{9}{3} = -3.$

Ответ: -3.

B8. Промежуткам убывания функции соответствуют промежутки, на которых производная данной функции отрицательна. По графику определяем, что наибольший из этих промежутков $[-7; -4]$ имеет длину 3.

Ответ: 3.

B9. Из прямоугольного треугольника ASO по теореме Пифагора получаем: $OA^2 = SA^2 - SO^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $OA = 12$. Так как $CO = OA$, то $CA = 2\cdot OA = 24$. Так как сторона квадрата в $\sqrt{2}$ раз меньше его диагонали, то $DA = \dfrac{CA}{\sqrt{2}} = \dfrac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$. Объём пирамиды равен

$V = \dfrac{1}{3}\cdot DA^2\cdot SO = \dfrac{1}{3}\cdot 144\cdot 2\cdot 5 = 480.$

Ответ: 480.

B10. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле 0,6.
Так как по условию биатлонист четыре раза попадает в мишень, а в последний раз промахнулся ($1 - 0{,}6 = 0{,}4$), то вероятность этого равна $0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}05184 \approx 0{,}05$.

Ответ: 0,05.

B11. $V_{\text{воды}} = 3000$ см^3. Уровень жидкости был равен 12 см, в связи с погружением в воду детали он поднялся на 4 см, то есть на $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ прежнего уровня. Отсюда объём воды увеличился на $\dfrac{3000}{3} = 1000$ (см^3) за счёт погружения в воду детали. Следовательно, объём детали равен 1000 см^3.

Ответ: 1000.

B12. Для того чтобы прибор не вышел из строя, его нужно выключить до того, как его температура поднимется выше 1730 K. Найдём наибольшее время после начала работы прибора, через которое нужно отключить прибор, из неравенства $T(t) > 1730$, или $T_0 + bt + at^2 > 1730$. Подставляя в это неравенство значения $T_0 = 1492$, $b = 153$, $a = -17$, получим $1492 + 153t - 17t^2 > 1730$, $17t^2 - 153t + 238 < 0$, $t^2 - 9t + 14 < 0$,

$(t-2)(t-7) < 0$, $t \in (2;7)$. Таким образом, уже через 2 минуты после начала работы прибора температура нагревательного элемента станет больше 1730 К, поэтому его надо выключить не позднее, чем через 2 минуты.

Ответ: 2.

В13. Пусть 15%-го раствора взяли x г, тогда 25%-го раствора — $(750-x)$ г. Кислоты в 15%-ом растворе было $0{,}15x$ г, а в 25%-ом — $0{,}25(750-x)$ г. В результате смешивания стало $750 \cdot 0{,}2 = 150$ г кислоты.

Составим и решим уравнение:

$0{,}15x + 0{,}25(750-x) = 150$; $0{,}1x = 37{,}5$; $x = 375$ г.

Ответ: 375.

В14. $y' = \dfrac{5(x+4)^4}{(x+4)^5} - 5 = \dfrac{5}{x+4} - 5 = \dfrac{-5x-15}{x+4} = \dfrac{-5(x+3)}{x+4}$. $y' = 0$ при $x = -3$.

Найдём значения функции на концах отрезка и при $x = -3$:

$y(-3{,}5) = \ln(-3{,}5+4)^5 - 5\cdot(-3{,}5) = -5\ln 2 + 17{,}5$;

$y(-3) = \ln(-3+4)^5 - 5\cdot(-3) = 15$; $y(0) = \ln(0+4)^5 - 5\cdot 0 = 5\ln 4$.

Наибольшее значение функции при $x = -3$ равно 15.

Ответ: 15.

С1. а) Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, то

$2\sin x\cos x = -\sin x$, $\sin x\left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Корни уравнения: $x = \pi n, n \in Z, x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

б) Корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками A и B, а корни уравнения $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ точками C и D. В промежутке $\left(\dfrac{4\pi}{3}; 4\pi\right]$ содержатся пять корней уравнения: 2π, $\dfrac{8\pi}{3}$, 3π, $\dfrac{10\pi}{3}$, 4π (см. рис. 120).

Ответ: а) $\pi n, n \in Z, \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) 2π, $\dfrac{8\pi}{3}$, 3π, $\dfrac{10\pi}{3}$, 4π.

С2. Пусть O — центр основания пирамиды, SH— высота грани SCD (см. рис. 121).

Обозначим $AB = a$, тогда $OH = \dfrac{a}{2}$, $OC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, тогда из $\triangle SOH$ получим:

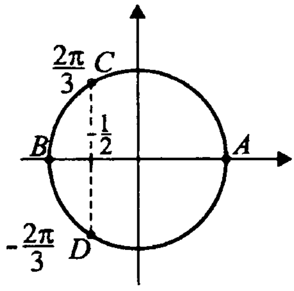


Рис. 120.

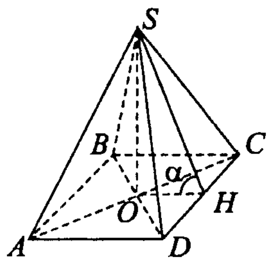


Рис. 121.

$$SH = \frac{OH}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

$$SC = \sqrt{HC^2 + SH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2 \cdot 5}{4 \cdot 3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$ тогда

$$\cos\angle SCO = \frac{OC}{SC} = \frac{a}{\sqrt{2}} : \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, искомый угол $\angle SCO = 30°$.

Ответ: $30°$.

С3. $\log_2 x + 2\log_x 2 < 3$.
ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

$$\log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} < 3.$$

Относительно $t = \log_2 x$ неравенство имеет вид $t + \frac{2}{t} < 3$;

$$\frac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0, \quad \frac{(t-1)(t-2)}{t} < 0, \quad \left[\begin{array}{l} t < 0, \\ 1 < t < 2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной. $\log_2 x < 0$, $x < 1$; $1 < \log_2 x < 2$, $2 < x < 4$.

С учётом области допустимых значений переменной получаем решение исходного неравенства $x \in (0; 1) \cup (2; 4)$.

Ответ: $(0; 1) \cup (2; 4)$.

С4. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Возможны два случая:
1) $\triangle ABC$ остроугольный (см. рис. 122).

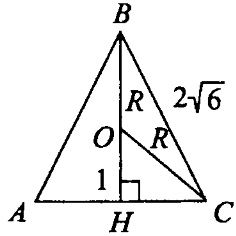


Рис. 122.

$HC = \sqrt{R^2 - 1}$, $BH = R + 1$, тогда
$BC^2 = BH^2 + HC^2$;
$24 = (R + 1)^2 + R^2 - 1$; $24 = 2R^2 + 2R$.
$R^2 + R - 12 = 0$, $(R + 4)(R - 3) = 0$, $R = 3$.
2) $\triangle ABC$ тупоугольный (см. рис. 123).

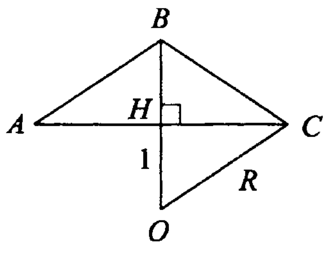


Рис. 123.

$HC = \sqrt{R^2 - 1}$, $BH = R - 1$, тогда $BC^2 = BH^2 + HC^2$,
$24 = (R - 1)^2 + R^2 - 1$; $24 = 2R^2 - 2R$;
$R^2 - R - 12 = 0$; $(R - 4)(R + 3) = 0$, $R = 4$.

Ответ: 3; 4.

С5. Пусть $f(x) = x^2 + (3a - 1)x + 2a + 3$. Графиком функции $y = f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Чтобы ровно один из корней уравнения $f(x) = 0$ принадлежал промежутку $(-1; 4)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(-1) \cdot f(4) < 0$ (см. рис. 124).

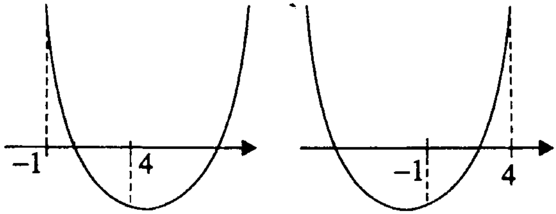


Рис. 124.

$f(-1) = (-1)^2 + (3a-1)\cdot(-1) + 2a + 3 = -a + 5;$
$f(4) = 4^2 + (3a-1)\cdot 4 + 2a + 3 = 14a + 15;$

$(5-a)(14a+15) < 0,\ (a-5)(14a+15) > 0, a \in \left(-\infty; -\frac{15}{14}\right) \cup (5; +\infty).$

Найдём теперь значения a, при которых один из корней уравнения равен -1, а другой не принадлежит промежутку $[-1; 4)$.
$f(-1) = 0,\ a = 5.$
При $a = 5$ уравнение $f(x) = 0$ примет вид $x^2 + 14x + 13 = 0;$
$(x+13)(x+1) = 0; x = -13, x = -1.$
Итак, $a = 5$ удовлетворяет условию задачи.

Найдём значения a, при которых уравнение имеет единственный корень. $D = (3a-1)^2 - 4(2a+3) = 0.\ 9a^2 - 14a - 11 = 0;\ a_1 = \frac{7+2\sqrt{37}}{9};$

$a_2 = \frac{7-2\sqrt{37}}{9}.$

В первом случае корень $x = -\frac{3a-1}{2} = \frac{-4-2\sqrt{37}}{6}$ не принадлежит промежутку $[-1; 4)$, во втором $x = \frac{-4+2\sqrt{37}}{6}$ принадлежит.

Окончательно получим: $a \in \left(-\infty; -\frac{15}{14}\right) \cup \left\{\frac{7-2\sqrt{37}}{9}\right\} \cup [5; +\infty).$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{15}{14}\right) \cup \left\{\frac{7-2\sqrt{37}}{9}\right\} \cup [5; +\infty).$

С6. а) В квадрате 10×10 содержится 4 непересекающихся квадрата 4×4 (см. рис. 125).

Таким образом, количество закрашенных клеток должно быть не меньше, чем $4 \cdot 2 = 8$ (иначе в каком-либо из этих квадратов было бы меньше 2 закрашенных клеток). На рисунке 126 показано, какие клетки необходимо закрасить, чтоб их было ровно 8.

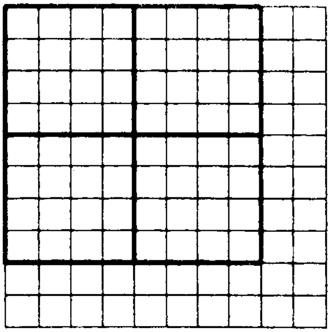


Рис. 125

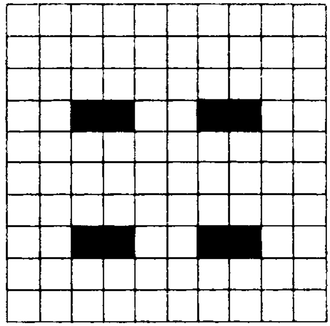


Рис. 126

Очевидно, что квадрат 10×10 можно полностью покрыть 9 квадратами 4×4 (см. рис. 127). Значит, количество закрашенных клеток не больше $2 \cdot 9 = 18$ (иначе в какой-либо из этих квадратов попало бы более 2 закрашенных клеток).

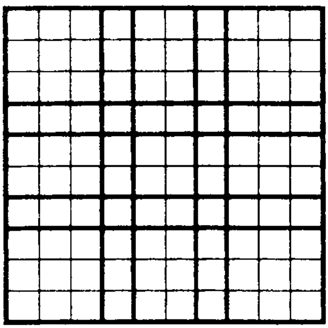


Рис. 127

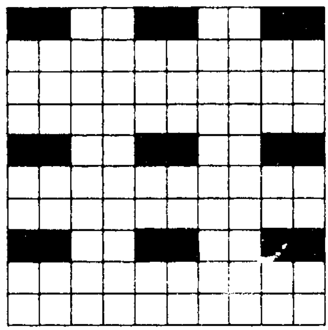


Рис. 128

На рисунке 128 показано, как раскрасить ровно 18 клеток в соответствии с условием.

б) Если $m = ck$, то количество закрашенных клеток не меньше $2c^2$. Действительно, квадрат $m \times m$ можно разбить на c^2 непересекающихся квадратов. Приведём пример, когда закрашенных клеток ровно $2c^2$. Будем закрашивать клетки в k-ой строке, в $2k$-ой строке, в $3k$-ой строке и т.д. Таких строк c штук. В каждой из этих строк будем раскрашивать клетки, которые стоят в $k-1$, k, $2k-1$, $2k$, $3k-1$, $3k$, ..., $ck-1$, ck столбцах. Аналогично, если $m = ck+r$, $1 < r < k$, то выделим подквадрат размером $ck \times ck$ вписанный в верхний левый угол исходного квадрата (см. рис. 129) и раскрасим в получившемся квадрате клетки указанным выше способом. Покажем, что любой квадрат $k \times k$ содержит ровно 2 закрашенные клетки. Рассмотрим произвольный квадрат $k \times k$. Он пересекает ровно одну из тех срок, в которой есть раскрашенные клетки. Выделим эту строку. В любой её подстроке длиной k клеток, очевидно, содержится ровно 2 закрашенные клетки. Так как всего закрашенных клеток не меньше $2c^2$, данный пример доказывает, что наименьшее число закрашенных равно $2c^2$.

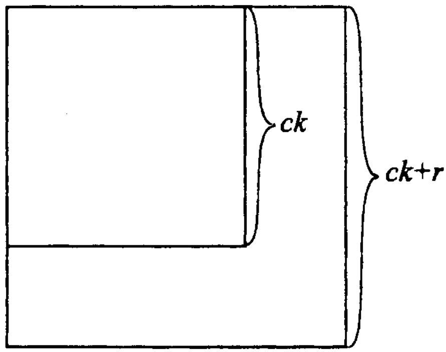


Рис. 129.

в) При $m = ck$ исходный квадрат разбивается на c^2 квадратов $k \times k$, а потому число закрашенных клеток не больше $2c^2$. Пример, когда закрашенных клеток ровно $2c^2$, приведён выше. Если $m = ck + r$, $1 < r < k$, то очевидно, что исходный квадрат можно покрыть $(c+1)^2$ квадратами размера $k \times k$ (исходный квадрат можно вписать в квадрат $(c+1)k \times (c+1)k$, который легко разбивается на $(c+1)^2$ квадрат размера $k \times k$). Значит, всего не более $2(c+1)^2$ закрашенных клеток. Приведём пример, когда их ровно $2(c+1)^2$. Будем раскрашивать клетки в строчках с номерами: 1, $k+1$, $k+2$, $2k+1$, $2k+2$, ..., $ck+1$, $ck+2$. В каждой такой строке раскрасим клетки, которые стоят в столбцах с номерами 1, 2, $k+1$, $k+2$, $2k+1$, $2k+2$, ..., $ck+1$, $ck+2$. Таким образом, искомый пример построен.

Ответ: а) 8; 18. Если $m = ck$, $c \in N$, то б) $2c^2$; в) $2c^2$. Если $m = ck + r$, $c \in N$, $1 < r < k$, то б) $2c^2$; в) $2(c+1)^2$.

Решение варианта 17

B1. Так как $\frac{250}{20} = 12{,}5$, то наибольшее нечётное число ромашек, которое может купить Ваня, — это 11.

Ответ: 11.

B2. По рисунку определяем, что менее 3000 автомобилей было продано первый раз в 6-м месяце.

Ответ: 6.

B3. $S_{ABC} = S_{AKLM} - S_{AKB} - S_{BLC} - S_{CMA}$ (см. рис. 130).

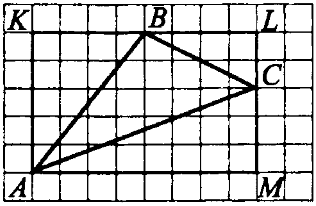


Рис. 130.

$$S_{ABC} = 5 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 40 - 10 - 4 - 12 = 14.$$

Ответ: 14.

B4. Поездом: $3 \cdot 1120 = 3360$ рублей,

автомобилем: $12 \cdot 9 \cdot 30 = 3240$ рублей.

Наиболее дешёвая поездка — 3240 рублей.

Ответ: 3240.

B5. $3x^2 - 7x - 10 = 0$.

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{6} = \dfrac{7 \pm 13}{6}$, $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{10}{3}$; $-1 < \dfrac{10}{3}$. В ответе указываем меньший из корней, то есть $x = -1$.

Ответ: -1.

B6. $\triangle ABC$ равнобедренный, так как $AB = AC$ (см. по рисунку 131, считаем по клеткам, $AB^2 = (4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$, $AB^2 = 40$, $AC^2 = (4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$, $AC^2 = 40$).

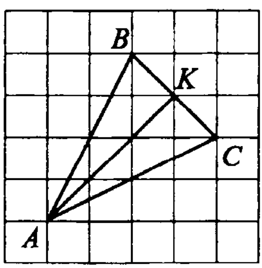


Рис. 131.

$AK \perp BC$, $BK = KC$. $AK^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2$, $AK^2 = 36$, $AK = 6$.

Ответ: 6.

B7. Так как $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha < 0$ и тогда

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{16}{65}} = -\sqrt{\frac{49}{65}} = -\frac{7}{\sqrt{65}},$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{4} = 1{,}75$.

Ответ: 1,75.

B8. На промежутке $(-3; 11)$ точек экстремума функции $y = f(x)$ ровно шесть. Сумма их абсцисс равна: $(-2)+1+3+6+8+9 = 25$.

Ответ: 25.

B9. Рассмотрим рисунок. $\angle C_2C_3B_2$ многогранника принадлежит грани $B_2B_3C_3C_2$ и $\operatorname{tg}\angle C_2C_3B_2 = \frac{B_2C_2}{C_2C_3}$, $B_2C_2 = 2$; $C_2C_3 = 1$.

$\operatorname{tg}\angle C_2C_3B_2 = \frac{2}{1}$, $\operatorname{tg}\angle C_2C_3B_2 = 2$.

Ответ: 2.

B10. Из произведённых на заводе лампочек 5%, то есть 0,05 всей продукции, дефектные. При контроле качества из дефектных лампочек 90% отбраковываются: $0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}045$ от всего количества произведённых лампочек. Остальные поступают в продажу. То есть вероятность того, что случайно выбранная до контроля качества лампочка попадёт в продажу, равна $1 - 0{,}045 = 0{,}955$.

Ответ: 0,955.

B11. Так как треугольники, лежащие в основаниях обеих призм, подобны с коэффициентом подобия 2, то площадь основания исходной призмы в $2^2 = 4$ раза больше площади основания отсечённой призмы. У обеих призм общая высота, поэтому $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1h}{S_2h} = \frac{S_1}{S_2} = 4$, где V_1 и S_1 — объём и площадь основания исходной призмы, V_2 и S_2 — отсечённой. Из последнего равенства получаем $V_1 = 4V_2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

B12. По условию $d \leqslant 2520$; $d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi} \leqslant 2520$. $\frac{3\cdot 420}{\sin\varphi} \leqslant 2520$; $\sin\varphi \geqslant \frac{3\cdot 420}{2520}$, $\sin\varphi \geqslant \frac{1}{2}$. $\varphi = 30^\circ$ — минимальный угол, под которым можно наблюдать третий максимум на решётке.

Ответ: 30.

B13. В 24 кг сплава меди содержится $\frac{24 \cdot 45}{100} = 10{,}8$ (кг). Если к куску сплава добавить x кг чистого олова, доля меди в нём будет $\frac{10{,}8}{24+x}$, что по условию равно 40%.

Составим и решим уравнение: $\frac{10{,}8}{24+x} = \frac{40}{100}$, $24 + x = 27$, $x = 3$.

Ответ: 3.

B14. Найдём производную функции y.

$y'(x) = \frac{7}{x+7} - 7 = \frac{7 - 7x - 49}{x+7} = \frac{-7x - 42}{x+7}$, $y'(x) = 0$ при $x = -6 \in [-6{,}5; 0]$. На отрезке $[-6{,}5; 0]$ заданная функция имеет единственную точку экстремума — точку максимума $x = -6$, следовательно, в этой точке она принимает наибольшее значение $y(-6) = 7\ln(-6+7) - 7 \cdot (-6) + 8 = 50$.

Ответ: 50.

C1. а) Если $2^{\sin 2x} = t$, то получим квадратное уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$, которое имеет два корня: $t = 2$ и $t = \frac{1}{2}$.

1) $2^{\sin 2x} = 2$, $\sin 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

2) $2^{\sin 2x} = \frac{1}{2}$, $\sin 2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi m$, где $m \in Z$.

б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (см. рис. 132) принадлежат корни: $\pm\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

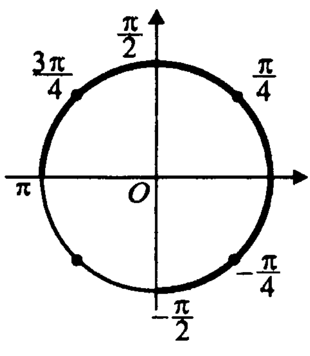


Рис. 132.

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

С2. Продолжим MN до пересечения с прямыми AB и BC и соединим точки пересечения Q и T с точкой K (см. рис. 133). Легко доказать, что $\triangle QLM = \triangle NFT$ (докажите самостоятельно). Сечением куба плоскостью MNK является пятиугольник $MLKFN$ (см. рис. 133). Его площадь S найдём как разность $S = S_{QKT} - 2S_{QLM}$.

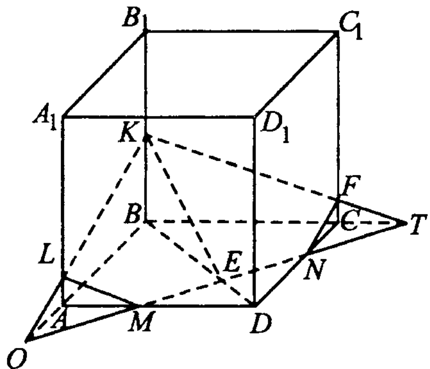


Рис. 133.

$MN = 0{,}5AC = 0{,}5 \cdot AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, $BE : ED = 3 : 1$, $BE = \frac{3}{4}BD = 9\sqrt{2}$.

$QT = 3MN = 3 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ ($\triangle AQM = \triangle MDN = \triangle NCT$), $KE = 3\sqrt{22}$ вычисляется по теореме Пифагора в треугольнике BKE. Площадь $S_{QKT} = \frac{1}{2}QT \cdot KE = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{22} = 54\sqrt{11}$.

$S_{QLM} = S_{FNT} = \frac{1}{9}S_{QKT}$, потому что треугольники подобны с коэффициентом $\frac{1}{3}$, значит площадь сечения равна

$\frac{7}{9}S_{QKT} = \frac{7}{9} \cdot 54\sqrt{11} = 42\sqrt{11}$.

Ответ: $42\sqrt{11}$.

С3. $\log_{2x}(5 - x) \cdot \log_{5-x}(2x) + \log_x(2x + 3) \geqslant 3$.

Область определения неравенства задаётся условиями:

$$\begin{cases} 2x > 0, \ 2x \neq 1, \\ x > 0, \ x \neq 1, \\ 5 - x > 0, \ 5 - x \neq 1, \\ 2x + 3 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0, x \neq \frac{1}{2}, \\ x > 0, x \neq 1, \\ x < 5, x \neq 4, \\ x > -1,5; \end{cases}$$

$$x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; 4\right) \cup \left(4; 5\right).$$

Учитывая теперь, что $\log_{2x}(5-x) \cdot \log_{5-x}(2x) = 1$ и $2 = \log_x x^2$ получим неравенство $\log_x(2x+3) \geqslant \log_x x^2$. Рассмотрим далее два случая:

1) Если $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, то $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$. Решением этого квадратного неравенства является множество чисел $x \leqslant -1$, $x \geqslant 3$, поэтому в этом случае данное неравенство не имеет решений.

2) Если $x \in (1; 4) \cup (4; 5)$, то $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$. Решением этого квадратного неравенства является множество чисел $-1 \leqslant x \leqslant 3$, поэтому в этом случае данное неравенство имеет решения $x \in (1; 3]$.

Ответ: $(1; 3]$.

С4. $\angle BAD + \angle CDA = 180°$ (см. рис. 134), AO и DO — биссектрисы, значит, $\angle OAD + \angle ODA = 90°$ и $\angle AOD = 90°$. Треугольники AOD и BOC прямоугольные, поэтому $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Учитывая, что $\angle AOB$ в два раза меньше $\angle COD$, получим $\angle AOB = 60°$ и $\angle COD = 120°$.

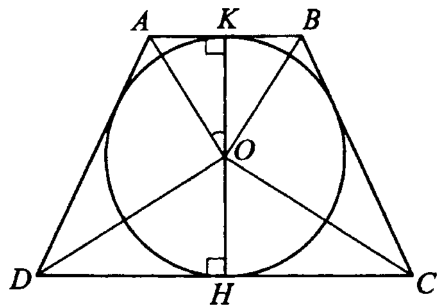


Рис. 134.

KH — высота трапеции, проходящая через центр окружности, тогда $\angle AOK = \dfrac{\angle HOD}{2} = 30°$. $KO = OH$ — радиусы.

1) Если меньшее основание $AB = 6$, то $AK = 3$, и в треугольнике AOK найдём $KO = 3\sqrt{3}$. Тогда в треугольнике DOH найдём $HD = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$, поэтому $CD = 18$. Высота трапеции $KH = 6\sqrt{3}$. Теперь можно найти площадь трапеции:

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot KH = \frac{1}{2}(6 + 18) \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}.$$

2) Если большее основание трапеции равно 6, то, учитывая, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, площадь трапеции в этом случае будет меньше в 9 раз и равна $8\sqrt{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}, 72\sqrt{3}$.

С5. Перенеся все члены уравнения в левую часть, можно разложить её на множители $(2^x - a)(3^x - a) = 0$, поэтому уравнение при любом положительном a имеет два корня $x_1 = \log_2 a$ и $x_2 = \log_3 a$ (при неположительных a корней нет). Оба эти корня принадлежат отрезку $[-1; 1]$ при условии

$\begin{cases} -1 \leqslant \log_2 a \leqslant 1, \\ -1 \leqslant \log_3 a \leqslant 1, \end{cases}$ что равносильно $\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2, \\ \frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 3, \end{cases}$ поэтому при $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$ оба корня данного уравнения принадлежат отрезку $[-1; 1]$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$.

С6. а) Трёхзначное число, записываемое одинаковыми цифрами, делится на 111, значит и сумма таких чисел делится на 111, но число 2013 на 111 не делится, значит, число 2013 нельзя представить в виде суммы слагаемых, все цифры которых одинаковы.

б) Наименьшее слагаемое, записываемое одинаковыми цифрами, 111, число $2013 = 111 \cdot 18 + 15$, но число 15 — двузначное, тогда $2013 = 111 \cdot 17 + 126$. Эта сумма содержит 18 слагаемых, 17 из которых записываются единицами.

в) Если слагаемые не повторяются, и их наибольшее количество в сумме, то нужно использовать меньшие слагаемые: $2013 = 111 + 222 + 333 + 444 + 555 + 348$. В этой сумме пять слагаемых с одинаковыми цифрами.

Ответ: а) нет; б) 17; в) 5.

Решение варианта 18

В1. Скидка составила $45 - 41{,}4 = 3{,}6$ рубля, что в процентах составляет $\frac{3{,}6}{45} \cdot 100 = 8\%$.

Ответ: 8.

B2. Менее 30 мм норма осадков составляет в 1, 2, 3 и 12 месяцах, всего в 4-х месяцах.

Ответ: 4.

B3. По теореме Пифагора сторона квадрата AB равна $\sqrt{AK^2 + KB^2}$ (см. рис. 135), то есть $AB = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$, откуда $S_{ABCD} = AB^2 = 29$.

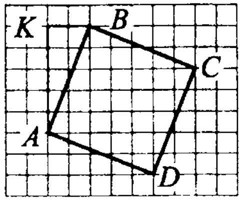


Рис. 135.

Ответ: 29.

B4. Составим таблицу.

Фирма	Стоимость (в руб.) 30 стёкол площадью 0,4 м^2	Стоимость резки 30 стёкол (в руб.)	Общая стоимость (в руб.) (с дополнительными условиями)
А	$30 \cdot 0{,}4 \cdot 280 = 3360$	$30 \cdot 21 = 630$	$3360 + 630 = 3990$
Б	$30 \cdot 0{,}4 \cdot 290 = 3480$	$30 \cdot 16 = 480$	Заказ меньше 15 м^2: $12 < 15$. $3480 + 480 = 3960$
В	$30 \cdot 0{,}4 \cdot 300 = 3600$	$30 \cdot 18 = 540$	$3600 > 3500$, резка бесплатно.

Самый дешёвый заказ стоит 3600 рублей.

Ответ: 3600.

B5. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 15} = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1;$$

$x_1 = 5, x_2 = 3$; $3 < 5$ (в ответе указываем меньший корень).

$x = 3$.

Ответ: 3.

B6. Трапеция описана около окружности, поэтому суммы противоположных сторон равны.

$AD + BC = AB + CD$. $P = 60$, $AD + BC = 30$.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то есть $30 : 2 = 15$.

Ответ: 15.

B7. $h(x) = 5^x$, $h(x-7) = 5^{x-7}$, $h(x-10) = 5^{x-10}$.

$$\frac{h(x-7)}{h(x-10)} = \frac{5^{x-7}}{5^{x-10}} = 5^{x-7-x+10} = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

B8. На промежутке $[-2; 5]$ функция $y = f(x)$ имеет экстремумы в точках: -1; 1 и 4. Их сумма равна $(-1) + 1 + 4 = 4$.

Ответ: 4.

B9. $\triangle SOC$ прямоугольный (см. рис. 136),

$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{49 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{49 + 32} = \sqrt{81} = 9.$

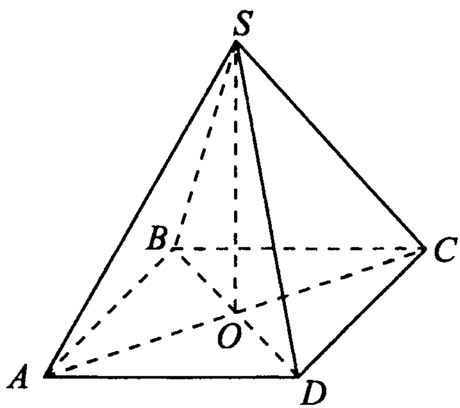


Рис. 136.

