

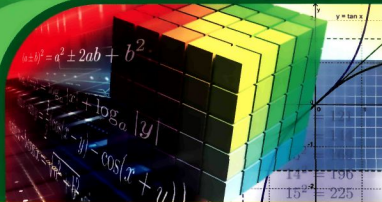
ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова



МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014



УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ–2014

Учебно-методическое пособие



ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *А. Н. Тернопол* — доцент кафедры естественно-математического образования ФГОУ АПК и ППРО, г. Москва;
О. Б. Кожевников — кандидат физико-математических наук, доцент;
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель РФ.

Авторский коллектив:

Авилов Н. И., Войта Е. А., Дерезин С. В., Иванов С. О., Казьмин И. А., Коннова Е. Г., Корянов А. Г., Ольховая Л. С., Ольховой А. Ф., Прокофьев А. А., Резникова Н. М., Саакян Г. Р., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014:** учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 400 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-9966-0377-0

Пособие содержит необходимый материал для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике:

- **30 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по спецификации ЕГЭ с учётом опыта экзамена 2013 года;
- **задачник** (около 1600 задач), предназначенный для детальной отработки разных видов тестовых заданий;
- **подробное решение** одного варианта;
- краткий теоретический **справочник**.

Книга позволит выпускникам и абитуриентам, не обращаясь к дополнительной литературе, получить на ЕГЭ желаемый результат — от минимального количества баллов, необходимого для сдачи экзамена, до максимально возможного, практически до 100 баллов.

Издание адресовано выпускникам общеобразовательных учреждений, учителям, методистам.

Пособие является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**, включающего такие книги, как «Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014», «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Теория вероятностей» и др.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0377-0

© ООО «Легион», 2013

Оглавление

От авторов	8
Краткий теоретический справочник	11
§ 1. Условные обозначения	11
§ 2. Степени и корни	12
§ 3. Модуль и его свойства	13
§ 4. Прогрессии	14
§ 5. Логарифмы	14
§ 6. Теория вероятностей	15
§ 7. Тригонометрия	16
§ 8. Многочлены и их корни	20
§ 9. Уравнения	24
§ 10. Неравенства	26
§ 11. Функции	28
§ 12. Планиметрия	41
§ 13. Стереометрия	54
Глава I. Учебно-тренировочные тесты	67
Вариант № 1	67
Вариант № 2	71
Вариант № 3	75
Вариант № 4	78
Вариант № 5	82
Вариант № 6	86
Вариант № 7	90
Вариант № 8	94
Вариант № 9	98
Вариант № 10	101
Вариант № 11	105
Вариант № 12	108
Вариант № 13	112

Вариант № 14	116
Вариант № 15	120
Вариант № 16	123
Вариант № 17	127
Вариант № 18	131
Вариант № 19	134
Вариант № 20	138
Вариант № 21	142
Вариант № 22	146
Вариант № 23	150
Вариант № 24	153
Вариант № 25	157
Вариант № 26	160
Вариант № 27	165
Вариант № 28	168
Вариант № 29	171
Вариант № 30	174
Решение варианта № 5	178

Глава II. Сборник задач для подготовки к ЕГЭ 186

Базовый уровень (часть В) 186

§ 1. Алгебра и начала анализа	186
1.1. Выражения и преобразования	186
1.1.1. Степень с рациональным показателем	186
1.1.2. Степени и корни	186
1.1.3. Логарифмические и показательные выражения	188
1.1.4. Тригонометрические выражения	189
1.1.5. Комбинированные выражения	191
1.2. Уравнения. Системы уравнений	191
1.2.1. Логарифмические и показательные уравнения	191
1.2.2. Тригонометрические уравнения	193
1.2.3. Рациональные уравнения	193
1.2.4. Иррациональные уравнения	194
1.3. Функции	195
1.3.1. Возрастание, убывание, экстремум функции (без нахождения производной)	195
1.3.2. График функции	197
1.3.3. Производная функции	211

1.3.4. Первообразная функции	238
§ 2. Арифметика и алгебра	239
2.1. Текстовые задачи	239
2.1.1. Проценты, сплавы, смеси	239
2.1.2. Движение	249
2.1.3. Работа, производительность	256
2.1.4. Разные задачи	261
§ 3. Геометрия	279
3.1. Планиметрия	279
3.1.1. Вписанная и описанная окружность, треугольник	279
3.1.2. Прямоугольный треугольник	281
3.1.3. Треугольник	281
3.1.4. Параллелограмм. Квадрат. Ромб	286
3.1.5. Трапеция	288
3.1.6. n-угольники	290
3.1.7. Окружность, касательная, секущая	290
3.1.8. Разные задачи	291
3.2. Стереометрия	301
3.2.1. Пирамида	301
3.2.2. Призма. Параллелепипед	303
3.2.3. Куб	307
3.2.4. Конус	307
3.2.5. Цилиндр	308
3.2.6. Комбинации тел	309
§ 4. Теория вероятностей и статистика	312
4.1. Теория вероятностей	312
4.1.1. Классическое определение вероятности	312
Повышенный уровень 1 (С1, С2)	318
§ 5. Алгебра и начала анализа (С1)	318
5.1. Уравнения. Системы уравнений	318
5.1.1. Логарифмические и показательные уравнения	318
5.1.2. Тригонометрические уравнения	318
5.1.3. Иррациональные уравнения	320
5.1.4. Комбинированные уравнения	320
§ 6. Геометрия (С2)	327
6.1. Стереометрия	327
6.1.1. Пирамида	327
6.1.2. Призма. Параллелепипед	329

6.1.3. Куб	332
6.1.4. Конус	332
6.1.5. Цилиндр	333
6.1.6. Шар	333
6.1.7. Комбинации тел	334

Повышенный уровень 2 (С3) 334

§ 7. Алгебра и начала анализа	334
7.1. Уравнения. Системы уравнений	334
7.1.1. Иррациональные уравнения	334
7.1.2. Комбинированные уравнения	334
7.2. Неравенства	334
7.2.1. Логарифмические и показательные неравенства	334
7.2.2. Рациональные неравенства	338
7.2.3. Иррациональные неравенства	338
7.2.4. Неравенства, содержащие модуль	339
7.2.5. Комбинированные неравенства	339

Повышенный уровень 3 (С4, С5) 341

§ 8. Алгебра и начала анализа (С5)	341
8.1. Уравнения. Системы уравнений	341
8.1.1. Логарифмические и показательные уравнения	341
8.1.2. Тригонометрические уравнения	341
8.1.3. Рациональные уравнения	341
8.1.4. Иррациональные уравнения	342
8.1.5. Уравнения, содержащие модуль	342
8.1.6. Комбинированные уравнения	343
8.2. Неравенства	351
8.2.1. Логарифмические и показательные неравенства	351
8.2.2. Рациональные неравенства	351
8.2.3. Иррациональные неравенства	351
8.2.4. Неравенства, содержащие модуль	351
8.2.5. Комбинированные неравенства	352
8.3. Функции	353
8.3.1. Область определения функции	353
8.3.2. Комбинированные задачи	353
§ 9. Арифметика и алгебра (С5)	354
9.1. Задачи на прогрессию	354
9.1.1. Арифметическая прогрессия	354

9.1.2. Геометрическая прогрессия	355
§ 10. Геометрия (С4)	355
10.1. Планиметрия	355
10.1.1. Вписанная и описанная окружность, треугольник	355
10.1.2. Треугольник	356
10.1.3. Параллелограмм. Квадрат. Ромб	358
10.1.4. Трапеция	359
10.1.5. n-угольники	363
10.1.6. Окружность, касательная, секущая	363
10.1.7. Вписанная и описанная окружность, четырёхугольник	365
Олимпиадные задачи (С6)	366
§ 11. Алгебра и начала анализа	366
11.1. Уравнения. Системы уравнений	366
11.1.1. Тригонометрические уравнения	366
11.1.2. Комбинированные уравнения	366
§ 12. Арифметика и алгебра	366
12.1. Текстовые задачи	366
12.1.1. Разные задачи	366
12.1.2. Десятичная запись числа	367
12.1.3. Делимость	369
Ответы к тестам	375
Ответы к сборнику задач	383
Литература	396

От авторов

Пособие содержит необходимый материал для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике:

- **30 новых авторских учебно-тренировочных тестов**, составленных по спецификации ЕГЭ с учётом опыта экзамена 2013 года;
- **задачник**, включающий около 1600 задач, иллюстрирующих основные идеи ЕГЭ прошлых лет, по всем разделам школьного курса математики (задачник чётко структурирован, что отражено в оглавлении);
- **краткий справочник** по элементарной математике, содержащий теоретический материал, достаточный для выполнения всех заданий данного пособия.

К одному из вариантов приведено полное **решение**, к остальным даны ответы. Одновременно с данной книгой издательство выпускает **решебник**, в котором представлены подробные решения всех остальных вариантов.

Отметим, что варианты тестовых заданий носят, как правило, «парный» характер, то есть являются попарно подобными (так, например, подобны 5-й и 6-й варианты, 7-й и 8-й и т. д.). Это удобно для учителя, так как оптимизирует процесс подготовки. Прорешав с учащимися в классе один из нечётных вариантов, целесообразно задать на дом следующий (чётный) вариант. Задания части С первых четырёх вариантов аналогичны предложенным на экзамене в 2013 году.

Уровень сложности и темы заданий с кратким ответом (часть В) соответствуют предлагаемым заданиям открытого банка¹, а задания с развёрнутым ответом (часть С) расположены по возрастанию уровня сложности (самые простые — первые варианты, самые сложные — последние).

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014.
- Математика. Решение задач. Подготовка к ЕГЭ-2014.
Пособие содержит решения всех вариантов тестовых заданий и всех задач из раздела «Задачник» книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014».

¹Доступен на сайте <http://mathege.ru>

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты. *Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ЕГЭ. Дополняет книгу «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014».*
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты. *Книга содержит решения всех тестовых заданий пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты».*
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Теория вероятностей. *Пособие охватывает все темы заданий по теории вероятностей из открытого банка и включает в себя описание различных методов решения этих заданий, а также тесты для самостоятельной работы.*
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014 (В1 – В6). Пособие для «чайников». *Пособие предназначено для подготовки к выполнению заданий базового уровня сложности В1 – В6 и включает в себя описание методов решения этих заданий и тесты для самостоятельной работы.*
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014 (В7 – В14). Пособие для «чайников». *Пособие предназначено для подготовки к выполнению заданий базового уровня сложности В7 – В14 и включает в себя описание методов решения этих заданий и тесты для самостоятельной работы.*
- Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2014 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы. *Пособие содержит задания С1, С3 по отдельным темам, являющимся традиционными в курсе математики. По каждой теме составлено 10 вариантов, один из них приводится с решением.*
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5. *Пособие позволяет осуществить подготовку к решению задач с параметром, начиная с простых и заканчивая уровнем заданий С5 ЕГЭ.*

- Математика. 11-й класс. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа.
Пособие содержит варианты самостоятельных и контрольных работ, а также поурочное планирование для второго полугодия 11-го класса.
- Математика. 10-й класс. Промежуточная аттестация в форме ЕГЭ.
*Пособие содержит **40 вариантов итоговых работ** для учащихся 10-х классов и может быть использовано как для промежуточной аттестации в 10-м классе, так и для подготовки к ЕГЭ.*
- Математика. 10 – 11 классы. Карманный справочник.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (С1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С2. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- Геометрия. 9 – 11 классы. Готовимся к ГИА-9 и ЕГЭ. Учимся решать задачи и повторяем теорию.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий части С. Решения и комментарии.

Авторы благодарят рецензентов за полезные замечания и пожелания, связанные с данным изданием. Замечания и пожелания просим направлять по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550, тел. (863) 303-05-50, 248-14-03, e-mail: legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособия, задать вопросы можно на официальном форуме издательства <http://forum.legionr.ru>.

Следите за дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства <http://legionr.ru> в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ (доступ к материалам свободный).

В 2007–2008 годах Экспертным советом Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) изданиям «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2008» и «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2009» были присвоены грифы «Допущено к использованию в образовательных учреждениях Российской Федерации в качестве учебного пособия». С 2009 года допуск учебных пособий к использованию в образовательном процессе осуществляет Минобрнауки РФ. Издательство «Легион» Приказом Минобрнауки РФ № 729 от 14.12.2009 г. включено в перечень организаций, осуществляющих издание пособий для учащихся.

Краткий теоретический справочник

Предлагаемый справочник содержит основные результаты и формулы, предусмотренные программой 2002 года для общеобразовательных учреждений. В основу отбора материала положен курс B , по которому разрабатывались КИМы 2002 – 2013 годов. Однако, как при подготовке к ЕГЭ, так и при его сдаче, учащимся понадобятся сведения, которые требуют значительных усилий при их доказательстве, выводе, исследовании. Они не входят в нормативные рамки курса B , но большинство из них включено в курс углубленного изучения математики и отмечено звёздочкой (*).

§ 1. Условные обозначения

При изложении теоретического материала, содержащегося в этой главе, мы будем пользоваться следующими общепринятыми математическими обозначениями.

N — множество всех натуральных чисел.

N_0 — множество всех неотрицательных целых чисел.

Z — множество всех целых чисел.

Q — множество всех рациональных чисел.

R — множество всех действительных (вещественных) чисел.

R^+ — множество всех положительных действительных чисел.

\Rightarrow — следует.

\Leftrightarrow — равносильно; эквивалентно; тогда и только тогда.

$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно.

$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.

$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$.

const — постоянная величина.

\in — принадлежит, содержится; например:

$x \in R$ — x принадлежит множеству действительных чисел, то есть x является действительным числом.

$n : m$ (для $n, m \in Z$) — число n делится нацело на число m .

§ 2. Степени и корни

Определение степени и корня

1. Пусть $a \in R, n \in N$. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}}$$

$$a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad \text{если } a \neq 0;$$

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \quad \text{если } a \neq 0;$$

0^0 не определено;

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ и } b \geq 0 \text{ при } n \text{ чётном};$$

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} b \Leftrightarrow b^n = a \text{ при } n \text{ нечётном.}$$

2. Пусть $a \in R^+, m \in Z, n \in N, n > 1$. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Правила действий с радикалами

Пусть $m, n, k \in N, m, n > 1; a, b \in R^+$. Тогда

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = m\sqrt[n]{a};$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Правила действий со степенями

Пусть $p, q \in Q, a, b \in R^+$. Тогда

$$a^p a^q = a^{p+q};$$

$$(a^p)^q = a^{pq};$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};$$

$$(ab)^p = a^p b^p.$$

Не приводя определения степени с действительным показателем, отметим, что правила действий с такими степенями «сохраняются», то есть приведённые правила верны и для $p, q \in R$.

Формулы сокращённого умножения

Пусть $a, b \in R$. Тогда

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Таблица квадратов

$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$	$26^2 = 676$
$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$	$27^2 = 729$
$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$	$28^2 = 784$
$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$	$29^2 = 841$
$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$	$30^2 = 900$

§ 3. Модуль и его свойства

1. Определение модуля числа.

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad |x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Геометрически $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до начала отсчёта — точки O .

3. $|x - a|$ есть расстояние между точками x и a числовой оси.

4. Модуль произведения, частного и степени.

$$|xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0; \quad *|x^n| = |x|^n, \quad n \in Z, \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ n > 0. \end{cases}$$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 4. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

1. Если a_n есть n -й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$a_{n+1} = a_n + d, a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2*. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

1. Если b_n есть n -й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$b_{n+1} = b_n q, b_1 \neq 0, q \neq 0; \quad b_n = b_1 q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2*. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

§ 5. Логарифмы

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа x по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени y , в которую нужно возвести a , чтобы получить число x : $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$.

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ для } x > 0.$$

2. Логарифм произведения, частного и степени:

$$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|, xy > 0;$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0;$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0;$$

$$\log_a x^k = k \log_a |x|, k \text{ — чётное целое.}$$

3. Формула перехода к новому основанию. Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Тогда

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ в частности } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \text{ при } x \neq 1.$$

Кроме того, $\log_a x \log_b y = \log_a y \log_b x$.

4. Пусть $b > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, тогда

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b, p \neq 0;$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_{|a|} b, k \neq 0, k \text{ — чётное целое.}$$

5*. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

При решении задач бывает полезна следующая теорема.

Если числа a и b на числовой оси расположены по одну сторону от единицы, то $\log_a b > 0$, а если по разные, то $\log_a b < 0$.

§ 6. Теория вероятностей**Классическое определение вероятности**

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для A исходов к числу всех равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных исходов, m — число исходов, благоприятствующих событию A .

Противоположные события

Событие, противоположное событию A , обозначают \bar{A} . При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Объединение несовместных событий

Два события A и B называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A , так и событию B .

Событие C называют объединением событий A и B (пишут $C = A \cup B$), если событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B .

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пересечение независимых событий

Два события A и B называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого события.

Событие C называют пересечением событий A и B (пишут $C = A \cap B$), если событие C означает, что произошли оба события A и B .

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

§ 7. Тригонометрия**Радианное измерение углов**

Один радиан равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0,017453 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Основные тригонометрические тождества

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1; & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x &= 1; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y; \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y; \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}. \end{aligned}$$

Формулы двойного и тройного аргументов

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1; \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x; \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}; \\ * \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; & * \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; & * \operatorname{tg} 3x &= \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Если $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, то

$$* \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad * \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{y - x}{2};$$

$$* \sin x + \cos y = 2 \sin \left(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$* \sin x - \cos y = 2 \sin \left(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$* \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, а φ определяется из формулы $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(x - \alpha)$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, а α определяется из формулы $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y));$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y));$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y)).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ и } 0 \leq y \leq \pi;$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \arctg x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \text{ и } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y \text{ и } 0 < y < \pi.$$

***Свойства обратных тригонометрических функций**

$$D(\arcsin x) = [-1; 1]; E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$D(\arccos x) = [-1; 1]; E(\arccos x) = [0; \pi];$$

$$D(\arctg x) = R; E(\arctg x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$D(\operatorname{arcctg} x) = R; E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi);$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\arctg(-x) = -\arctg x; \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ если } x \in [-1; 1];$$

$$\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ если } x \in [-1; 1];$$

$$\arcsin(\sin x) = x_0, \text{ где } x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin x_0 = \sin x;$$

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ если } x \in [-1; 1];$$

$$\arccos(\cos x) = x_0, \text{ где } x_0 \in [0; \pi] \text{ и } \cos x_0 = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(\arctg x) = x, \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$

$$\arctg(\operatorname{tg} x) = x_0, \text{ где } x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x_0, \text{ где } x_0 \in (0; \pi) \text{ и } \operatorname{ctg} x_0 = \operatorname{ctg} x.$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}; \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$\sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a; \quad |a| \leq 1; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0; \quad x = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a; \quad |a| \leq 1; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1; \quad x = 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

§ 8. Многочлены и их корни

Определение многочлена

Многочленом степени n ($n \in \mathbb{N}_0$) называется всякое выражение вида

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$.

Всякое вещественное число, отличное от нуля, принято трактовать как многочлен нулевой степени. Числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена, a_n — старший коэффициент, a_0 — свободный член.

Число x_0 называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен степени 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если x_1, x_2 — корни $f(x)$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{Теорема Виета}).$$

Если второй коэффициент делится на 2, то есть

$$f(x) = ax^2 + 2kx + c, \quad \text{то } x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Если старший коэффициент равен 1, то есть $f(x) = x^2 + px + q$,

$$\text{то } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом соответствующего многочлена $f(x)$ (уравнения $f(x) = 0$). Дискриминант принято обозначать большой буквой D . Отметим, что $D = 0 \Leftrightarrow k^2 - ac = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$.

*Теорема Безу и схема Горнера

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдётся такой многочлен степени $n - 1$

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0) q(x) + f(x_0) \quad (\text{Теорема Безу}),$$

причём коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \quad b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1}, \\ b_{n-3} &= x_0 b_{n-2} + a_{n-2}, \dots, \quad b_{i-1} = x_0 b_i + a_i, \dots \\ \dots, \quad b_1 &= x_0 b_2 + a_2, \quad b_0 = x_0 b_1 + a_1, \quad f(x_0) = x_0 b_0 + a_0. \end{aligned}$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу (**схема Горнера**).

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_{i+1}	a_i	\dots	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_i	b_{i-1}	\dots	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)q(x) \quad (\text{следствие из теоремы Безу}).$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$.

Приведём еще одну теорему о многочленах и следствие из неё, касающееся рациональных корней многочлена.

Теорема. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь (рациональное число) p/q является корнем многочлена $f(x)$, то

$$1) a_n \div q;$$

$$2) a_0 \div p.$$

Следствие. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда все рациональные корни многочлена $f(x)$ являются целыми и являются делителями свободного члена a_0 .

Эти теоремы будут очень полезными при выполнении некоторых заданий части В и части С, их использование существенно экономит время решения.

Пример 1. Найдите целые корни уравнения $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решение. По следствию целые корни находятся среди делителей свободного члена: ± 1 ; ± 2 . Проверяем по схеме Горнера каждое из этих чисел.

	1	3	1	-3	-2	
1	1	4	5	2	0	корень
1	1	5	10	12		не корень (не кратный корень)
-1	1	3	2	0		корень
-1	1	2	0			корень (кратности 2)

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 1)^2(x + 2).$$

Данное уравнение имеет 3 корня: 1; -1; -2, причём -1 — корень кратности 2.

Пример 2. Решите уравнение $6x^4 + 17x^3 + 20x^2 + 14x + 3 = 0$.

Решение. По теореме все рациональные корни уравнения находятся среди чисел $\frac{p}{q}$, где $6 : q$, $3 : p$.

Делители 3: ± 1 ; ± 3 .

Делители 6: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6 .

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1 ; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{3}$; $\pm \frac{1}{6}$; ± 3 ; $\pm \frac{3}{2}$.

Видим, что корнями могут быть лишь отрицательные числа. Поэтому проверяем числа -1 ; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$; -3 ; $-\frac{3}{2}$.