Ответ: 9.

B10. В среднем из 110 мониторов 100 качественных и 10 мониторов со скрытыми дефектами. Отсюда вероятность того, что купленный монитор окажется качественным, равна $\frac{100}{110} \approx 0{,}91$.

Ответ: 0,91.

B11. Так как цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед, то нижняя грань параллелепипеда является квадратом со стороной, равной диаметру основания цилиндра, то есть равной $5 \cdot 2 = 10$. Площадь нижней грани параллелепипеда равна $10 \cdot 10 = 100$. Находим высоту параллелепипеда как отношение его объёма к площади основания: $\frac{400}{100} = 4$. Так как высота параллелепипеда является одновременно и высотой цилиндра, то искомое значение также равно 4.

Ответ: 4.

B12. Так как 6 мм $= 0{,}006$ м, то по условию должно выполняться равенство $l - l_0 = 0{,}006$; $l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 = 0{,}006$; $l_0\alpha \cdot t^\circ = 0{,}006$; $12{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot t^\circ = 0{,}006$; $t^\circ = 40^\circ C$.

Ответ: 40.

B13. Если бы зарплата мужа увеличилась в 2 раза, то есть доход семьи увеличился на одну зарплату мужа, то общий доход вырос на 63%. Значит, зарплата мужа составляет 63% от общего дохода. Если бы зарплата жены уменьшилась в 4 раза, то есть стала составлять $\frac{1}{4}$ от начальной, то общий доход понизился бы на $\frac{3}{4}$ зарплаты жены, что по условию равно 24% общего дохода. Тогда вся зарплата жены составляет $24\% \cdot \frac{4}{3} = 32\%$ общего дохода. Зарплата дочери равна $100\% - 63\% - 32\% = 5\%$.

Ответ: 5.

B14. $y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 49)}{x^2} = \frac{x^2 - 49}{x^2}$. $y' = 0$, $x^2 - 49 = 0$, $x = \pm 7$. $-7 \notin (-7; -1)$, $7 \notin (-7; -1)$.

Найдём значения функции на концах отрезка: $y(-1) = \frac{1 + 49}{-1} = -50$, $y(-7) = \frac{49 + 49}{-7} = \frac{49 \cdot 2}{-7} = -14$. Наименьшее значение равно -50.

Ответ: -50.

C1. а) Если $3^{\operatorname{tg} 3x} = t$, то получим квадратное уравнение $3t^2 - 10t + 3 = 0$, которое имеет два корня: $t = 3$ и $t = \frac{1}{3}$.

1) $3^{\operatorname{tg} 3x} = 3$, $\operatorname{tg} 3x = 1$, $3x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, где $n \in Z$.

2) $3^{\operatorname{tg} 3x} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} 3x = -1$, $3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, где $k \in Z$.

б) Найдём корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $-\frac{7}{4} \leqslant n \leqslant \frac{5}{4}$; $n \in \{-1; 0; 1\}$.

$-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $-\frac{5}{4} \leqslant k \leqslant \frac{7}{4}$; $k \in \{-1; 0; 1\}$.

Подставим n и k в формулы, получим, что отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни: $\pm\frac{\pi}{12}$; $\pm\frac{\pi}{4}$ и $\pm\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, где $n \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{12}$; $\pm\frac{\pi}{4}$ и $\pm\frac{5\pi}{12}$.

С2. Сечением куба плоскостью MNK является правильный шестиугольник $MLKHFN$, потому что из построения сечения следует, что треугольник QET правильный, его стороны пересекают рёбра куба в серединах рёбер (докажите самостоятельно) (см. рис. 137). Сторона шестиугольника равна $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = a$.

Найдём площадь шестиугольника $S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

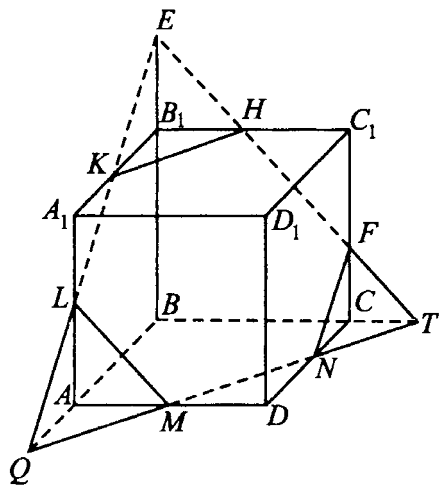


Рис. 137.

Ответ: $27\sqrt{3}$.

С3. $\log_x(6 - x) \cdot \log_{6-x} x + \log_x(3x + 4) \geqslant 3$.

Область определения неравенства задаётся условиями:

$$\begin{cases} x > 0, \ x \neq 1, \\ 6 - x > 0, \ 6 - x \neq 1, \\ 3x + 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \ x \neq 1 \\ x < 6, \ x \neq 5, \\ x > -\frac{4}{3}; \end{cases} \quad x \in (0;1) \cup (1;5) \cup (5;6).$$

Учитывая, что $\log_x(6-x) \cdot \log_{6-x} x = 1$ и $2 = \log_x x^2$, получим неравенство $\log_x(3x+4) \leqslant \log_x x^2$. Рассмотрим далее два случая:

1) Если $x \in (0;1)$, то $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$. Решением этого квадратного неравенства является множество чисел $-1 \leqslant x \leqslant 4$, поэтому в этом случае данное неравенство имеет решения $x \in (0;1)$.

2) Если $x \in (1;5) \cup (5;6)$, то $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$. Решением этого квадратного неравенства является множество чисел $x \leqslant -1, \quad x \geqslant 4$, поэтому в этом случае данное неравенство имеет решения $x \in [4;5) \cup (5;6)$.

Ответ: $(0;1) \cup [4;5) \cup (5;6)$.

С4. Треугольники AOD и BOC прямоугольные (т.к. AO и DO — биссектрисы $\angle A$ и $\angle D$), поэтому $\angle AOB + \angle COD = 180°$ (см. рис. 138).

Учитывая, что $\angle AOB$ в три раза меньше $\angle COD$, получим $\angle AOB = 45°$ и $\angle COD = 135°$.

KH — высота трапеции, проходящая через центр окружности, тогда $\angle AOK = \frac{1}{3}\angle HOD = 22{,}5°$. $KO = OH$ — радиусы.

Заметим, что $\operatorname{tg}^2 22{,}5° = \dfrac{1 - \cos 45°}{1 + \cos 45°} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$.

Тогда $\operatorname{tg} 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$, $\operatorname{ctg} 22{,}5° = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.

$\operatorname{tg} \dfrac{135°}{2} = \sqrt{2} + 1$, $\operatorname{ctg} \dfrac{135°}{2} = \sqrt{2} - 1$.

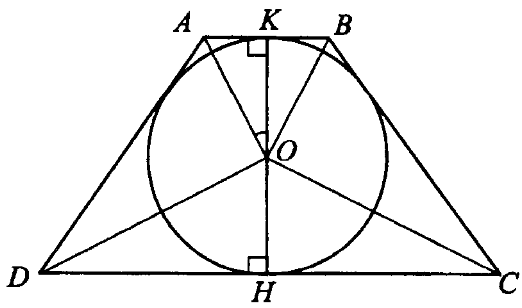


Рис. 138.

1) Если меньшее основание $AB = 1$, то $AK = \frac{1}{2}$, и в треугольнике AOK найдём $KO = AK \cdot \operatorname{ctg} 22{,}5^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$. Тогда в треугольнике DOH найдём $HD = OH \cdot \operatorname{tg}\frac{135^\circ}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})$, поэтому $CD = 3+2\sqrt{2}$. Высота трапеции $KH = \sqrt{2}+1$. Теперь можно найти площадь трапеции:

$S = \frac{1}{2}(AB+CD)\cdot KH = \frac{1}{2}(1+3+2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}+1) = 3\sqrt{2}+4.$

2) Если большее основание трапеции равно 1, то, учитывая, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, площадь трапеции в этом случае будет равна $\frac{3\sqrt{2}+4}{(3+2\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}-4$.

Ответ: $3\sqrt{2}-4$; $3\sqrt{2}+4$.

С5. Левую часть уравнения можно разложить на множители $(2^x+b)(5^x+b) = 0$, поэтому уравнение при любом отрицательном b имеет два корня $x_1 = \log_2(-b)$ и $x_2 = \log_5(-b)$ (при неотрицательных b корней нет). Оба эти корня принадлежат отрезку $[2;5]$ при условии $\begin{cases} 2 \leqslant \log_2(-b) \leqslant 5, \\ 2 \leqslant \log_5(-b) \leqslant 5, \end{cases}$ что равносильно $\begin{cases} -32 \leqslant b \leqslant -4, \\ -3125 \leqslant b \leqslant -25, \end{cases}$ поэтому при $-32 \leqslant b \leqslant -25$ оба корня данного уравнения принадлежат отрезку $[2;5]$.

Ответ: $-32 \leqslant b \leqslant -25$.

С6. а) Наименьшее «растущее» число 123, число $2013 = 123 \cdot 16 + 45$, но число 45 двузначное, тогда $2013 = 123 \cdot 15 + 168$. Эта сумма содержит 16 слагаемых, 15 из которых является «растущими» числами. (Если хотя бы одно из «растущих» чисел не меньше 245, то остальные числа в сумме дают не более 14 «растущих» чисел.)

б) Если слагаемые не повторяются и их наибольшее количество в сумме, то нужно суммировать меньшие «растущие» числа, а именно: $123+234+345+456+567+288 = 2013$. В этой сумме пять слагаемых, являющихся «растущими» числами.

в) Множество «растущих» трёхзначных чисел образуют арифметическую прогрессию, потому что каждое следующее на 111 больше предыдущего, т.е. имеют вид $111k+12$, где $k = 1,2,3,4,5,6,7$. Ясно, что при делении на 111 все «растущие» числа дают в остатке 12, а сумма нескольких растущих чисел имеет вид $111n+12m$.

Учитывая результаты пункта а) этой задачи, число 2013, представленное в виде суммы «растущих» чисел, не может содержать более 15 слагаемых. Заметим, что если сумма содержит 9 или менее слагаемых, то при делении этой суммы на 111 остаток получается чётным вида $12k$, если же сумма содержит более 9 слагаемых, то при делении этой суммы на 111 получаются остатки вида $12k + 9$.

Но число $2013 = 111 \cdot 18 + 15$ при делении на 111 даёт в остатке 15, значит, число 2013 нельзя представить в виде суммы «растущих» слагаемых.

Ответ: а) 15; б) 5; в) нет.

Решение варианта 19

B1. Разговор стоил $67 - 10 = 57$ (рублей), следовательно, длился $\frac{57}{1{,}5} = 38$ (минут).

Ответ: 38.

B2. По рисунку определяем, что автомобиль двигался со скоростью не более 70 км/ч в течение первого, второго, пятого, десятого и одиннадцатого часов пути. Общее время — пять часов.

Ответ: 5.

B3. Нетрудно заметить, что указанный четырёхугольник является квадратом со стороной $AB = \sqrt{AK^2 + KB^2} = \sqrt{37}$ (см. рис. 139), откуда его площадь равна $S_{ABCD} = AB^2 = 37$.

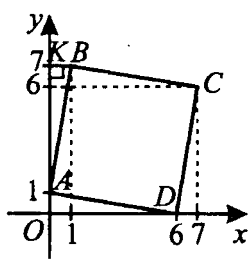


Рис. 139.

Ответ: 37.

B4. Стоимость заказа в фирме А: $2700 \cdot 80 + 6800 = 222\,800$ руб.;

в фирме Б: $3100 \cdot 80 + 3200 = 251\,200$ руб.;

в фирме В: $2800 \cdot 80 = 224\,000$ руб.

Самый дешёвый заказ составит 222 800 (руб.)

Ответ: 222 800.

В5. По определению логарифма имеем: $37x + 7 = 3^4$; $37x + 7 = 81$; $37x = 74$; $x = 2$.

Ответ: 2.

В6. $\angle PQF$ вписанный, $\angle PQF = \frac{1}{2}\smile PF$, значит,

$\smile PF = 2\angle PQF = 2 \cdot 42° = 84°$.

$\angle POF$ центральный, $\angle POF = \smile PF = 84°$.

$\angle KOP + \angle POF = 180°$ как смежные, $\angle KOP = 180° - 84° = 96°$.

Ответ: 96.

В7. $(16b^2 - 121) \cdot \left(\frac{1}{4b - 11} - \frac{1}{4b + 11}\right) - b + 3 =$

$= (16b^2 - 121) \cdot \frac{4b + 11 - (4b - 11)}{(4b - 11)(4b + 11)} - b + 3 =$

$= (16b^2 - 121) \cdot \frac{22}{16b^2 - 121} - b + 3 = 22 - b + 3 = 25 - 29 = -4.$

Ответ: -4.

В8. Найти площадь закрашенной фигуры — значит вычислить $F(-1) - F(-5)$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$. $S = F(-1) - F(-5) = 1 - 9 + 15 + 18 - (5^3 - 9 \cdot 25 + 75 + 18) = = 25 - 125 + 225 - 75 - 18 = 32$.

Ответ: 32.

В9. Прямые CD и A_1C_1 скрещивающиеся (см. рис. 140). Проведём диагональ AC, $AC \parallel A_1C_1$, тогда $\angle ACD$ искомый.

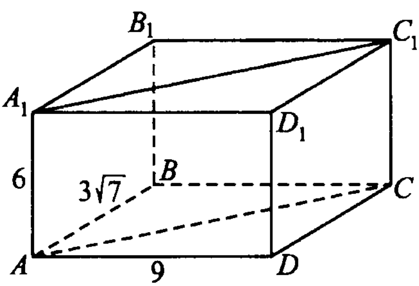


Рис. 140.

$\sin \angle ACD = \frac{AD}{AC}$; $AD = 9$, $AC = \sqrt{81 + 63} = \sqrt{144} = 12$.

$\sin \angle ACD = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

B10. При броске двух игральных костей возможны 36 исходов ($6 \cdot 6 = 36$). Сумма 5 очков получается в следующих исходах: 1 и 4, 2 и 3, 3 и 2, 4 и 1. Всего имеется 4 благоприятных исхода. Искомая вероятность равна $\frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$.

Ответ: 0,11.

B11. Так как все рёбра тетраэдра равны между собой, то тетраэдр правильный. Стороны четырёхугольника, являющегося сечением, — это средние линии граней (треугольников), на которых они лежат. Поэтому каждая из сторон четырёхугольника равна половине ребра тетраэдра, то есть 1,5.

$\Delta AA_1S = \Delta CC_1S$ по третьему признаку равенства треугольников: $SA = SC$ как стороны правильного ΔASC, $AA_1 = CC_1 = SA_1 = SC_1$ как медианы равных треугольников (см. рис. 141). Отсюда $A_1A_2 = C_1C_2$ как соответственные медианы в равных треугольниках.

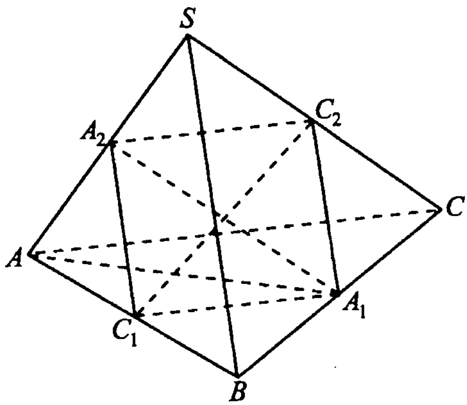


Рис. 141.

Следовательно, четырёхугольник в сечении — квадрат, так как является ромбом с равными диагоналями. Его площадь равна $1{,}5^2 = 2{,}25$.

Ответ: 2,25.

B12. По условию $\alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U} \geqslant 42$; $0{,}7 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \log_2 \frac{32}{U} \geqslant 42$; $\log_2 \frac{32}{U} \geqslant 2$; $\frac{32}{U} \geqslant 4$; $U \leqslant 8$. Искомое наибольшее напряжение равно 8 кВ.

Ответ: 8.

B13. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста в пути от B к A, тогда $(x-5)$ км/час — скорость велосипедиста в пути от A к B. Составим и решим уравнение $\frac{120}{x}+2=\frac{120}{x-5}$, $x>5$; $120(x-5)+2x(x-5)=120x$, $2x^2-10x-600=0$, $x^2-5x-300=0$, $x_1=20, x_2=-15$ не удовлетворяет условию $x>5$.

20 км/ч — скорость велосипедиста.

Ответ: 20.

B14. $y'=(2x+7)\cdot e^{x-5}+(x^2+7x+7)\cdot e^{x-5}=(x^2+9x+14)\cdot e^{x-5}$.

$y'=0$, $x^2+9x+14=0$, $x_1=-7$, $x_2=-2$.

$x=-2$ — точка минимума (см. рис. 142).

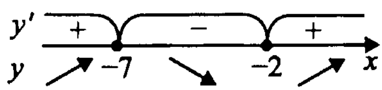


Рис. 142.

Ответ: -2.

C1. а) $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, $2\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}=\sin\frac{x}{2}$.

$1-2\sin^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0$. Пусть $\sin\frac{x}{2}=t$, $t\in[-1;1]$.

$2t^2+t-1=0$, $t_1=-1$, $t_2=\frac{1}{2}$.

1) $\sin\frac{x}{2}=-1$, $\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$, $x=-\pi+4\pi n, n\in Z$.

2) $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{2}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

б) С помощью координатной прямой отберём корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi;-\pi)$.

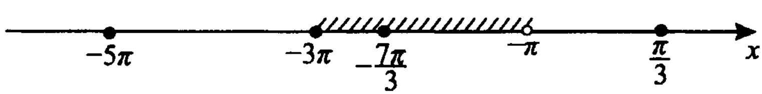


Рис. 143.

Указанному промежутку принадлежит только $x = -\dfrac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = -\pi + 4\pi n$, $n \in Z$, $x = (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$,

б) $x = -\dfrac{7\pi}{3}$.

С2. 1. Сделаем чертёж (см. рис. 144).

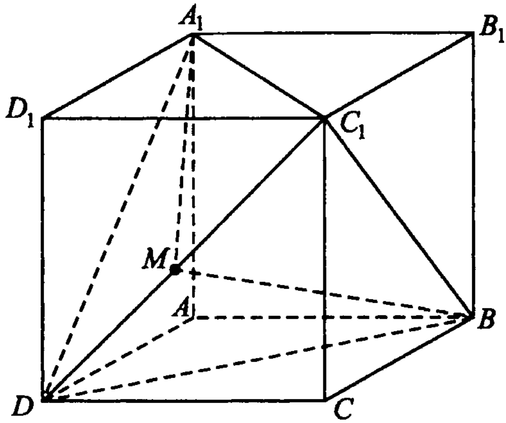


Рис. 144.

Пусть сторона куба равна a. Треугольники A_1C_1D и BC_1D равносторонние со стороной $a\sqrt{2}$.

2. A_1M и BM — медианы, биссектрисы и высоты. $\angle A_1MB$ искомый (либо смежный с искомым) $A_1M = BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}a$, $A_1B = a\sqrt{2}$.

По теореме косинусов для ΔA_1MB:

$A_1B^2 = A_1M^2 + BM^2 - 2A_1M \cdot BM \cos\angle A_1MB$.

$\cos\angle A_1MB = \dfrac{A_1M^2 + BM^2 - A_1B^2}{2A_1M \cdot BM} = \dfrac{3a^2 - 2a^2}{3a^2} = \dfrac{1}{3}$.

$\angle A_1MB = \arccos\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{3}$.

С3. 1. Решим первое неравенство системы.

Пусть $2^x = t$, $t > 0$.

$t^2 - 15t - 34 \leqslant 0$, $(t+2)(t-17) \leqslant 0$, $t \in [-2; 17]$.

$2^x \in (0; 17]$, $x \in (-\infty; \log_2 17]$.

2. Решим второе неравенство системы.

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

$(x-4)\log_x(x+3) \geqslant 0$; $(x-4)\big(\log_x(x+3) - \log_x 1\big) \geqslant 0$.

На ОДЗ это неравенство равносильно следующему:

$(x-4)(x-1)(x+3-1) \geqslant 0$; $x \in [-2; 1] \cup [4; +\infty)$ (см. рис. 145).

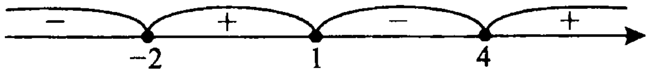


Рис. 145.

С учётом ОДЗ имеем $x \in (0; 1) \cup [4; +\infty)$.

3. Найдём общее решение системы: $x \in (0; 1) \cup [4; \log_2 17]$ (см. рис. 146).

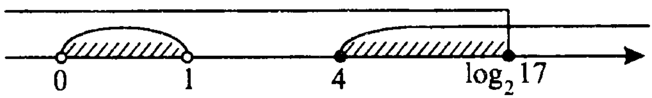


Рис. 146.

Ответ: $x \in (0; 1) \cup [4; \log_2 17]$.

С4. В задаче возможны две конфигурации.

Случай а (см. рис. 147). Пусть $KB = BL = DN = DM = x$.

$AK = AN = CL = CM = 8 - x$, $KL = x\sqrt{2}$, $ML = (8-x)\sqrt{2}$.

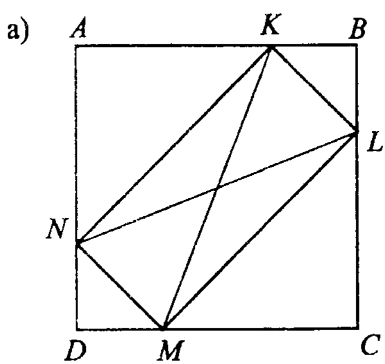


Рис. 147.

$KM^2 = 80 = 2x^2 + 2(64 - 16x + x^2)$, $4x^2 - 32x + 48 = 0$.

$x^2 - 8x + 12 = 0$, $x = 2$ или $x = 6$; $KL = 2\sqrt{2}$ или $KL = 6\sqrt{2}$;

$ML = 6\sqrt{2}$ или $ML = 2\sqrt{2}$.

$S_{KLMN} = 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 24$.

Случай б (см. рис. 148). Пусть $KB = AN = DM = LC$, $BL = MC = DN = AK$. Тогда $KLMN$ — квадрат.

$S_{KLMN} = \frac{1}{2}KM^2 = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{5})^2 = 40.$

б)

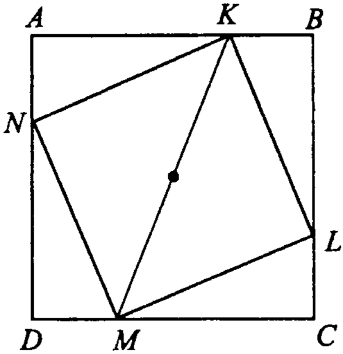


Рис. 148.

Ответ: 24 или 40.

C5. 1. Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+a}{ax-3} - \frac{2}{x} \geqslant 0, \; \frac{x^2+ax-2ax+6}{x(ax-3)} = \frac{x^2-ax+6}{x(ax-3)} \geqslant 0.$$

Так как $x > 9$, то $\dfrac{x^2-ax+6}{ax-3} \geqslant 0$, $\dfrac{x-a+\dfrac{6}{x}}{a-\dfrac{3}{x}} \geqslant 0$,

$$\frac{a-x-\dfrac{6}{x}}{a-\dfrac{3}{x}} \leqslant 0.$$

2. Используем геометрическую интерпретацию неравенства на плоскости Oxa (см. рис. 149).

$$a_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$a_2 = 9 + \frac{6}{9} = 9\frac{2}{3}.$$

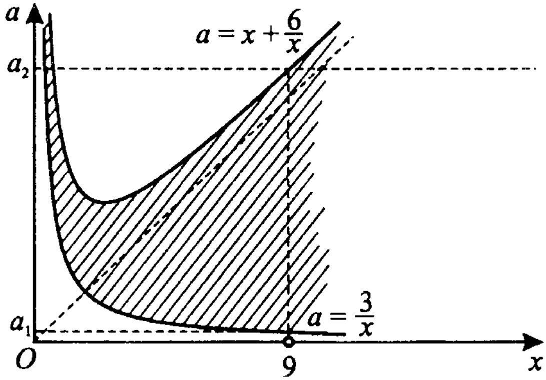


Рис. 149.

$a \in \left[\frac{1}{3}; 9\frac{2}{3}\right]$.

Ответ: $a \in \left[\frac{1}{3}; 9\frac{2}{3}\right]$.

С6. а) Наибольший процент не может превышать 75% — количества жителей, говорящих по-испански. Легко привести пример, когда ровно 75% говорит на 4-х языках.

б) 10% населения не говорит по-английски, 15% не говорит по-немецки, 20% не говорит по-французски, 25% не говорит по-испански. Наименьший процент населения говорящих на всех четырёх языках сразу будет достигаться, если все эти множества не пересекаются, и будет равен $100\% - (10\% + 15\% + 20\% + 25\%) = 30\%$.

Ответ: а) 75; б) 30.

Решение варианта 20

В1. Покупатель может воспользоваться скидкой, поэтому стоимость покупки для него составит $100\% - 15\% = 85\%$ от базовой. Таким образом, покупатель заплатит $40 \cdot 16 \cdot \frac{85}{100} = 544$ рубля.

Ответ: 544.

В2. По графику определяем: автомобиль двигался со скоростью не менее 70 км/ч в течение следующих часов: третьего, четвёртого, шестого, седьмого, восьмого, девятого. Итого 6 часов.

Ответ: 6.

B3. $S_{ABCD} = S_{AKLM} - S_{AKB} - S_{KBC} - S_{CLD} - S_{ADM}$ (см. рис. 150).

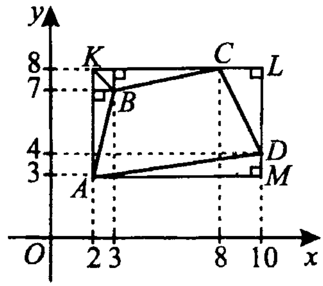


Рис. 150.

$$S_{ABCD} = 5 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 26{,}5.$$

Ответ: 26,5.

B4. Заказ в фирме А обойдётся в $4500 \cdot 90 + 20000 = 425\,000$ (руб.), заказ в фирме Б обойдётся в $4700 \cdot 90 = 423\,000$ (руб.) (доставка бесплатно), заказ в фирме В обойдётся в $4600 \cdot 90 + 10000 = 424\,000$ (руб.).

Наименьшая стоимость составит 423 000 рублей.

Ответ: 423 000.

B5. $x = \dfrac{x}{3x-2}$; $x(3x-2) = x$; $x(3x-3) = 0$; $x(x-1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Проверка: $0 = \dfrac{0}{3 \cdot 0 - 2}$; $1 = \dfrac{1}{3 \cdot 1 - 2}$. Оба числа являются корнями исходного уравнения. В ответ пишем большее из них.

Ответ: 1.

B6. Суммы противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равны 180°. $120^\circ + 82^\circ > 180^\circ$, поэтому данные углы не противоположные. Следовательно, меньший из оставшихся углов равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60.

B7. $\dfrac{\log_{17} 1{,}5}{\log_{17} 7} + \log_7 \log_2 \sqrt[3]{4} = \log_7 1{,}5 + \log_7 \log_2 2^{\frac{2}{3}} =$

$= \log_7 \dfrac{3}{2} + \log_7 \dfrac{2}{3} = \log_7 1 = 0.$

Ответ: 0.

B8. Вычислить $F(9) - F(-2)$ — значит найти площадь трапеции $ABCD$ (см. рис. 151).

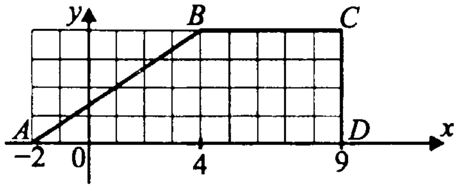


Рис. 151.

$S = \frac{11+5}{2} \cdot 4 = 32.$

Ответ: 32.

B9. $AD = A_2D_2 = AB = 3$, значит, $ABCD$ — квадрат, $\angle ABD = 45°$ как угол между диагональю и стороной квадрата.

Ответ: 45.

B10. Вероятность того, что «Вымпел» выиграет жребий в первой игре и проиграет в остальных равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, так как в каждой игре вероятность выиграть жребий равна вероятности его проиграть и равна $\frac{1}{2}$. Аналогично вероятность того, что «Вымпел» выиграет жребий лишь во второй игре, равна $\frac{1}{8}$. Вероятность того, что «Вымпел» выиграет жребий только в третьей игре, равна $\frac{1}{8}$. Искомая вероятность равна $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ (сумма несовместных событий).

Ответ: 0,375.

B11. Объём полного конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 9 = 75\pi$. Из основания конуса вырезан сектор 120° (что составляет $\frac{1}{3}$ от полного угла 360°), соответствующий $\frac{1}{3}$ круга. Следовательно, площадь основания изображённой фигуры соответствует $\frac{2}{3}$ площади основания полного конуса, и объём этой фигуры также равен $\frac{2}{3}$ от объёма всего конуса.

Искомая величина $\dfrac{V}{\pi} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot 75\pi}{\pi} = 50.$

Ответ: 50.

B12. Запишем формулу работы $A = \alpha v T \log_2 \dfrac{p_2}{p_1}$ и подставим данные из условия $v = 40$ молей, $p_1 = 1{,}3$ атм., $\alpha = 3{,}5$, $T = 300$ К. Получим $3{,}5 \cdot 40 \cdot 300 \log_2 \dfrac{p_2}{1{,}3} \leqslant 126\,000$, $\log_2 \dfrac{p_2}{1{,}3} \leqslant \dfrac{126\,000}{3{,}5 \cdot 40 \cdot 300}$, $\log_2 \dfrac{p_2}{1{,}3} \leqslant 3$,

$\dfrac{p_2}{1{,}3} \leqslant 2^3$, $\dfrac{p_2}{1{,}3} \leqslant 8$, $p_2 \leqslant 10{,}4$.

Наибольшее давление при данных условиях равно 10,4 атм.

Ответ: 10,4.

B13.

	Труба пропускает (л в мин)	Объём резервуара (л)	Время для заполнения резервуара (мин)
I труба	x	140	$\dfrac{140}{x}$
II труба	$x-6$	100	$\dfrac{100}{x-6}$

Составим и решим уравнение: $\dfrac{140}{x} + 5 = \dfrac{100}{x-6}$, $x > 6$. Решим уравнение: $140(x-6) + 5x(x-6) = 100x$, $140x - 840 + 5x^2 - 30x - 100x = 0$, $5x^2 + 10x - 840 = 0$, $x^2 + 2x - 168 = 0$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+168} = -1 \pm 13$. $x_1 = 12$, $x_2 = -14$ не удовлетворяет условию $x > 6$. Первая труба пропускает в минуту 12 л воды.

Ответ: 12.

B14. $y' = 4\cos x + 4$. Если $y' = 0$, то $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. При этом $y' \geqslant 0$.

При $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $y' > 0$, следовательно, наибольшее значение функции $y(x)$ принимает при $x = \dfrac{\pi}{2}$, то есть $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.

$1 + 4 \cdot \dfrac{\pi}{2} - 2\pi = 4.$

Ответ: 4.

C1. а) $1 + \sin 2x = \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2$,

$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 0$,

$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$.

1) $\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

2) $\sin x + \cos x = 1$, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = (-1)^r \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} + \pi r$, $r \in Z$,

то есть $x = 2\pi m, m \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

б) Координатная прямая (см. рис. 152):

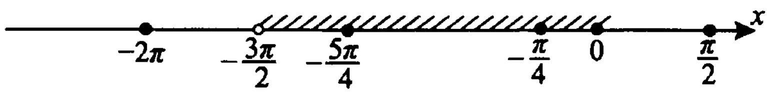


Рис. 152.

$x = -\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; 0$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $2\pi m, m \in Z$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

б) $x = -\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; 0$.

C2. 1. Сделаем чертёж (см. рис. 153).

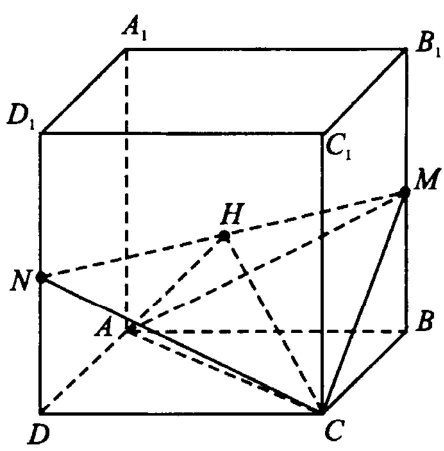


Рис. 153.

Пусть сторона куба равна a. Тогда $AN = AM = CN = CM = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. $MN = DB = AC = a\sqrt{2}$.

2. Так как $\triangle AMN$ и $\triangle CMN$ равнобедренные с основанием MN. AH и CH — медианы, биссектрисы и высоты. $\angle AHC$ искомый (или смежный с искомым).

$$AH = CH = \sqrt{CM^2 - HM^2} = a\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме косинусов для $\triangle AHC$:
$AC^2 = AH^2 + CH^2 - 2AH \cdot CH \cos\angle AHC$.

$$\cos\angle AHC = \frac{AH^2 + CH^2 - AC^2}{2AH \cdot CH} = \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2a^2}{\frac{3}{2}a^2} = -\frac{1}{3}.$$

Найденный угол больше 90°. Учитывая, что угол между плоскостями не превосходит 90°, искомый угол является углом, смежным с $\angle AHC$, и равен $\arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

С3. 1. Первое неравенство. Пусть $3^x = t > 0$.

$t^2 - 5t - 24 \geqslant 0$, $(t+3)(t-8) \geqslant 0$, $t \in (-\infty; -3] \cup [8; +\infty)$.

$3^x \in [8; +\infty)$, $x \in [\log_3 8; +\infty)$.

2. Второе неравенство системы. ОДЗ: $x > 1, x \neq 2$.

$(x+2)\log_{x-1}(x+1) = (x+2)\big(\log_{x-1}(x+1) - \log_{x-1} 1\big) \leqslant 0$.

На ОДЗ это неравенство равносильно следующему:

$(x+2)(x-1-1)(x+1-1) \leqslant 0$, $x(x+2)(x-2) \leqslant 0$, $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 2]$ (см. рис. 154).

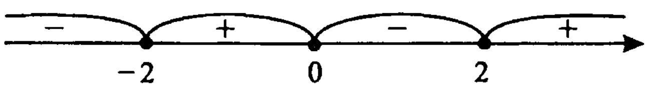


Рис. 154.

С учётом ОДЗ имеем $x \in (1; 2)$.

3. Найдём общее решение системы: $x \in [\log_3 8; 2)$ (см. рис. 155).

Ответ: $x \in [\log_3 8; 2)$.

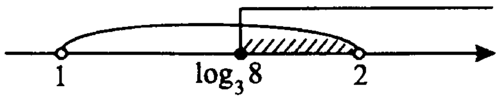


Рис. 155.

С4. 1. Рассмотрим одну из возможных конфигураций (см. рис. 156).

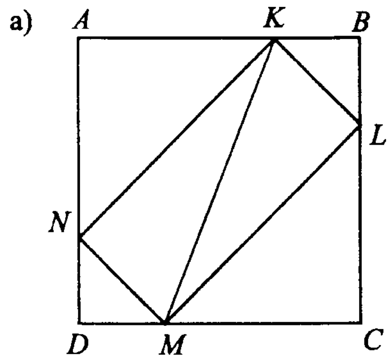


Рис. 156.

Пусть $KB = BL = DN = DM = x$.
$AK = AN = CL = CM = 1 - x$, $KL = x\sqrt{2}$, $ML = (1-x)\sqrt{2}$.

$S_{KLMN} = KL \cdot ML = 2(x - x^2) = \frac{1}{2}$, $4(x - x^2) = 1$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$,

$(2x-1)^2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$. Тогда $1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Диагональ $KM = BC = 1$ (так как $KM \parallel BC$).

2. Рассмотрим другой возможный случай (см. рис. 157).

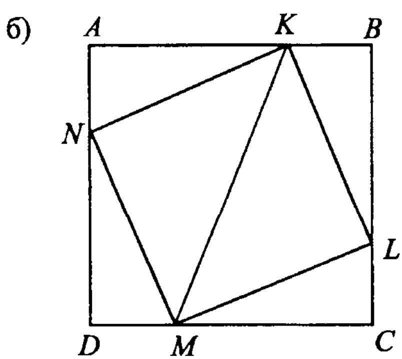


Рис. 157.

Пусть $KB = AN = DM = LC = x$,
$BL = MC = DN = AK = 1 - x$. Тогда $KLMN$ — квадрат. $S_{KLMN} = \frac{1}{2}KM^2 = \frac{1}{2}$, $KM = 1$. Такая конфигурация возможна (она совпала с конфигурацией из пункта 1).

Ответ: 1.

С5. 1. Преобразуем неравенство

$$\frac{x+3a}{ax-2} - \frac{6}{x} \geqslant 0,\ \frac{x^2+3ax-6ax+12}{x(ax-2)} = \frac{x^2-3ax+12}{x(ax-2)} \geqslant 0.$$

Так как $x > 6$, то $\dfrac{x^2-3ax+12}{ax-2} \geqslant 0$, $\dfrac{x-3a+\dfrac{12}{x}}{a-\dfrac{2}{x}} \geqslant 0$,

$$\frac{a-\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}\right)}{a-\dfrac{2}{x}} \leqslant 0.$$

2. Геометрическая интерпретация на плоскости Oxa.

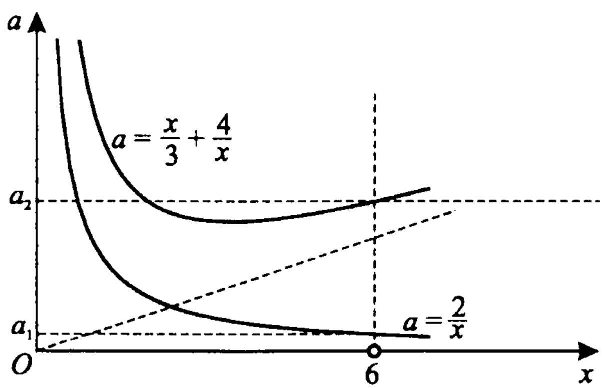


Рис. 158.

$a_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. $a_2 = \frac{6}{3} + \frac{4}{6} = 2\frac{2}{3}$. $a \in \left[\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right]$.

Ответ: $a \in \left[\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right]$.

С6. а) Наибольшее количество не может превышать 65 — количества отдыхающих в Геленджике. Легко привести пример, когда ровно 65 человек удовлетворяют заданному условию.

б) 5 не было в Сочи, 15 — в Анапе, 25 — в Туапсе, 35 — в Геленджике. $100 - (5 + 15 + 25 + 35) = 20$.

Ответ: а) 65; б) 20.

Решение варианта 21

В1. В одном километре $\frac{1}{1{,}6}$ мили, поэтому искомое значение скорости в милях в час равно $\frac{40}{1{,}6} = 25$.

Ответ: 25.

В2. По графику наибольшее или наименьшее значение температуры в период с 14-го по 31-е декабря определяются как точки с наибольшим или наименьшим значениями ординат.
Наибольшему значению соответствует $4°C$, наименьшему значению соответствует $-10°C$. Разность между ними составляет $14°C$.

Ответ: 14.

В3. $\vec{a}(4;6)$, $\vec{b}(7;3)$, тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $(11;9)$ и сумма его координат равна $11 + 9 = 20$.

Ответ: 20.

В4. Грузовик будет ехать $\frac{20+50}{30}$ ч$= \frac{7}{3}$ ч;

автобус — $\frac{34+52}{43}$ ч$= 2$ ч;

легковой автомобиль — $\frac{160}{64}$ ч$= 2{,}5$ ч.

Дольше всех в пути будет находиться легковой автомобиль (2,5 часа).

Ответ: 2,5.

В5. $\ln \frac{12}{x-4} = \ln(x+7)$.

ОДЗ: $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ x + 7 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 4, \\ x > -7; \end{cases}$ $x > 4$.

$\frac{12}{x-4} = x + 7;\ 12 = (x+7)(x-4);$

$x^2 + 3x - 40 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = 5. \end{array}\right.$ Учитывая ОДЗ, получаем единственный корень $x = 5$.

Ответ: 5.

B6. $\angle BAD = 11°$, так как $\angle BAD$ вписанный и равен половине величины дуги, на которую он опирается.
Аналогично $\angle ADC = 29°$, так как величина дуги AC равна $58°$.
$\angle ABC + \angle BAD = \angle ADC$, отсюда $\angle ABC = \angle ADC - \angle BAD$, $\angle ABC = 29° - 11° = 18°$.

Ответ: 18.

B7. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot 0{,}16 - 1 = 0{,}32 - 1 = -0{,}68$.

Ответ: $-0{,}68$.

B8. В точках -4, -3, -2, -1, 1 дорисуем касательные. Наибольший тангенс угла наклона касательной в точке $x = -4$. Значение производной в этой точке наибольшее.

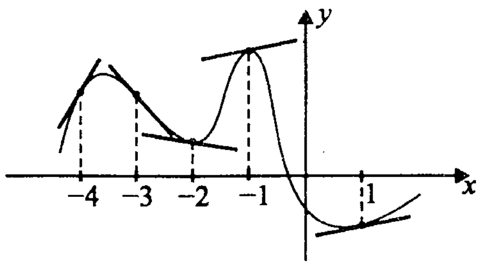


Рис. 159.

Ответ: -4.

B9. $\operatorname{tg}\angle AD_1D = \dfrac{AD}{DD_1}$, $AD = 14$; $DD_1 = 7$ (см. рис. 160).

$\operatorname{tg}\angle AD_1D = \dfrac{14}{7}$, $\operatorname{tg}\angle AD_1D = 2$.

Ответ: 2.

B10. Обсуждаемое событие наступит, если крыса пройдёт мимо ходов Д и Г, а потом пойдёт к выходу А. То есть на каждом из трёх соответствующих разветвлений крыса должна принять определённое решение (выбрать одно направление из двух равновозможных). Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Ответ: 0,125.

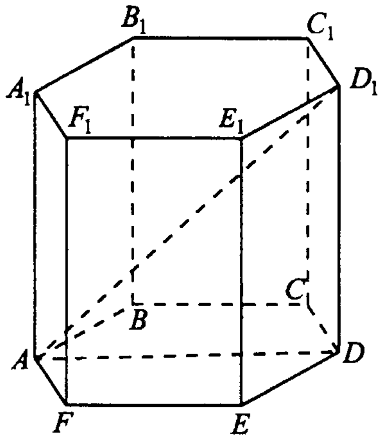


Рис. 160.

B11. Введём обозначения: S — вершина конуса, SO — высота конуса, OK — радиус основания конуса (см. рис. 161). Тогда $SO = \frac{1}{2}SK = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ как катет, лежащий против угла 30° в прямоугольном треугольнике SOK. По теореме Пифагора для этого же треугольника: $OK^2 = SK^2 - SO^2 = 10^2 - 5^2 = 75$. Искомый объём $V = \frac{1}{3}\pi \cdot OK^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot 75 \cdot 5 = 125\pi$. Искомое значение $\frac{V}{\pi}$ равно 125.

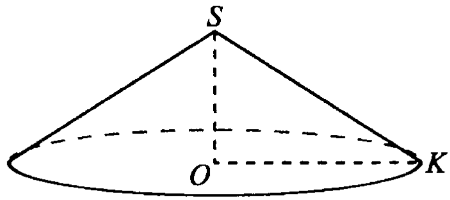


Рис. 161.

Ответ: 125.

B12. По условию $H(t) \leqslant 4{,}05$; $5 - \frac{1}{200} \cdot t \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} + \frac{10}{2} \cdot \frac{1}{200^2} \cdot t^2 \leqslant 4{,}05$; $\frac{1}{8000}t^2 - \frac{1}{20}t + 0{,}95 \leqslant 0$; $t^2 - 400t + 7600 \leqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части неравенства являются $t_1 = 20$, $t_2 = 380$. Решение неравенства — отрезок $[20; 380]$. До указанного в условии уровня высота воды в баке опустится в момент $t = 20$ с.

Ответ: 20.

B13. Пусть x дней необходимо второму маляру, чтобы выполнить работу, тогда $\frac{1}{x}$ часть работы выполняется вторым маляром за один день. Первый маляр делает в один день $\frac{1}{20}$ часть всей работы. Два маляра, работая вместе, в один день делают $\frac{1}{15}$ всей работы. Составляем уравнение:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15}$; $x \neq 0$; $300 + 15x = 20x$; $5x = 300$; $x = 60$.

Ответ: 60.

B14. 1) Найдём значения функции на концах отрезка: $y(0) = \frac{5}{4}\pi - 3$.

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\sqrt{2} \cdot 1 - \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} - 3 = 5\sqrt{2} - 3 - \frac{5\pi}{4} = 5\sqrt{2} - \left(\frac{5\pi}{4} + 3\right)$.

2) $y' = 5\sqrt{2}\cos x - 5$.

3) $y' = 0, 5\sqrt{2}\cos x = 5, \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

4) $x = \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} - 5 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} - 3 = 2$.

5) Выберем среди найденных значений функции наибольшее: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

Ответ: 2.

C1. а) Данное уравнение определено при условии $\sin x \neq 0$. Преобразуем уравнение: $3\cos x - \sin^2 x = 3\cos^2 x$; $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; $\cos x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. Из первого уравнения получаем $x = 2\pi n$, $n \in Z$ (не удовлетворяет условию $\sin x \neq 0$), а из второго уравнения — $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

б) Найдём корни на промежутке $\left[-\frac{13\pi}{2}; -4\pi\right]$.

Для первой серии $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$:

$-\frac{13\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant -4\pi,\ n \in Z;\quad -39 \leqslant -2 + 12n \leqslant -24, n \in Z;$

$-\frac{37}{12} \leqslant n \leqslant -\frac{11}{6},\ n \in Z$. Отсюда $n = -3$ или $n = -2$. При $n = -3$ получаем $x = -\frac{\pi}{3} - 6\pi = -\frac{19\pi}{3}$, при $n = -2$ вычисляем $x = -\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{13\pi}{3}$.

Для второй серии $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$: $-\frac{13\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant -4\pi$, $n \in Z$; $-39 \leqslant 2 + 12n \leqslant -24, n \in Z$; $-\frac{41}{12} \leqslant n \leqslant -\frac{13}{6},\ n \in Z$. Отсюда $n = -3$, и получаем $x = \frac{\pi}{3} - 6\pi = -\frac{17\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $-\frac{19\pi}{3}, -\frac{17\pi}{3}, -\frac{13\pi}{3}$.

С2. Так как по условию $BCD \perp ABC$, то высота DE данной пирамиды лежит в плоскости BCD. Треугольник BCD равнобедренный, поэтому E — середина BC. Отсюда $AE \perp BC$.

Пусть DF — высота в треугольнике ABD, тогда $EF \perp AB$ (см. рис. 162). Из прямоугольного треугольника ABE найдём катет $AE = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$ и высоту $EF = \frac{BE \cdot AE}{AB} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24$. Из прямоугольного треугольника DEF определим $DF = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.

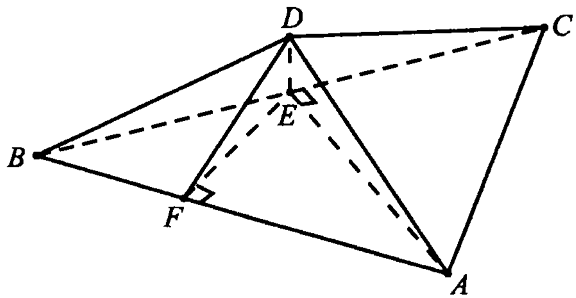


Рис. 162.

Обозначим искомый радиус через x и используем метод объёмов. С одной стороны, $V_{ABCD} = \frac{1}{3}DE \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 60 = 2800$. С другой стороны, объём данной пирамиды равен сумме объёмов пирамид с общей вершиной (центр шара) и основаниями ABC, ABD, ACD и BCD:

$$V_{ABCD} = \frac{x}{3}(S_{ABC} + S_{BCD} + 2S_{ABD}) =$$

$$= \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2}(40 \cdot 60 + 7 \cdot 60 + 2 \cdot 25 \cdot 50) = \frac{2660x}{3}.$$

Из равенства $\frac{2660x}{3} = 2800$ получаем $x = \frac{60}{19}$.

Ответ: $\frac{60}{19}$.

С3. 1) Найдём решения первого неравенства системы.

Число 0 является решением данного неравенства. При условии $x \neq 0$ перепишем неравенство в виде $\dfrac{2}{x + \frac{5}{x} - 2} + \dfrac{3}{x + \frac{5}{x} + 2} \leqslant \frac{7}{8}$.

Пусть $x + \frac{5}{x} = t$, тогда получим неравенство $\frac{2}{t-2} + \frac{3}{t+2} \leqslant \frac{7}{8}$, которое приводится к следующему виду: $\frac{7t^2 - 40t - 12}{8(t-2)(t+2)} \geqslant 0$. Решения последнего неравенства: $t < -2$; $-\frac{2}{7} \leqslant t < 2$; $t \geqslant 6$.

Из неравенства $x + \frac{5}{x} < -2$ получаем $\frac{x^2 + 2x + 5}{x} < 0$. Отсюда $x < 0$, так как $x^2 + 2x + 5 > 0$ при всех значениях $x \in R$. Двойное неравенство $-\frac{2}{7} \leqslant x + \frac{5}{x} < 2$ не имеет решений. Из неравенства $x + \frac{5}{x} \geqslant 6$ находим множество решений $(0; 1] \cup [5; +\infty)$. Итак, первое неравенство имеет решения: $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

2) Область определения второго неравенства системы: $(-6; +\infty)$. После преобразований этого неравенства получим $(x + 4) \cdot \log_3\left(\frac{x}{3} + 2\right) \geqslant 0$. Используем метод интервалов.

а) Пусть $f(x) = (x + 4) \cdot \log_3\left(\frac{x}{3} + 2\right)$, где значения $x \in (-6; +\infty)$.

б) Нули функции $f(x)$: -4 и -3.

в) Промежутки знакопостоянства функции $f(x)$.

$f(x) \geqslant 0$ при всех значениях $x \in (-6; -4] \cup [-3; +\infty)$ (см. рис. 163):

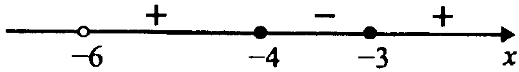


Рис. 163.

3) Найдём общую часть полученных решений:
$(-6; -4] \cup [-3; 1] \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $(-6; -4] \cup [-3; 1] \cup [5; +\infty)$.

С4. Пусть дана трапеция $ABCD$, для которой $AB = 13$, $BC = 10$, $CD = 15$ и $AD = 24$. Проведём диагональ AC (см. рис. 164) и пусть окружности, вписанные в образовавшиеся треугольники, касаются этой диагонали в точках F и G. Для треугольника ABC отрезок касательной $AF = p_{ABC} - BC = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$. Для треугольника ACD отрезок касательной $AG = p_{ACD} - CD = \dfrac{AD + AC - CD}{2}$. Длина искомого отрезка

$$FG = \left|\frac{AD + AC - CD}{2} - \frac{AB + AC - BC}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{AD + BC - CD - AB}{2}\right| = \left|\frac{24 + 10 - 15 - 13}{2}\right| = 3.$$

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек F и G на отрезке AC, то при вычислении длины отрезка FG использован знак модуля.

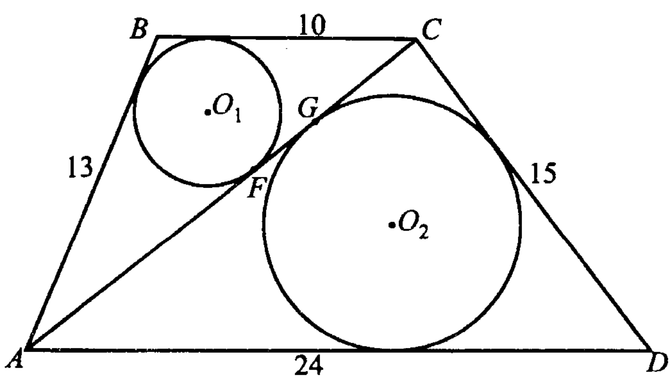


Рис. 164.

Пусть теперь проведена диагональ BD (см. рис. 165). Для треугольника BCD отрезок касательной $DF = p_{BCD} - BC = \dfrac{CD + BD - BC}{2}$.
Для треугольника ABD отрезок касательной
$DG = p_{ABD} - AB = \dfrac{AD + BD - AB}{2}$. Длина искомого отрезка

$$FG = \left|\frac{AD + BD - AB}{2} - \frac{CD + BD - BC}{2}\right| =$$
$$= \left|\frac{AD + BC - CD - AB}{2}\right| = \left|\frac{24 + 10 - 15 - 13}{2}\right| = 3.$$

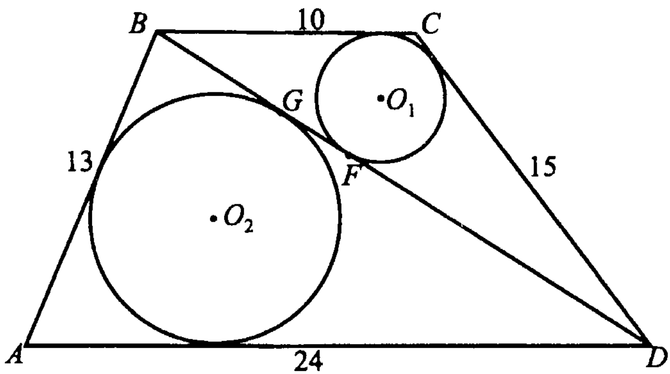


Рис. 165.

Ответ: 3.

С5. Сделаем замену $3^{-x^2} = t$. Так как $3^{1-x^2} - 1 \neq 0$, то $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

Для числа $t_0 \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ уравнение $3^{-x^2} = t_0$ имеет два различных корня $\pm\sqrt{\log_3\left(\frac{1}{t_0}\right)}$, при $t_0 = 1$ уравнение $3^{-x^2} = 1$ имеет единственный корень $x = 0$.

Данное уравнение примет следующий вид: $\dfrac{t^2 - 3a \cdot t + a}{3t - 1} = 2$. Отсюда выразим переменную a и исследуем полученную функцию
$a(t) = \dfrac{t^2 - 6t + 2}{3t - 1}$ на множестве $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

Найдём производную этой функции $a'(t) = \dfrac{t(3t-2)}{(3t-1)^2}$. Отсюда определяем, что функция $a(t)$ имеет минимум $a\left(\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{14}{9}$ и максимум $a(0) = -2$. Построим эскиз графика при $t \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; 1\right]$ (см. рис. 166).

Найдём ещё значение $a(1) = -\dfrac{3}{2}$. Прямые $a = const$ пересекают график функции $a(t)$ на рассматриваемом множестве в единственной точке при всех значениях $a \in (-\infty; -2) \cup \left\{-\dfrac{14}{9}\right\} \cup \left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. Данное уравнение имеет ровно два корня при $a \in (-\infty; -2) \cup \left\{-\dfrac{14}{9}\right\} \cup \left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

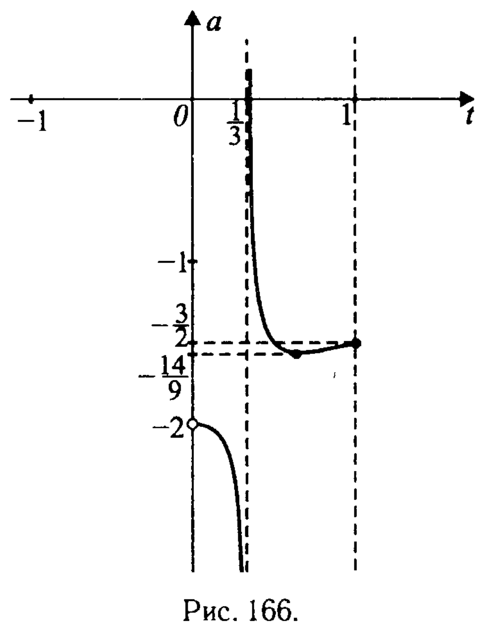


Рис. 166.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left\{-\dfrac{14}{9}\right\} \cup \left(-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

С6. а) Можно. После переливания воды в каждой из следующих пар сосудов: первый — двадцать восьмой, второй — двадцать седьмой, ..., тринадцатый — шестнадцатый, четырнадцатый — пятнадцатый, в них окажется соответственно 2 и 27, 4 и 25, ..., 26 и 3, 28 и 1 см^3 воды.

б) После переливания число сосудов, содержащих нечётное число см^3 воды, не увеличивается. Действительно, если берётся пара с нечётным и нечётным числом (н, н) см^3 воды в сосудах, то при переливании получается пара с чётным и чётным числом (ч, ч) см^3 воды в сосудах. Пара (ч, ч) перейдёт в пару (ч, ч), пара (ч, н) — в пару (н, ч), пара (н, ч) — в пару (ч, н). Поскольку сначала было 14 сосудов с нечётным числом см^3 воды, а в совокупности сосудов, содержащих 5, 5, ..., 5, 10, 11, 12, ..., 28 см^3 воды, имеется 18 сосудов с нечётным числом см^3 воды, то требуемое переливание невозможно.

в) Общее количество воды в сосудах равно $1 + 2 + \ldots + 28 = 2 \cdot 203$ см^3. Если бы всю воду перелили в один сосуд, то перед последним переливанием в некоторых двух сосудах A и B было бы по 203 см^3 воды. Но нечётное, большее двадцати восьми, число см^3 воды в сосуде можно получить, только отливая из него воду. Таким образом, в какой-то момент в одном из сосудов A и B было не меньше, а в другом — больше 203 см^3 воды, что невозможно, так как общий объём воды превысит тогда 406 см^3.

Ответ: а) можно; б) нельзя; в) нельзя.

Решение варианта 22

B1. После наценки один чайник стал стоить

$420 \cdot 1{,}25 = 525$ (руб.), $3400 : 525 = 6\frac{10}{21}$. Значит, за эти деньги можно купить 6 чайников.

Ответ: 6.

B2. 4 и более миллиметров осадков выпало 16, 20 и 22 марта, всего 3 дня.

Ответ: 3.

B3. Пусть r — радиус данного круга, тогда площадь круга равна $\pi r^2 = \frac{9}{\pi}$,

$r = \frac{3}{\pi}$. Длина окружности равна $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$.

Ответ: 6.

B4. Грузовик будет в пути $\frac{75}{28}$ ч, легковой автомобиль — $\frac{145}{58} = 2{,}5$ (ч) и

автобус — $\frac{96{,}8}{44} = 2{,}2$ часа. Т.к. $\frac{75}{28} > 2{,}2$, то автобус находился в пути наименьшее время 2,2 часа$=$ 132 мин.

Ответ: 132.

B5. $2^{8-2x} = 2^{x^2}$; $8 - 2x = x^2$; $x^2 + 2x - 8 = 0$;
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$; $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.
В ответе укажем наименьший: $x = -4$.

Ответ: -4.

B6. $\cos\angle BAD = 0{,}8$ (см. рис. 167).

$AK = \dfrac{AD - BC}{2}$;

$AK = \dfrac{16-8}{2}$, $AK = 4$.