	6	17	20	14	3	
-1	6	11	9	5	-2	не корень
$-\frac{1}{2}$	6	14	13	$\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{4}$	не корень
$-\frac{1}{3}$	6	15	15	9	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $(x + \frac{1}{3})(6x^3 + 15x^2 + 15x + 9) = 0$.

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = 0.$$

Делители 3: ± 1 ; ± 3 .

Делители 2: ± 1 ; ± 2 .

Числа вида $\frac{p}{q}$: ± 1 ; $\pm \frac{1}{2}$; ± 3 ; $\pm \frac{3}{2}$.

Корнями могут быть лишь отрицательные числа, причём -1 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями (проверили выше).

Проверяем числа -3 ; $-\frac{3}{2}$.

	2	5	5	3	
-3	2	-1	8	-21	не корень
$-\frac{3}{2}$	2	2	2	0	корень

Данное уравнение эквивалентно $\left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2) = 0$, $x_2 = -\frac{3}{2}$,
 $x^2 + x + 1 = 0$ — корней нет.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

§ 9. Уравнения

Уравнения с одним неизвестным

Напомним, что в соответствии с [1], *уравнением* называется равенство, содержащее неизвестное, обозначаемое буквой. Пользуясь понятием функции, можно сказать, что *уравнение* (с одним неизвестным) — это пара функций от одной и той же переменной x , соединённых знаком равенства:

$$f(x) = g(x).$$

Областью допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения называется пересечение области определения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$D(f) \cap D(g).$$

Число a называется *корнем (или решением)* данного уравнения, если при подстановке в уравнение вместо каждого вхождения x числа a уравнение обращается в верное числовое равенство: $f(a) = g(a)$.

Существуют эквивалентные определения корня уравнения, в которых требуется принадлежность числа a ОДЗ исходного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что данное уравнение корней не имеет. Отметим, что если мы нашли подбором какие-то корни уравнения и доказали, что других корней у данного уравнения быть не может, то тем самым мы уравнение решили.

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. Уравнение A является *следствием* уравнения B , если все корни уравнения B являются корнями уравнения A (но, быть может, среди корней уравнения A есть такие, которые не являются корнями B).

Преобразование уравнения называется *равносильным*, если преобразуемое уравнение равносильно исходному.

1. Если при решении уравнения вы производили лишь равносильные преобразования, то для найденных корней нет нужды делать проверку.

2. Если вы нашли ОДЗ и в пределах ОДЗ производили равносильные преобразования уравнения, то проверку также делать не нужно, но необходимо выяснить, входят ли найденные корни в ОДЗ.

3. Если не все преобразования были равносильными, но каждое уравнение было следствием предыдущего, то необходимо сделать проверку.

Отметим, что очень часто находить ОДЗ нецелесообразно, если экономнее (по времени) найти «корни» (среди которых, быть может, есть лишние) и сделать проверку.

Всё сказанное в отношении проверки справедливо с чисто математической точки зрения. То есть, если все ваши преобразования были равносильны, то приводить в конце решения проверку нет необходимости. И в этом случае (при наличии соответствующей оговорки) ваше решение будет смотреться более грамотным с точки зрения математики.

Но совсем иное дело, если речь идёт о самоконтроле. Здесь мы рекомендуем делать в некоторых случаях не одну, а несколько проверок.

*Полезные неравенства

Отметим, что при решении уравнений (и неравенств) иногда бывают полезны следующие неравенства, истинные для $a \geq 0, b \geq 0$:

$$a \leq \frac{a^2 + 1}{2}; \quad \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}; \quad \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Равенства достигаются при $a = b$ (в первом случае при $a = 1$).

Полезны также некоторые их следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ при } a > 0; \quad a + \frac{1}{a} \leq -2 \text{ при } a < 0.$$

Равенства достигаются при $a = 1$ в первом случае и при $a = -1$ во втором.

Системы уравнений с двумя неизвестными

Уравнением с двумя неизвестными x и y называется пара функций от двух переменных (x и y), соединённых знаком равенства:

$$f(x, y) = g(x, y).$$

Решением такого уравнения называется всякая пара чисел (x_0, y_0) , подстановка которых в уравнение вместо соответствующих неизвестных обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Системой двух уравнений с двумя неизвестными называется пара уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y), \\ h(x, y) = t(x, y). \end{cases}$$

Решением системы называется всякая пара чисел (x_0, y_0) , являющаяся решением и первого, и второго уравнений системы.

Решить систему — это значит найти все её решения или доказать, что система решений не имеет.

Системы линейных уравнений

Пусть дана система
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

1. Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. Система имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \\ b_1c_2 - b_2c_1 = 0. \end{cases}$$

3. Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ или $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$.

§ 10. Неравенства

Неравенства и системы неравенств

Неравенством с одним неизвестным называется пара функций от одной и той же переменной, соединённая одним из знаков: $>$, \geq , $<$, \leq , \neq .

Решением неравенства (системы неравенств) называется всякое действительное число, подстановка которого в неравенство (каждое неравенство системы) вместо каждого вхождения неизвестного (переменной) обращает это неравенство (все неравенства системы) в верное числовое неравенство (верные числовые неравенства).

Решить неравенство (систему неравенств) значит найти множество всех решений этого неравенства (этой системы неравенств) или доказать, что оно (она) решений не имеет. Два неравенства (две системы неравенств) называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Соответственно, преобразования неравенства называются *равносильными*, если при этих преобразованиях множество решений полученного неравенства совпадает с множеством решений исходного неравенства.

Отметим, что проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходные неравенства в подавляющем большинстве случаев невозможна. Поэтому при решении неравенств (систем неравенств) нужно пользоваться равносильными преобразованиями (равно-

сильными преобразованиями в рамках ОДЗ). Нахождение ОДЗ не обязательно, если вы пользуетесь исключительно равносильными преобразованиями. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

1. ОДЗ в виде неравенства или системы неравенств присоединяют к данному неравенству (данной системе) и полученную систему решают.
2. Находят ОДЗ. Решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными преобразованиями в рамках ОДЗ. Из полученных решений удаляют те, которые не входят в ОДЗ.

Объединение неравенств

Отметим также, что очень часто решениями данного неравенства (системы неравенств) является объединение решений двух или более неравенств (систем неравенств). В таких случаях мы будем употреблять запись вида

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ h(x) < u(x). \end{array} \right.$$

Эту запись будем называть *объединением* неравенств. Решением объединения двух неравенств является всякое число, являющееся решением хотя бы одного из двух неравенств объединения. Иначе говоря, для решения объединения нужно найти множества всех решений первого и второго неравенств и найденные множества объединить.

Рациональные неравенства

Рациональным называется всякое неравенство, сводящееся к неравенству вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или вида $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Поскольку $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0, \end{cases}$$

то для решения рациональных неравенств удобно применять метод интервалов.

Пример. Решите неравенство $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \frac{6x - 9}{x + 1} \leq 1$.

Решение. $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3} + \frac{6x - 9}{x + 1} - 1 \leq 0$,

$$\frac{(x^2 - 7x + 10)(x + 1) + (6x - 9)(x - 3) - (x - 3) \cdot (x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} \leq 0,$$

$\frac{x^3 - x^2 - 22x + 40}{(x - 3) \cdot (x + 1)} \leq 0$. Числитель последней дроби разложим на множители. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 22x + 40$; разделив данный многочлен (уголком или по схеме Горнера) на $x - 2$, получаем $x^3 - x^2 - 22x + 40 = (x - 2) \cdot (x^2 + x - 20) = (x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5)$. Значит, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x + 1) \leq 0, \\ (x - 3) \cdot (x + 1) \neq 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы методом интервалов (см. рис. 1) и выкалывая точки $x = -1$, $x = 3$, получаем ответ

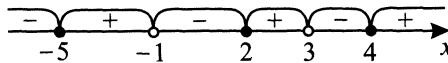


Рис. 1.

$$x \in (-\infty; -5] \cup (-1; 2] \cup (3; 4].$$

§ 11. Функции

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x , для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, рассматривается функция $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. В данном случае $D(y) = [0; \pi]$, так как данной фразой функция $y = \sin x$ определена лишь на отрезке $[0; \pi]$. Если же рассматривается функция $y = \sin x$ без каких-либо оговорок, то это означает, что $D(y) = R$. В этом случае говорят также, что функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой. С другой стороны, пусть рассматривается

функция $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$. В данной фразе также нет каких-либо оговорок от-

носительно того, на каком числовом промежутке рассматривается функция. Вместе с тем мы видим, что эта функция не определена для $x < 1$, так как при $x < 1$ под корнем будет отрицательное число. Эта функция также не определена при $x = \pm 2$, так как при $x = \pm 2$ знаменатель обращается в нуль. Таким образом, для данной функции $D(y) = [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Напомним области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R .

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \quad D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0; +\infty).$$

$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R. \quad D(\log_a x) = (0; +\infty).$$

$$D(\sin x) = D(\cos x) = R. \quad D(a^x) = R.$$

$$*D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1; 1].$$

$$*D(\arctg x) = D(\operatorname{arcctg} x) = R.$$

$$D(\operatorname{tg} x) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right), \quad k \in Z.$$

Или $D(\operatorname{tg} x) : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

$$D(\operatorname{ctg} x) = (2\pi k; \pi + 2\pi k) \cup (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), \quad k \in Z.$$

Или $D(\operatorname{ctg} x) : x \neq \pi k, \quad k \in Z.$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0 , для каждого из которых найдётся такое число x_0 , что $f(x_0) = y_0$.

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m; +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty; n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R .

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \quad E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0; +\infty).$$

$$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R. \quad E(a^x) = (0; +\infty).$$

$$E(\log_a x) = R. \quad E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1].$$

$$*E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \quad *E(\arccos x) = [0; \pi].$$

$$E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R. \quad *E(\arctg x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$*E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).$$

Отметим, что задания на нахождение множества значений какой-то функции решаются преимущественно двумя методами: аналитическим и алгебраическим.

Приведём одно *замечание*. Предположим, что функция $f(x)$ является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» $t = t(x)$.

Тогда $y = f(t) = f(t(x))$. Отметим, что неважно, какой является функция $t = t(x)$ (возрастающей, возрастающе-убывающей и т. д.). Если нам известна её область значений $E(t)$, то при нахождении области значений функции $y = f(t) = f(t(x))$ целесообразно считать, что t возрастает на $E(t)$ как какой-то новый аргумент. В соответствии с этим функцию $y = f(t)$ целесообразно считать такой, каковой она является от аргумента t на промежутке $E(t)$. Например, пусть нам дана функция $y = 2 \cos x + 1$. Вводим новую переменную $t(x) = \cos x$. Понятно, что $E(t) = [-1; 1]$. Тогда функцию $y(t) = 2t + 1$ целесообразно считать линейной на промежутке $[-1; 1]$. Это никак не повлияет на нахождение $E(y)$, но, напротив, облегчит нам эту процедуру. Находим $E(y)$. Функция $y(t) = 2t + 1$ на промежутке $[-1; 1]$ является линейной и возрастающей, поэтому $E(y) = [2(-1) + 1; 2 \cdot 1 + 1] = [-1; 3]$.

При решении задач аналитическим методом будем пользоваться следующими фактами.

1. Пусть $f(x)$ — какая-то функция и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, где a — какое-то число или $a = +\infty$, или $a = -\infty$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$, причём при значениях x , достаточно близких к a , величина $\frac{1}{f(x)}$ будет достаточно близкой к нулю, но вместе с тем больше нуля. В этом случае мы будем говорить, что величина $\frac{1}{f(x)}$ стремится к нулю справа при x , стремящемся к a : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +0$. В этом смысле будем употреблять запись $\frac{1}{+\infty} = +0$.

2. В аналогичном смысле будем употреблять также запись вида $\frac{1}{-\infty} = -0$.

3. Пусть теперь $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, причём при всех x , достаточно близких к a , функция $f(x) > 0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Этот факт мы будем записывать иногда в виде $\frac{1}{+0} = +\infty$.

4. В подобном же смысле мы будем употреблять запись $\frac{1}{-0} = -\infty$.

5. Ниже мы приводим записи, которые будем в дальнейшем использовать, но понимать эти записи следует не в буквальном смысле. Фактический смысл этих записей вам предлагается привести самим.

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 1, \\ +0 & \text{при } 0 < a < 1; \end{cases} \quad a^{-\infty} = \begin{cases} +0 & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\log_a(+0) = \begin{cases} -\infty & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } 0 < a < 1; \end{cases} \quad \log_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{при } a > 1, \\ -\infty & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy .

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 2 – 7 изображены графики основных элементарных функций.

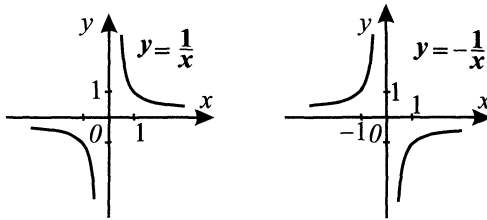


Рис. 2.

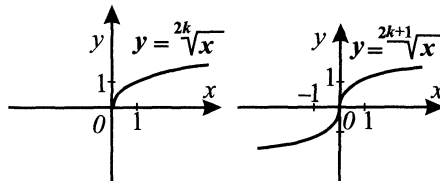


Рис. 3.

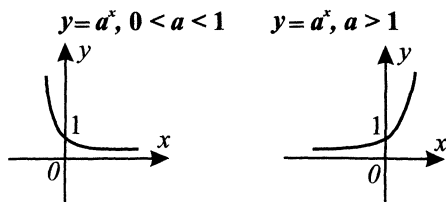


Рис. 4.

$y = \log_a x, 0 < a < 1$ $y = \log_a x, a > 1$

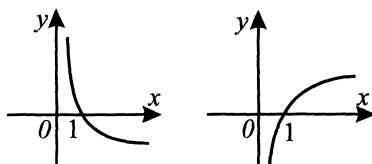


Рис. 5.

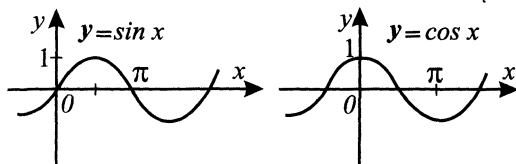


Рис. 6.

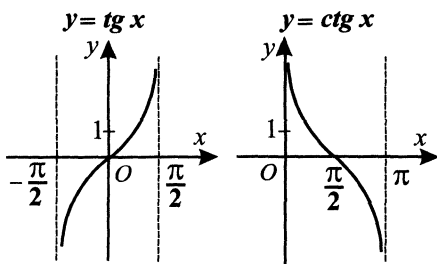


Рис. 7.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 8).

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 9).

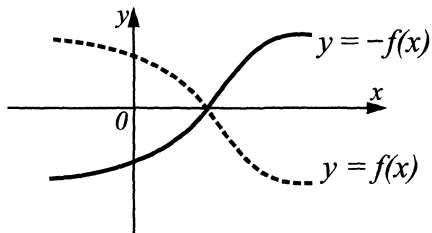


Рис. 8.

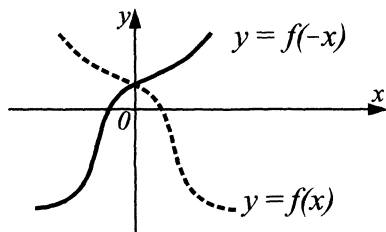


Рис. 9.

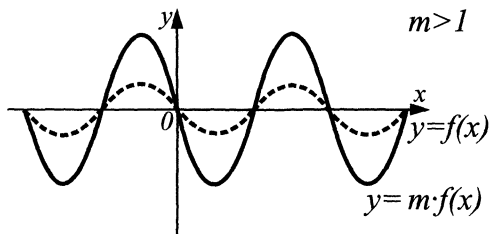


Рис. 10.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 10).

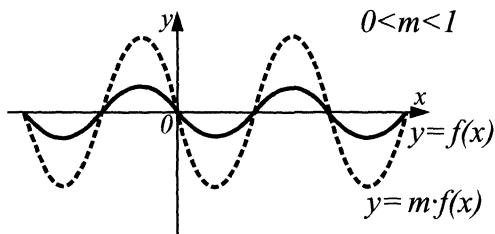


Рис. 11.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 11).

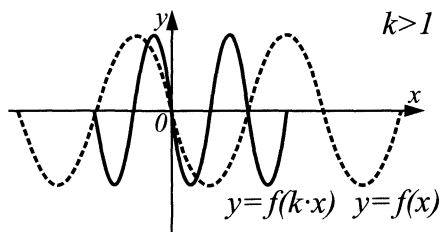


Рис. 12.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 12).

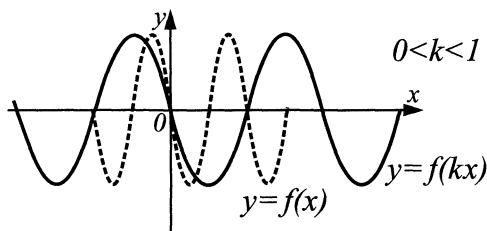


Рис. 13.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 13).

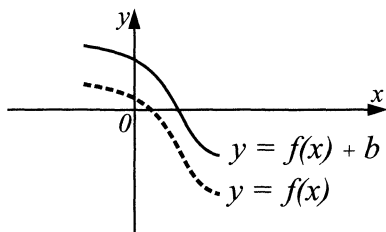


Рис. 14.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 14).

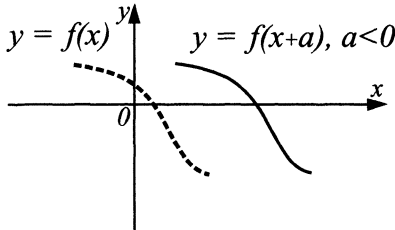


Рис. 15.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 15).

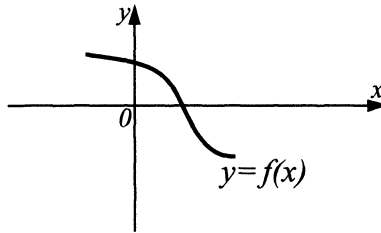


Рис. 16.

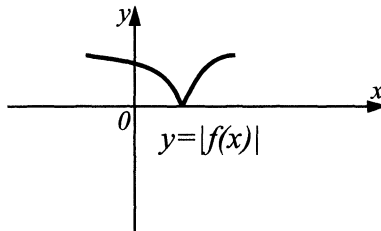


Рис. 17.

График функции $y = |f(x)|$ (рис. 17) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 16) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox .

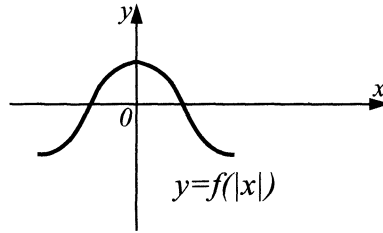


Рис. 18.

График функции $y = f(|x|)$ (рис. 18) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 16) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy , с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy .

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности (интервале, содержащем точку x). Дадим аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдём соответствующее приращение функции

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует

предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

$$(c)' = 0 \quad (c - \text{const}); \quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (\alpha - \text{const});$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$*(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad *(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$*(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad *(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c - \text{const}; \quad (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$y = f(g(x)), \quad y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \quad \text{где } u = g(x).$$

Отметим, что справедливо следующее свойство:

если функция $f(x)$ чётна (нечётна) и дифференцируема на всей области определения, то функция $f'(x)$ является нечётной (чётной).

Геометрический смысл производной

$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . Напомним, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox . Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной

Пусть $S = S(t)$ — уравнение зависимости пути от времени при движении какого-либо тела. Тогда $S'(t)$ — скорость движения этого тела в момент времени t . $S''(t)$ — ускорение движущегося тела в момент времени t .

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает* (*убывает*) на множестве A , если для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Замечание. Если функция возрастает (убывает) на двух промежутках, из этого ещё не следует, что она возрастает (убывает) на объединении этих промежутков. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но она не является убывающей на области определения.

Если на каком-то промежутке функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и дифференцируема на этом промежутке, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), причём равенство нулю невозможно на промежутке ненулевой длины.

Верно и обратное утверждение, которое мы сформулируем в частном случае. Именно, если на каком-то промежутке $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), причём равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек этого промежутка, то функция $y = f(x)$ на этом промежутке возрастает (убывает). Отсюда следует, что если производная в точке x_0 меняет знак с «+» на «-» (с «-» на «+»), то функция $y = f(x)$ в этой точке меняет возрастание на убывание (убывание на возрастание). А это значит, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум).

Предлагаем доказать самостоятельно, что для сложной функции $f(g(x))$ двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ справедлива данная ниже табличка, в которой «+» означает возрастание функции, а «-» — убывание.

$f(x)$	+	+	-	-
$g(x)$	+	-	+	-
$f(g(x))$	+	-	-	+

Наибольшее, наименьшее значения функции

Значение $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется *наибольшим* (*наименьшим*) значением этой функции, если для любого x из $D(f)$ выполняется неравенство

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)).$$

Справедлива следующая теорема.

Дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из стационарных точек на интервале $(a; b)$.

В частности, если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение.

Применение свойств функций при решении уравнений

Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$.

1. Пусть на ОДЗ уравнения функция $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает. Тогда уравнение не может иметь более одного корня.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и выполняются неравенства $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. Тогда уравнение имеет по крайней мере один корень на интервале $(a; b)$.

3. Пусть число A является наибольшим значением функции $f(x)$ и наименьшим значением функции $g(x)$. Тогда исходное уравнение равносильно на ОДЗ системе уравнений
$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на некотором числовом промежутке A . Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке A .

Отметим, что две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную. И наоборот, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то для любого c ($c = \text{const}$) функция $F(x) + c$ тоже первообразная для функции $f(x)$.