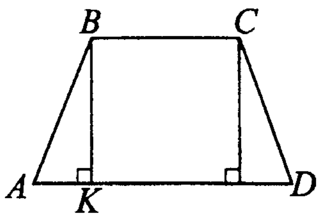


Рис. 167.

$\cos\angle BAK = 0{,}8$, значит, $\dfrac{AK}{AB} = 0{,}8$, $AB = \dfrac{4}{0{,}8} = 5$. По теореме Пифагора $BK^2 = AB^2 - AK^2 = 25 - 16 = 9$, $BK = 3$.

Ответ: 3.

B7. $\left(5^{\log_2 5}\right)^{\log_5 4} = 5^{\log_2 5 \cdot \log_5 4} = \left(5^{\log_5 4}\right)^{\log_2 5} = 4^{\log_2 5} =$
$= (2^2)^{\log_2 5} = 2^{2\cdot\log_2 5} = 2^{\log_2 5^2} = 5^2 = 25.$

Ответ: 25.

B8. Найдём среди отмеченных точек ту, которая принадлежит промежутку убывания функции. Это точка $x = -4$. В этой точке значение производной наименьшее, так как среди отмеченных только в ней значение производной отрицательно.

Ответ: -4.

B9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (см. рис. 168), $AM = MA_1$, $A_1F = FB_1$, $A_1N = ND_1$ (по условию).

Сечение MFN — треугольник с равными сторонами: $MF = \frac{1}{2}AB_1$, $FN = \frac{1}{2}B_1D_1$, $MN = \frac{1}{2}AD_1$. Обозначим сторону куба через a, тогда

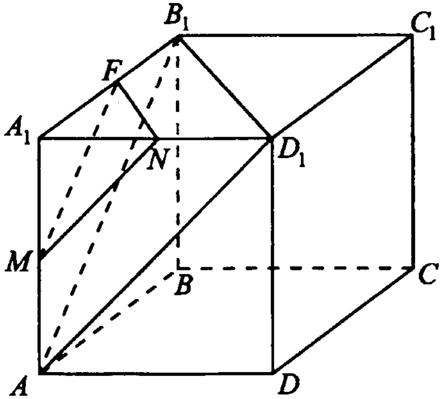


Рис. 168.

$AD_1 = B_1D_1 = AB_1 = a\sqrt{2}$, $FN = MF = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\angle MFN = 60°$.

Ответ: 60.

B10. Посчитаем, какую часть составляют дефектные лампочки первого завода от числа всех лампочек: $0{,}6 \cdot 0{,}03 = 0{,}018$. Аналогично дефектные лампочки второго завода составляют $0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}008$ от числа всех лампочек. Таким образом, дефектные лампочки составляют $0{,}018 + 0{,}008 = 0{,}026$ от числа всех лампочек. Искомая вероятность равна 0,026.

Ответ: 0,026.

B11. Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}Sh$ (S — площадь основания, h — высота), высота конуса не меняется, а площадь основания пропорциональна квадрату диаметра $\left(S = \frac{\pi d^2}{4}\right)$. Поэтому объём уменьшится в $2{,}5^2 = 6{,}25$ раз.

Ответ: 6,25.

B12. Так как $\frac{v}{c} > 0$, то $1 - \frac{v}{c} < 1$ и $\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} > f_0$. По условию должно выполняться неравенство $\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geqslant 10$; $\frac{490}{1 - \frac{v}{340}} \geqslant 500$; $1 - \frac{v}{340} \leqslant \frac{490}{500}$;

$\frac{v}{340} \geqslant \frac{1}{50}$; $v \geqslant 6{,}8$. Искомая минимальная скорость равна 6,8 м/с.

Ответ: 6,8.

B13. 45 сек$= \frac{1}{80}$ часа$= 0{,}0125$ ч; 600 м$= 0{,}6$ км. За 0,0125 ч поезд прошёл $70 \cdot 0{,}0125 = 0{,}875$ (км).
Отсюда длина платформы равна $0{,}875 - 0{,}6 = 0{,}275$ (км)$= 275$ м.

Ответ: 275.

B14. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2$.

$y' = 0$. $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$, $x^{\frac{1}{2}} = 4$, $x = 16$.

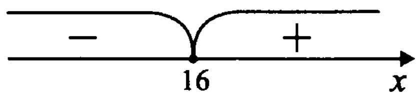


Рис. 169.

Проходя через точку $x = 16$, производная меняет знак с «$-$» на «$+$» (см. рис. 169).
Отсюда точка $x = 16$ является точкой минимума.

Ответ: 16.

C1. а) Данное уравнение определено при условии: $\cos x \neq 0$. Преобразуем уравнение: $\sin x - \cos^2 x = -\sin^2 x$; $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Из первого уравнения получаем $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ (не удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$), а из второго уравнения — $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

б) Найдём корни в промежутке $\left[4\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$. Для этого представим решение исходного уравнения в виде двух серий: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Для первой серии $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$:

$4\pi \leqslant \frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant \frac{13\pi}{2}, n \in Z;$ $24 \leqslant 1+12n \leqslant 39, n \in Z;$ $\frac{23}{12} \leqslant n \leqslant \frac{19}{6}$, $n \in Z$. Отсюда $n = 2$ или $n = 3$. При $n = 2$ получаем $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$, при $n = 3$ вычисляем $x = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{37\pi}{6}$.

Для второй серии $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$: $4\pi \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant \frac{13\pi}{2}$, $n \in Z;$ $24 \leqslant 5 + 12n \leqslant 39, n \in Z;$ $\frac{19}{12} \leqslant n \leqslant \frac{17}{6}$, $n \in Z$. Отсюда $n = 2$ и получаем $x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6}$.

Ответ: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; б) $\frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \frac{37\pi}{6}$.

С2. Пусть в данной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания ABC $AC = 5$, $BC = 12$ и $AB = 13$.

Пусть MNB_1 — сечение, причём $AN = CM = 10$ и $BB_1 = 15$. Если плоскость $MNK \parallel ABC$, то $KB_1 = 5$. Так как $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90°$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12 = 30$ (см. рис. 170).

Искомый объём равен $V_{ABCNB_1M} = V_{ABCNKM} + V_{NKMB_1} =$
$= 10 \cdot S_{ABC} + \frac{5}{3} \cdot S_{MKN} = \frac{35}{3} \cdot 30 = 350.$

Так как $NM \perp BCC_1$, то $NM \perp MK$ и $NM \perp MB_1$.
Угол $KMB_1 = \varphi$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями NKM и NB_1M. Из прямоугольного треугольника MKB_1 определяем $\cos\varphi = \frac{12}{13}$. Треугольник NKM — проекция треугольника NB_1M на плоскость NKM, поэтому $S_{NB_1M} = \frac{S_{NKM}}{\cos\varphi} = 30 : \frac{12}{13} = 32{,}5$.
Площадь полной поверхности данной фигуры равна
$S_{ABC} + S_{NB_1M} + S_{ABB_1N} + S_{BCMB_1} + S_{ACMN} =$
$= 30 + 32{,}5 + 162{,}5 + 150 + 50 = 425.$

Ответ: 350; 425.

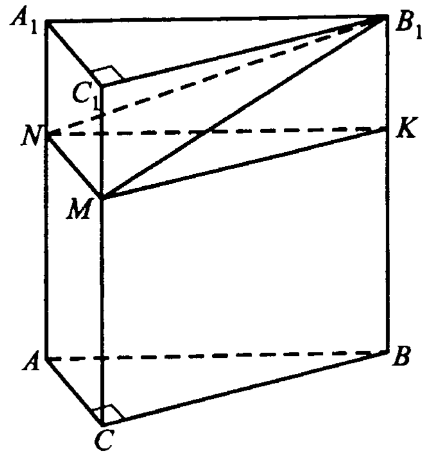


Рис. 170.

C3. 1) Найдём решения первого неравенства системы.

Число 0 не является решением данного неравенства, поэтому при $x \neq 0$ перепишем неравенство в виде $\dfrac{2}{4x+\dfrac{8}{x}+3}+\dfrac{3}{4x+\dfrac{8}{x}-6} > \dfrac{1}{6}$.

Пусть $4x+\dfrac{8}{x}=t$, тогда получим неравенство $\dfrac{2}{t+3}+\dfrac{3}{t-6} > \dfrac{1}{6}$, которое приводится к следующему виду: $\dfrac{t^2-33t}{6(t+3)(t-6)} < 0$. Решения последнего неравенства: $-3 < t < 0$; $6 < t < 33$.

Двойное неравенство $-3 < 4x+\dfrac{8}{x} < 0$ не имеет решений. Для неравенства $6 < 4x+\dfrac{8}{x} < 33$ решаем два неравенства $4x+\dfrac{8}{x} > 6$ и $4x+\dfrac{8}{x} < 33$. Из первого неравенства находим множество решений $(0; +\infty)$, а из второго — $(-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{1}{4}; 8\right)$. Итак, первое неравенство имеет решения: $\left(\dfrac{1}{4}; 8\right)$.

2) Покажем, что $7^{-x}+2\cdot 3^x > 1$ при всех значениях $x \in R$. Если $x \geqslant 0$, то $0 < 7^{-x} \leqslant 1$ и $2\cdot 3^x \geqslant 2$, а если $x < 0$, то $7^{-x} > 1$ и $2\cdot 3^x > 0$, и поэтому $7^{-x}+2\cdot 3^x > 1$. Значит, второе неравенство системы выполняется только при условии $\log_5 x + \log_x 5 - 2 \leqslant 0$. Пусть $\log_5 x = t$, тогда последнее неравенство сводится к виду $\dfrac{(t-1)^2}{t} \leqslant 0$, откуда полу-

чаем значения $t \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$. Далее, решая неравенство $\log_5 x < 0$ и уравнение $\log_5 x = 1$, находим решения второго неравенства системы $(0; 1) \cup \{5\}$.

3) Найдём общую часть полученных решений: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup \{5\}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup \{5\}$.

С4. Пусть дана трапеция $ABCD$, для которой $AB = 13$, $BC = 6$, $CD = 20$ и $AD = 27$. Проведём диагональ AC (см. рис. 171), и пусть окружности, вписанные в образовавшиеся треугольники, касаются этой диагонали в точках F и G. Для треугольника ABC отрезок касательной

$$AF = p_{ABC} - BC = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

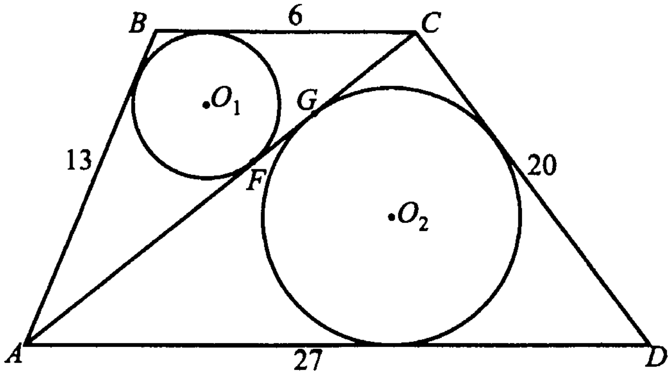


Рис. 171.

Для треугольника ACD отрезок касательной

$$AG = p_{ACD} - CD = \frac{AD + AC - CD}{2}.$$

Определяем длину искомого отрезка

$$FG = \left|\frac{AD + AC - CD}{2} - \frac{AB + AC - BC}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{AD + BC - CD - AB}{2}\right| = \left|\frac{27 + 6 - 20 - 13}{2}\right| = 0.$$

Следовательно, вписанные окружности касаются диагонали AC в одной и той же точке.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек F и G на отрезке AC, то при вычислении длины отрезка FG использован знак модуля.

Пусть теперь проведена диагональ BD (см. рис. 172). Для треугольника BCD отрезок касательной $DF = p_{BCD} - BC = \dfrac{CD + BD - BC}{2}$.

Для треугольника ABD отрезок касательной

$DG = p_{ABD} - AB = \dfrac{AD + BD - AB}{2}$.

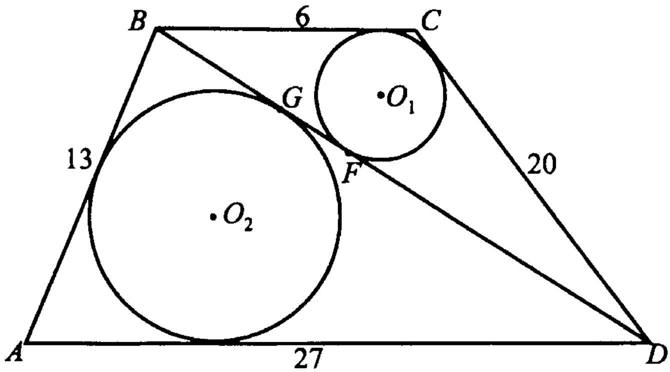


Рис. 172.

Определяем длину искомого отрезка

$$FG = \left|\frac{AD + BD - AB}{2} - \frac{CD + BD - BC}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{AD + BC - CD - AB}{2}\right| = \left|\frac{27 + 6 - 20 - 13}{2}\right| = 0.$$

Следовательно, вписанные окружности касаются диагонали BD в одной и той же точке.

Ответ: 0.

С5. 1-й способ. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5 - a - x = 5 - x^2 - 4x, \\ 5 - x^2 - 4x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - a = 0, \\ (x + 5)(x - 1) < 0. \end{cases}$$

Если дискриминант $D = 9 + 4a$ квадратного уравнения равен нулю, то есть $a = -\dfrac{9}{4}$, то уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{3}{2}$, принадлежащий промежутку $(-5; 1)$.

Пусть $9 + 4a > 0$, $a > -\frac{9}{4}$, тогда квадратное уравнение $f(x) = x^2 + 3x - a = 0$ имеет два корня. Чтобы промежутку $(-5; 1)$ принадлежал единственный корень этого уравнения, достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} f(-5) \cdot f(1) < 0, \\ a > -\frac{9}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} (10 - a)(4 - a) < 0, \\ a > -\frac{9}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 < a < 10, \\ a > -\frac{9}{4}; \end{cases}$$

$4 < a < 10$.

Ещё один возможный случай — если $f(-5) = 0$ или $f(1) = 0$.

а) $f(-5) = 0$; $a = 25 - 15 = 10$; $x_1 \cdot x_2 = -a$; $-5 \cdot x_2 = -10$; $x_2 = 2$, $2 \notin (-5; 1)$.

б) $f(1) = 0$; $a = 4$; $x_1 \cdot x_2 = -a$; $1 \cdot x_2 = -4$; $x_2 = -4$, $-4 \in (-5; 1)$, значит, при $a = 4$ в исходном уравнении 1 корень.

2-й способ. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5 - a - x = 5 - x^2 - 4x, \\ 5 - x^2 - 4x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = x^2 + 3x, \\ (x + 5)(x - 1) < 0. \end{cases}$$

Изобразим график функции $a(x) = x^2 + 3x$ на промежутке $(-5; 1)$ (см. рис. 173). Для этого найдём несколько значений: $a(-5) = 10$, $a(1) = 4$, $a\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ (минимум функции).

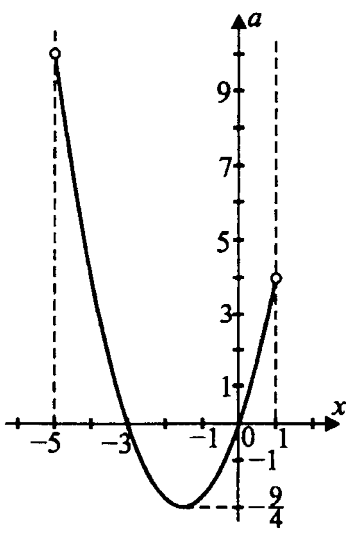


Рис. 173.

Прямые $a = const$ пересекают график функции $a(x)$ на рассматриваемом множестве в единственной точке при всех значениях
$a \in \left\{-\frac{9}{4}\right\} \cup [4; 10)$. Поэтому при этих значениях параметра a данное уравнение имеет единственное решение.

Ответ: $\left\{-\frac{9}{4}\right\} \cup [4; 10)$.

С6. а) Можно. После переливания воды в каждой из следующих пар сосудов: первый — шестидесятый, второй — пятьдесят девятый, ..., двадцать девятый — тридцать второй, тридцатый — тридцать первый, в них окажется соответственно 2 и 59, 4 и 57, ..., 58 и 3, 60 и 1 см^3 воды.

б) После переливания число сосудов, содержащих нечётное число см^3 воды, не увеличивается. Действительно, если берётся пара с нечётным и нечётным числом (н, н) см^3 воды в сосудах, то при переливании получается пара с чётным и чётным числом (ч, ч) см^3 воды в сосудах. Пара (ч, ч) перейдёт в пару (ч, ч), пара (ч, н) — в пару (н, ч), пара (н, ч) — в пару (ч, н). Поскольку сначала было 30 сосудов с нечётным числом см^3 воды, а в совокупности сосудов, содержащих 5, 5, ..., 5, 10, 11, 12, ..., 60 см^3 воды, имеется 34 сосуда с нечётным числом см^3 воды, то требуемое переливание невозможно.

в) Общее количество воды в сосудах равно
$1 + 2 + \ldots + 60 = 1830 = 2 \cdot 915$ (см^3).
Если бы всю воду перелили в один сосуд, то перед последним переливанием в некоторых двух сосудах A и B было бы по 915 см^3 воды. Но нечётное, большее шестидесяти, число см^3 воды в сосуде можно получить, только отливая из него воду. Таким образом, в какой-то момент в одном из сосудов A и B было не меньше, а в другом — больше 915 см^3 воды, что невозможно, так как общий объём воды превысит тогда 1830 см^3.

Ответ: а) можно; б) нельзя; в) нельзя.

Решение варианта 23

В1. В связи с тем, что наценка на один набор составляет 50% и продаётся набор по цене 90 рублей, его закупочная цена составляет $\frac{90 \cdot 100}{150} = 60$ (рублей). $4300 : 60 = 71\frac{2}{3}$. Следовательно, хозяин магазина может закупить только 71 набор.

Ответ: 71.

B2. Цена выше 34-х долларов была в рабочие дни с 11 по 19 января, а также 21 января. Всего получается 8 дней.

Ответ: 8.

B3. Так как $\overrightarrow{OA}(2;5)$ и $\overrightarrow{CB}(8-6;7-2)$; $\overrightarrow{CB}=(2;5)$, то векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{CB}$ равны, откуда в четырёхугольнике $OABC$ две стороны параллельны и равны. Значит, $OABC$ — параллелограмм, тогда P — середина AC и, значит, $P\left(\frac{2+6}{2};\frac{5+2}{2}\right)$, $P(4;3{,}5)$.

Ответ: 3,5.

B4. Стоимость использования первого автомобиля $7\cdot8\cdot20+2800=$
$=3920$ (рублей);

второго — $7\cdot11\cdot25+2500=4425$ (рублей);

третьего — $7\cdot15\cdot17+2600=4385$ (рублей).

Самый дешёвый вариант составит 3920 рублей.

Ответ: 3920.

B5. Используя свойство логарифмов: $b>0$, $a>0$, $a\neq1$, $\log_{a^p}b=\frac{1}{p}\log_a b$, $p\neq0$, имеем $\frac{1}{2}\log_5(5+x)=\log_5(2x)$,

$\log_5(5+x)^{\frac{1}{2}}=\log_5(2x)$,

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\5+x>0,\end{cases}$ $x>0$.

$(5+x)^{\frac{1}{2}}=2x$.

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим:

$5+x=4x^2$; $4x^2-x-5=0$; $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot5\cdot4}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{1\pm9}{8}$;

$x_1=-1$; $x_2=\frac{5}{4}$.

Учитывая ОДЗ, $x=\frac{5}{4}$.

Ответ: 1,25.

B6. $AH_1=H_2D=\frac{AD-BC}{2}=2\sqrt{7}$ (см. рис. 174). По теореме Пифагора $BH_1^2=AB^2-AH_1^2=64-28=36$, $BH_1=6$, откуда $\sin A=\frac{BH_1}{AB}=\frac{6}{8}=0{,}75$.

Ответ: 0,75.

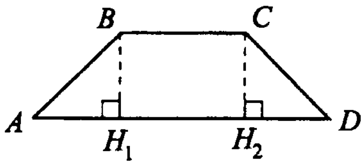


Рис. 174.

B7. $\sqrt{(b-3)^2} + \sqrt{(b-13)^2} = |b-3| + |b-13| = b - 3 + (13 - b) = 10.$

Ответ: 10.

B8. Найти площадь закрашенной фигуры — значит найти $F(-3) - F(-8)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$. $S = F(-3) - F(-8)$.

$F(-3) = (-3)^3 + 15 \cdot 9 + 81 \cdot (-3) - \frac{12}{5} = -137{,}4.$

$F(-8) = (-8)^3 + 15 \cdot 64 + 81 \cdot (-8) - \frac{12}{5} = -202{,}4.$

$S = -137{,}4 - (-202{,}4) = 65.$

Ответ: 65.

B9. $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где R — радиус основания конуса, H — высота конуса (см. рис. 175).

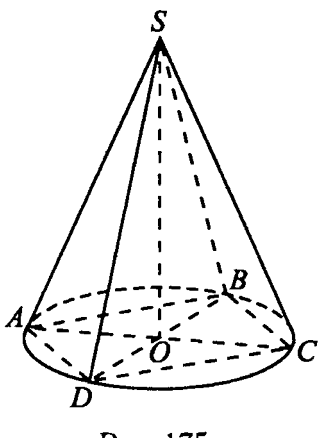


Рис. 175.

$ABCD$ — квадрат, $R = \frac{AC}{2}$, $R = 3\sqrt{2}$.

Высота конуса совпадает с высотой пирамиды (пирамида вписана в конус). $H = SO = \frac{9}{\pi}$. $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 18 \cdot \frac{9}{\pi} = 54.$

Ответ: 54.

B10. Рассмотрим два события.
A — Петя возьмёт стальной гвоздь, который затем согнётся.
B — Петя возьмёт железный гвоздь, который затем согнётся.

Тогда $P(A) = \frac{14}{20} \cdot 0{,}2 = 0{,}14$; $P(B) = \frac{6}{20} \cdot 0{,}6 = 0{,}18$, так как всего 20 гвоздей и вероятность выбрать стальной гвоздь равна $\frac{14}{20}$, а вероятность выбрать железный гвоздь равна $\frac{6}{20}$.

$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0{,}14 + 0{,}18 = 0{,}32$ (события A и B несовместны, то есть не могут произойти одновременно).

Ответ: 0,32.

B11. $V_{AEFA_1E_1F_1} = S_{AEF} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot AA_1 =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AD\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB\right) \cdot AA_1 = \frac{1}{8} V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{8} \cdot 20 = 2{,}5.$

Ответ: 2,5.

B12. До дождя расстояние до воды равно $h = 5 \cdot 1{,}2^2 = 7{,}2$ (м), а после дождя должно быть равно $h = 5 \cdot (1{,}2 - 0{,}4)^2 = 3{,}2$ (м). Уровень воды должен повыситься на $7{,}2 - 3{,}2 = 4$ (м).

Ответ: 4.

B13. Последовательность, составленная из количеств страниц, прочитываемых ежедневно, является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 12, n = 16, S_{16} = 672$.

$S_{16} = \frac{a_1 + a_{16}}{2} \cdot 16 = 8(a_1 + a_{16}), 672 = 8(12 + a_{16}), a_{16} = (672 - 96) : 8,$
$a_{16} = 72.$

Ответ: 72.

B14. $y = \sqrt{15 - 8x - x^2}$, $15 - 8x - x^2 \geqslant 0$, $x^2 + 8x - 15 \leqslant 0$.
$\frac{D}{4} = 16 + 15 = 31$. Так как $\frac{D}{4} > 0$ $\left(\frac{D}{4} = 31\right)$, то функция $y = \sqrt{15 - 8x - x^2}$ имеет наименьшее значение, равное 0 (так как $\sqrt{15 - 8x - x^2} \geqslant 0$ при всех x из области определения, $\sqrt{15 - 8x - x^2} = 0$ при некоторых значениях x).

Ответ: 0.

C1. Решим уравнение $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 25 = 0$. Среди делителей свободного члена корней нет.

Убедимся, что отношение первого коэффициента к последнему равно $\frac{1}{25}$ и равно квадрату отношения второго коэффициента к предпоследнему, то есть, уравнение возвратное. Так как $x = 0$ не корень, разделим на x^2.

$$x^2 - 10x + 35 - \frac{50}{x} + \frac{25}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} - 10\left(x + \frac{5}{x}\right) + 35 = 0.$$

Обозначим $x + \frac{5}{x} = t$, тогда $t^2 = x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}$, $x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$.

Уравнение примет вид: $t^2 - 10t + 25 = 0$, $t = 5$, то есть $x + \frac{5}{x} = 5$, $x^2 - 5x + 5 = 0$.

Ответ: $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

C2. Обозначим сторону основания через a, высоту треугольника, образованного сечением, через h_c, высоту треугольника в основании призмы через h_o, а угол, который сечение образует с плоскостью основания, через φ (см. рис. 176).

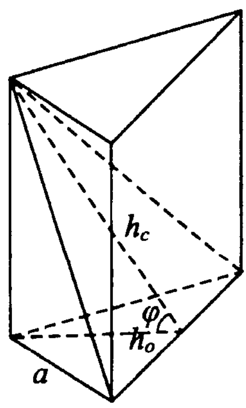


Рис. 176.

Так как площадь основания $S_o = \frac{1}{2}h_o \cdot a$, $S_c = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot a$, то $\cos\varphi = \frac{h_o}{h_c} = \frac{S_o}{S_c} = \frac{3}{5}$. Тогда $\varphi = \arccos\frac{3}{5}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{5}$.

C3. Так как $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то неравенство сводится к квадратному относительно $\arcsin x$: $30\arcsin^2 x - 23\pi\arcsin x + 3\pi^2 \geqslant 0$.
Пусть $t = \arcsin x$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Тогда это квадратное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} (6t-\pi)(5t-3\pi) \geqslant 0, \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \leqslant \frac{\pi}{6}, \\ t \geqslant \frac{3\pi}{5}; \end{array}\right. \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right].$$

$x = \sin t$, значит $x \in \left[-1, \frac{1}{2};\right]$.

Ответ: $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

C4. 1. Пусть в треугольнике ABC углы при вершинах A и B 2α и 2β острые, а сторона $AB = c = 3$ (см. рис. 177). $S_{ABC\,\min} = \frac{1}{2}c \cdot h_{\min} = \frac{3}{2}h_{\min}$.

Проекцию вершины C на сторону $AB = c$ обозначим через H, а проекцию центра вписанной окружности на сторону $AB = c$ обозначим через M.

Найдём $h_{\min}$. Тогда $AM + MB = AB = r\operatorname{ctg}\alpha + r\operatorname{ctg}\beta = AB$; $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 3$.

С другой стороны,
$AH + HB = AB = h\operatorname{ctg}2\alpha + h\operatorname{ctg}2\beta = h(\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta)$,
$h(\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta) = 3$.

То есть $h = \frac{3}{\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta}$.

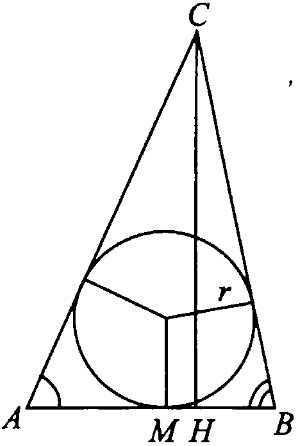


Рис. 177

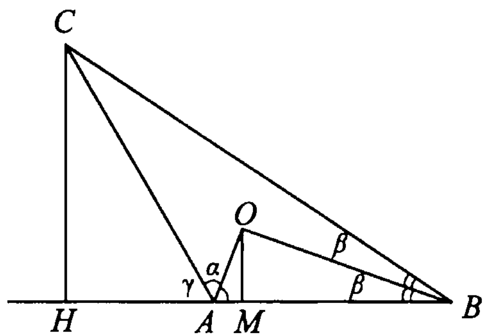


Рис. 178

2. Пусть в треугольнике ABC угол 2α при вершине A не острый, обозначим $\gamma = \pi - 2\alpha$ (см. рис. 178).

Тогда $HB - HA = AB$, $h \operatorname{ctg} 2\beta - h \operatorname{ctg} \gamma = 3$, $h(\operatorname{ctg} 2\beta - \operatorname{ctg} \gamma) = 3$.

Но $\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg}(\pi - 2\alpha) = -\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Тогда $HB - HA = AB = h(\operatorname{ctg} 2\beta + \operatorname{ctg} 2\alpha) = 3$, $h = \dfrac{3}{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta}$, $h > 0$.

Соотношение $AM + MB = AB$, $r \operatorname{ctg} \alpha + r \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 3$ формально останется таким же.

3. Таким образом, задача свелась к определению наибольшего ненулевого значения функции $\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta$ при условии, что $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 3$, $\operatorname{ctg} \beta > 0$.

Пусть $\operatorname{ctg} \alpha = u$, $\operatorname{ctg} \beta = v$, тогда $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{u^2 - 1}{2u} = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{2u}$, а $\operatorname{ctg} 2\beta = \dfrac{v^2 - 1}{2v} = \dfrac{v}{2} - \dfrac{1}{2v}$, $u + v = 3$. Теперь

$$\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{u}{2} - \frac{1}{2u} + \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} = \frac{1}{2}\left((u+v) - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{uv}\right).$$

Но uv максимально при $u + v = 3$, если $u = v = \dfrac{3}{2}$, то есть

$$\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{15}{18}.$$

Отсюда $h_{\min} = 3 \cdot \frac{18}{15} = \frac{18}{5}$, а $S_{ABC\,\min} = \frac{3}{2} \cdot \frac{18}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4$.

Ответ: 5,4.

C5. Отметим, что $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

Число $a \neq 0$ лежит между корнями квадратного трёхчлена, у которого ветви параболы направлены вверх, тогда и только тогда, когда значение квадратного трёхчлена в этой точке меньше нуля.