Приведём таблицу первообразных для основных элементарных функций. Буквой c везде обозначается произвольная постоянная.

$$F(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1). \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x| + c.$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + c, \quad x > 0. \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(-x) + c, \quad x < 0.$$

$$F(\sin x) = -\cos x + c. \quad F(\cos x) = \sin x + c.$$

$$F\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \text{tg } x + c. \quad F\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\text{ctg } x + c.$$

$$F(a^x) = \frac{a^x}{\ln a} + c. \quad F(e^x) = e^x + c.$$

$$*F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \text{arctg } x + c. \quad *F\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + c.$$

Неопределённый интеграл

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется множество всех её первообразных. Неопределённый интеграл функции $f(x)$ обозначается через $\int f(x)dx$ и вычисляется по формуле

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ где } F(x) \text{ — первообразная для функции } f(x).$$

Кроме того, при нахождении интегралов можно пользоваться формулами:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx;$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

Определённый интеграл

Определённый интеграл $\int_a^b f(x) dx$ можно найти по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ если } f(x) \text{ непрерывна на } [a; b], \text{ а}$$

$F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Для приведённой формулы используется сокращённая запись:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Справедливы формулы: $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, где $k \in \mathbb{R}$;

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 19) можно вычислить по формуле $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

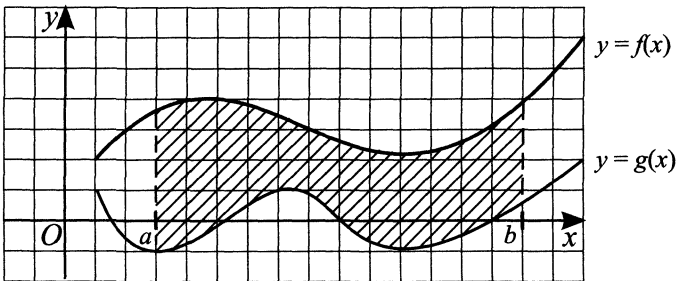


Рис. 19.

§ 12. Планиметрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечёт третья, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180° .

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.
3. Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$.
4. Сумма внешних углов n -угольника равна 360° .
5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.
6. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90° .
7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.
3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.
4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки: медиана, биссектриса, высота, — то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.
2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.
3. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.
4. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то
 - 1) перпендикуляр короче наклонных;
 - 2) большей наклонной соответствует большая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведённая к стороне c , то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. Обобщённая теорема синусов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника

Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a . Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.

2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.
2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.
3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.
4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.
7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.
2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник

Пусть a_n — сторона правильного n -угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$a_n = 2R_n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \cdot r_n; \quad r_n = R_n \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой центром окружности.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.
2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.
6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.
7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.
8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.
9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B .
2. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB .
3. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB .
4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
2. Если прямая a , проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M , касаются окружности в точках A и B , то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности

Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K , в точке C . Тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними касательными. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, отсекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, отсекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, отсекаемой на окружности этой хордой.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.
2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E , равны, то есть $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.
3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.
4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° .
5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.
6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.
7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.
8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

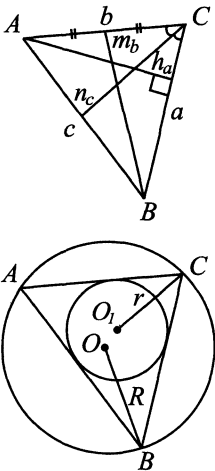
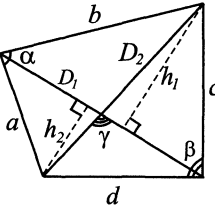
1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

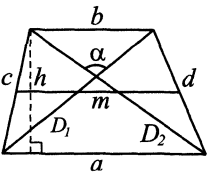
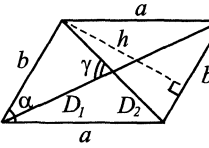
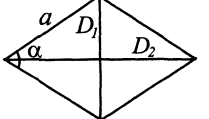
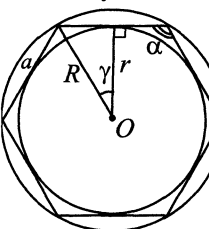
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

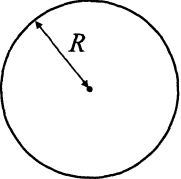
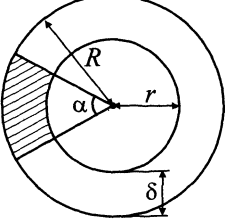
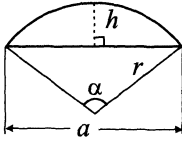
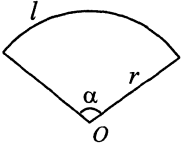
Площадь круга радиуса R равна πR^2 .

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Треугольник</p> 	<p>a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \frac{(m_a + m_b + m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.</p>	<p>$h_b = \frac{2S}{b}$ $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ $n_b = \frac{2}{a + c}\sqrt{acp(p - b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_ab_c}$ $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C$ $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ $S = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ $S = \frac{4}{3}\sqrt{\mu} \times \sqrt{(\mu - m_a)(\mu - m_b)(\mu - m_c)}$</p>
<p>Четырёхугольник</p> 	<p>a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.</p>	<p>$S = \frac{h_1 + h_2}{2} D_1$ $S = \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \gamma$ $S = \frac{1}{2} (ab \sin \alpha + cd \sin \beta)$</p>

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p style="text-align: center;">Трапеция</p> 	<p>a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.</p>	$m = \frac{1}{2}(a + b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a + b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2 \sin \alpha$
<p style="text-align: center;">Параллелограмм</p> 	<p>a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.</p>	$S = bh$ $S = ab \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2 \sin \gamma$
<p style="text-align: center;">Ромб</p> 	<p>a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.</p>	$S = a^2 \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2$
<p style="text-align: center;">Правильный многоугольник</p> 	<p>n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180^\circ - 2\gamma$ — угол многоугольника $(\gamma = \frac{180^\circ}{n})$.</p>	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR \sin \gamma = 2nr \operatorname{tg} \gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{ctg} \gamma$ $S = nr^2 \operatorname{tg} \gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2 \sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Круг</p> 	<p>R — радиус; l — длина окружности.</p>	<p>$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$</p>
<p>Круговое кольцо</p> 	<p>r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\rho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).</p>	<p>$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца: $S = \frac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \frac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$</p>
<p>Круговой сегмент</p> 	<p>r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.</p>	<p>$P = l + a$ $S = \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha \right)$ $S = \frac{r(l-a) + ah}{2}$</p>
<p>Круговой сектор</p> 	<p>r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.</p>	<p>$P = l + 2r$ $S = \frac{lr}{2}$ $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$</p>

§ 13. Стереометрия

Аксиомы стереометрии

Основные аксиомы

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.
2. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.
3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α , то прямая a параллельна плоскости α .
2. Если через прямую a , параллельную плоскости α , провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b , то прямые a и b параллельны.
3. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a , пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b , то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b .
4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то прямая a параллельна прямой c .
5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.
6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.
7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость α параллельна плоскости β , а плоскость β параллельна плоскости γ , то плоскость α параллельна плоскости γ .

8. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a , то a и b — скрещивающиеся прямые.

2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M .

5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

Параллельное проектирование

1. Прямая, не параллельная проектирующей, переходит в прямую.

2. Пара параллельных прямых, не параллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой её параллельной проекции на эту плоскость.

5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

2. Для того чтобы векторы \vec{a} и \vec{b} были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

4. Любой вектор можно единственным образом разложить по трём некопланарным векторам.

5. Если M — середина AB , то $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$.

6. Если M — середина AB , а N — середина CD , то $\vec{MN} = \frac{\vec{AC} + \vec{BD}}{2}$.

7. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$.

8. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$.

9. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

10. Свойства скалярного произведения векторов:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$;

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны;

ж) ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

11. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

12. **Угол между ненулевыми векторами.** Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

13. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет

вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

14. **Параметрические уравнения прямой**, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

15. **Уравнения прямой, проходящей через две точки** $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

16. **Прямая как пересечение двух плоскостей** задаётся системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

17. **Угол между плоскостями**. Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

18. **Уравнение плоскости «в отрезках»**. Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$ ($a, b, c \neq 0$), то её уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

19. **Расстояние от точки до плоскости**. Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости**. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

8. **Теорема о трёх перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует большая ортогональная проекция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

10. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и её ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

11. Геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

12. Геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

13. Геометрическое место точек, равноудалённых от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудалённых от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

Многогранные углы

1. Плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удалённой от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведённому в точку касания.

4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

5. Отрезки касательных прямых, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Пирамида

Правильная пирамида

1. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D , высотой DM и стороной основания a , а A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = \frac{AA_1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных рёбер AB и CD .

2. Противоположные рёбра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

3. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Если $PABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с вершиной P , высотой PM и стороной основания a , а A_1 , B_1 , C_1 и D_1 — середины сторон AB , BC , CD и AD соответственно, то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = \frac{a}{2}$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP .

5. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Правильный тетраэдр. Пусть a — ребро правильного тетраэдра, а R и r — радиусы описанной и вписанной сфер, V — объём тетраэдра. Тогда

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad R = 3r; \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Пирамида

1. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из внеписанных окружностей основания.

2. Если все боковые рёбра пирамиды образуют с основанием равные углы или если все боковые рёбра равны, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

3. Теорема о медианах тетраэдра. Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

4. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

5. В пирамиде и в конусе площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины.

Параллелепипед

1. Параллелепипед называется прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны основанию.

2. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным.

3. Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда

- а) диагонали прямоугольного параллелепипеда равны;
- б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений (длин трёх рёбер с общей вершиной).

4. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

5. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника $A_1 BD$ и делится ею в отношении $1 : 2$, считая от точки A .

Площади поверхности многогранников

1. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.
2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади её основания, делённой на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объёмы многогранников

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.
2. Объём наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.
3. Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.
4. Объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противоположащим ей боковым ребром.
5. Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.
6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.
7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объём пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

8. Если точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на боковых рёбрах DA , DB и DC соответственно треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях, то объём пирамиды $A_1 B_1 C_1 D_1$ относится к объёму пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

9. Отношение объёмов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

10. Объём V тетраэдра равен шестой части произведения длин двух противоположных рёбер a и b на расстояние c между ними и на синус угла φ между ними, то есть $V = \frac{1}{6}abc \sin \varphi$.

11. Объём V тетраэдра равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, делённому на их общее ребро a , то есть $V = \frac{2}{3} \frac{PQ \sin \varphi}{a}$.

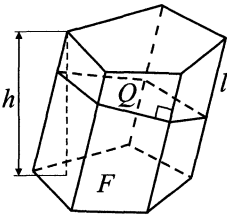
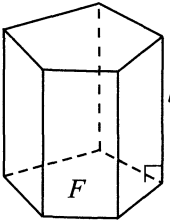
12. А. Объём тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

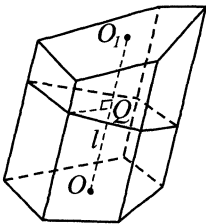
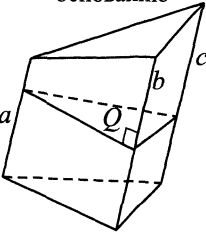
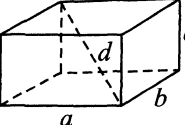
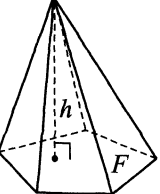
Б. Объём многогранника, в который можно вписать сферу, равен трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

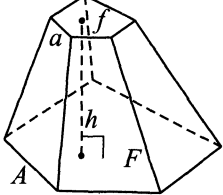
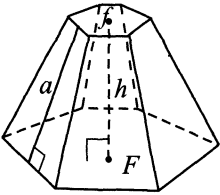
Основные формулы

Далее V — объём тела, S_6 и S — его боковая и полная поверхности.

Многогранники

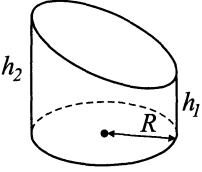
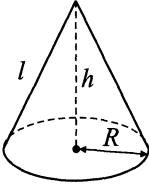
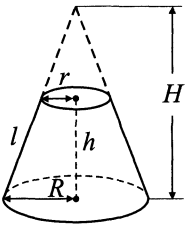
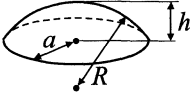
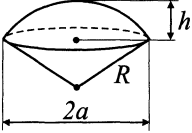
Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Призма</p> 	<p>F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.</p>	<p>$V = Fh = Ql$ $S_6 = Pl$ $S = Pl + 2F$</p>
<p>Прямая призма</p> 	<p>F и P — площадь и периметр основания; l — боковое ребро.</p>	<p>$V = Fl$ $S_6 = Pl$ $S = Pl + 2F$</p>

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Призма, усечённая непараллельно основанию</p> 	<p>l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO_1.</p>	$V = Ql$
<p>Треугольная призма, усечённая непараллельно основанию</p> 	<p>a, b и c — параллельные рёбра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к рёбрам.</p>	$V = \frac{1}{3}(a + b + c)Q$
<p>Прямоугольный параллелепипед</p> 	<p>a, b и c — рёбра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.</p>	$V = abc$ $S = 2(ab + bc + ac)$
<p>Пирамида</p> 	<p>F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды).</p>	$V = \frac{1}{3}Fh$ Правильная пирамида: $S_{\text{б}} = \frac{1}{2}Pa$

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Усечённая пирамида (плоскость сечения параллельна основанию)</p> 	<p>F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.</p>	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $V = \frac{1}{3}hF \left(1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A} \right)^2 \right)$
<p>Правильная усечённая пирамида</p> 	<p>F, f — площади оснований; P, p — периметры оснований; h — высота; a — апофема (высота боковой грани).</p>	$V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$ $S_{\text{б}} = \frac{P+p}{2} \cdot a$

Тела вращения

Чертежи	Обозначения	Формулы
<p>Сфера</p> 	<p>R — радиус.</p>	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $S = 4\pi R^2$
<p>Цилиндр</p> 	<p>R — радиус основания; h — высота.</p>	$V = \pi R^2 h$ $S_{\text{б}} = 2\pi R h$ $S = 2\pi R(h + R)$

<p>Цилиндр, усечённый непараллельно основанию</p> 	<p>R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.</p>	$V = \frac{1}{2} \pi R^2 (h_1 + h_2)$ $S_{\text{О}} = \pi R (h_1 + h_2)$ $S = \pi R \left(h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2} \right)^2} \right)$
<p>Конус</p> 	<p>R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.</p>	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ $S_{\text{О}} = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$ $S_{\text{Б}} = \pi R l$ $S = \pi R (R + l)$
<p>Усечённый конус</p> 	<p>R и r — радиусы оснований; h — высота; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ — образующая; H — высота неусечённого конуса: $H = h + \frac{hr}{R - r}$.</p>	$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$ $S_{\text{О}} = \pi l (R + r)$ $S = \pi (R^2 + r^2 + l(R + r))$
<p>Шаровой сегмент</p> 	<p>h — высота сегмента; R — радиус шара; $a = \sqrt{h(2R - h)}$ — радиус основания сегмента.</p>	$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$ $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$ $S_{\text{О}} = 2\pi R h$ $S_{\text{Б}} = \pi (a^2 + h^2)$ $S = \pi (2a^2 + h^2)$ $S = \pi (a^2 + 2Rh)$
<p>Шаровой сектор</p> 	<p>h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента.</p>	$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$ $S = \pi R (a + 2h)$

Глава I. Учебно-тренировочные тесты

Вариант № 1

Часть 1

В1. Теплоход рассчитан на 860 пассажиров и 33 члена команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

В2. На рисунке 20 точками показана цена акций компании «Газпром» на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни января 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена акции в рублях. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа рассматриваемого периода цена акций «Газпрома» на момент закрытия торгов была наименьшей.

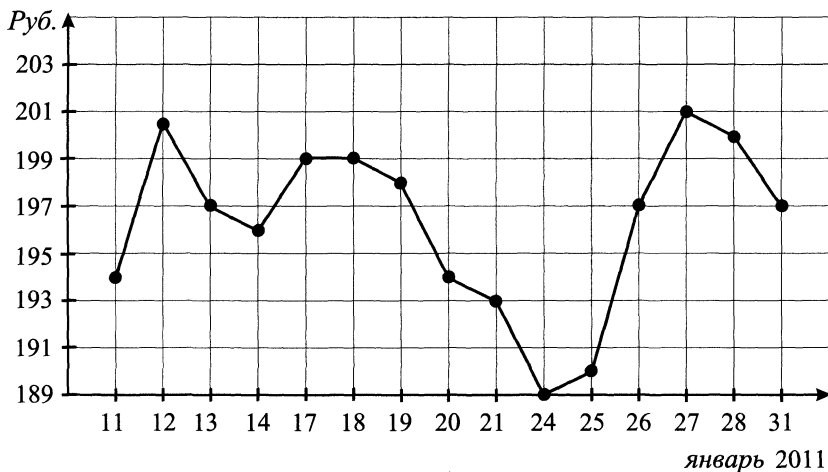


Рис. 20.

В3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 4)$, $(4; 10)$, $(6; 4)$ (см. рис. 21).

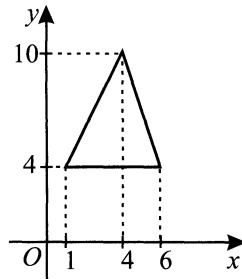


Рис. 21.

В4. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана:

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. «Вера»	2000 рублей за 1000 Мб трафика в месяц	5 рублей за каждый Мб сверх 1000 Мб
2. «Надежда»	600 рублей за 400 Мб трафика в месяц	3 рубля за каждый Мб сверх 400 Мб
3. «Любовь»	50 рублей за 150 Мб трафика в месяц	2,5 рубля за каждый Мб сверх 150 Мб

Абонент предполагает, что его трафик составит 1100 Мб. Сколько рублей заплатит он по наиболее выгодному тарифному плану, если его предположение окажется верным?

В5. Найдите корень уравнения $11^{x-10} = 11$.

В6. В трапеции $ABCD$ $\sin \angle A = \frac{\sqrt{21}}{5}$ (см. рис. 22). Найдите косинус угла B .

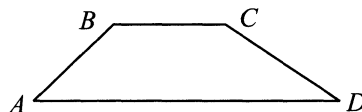


Рис. 22.

В7. Найдите значение выражения $\log_2 1,6 + \log_2 10$.

В8. На рисунке 23 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

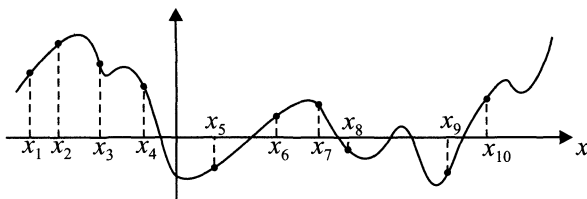


Рис. 23.

В9. Основанием прямой треугольной призмы (см. рис. 24) служит прямоугольный треугольник с катетами 9 и 12, высота призмы равна 10. Найдите площадь её поверхности.

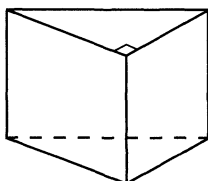


Рис. 24.

В10. На конференцию приехали 7 учёных из Германии, 8 из России и 5 из Испании. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим окажется доклад учёного из России.

В11. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 5 (см. рис. 25). Найдите объём параллелепипеда.

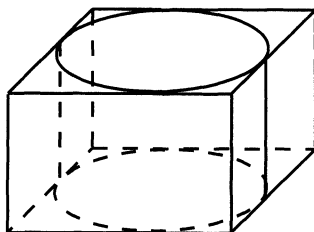


Рис. 25.

В12. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p задаётся формулой $q = 300 - 60p$. Месячная выручка r определяется как $r(p) = q \cdot p$ (тыс. руб.). Определите максимальный уровень цены p (тыс. руб.), при котором величина месячной выручки предприятия составит не менее 315 тыс. руб.

В13. Из городов A и B , расстояние между которыми 270 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились на расстоянии 140 км от A . Найдите скорость автобуса (в км/час), выехавшего из пункта B , если автобусы встретились через 2,5 часа.

В14. Найдите точку максимума функции $y = (10 - x)e^{x+10}$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$.

С2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной в точке S стороны основания равны 12, а боковые рёбра равны 24. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра SB параллельно прямой AC .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x} \frac{x+5}{(x-3)^4} \geq -4, \\ x^3 + 6x^2 + \frac{14x^2 + 5x - 15}{x-3} \leq 5. \end{cases}$$

С4. Окружности радиусов 4 и 6 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке K . Прямая, проходящая через точку K , вторично пересекает меньшую окружность в точке M , а большую в точке N . Найдите площадь треугольника MNO_2 , если $\angle KMO_1 = 15^\circ$.

С5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{-5 - 6x - x^2} + ax = 2a + 2$ имеет единственный корень.

С6. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-нибудь число k , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске остаётся одно такое число k , а

остальные числа, равные k , стираются. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, 7, то на доске будет записан набор 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 17.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 25?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 13, 16, 20, 22, 26, 29, 33, 35, 39, 42, 46, 48, 55?

Вариант № 2

Часть 1

В1. Сырок стоит 6 рублей 30 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

В2. На рисунке 26 жирными точками показана среднесуточная влажность воздуха с 10 по 18 февраля 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — влажность воздуха в процентах. Для наглядности точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку наименьшую среднесуточную влажность воздуха (в процентах) за указанный период.

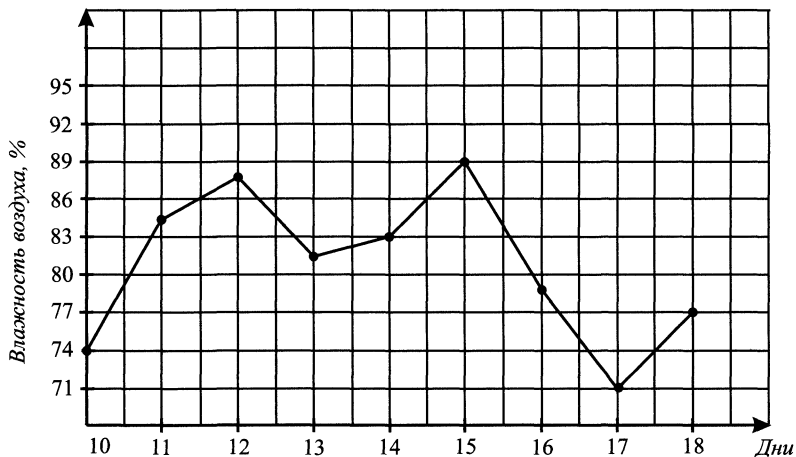


Рис. 26.