Подставив $x = a$ в многочлен, получим неравенство
$a^4 - 10a^3 + 35a^2 - 50a + 24 < 0$.

Ищем какой-нибудь корень этого многочлена среди делителей свободного члена:
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$. $a = 1$ — корень.

Схемой Горнера или уголком поделим многочлен
$a^4 - 10a^3 + 35a^2 - 50a + 24$ на $a - 1$.

У получившегося многочлена третьей степени $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$
$a = 2$ — корень. Разделим многочлен на $a - 2$.

Корни оставшегося квадратного трёхчлена $a^2 - 7a + 12$ равны $a = 3$ и $a = 4$. Расположив корни на числовой оси, методом интервалов получим $a \in (1, 2) \cup (3, 4)$.

Ответ: $(1, 2) \cup (3, 4)$.

C6. а) Сумма четырёх слагаемых S_4:

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right).$$

Заметим, что $1 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$,

тогда $S_4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$.

б) Теперь $S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+1}$ и неравенство

$S_n \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+1} \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geqslant 1$, и для натуральных n числитель всегда меньше знаменателя.

То есть таких натуральных n не существует и $n \in \varnothing$.

в) $S_n \leqslant \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{4}{5}$. То есть $\frac{n-4}{n+1} \leqslant 0$.

Решая это неравенство методом интервалов, и с учётом того, что n натурально, получаем, что $n = \{1, 2, 3, 4\}$.

г) $S_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n^2+n+6} \Leftrightarrow 4n+4 = n^2+n+6 \Leftrightarrow n^2-3n+2=0$, то есть $n = \{1,2\}$.

Ответ: а) $\frac{1}{5}$; б) $\varnothing$; в) 1, 2, 3, 4; г) 1, 2.

Решение варианта 24

B1. Цена билета для школьника равна $1580 \cdot \frac{50}{100} = 790$ рублей. Общая стоимость билетов составляет $790 \cdot 17 + 1580 \cdot 3 = 18\,170$ рублей.

Ответ: 18170.

B2. По рисунку определяем, что в период с 21 по 27 ноября наибольшее значение достигается 27-го числа и составляет 10°C.

Ответ: 10.

B3. Нетрудно заметить, что данный треугольник прямоугольный ($\angle ABC = 90°$), значит, центр описанной окружности P лежит на середине гипотенузы AC. Так как $A(1;5)$ и $C(5;-1)$, то $P\left(\frac{1+5}{2}; \frac{5-1}{2}\right)$, $P(3;2)$.

Ответ: 3.

B4. Составим таблицу.

Автомобиль	Расход топлива на 1500 км (л)	Стоимость топлива (руб.)	Стоимость аренды (руб.)	Итого (руб.)
А	$15 \cdot 8 = 120$	$120 \cdot 20 = 2400$	$3500 \cdot 2 = 7000$	9400
Б	$15 \cdot 11 = 165$	$165 \cdot 22 = 3630$	$3300 \cdot 2 = 6600$	10230
В	$15 \cdot 14 = 210$	$210 \cdot 15 = 3150$	$3000 \cdot 2 = 6000$	9150

Ответ: 9150.

B5. Используя свойство логарифмов: $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$, $p \neq 0$, имеем

$\log_2(6-x) = \frac{1}{2}\log_2 x$; $\log_2(6-x) = \log_2 x^{\frac{1}{2}}$.

ОДЗ: $\begin{cases} 6-x>0, \\ x>0; \end{cases}$ $0 < x < 6$; $6-x = x^{\frac{1}{2}}$; $(6-x)^2 = x$; $36-12x+x^2 = x$;

$x^2 - 13x + 36 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2}$; $x_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$;

$x_{1,2} = \dfrac{13 \pm 5}{2}$; $x_1 = 4$; $x_2 = 9$.

$x_2 \notin$ ОДЗ.

Ответ: 4.

B6. Пусть $DA = 9x$, $AB = 4x$, $CB = 5x$ (см. рис. 179), тогда $DC + AB = DA + CB = 14x$, откуда $DC = 10x$. Периметр

$P = DC + CB + AB + DA = 28x$, значит, $x = \dfrac{98}{28} = 3{,}5$. Бóльшая сторона

$DC = 10x = 35$.

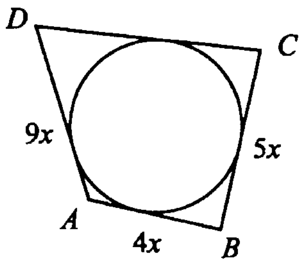


Рис. 179.

Ответ: 35.

B7. $\dfrac{7x - 13y + 8}{3x - 8y + 14} = 5$; $7x - 13y + 8 = 15x - 40y + 70$; $8x - 27y + 62 = 0$, $8x - 27y + 68 = 6$.

Ответ: 6.

B8. Найти площадь закрашенной фигуры S — значит найти $F(9) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

$F(9) = -9^3 + 18 \cdot 9^2 - 81 \cdot 9 + 214 = 214$.

$F(3) = -3^3 + 18 \cdot 3^2 - 81 \cdot 3 + 214 = 106$.

$S = 214 - 106 = 108$.

Ответ: 108.

B9. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 H$, где R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра (см. рис. 180), равная образующей цилиндра.

$\triangle ABC$: $AB^2 = BC^2 + AC^2$, $AB^2 = 49 + 32$, $AB = 9$.

$R = \dfrac{AB}{2}$, $R = \dfrac{9}{2}$, $V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot \dfrac{81}{4} \cdot \dfrac{4}{\pi} = 81$.

Ответ: 81.

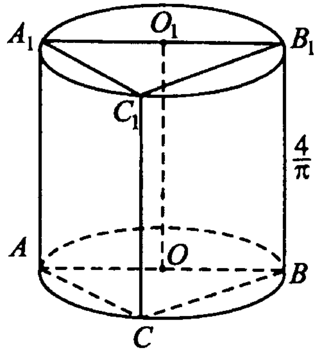


Рис. 180.

B10. Очевидно, что вероятность ничьей в каждой игре равна $1 - 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}4$.

Шахматист наберёт хотя бы 1,5 очка в трёх случаях.

1) Он выиграет обе партии. Вероятность этого равна $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.

2) Он выиграет первую партию, вторую сыграет вничью. Вероятность этого равна $0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$.

3) Он выиграет вторую партию, первую сыграет вничью. Вероятность этого тоже равна 0,12.

Искомая вероятность равна $0{,}09 + 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}33$.

Ответ: 0,33.

B11. Так как треугольник MSK равнобедренный с основанием MK, то его высота SO является одновременно биссектрисой, $\angle KSO = \frac{1}{2}\angle KSM = 45°$. Радиус $KO = \frac{1}{2}KM = 6$. В $\triangle SOK$ находим $\angle SKO = 180° - \angle SOK - \angle OSK = 180° - 90° - 45° = 45°$. Видно, что $\triangle SOK$ равнобедренный (углы при основании SK равны) и $SO = KO = 6$. Отсюда находим искомое значение: $V \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3}\pi \cdot OK^2 \cdot OS \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = 72$.

Ответ: 72.

B12. В формулу $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ подставим $m_0 = 150$ мг, $T = 3$ мин, $m(t) = 18{,}75$ мг.

Получим: $150 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} = 18{,}75$; $2^{-\frac{t}{3}} = \frac{1}{8}$; $2^{-\frac{t}{3}} = 2^{-3}$; $-\frac{t}{3} = -3$; $t = 9$.

Ответ: 9.

B13. Пусть x км/ч — собственная скорость катера, y км/ч — скорость течения весной, тогда весной скорость по течению в 1,8 раз больше, чем против течения, составим уравнение $\dfrac{x+y}{x-y} = 1{,}8$.

Летом скорость течения меньше, то есть $y - 0{,}5$ км/ч, поэтому катер идёт по течению в $\dfrac{5}{3}$ раза быстрее, чем против течения. Составим уравнение $\dfrac{x+(y-0{,}5)}{x-(y-0{,}5)} = \dfrac{5}{3}$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 1{,}8, \\ \dfrac{x+y-0{,}5}{x-y+0{,}5} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 1{,}8(x-y), \\ 3(x+y-0{,}5) = 5(x-y+0{,}5); \end{cases}$

$\begin{cases} 2{,}8y = 0{,}8x, \\ 8y = 2x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} 7y = 2x, \\ 4y = x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 14, \\ y = 4. \end{cases}$

Ответ: 14.

B14. $y = (x-3)^2(x+4) - 2$.
$y' = 2(x-3)(x+4) + (x-3)^2 = (x-3)(2(x+4)+x-3) = (x-3)(3x+5)$.

Если $y' = 0$, $(x-3)(3x+5) = 0$, то $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

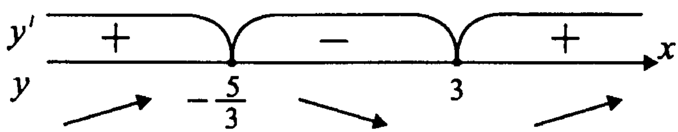


Рис. 181.

$x = 3$ — точка минимума, так как проходя через неё, производная функции меняет знак с «−» на «+» (см. рис. 181).

Ответ: 3.

C1. Решим уравнение $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

Ищем корень этого многочлена среди делителей свободного члена: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$. $x = 1$ — корень.

Схемой Горнера или уголком поделим многочлен
$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ на $x - 1$.

У получившегося многочлена третьей степени $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ $x = 2$ — корень. Разделим на $x - 2$. Корни оставшегося квадратного трёхчлена $x^2 - 7x + 12$ равны $x = 3$ и $x = 4$.

Ответ: 1, 2, 3, 4.

C2. Обозначим сторону основания через a, высоту призмы через h, расстояние от вершины основания, через которую не проходит сечение, до плоскости сечения, через ρ, высоту треугольника основания через h_o, а угол, который сечение образует с плоскостью основания, через φ (см. рис. 182).

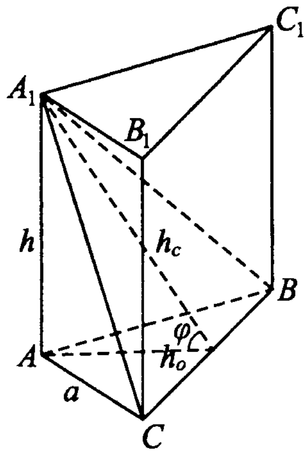


Рис. 182.

Объём призмы $V = S_o h$.

Площадь основания $S_o = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3$, $a = 2\sqrt[4]{3}$, $h_o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $h_o = \sqrt[4]{3^3}$.

Так как высота призмы $h = h_o \cdot \operatorname{tg}\varphi$, а $\cos\varphi = \dfrac{S_o}{S_c} = \dfrac{3}{5}$, отсюда

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{16}{9}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}.$$

Теперь $h = h_o \cdot \operatorname{tg}\varphi = \sqrt[4]{3^3} \cdot \dfrac{4}{3}$.

Объём призмы $V = S_o h = 3\sqrt[4]{3^3} \cdot \dfrac{4}{3} = 4\sqrt[4]{3^3}$.

Объём пирамиды A_1ABC, образованной нижним основанием призмы и противоположной вершиной верхнего основания, $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}V = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{3^3}$, но, с другой стороны, $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_c\rho$. Приравняв эти два выражения, получим $\rho = \frac{4}{5}\sqrt[4]{3^3}$.

Ответ: $\frac{4}{5}\sqrt[4]{3^3}$.

С3. Решим неравенство $18\arccos^2 x + 27\pi\arcsin x - 6{,}5\pi^2 \leqslant 0$.

Так как $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, то неравенство сводится к квадратному относительно $\arccos x$: $18\arccos^2 x - 27\pi\arccos x + 7\pi^2 \leqslant 0$, причём $\arccos x \in [0,\pi]$. Тогда это квадратное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} (3\arccos x - \pi)(6\arccos x - 7\pi) \leqslant 0, \\ \arccos x \in [0,\pi]; \end{cases}$

$\begin{cases} \arccos x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right], \\ \arccos x \in [0;\pi]; \end{cases}$ $\arccos x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Так как $x = \cos(\arccos x)$, то $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

С4. 1. Пусть в треугольнике ABC углы при вершинах A и B 2α и 2β острые, а сторона основания $AB = c = 6$ (см. рис. 183). $S_{ABC\,\min} = \frac{1}{2}c \cdot h_{\min} = 3h_{\min}$.

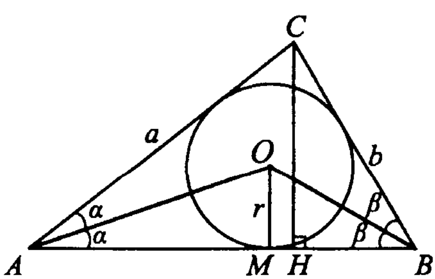


Рис. 183.

Проекцию вершины C на сторону $AB = c$ обозначим через H, а проекцию центра вписанной окружности на сторону $AB = c$ обозначим через M.

Найдём $h_{\min}$. Тогда $AM + MB = AB$, $r\operatorname{ctg}\alpha + r\operatorname{ctg}\beta = AB$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 3$.

С другой стороны, $AH + HB = AB$, $h\operatorname{ctg}2\alpha + h\operatorname{ctg}2\beta = AB$, $h(\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta) = 6$.

То есть, $h = \dfrac{6}{\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta}$.

2. Пусть в треугольнике ABC угол 2α при вершине A не острый, обозначим $\gamma = \pi - 2\alpha$ (см. рис. 184). Тогда $HB - HA = AB$; $h\operatorname{ctg}2\beta - h\operatorname{ctg}\gamma = 6$, $h(\operatorname{ctg}2\beta - \operatorname{ctg}\gamma) = 6$.

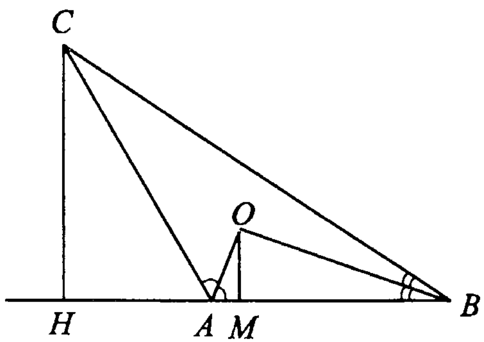


Рис. 184.

Но $\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}(\pi - 2\alpha) = -\operatorname{ctg}2\alpha$ и $HB - HA = AB$;

$h(\operatorname{ctg}2\beta + \operatorname{ctg}2\alpha) = 6$, то есть, по-прежнему $h = \dfrac{6}{\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta}$, $h > 0$.

Соотношение $AM + MB = AB$, $r\operatorname{ctg}\alpha + r\operatorname{ctg}\beta = AB$, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 3$ формально останется таким же.

3. Таким образом, задача свелась к определению наибольшего ненулевого значения функции $\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta$ при условии, что $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 3$, $\operatorname{ctg}\beta > 0$.

Пусть $\operatorname{ctg}\alpha = u$, $\operatorname{ctg}\beta = v$, тогда $\operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{u^2-1}{2u} = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{2u}$, а

$\operatorname{ctg}2\beta = \dfrac{v^2-1}{2v} = \dfrac{v}{2} - \dfrac{1}{2v}$.

Теперь $\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta = \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{2u} + \dfrac{v}{2} - \dfrac{1}{2v} = \dfrac{1}{2}\left(\left(u+v\right) - \left(\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}\right)\right) =$

$= \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{uv}\right)$.

Но uv максимально при $u+v=3$, если $u=v=\frac{3}{2}$ (в этом случае треугольник равнобедренный), то есть

$\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\beta=\frac{3}{2}\left(1-\frac{4}{9}\right)=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$. Отсюда $h_{\min}=6\cdot\frac{6}{5}=\frac{36}{5}$, а

$S_{ABC\,\min}=3\cdot\frac{36}{5}=\frac{108}{5}$.

Но, с другой стороны, $S_{ABC}=\frac{1}{2}P\cdot r$, где $P=a+b+6$ — периметр треугольника.

То есть, $a+b=\frac{78}{5}$, но $a=b$, тогда сразу получаем $a=b=\frac{78}{10}$, $c=6$.

Ответ: 7,8; 7,8; 6.

С5. Отметим сразу, что $a=0$ не удовлетворяет условию.

Число $a\neq 0$ лежит между корнями квадратного трёхчлена, ветви которого направлены вверх, тогда и только тогда, когда значение квадратного трёхчлена в этой точке меньше нуля.

Подставив $x=a$ в многочлен, получим неравенство
$a^4-6a^3+7a^2+6a-8<0$.

Ищем корень многочлена $a^4-6a^3+7a^2+6a-8$ среди делителей его свободного члена: ±1; ±2; ±4; ±8, $a=1$ — корень.

Схемой Горнера или уголком разделим многочлен $a^4-6a^3+7a^2+6a-8$ на $a-1$, получим a^3-5a^2+2a+8. Корнем этого многочлена является число 2. Разделим многочлен на $a-2$.

Корни оставшегося многочлена второй степени a^2-3a-4 равны $a=4$ и $a=-1$.

Расположив корни на числовой оси, методом интервалов получим $(-1;1)\cup(2;4)$. Осталось учесть, что $a\neq 0$, получим $a\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;4)$.

Ответ: $(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;4)$.

С6. а) сумма четырёх слагаемых S_4:

$S_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)$.

Заметим, что $1\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$,

тогда $S_4=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{45}$.

б) Теперь $S_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{n}{n+1}$ и неравенство $S_n \geqslant \frac{1}{9}$, $\frac{1}{9} \cdot \frac{n}{n+1} \geqslant \frac{1}{9}$; $\frac{n}{n+1} \geqslant 1$, и для натуральных n числитель всегда меньше знаменателя. То есть таких натуральных n не существует и $n \in \varnothing$.

в) $S_n \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{9} \cdot \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{9}{10}$. То есть $\frac{n-9}{n+1} \leqslant 0$.

Решая это неравенство методом интервалов, и с учётом того, что n — натуральное число, получаем, что $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

г) $S_n = \frac{1}{9} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n^2 + 2n + 21}$; $9n+9 = n^2+2n+21$; $n^2-7n+12 = 0$, то есть $n = \{3, 4\}$.

Ответ: а) $\frac{4}{45}$; б) $n \in \varnothing$; в) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; г) 3, 4.

Решение варианта 25

B1. $7903 - 7834 = 69$ (кВт·ч).

$69 \cdot 1{,}8 = 124{,}2$ (руб).

Ответ: 124,2.

B2. Из рисунка следует, что без осадков были дни 15, 17, 18, 19 и 24 ноября, всего 5 дней.

Ответ: 5.

B3. Рассмотрим треугольники OBC и OKL (см. рис. 185). Так как по условию $BC \parallel KL$, то эти треугольники подобны, откуда $\frac{OK}{OB} = \frac{OL}{OC}$ и $OK = \frac{OB \cdot OL}{OC} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6$, тогда координаты точки $K(0; 6)$, ордината равна 6.

Ответ: 6.

B4. Вариант с покупкой цветной пряжи обойдётся в $\frac{300}{60} \cdot 70 = 350$ (руб.), вариант с покупкой неокрашенной пряжи с последующей её окраской обойдётся в $\frac{300}{50} \cdot 40 + \frac{300}{100} \cdot 30 = 330$ (руб.), наиболее дешёвый вариант обойдётся в 330 рублей.

Ответ: 330.

B5. $(\sqrt{-12+7x})^2 = (x)^2$; $-12 + 7x = x^2$; $x^2 - 7x + 12 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

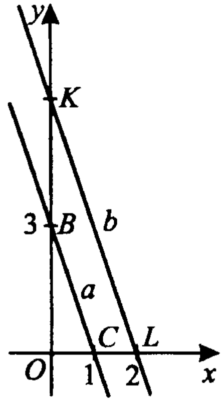


Рис. 185.

Проверка: $\sqrt{-12+7\cdot 3} = 3$; значит, $x = 3$ — корень исходного уравнения.
$\sqrt{-12+7\cdot 4} = 4$; следовательно, $x = 4$ — корень исходного уравнения.
В ответе указываем меньший из них: $x = 3$.

Ответ: 3.

B6. Пусть $\smile BE = 3x$, $\smile BC = 5x$, $\smile CD = 6x$, $\smile DE = 4x$.

$\angle A = \frac{1}{2}(\smile CD - \smile BE) = \frac{1}{2}(6x - 3x) = 1{,}5x$ (см. рис. 186).

$\smile BE + \smile CB + \smile CD + \smile DE = 18x = 360°$, значит, $x = 20°$, откуда $\angle A = 1{,}5 \cdot 20° = 30°$.

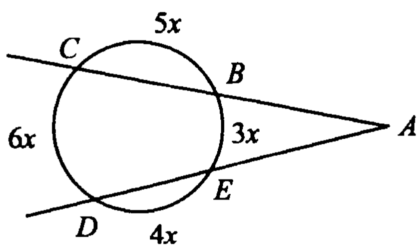


Рис. 186.

Ответ: 30.

B7. $4x - y + z = 1$ и $5x + 4y - 13z = 62$, тогда, сложив эти равенства, получим $9x + 3y - 12z = 63$, откуда $3x + y - 4z = 21$.

Ответ: 21.

B8. $F(-3) - F(-10) = S_{\text{трапеции}}$.

$$S = \frac{2+7}{2} \cdot 4 = 18.$$

Ответ: 18.

B9. $D_1E_1 || DE$, $DE || FC$. Искомый $\angle AFC$ (см. рис. 187). $\triangle AOF$ равносторонний, так как $AO = OF = AF = 8$. $\angle AFC = 60°$.

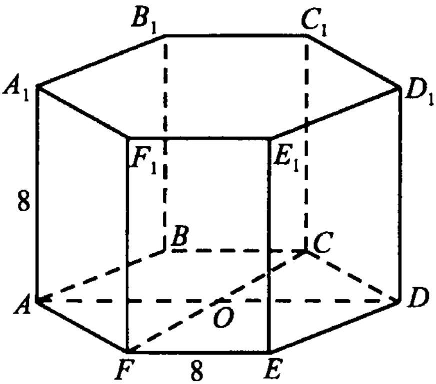


Рис. 187.

Ответ: 60.

B10. Школьников, пришедших на тренировку, 21 человек, в каждой команде по 7 человек. Значит вероятность того, что Василий попадёт в команду, где Павел, равна $\frac{7-1}{21-1} = \frac{6}{20} = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

B11. По условию шар вписан в цилиндр. Значит, высота цилиндра h равна диаметру шара, то есть $h = 2r$, где r — радиус шара. $\frac{V_{\text{ц}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\pi r^2 \cdot 2r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}$, $V_{\text{ц}} = \frac{3}{2}V_{\text{ш}} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$.

Ответ: 12.

B12. По условию $\frac{2 \cdot 35 \sin\alpha}{10} \geqslant 7$; $\sin\alpha \geqslant 1$. Искомое наименьшее значение угла равно 90°.

Ответ: 90.

B13. 1 мин 12 сек $= \frac{1}{50}$ часа $= 0{,}02$ часа. За время 0,02 часа поезд прошёл расстояние: $0{,}02 \cdot 70 = 1{,}4$ (км) $= 1400$ (м). Это и есть длина поезда.

Ответ: 1400.

B14. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{x^3}}{4x} = \frac{\sqrt[4]{x}(1 - 3\sqrt{x})}{4x}$.

Если $y' = 0$, то $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$, откуда $x = \frac{1}{9}$, но $\frac{1}{9} \notin [1; 16]$.

При $x \in [1; 16]$ $y' < 0$, следовательно, наименьшее значение функция $y(x)$ принимает при $x = 16$:
$y(16) = \sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{16^3} = 2 - \sqrt[4]{2^{12}} = 2 - 8 = -6$.

Ответ: -6.

C1. а) Преобразуем уравнение:

$4(2\sin x\cos x)\cos^2 x - 2\sin 2x - 2\cos^2 x + 1 = 0$;

$(4\sin 2x\cos^2 x - 2\sin 2x) - (2\cos^2 x - 1) = 0$;

$\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Уравнение $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ равносильно уравнению $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\cos 2x = 0$.

Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}$ имеет корни $x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

б) Найдём корни в промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -2\right]$.

Для корней вида $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, получаем:

$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leqslant -2$; $-\frac{7}{2} \leqslant n \leqslant -\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}$.

Отсюда $n = -3$ или $n = -2$.

Если $n = -3$, то $x = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4}$, при $n = -2$ получаем $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.

Для отбора корней вида $x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$, представим их в виде двух серий:

$x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$ при $m = 2k$, $k \in Z$, и $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$ при $m = 2k + 1$, $k \in Z$.

Тогда для первой серии получаем:

$$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{12} + \pi k \leqslant -2; \quad -\frac{19}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{2}{\pi} - \frac{1}{12},$$

отсюда $k = -1$ и $x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$.

Для второй серии получаем:

$$-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{5\pi}{12} + \pi k \leqslant -2; \quad -\frac{23}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{2}{\pi} - \frac{5}{12}.$$

Последнее неравенство не имеет целочисленных решений.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $(-1)^m \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2}$, $n, m \in Z$; б) $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{11\pi}{12}$, $-\frac{3\pi}{4}$.

С2. Пусть четырёхугольник AFC_1E — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 (см. рис. 188). Этот четырёхугольник — параллелограмм (при пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью прямые, по которым она их пересекает, параллельны, поэтому $FC_1 || AE$, $AF || C_1E$ и $FC_1 = AE$, $AF = C_1E$).

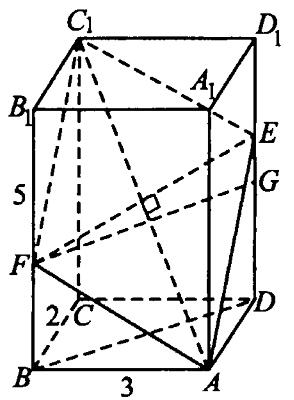


Рис. 188.

Ромб получится в случае, если $AF = FC_1$.

Из прямоугольных треугольников BFA и FB_1C_1 получаем $FA^2 = BA^2 + FB^2 = 9 + FB^2$, $FC_1^2 = B_1C_1^2 + FB_1^2 = 4 + (5 - FB)^2$.

Приравнивая полученные выражения $9 + FB^2 = 4 + (5 - FB)^2$, находим $FB = 2$.

Так как одна из диагоналей ромба $AC_1 = \sqrt{BA^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$, то для нахождения площади сечения достаточно найти вторую диагональ ромба FE.

Из равенства прямоугольных треугольников BFA и C_1D_1E получаем $FB = D_1E = 2$.

Проведём $FG||BD$. Тогда $FB = GD = 2$, $FG \perp DD_1$, $EG = DD_1 - DG - D_1E = 1$, $FG = BD = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

В получившемся прямоугольном треугольнике FEG находим $FE = \sqrt{FG^2 + EG^2} = \sqrt{14}$.

Площадь S ромба AFC_1E находим по формуле

$S = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot AC_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{38} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{133}$.

Ответ: $\sqrt{133}$.

С3. 1. Найдём решения первого неравенства системы, раскрывая модули на промежутках. Выражения под знаком модуля обращаются в нуль при $x = \frac{20}{9}$, $x = 2$ и $x = 0$ соответственно.

Пусть $x \leqslant 0$. Тогда $9x - 20 < 0$, $9x - 18 < 0$ и $9x \leqslant 0$.

Раскрывая модули, получим неравенство $20 - 9x + 9x - 18 \geqslant 3 + 9x$ или $x \leqslant -\frac{1}{9}$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $\left(-\infty; -\frac{1}{9}\right]$.

Пусть $0 < x \leqslant 2$. Тогда $9x - 20 < 0$, $9x - 18 \leqslant 0$ и $9x > 0$.

Раскрывая модули, получим неравенство $20 - 9x + 9x - 18 \geqslant 3 - 9x$ или $x \geqslant \frac{1}{9}$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $\left[\frac{1}{9}; 2\right]$.

Пусть $2 < x \leqslant \frac{20}{9}$. Тогда $9x - 20 \leqslant 0$, $9x - 18 > 0$ и $9x > 0$.

Раскрывая модули, получим неравенство $20 - 9x - 9x + 18 \geqslant 3 - 9x$ или $x \leqslant \frac{35}{9}$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $\left(2;\ \frac{20}{9}\right]$.

Пусть $x > \frac{20}{9}$. Тогда $9x - 20 > 0$, $9x - 18 > 0$ и $9x > 0$.

Раскрывая модули, получим неравенство $9x - 20 - 9x + 18 \geqslant 3 - 9x$ или $x \geqslant \frac{5}{9}$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $\left(\frac{20}{9};\ +\infty\right)$.

Итак, решением первого неравенства является множество $\left(-\infty;\ -\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{9};\ +\infty\right)$.

2. Область определения второго неравенства системы задаётся условиями: $\begin{cases} 19 - 9x > 0, \\ 19 - 9x \neq 1. \end{cases}$

Отсюда $x \in (-\infty;\ 2) \cup \left(2;\ \frac{19}{9}\right)$.

Так как при допустимых значениях x верно равенство $\log_{19-9x} 2 = \frac{1}{\log_2(19-9x)}$, то сделав замену $\log_2(19 - 9x) = t$, получим неравенство $t - \frac{3}{t} \geqslant 2$, которое приводится к следующему виду $\frac{t^2 - 2t - 3}{t} \geqslant 0$.

Решения последнего неравенства: $[-1;\ 0) \cup [3;\ +\infty)$.

Из двойного неравенства $-1 \leqslant \log_2(19 - 9x) < 0$ получаем $\frac{1}{2} \leqslant 19 - 9x < 1$ или $2 < x \leqslant \frac{37}{18}$.

Из неравенства $\log_2(19 - 9x) \geqslant 3$ получаем $19 - 9x \geqslant 8$ или $x \leqslant \frac{11}{9}$.

Так как $\frac{11}{9} < 2$ и $2 < \frac{37}{18} < \frac{19}{9}$, то второе неравенство системы имеет решения: $\left(-\infty;\ \frac{11}{9}\right] \cup \left(2;\ \frac{37}{18}\right]$.

3. Найдём общую часть полученных решений:
$\left(-\infty;\ -\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{9};\ \frac{11}{9}\right] \cup \left(2;\ \frac{37}{18}\right].$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{9};\ \frac{11}{9}\right] \cup \left(2;\ \frac{37}{18}\right].$

С4. Основание H высоты, опущенной из вершины A, либо находится на стороне BC, либо на её продолжении.

1) Рассмотрим первый случай (см. рис. 189 а). Пусть $BH = x$, $CH = y$. Так как угол ADC опирается на ту же дугу, что и угол ABC, то $\angle ADC = \angle ABC = 45°$.

По условию $AD \perp BC$, значит, треугольники DCH и ABH прямоугольные с одним из углов, равным 45°. Следовательно, они равнобедренные. Тогда $BH = AH = x$ и $DH = CH = y$.

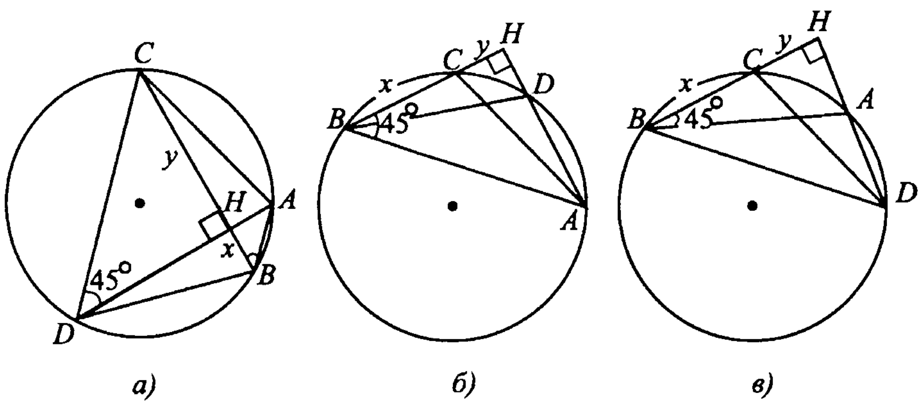


Рис. 189.

Из прямоугольного треугольника AHC получаем
$CA^2 = AH^2 + CH^2 = x^2 + y^2 = 64.$

Площадь S треугольника BDH равна $S = \frac{1}{2}DH \cdot BH = \frac{xy}{2} = 9.$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 64, \\ xy = 18. \end{cases}$

Отсюда получаем: $x^2 + y^2 + 2xy = 64 + 36 = 100$ или $(x + y)^2 = 100$. Значит, $BC = x + y = 10$.

2) Рассмотрим второй случай (см. рис. 189 б).

Пусть $BC = x, CH = y$.

Так как треугольник ABH прямоугольный с одним из углов, равным 45°, то он равнобедренный и $\angle BAH = 45^\circ$.

Равные углы BAD и CBA опираются на равные дуги. Так как дуга DC — общая часть равных дуг BCD и CDA, то дуги BC и DA равны, а значит, равны хорды BC и DA.

Отсюда следует, что $CD||BA$, $CH = HD = y$ и $BC = DA = x$.

Из прямоугольного треугольника ACH получаем:
$AC^2 = CH^2 + AH^2 = y^2 + (x+y)^2 = 64$.

Площадь S треугольника BDH равна $S = \frac{1}{2}BH \cdot DH = \dfrac{(x+y)y}{2} = 9$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = 64, \\ xy + y^2 = 18. \end{cases}$

Отсюда получаем: $x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + 2(xy + y^2) = x^2 + 36 = 64$ или $x^2 = 28$.

Значит, $BC = x = 2\sqrt{7}$.

3) В принципе возможен третий случай (см. рис. 189 в). Но тогда $\angle HDC = 45^\circ$ и $\angle HCA = 45^\circ$ и $BA \parallel CD$, что невозможно.

Ответ: 10 или $2\sqrt{7}$.

С5. Приведём уравнение к виду $3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin \dfrac{\pi|x|}{4} = a^3 + 5a^2 + 3a$.

Введём функции $f(x) = 3 \cdot (3^{|x|} - 1) + 240 \cdot \sin \dfrac{\pi|x|}{4}$ и $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a$.

Тогда исходное уравнение имеет вид $f(x) = g(a)$.

Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является непрерывной как сумма непрерывных функций и чётной функцией как сумма чётных функций.

Покажем, что $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in R$. Так как $f(x)$ — чётная функция, то достаточно доказать, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Для этого рассмотрим функцию на промежутках $[0;\ 4]$ и $(4;\ +\infty)$.

Если $x \in [0;\ 4]$, то $3^x - 1 \geqslant 0$ и $\sin \dfrac{\pi x}{4} \geqslant 0$, а значит, $f(x) \geqslant 0$; если же $x \in (4;\ +\infty)$, то $3 \cdot 3^x > 3 \cdot 3^4 = 3^5$ и $-3 + 240 \cdot \sin \dfrac{\pi x}{4} \geqslant -3 - 240 = -3^5$, а значит, $f(x) > 3^5 - 3 - 240 = 3^5 - 3^5 = 0$. Следовательно, $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in R$.

Так как непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна на всей области определения, $f(0) = 0$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то $E(f) = [0;\ +\infty)$.

Тогда уравнение $f(x) = g(a)$ имеет решение при значениях параметра a, удовлетворяющих условию $g(a) \geqslant 0$.

Надо найти те значения a, при которых $g(a) \geqslant 0$ и при которых $g(a) \neq g(a_1)$ ни для какого $a_1 \neq a$.

Исследуем функцию $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a$. Её производная $g'(a) = 3a^2 + 10a + 3$. Из уравнения $g'(a) = 0$ или $3a^2 + 10a + 3 = 0$ находим $a_{\max} = -3$ или $a_{\min} = -\dfrac{1}{3}$.

Получаем, что функция $g(a)$ возрастает ($g'(a) \geqslant 0$) на промежутках $(-\infty;\ -3]$ и $\left[-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ и убывает ($g'(a) \leqslant 0$) на промежутке $\left[-3;\ -\frac{1}{3}\right]$.

Так как $g(a) = a^3 + 5a^2 + 3a = 0$ при $a_{1,\,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ и $a_3 = 0$, то получаем, что $g(a) \geqslant 0$ на промежутках $\left[\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}\right]$ и $[0;\ +\infty)$.

Поскольку $g_{\max}(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 + 3(-3) = 9$, $g_{\min}\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}$ и справедливы неравенства $\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} < -3 < \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} < -\dfrac{1}{3} < 0$ (см. рис. 190), то значения параметра, при которых положительные значения функции $g(a)$ принимаются только при одном значении a, являются решениями неравенства $g(a) > 9$, т.е. $a^3 + 5a^2 + 3a > 9$.

Отсюда получаем неравенство $(a+3)^2(a-1) > 0$, равносильное неравенству $a > 1$.

Так как $E(f) = \Big[0;\ +\infty\Big)$ и при $a > 1$ функция $g(a)$ принимает все значения из промежутка $\Big(9;\ +\infty\Big)$, то исходное уравнение имеет решения при всех таких a.

Ответ: $a > 1$.

С6. Разобьём имеющиеся книги на стопки, принадлежащие перу одного автора. Если нет стопок из 20 (или более) книг одного автора, то в каждой стопке не более 19 книг. Пусть имеется k стопок, содержащих три и более книг. Назовём их большими стопками.

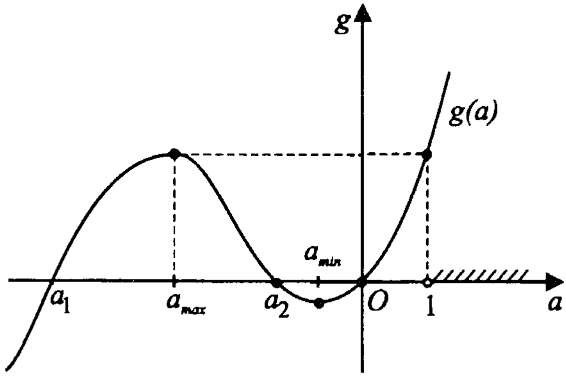


Рис. 190.

а) Из условия следует, что $k \leqslant 5$ (иначе, взяв по 3 книги из имеющихся больших стопок, получим не менее восемнадцати книг, среди которых не будет четырёх одного автора). Рассмотрим два случая:

1. Пусть $k \leqslant 4$. Тогда общее число книг в больших стопках не превышает $4 \cdot 19 = 76$. Следовательно, найдётся более 20 книг, которые не входят в большие стопки. Из этого набора всегда можно выбрать шестнадцать книг, среди которых не будет четырёх книг одного автора. Противоречие.

2. Пусть $k = 5$. Тогда общее число книг в больших стопках не превышает $5 \cdot 19 = 95$. Следовательно, имеются 5 книг, содержащихся в стопках из двух или одной книги. Взяв по три книги из больших стопок и добавив одну из оставшихся, получим шестнадцать книг, среди которых нет четырёх книг одного автора. Противоречие.

Итак, имеется хотя бы одна стопка из двадцати книг. Следовательно, обязательно найдётся 20 книг одного автора.

б) Нет, не обязательно. Пример, имеется пять стопок по 20 книг.

Ответ: а) да, обязательно; б) нет, не обязательно.

Решение варианта 26

B1. За год клиент должен выплатить $100\% + 15\% = 115\%$ от взятой суммы, то есть $18\,000 \cdot \dfrac{115}{100} = 20\,700$ (рублей). Каждый месяц необходимо вносить

$\dfrac{20\,700}{12} = 1725$ (рублей).

Ответ: 1725.

B2. По графику наибольшее или наименьшее количество золотовалютных резервов в период с 11 февраля по 17 февраля определяются как точки с наибольшим или наименьшим значениями ординат. Наибольшему значению соответствует 488 млрд долл., наименьшему — 482 млрд долл. Разность между ними составляет 6 млрд долл.

Ответ: 6.

B3. Площадь заштрихованной фигуры равна $\frac{\pi R^2}{360^\circ}(360^\circ - 135^\circ) = \frac{5\pi R^2}{8}$.

$R = 4$. $S = \frac{5\pi \cdot 16}{8} = 10\pi$.

В ответе $\frac{S}{\pi} = 10$.

Ответ: 10.

B4. Стоимость у поставщика А составит
$(1800 \cdot 135 + 17\,000) \cdot 0{,}85 = 221\,000$ (руб.);
у поставщика Б: $1700 \cdot 135 = 229\,500$ (руб.);
у поставщика В: $(1600 \cdot 135 + 14\,000) = 230\,000$ (руб.).

Самым выгодным будет заказ у поставщика А, он составит 221 000 рублей.

Ответ: 221 000.

B5. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12} = 81^{-2x}$. Заметим, что $81^{-2x} = (3^4)^{-2x} = 3^{-8x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8x}$.

Таким образом, $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8x}$; $3x + 12 = 8x$; $5x = 12$; $x = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

B6. Пусть $\angle A = 3x$, $\angle B = 2x$, $\angle C = 7x$ (см. рис. 191), $\angle A + \angle C = 180^\circ$, откуда $10x = 180^\circ$, $x = 18^\circ$. $\angle B + \angle D = \angle A + \angle C$, значит, $\angle D = 8x$, тогда $\angle D = 8 \cdot 18^\circ = 144^\circ$.

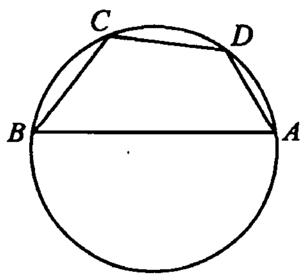


Рис. 191.

Ответ: 144.

B7. Заметим, что если $\cos x = 0$, то равенство, данное в условии, не выполняется. Значит, можем считать, что $\cos x \neq 0$.

$$0{,}35 = \frac{5\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 14\cos\alpha} = \frac{5\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 3}{3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 14} = \frac{5\operatorname{tg}\alpha - 3}{3\operatorname{tg}\alpha + 14};$$

$$\frac{5\operatorname{tg}\alpha - 3}{3\operatorname{tg}\alpha + 14} = 0{,}35;\ 5\operatorname{tg}\alpha - 3 = 1{,}05\operatorname{tg}\alpha + 4{,}9;\ 3{,}95\operatorname{tg}\alpha = 7{,}9;\ \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

Ответ: 2.

B8. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$. По определению $F'(x) = f(x)$ на некотором промежутке. Пользуясь рисунком, найдём количество точек максимума и минимума на промежутке $[-5; 1]$, их 8.

Ответ: 8.

B9. ΔD_1AB (см. рис. 192): $\angle D_1AB = 90°$, $\cos\angle ABD_1 = \dfrac{AB}{BD_1}$.

$$BD_1 = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{3})^2 + 12^2} = \sqrt{64 + 48 + 144} = 16.$$

$$\cos\angle ABD_1 = \frac{8}{16},\ \cos\angle ABD_1 = \frac{1}{2},\ \angle ABD_1 = 60°.$$

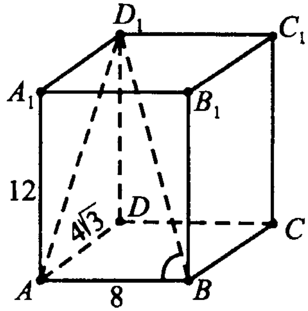


Рис. 192.

Ответ: 60.

B10. Предположим, что групп всего три. Тогда их можно расставить 6 способами, из них два подходят. Значит, в этом случае искомая вероятность равна $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Если групп $n > 3$, то все возможные расстановки разобьём на классы по 6 расстановок в каждом классе. Каждый класс получается путём фиксирования расстановки остальных групп. В каждом классе

6 расстановок, 2 подходят. Если классов k штук, то всего $6k$ расстановок, $2k$ подходят, $\frac{2k}{6k} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Ответ: 0,33.

B11. Из условия следует, что отрезок SH является высотой пирамиды и равен 3. Так как SH — высота, то угол SHC прямой. Так как $\operatorname{ctg}\angle SDH = \frac{DH}{SH}$, то $DH = SH \cdot \operatorname{ctg}\angle SDH = 3\operatorname{ctg}30^\circ = 3\sqrt{3}$. Площадь квадрата в основании пирамиды равна $S = DC^2 = (2DH)^2 = \left(2 \cdot 3\sqrt{3}\right)^2 = 108$. Объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 3 = 108$.

Ответ: 108.

B12. По условию $\frac{2 \cdot 20 \sin\alpha}{10} \geqslant 2$; $\sin\alpha \geqslant 0{,}5$. Искомое наименьшее значение угла равно 30°.

Ответ: 30.

B13. Пусть Виктор выполнит ремонт всей квартиры за x дней, Алексей — за y дней, Андрей — за z дней. Тогда за один день Виктор выполнит часть ремонта, равную $\frac{1}{x}$, Алексей — $\frac{1}{y}$, Андрей — $\frac{1}{z}$. Из условия, что Виктор и Алексей, Виктор и Андрей выполнят весь ремонт за 8 дней, следует, что $y = z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$. Аналогично рассуждая относительно части ремонта, выполненного Андреем и Алексеем, получаем следующее уравнение: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$.

Так как $y = z$, то $\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{24}$. Тогда из равенства $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$ получим $\frac{1}{x} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$.

Работая вместе, за один день Виктор, Алексей и Андрей выполнят $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$ часть ремонта. Весь ремонт они сделают за 6 дней.

Ответ: 6.

B14. $y' = 2\cos x - 2(\cos x - x\sin x) - x = 2x\sin x - x = x(2\sin x - 1)$.

$y' = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ так как $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$, то $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \frac{\pi}{6}. \end{array}\right.$ Найдём значения функции на концах отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ и при $x = 0$:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0{,}5\cdot\frac{\pi^2}{4} = -2 - \frac{1}{8}\pi^2 =$$
$$= \frac{-16 - \pi^2}{8};$$

$$y(0) = 2\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 1 - 0 = 0;\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} - 2\cdot\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} - 0{,}5\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 =$$
$= 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{\pi^2}{72}$. Среди этих значений наибольшим является значение $y(0)$, равное 0.

Ответ: 0.

C1. а) Преобразуем уравнение:

$$\sin x\cos^2 x - \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2 x\right) - \frac{1}{4}\sin x + \frac{3}{8} = 0;$$

$$\sin x\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{8} = 0;$$

$$\cos^2 x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0;\ \ \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет корни $x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Уравнение $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ равносильно уравнению $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$ или $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Отсюда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z$.

б) Найдём корни в промежутке $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -5\right]$.

Для отбора корней вида $x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$, представим их в виде двух серий:

$x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ при $n = 2k$, $k \in Z$, и $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k$ при $n = 2k+1$, $k \in Z$.

Тогда для первой серии получаем $-\dfrac{5\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant -5$;

$-\dfrac{7}{6} \leqslant k \leqslant -\dfrac{5}{2\pi} + \dfrac{1}{12}$,

отсюда $k = -1$ и $x = -\dfrac{\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{13\pi}{6}$.

Для второй серии получаем $-\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k \leqslant -5$;

$-\dfrac{11}{6} \leqslant k \leqslant -\dfrac{5}{2\pi} - \dfrac{7}{12}$. Последнее неравенство не имеет целочисленных решений.

Для отбора корней вида $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$, также рассмотрим две серии: $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi m$ и $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$.

Для первой серии: $-\dfrac{5\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + \pi m \leqslant -5$ или $-\dfrac{13}{6} \leqslant m \leqslant -\dfrac{5}{\pi} + \dfrac{1}{3}$,

отсюда $n = -2$ и $x = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{3}$.

Для второй серии: $-\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{3} + \pi m \leqslant -5$ или $-\dfrac{17}{6} \leqslant m \leqslant -\dfrac{5}{\pi} - \dfrac{1}{3}$,

отсюда $m = -2$ и $x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $(-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n$; $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi m$, $n, m \in Z$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}, -\dfrac{13\pi}{6}, -\dfrac{5\pi}{3}$.

С2. Пусть четырёхугольник $AFEG$ — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину A (см. рис. 193).

Этот четырёхугольник — параллелограмм (при пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью прямые, по которым она их пересекает, параллельны, поэтому $FE || AG$, $AF || EG$ и $FE = AG$, $AF = EG$).

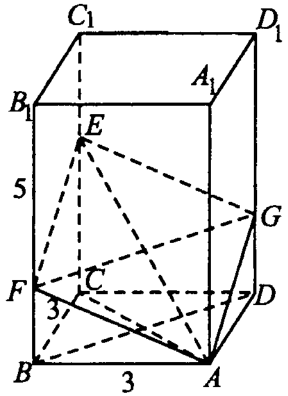


Рис. 193.

Ромб получится в случае, если $AF = AG$. В таком случае прямоугольные треугольники BFA и AGD равны ($AB = AD$ и $AF = AG$).

Следовательно, $FB = GD$. Тогда четырёхугольник $BFGD$ — прямоугольник и $FG||BD$. Это означает, что прямая l пересечения плоскости сечения и плоскости основания параллельна BD.

Поскольку $AE \perp FG$ и $AC \perp BD$, то AE и AC перпендикулярны l, а угол CAE — плоский угол двугранного угла, образованного плоскостью сечения и плоскостью основания параллелепипеда.

Так как площадь основания параллелепипеда $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 9$, а плоскость сечения $S_{AFEG} = 11$, то по теореме о площади ортогональной проекции $\cos \angle CAE = \frac{S_{ABCD}}{S_{AFEG}} = \frac{9}{11}$.

Отсюда $\operatorname{tg} \angle CAE = \frac{\sin \angle CAE}{\cos \angle CAE} = \sqrt{1 - \frac{81}{121}} : \frac{9}{11} = \frac{\sqrt{40}}{9}$.

Из прямоугольного треугольника ACE находим $EC = AC \cdot \operatorname{tg} \angle CAE = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{40}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

Следовательно, $\frac{EC}{CC_1} = \frac{4\sqrt{5}}{3} : 5 = \frac{4\sqrt{5}}{15}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

С3. 1. Найдём решения первого неравенства системы, раскрывая модули на промежутках.

Выражения под знаком модулей обращаются в нуль при $x = 0$ или $x = 1$ (первое выражение), $x = -\frac{3}{2}$ (второе выражение), $x = 0$ (третье выражение). В таблице представлены знаки подмодульных выражений на промежутках, на которые полученные точки разбивают числовую прямую.

	$x < -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$x^2 - x$	+	+	–	+
$2x + 3$	–	+	+	+
x	–	–	+	+

Пусть $x \leqslant -\frac{3}{2}$. Раскрывая модули, получим неравенство

$x^2 - x + 2x + 3 \leqslant 3 - x, \;\; x^2 + 2x \leqslant 0.$

Отсюда $x \in [-2;\ 0]$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $\left[-2;\ -\frac{3}{2}\right]$.

Пусть $-\frac{3}{2} < x \leqslant 0.$

Раскрывая модули, получим неравенство $x^2 - x - 2x - 3 \leqslant 3 - x$, $x^2 - 2x - 6 \leqslant 0.$

Отсюда $x \in \left[1 - \sqrt{7};\ 1 + \sqrt{7}\right]$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $\left(-\frac{3}{2};\ 0\right]$ (так как $\sqrt{7} > \sqrt{6{,}25} = 2{,}5,\ 1 - \sqrt{7} < 1 - 2{,}5 = -\frac{3}{2}$).

Пусть $0 < x \leqslant 1.$

Раскрывая модули, получим неравенство $-x^2 + x - 2x - 3 \leqslant 3 + x$, $x^2 + 2x + 6 \geqslant 0.$

Неравенство справедливо при всех значениях $x \in R$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $(0; 1]$.

Пусть $x > 1$. Раскрывая модули, получим неравенство

$x^2 - x - 2x - 3 \leqslant 3 + x, \;\; x^2 - 4x - 6 \leqslant 0$. Отсюда $x \in \left[2 - \sqrt{10};\ 2 + \sqrt{10}\right]$.

Значит, решение исходного неравенства на этом промежутке есть множество $\left(1;\ 2 + \sqrt{10}\right]$.

Итак, решением первого неравенства является множество $\left[-2;\ 2+\sqrt{10}\right]$.

2. Решим второе неравенство $9^{x^2-x} - 12 \cdot 3^{x^2} + 3^{2x+3} \geqslant 0$.

При делении обеих частей последнего неравенства на $3^{2x} > 0$ получим $3^{2x^2-4x} - 12 \cdot 3^{x^2-2x} + 3^3 \geqslant 0$ или $a^2 - 12 \cdot a + 27 \geqslant 0$, где $a = 3^{x^2-2x}$.

Находим решения квадратного неравенства $a \leqslant 3$ или $a \geqslant 9$, затем решения совокупности показательных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-2x} \leqslant 3, \\ 3^{x^2-2x} \geqslant 9; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-2x \leqslant 1, \\ x^2-2x \geqslant 2; \end{array}\right.$$

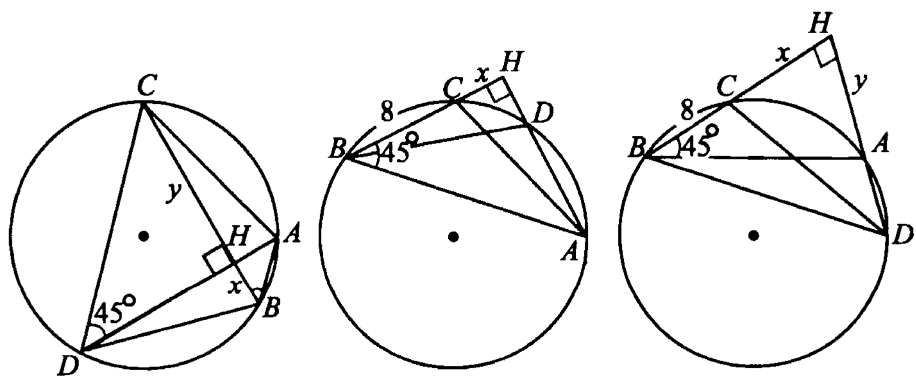
$x \in (-\infty;\ 1-\sqrt{3}] \cup [1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3};\ +\infty)$.

3. Найдём общую часть полученных решений: $[-2;\ 1-\sqrt{3}] \cup [1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{10}]$.

Ответ: $[-2;\ 1-\sqrt{3}] \cup [1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{10}]$.

С4. Основание H высоты, опущенной из вершины A, либо находится на стороне BC, либо на её продолжении.

1) Рассмотрим первый случай (см. рис. 194 а). Пусть $BH = x$, $CH = y$. Так как угол ADC опирается на ту же дугу, что и угол ABC, то $\angle ADC = \angle ABC = 45°$. По условию $AD \perp BC$, значит, треугольники DCH и ABH прямоугольные с одним из углов, равным 45°. Следовательно, они равнобедренные. Тогда $BH = AH = x$ и $DH = CH = y$, $CB = x + y = 8$ и $DA = x + y = 8$.



а) *б)* *в)*

Рис. 194.

Площадь треугольника CAD равна $S = \frac{1}{2}DA{\cdot}CH = 4y = 12$. Отсюда $y = 3$. Тогда $x = 8 - y = 5$.

Из прямоугольного треугольника AHC получаем $AC^2 = CH^2 + AH^2 = y^2 + x^2 = 34$, $AC = \sqrt{34}$.

2) Рассмотрим второй случай (см. рис. 194 б). Пусть $CH = x$. Так как треугольник ABH прямоугольный с одним из углов, равным $45°$, то он равнобедренный и $\angle BAH = 45°$. Равные углы BAD и CBA опираются на равные дуги. Так как дуга DC — общая часть равных дуг BCD и CDA, то дуги BC и DA равны, а значит, равны хорды BC и DA. Отсюда следует, что $CD \parallel BA$, $CH = HD = x$ и $BC = DA = 8$.

Площадь треугольника CAD равна $S = \frac{1}{2}DA \cdot CH = 4x = 12$, $x = 3$. Тогда $AH = 8 + x = 11$.

Из равнобедренного прямоугольного треугольника ACH получаем $AC^2 = CH^2 + AH^2 = 130$, т.е. $AC = \sqrt{130}$.

3) Рассмотрим третий случай (см. рис. 194 в).

Тогда $\angle HCA = 90° - \angle HDC = 45°$ и $CD \parallel BA$, что неверно.

Ответ: $\sqrt{34}$ или $\sqrt{130}$.

С5. Приведём уравнение к виду $x^4 + 81\sin|x| = \frac{2}{3}a^3 + \frac{7}{2}a^2 + 3a$.

Введём функции $f(x) = x^4 + 81\sin|x|$ и $g(a) = \frac{2}{3}a^3 + \frac{7}{2}a^2 + 3a$. Тогда исходное уравнение имеет вид $f(x) = g(a)$.

Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является непрерывной как сумма непрерывных функций и чётной функцией как сумма чётных функций.

Покажем, что $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in R$. Так как $f(x)$ — чётная функция, то достаточно доказать, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Для этого рассмотрим функцию на промежутках $[0;\ \pi]$ и $(\pi;\ +\infty)$. Если $x \in [0;\ \pi]$, то $x^4 \geqslant 0$ и $\sin x \geqslant 0$, а значит, $f(x) \geqslant 0$; если же $x \in (\pi;\ +\infty)$, то $f(x) > \pi^4 - 81 > 3^4 - 81 = 0$. Следовательно, $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in R$.

Так как непрерывная функция $f(x)$ неотрицательна на всей области определения, $f(0) = 0$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то $E(f) = \Big[0;\ +\infty\Big)$. Тогда уравнение $f(x) = g(a)$ имеет решение при значениях параметра a, удовлетворяющих условию $g(a) \geqslant 0$.

Найдём те значения a, при которых $g(a) \geqslant 0$ и $g(a) \neq g(a_1)$ ни для какого $a_1 \neq a$.

Исследуем функцию $g(a) = \frac{2}{3}a^3 + \frac{7}{2}a^2 + 3a$. Её производная $g'(a) = 2a^2 + 7a + 3$. Из уравнения $g'(a) = 0$ или $2a^2 + 7a + 3 = 0$ находим $a_{\max} = -3$ или $a_{\min} = -\frac{1}{2}$.

Получаем, что функция $g(a)$ возрастает ($g'(a) \geqslant 0$) на промежутках $(-\infty;\ -3]$ и $\left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ и убывает ($g'(a) \leqslant 0$) на промежутке $\left[-3;\ -\frac{1}{2}\right]$.

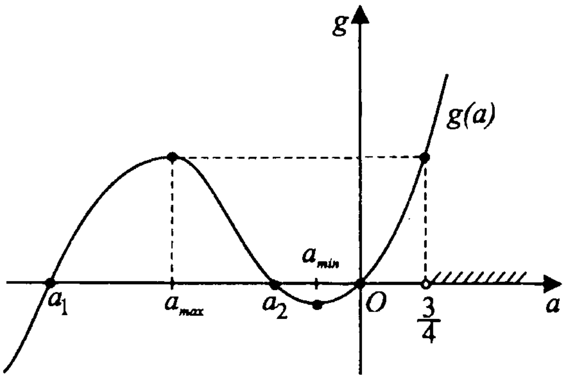


Рис. 195.

Так как $g(a) = \frac{2}{3}a^3 + \frac{7}{2}a^2 + 3a = 0$ при $a_{1,\,2} = \frac{-21 \pm 3\sqrt{17}}{8}$ и $a_3 = 0$, то получаем, что $g(a) \geqslant 0$ на промежутках $\left[\frac{-21 - 3\sqrt{17}}{8};\ \frac{-21 + 3\sqrt{17}}{8}\right]$ и $[0;\ +\infty)$. Поскольку $g_{\max}(-3) = \frac{2}{3}(-3)^3 + \frac{7}{2}(-3)^2 + 3(-3) = \frac{9}{2}$, $g_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{7}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{24}$ и справедливы неравенства $\frac{-21 - 3\sqrt{17}}{8} < -3 < \frac{-21 + 3\sqrt{17}}{8} < -\frac{1}{2} < 0$ (см. рис. 195), то значения параметра, при которых положительные значения функции $g(a)$ принимаются только при одном значении a, являются решениями неравенства $g(a) > \frac{9}{2}$, т.е. $\frac{2}{3}a^3 + \frac{7}{2}a^2 + 3a > \frac{9}{2}$. Отсюда получаем неравенство $(a+3)^2\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right) > 0$, равносильное неравенству $a > \frac{3}{4}$.