В3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 27). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

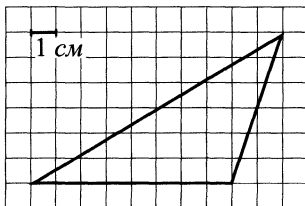


Рис. 27.

В4. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх магазинах.

Наименование продукта	«Удача»	«Вкус»	«Высота»
Рис (1 кг)	30	32	33
Картофель (1 кг)	20	18	16
Сыр (1 кг)	270	256	250
Молоко (1 литр)	30	28	31
Хлеб (батон)	18	20	19

Покупателю нужно в одном из магазинов приобрести 3 батона хлеба, 2 кг риса и 0,5 кг сыра. Определите, в каком из этих магазинов покупка будет самой дешёвой. В ответ запишите стоимость покупки (в рублях).

В5. Найдите корень уравнения $\frac{3}{22}x = 4\frac{4}{11}$.

В6. В треугольнике ABC угол $\angle C$ равен 90° , $\sin B = 0,4$. Найдите синус внешнего угла при вершине B .

В7. Найдите значение выражения $3^{\sqrt{3}-1} \cdot 3^{3-\sqrt{3}}$.

В8. На рисунке 28 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

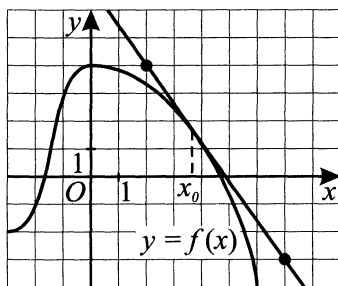


Рис. 28.

В9. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 29), для которого $AB = 4$, $AD = 5$, $AA_1 = 6$.

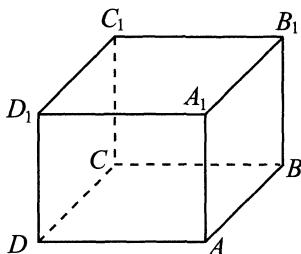


Рис. 29.

В10. В группе туристов 20 человек. Их вертолётom в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Н. полетит последним рейсом вертолётa.

В11. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 3 (см. рис. 30). Найдите объём параллелепипеда.

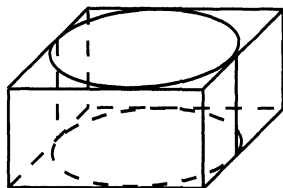


Рис. 30.

В12. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от 1 до 5. Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вчетверо, а оперативность публикаций — вдвое дороже, чем информативность и качество сайта.

Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{In + 2Op + 4Tr + Q}{A}$. Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все оценки наибольшие, получило рейтинг 100?

В13. Автомобиль ехал 1,5 часа со скоростью 40 км/ч, 2,5 часа — со скоростью 60 км/ч, оставшуюся часть пути со скоростью 75 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля, если всего он потратил 5 часов. Ответ укажите в км/ч.

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 5x^2 - 8x + 1$ на отрезке $[-5; -2]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $(64^{\cos x})^{\sin x} = 4^{\frac{3 \cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

С2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 4. Точка K принадлежит ребру SA , причём $SK : AK = 2 : 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B и K параллельно прямой AC .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x}(9 - x^2) \leq 1, \\ 2x + 7 + \frac{8x + 29}{x^2 + x - 6} \geq -\frac{1}{x + 3}. \end{cases}$$

С4. Окружности радиусов 4 и 18 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке P . Прямая, проходящая через точку P , вторично пересекает меньшую окружность в точке F , а большую в точке E . Найдите площадь треугольника FEO_1 , если $\angle PEO_2 = 30^\circ$.

С5. Найдите все значения a , при которых уравнение $12a + \sqrt{9 + 8x - x^2} = ax + 5$ имеет единственный корень.

С6. а) Чему равно число способов записи числа 1743 в виде $1743 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существует ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где a_i — целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 175 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где a_i — целые, $0 \leq a_i \leq 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 175 способами?

Вариант № 3

Часть 1

В1. Поезд Москва — Нижний Новгород отправляется в 21 : 40, а прибывает в 5 : 10 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

В2. На рисунке 31 точками показана среднесуточная скорость ветра с 20 января по 7 февраля 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — скорость ветра в м/с. Для наглядности точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку наибольшую среднесуточную скорость ветра (в м/с) за указанный период.

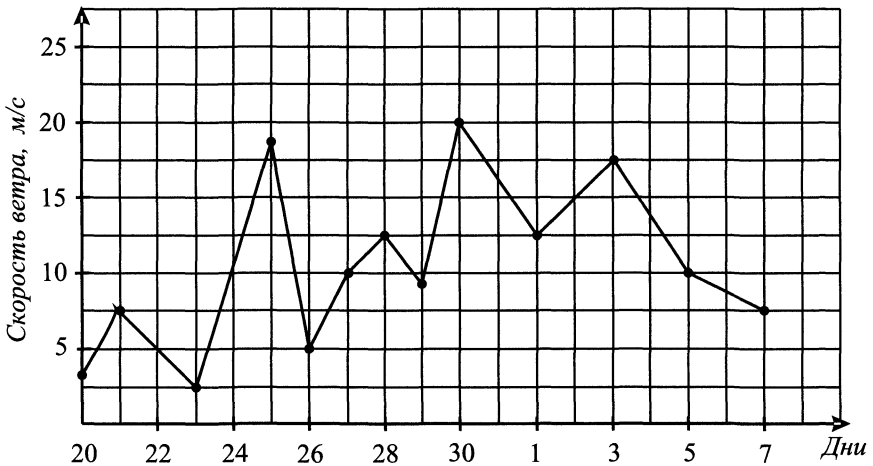


Рис. 31.

В3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1; 1)$, $(1; 4)$, $(10; 0)$, $(10; 7)$ (см. рис. 32).

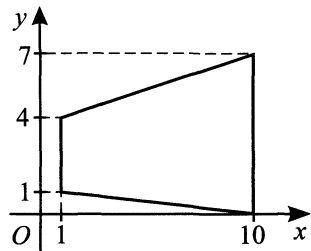


Рис. 32.

В4. Автомобильный журнал определяет рейтинги автомобилей на основе показателей безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{4S + 2C + 3F + 2Q + D}{10}.$$

Модель	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	2	5	2	1
Б	4	3	4	1	3
В	5	1	3	3	1

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг среди представленных в таблице моделей автомобилей.

В5. Найдите корень уравнения $\frac{x}{3} = 5\frac{1}{3}$.

В6. В треугольнике ABC BD — биссектриса (см. рис. 33). Угол A равен 94° , угол ABD равен 7° . Найдите градусную меру угла C .

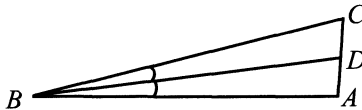


Рис. 33.

В7. Найдите значение выражения $(2x^4)^2 : 2x^8$ при $x = 0,85$.

В8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 + t^2 - 5t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 4$ с.

В9. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 27π , а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.

В10. В чемпионате мира участвуют 24 команды, в том числе команда России. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

В11. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 34). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 60.

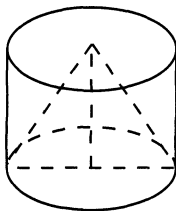


Рис. 34.

В12. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 15 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 240 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

В13. Куртка стоила 3200 рублей. В январе её цена снизилась на 4%, а в феврале поднялась на 25% от январской цены. Сколько рублей стала стоить куртка?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x^2 - x^3$ на отрезке $[-1; 10]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 10$, $AD = 11$, $BB_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру CC_1 и делит его в отношении 2 : 5, считая от вершины C . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B , K и D_1 .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{8-x} \frac{-9-x}{x-8} \leq -1, \\ \frac{2x^2 - 13x - 46}{2x - 15} + \frac{x^2 + 11x + 8}{x + 10} \geq 2x + 2. \end{cases}$$

С4. Окружности радиусов 22 и 42 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке P , KO_1 и LO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle KO_1O_2 = 120^\circ$. Найдите KL .

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |a - 5 + x| = |5 - a + x| - (a - 5)^2$ имеет единственный корень.

С6. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа $-4, 8, 12$, то на доске будет выписан набор $-4, 4, 8, 8, 12, 16, 20$.

а) На доске выписан набор $-5, -3, -2, 2, 4, 5, 7$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Вариант №4

Часть 1

В1. Для приготовления вишнёвого варенья на 1 кг вишни нужно взять 1,5 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 19 кг вишни?

В2. На рисунке 35 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 16 по 28 марта. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавшее в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в указанный период выпало наибольшее количество осадков.

В3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(2; 2)$, $(10; 6)$, $(10; 2)$ (см. рис. 36).

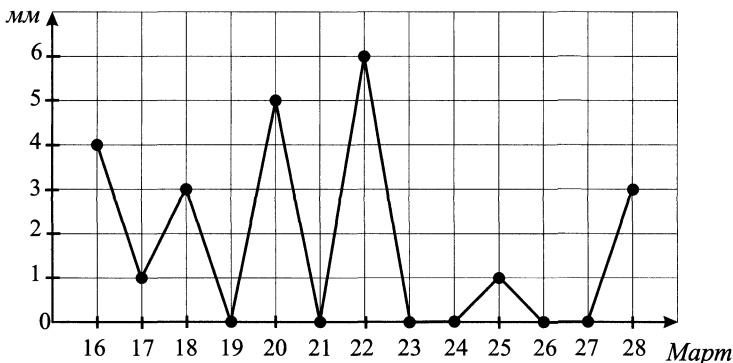


Рис. 35.

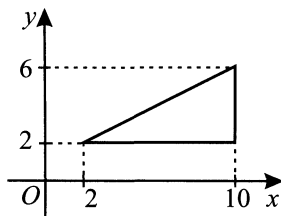


Рис. 36.

В4. Рейтинговое агентство определяет рейтинг соотношения «цена-качество» электрических фенев для волос. Рейтинг вычисляется на основе средней цены P и оценок функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается экспертами по 5-балльной шкале целыми числами от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 2(F + 2Q) + D - 0,002P$.

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких моделей фенев. Определите, какая модель имеет наименьший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

Модель	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2500	4	2	1
Б	3000	3	3	2
В	2800	2	2	4

В5. Найдите корень уравнения $\frac{x-2}{x} = \frac{3}{5}$.

В6. В треугольнике ABC BD — биссектриса (см. рис. 37). Угол A равен 93° , угол ABD равен 6° . Найдите градусную меру угла C .

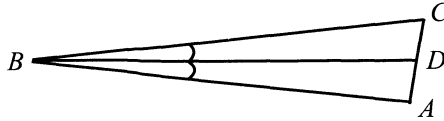


Рис. 37.

В7. Найдите значение выражения $\left(3\frac{1}{3} - 2\frac{2}{7}\right) \cdot 4,2$.

В8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^3 + t^2 - 7t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 5$ с.

В9. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π , а высота — 10. Найдите диаметр основания.

В10. В сборнике билетов по географии всего 30 билетов, в 6 из них встречается вопрос по океанам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по океанам.

В11. Стороны основания правильной пятиугольной пирамиды равны 14, боковые рёбра равны 25. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды (см. рис. 38).

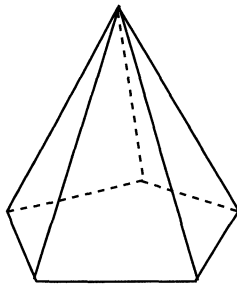


Рис. 38.

В12. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 750$ руб. за единицу. Переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 250$ руб., постоянные расходы предприятия — $f = 800\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в руб.) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше $400\,000$ руб.

В13. Первые 200 км автобус ехал со скоростью 80 км/ч, следующие 190 км — со скоростью 95 км/ч, а затем 150 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x^2 - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin\left(-\frac{9\pi}{2} + x\right) \cdot \sin x = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{13\pi}{2}; 8\pi\right]$.

С2. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара плоскостью α равна 9 . Плоскость β , касающаяся меньшего шара, параллельна плоскости α . Площадь сечения большего шара плоскостью β равна 6 . Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2 \cdot 9^x + 45 \cdot 3^x - 243 \geq 0, \\ \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x + 5}{x^2 - 5x} + \frac{1}{x} \geq x^2 - \frac{3}{x+6} + 2. \end{cases}$$

С4. Окружность радиуса $15\sqrt{2}$ с центром в точке O_1 вписана в прямой угол. Вторая окружность с центром в точке O_2 также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и W . Известно, что расстояние между точками O_1 и O_2 равно 10 . Найдите MW .

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{5-x}(a - x + 8) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[2; 5)$.

С6. Даны k различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($k \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение k , если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения k , если сумма всех данных чисел равна 123.

Вариант № 5

Часть 1

В1. В школе есть трёхместные туристические палатки. Какое наименьшее число палаток нужно взять в поход, в котором участвуют 25 человек?

В2. На рисунке 39 точками показано суточное количество осадков, выпавших с 11 по 23 сентября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавшее в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько миллиметров осадков выпало 17 сентября.

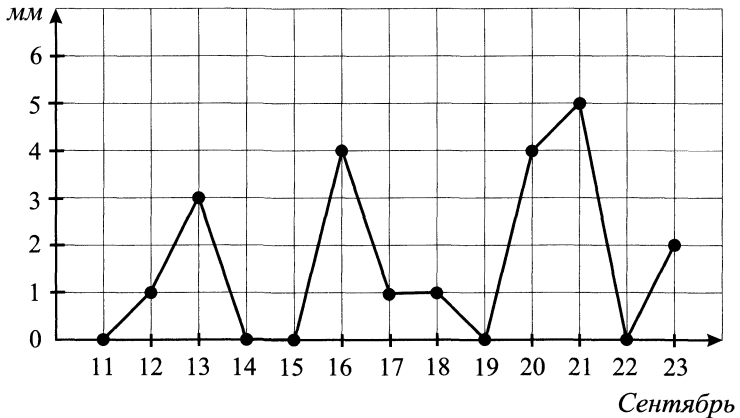


Рис. 39.

В3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 40). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

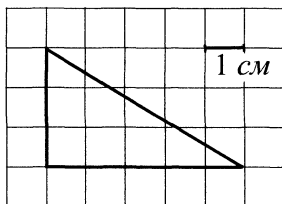


Рис. 40.

В4. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в минутах.

	1	2	3
1. Автобус	От дома до автобусной станции — 10 мин.	Автобус в пути: 1 ч 25 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком — 25 мин.
2. Электричка	От дома до станции железной дороги — 40 мин.	Электричка в пути: 55 мин.	От станции до дачи пешком — 30 мин.
3. Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси — 35 мин.	Маршрутное такси в пути: $\frac{3}{4}$ ч.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком — 35 мин.

В5. Найдите корень уравнения $-\frac{3}{7}x = 3\frac{6}{7}$.

В6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos B = 0,5$, $AB = 16$. Найдите BC .

В7. Найдите значение выражения $(\sqrt{15} - \sqrt{2})(\sqrt{15} + \sqrt{2})$.

В8. На рисунке 41 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

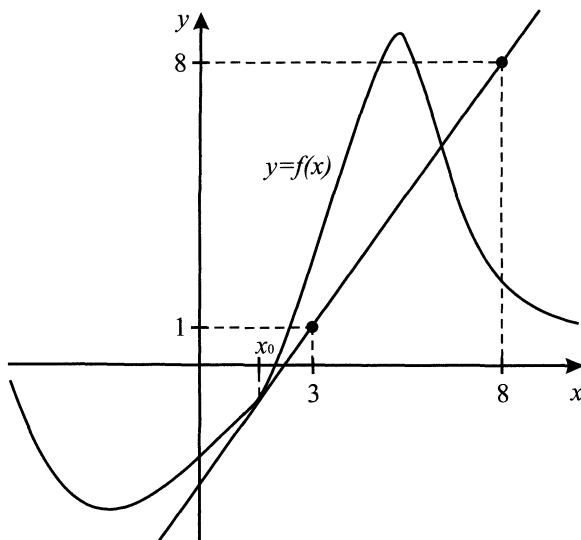


Рис. 41.

В9. Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 42), если $AB = 8$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

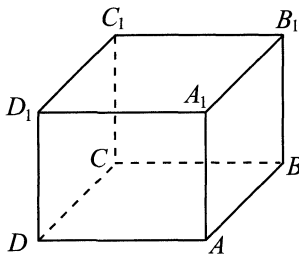


Рис. 42.

В10. Вася, Петя, Дима, Коля и Андрей тянут жребий, кому идти в магазин за продуктами. Найдите вероятность того, что поход за продуктами выпадет Диме.

В11. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объём параллелепипеда (см. рис. 43).

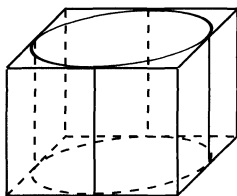


Рис. 43.

В12. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -3 до 3 . Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность — вчетверо дороже, чем оперативность. В результате формула примет вид

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr}{A}.$$

Каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 105?

В13. Первые 360 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 200 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[2; 5]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $3^{3 \cos x - \cos 2x} = \frac{1}{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K — середина ребра BB_1 , $A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадрат, $B_1 K = 3$, а синус угла между плоскостями ABD и AKC равен $\frac{3}{4}$. Найдите BC .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{7^{x+1}}{2^{x-1}} \geq 84, \\ \frac{1}{2} \ln(9(x^2 - 3x + 4)) < \ln(x^2 - 3x). \end{cases}$$

С4. На стороне AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты соответственно точки K и M так, что в трапеции $MKBC$ и $AKMD$ можно вписать круги, площадь каждого из которых в 4 раза меньше площади $ABCD$. Прямые, содержащие отрезки MK и BC , пересекаются в точке P . Найдите расстояние от точки P до AB , если точка M делит сторону CD в отношении $3 : 7$, $AB = 10$.

С5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = |x + 3| + x - 2, \\ (x + 5)^2 + (y - a + 5)^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет более двух решений?

С6. Через $n!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до n . Например, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Для любого натурального числа k будем через $d(k)$ обозначать количество его делителей, включая 1 и само число k . Могут ли выполняться следующие равенства? Если да, то для каких n они выполняются?

а) $d((n!)^2) = 18281828$

б) $d((n!)^2) = 105$

в) $d(2^n(n!)^2) = 108$

Вариант № 6

Часть 1

В1. В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 8 недель?

В2. На диаграмме (см. рис. 44) показана среднемесячная температура воздуха в Ростове-на-Дону за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме номер месяца, в котором среднемесячная температура была самой высокой.

В3. Найдите ординату точки, симметричной точке $A(-3; 5)$ относительно оси Ox (см. рис. 45).

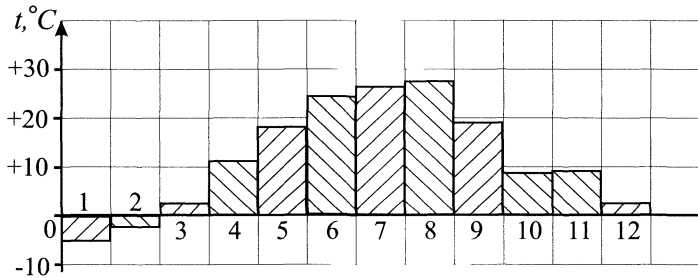


Рис. 44.

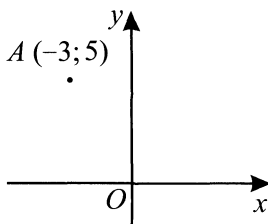


Рис. 45.

В4. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана:

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
1. Повременный	150 руб. в месяц	0,4 руб.
2. Комбинированный	250 руб. за 500 минут в месяц	0,3 руб. за 1 минуту сверх 500 минут в месяц
3. Безлимитный	400 руб.	Нет

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность его телефонных разговоров составит 800 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 800 минутам? Ответ дайте в рублях.

В5. Найдите корень уравнения $2^{x+1} = 16$.

В6. В треугольнике ABC $AB = BC = 8$, угол $\angle BAN = 60^\circ$ (см. рис. 46). Найдите высоту AH .

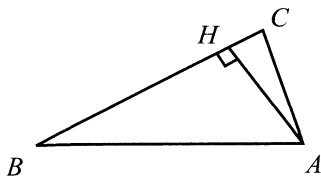


Рис. 46.

В7. Найдите значение выражения $\frac{15}{7^{\log_7 6}}$.

В8. На рисунке 47 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

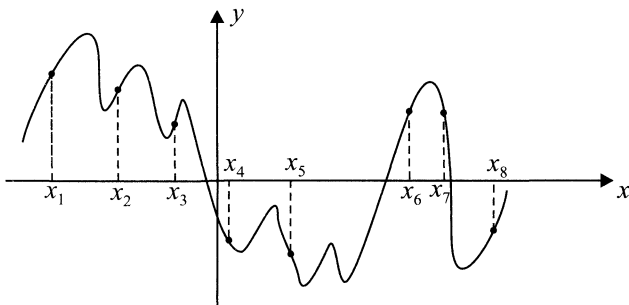


Рис. 47.

В9. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (см. рис. 48), площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

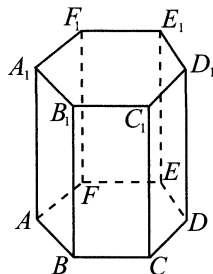


Рис. 48.

В10. Вероятность того, что новый мобильный телефон прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

В11. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 49 (все двугранные углы прямые).

В12. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \cdot \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}}, \text{ где } r_{\text{пок}} —$$

средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Центы», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 19, их средняя оценка равна 0,4, а оценка экспертов равна 0,21.

В13. Из двух городов, расстояние между которыми 700 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 95 км/ч и 105 км/ч?

В14. Найдите точку минимума функции $y = (19 - x)e^{19-x}$.

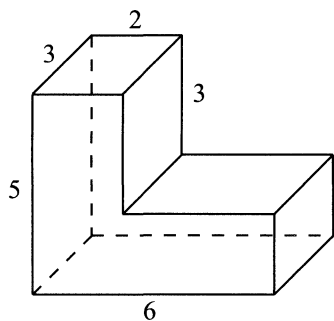


Рис. 49.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + 2\sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K — середина диагонали AC_1 , $AC_1 = 13$, синус угла между прямыми DD_1 и AC_1 равен $\frac{11}{13}$. Найдите объём пирамиды $ABCDK$, если $ABCD$ — квадрат.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 10^x + 6 \leq 3 \cdot 5^x + 2^{x+1}, \\ \log_{x^2}(3 + x) \geq \log_x 3. \end{cases}$$

С4. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD , боковые стороны равны 6 и 8. Точки M и K принадлежат разным основаниям, при этом $MK \parallel CD$, а в каждый из четырёхугольников $ABMK$ и $CDKM$ можно вписать окружность. Найдите меньшее основание трапеции

С5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = |2x - 6| + |2x - 18|, \\ (y - 12 - a)^2 + (x - 6)^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет ровно 3 решения?

С6. Через $n!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до n . Например, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$. Решите следующие уравнения:

а) $n! = 2n$;

б) $n! = 30(n - 1)$;

в) $n! + 1 = (2n + 1)^2$.

Вариант № 7

Часть 1

В1. В летнем лагере 150 детей и 19 воспитателей. В автобус помещается не более 35 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

В2. На диаграмме 50 показано число посетителей сайта «Инфо-новости» за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число посетителей. Определите по диаграмме номер месяца, когда сайт посетило больше всего людей.

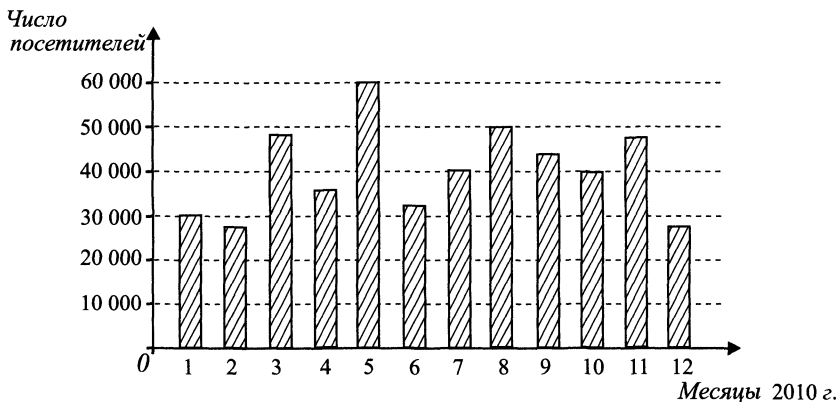


Рис. 50.

В3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 51). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

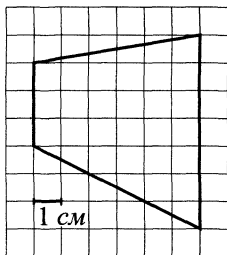


Рис. 51.

В4. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх южных городах России (по данным на начало 2011 года).

Наименование продукта	Ростов-на-Дону	Краснодар	Ставрополь
Пшеничный хлеб (1 батон)	15	14	17
Молоко (1 литр)	30	27	35
Картофель (1 кг)	40	50	45
Сыр (1 кг)	230	220	250
Мясо (говядина, 1 кг)	290	270	280
Подсолнечное масло (1 литр)	32	30	28

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля и 2 кг говядины. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

В5. Найдите корень уравнения $7^{x-9} = 49$.

В6. В параллелограмме $ABCD$ $\sin C = 0,8$ (см. рис. 52). Найдите $\cos D$.

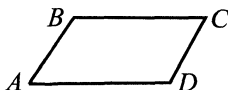


Рис. 52.

В7. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{5}$.

В8. На рисунке 53 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?

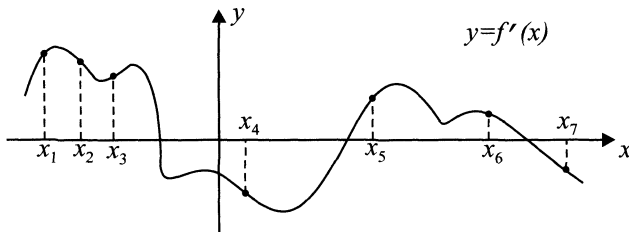


Рис. 53.

В9. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса (см. рис. 54). Образующая конуса равна $7\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

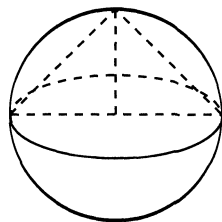


Рис. 54.

В10. Симметричную монету подбрасывают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

В11. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 55.

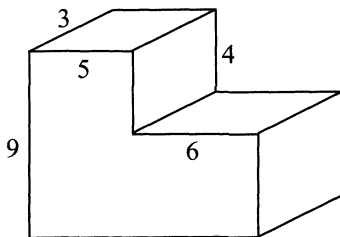


Рис. 55.

В12. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 2$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 10% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{КЗ}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

В13. Из городов A и B , расстояние между которыми 280 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста и встретились через 4 часа на расстоянии 80 км от города B . Найдите скорость мотоциклиста, выехавшего из города A . Ответ дайте в км/ч.

В14. Найдите точку, в которой функция $y = (6 - x)e^{10-x}$ на отрезке $[2; 9]$ принимает наименьшее значение.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(0; \frac{3\pi}{2})$.

С2. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 5, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 49^{x^2+5x-49} + 7^{x^2+5x-48} \leq 98, \\ \frac{\log_{0,5} x + 2}{|\lg(2x - 1)|} > 0. \end{cases}$$

С4. Треугольник ABC описан около окружности с центром O и вписан в окружность. Продолжения отрезков AO и BO пересекаются с описанной около треугольника окружностью в точках M и N соответственно, причём $AM = MN$. Один из углов треугольника равен 30° . Найдите величину других углов и выразите их в градусах.

С5. Найдите все значения a , при которых уравнение $x^2 - (3^a - 1)x - 3 \cdot (9^{a-1} - 3^{a-2}) = 0$ имеет ровно один корень.

С6. Найдите восьмизначное число x в каждом из следующих случаев:
а) первая цифра в записи числа x равна 8. Если первую цифру перенести в конец, сдвинув остальные цифры на один разряд влево, то число не изменится;

- б) первая цифра в записи x равна 6. Если её стереть, то получится число в 16 раз меньше исходного;
- в) первая цифра в записи числа x не больше 6. Если её увеличить на 3, то получится число в 3 раза больше исходного.

Вариант № 8

Часть 1

В1. В упаковке 16 пачек сахара. За день кондитерская фабрика расходует 183 пачки. Какое наименьшее количество упаковок сахара нужно купить фабрике на 15 дней?

В2. На рисунке 56 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 8 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.

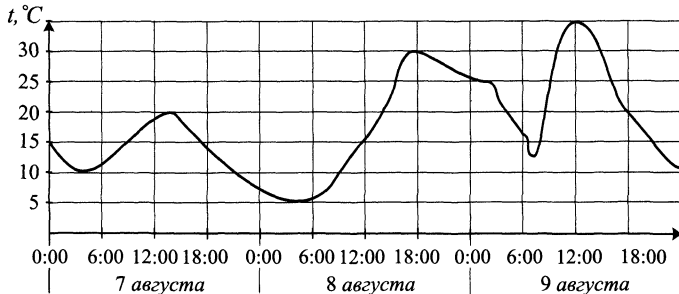


Рис. 56.

В3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(3; 1)$, $(8; 4)$, $(10; 4)$, $(10; 1)$ (см. рис. 57).

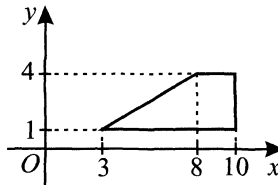


Рис. 57.

В4. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх городах России (по данным на начало 2011 года).

Наименование продукта	Астрахань	Новочеркасск	Омск
Пшеничный хлеб	14	15	18
Картофель (1 кг)	30	35	40
Рис (1 кг)	40	50	35
Колбаса (1 кг)	260	250	240
Сыр (1 кг)	240	220	230
Подсолнечное масло (1 литр)	42	45	40

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 3 кг картофеля, 1 кг колбасы, 2 литра подсолнечного масла. В ответе запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

В5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x - 7} = \frac{1}{5x + 8}$.

В6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $CB = 8$, $\cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите AC .

В7. Найдите значение выражения $\frac{(4^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{1}{3}})^{21}}{10^8}$.

В8. На рисунке 58 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?

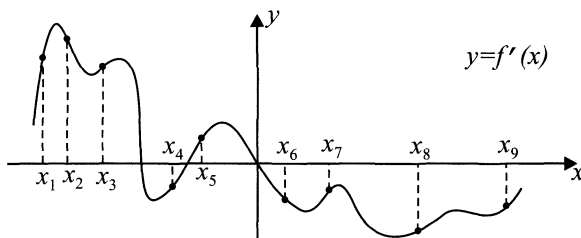


Рис. 58.

В9. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса (см. рис. 59). Радиус сферы равен $3\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

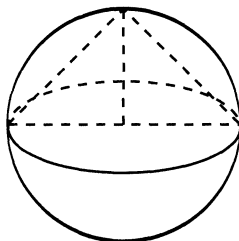


Рис. 59.

В10. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,1. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

В11. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 60 (все двугранные углы прямые).

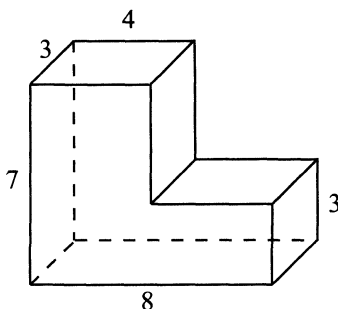


Рис. 60.

В12. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой

$$U = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}.$$

При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 80 В? Ответ выразите в омах.

- В13.** Автомобилист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $\frac{1}{4}$ всего пути и ещё 40 км, во второй он проехал $\frac{1}{3}$ всего пути и ещё 30 км, а в третий день он проехал $\frac{17}{60}$ всего пути и оставшиеся 45 км. Найдите расстояние между городами (в км).
- В14.** Найдите точку минимума функции $y = (5 - x)e^{5-x}$.

Часть 2

- С1.** а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
- С2.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, один из углов которого равен 60° . Высота пирамиды равна 4, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите объём пирамиды.
- С3.** Решите систему неравенств
$$\begin{cases} (x^2 - 2x + 3) \log_2 x < 0, \\ 1 + \log_4 \left(1 + \frac{5}{3x^2 + 5x + 2} \right) > \log_4 (3x^2 + 5x + 7). \end{cases}$$
- С4.** В параллелограмме $MNPQ$ диагональ MP равна 7, а диагональ NQ равна 5. На MP выбрана точка E таким образом, что вокруг четырёхугольника $NPQE$ можно описать окружность. Найдите длину NK , где K — центр окружности, описанной около треугольника MEQ , и $\sin \angle MQE = \frac{1}{2}$.
- С5.** При каких значениях a уравнение $2 \log_a x + \log_{ax} x + 3 \log_{ax^2} x = 0$ имеет решения на промежутке $[8; 9]$?
- С6.** Найдите натуральное число a в каждом из следующих случаев:
а) если к десятичной записи числа a справа приписать цифру 6, то получится $4a^2$;
б) если к десятичной записи числа a приписать справа одну из цифр, а затем из получившегося числа вычесть a^2 , то получится $8a$;
в) если к десятичной записи числа a справа приписать некоторые четыре цифры, то получится a^6 .

Вариант № 9

Часть 1

В1. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 5 раз в день в течение 9 дней. В одной упаковке содержится 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок потребуется на весь курс лечения?

В2. На рисунке 61 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 13 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.

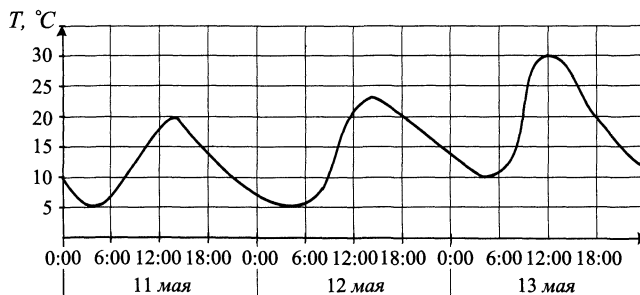


Рис. 61.

В3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 2), (1; 5), (10; 3), (10; 8) (см. рис. 62).

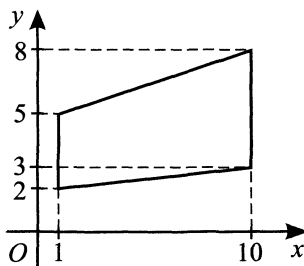


Рис. 62.

В4. В магазине компьютерной техники объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 3 000 рублей, он получает сертификат на 500 рублей, который можно обменять в том же магазине на любой товар ценой не выше 500 рублей. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Н. хочет приобрести наушники ценой 2600 рублей, клавиатуру ценой 450 рублей и компьютерную мышь ценой 300 рублей. В каком из возможных случаев Н. заплатит за покупку меньше всего?

- 1) Н. купит все три товара сразу.
- 2) Н. купит сначала наушники и клавиатуру, а компьютерную мышь получит за сертификат.
- 3) Н. купит сначала наушники и компьютерную мышь, клавиатуру получит за сертификат.

В ответе запишите, сколько рублей заплатит Н. за покупку в этом случае.

В5. Найдите корень уравнения $(x + 3)^3 = -27$.

В6. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника LMK , если стороны квадратных клеток равны 1 (см. рис. 63). В ответе укажите $2 \cdot R\sqrt{5}$.

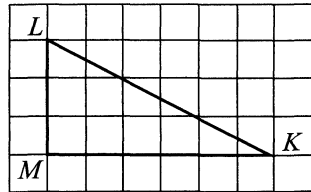


Рис. 63.

В7. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и

$$\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right).$$

В8. На рисунке 64 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 3]$.

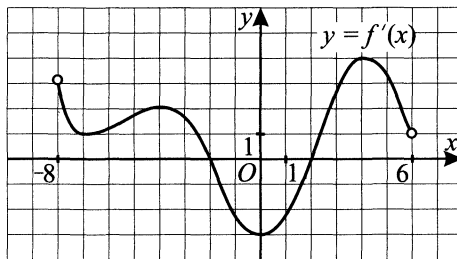


Рис. 64.

B9. Высота конуса равна 12, а диаметр основания — 10. Найдите образующую конуса.

B10. Вероятность того, что на тесте по физике Петя верно решит больше 8 задач, равна 0,78. Вероятность того, что Петя верно решит больше 7 задач, равна 0,85. Найдите вероятность того, что Петя верно решит ровно 8 задач.

B11. Объём параллелепипеда

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 30 (см. рис. 65).

Найдите объём треугольной пирамиды $D_1 ACD$.

B12. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав два километра, развить скорость не менее 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

B13. Смешали 3 литра 12%-го водного раствора и 5 литров 20%-го водного раствора. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

B14. Найдите точку максимума функции $y = 6 + 81x - \frac{x^3}{3}$.

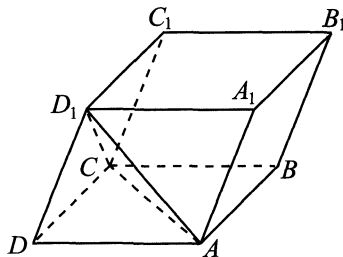


Рис. 65.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{8}{3}$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(2\pi; \frac{7\pi}{2})$.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка F — середина ребра DD_1 , точка K лежит на ребре AD так, что $AK : KD = 1 : 3$. Найдите расстояние между прямыми BF и A_1K , если $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 2$.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x \geq 25, \\ 2 \log_{\log_3 x} 3 < 1. \end{cases}$

C4. Окружность, диаметр которой равен $2\sqrt{3}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина отрезка касательной, проведённой из точки C к окружности, равна 3, $AB = \sqrt{3}$. Найдите сторону AD .

С5. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_y 2} = 4, \\ y = a(x - 4) + 3 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

С6. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой. В каждом из следующих случаев определите наименьшее возможное значение $|x_k|$ по всем k , для которых определено x_k :

а) $x_1 = 3, x_2 = 5, x_{n+2} = x_n - x_{n+1} + 1$;

б) $x_1 = 100, x_2 = 300, x_{n+2} = x_n - x_{n+1}$;

в) $x_1 = 2013, x_2 = 1, x_{n+2} = x_n - \frac{3}{x_{n+1}}$. Если некоторое $x_j = 0$, то x_m не определено для $m > j$.

Вариант № 10

Часть 1

В1. В некотором городе живёт 300 000 жителей, среди них 20% детей и подростков. Среди взрослых жителей 40% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?

В2. На диаграмме 66 показана месячная норма осадков для города Красноярска. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество осадков в мм. Определите месяц с наименьшей нормой осадков. В ответе запишите номер этого месяца.

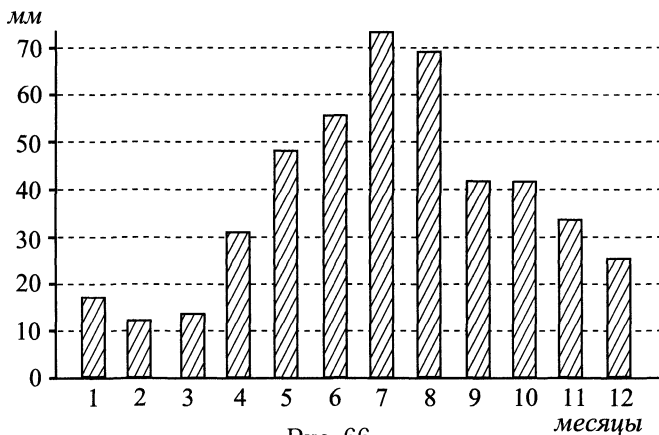


Рис. 66.

В3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(2; 6)$, $(2; 9)$, $(8; 5)$, $(8; 2)$ (см. рис. 67).

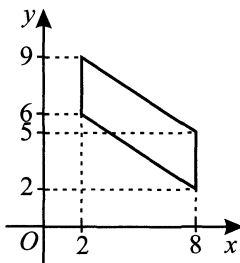


Рис. 67.

В4. Для транспортировки 49 тонн груза на 1800 км можно использовать услуги одного из трёх перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая перевозка (один рейс)?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (в тоннах)
А	3800	4,5
Б	6400	7
В	7200	9

В5. Найдите корень уравнения $(x - 7)^3 = 64$.

В6. Найдите угол $\angle CBO$, если сторона BC касается окружности, а меньшая дуга окружности AC , заключённая внутри этого угла, равна 67° (см. рис. 68). Ответ дайте в градусах.

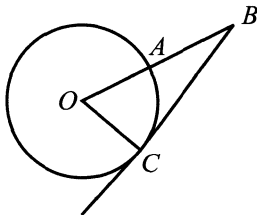


Рис. 68.

В7. Найдите значение выражения $\sqrt{435^2 - 300^2}$.

В8. На рисунке 69 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

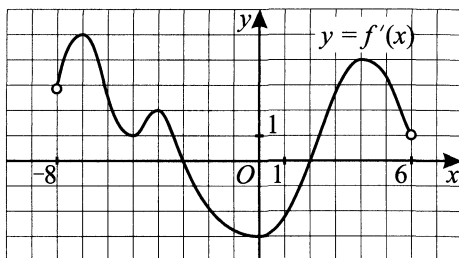


Рис. 69.

В9. Диагональ куба равна $\sqrt{48}$ (см. рис. 70). Найдите его объём.

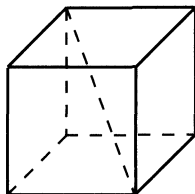


Рис. 70.

В10. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в среду в автобусе окажется меньше 30 пассажиров, равна 0,92. Вероятность того, что окажется меньше 22 пассажиров, равна 0,61. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 22 до 29.

В11. Боковые рёбра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны (см. рис. 71), каждое из них равно 6. Найдите объём пирамиды.

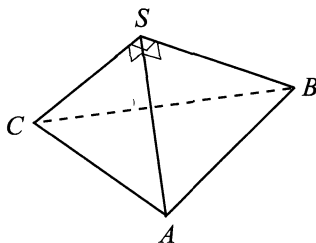


Рис. 71.

В12. В розетку подключены электроприборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку планируется подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление обогревателя (в омах), если для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не менее 30 Ом, а общее сопротивление проводников при параллельном подключении вычисляется по формуле $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, где R_1 и R_2 — сопротивления этих проводников.

В13. Смешали некоторое количество 31%-го раствора с таким же количеством 23%-го раствора. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

В14. Найдите точку минимума функции $y = 5 + 6x + x^2$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x} + 6 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-\frac{7\pi}{2}; -2\pi)$.

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E — середина ребра CC_1 . Найдите расстояние между прямыми AE и BC_1 , если $AB = 3$, $AD = 2$, $CC_1 = 4$.

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} - 10 < 0, \\ \lg^2(100x) + \lg^2\left(\frac{10}{x}\right) \geq \lg x^5 + 4. \end{cases}$$

С4. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону в отношении 2 : 3. Найдите основание треугольника, если его боковая сторона равна 15 см.

С5. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = a(x - 4), \\ \frac{1}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_y 3} = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

С6. Для натурального числа n $S(n)$ — сумма всех его натуральных делителей, $Q(n)$ — сумма всех обратных чисел к делителям числа n . Найдите n в каждом из следующих случаев:

а) $S(n) = 14$;

б) $Q(n) = \frac{24}{23}$;

в) $S(n) = 195$, $Q(n) = \frac{65}{24}$.

Вариант № 11

Часть 1

В1. В школе 1200 учеников, из них 16 февраля 5% отсутствовало на занятиях. Среди присутствовавших на занятиях учеников 40% пообедало в школьной столовой. Сколько учеников пообедали в школьной столовой в этот день?