Так как $E(f) = [0; +\infty)$ и при $a > \frac{3}{4}$ функция $g(a)$ принимает все значения из промежутка $(4{,}5; +\infty)$, то исходное уравнение имеет решения при всех таких a.

Ответ: $a > \frac{3}{4}$.

С6. Разобьём имеющиеся в коробке шарики на группы одного цвета. Если нет групп из 20 шариков одного цвета (или больше), то в каждой группе будет не более 19 шариков. Пусть имеется k групп, содержащих три и более шарика. Назовём их ***большими*** группами.

а) Из условия следует, что $k \leqslant 4$ (иначе, взяв по 3 шарика из имеющихся больших групп, получим не менее пятнадцати шариков, среди которых не будет четырёх одного цвета). Рассмотрим два случая:

1. Пусть $k \leqslant 3$. Тогда общее число шариков в больших группах не превышает $3 \cdot 19 = 57$. Следовательно, найдётся 23 шарика, которые не входят в большие группы. Из этого набора всегда можно выбрать тринадцать шариков, среди которых не будет четырёх одного цвета. Противоречие.

2. Пусть $k = 4$. Тогда общее число шариков в больших группах не превышает $4 \cdot 19 = 76$. Следовательно, имеются 4 шарика, содержащиеся в группах из двух или одного шарика. Взяв по три шарика из больших групп и добавив один из оставшихся, получим тринадцать шариков, среди которых нет четырёх одного цвета. Противоречие.

Итак, имеется хотя бы одна группа из двадцати шариков. Следовательно, обязательно найдётся 20 шариков одного цвета.

б) Так как больших групп $k \leqslant 4$ и имеется пример, когда в каждой группе имеется по 20 шариков одного цвета, то максимальное число шариков, которое можно удалить, есть 7 — по два шарика из трёх каких-то групп и ещё один из оставшейся. При большем числе удалённых шариков всегда можно привести пример, когда в коробке не будет 19 шариков одного цвета (так $4 \cdot 18 = 72$, а далее невозможно уменьшать число шариков в группах). В качестве примера рассмотрим те же 4 группы по 20 шаров.

в) В общем случае достаточно одного шарика, поскольку больших групп $k \leqslant 4$ и добавление шарика нового цвета будет противоречить условию задачи. В приведённом выше примере четырёх групп по 20 шариков одного цвета достаточно добавить ещё один шарик соответствующего цвета в какую-то группу. В других случаях уже будет иметься группа, в которой более 20 шариков одного цвета.

Ответ: а) да; б) 7; в) 1.

Решение варианта 27

B1. Стоимость одной поездки равна $400 \cdot \frac{2{,}5}{100} = 10$ рублей. Без проездного Аня потратила бы $10 \cdot 55 = 550$ рублей. Экономия составила $550 - 400 = 150$ рублей.

Ответ: 150.

B2. 13 мая наибольшая температура была $30°C$, 11 мая наибольшая температура была $20°C$. Искомая разность составляет $30 - 20 = 10\,(°C)$.

Ответ: 10.

B3. Условимся, что $AB = 15$, $DH = 6$, $BC = 10$ (см. рис. 196).

$S_{ABCD} = AB \cdot DH = 15 \cdot 6 = 90$. Тогда $S_{ABCD} = BC \cdot DK$, $90 = 10 \cdot DK$, $DK = 9$.

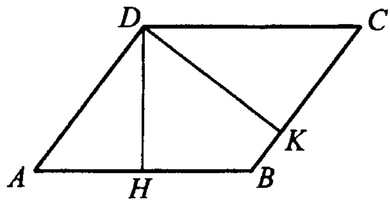


Рис. 196.

Ответ: 9.

B4. Необходимо приобрести $\frac{15\,000}{5} = 3000$ кирпичей. Стоимость заказа в фирме А составит $3000 \cdot 16 = 48\,000$ руб., а со скидкой $0{,}92 \cdot 48\,000 = 44\,160$ рублей.

В фирме Б стоимость самого заказа составит $15 \cdot 3000 = 45\,000$ руб., а с доставкой $45\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}3 = 48\,000$ руб.

Стоимость заказа в фирме В составит $17 \cdot \frac{3000}{100} \cdot 90 = 45\,900$ рублей.

Таким образом, стоимость наиболее дешёвого заказа составит 44 160 рублей.

Ответ: 44 160.

B5. $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ x + 1{,}5 = 0; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 5, \\ x = -1{,}5; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 5, \\ x = -1{,}5. \end{array}\right.$

Сумма корней равна 2,5.

Ответ: 2,5.

В6. По условию $\angle BCA = 36°$ (см. рис. 197), тогда $\angle BCK = 18°$, $\angle BCK + \angle FBC = \angle BOK$, $18° + 45° = \angle BOK, \angle BOK = 63°$.

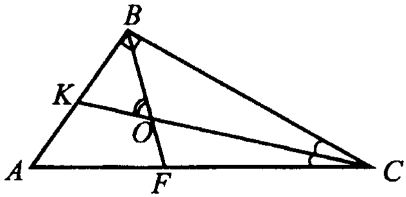


Рис. 197.

Ответ: 63.

В7. $\log_{\sqrt{a}}(a^2b^3) = \log_{a^{\frac{1}{2}}}(a^2b^3) = 2\log_a(a^2b^3) = 2(\log_a a^2 + \log_a b^3) =$

$$= 2(2 + 3\log_a b) = 4 + 6 \cdot \frac{1}{\log_b a} = 4 + \frac{6}{1{,}5} = 8.$$

Ответ: 8.

В8. Согласно условию, прямая $y = -4x + 1$ является касательной к данной кривой, значит, угловой коэффициент касательной равен $k = -4$. С другой стороны, $k = y'(x_0)$, $y'(x) = (x^3 + 5x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 10x + 3$. Следовательно, абсциссу точки касания можно найти из уравнения $3x_0^2 + 10x_0 + 3 = -4$. Отсюда $x_0 = -\frac{7}{3}$ или $x_0 = -1$. Если x_0 — точка касания, то должно выполняться равенство $-4x_0 + 1 = y(x_0)$. Оно выполняется только для $x_0 = -1$.

Ответ: -1.

В9. Сечение A_1D_1M в прямоугольном параллелепипеде (см. рис. 198) — прямоугольник A_1D_1NM (где $MN \parallel A_1D_1$), так как

1) $A_1D_1 \| MN$, $A_1M \| D_1N$, поэтому он параллелограмм (по определению),

2) $A_1D_1 \perp (ABA_1B_1)$, значит, $A_1D_1 \perp A_1M$, отсюда $\angle MA_1D_1 = 90°$.

$S_{A_1D_1NM} = A_1D_1 \cdot A_1M$, $A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

$S_{A_1D_1NM} = 8 \cdot 5 = 40$.

Ответ: 40.

В10. Переформулируем задачу. Нужно найти наименьшее количество выстрелов (K), при котором вероятность K промахов (всех промахов) меньше 0,03. При первом выстреле вероятность промаха равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

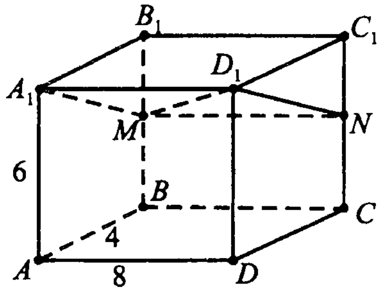


Рис. 198.

При каждом из последующих выстрелов вероятность промаха равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Надо найти наименьшее натуральное K, при котором выполняется $(0{,}7) \cdot 0{,}3^{K-1} < 0{,}03$. Перебором выясняется, что $K = 1, 2, 3$ не подходят, $K = 4$ подходит.

Ответ: 4.

B11. Проведя из центра правильного шестиугольника в основание призмы отрезки ко всем его вершинам, мы разобьём этот шестиугольник на шесть правильных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Площадь всего шестиугольника равна $6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Объём правильной призмы получим, умножив площадь основания на длину бокового ребра: $V = 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 144$.

Ответ: 144.

B12. По условию $0{,}7 \cdot \frac{4200 \cdot 0{,}5}{30} \cdot \log_2 \frac{84 - 20}{T - 20} = 49$; $\log_2 \frac{64}{T - 20} = 1$;

$\frac{64}{T-20} = 2$; $T - 20 = 32$; $T = 52$.

Ответ: 52.

B13. Пусть x кг инжира перешло в y кг сушёного инжира, тогда в x кг содержится $0{,}7x$ кг влаги, в y кг сушёного инжира содержится $0{,}034y$ влаги. Составляем уравнение: $(1 - 0{,}7)x = (1 - 0{,}034)y$. По условию $y = 10$, тогда $0{,}3x = 0{,}966 \cdot 10$, $x = \frac{0{,}966 \cdot 10}{0{,}3} = \frac{9{,}66}{0{,}3} = 32{,}2$ кг.

Ответ: 32,2.

B14. $y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3$.

$y' = \frac{2x+2}{(x^2+2x+4)\ln 3}$; $y' = 0$ при $x = -1$. Заметим, что $x^2 + 2x + 4 \neq 0$, $x \in R$, так как $D < 0$. При переходе через $x = -1$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$» (см. рис. 199). Значит, точка $x = -1$ является точкой минимума.

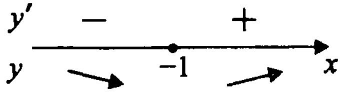


Рис. 199.

Наименьшее значение $y(-1) = 4$.

Ответ: 4.

C1. а) Воспользуемся стандартным приёмом — методом дополнительного угла — для преобразования левой части данного уравнения:

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

$$2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

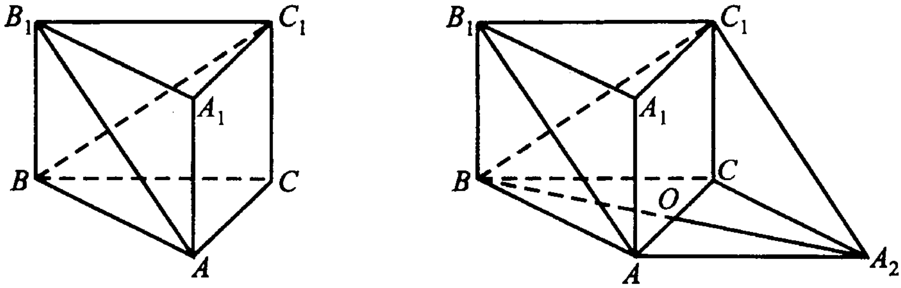
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

б) Последнее множество решений при $0 < x < \dfrac{4\pi}{3}$ даёт несколько значений, а именно, $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{6}$ (при $n = 0$ и $n = 1$), которые удовлетворяют данным условиям. При $n < 0$ $x < 0$; при $n \geqslant 2$ $x \geqslant \dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. б) $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{6}$.

C2. Совершим параллельный перенос диагонали AB_1 на вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$, образ точки A обозначим через A_2 (см. рис. 200 б).

Угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу между прямыми C_1B и C_1A_2. Имеем: $AA_2 || B_1C_1 || BC$ и $AA_2 = B_1C_1 = BC$. Следовательно, четырёхугольник $ABCA_2$ — параллелограмм и, более того, ромб, поскольку $BC = AB$. Точка O — центр этого ромба, поэтому BO — высота в треугольнике ABC.



а) б)

Рис. 200.

Обозначим $AB = a$, тогда $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BA_2 = a\sqrt{3}$. Учитывая, что $BB_1 = \frac{a}{\sqrt{5}}$, в треугольниках BB_1A и BB_1C_1 находим $AB_1 = BC_1 = a\sqrt{\frac{6}{5}}$. Отрезок A_2C_1 — образ отрезка AB_1 при параллельном переносе, поэтому $A_2C_1 = AB_1 = a\sqrt{\frac{6}{5}}$. Теперь из треугольника BC_1A_2 по теореме косинусов находим:

$$\cos\angle BC_1A_2 = \frac{BC_1^2 + C_1A_2^2 - BA_2^2}{2BC_1 \cdot C_1A_2} = -\frac{1}{4},$$

откуда $\angle BC_1A_2 = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Угол BC_1A_2 оказался тупым $\left(\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) < \pi\right)$, следовательно, угол между прямыми C_1B и C_1A_2 является дополнительным к этому углу, т.е. равен $\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = \pi - \left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

С3. Перепишем данное неравенство в виде $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств а) и б).

а) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} < x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1, \\ (x-1)(x-2) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 1; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1.$$

б) $$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ (x-1)(x-2) < 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

С4. На рисунках 201 показаны 2 конфигурации, которые необходимо рассмотреть (обе удовлетворяют условиям задачи). В первом случае угол ABM, обозначенный буквой α, тупой, во втором случае — нет. Будем рассматривать оба случая одновременно.

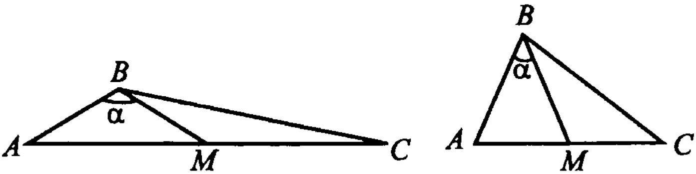


Рис. 201.

Площадь S_{ABC} треугольника ABC равна $15\sqrt{2}$ по условию. Тогда по свойству медианы площадь S_{ABM} треугольника ABM равна половине площади S_{ABC}, то есть равна $\frac{15\sqrt{2}}{2}$. Имеем:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2S_{ABM}}{AB \cdot BM} = \frac{3\sqrt{2}}{5{,}5} = \frac{6\sqrt{2}}{11} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\frac{7}{11}.$$

Тогда по теореме косинусов, применённой к треугольнику ABM, найдём:

1) $AM^2 = AB^2 + BM^2 + 2AB \cdot BM \cdot \frac{7}{11} = 30{,}25 + 25 + 35 = 90{,}25 \Rightarrow$
$AM = 9{,}5 \Rightarrow AC = 19;$

2) $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \frac{7}{11} = 30{,}25 + 25 - 35 = 20{,}25 \Rightarrow$ $AM = 4{,}5 \Rightarrow AC = 9$.

Ответ: 19 или 9.

С5. Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ при $D = b^2 - 4c \geqslant 0$ имеют вид:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Отсюда следует, что расстояние $d(x_1; x_2)$ между корнями вычисляется следующим образом:

$$d(x_1; x_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{b^2 - 4c}.$$

Теперь становится очевидным план действий: надо вычислить последнее выражение применительно к данному уравнению и найти его наименьшее значение по a. Имеем:

$D = b^2 - 4c = (a - 34)^2 + 4(35a + 36) = a^2 - 68a + 1156 + 140a + 144 =$
$= a^2 + 72a + 1300 = a^2 + 72a + 1296 + 4 = (a + 36)^2 + 4.$

Следовательно, уравнение имеет ровно 2 корня при всех значениях a.

$(a + 36)^2 + 4 \geqslant 4$ при всех значениях a, поэтому его наименьшее значение равно 4 при $a = -36$. Тогда наименьшее значение $\sqrt{(a + 36)^2 + 4}$ равно $\sqrt{4} = 2$.

Ответ: $a = -36$.

С6. Выразим из данного уравнения y через x:

$$y = -\frac{14x + 71}{3x + 17}.$$

Заметим при этом, что стоящая в знаменателе величина $3x + 17 \neq 0$, поскольку x — целое число.

Выделим из дроби в правой части последнего равенства правильную алгебраическую дробь (у которой степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе):

$$y = -\frac{4(3x + 17) + 2x + 3}{3x + 17} = -4 - \frac{2x + 3}{3x + 17}.$$

Умножая обе части полученного равенства на 3, получаем:

$$3y = -12 - \frac{6x + 9}{3x + 17} = -12 - 2 + \frac{25}{3x + 17} \quad \text{или} \quad 3y + 14 = \frac{25}{3x + 17}.$$

Поскольку числа $3y$ и 14 — целые, то число 25 делится нацело на $3x + 17$. Отсюда получаем 6 возможных значений для величины $3x + 17$: ± 1, ± 5, ± 25. Поэтому для x получаем три возможных целых значения: $x = -4$ (при $3x+17 = 5$), $x = -6$ (при $3x+17 = -1$), $x = -14$ (при $3x+17 = -25$).

В остальных трёх случаях x не является целым. Соответствующие значения y равны -3, -13, -5.

Ответ: $(-4; -3), (-6; -13), (-14; -5)$.

Решение варианта 28

B1. Конечная цена холодильника составляет 112%, то есть $\frac{112}{100}$ от первоначальной. Поэтому начальная цена была $14\,000 \cdot \frac{100}{112} = 12\,500$ рублей.

Ответ: 12 500.

B2. 8-го августа наибольшая температура была $30°C$, а наименьшая — $5°C$. Разность составляет $30 - 5 = 25°C$.

Ответ: 25.

B3. Обозначим через d диагональ $ABCD$ (см. рис. 202), $AB = a$. $S_{ABCD} = a^2$, $d = a\sqrt{2}$. $S_{ABCD} = \frac{d^2}{2}$.

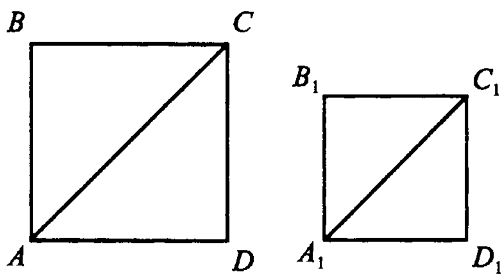


Рис. 202.

Используем условие: $AC = 10$, $A_1C_1 = 6$.

$$S_{ABCD} - S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{100}{2} - \frac{36}{2} = 32.$$

$32 = \frac{x^2}{2}$, где x — диагональ искомого квадрата.

$x^2 = 64$, $x = 8$.

Ответ: 8.

B4. Найдём скорости, с которыми мальчики загружают на компьютеры файлы, и определим среди них наибольшую: $\frac{46}{40}$, $\frac{66}{60}$, $\frac{27}{24}$. Наибольшей является скорость $\frac{46}{40}$, так как $\frac{66}{60} = \frac{44}{40}$, $\frac{27}{24} = \frac{45}{40}$. Для нахождения времени (в секундах), необходимого для загрузки файла размером 529 Мб, разделим 529 на $\frac{46}{40}$.

$529 : \frac{46}{40} = 529 : \frac{23}{20} = 460\,(\text{с})$.

Ответ: 460.

B5. ОДЗ: $\begin{cases} 7 - x \geqslant 0, \\ 5 - x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 7, \\ x \leqslant 5; \end{cases}$ $x \leqslant 5$.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{5-x} - 4 = 0, \\ \sqrt{7-x} - 2 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 5 - x = 16, \\ 7 - x = 4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -11, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Оба корня принадлежат области определения, бóльшим из них является число 3.

Ответ: 3.

B6. $P_{ABCD} = 68$, то есть $AD + AB = 34$.

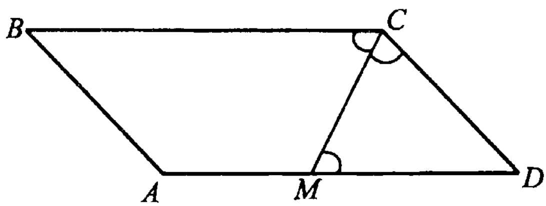


Рис. 203.

$\angle BCM = \angle CMD$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей CM (см. рис. 203).

$\triangle MCD$ равнобедренный, так как $\angle BCM = \angle CMD$, $\angle CMD = \angle MCD$ (CM — биссектриса $\angle BCD$ по условию). Отсюда $CD = MD$.

$AD + AB = 34$, $AB = CD$. Пусть $AD = 11x$, тогда $MD = CD = AB = 6x$.

$11x + 6x = 34$.

$x = 2$.

$AD = 11 \cdot 2$,

$AD = 22$.

Ответ: 22.

B7. $(2-\log_5 250)(2+\log_{10} 0{,}05) = (2-\log_5(25\cdot 10))\cdot\left(2+\log_{10}\frac{5}{100}\right) =$
$= (2-2-\log_5 10)(2+\log_{10} 5 - 2) = -\log_5 10\cdot\log_{10} 5 =$
$= -\log_5 10\cdot\frac{1}{\log_5 10} = -1.$

Ответ: -1.

B8. Согласно условию, прямая $y=-7x+3$ и парабола $y=ax^2+3x-2$ имеют единственную общую точку. Следовательно, эта точка является решением уравнения $-7x+3=ax^2+3x-2$; $ax^2+10x-5=0$. Так как точка единственная, то дискриминант $D=10^2-4\cdot(-5)\cdot a=0$. Отсюда $a=-5$.

Ответ: -5.

B9. $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC}\cdot h$, где h — высота призмы (см. рис. 204).

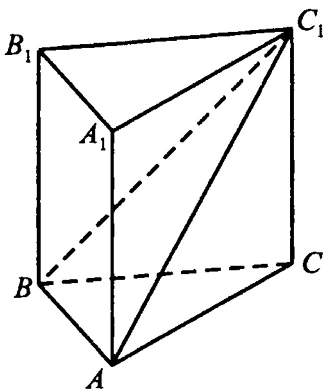


Рис. 204.

$V_{ABCC_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h.$

Объём оставшейся части равен

$V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{ABCC_1} = S_{\triangle ABC}\cdot h - \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12.$

Ответ: 12.

B10. Рассмотрим три события:

A — абитуриент сможет поступить на обе специальности;

B — абитуриент сможет поступить на специальность «Телевидение», но не сможет поступить на специальность «Архитектура»;

C — абитуриент сможет поступить на специальность «Архитектура», но не сможет поступить на специальность «Телевидение».

Очевидно, искомая вероятность равна
$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}168$.

$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}072$.

$P(C) = (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}112$.

$P(A+B+C) = 0{,}352$.

Ответ: 0,352.

B11. Пусть $\angle CAC_1 = 45°$, $\angle D_1AC_1 = 30°$, $\angle B_1AC_1 = 30°$. Тогда из прямоугольных треугольников CAC_1, D_1AC_1, B_1AC_1 соответственно получаем: $CC_1 = AC_1 \sin 45° = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$;

$D_1C_1 = AC_1 \sin 30° = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{2}$;

$B_1C_1 = AC_1 \sin 30° = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{2}$.

Искомый объём $V = CC_1 \cdot D_1C_1 \cdot B_1C_1 = 6 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 108$.

Ответ: 108.

B12. По условию $d_2 \leqslant 250$, $\frac{1}{d_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_2} \leqslant \frac{1}{50} - \frac{1}{250} = \frac{4}{250}$; $d_1 \geqslant \frac{250}{4}$; $d_1 \geqslant 62{,}5$. Наименьшее значение $d_1 = 62{,}5$ достигается при $d_2 = 250$.

Ответ: 62,5.

B13. Примем стоимость книг до 10 января за 1, а количество процентов, на которые они подешевели, за y.

Тогда получившаяся стоимость будет $1 - 0{,}01y$. Через несколько дней книги подорожали на то же число процентов от установившейся цены и стали стоить: $(1 - 0{,}01y) + (1 - 0{,}01y) \cdot 0{,}01y$. В результате цены стали на 0,25% меньше, чем до 10 января.

Составим уравнение и решим его:

$(1 - 0{,}01y) + (1 - 0{,}01y) \cdot 0{,}01y = 1 - 0{,}0025$,

$(1 - 0{,}01y)(1 + 0{,}01y) = 1 - 0{,}0025$,

$1 - 0{,}0001y^2 = 1 - 0{,}0025$,

$y^2 = 25$, $y = 5$.

Книги подешевели 10 января на 5%.

Ответ: 5.

B14. $y = \log_3(18 + 6x - x^2) + 4$.

$$y' = \frac{-2x + 6}{(-x^2 + 6x + 18)\ln 3} = \frac{2x - 6}{(x^2 - 6x - 18)\ln 3}, \quad y' = 0 \text{ при } x = 3.$$

$x^2 - 6x - 18 \neq 0$, $x \neq 3 \pm 3\sqrt{3}$, исходная функция определена при $x \in (3 - 3\sqrt{3}; 3 + 3\sqrt{3})$.

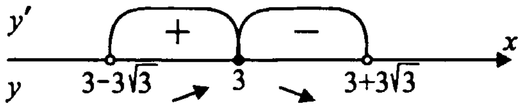


Рис. 205.

Наибольшее значение на интервале $(3-3\sqrt{3}; 3+3\sqrt{3})$ достигается при $x = 3$, $y(3) = 7$.

Ответ: 7.

C1. а) Рассмотрим цепочку равносильных преобразований:

$$\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right),$$

$$2\cos\frac{4\pi}{3} \cdot \sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow -\sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right),$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{2\pi}{3} \cdot \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0, \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Можно этот ответ записать в следующем виде: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

б) Из найденного множества решений лишь два значения $\left(\frac{\pi}{6}\right.$ при $n = 0$, $\frac{7\pi}{6}$ при $\left.n = 1\right)$ удовлетворяют заданным условиям $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ или $0 < x < \frac{9\pi}{6}$. При $n < 0$ $x < 0$; при $n \geqslant 2$ $x \geqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$.

C2. Поскольку $AC = BC$, то угол ACB прямой. Но тогда ребро AC перпендикулярно грани MBC по признаку перпендикулярности прямой и плоскости ($AC \perp MB$, $AC \perp BC$). Отсюда следует, что $AC \perp BK$ (см. рис. 206).

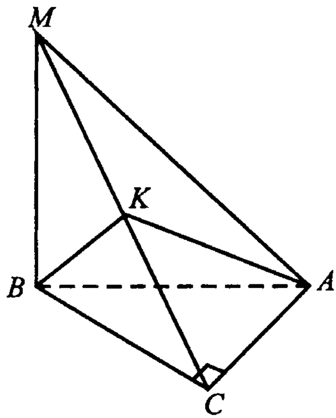


Рис. 206.

Так как в треугольнике MBC $MB = BC$, то BK не только медиана этого треугольника, но и высота ($BK \perp MC$). Поэтому ребро BK перпендикулярно плоскости грани MAC ($BK \perp AC$, $BK \perp MC$). Но тогда плоскость ABK, проходящая через прямую BK, также перпендикулярна плоскости MAC. Другими словами, искомый угол равен 90°.

Ответ: 90°.

C3. Преобразуем данное неравенство, записав его в равносильной форме:

$$\log_{x+3}((3-x)(3+x)) - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}|x-3| \geqslant 2.$$

Заметим, что $x+3>0$ и $(3-x)(3+x)>0$. Значит, $3-x>0$. Поэтому $|x-3| = 3-x$. Теперь получаем:

$$\log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x) \geqslant 2.$$

Произведём замену переменной: $\log_{x+3}(3-x) = y$. Имеем:

$$y - \frac{1}{4}y^2 \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 4y + 4 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2.$$

Таким образом, $\log_{x+3}(3-x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 3-x, \\ x+3>0, \\ x+3 \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+7x+6=0, \\ x>-3, \\ x\neq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-6, \end{array}\right. \\ x>-3, \\ x\neq -2; \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: $x=-1$.

С4. Проведём в данной трапеции диагональ AC и высоту CE (см. рис. 207). Нетрудно видеть, что катет AE прямоугольного треугольника ACE равен средней линии данной трапеции. Действительно, $AE = AD - \dfrac{AD-BC}{2} = \dfrac{AD+BC}{2}$. Отсюда следует, что площадь S трапеции равна $S = CE\cdot AE$.

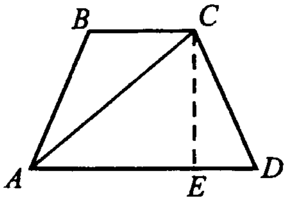


Рис. 207.

Введём для удобства обозначения: $CE = x$, $AE = y$. Тогда, учитывая условия задачи, получаем систему уравнений (из которой требуется найти x):

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12. \end{cases}$$

Выражая y из второго уравнения ($y = \dfrac{12}{x}$) и подставляя его в первое уравнение, получим после преобразований биквадратное уравнение относительно x: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$. Решая это уравнение, получаем, что $x^2 = 9$ или $x^2 = 16$, откуда следует, что высота $CE = 3$ или $CE = 4$.

Ответ: 3 или 4.

С5. Если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+bx-1=0$, то по теореме Виета $x_1+x_2=-b$, $x_1\cdot x_2 = -1$. Аналогично из второго уравнения получаем $(x_1+1)+(x_2+1) = b^2$ и $(x_1+1)(x_2+1) = -b$. Подставляя $x_1+x_2=-b$ и $x_1\cdot x_2=-1$ в два последних равенства, находим соотношения

$$-b = b^2-2 \text{ и } -1-b+1=-b.$$

Здесь второе равенство выполняется для любого b, а первое приводит к квадратному уравнению $b^2 + b - 2 = 0$, откуда $b = 1$ или $b = -2$.

Учитывая условие ($b < 0$), получаем, что $b = -2$, и первое квадратное уравнение в условии задачи приобретает вид $x^2 - 2x - 1 = 0$. Его корни: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $b = -2, x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

С6. Нужно найти все решения $(n; m)$ данного уравнения, где n — натуральное число, m — целое число.

Прежде всего попробуем подставить некоторые натуральные числа n и m в это уравнение для того, чтобы увидеть, что получится в левой и правой частях уравнения. Учитывая, что левая часть быстро растёт (с ростом n), будем действовать последовательно и начнём с $n = 1$:

$1! = 1 \;\Rightarrow\; n = 1, m = \pm 1$ — решения данного уравнения;

$1! + 2! = 3$ — решений в целых числах нет;

$1! + 2! + 3! = 9 \;\Rightarrow\; n = 3, m = \pm 3$ — решения данного уравнения;

$1! + 2! + 3! + 4! = 33$ — решений в целых числах нет;

$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$ — решений в целых числах нет.