В2. На рисунке 72 жирными точками показана цена акций компании «Сургутнефтегаз» на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни января 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена акции в рублях. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена акции «Сургутнефтегаза» на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.

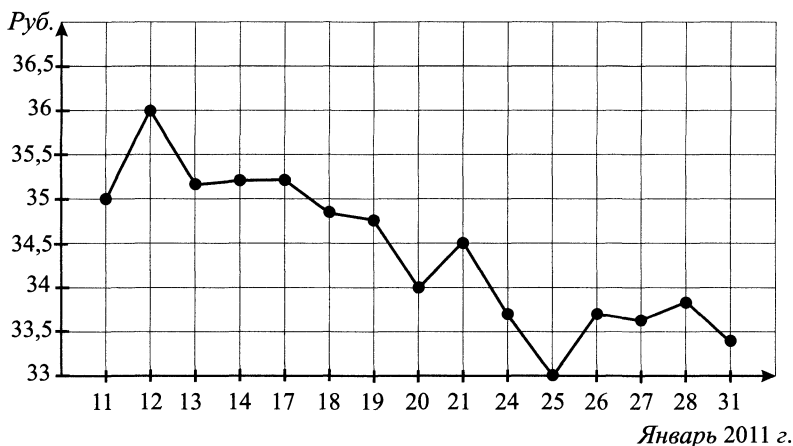


Рис. 72.

В3. Высота трапеции равна 15, а площадь — 225. Найдите среднюю линию трапеции.

В4. Для изготовления книжных полок библиотеке требуется заказать 64 одинаковых стекла в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла — $0,125 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на его резку и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	320	85
Б	360	75
В	440	50

В5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x+3} = -2$.

В6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $AC = 8$. Найдите тангенс угла A .

В7. Найдите значение выражения $\frac{n^{\frac{7}{4}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{6}}}$ при $n = 36$.

В8. На рисунке 73 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

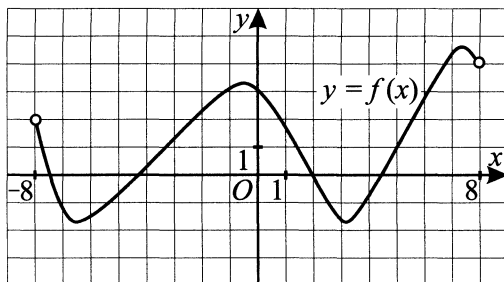


Рис. 73.

В9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ R — середина ребра BC , S — вершина (см. рис. 74). Известно, что $AB = 6$, а $SR = 9$. Найдите площадь боковой поверхности.

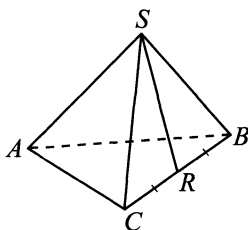


Рис. 74.

В10. Рядом находятся два банкомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,1 независимо от другого банкомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один из этих банкоматов исправен.

В11. Объем одного шара в 64 раза больше объема второго (см. рис. 75). Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

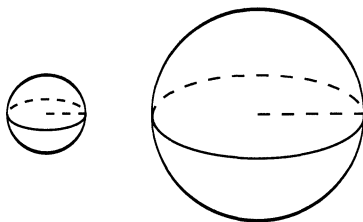


Рис. 75.

В12. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20%, если температура холодильника $T_2 = 310$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

В13. Оля и Дима читают одну и ту же книгу. Оля читает за час 50 страниц, а Дима только 30. Дети начали читать книгу одновременно и не прерывались, при этом Оля закончила читать на 36 минут раньше. Сколько страниц текста содержит книга?

В14. Найдите точку максимума функции $y = 6x^2 - x^3$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\log_{100} \left(2 \cos^2 x + 5 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 11 \right) = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right)$.

С2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, высота — 10. Точки K и M — середины рёбер AC и A_1B_1 соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AC_1 и KM .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x^2-1}(x^2+1) + 2 \log_{x^2+1}(x^2-1) \leq 3, \\ 25^x - 10^x - 10^{x+1} + 6 \cdot 4^{x+1} \leq 0. \end{cases}$$

С4. Окружность с центром O проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает луч CA в точке M и луч CB в точке N . $\angle AOM = \angle BON = 60^\circ$, расстояние от точки N до прямой AB равно 10. Найдите площадь $\triangle ABC$, если длины MN и AB отличаются в 4 раза.

С5. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^3, \\ |x| \cdot y \geq 4a \end{cases} \text{ имеет хотя бы одно решение.}$$

С6. Разбившись на бригады, 30 школьников пошли собирать яблоки. После окончания сбора школьники каждой бригады делят между собой поровну собранные этой бригадой яблоки, а остаток от такого деления (если он есть) отправляют в общий котёл, где будет вариться компот (котёл один на все 30 человек). Всего в саду на деревьях росло 336 яблок, и все они были собраны. Какое наибольшее число яблок может оказаться в котле, если:

а) в каждой бригаде 6 человек;

б) в бригадах может быть любое количество человек (причём в разных бригадах — разное)?

Вариант № 12

Часть 1

В1. Среди 50 000 жителей города 70% не интересуются футболом. Среди интересующихся 60% смотрели по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрели этот матч?

В2. На графике 76 показано изменение удельной теплоёмкости водного раствора некоторого вещества в зависимости от температуры. По горизонтали указывается температура в градусах Цельсия, по вертикали — удельная теплоёмкость в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$. Определите по рисунку наименьшую возможную удельную теплоёмкость раствора на исследуемом диапазоне температур. Ответ дайте в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$.

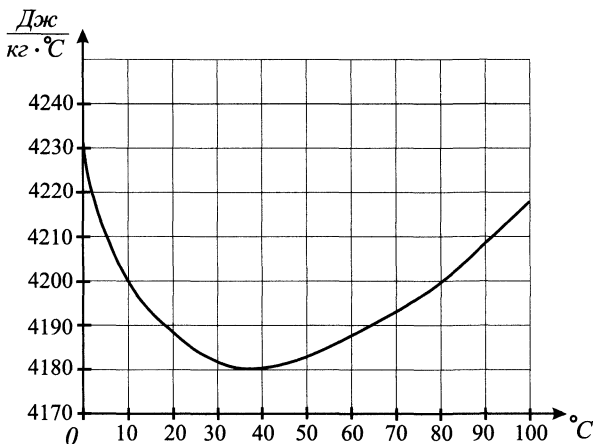


Рис. 76.

В3. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 2 и 18 (см. рис. 77).

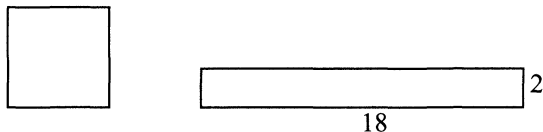


Рис. 77.

В4. В приведённой ниже таблице приведены тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 80 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ в выбранной фирме?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость одной минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	Бесплатно	Нет	12
Б	Бесплатно	20 мин — 150 руб.	14
В	50 руб.	15 мин — 50 руб.	13

* Если поездка длится меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной.

В5. Найдите корень уравнения $\sqrt{49 - 3x} = 2$.

В6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $BC = \sqrt{19}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B .

В7. Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{\frac{1}{27} \sqrt[4]{a}}}$ при $a = 23,72$.

В8. На рисунке 78 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-7; 10]$.

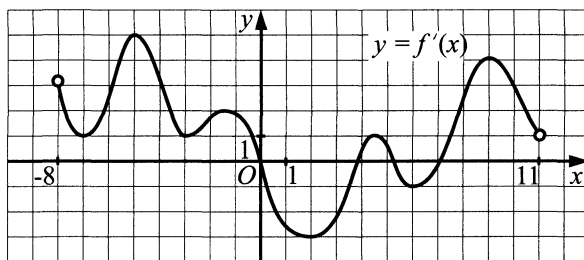


Рис. 78.

В9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M — середина ребра AC , S — вершина (см. рис. 79). Известно, что $SM = 5$, а площадь боковой поверхности равна 15. Найдите длину отрезка AB .

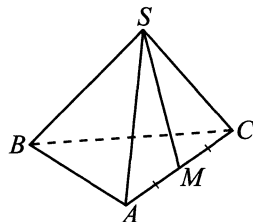


Рис. 79.

В10. Если футбольная команда А играет на домашнем стадионе, то она выигрывает у футбольной команды Б с вероятностью 0,4. Если А играет в гостях (на домашнем стадионе команды Б), то А выигрывает у Б с вероятностью 0,3. Команды А и Б играют два матча, по одному разу на домашнем стадионе каждой из них. Найдите вероятность того, что А выиграет оба матча.

В11. Объём конуса равен 20. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной (см. рис. 80). Найдите объём меньшего конуса.

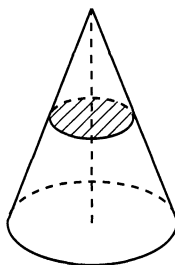


Рис. 80.

В12. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 2400° . Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

В13. Расстояние между городами А и В равно 850 км. Из города А в город В со скоростью 75 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В со скоростью 80 км/ч — второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{9}{x} + x + 16$ на отрезке $[-4; -1]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\log_8(2 \sin^2 x - 9 \sin(\frac{3\pi}{2} - x) + 5) = \frac{1}{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-4\pi; -\frac{5\pi}{2})$.

С2. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона основания равна 6, высота — 10. На рёбрах AC и $A_1 B_1$ отмечены точки K и M соответственно так, что $AK : KC = A_1 M : M B_1 = 2 : 1$. Найдите косинус угла между прямыми AC_1 и KM .

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x^2-1}(x^2+1) - 2 \log_{x^2+1}(x^2-1) \leq 1, \\ 7^{2x+2} - 4 \cdot 14^x - 1,25 \cdot 14^{x+2} + 5 \cdot 2^{2x+2} \leq 0. \end{cases}$$

С4. Окружность с центром O проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает луч CA в точке M и луч CB в точке N . $\angle AOM = \angle BON = 60^\circ$, площадь треугольника ABC равна $9\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если длины MN и AB отличаются в 3 раза.

С5. Найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^5, \\ -x \cdot |y| \geq 9a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

С6. Разбившись на бригады, 28 школьников пошли собирать яблоки. После окончания сбора школьники каждой бригады делят между собой поровну собранные этой бригадой яблоки, а остаток от такого деления (если он есть) отправляют в общий котёл, где будет вариться компот (котёл один на все 28 человек). Всего в саду росло на деревьях 304 яблока, и все они были собраны. Какое наибольшее число яблок может оказаться в котле, если:

а) в каждой бригаде 4 человека;

б) в бригадах может быть любое количество человек (причём в разных бригадах — разное)?

Вариант № 13

Часть 1

В1. Розничная цена учебника 156 рублей, она на 30% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5000 рублей?

В2. На диаграмме (см. рис. 81) показана среднемесячная температура воздуха в Ростове-на-Дону за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько в 2010 г. было месяцев, когда среднемесячная температура была ниже 10 градусов Цельсия.

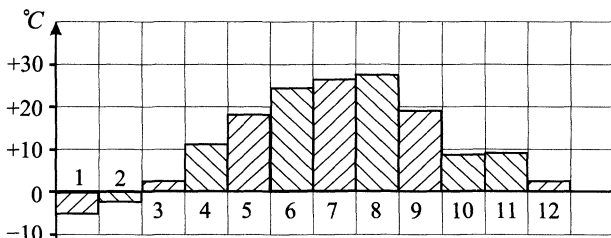


Рис. 81.

В3. Диагонали ромба $ABCD$ равны 15 и 10 (см. рис. 82). Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AD}$.

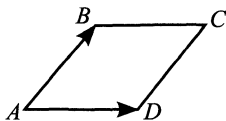


Рис. 82.

В4. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
1. Автобус	От дома до автобусной станции — 35 мин.	Автобус в пути: 2 ч 24 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком — 25 мин.
2. Электричка	От дома до станции железной дороги — 44 мин.	Электричка в пути: 1 ч 58 мин.	От станции до дачи пешком — 30 мин.
3. Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси — 35 мин.	Маршрутное такси в пути: 1 ч 46 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком — 76 мин.

В5. Найдите корень уравнения $\sqrt{51 - 13x} = 5$.

В6. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 2 : 1, меньшая его сторона равна 5 (см. рис. 83). Найдите диагональ заданного прямоугольника.

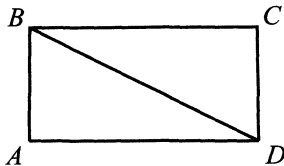


Рис. 83.

В7. Найдите значение выражения $\frac{12 \sin 76^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ}$.

В8. На рисунке 84 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите количество целых точек, входящих в эти промежутки.

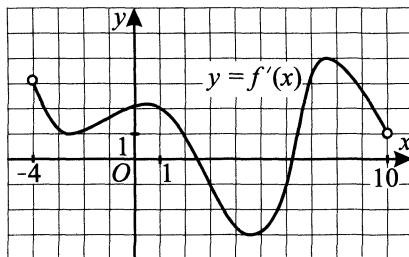


Рис. 84.

В9. Конус вписан в шар (см. рис. 85). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 15. Найдите объём шара.

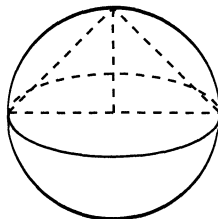


Рис. 85.

В10. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 30 до 39 делится на три?

В11. Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды $A_1 D B C_1$ (см. рис. 86).

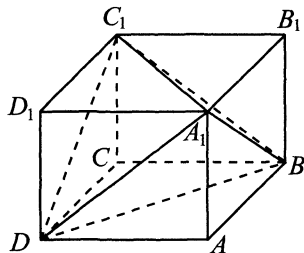


Рис. 86.

В12. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 250$ Гц и определяется следующим выражением:

$$f = f_0 \frac{c + u}{c - v} \text{ (Гц)}, \text{ где } c \text{ — скорость распространения сигнала в среде (в м/с); } u = 20 \text{ м/с и } v = 5 \text{ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости } c \text{ (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике } f \text{ будет не менее } 270 \text{ Гц?}$$

В13. Строительные фирмы учредили компанию с уставным капиталом 150 млн рублей. Первая фирма внесла 20% уставного капитала, вторая фирма — 22,5 млн рублей, третья — 0,3 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внесла четвёртая фирма.

Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставный капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 100 млн рублей причитается четвёртой фирме? Ответ дайте в миллионах рублей.

В14. Найдите точку минимума функции $y = \frac{9}{x} + x + 16$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\sin 2x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

C2. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция с основаниями AB и DC . Ребро SA , равное 18, перпендикулярно плоскости основания, $AB = 20$, $DC = 10$, $AD = 13$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью SCB .

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{\lg(\log_3^2 x + 1) - \lg(\log_3 x + 3)}{x + 5} \geq 0, \\ 36^x + 36\sqrt[4]{6} - 6^{x+\frac{1}{4}} < 6^{x+2} + \sqrt[4]{6} \log_6 0,5x - \log_6 (0,5x)^{6^x}. \end{cases}$$

C4. К окружности с центром O и радиусом 5 провели секущую AO , пересекающую окружность в точках M и M_1 , и касательную AB . Расстояние от точки A до точки касания B равно 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM .

C5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|x| \cdot (2a|x| - 6) = 7 - 4a - 2a^2 - a^2x^2$ имеет ровно 2 решения.

C6. В алфавите племени Умтис две буквы — А и У.

а) Сколько 7-буквенных слов может быть в их языке?

б) Сколько 9-буквенных слов можно составить на языке племени Умтис, если буква А не может встречаться 2 раза подряд?

в) Сколько 10-буквенных слов может быть в языке этого племени, если буква А не может встречаться три раза подряд, а буква У — 2 раза подряд?

Вариант № 14

Часть 1

V1. В доме, в котором живёт Маша, 12 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже любого подъезда находится по 3 квартиры. Маша живёт в квартире № 128. На каком этаже живёт Маша?

12. На диаграмме (см. рис. 87) показано число посетителей сайта «Инфовости» за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число посетителей. Определите по диаграмме номер месяца, когда число посетителей сайта впервые превысило 40 тысяч человек.

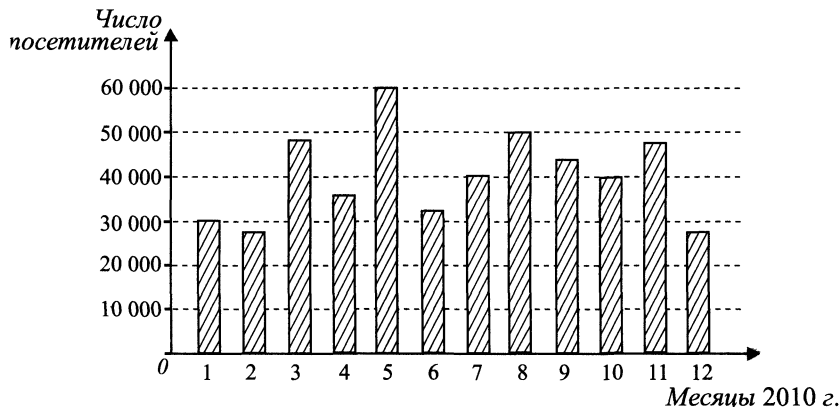


Рис. 87.

13. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 18 (см. рис. 88).

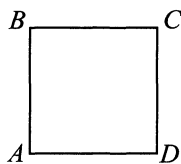


Рис. 88.

14. В первом банке один евро можно купить за 41,2 рубля. Во втором банке 20 евро — за 819 рублей. В третьем банке 25 евро стоят 1028 рублей. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 100 евро?

15. Найдите корень уравнения $\log_2(2x) = 3$.

16. Угол ACO равен 34° , его сторона CA касается окружности с центром O (см. рис. 89). Найдите градусную величину дуги AD , заключённой внутри этого угла.

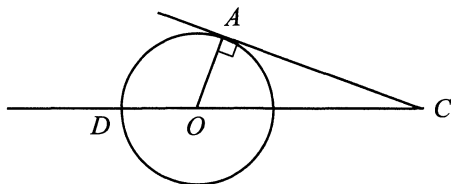


Рис. 89.

В7. Найдите значения выражения $\frac{15 \sin 68^\circ}{\sin 34^\circ \cdot \sin 56^\circ}$.

В8. На рисунке 90 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 4$ или совпадает с ней.

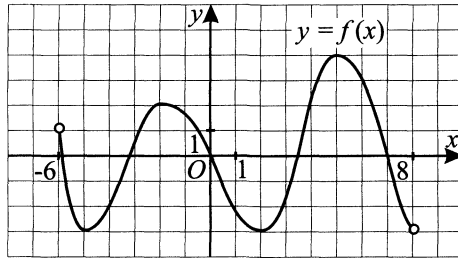


Рис. 90.

В9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке O . Объём пирамиды равен 54, $OS = 6$. Найдите площадь треугольника ABC .

В10. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 16 шахматистов, среди которых 4 представителя России, в том числе Василий Зайцев. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Зайцев будет играть с каким-либо шахматистом из России.

В11. В цилиндрический сосуд налили 5000 см^3 воды (см. рис. 91). Уровень воды при этом достигает высоты 24 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 18 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3 .

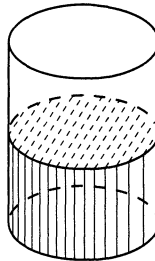


Рис. 91.

V12. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 13t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее семи метров?

V13. Лодка движется по течению со скоростью 16 км/ч, при этом от города A до города B она идёт 3 часа, а обратно — 5 часов. Определите скорость течения реки. Ответ укажите в км/ч.

V14. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 9}$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos 5x + 2 \sin 5x \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{24}\right)$.

C2. В основании прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольная трапеция $ABCD$ с $\angle B = 90^\circ$ и основаниями $AB = 20$, $CD = 15$, $AD = 7$. Найдите угол между плоскостью $A_1 B_1 C_1$ и плоскостью ADB_1 , если объём призмы равен $840\sqrt{6}$.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{\ln(5 \log_7 x + 10) - \ln(3 \log_7 x + 14)}{\ln(3 \log_7 x + 10) - \ln 4} \leq 0, \\ 4^x - 2^{x+\frac{1}{3}} + 2^x \log_2 0,25x + 16 \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \log_2 0,25x - 16 \cdot 2^x > 0. \end{cases}$$

C4. К окружности с центром O проведена секущая AO и касательная AB . Расстояние от точки A до точки касания равно 40, расстояние от A до ближайшей точки пересечения прямой и окружности равно 20. Найдите радиус окружности, которая касается прямых AB и AO и отрезка OB .

C5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|x| \cdot (3a|x| - 4) + a(ax^2 + 9) + 3a^2 + 11 = 0$ имеет ровно 2 корня.

C6. В алфавите племени Шашашу 6 букв.

а) Сколько 6-буквенных слов можно составить, в которых все буквы различны?

б) Сколько 6-буквенных слов можно составить, в которых одна буква встречается дважды, а все остальные различны?

в) Сколько 6-буквенных слов можно составить, в которых каждая буква встречается не более 2 раз?

Вариант № 15

Часть 1

В1. В доме, в котором живёт Петя, один подъезд. На каждом этаже находится по 5 квартир. Петя живёт в квартире № 37. На каком этаже живёт Петя?

В2. На графике (рис. 92) показано изменение удельной теплоёмкости водного раствора некоторого вещества в зависимости от температуры. По горизонтали указывается температура в градусах Цельсия, по вертикали — удельная теплоёмкость в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$. Определите по рисунку наименьшую возможную удельную теплоёмкость раствора в диапазоне температур от 20° до 90° . Ответ дайте в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$.

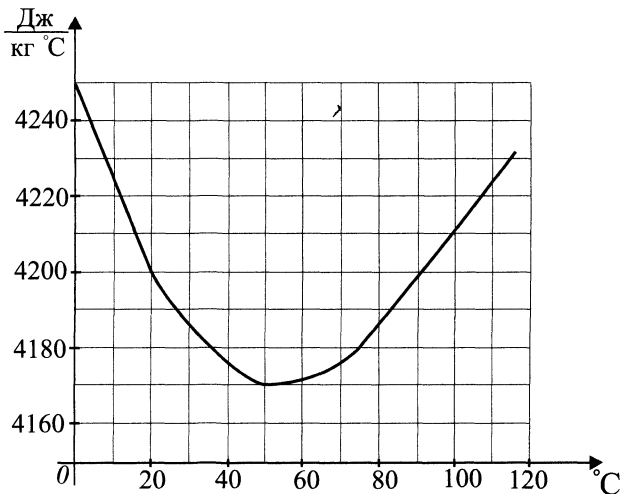


Рис. 92.

В3. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9π . Найдите площадь заштрихованной фигуры. В ответе запишите результат $\frac{S_{\text{фигуры}}}{\pi}$ (см. рис. 93).

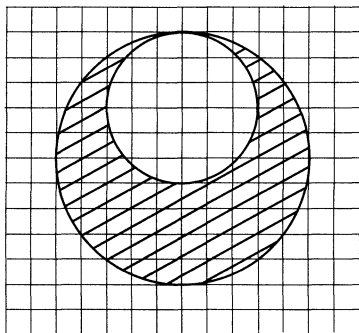


Рис. 93.

В4. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки в другие регионы, либо скидку 20% на услуги мобильного Интернета. Клиент проанализировал распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 400 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 600 рублей на звонки в другие регионы и 500 рублей на мобильный Интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохранятся в прежнем объёме?

В5. Найдите корень уравнения $\log_3(4+x) = \log_3 4$.

В6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота,

$AB = 18$, $\sin \angle A = \frac{1}{3}$. Найдите BH .

В7. Найдите значение выражения $\frac{7 \operatorname{tg} 138^\circ}{0,2 \operatorname{tg} 42^\circ}$.

В8. Прямая $y = -8x + 1$ параллельна касательной к графику функции $y = 2x^2 - 2x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

В9. Шар вписан в цилиндр (см. рис. 94). Площадь поверхности шара равна 18. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

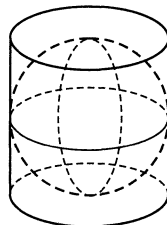


Рис. 94.

В10. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 4, но не дойдя до отметки 7 часов.

В11. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду (см. рис. 95). Уровень воды достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же по форме сосуд, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

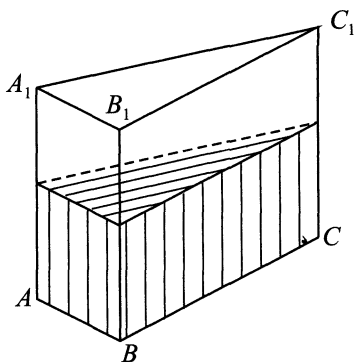


Рис. 95.

В12. Камнетательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 14 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 2 метров?

В13. Баржа в 8 : 00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 21 км по реке от пункта A . Пробыв в пункте B 1 час, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16 : 00. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи 8 км/ч.

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(4x + 2) - 8$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{5\pi}{6}; 3\pi\right]$.

C2. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α , $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Под каким углом наклонены к плоскости основания боковые грани пирамиды?

C3. Решите неравенство $\log_3 x + \log_x 3 > 2$.

C4. Расстояние от центра описанной окружности равнобедренного треугольника до его основания равно 3. Найдите боковую сторону этого треугольника, если его основание равно 8.

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(a-1)x^2 + (2a+3)x + a = 0$ имеет два различных корня и только меньший из корней принадлежит промежутку $(-2; 3]$.

C6. а) Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате 8×8 , чтобы в каждом квадрате 3×3 была ровно одна закрашенная клетка? Какое наибольшее количество клеток можно закрасить указанным образом?

б) Если $m \geq k$, то какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате $m \times m$, чтобы в каждом квадрате $k \times k$ была ровно одна закрашенная клетка?

в) А какое наибольшее количество (для условий пункта б)?)

Вариант № 16

Часть 1

B1. Футболка стоила 600 рублей. После снижения цены она стала стоить 330 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

В2. На рисунке 96 точками показано суточное количество осадков, выпавших с 11 по 23 сентября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавшее в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 4 миллиметра осадков.

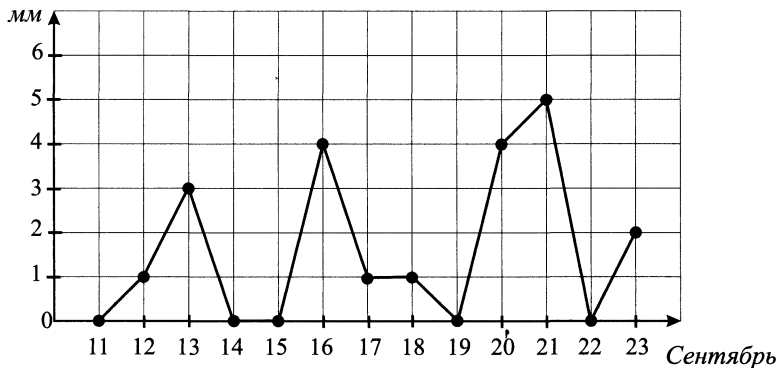


Рис. 96.

В3. Найдите площадь заштрихованной фигуры на координатной плоскости (см. рис. 97).

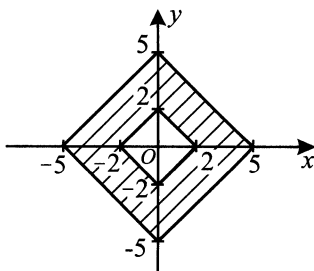


Рис. 97.

В4. В среднем гражданин Д. в дневное время расходует 150 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 70 кВт·ч электроэнергии. Раньше у Д. в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,80 руб. за кВт·ч. Год назад Д. установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии опла-

чивается по тарифу 2,80 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 1,10 руб. за кВт·ч.

В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы Д. за этот период, если бы не поменялся счётчик? Ответ дайте в рублях.

В5. Найдите корень уравнения $17^{x+2} = \left(\frac{1}{17}\right)^x$.

В6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = \sqrt{153}$, $BC = 12$. Найдите котангенс внешнего угла при вершине A .

В7. Найдите значение выражения $\frac{9}{4 \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{113\pi}{3}\right)}$.

В8. На рисунке 98 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

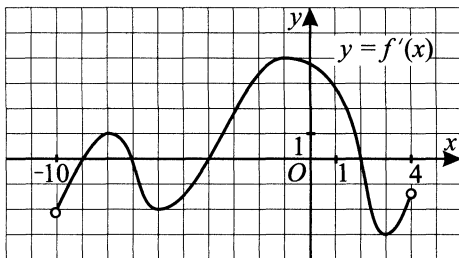


Рис. 98.

В9. В правильной четырёхугольной пирамиде (см. рис. 99) высота равна 5, боковое ребро равно 13. Найдите её объём.

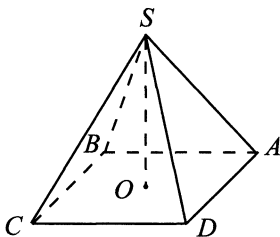


Рис. 99.

В10. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые четыре раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

В11. В цилиндрический сосуд налили 3000 см³ воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см (см. рис. 100). В воду полностью погрузили деталь, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 4 см. Чем равен объём детали? Ответ выразите в см³.

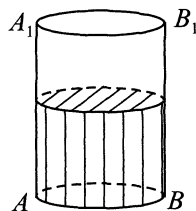


Рис. 100.

В12. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1492$ К, $a = -17$ К/мин², $b = 153$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1730 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите наибольшее время после начала работы прибора, через которое его нужно отключить. Ответ выразите в минутах.

В13. В результате смешивания 25%-го и 15%-го растворов серной кислоты получили 750 г 20%-го раствора. Сколько граммов 15%-го раствора было взято?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 4)^5 - 5x$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{4\pi}{3}; 4\pi\right]$.

С2. Боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α , $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Под каким углом наклонены к плоскости основания боковые рёбра пирамиды?

С3. Решите неравенство $\log_2 x + 2 \log_x 2 < 3$.

С4. Расстояние от центра описанной окружности равнобедренного треугольника до его основания равно 1. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника, если его боковая сторона равна $2\sqrt{6}$.

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых ровно один из корней уравнения $x^2 + (3a - 1)x + 2a + 3 = 0$ принадлежит промежутку $(-1; 4)$.

С6. а) Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате 10×10 , чтобы в каждом квадрате 4×4 было ровно две закрашенных клетки? Какое наибольшее количество клеток можно закрасить указанным образом?

б) Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в квадрате $m \times m$, чтобы в каждом квадрате $k \times k$ было ровно две закрашенных клетки? Считать, что $m \neq ck + 1$ для любого $c \in \mathbb{N}$, $m \geq k$.

в) А какое наибольшее количество (для условий пункта б)?

Вариант № 17

Часть 1

В1. На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Ромашки стоят 20 рублей за штуку. У Вани есть 250 рублей. Какое наибольшее количество цветов может купить Ваня на эти деньги, чтобы поздравить Машу с Днём рождения?

В2. На диаграмме (см. рис. 101) показано число автомобилей, проданных фирмой за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество автомобилей. Определите по диаграмме номер месяца, когда впервые было продано менее 3000 автомобилей.

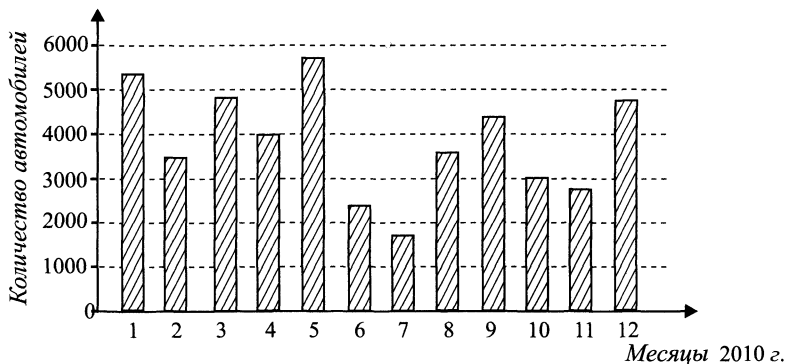


Рис. 101.

В3. На клетчатой бумаге с клетками размером $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ изображён треугольник (см. рис. 102). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

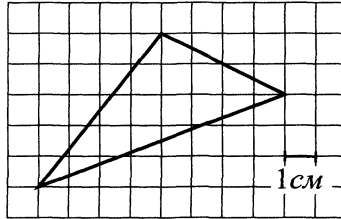


Рис. 102.

В4. Семье из трёх человек необходимо добраться из Москвы в Ростов-на-Дону. Можно доехать поездом, а можно на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1120 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 км, расстояние по шоссе между этими городами составляет 1200 км, а цена бензина равна 30 рублей за литр. Сколько рублей обойдётся наиболее дешёвая поездка на троих?

В5. Найдите корень уравнения $3x^2 - 7x - 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

В6. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную на сторону BC (см. рис. 103), если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

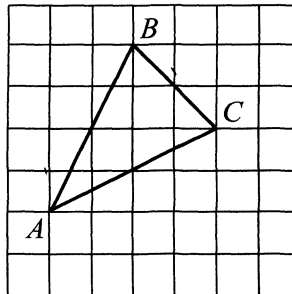


Рис. 103.

В7. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{65}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

В8. На рисунке 104 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 11)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

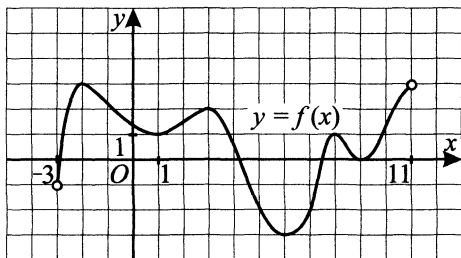


Рис. 104.

В9. Найдите тангенс угла $C_2C_3B_2$ многогранника, изображённого на рисунке 105. Все двугранные углы многогранника прямые.

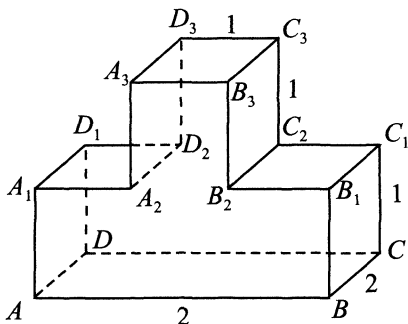


Рис. 105.

В10. Из произведённых на заводе лампочек 5% имеют дефект. При контроле качества продукции отбраковывается 90% дефектных лампочек. Остальные лампочки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная до контроля качества лампочка попадёт в продажу.

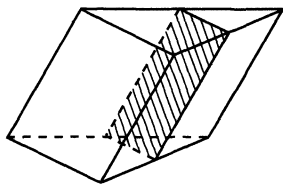


Рис. 106.

В11. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 106). Объём отсечённой треугольной призмы равен 3. Найдите объём исходной призмы.

В12. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 420$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 2520 нм?

В13. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 24 кг, содержащий 45% меди. Сколько килограммов чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 40% меди?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = 7 \ln(x + 7) - 7x + 8$ на отрезке $[-6, 5; 0]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $2^{1+2 \sin 2x} - 5 \cdot 2^{\sin 2x} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

С2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K — середины рёбер AD , CD и BB_1 соответственно. Найдите площадь сечения куба плоскостью MNK , если ребро куба равно 12.

С3. Решите неравенство $\log_{2x}(5-x) \cdot \log_{5-x}(2x) + \log_x(2x+3) \geq 3$.

С4. В равнобедренную трапецию с основаниями AB и CD вписана окружность с центром O . При этом угол AOB в два раза меньше угла COD . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если её основание равно 6.

С5. При каких значениях a уравнение $6^x + a^2 = a(2^x + 3^x)$ имеет корни и все они принадлежат отрезку $[-1; 1]$?

С6. Число 2013 представлено в виде суммы нескольких трёхзначных чисел.

а) Могут ли в этой сумме быть только слагаемые, записываемые одинаковыми цифрами?

б) Какое наибольшее число слагаемых с одинаковыми цифрами может быть в этой сумме?

в) Какое наибольшее число различных слагаемых с одинаковыми цифрами может быть в этой сумме?

Вариант № 18

Часть 1

В1. Магазин делает пенсионерам скидку на определённое количество процентов от цены покупки. Пакет кефира стоит в магазине 45 рублей. Пенсионер заплатил за пакет кефира 41 рубль 40 копеек. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

В2. На диаграмме (см. рис. 107) показана месячная норма осадков для города Красноярска. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество осадков в мм. Определите число месяцев, для каждого из которых норма осадков составляет менее 30 мм.

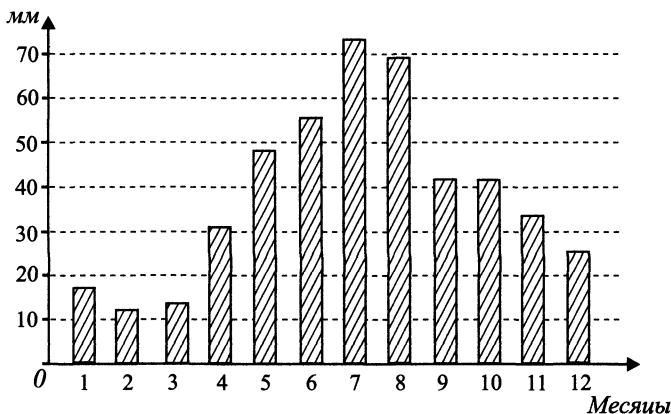


Рис. 107.

В3. Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 108).

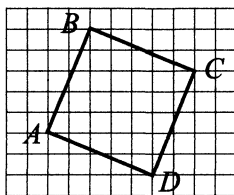


Рис. 108.

В4. Для остекления витрин требуется заказать 30 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,4 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	280	21	
Б	290	16	При заказе более 15 м^2 стекла резка — бесплатно
В	300	18	При заказе (без учёта резки) на сумму свыше 3500 руб. резка — бесплатно

В5. Найдите корень уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

В6. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 60 (см. рис. 109). Найдите её среднюю линию.

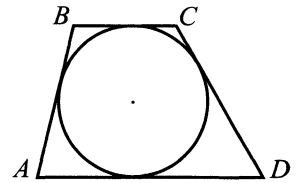


Рис. 109.

В7. Найдите значение выражения $\frac{h(x-7)}{h(x-10)}$, если $h(x) = 5^x$.

В8. На рисунке 110 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$ на промежутке $[-2; 5]$.

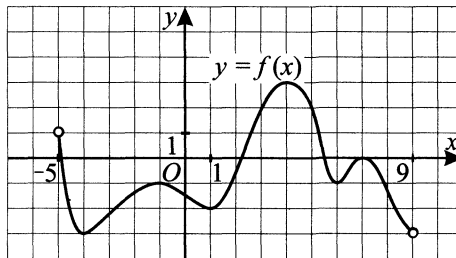


Рис. 110.

В9. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 7$, $AC = 8\sqrt{2}$. Найдите боковое ребро SC .

В10. Завод производит мониторы. В среднем на 100 качественных мониторов приходится 10 мониторов со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный монитор этого завода окажется качественным. Результат округлите до сотых.

В11. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 111), радиус основания которого равен 5. Объём параллелепипеда равен 400. Найдите высоту цилиндра.

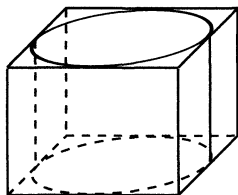


Рис. 111.

В12. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 12,5$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

В13. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, то общий доход семьи вырос бы на 63%. Если бы зарплата жены уменьшилась вчетверо, то общий доход семьи уменьшился бы на 24%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет стипендия дочери?

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 49}{x}$ на отрезке $[-7; -1]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $3^{1+2 \operatorname{tg} 3x} - 10 \cdot 3^{\operatorname{tg} 3x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

С2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K — середины рёбер AD , CD и $A_1 B_1$ соответственно. Найдите площадь сечения куба плоскостью MNK , если ребро куба равно 6.

С3. Решите неравенство $\log_x(6-x) \cdot \log_{6-x} x + \log_x(3x+4) \leq 3$.

С4. В равнобедренную трапецию с основаниями AB и CD вписана окружность с центром O . При этом угол AOB в три раза меньше угла COD . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если её основание равно 1.

С5. При каких значениях b уравнение $10^x + b(2^x + 5^x) + b^2 = 0$ имеет корни и все они принадлежат отрезку $[2; 5]$?

С6. Число 2013 представлено в виде суммы нескольких трёхзначных чисел. Трёхзначное число, каждая следующая цифра которого на один больше предыдущей, назовём «растущим», например, 456.

а) Какое наибольшее количество «растущих» чисел может быть в этой сумме?

б) Какое наибольшее количество различных «растущих» чисел может быть в этой сумме?

в) Может ли эта сумма состоять только из «растущих» чисел?

Вариант № 19

Часть 1

В1. На счету Машиного мобильного телефона было 67 рублей, а после разговора с Леной осталось 10 рублей. Сколько минут длился разговор с Леной, если одна минута разговора стоит 1 рубль 50 копеек?

В2. На графике (рис. 112) показано изменение скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не более 70 км/ч?

В3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(0; 1)$, $(1; 7)$, $(7; 6)$, $(6; 0)$ (см. рис. 113).

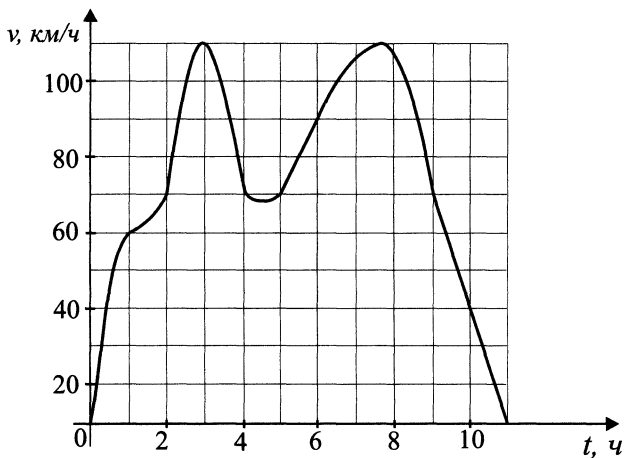


Рис. 112.

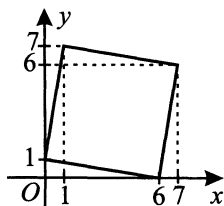


Рис. 113.

В4. Строительной фирме нужно приобрести 80 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей стоит самая дешёвая покупка с доставкой?

Поставщик	Стоимость пенобетона (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2700	6800	
Б	3100	3200	При заказе на сумму свыше 250 000 руб. доставка бесплатно
В	2800	13 500	При заказе на сумму свыше 200 000 руб. доставка бесплатно

В5. Найдите корень уравнения $\log_3(37x + 7) = 4$.

В6. PQ и KF — диаметры окружности с центром в точке O (см. рис. 114). Угол PQF равен 42° . Найдите угол KOP . Ответ дайте в градусах.

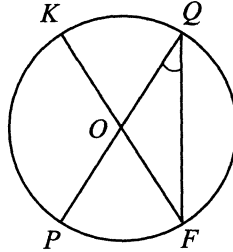


Рис. 114.

В7. Найдите значение выражения $(16b^2 - 121) \cdot \left(\frac{1}{4b - 11} - \frac{1}{4b + 11} \right) - b + 3$ при $b = 29$.

В8. На рисунке 115 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 9x^2 - 15x + 18$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

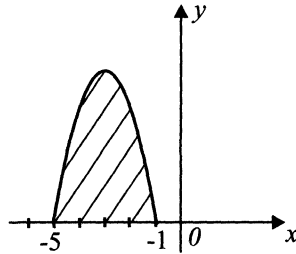


Рис. 115.

В9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AB = 3\sqrt{7}$, $AD = 9$, $AA_1 = 6$. Найдите синус угла между прямыми CD и $A_1 C_1$.

В10. Одновременно бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Результат округлите до сотых.