Вычисляя далее, получаем: $6! = 720$, $7! = 5040$, ... Ясно, что начиная с некоторого n (а именно с $n = 5$), все факториалы $n!$ будут заканчиваться цифрой 0 (поскольку в произведении присутствуют множители 2 и 5). Это означает, что все суммы вида $1! + 2! + \ldots + n!$, начиная с $n = 4$, будут давать число, оканчивающееся цифрой 3. Но никакой квадрат целого числа не оканчивается цифрой 3. (Можно предположить противное: что существует x, такой, что x^2 заканчивается на 3. Переберём все возможные варианты последней цифры числа x и получим противоречие). Это означает, что данное уравнение не может иметь решений при $n \geqslant 4$, а решения уравнения при $n \leqslant 3$ уже найдены: если $n = 1$, то $m = \pm 1$, если $n = 3$, то $m = \pm 3$.

Ответ: $n = 3,\ m = \pm 3;\ n = 1,\ m = \pm 1$.

Решение варианта 29

В1. После удержания налога у студента останется $100\% - 13\% = 87\%$ гонорара, то есть $1200 \cdot \frac{87}{100} = 1044$ рубля. Так как $\frac{1044}{50} = 20{,}88$, то искомое наибольшее нечётное число тюльпанов равно 19.

Ответ: 19.

B2. По графику видно, что удельная теплоёмкость раствора составляет не более 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ C}$ при температуре от $10^\circ C$ до $80^\circ C$. Наибольшей температурой из этого диапазона является $80^\circ C$.

Ответ: 80.

B3. Обозначим через r радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, тогда сторона квадрата $AB = 2r$, $A'C' = 2r$, $A'B' = r\sqrt{2}$. Отсюда $S_{ABCD} = 4r^2$; $S_{A'B'C'D'} = 2r^2$.

$\frac{4r^2}{2r^2} = 2.$

Ответ: 2.

B4. Стоимость фундамента из пеноблоков: $7 \cdot 2900 + 3 \cdot 280 = 21\,140$ (руб.).

Стоимость бетонного фундамента: $6 \cdot 750 + 50 \cdot 280 = 18\,500$ (руб.).

То есть наиболее дешёвый вариант составит 18 500 (руб.).

Ответ: 18 500.

B5. $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\frac{\pi x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Разделим каждый член уравнения на π.

$\frac{x}{4} = (-1)^{k+1} \frac{1}{4} + k,\ k \in Z.$

Умножим каждый член уравнения на 4, получим $x = (-1)^{k+1} + 4k$, $k \in Z$. Наименьший положительный корень получим при $k = 1$. Это корень $x = (-1)^2 + 4 \cdot 1 = 1 + 4 = 5$.

Ответ: 5.

B6. Пусть $OM = \frac{BC}{2} = x$, $OH = \frac{AB}{2} = y$ (см. рис. 208), тогда

$$\begin{cases} 4x + 4y = 52, \\ x - y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13, \\ x - y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8{,}5, \\ y = 4{,}5. \end{cases} \quad AB = 2y = 9.$$

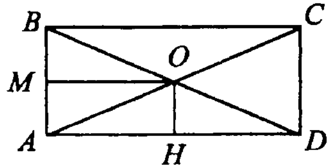


Рис. 208.

Ответ: 9.

B7. $g(a) = \left(2a + \frac{5}{a}\right)\left(5a + \frac{2}{a}\right)$; $g\left(\frac{1}{a}\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{a} + 5a\right)\left(5 \cdot \frac{1}{a} + 2a\right) = g(a)$, тогда $g(a) : g\left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

Ответ: 1.

B8. Согласно условию, прямая $y = -7x + 11$ и парабола $y = 2x^2 - 5x + c$ имеют единственную общую точку. Следовательно, абсцисса этой точки является единственным корнем уравнения $-7x + 11 = 2x^2 - 5x + c$; $2x^2 + 2x - 11 + c = 0$. Так как корень единственный, то дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c - 11) = 0$. Отсюда $c = 11{,}5$.

Ответ: 11,5.

B9. $\triangle AEE_1$ прямоугольный (см. рис. 209), $\angle E_1EA = 90°$.

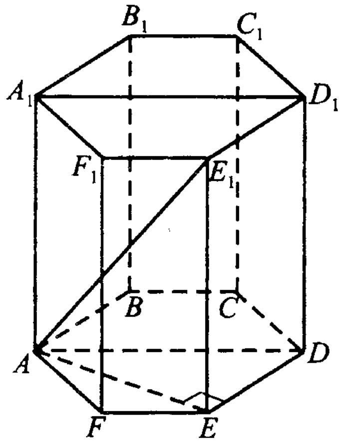


Рис. 209.

$AE_1^2 = AE^2 + EE_1^2$.

$EE_1 = 3$, AE найдём из $\triangle AED$: $\angle AED = 90°$;

$AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}$.

$AE_1^2 = 27 + 9 = 36$, $AE_1 = 6$.

Ответ: 6.

B10. Составим таблицу.

	12 мая	13 мая	14 мая
дождь	0,6	$0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}52$	
ясно	0,4	$1 - 0{,}52 = 0{,}48$	$0{,}48 \cdot 0{,}6 + 0{,}52 \cdot 0{,}4 = 0{,}496$

Искомая вероятность равна 0,496.

Ответ: 0,496.

B11. Из формулы $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ для радиуса окружности, описанной около правильного треугольника, выражаем сторону основания призмы: $a = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 9$. Периметр основания призмы равен $P = 3a = 3\cdot 9 = 27$. Площадь боковой поверхности равна $P\cdot h = 27\cdot 7 = 189$.

Ответ: 189.

B12. Лампочка будет гореть при условии $U \geqslant 15$; $30\cos(80t + 30) \geqslant 15$; $\cos(80t + 30) \geqslant 0{,}5$. На протяжении первой секунды величина $80t + 30$ меняется от 30° до 110°. На этом отрезке последнее неравенство выполняется при $80t + 30 \in [30; 60]$, то есть при $t \in [0; 0{,}375]$. Искомая часть времени равна $\frac{0{,}375 - 0}{1}\cdot 100\% = 37{,}5\%$.

Ответ: 37,5.

B13. Капитал «Омега-транс» каждый следующий год составлял $100\% + 100\% = 200\%$ от капитала предыдущего года, то есть в 2 раза больше. Капитал «Елена-плюс» каждый следующий год составлял $100\% + 300\% = 400\%$ от капитала предыдущего года, то есть в 4 раза больше. Через 5 лет капитал «Омега-транс» равнялся $10\,000\cdot 2^5 = 320\,000$ (долл.), а капитал «Елена-плюс» через 4 года — $5000\cdot 4^4 = 1\,280\,000$ (долл.).

$1\,280\,000 - 320\,000 = 960\,000$ (долл.).

Ответ: 960 000.

B14. $y' = \left(2\cos x - \frac{12}{\pi}x + 3\right)' = -2\sin x - \frac{12}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$. Наибольшим является значение

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 3 = 10.$$

Ответ: 10.

C1. $\sqrt{2 - 2\cos x} = 2\sin\frac{x}{2}$, $\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}$, $2|\sin\frac{x}{2}| = 2\sin\frac{x}{2}$,

$$1)\ \begin{cases} \sin\frac{x}{2} \geqslant 0, \\ 2\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}; \end{cases}$$

$\frac{x}{2} \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $x \in [4\pi n; 2\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$.

2) $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} < 0, \\ -2\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} < 0, \\ \sin\frac{x}{2} = 0; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: $[4\pi n; 2\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$.

С2. $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = 11$ (см. рис. 210), $CM = \frac{1}{2}SA = 5{,}5$ как медиана $\triangle SAC$, проведённая из вершины прямого угла.

$SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = 12$, $CP = 6$, $MP = \frac{1}{2}AB = 3$ как средняя линия.

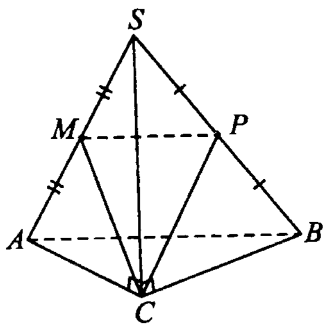


Рис. 210.

По формуле Герона:

$$p = \frac{CM + MP + CP}{2} = \frac{29}{4},$$

$$S_{CMP} = \sqrt{\frac{29}{4} \cdot \left(\frac{29}{4} - \frac{11}{2}\right) \cdot \left(\frac{29}{4} - 3\right) \cdot \left(\frac{29}{4} - 6\right)} = \frac{1}{16}\sqrt{17255}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{17255}}{16}$.

С3. Решаем первое неравенство: $\frac{(2-x)(x-3) - (1-2x)(x+1)}{x^2(x+1)(x-3)} \geqslant 0$,

$\frac{(x+7)(x-1)}{x^2(x+1)(x-3)} \geqslant 0$, $x \in (-\infty; -7] \cup (-1; 0) \cup (0; 1] \cup (3; +\infty)$.

Решаем второе неравенство:

1) $\begin{cases} (x-1)(3-x) \leqslant 0, \\ \log_2|x-1| > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \ \ x \geqslant 3, \\ |x-1| > 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x < 1, \ \ x \geqslant 3, \\ x < 0, \ \ x > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x \geqslant 3. \end{array} \right.$

2) $\begin{cases} (x-1)(3-x) \geqslant 0, \\ \log_2|x-1| < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ |x-1| < 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \leqslant 3, \\ 0 < x < 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$1 < x < 2$.

Решением второго неравенства является $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup [3; +\infty)$.

Находим x, удовлетворяющие обоим неравенствам (см. рис. 211):

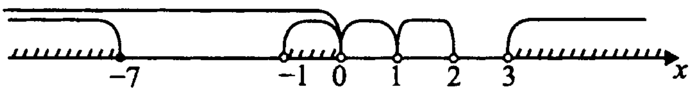


Рис. 211.

Ответ: $(-\infty; -7] \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

С4. Обозначим искомое расстояние через d (см. рис. 212).

$d = O_1O_2 = \dfrac{|13-r|}{\sin 30°}$. Получаем два случая: $r = 13 - \dfrac{d}{2}$ или $r = 13 + \dfrac{d}{2}$, где r — радиус второй окружности.

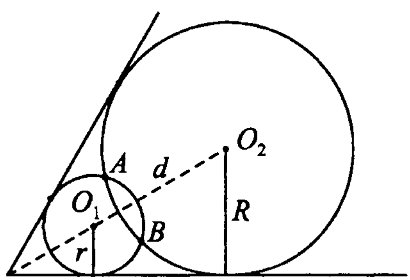


Рис. 212.

Рассмотрим четырёхугольник O_1AO_2B (см. рис. 213). В нём $AB \perp O_1O_2$, $AO = OB = 5$. Пусть $OO_1 = x$, тогда $OO_2 = d - x$.

По теореме Пифагора:

$OO_2^2 = AO_2^2 - AO^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow OO_2 = 12, \ \ d - x = 12,$ $x = d - 12$.

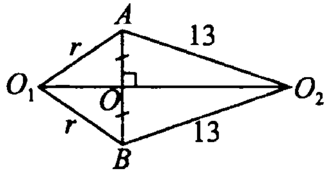


Рис. 213.

$$AO_1^2 = AO^2 + OO_1^2,\ \ r^2 = 25 + (d-12)^2,\ \ \left(13 - \frac{d}{2}\right)^2 = 25 + (d-12)^2$$

$\Rightarrow\ \ d = \dfrac{44}{3}.$

Если же $r = 13 + \dfrac{d}{2}$, то $\left(13 + \dfrac{d}{2}\right)^2 = 25 + (d-12)^2\ \ \Rightarrow\ \ d = \dfrac{148}{3}.$

Ответ: $\dfrac{44}{3}$ или $\dfrac{148}{3}$.

C5. $\log_{a^2-x^2}((ax)^2 - 1) = 1\ \ \Leftrightarrow\ \ \begin{cases} a^2 - x^2 > 0, \\ a^2 - x^2 \neq 1, \\ (ax)^2 - 1 > 0, \\ (ax)^2 - 1 = a^2 - x^2; \end{cases}\ \ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |x| < |a|, \\ x^2 \neq a^2 - 1, \\ a^2x^2 > 1, \\ (a^2+1)(x^2-1) = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения $x = \pm 1$, если $\begin{cases} 1 < |a|, \\ a^2 - 1 \neq 1, \\ a^2 > 1, \end{cases}$ то есть

$$\begin{cases} |a| > 1, \\ |a| \neq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

C6. $(3^m + 7) \equiv 1 \pmod 3\ \ \Rightarrow\ \ 2^n \equiv 1 \pmod 3\ \ \Rightarrow\ \ n = 2k.$

$3^m + 7 = 4^k,\ \ 4^k - 7 \equiv 1 \pmod 4\ \ \Rightarrow\ \ 3^m \equiv 1 \pmod 4\ \ \Rightarrow\ \ m = 2p.$

Итак: $3^{2p} + 7 = 2^{2k},\ \ 2^{2k} - 3^{2p} = 7,\ \ (2^k - 3^p)(2^k + 3^p) = 7\ \ \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2^k + 3^p = 7 \\ 2^k - 3^p = 1 \end{cases}\ \ \Rightarrow\ \ k = 2,\ \ p = 1.$$

Ответ: $m = 2,\ \ n = 4$.

Решение варианта 30

B1. Так как на счёт будет зачислено $100\% - 6\% = 94\%$ от внесённой суммы, то внести нужно не менее $500 \cdot \frac{100}{94} = 531\frac{86}{94}$ рублей. Так как внесённая сумма должна быть целой и кратной числу 10, то внести нужно минимум 540 рублей.

Ответ: 540.

B2. По графику видно, что крутящий момент был не менее 80 Н·м при оборотах в минуту от 2000 до 6000, а наименьшая скорость, с которой двигается автомобиль, будет $v = 0{,}045 \cdot 2000 = 90$ (км/ч).

Ответ: 90.

B3. $S_{AMCB} = \frac{AM + BC}{2} \cdot BK$ (см. рис. 214).

Известно, по условию $S_{ABCD} = 24$, то есть $AD \cdot BK = 24$.

$$S_{AMCB} = \frac{AM \cdot BK + BC \cdot BK}{2} = \frac{\frac{AD}{2} \cdot BK + AD \cdot BK}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} AD \cdot BK = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18.$$

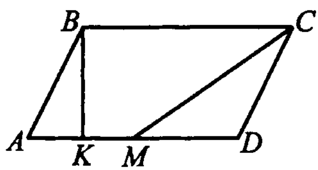


Рис. 214.

Ответ: 18.

B4. Сумма вклада в банке А составит $(20\,000 - 150) \cdot 1{,}04 = 20\,644$ (руб.),
в банке Б: $20\,000 \cdot 1{,}02 = 20\,400$ (руб.),
а в банке В: $(20\,000 - 12 \cdot 10) \cdot 1{,}03 = 20\,476{,}4$ (руб.),
то есть в банке А вклад окажется наибольшим и составит 20 644 рубля.

Ответ: 20 644.

B5. Воспользуемся формулой $\frac{\pi(x+4)}{3} = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

С помощью таблицы значений обратных тригонометрических функций находим $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, тогда $\frac{\pi(x+4)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Разделим каждый член уравнения на π: $\frac{x+4}{3} = \pm\frac{1}{3} + 2k$, $k \in Z$.

Умножим каждый член уравнения на 3, а потом вычтем из обеих частей уравнения 4, получим:
$x + 4 = \pm 1 + 6k$, $k \in Z$;
$x = \pm 1 - 4 + 6k$, $k \in Z$.
Наибольший отрицательный корень уравнения получаем при $k = 0$.
Это корень $x = 1 - 4 + 6 \cdot 0 = -3$.

Ответ: -3.

В6. Легко доказать, что $AONM$ — квадрат (см. рис. 215). Значит $\angle MON = 45°$.

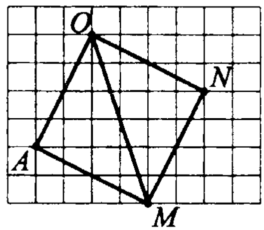


Рис. 215.

В ответе запишем $\cos\angle MON \cdot 3\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = 3$.

Ответ: 3.

В7. $f(3x+4) = \sqrt[5]{(3x+4)-8} + \sqrt[5]{3x+4} = \sqrt[5]{3x-4} + \sqrt[5]{3x+4}$;
$f(4-3x) = \sqrt[5]{(4-3x)-8} + \sqrt[5]{4-3x} = \sqrt[5]{-3x-4} + \sqrt[5]{4-3x} =$
$= -\sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x-4}$.
Тогда $f(3x+4)+f(4-3x) = \sqrt[5]{3x-4} + \sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x+4} - \sqrt[5]{3x-4} = 0$.

Ответ: 0.

В8. Согласно условию прямая $y = 6x + 5$ и парабола $y = 3x^2 + bx + 17$ имеют единственную общую точку. Следовательно, абсцисса этой точки является решением уравнения $6x + 5 = 3x^2 + bx + 17$; $3x^2 + (b-6)x + 12 = 0$. Так как уравнение имеет единственный корень, то дискриминант $D = (b-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$. Отсюда $b = -6$ или $b = 18$. При $b = -6$ абсцисса точки касания $x = \frac{-(-6-6)}{6} = 2$. При $b = 18$ абсцисса точки касания $x = \dfrac{-(18-6)}{6} = -2$. Учитывая, что по условию абсцисса точки касания меньше 0, получаем $b = 18$.

Ответ: 18.

B9. В основании призмы — квадрат (см. рис. 216), диагональ призмы (по условию) равна удвоенной стороне основания, для нахождения угла воспользуемся следующим:

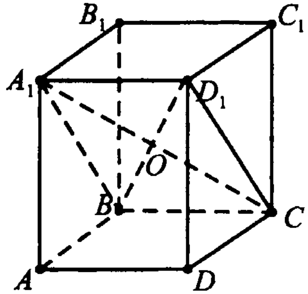


Рис. 216.

1) A_1D_1CB — параллелограмм, так как $A_1D_1 = BC$ и $A_1D_1 \parallel BC$.

2) A_1D_1CB — прямоугольник, так как $A_1D_1 \perp AA_1B_1$, следовательно, $A_1D_1 \perp A_1B$.

3) $A_1O = \frac{1}{2}A_1C = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}\cdot 2BC = BC = A_1D_1 = OD_1$. Значит, $\triangle A_1OD_1$ равносторонний, то есть $\angle A_1OD_1 = 60°$.

Ответ: 60.

B10. Рассмотрим события:

A — шоколадки закончатся в I-ом автомате, но останутся во II-ом;

B — шоколадки закончатся во II-ом автомате, но останутся в I-ом;

C — шоколадки закончатся в обоих автоматах.

По условию $P(C) = 0{,}18$. Очевидно, что $P(A) = 0{,}4 - 0{,}18 = 0{,}22$. Аналогично $P(B) = 0{,}4 - 0{,}18 = 0{,}22$. Вероятность того, что шоколадки закончатся хотя бы в одном автомате:

$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}22 + 0{,}22 + 0{,}18 = 0{,}62$.

Искомая вероятность равна $1 - 0{,}62 = 0{,}38$.

Ответ: 0,38.

B11. Так как высота у обеих пирамид общая, то их объёмы относятся так же, как площади их оснований. Обозначим сторону правильного шестиугольника $ABCDEF$ через a. Тогда $S_{ABCDEF} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$;

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2}a^2 \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Отсюда видно, что площадь шестиугольника в 6 раз больше площади треугольника ABC, поэтому объём шестиугольной пирамиды в 6 раз больше объёма треугольной пирамиды и равен $2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

B12. Лампочка будет гореть при условии $U \geqslant 5$; $10\sin(100t) \geqslant 5$; $\sin(100t) \geqslant 0{,}5$. На протяжении первой секунды $100t$ меняется от 0° до 100°. На этом отрезке последнее неравенство выполняется при $100t \in [30; 100]$, то есть при $t \in [0{,}3; 1]$. Искомая часть времени равна $\frac{1-0{,}3}{1} \cdot 100\% = 70\%$.

Ответ: 70.

B13. Весь путь 3270 км. Обозначим через x км расстояние, на которое каждый день увеличивается пройденный путь, во второй день грузовик проехал $(520 + x)$ км, в третий день — $(520 + 2x)$ км и т. д. За пять дней он проехал $(2600 + 10x)$ км, что равно 3270 км. Составляем уравнение и решаем его: $2600 + 10x = 3270$, $10x = 670$, $x = 67$. За третий день грузовой автомобиль проехал $520 + 2 \cdot 67 = 654$ (км).

Ответ: 654.

B14. $y' = 11\cos x - 13$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Значит, наименьшее значение $y(0) = 11\sin 0 - 13 \cdot 0 + 5 = 5$.

Ответ: 5.

C1. $\sqrt{2 + 2\cos x} = -2\cos\frac{x}{2}$, $\sqrt{4\cos^2\frac{x}{2}} = -2\cos\frac{x}{2}$,

$2\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -2\cos\frac{x}{2}$.

1) $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} > 0, \\ 2\cos\frac{x}{2} = -2\cos\frac{x}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} > 0, \\ \cos\frac{x}{2} = 0; \end{cases}$ решений нет.

2) $\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} \leqslant 0, \\ -2\cos\dfrac{x}{2} = -2\cos\dfrac{x}{2}; \end{cases}$

$\dfrac{x}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $x \in [\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$.

Ответ: $[\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$.

C2. $SA = SB = 5$, $AB = 3\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора (см. рис. 217)).

Тогда $\cos\angle SBC = \dfrac{CB}{SB} = \dfrac{3}{5} = \cos\angle SAC$. $BN = SM = 2$, $SN = AM = 3$.

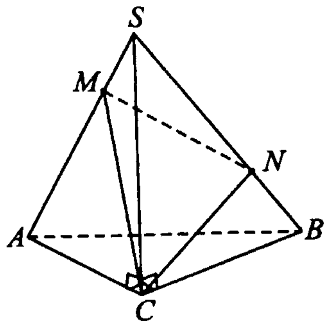


Рис. 217.

По теореме косинусов:

в $\triangle CNB$ $CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2 \cdot BC \cdot BN \cos\angle NBC$, $CN = \sqrt{\dfrac{29}{5}}$;

в $\triangle CMA$ $CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2 \cdot AC \cdot AM \cos\angle MAC$, $CM = \sqrt{\dfrac{36}{5}}$.

Из $\triangle ASB$ найдём $\cos\angle ASB$: $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2 \cdot SA \cdot SB \cos\angle ASB$ $\Rightarrow$ $\cos\angle ASB = \dfrac{16}{25}$.

По теореме косинусов из $\triangle MSN$:

$MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2 \cdot SM \cdot SN \cos\angle ASB \Rightarrow MN = \dfrac{\sqrt{133}}{5}$.

По теореме косинусов из $\triangle MNC$:

$MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2 \cdot CM \cdot CN \cdot \cos\angle MCN$,

$\frac{133}{25} = \frac{36}{5} + \frac{29}{5} - 2 \cdot \frac{\sqrt{29 \cdot 36}}{5} \cdot \cos\angle MCN$, $\cos\angle MCN = \frac{16\sqrt{29}}{145}$.

Ответ: $\frac{16\sqrt{29}}{145}$.

C3. Решаем первое неравенство:

$$\frac{x^2 - x + 1 - 2x - 2 - 1 + 2x}{x^3 + 1} \leqslant 0, \quad \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \leqslant 0,$$

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

Решаем второе неравенство:

1) $\begin{cases} (x-1)(x-2) \geqslant 0, \\ \lg(10^x - 1) > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \ x \geqslant 2, \\ 10^x - 1 > 1; \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x \leqslant 1, \ x \geqslant 2, \\ x > \lg 2; \end{cases} \Rightarrow x \in (\lg 2; 1] \cup [2; +\infty)$.

2) $\begin{cases} (x-1)(x-2) \leqslant 0 \\ \lg(10^x - 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 < 10^x - 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 < x < \lg 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ решений нет.

Находим x, удовлетворяющие обоим неравенствам (см. рис. 218):

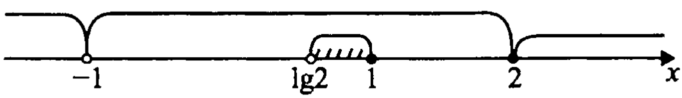


Рис. 218.

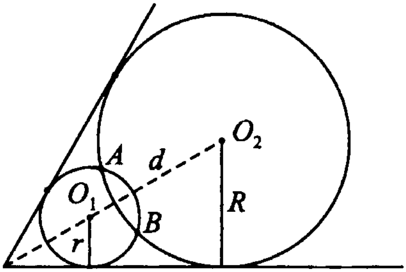
Ответ: $(\lg 2; 1] \cup \{2\}$.

C4. $12 = O_1O_2 = \frac{|10 - r|}{\sin 30^\circ}$ (см. рис. 219) $\Rightarrow$ $r = 4$ или $r = 16$. Пусть $x = OO_1$, $y = AO = OB = \frac{AB}{2}$. Тогда $\begin{cases} AO_2^2 = AO^2 + OO_2^2, \\ AO_1^2 = AO^2 + OO_1^2; \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y^2 + (12 - x)^2 = 100, \\ y^2 + x^2 = 16 \end{cases}$ или $\begin{cases} y^2 + (12 - x)^2 = 100, \\ y^2 + x^2 = 256. \end{cases}$

Решая системы, находим $AB = \sqrt{39}$ или $AB = \sqrt{399}$.

Ответ: $\sqrt{39}$ или $\sqrt{399}$.



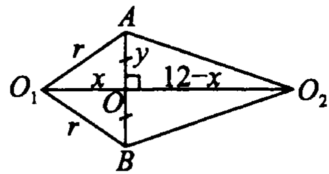


Рис. 219.

С5. ОДЗ: $\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \neq \sqrt{3}, \\ ax + 2 > 0. \end{cases}$

Уравнение преобразуем к виду: $ax+2 = \dfrac{1}{x-1}$. Решим его графически.

Из ОДЗ: $x \neq \sqrt{3} \;\Rightarrow\; a \neq \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим 3 случая.

1) $a = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{3}{2}$ — ровно одно решение.

2) $a > 0$.

Из рисунка 220а видно, что такие a подходят, так как значение абсциссы точки пересечения $x_0 \in \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \subset (1; 2)$, $x_0 \neq \sqrt{3}$, что удовлетворяет ОДЗ.

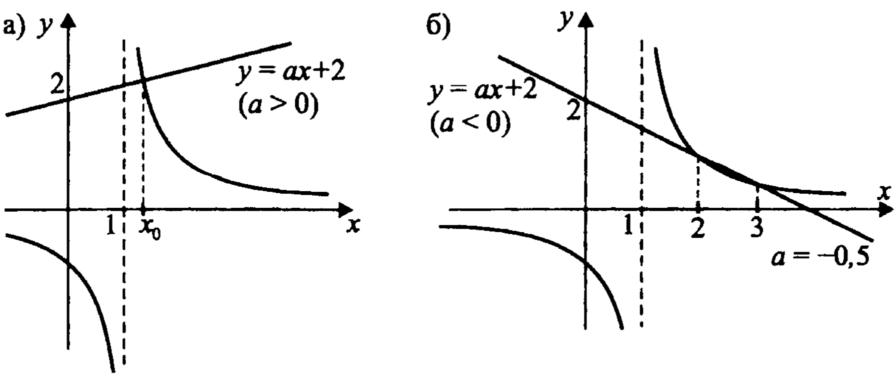


Рис. 220.

3) $a < 0$. Найдём, при каком a прямая $y = ax + 2$ пересекает гиперболу $y = \dfrac{1}{x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$ (см. рис. 220б):

$$y_0 = \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1 \;\Rightarrow\; y_0 = ax_0 + 2 \;\Rightarrow\; 1 = a \cdot 2 + 2 \;\Rightarrow$$
$$a = -\frac{1}{2}.$$

Если при $a \leqslant -\dfrac{1}{2}$ есть точки пересечения, то их абсциссы не принадлежат интервалу $(1; 2)$, что не удовлетворяет условию.

Если же $a > -\dfrac{1}{2}$, то только одна из абсцисс точек пересечения принадлежит промежутку $(1; 2)$, то есть исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

С6. $a = \dfrac{7b}{b-7} \;\Rightarrow\;$ $7b$ делится на $b-7$. Кроме того, $7b - 49$ тоже делится на $b-7$, значит $7b-(7b-49) = 49$ делится на $b-7$. Значит, $b-7$ — делитель 49, $b - 7 \in \{\pm 1, \pm 7, \pm 49\} \;\Rightarrow\; b \in \{-42, 0, 6, 8, 14, 56\}$, но $b \neq 0$ (из условия). Находим пары (a, b) по найденным значениям b: $(6, -42)$, $(-42, 6)$, $(56, 8)$, $(8, 56)$, $(14, 14)$.

Ответ: а) $(6, -42)$, $(-42, 6)$, $(56, 8)$, $(8, 56)$, $(14, 14)$.

Литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

2. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2013 года по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

3. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

4. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5 – 9 классы). Приказ Минобрнауки РФ № 1897 от 17.12.2010.

6. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. 2004 г. Приказ МО РФ от 05.03.04 № 1089.

7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ № 413 от 17.05.2012.

8. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Под редакцией *Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова*. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 400 с.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Авилов Николай Иванович, **Войта** Елена Александровна,
Дерезин Святослав Викторович, **Иванов** Сергей Олегович,
Казьмин Игорь Александрович, **Коннова** Елена Генриевна,
Корянов Анатолий Георгиевич, **Ольховая** Людмила Сергеевна,
Ольховой Алексей Федорович, **Прокофьев** Александр Александрович,
Резникова Нина Михайловна, **Саакян** Георгий Рубенович,
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК.
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Н. Коновалова*

Подписано в печать с оригинал-макета 31.07.2013.
Формат 60х84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14.

Доп . тираж 10 000. Заказ № 246.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО "Полиграфобъединение". 347900, г. Таганрог, ул. Лесная Биржа, 6 В.