В11. Рёбра тетраэдра равны 3. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер (см. рис. 116).

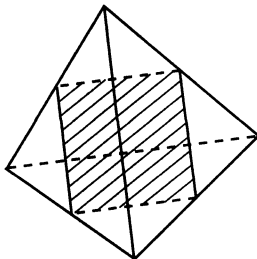


Рис. 116.

В12. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 10^7$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе (в киловольтах), если после выключения телевизора прошло не менее 42 с.

В13. Велосипедист проехал расстояние в 120 км от A до B с постоянной скоростью. На следующий день он проехал это же расстояние от B до A со скоростью на 5 км больше прежней. По дороге он сделал две остановки по 1 часу, однако в пункт A он добрался за то же время, что и потратил на дорогу из A в B . Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A . Ответ дайте в км/ч.

В14. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 + 7x + 7)e^{x-5}$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\cos x - 2 \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4} = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -\pi]$.

С2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $A_1 C_1 D$ и $BC_1 D$.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x \leq 15 \cdot 2^x + 34, \\ (x - 4) \log_x(x + 3) \geq 0. \end{cases}$

С4. В квадрате, длина стороны которого равна 8, расположен прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит ровно одна вершина прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что длина его диагонали равна $4\sqrt{5}$.

С5. При каких положительных значениях параметра a неравенство $\frac{x+a}{ax-3} \geq \frac{2}{x}$ справедливо при всех $x > 9$?

С6. В порту 90% населения говорит по-английски, 85% — по-немецки, 80% — по-французски и 75% — по-испански.

а) Какой наибольший процент населения может говорить на всех четырёх языках сразу?

б) Какой наименьший процент населения может говорить на всех четырёх языках сразу?

Вариант № 20

Часть 1

В1. Тетрадь стоит 16 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 40 тетрадей, если при покупке более 30 тетрадей магазин делает скидку 15% от стоимости всей покупки?

В2. На графике (см. рис. 117) показано изменение скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не менее 70 км/ч?

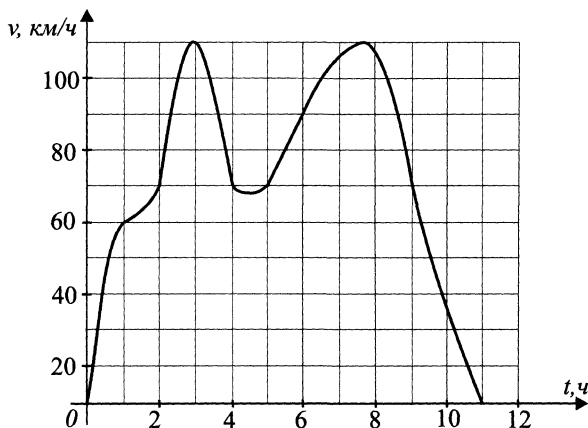


Рис. 117.

В3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 118.

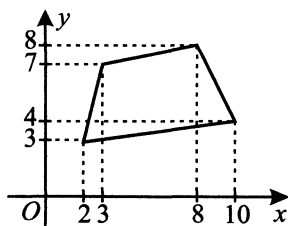


Рис. 118.

В4. Строительной фирме нужно приобрести 90 кубометров строительного бруса у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	4500	20 000	При заказе на сумму свыше 500 тыс. руб. доставка бесплатно
Б	4700	14 000	При заказе на сумму свыше 200 тыс. руб. доставка бесплатно
В	4600	10 000	При заказе на сумму свыше 450 тыс. руб. доставка бесплатно

В5. Найдите корень уравнения $x = \frac{x}{3x - 2}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите больший из них.

В6. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 120° и 82° (см. рис. 119). Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

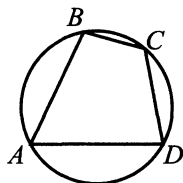


Рис. 119.

В7. Найдите значение выражения $\frac{\log_{17} 1,5}{\log_{17} 7} + \log_7 \log_2 \sqrt[3]{4}$.

В8. На рисунке 120 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(9) - F(-2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

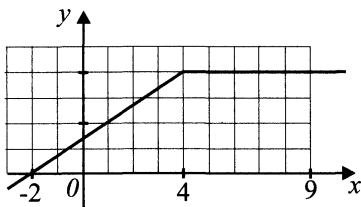


Рис. 120.

В9. Найдите угол ABD многогранника, изображённого на рисунке 121. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

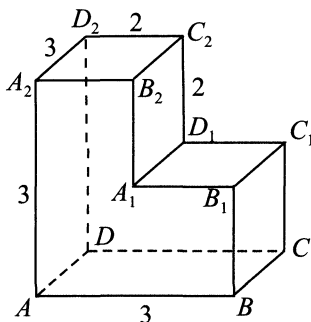


Рис. 121.

В10. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая команда начнёт игру с мячом. Команда «Вымпел» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Вымпел» выиграет жребий ровно один раз.

В11. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 122. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

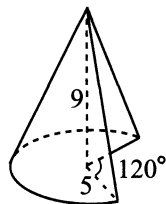


Рис. 122.

В12. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $v = 40$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1,3$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$A = \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 3,5$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 126 000 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

В13. Вторая труба пропускает в минуту на 6 л воды меньше, чем первая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 140 л она заполнит на 5 минут быстрее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 100 л?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = 4 \sin x + 4x - 2\pi$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $1 + \sin 2x - \sin x - \cos x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

С2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M и N — середины рёбер BB_1 и DD_1 соответственно. Найдите угол между плоскостями AMN и CMN .

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^x \geq 5 \cdot 3^x + 24, \\ (x + 2) \log_{x-1}(x + 1) \leq 0. \end{cases}$

С4. В квадрате, длина стороны которого равна 1, расположен прямоугольник площадью $\frac{1}{2}$ так, что на каждой стороне квадрата лежит ровно одна вершина прямоугольника. Найдите длину диагонали прямоугольника.

С5. При каких положительных значениях параметра a неравенство $\frac{x + 3a}{ax - 2} \geq \frac{6}{x}$ справедливо при всех $x > 6$?

С6. Среди 100 отдыхающих провели опрос, в результате которого выяснилось, что 95 из них были в Сочи, 85 — в Анапе, 75 — в Туапсе и 65 — в Геленджике.

а) Какое наибольшее количество отдыхающих могло быть во всех курортных городах?

б) Какое наименьшее количество отдыхающих могло быть во всех курортных городах?

Вариант № 21

Часть 1

В1. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 40 км/ч? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

В2. На графике (см. рис. 123) показано изменение температуры воздуха с 14 по 31 декабря. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха за этот период.

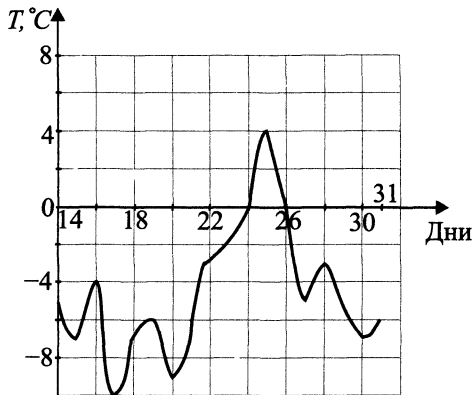


Рис. 123.

В3. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 124).

В4. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Через пункт B едет грузовик со средней скоростью 30 км/ч, через пункт C едет автобус со средней скоростью 43 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 64 км/ч. На рисунке 125 показана схема дорог и расстояние в километрах между пунктами

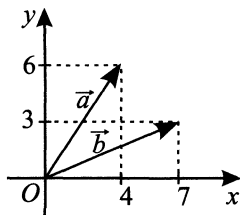


Рис. 124.

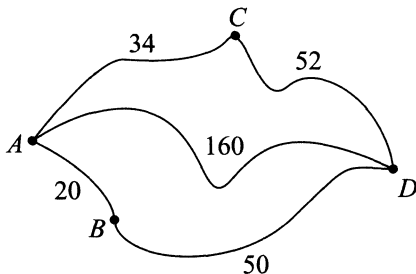


Рис. 125.

по дорогам. Все три машины одновременно выехали из A . Какой автотранспорт доберётся до D позже других? В ответе укажите, сколько часов он будет находиться в дороге.

В5. Найдите корень уравнения $\ln \frac{12}{x-4} = \ln(x+7)$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

В6. Вписанные углы BAD и ADC опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 22° и 58° (см. рис. 126). Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.

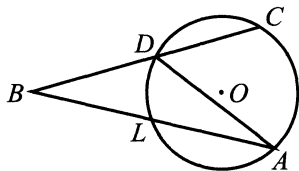


Рис. 126.

В7. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,4$.

В8. На рисунке 127 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-4, -3, -2, -1, 1$. В какой из этих точек значение производной данной функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.

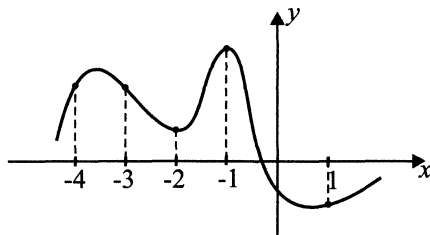


Рис. 127.

В9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 7. Найдите тангенс угла $AD_1 D$.

В10. На рисунке 128 изображён лабиринт. Крыса заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад крыса не может, поэтому на каждом разветвлении крыса выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью крыса придёт к выходу А.

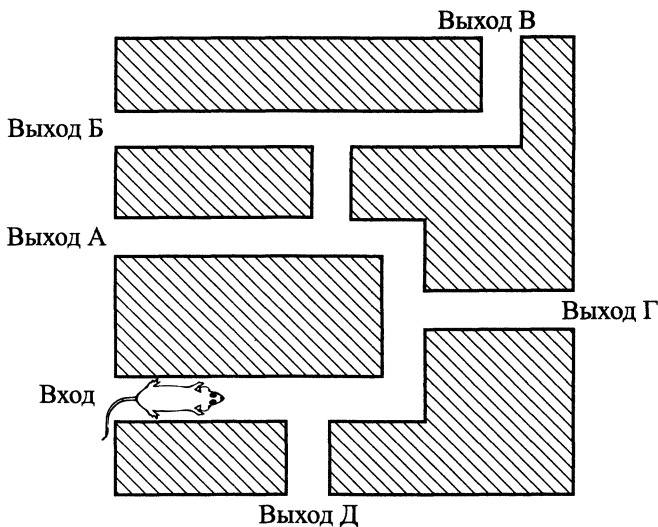


Рис. 128.

В11. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30° (см. рис. 129). В ответе укажите значение $\frac{V}{\pi}$.

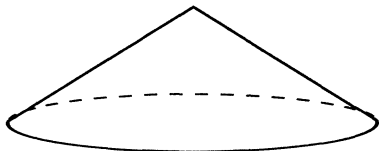


Рис. 129.

В12. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - kt\sqrt{2gH_0} + \frac{g}{2}k^2t^2, \text{ где } H_0 = 5 \text{ м — начальный уровень воды,}$$

t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $k = \frac{1}{200}$ —

отношение площадей поперечных сечений крана и бака, $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. К какому моменту времени высота столба воды в баке составит не более 4,05 м? Ответ приведите в секундах.

В13. Два маляра могут выполнить работу по покраске стен помещения за 15 дней, а первый из них самостоятельно — за 20 дней. Сколько дней понадобится второму маляру, чтобы выполнить эту работу самостоятельно?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = 5\sqrt{2} \sin x - 5x + \frac{5\pi}{4} - 3$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\sin x(3 \operatorname{ctg} x - \sin x) = 3 \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-\frac{13\pi}{2}; -4\pi\right].$$

С2. Основанием пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC , для которого $AB = AC = 50$ и $BC = 60$. Грань BCD перпендикулярна основанию и $BD = CD$. Вычислите радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 7.

С3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{2x}{x^2 - 2x + 5} + \frac{3x}{x^2 + 2x + 5} \leq \frac{7}{8}, \\ x \log_3 \left(\frac{x}{3} + 2 \right) \geq 8 \cdot \log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{x}{3} + 2 \right). \end{cases}$$

С4. В трапеции с боковыми сторонами 13 и 15 и основаниями 10 и 24 проведена диагональ. В каждый из образовавшихся треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей с проведённой диагональю.

С5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение
$$\frac{9^{-x^2} - a \cdot 3^{1-x^2} + a}{3^{1-x^2} - 1} = 2$$
 имеет ровно 2 корня.

С6. Имеется двадцать восемь литровых сосудов, содержащих 1 см^3 , 2 см^3 , 3 см^3 , ..., 28 см^3 воды. Из сосуда A разрешается перелить в сосуд B столько воды, сколько имеется в B (при условии, что в A не меньше воды, чем в B). Можно ли после нескольких переливаний:

а) добиться того, чтобы в сосудах вновь оказалось 1 см^3 , 2 см^3 , 3 см^3 , ..., 28 см^3 воды, но при этом ни в одном из них не было бы первоначального её количества?

б) добиться того, чтобы в каких-то девяти сосудах оказалось по 5 см^3 воды, а в остальных — 10 см^3 , 11 см^3 , 12 см^3 , ..., 28 см^3 воды?

в) перелить всю воду в один сосуд?

Вариант № 22

Часть 1

В1. Магазин покупает чайники по оптовой цене 420 рублей за штуку, а продаёт с наценкой 25%. Какое наибольшее число таких чайников можно купить в этом магазине за 3400 рублей?

В2. На рисунке 130 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 16 по 28 марта. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавшее в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку количество дней рассматриваемого периода, когда выпадало 4 и более миллиметров осадков.

В3. Площадь круга равна $\frac{9}{\pi}$. Найдите длину окружности, ограничивающей данный круг.

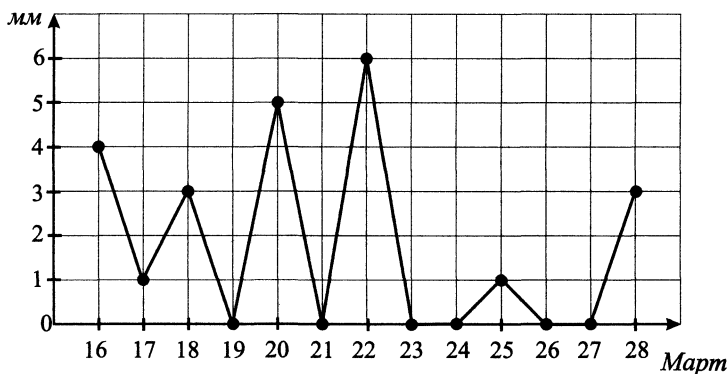


Рис. 130.

В4. Из пункта A в пункт D ведут три дороги (см. рис. 131, расстояние между пунктами указано в километрах). Через пункт B едет грузовик со средней скоростью 28 км/ч, через пункт C едет легковой автомобиль со скоростью 58 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, и по ней движется автобус со средней скоростью 44 км/ч. Все три машины одновременно выехали одновременно из пункта A . Какой автотранспорт добрался до D раньше других? В ответе укажите, сколько минут он находился в дороге.

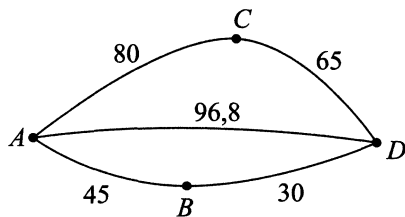


Рис. 131.

В5. Решите уравнение $2^{8-2x} = 2^{x^2}$. Если оно имеет несколько корней, то в ответе укажите меньший из них.

В6. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 16. Косинус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите высоту трапеции.

В7. Найдите значение выражения $(5^{\log_2 5})^{\log_5 4}$.

В8. На рисунке 132 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, -4, -2, -1, 3$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

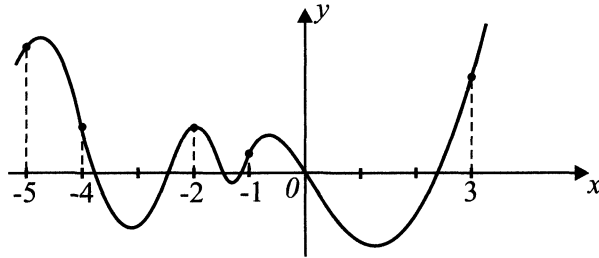


Рис. 132.

В9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — середина ребра AA_1 , точка F — середина ребра $A_1 B_1$, точка N — середина ребра $A_1 D_1$. Найдите угол NFM . Ответ дайте в градусах.

В10. Две фабрики выпускают одинаковые лампочки. Первая фабрика выпускает 60% этих лампочек, вторая — 40%. Среди продукции первой фабрики 3% лампочек дефектные, среди продукции второй фабрики — 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка окажется дефектной.

В11. Во сколько раз уменьшится объём конуса (см. рис. 133), если диаметр его основания уменьшить в 2,5 раза, а высоту оставить прежней?

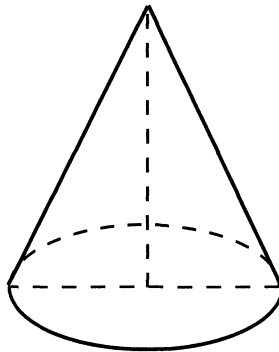


Рис. 133.

В12. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 490$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука в воздухе

(в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 340$ м/с. Ответ выразите в м/с.

В13. Поезд, двигаясь со скоростью 70 км/ч, проезжает мимо платформы за 45 секунд. Определите длину платформы (в метрах), если длина поезда 600 м.

В14. Найдите точку минимума функции $y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 2$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\cos x(\operatorname{tg} x - \cos x) = -\sin^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[4\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

С2. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 5, 12, 13. Некоторая плоскость отсекает от боковых рёбер этой призмы, проходящих через вершины большего и среднего углов основания, отрезки, равные 10 каждый (считая от плоскости основания), а от ребра, проходящего через вершину меньшего угла основания, — отрезок 15 соответственно. Найдите объём и площадь полной поверхности фигуры, ограниченной плоскостью основания призмы, плоскостями боковых граней и плоскостью сечения.

С3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{2x}{4x^2 + 3x + 8} + \frac{3x}{4x^2 - 6x + 8} > \frac{1}{6}, \\ (7^{-x} + 2 \cdot 3^x)^{\log_5 x + \log_x 5 - 2} \leq 1. \end{cases}$$

С4. В трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27 проведена диагональ. В каждый из образовавшихся треугольников вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей с проведённой диагональю.

С5. При каких значениях a уравнение $2 \log_3(5 - a - x) = \log_{\sqrt{3}}(5 - x^2 - 4x)$ имеет единственное решение?

С6. Имеется шестьдесят двухлитровых сосудов, содержащих 1 см^3 , 2 см^3 , 3 см^3 , ..., 60 см^3 воды. Из сосуда *A* разрешается перелить в сосуд *B* столько воды, сколько имеется в *B* (при условии, что в *A* не меньше воды, чем в *B*). Можно ли после нескольких переливаний:

а) добиться того, чтобы в сосудах вновь оказалось 1 см^3 , 2 см^3 , 3 см^3 , ..., 60 см^3 воды, но при этом ни в одном из них не было бы первоначального её количества?

б) добиться того, чтобы в каких-то девяти сосудах оказалось по 5 см^3 воды, а в остальных — 10 см^3 , 11 см^3 , 12 см^3 , ..., 60 см^3 воды?

в) перелить всю воду в один сосуд?

Вариант № 23

Часть 1

В1. Магазин, делая наценку 50%, продаёт канцелярские наборы по цене 90 рублей за штуку. Какое наибольшее число таких наборов может закупить хозяин этого магазина на 4300 рублей?

В2. На рисунке 134 точками показана цена акций компании «Сургутнефтегаз» на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни января 2011 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена акции в рублях. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней рассматриваемого периода цена акции «Сургутнефтегаза» на момент закрытия торгов была выше 34 рублей за акцию.

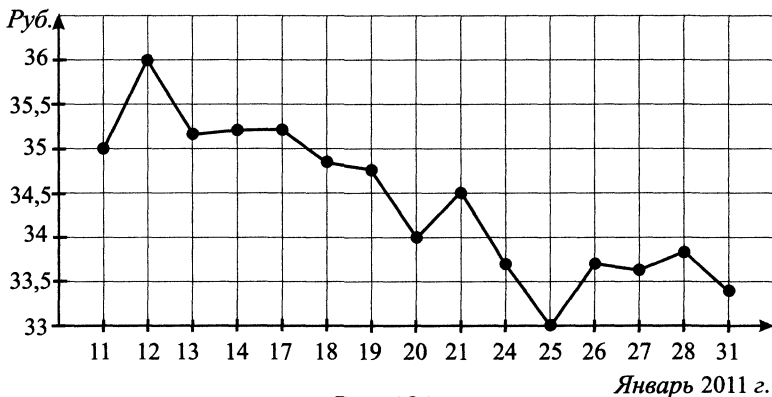


Рис. 134.

В3. Точки $O(0; 0)$, $A(2; 5)$, $B(8; 7)$, $C(6; 2)$ являются вершинами четырёхугольника (см. рис. 135). Найдите ординату точки пересечения его диагоналей P .

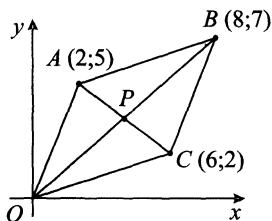


Рис. 135.

В4. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 700 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить стоимость топлива для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
1	Дизельное	8	2800
2	Бензин	11	2500
3	Газ	15	2600

Цена дизельного топлива — 20 рублей за литр, бензина — 25 рублей за литр, газа — 17 рублей за литр.

В5. Найдите корень уравнения $\log_{25}(5 + x) = \log_5(2x)$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите меньший из них.

В6. Основания равнобедренной трапеции равны $8\sqrt{7}$ и $12\sqrt{7}$, а боковая сторона равна 8. Найдите синус острого угла трапеции.

В7. Найдите значение выражения $\sqrt{(b - 3)^2} + \sqrt{(b - 13)^2}$ при $b \in (3; 13)$.

В8. На рисунке 136 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция

$$F(x) = x^3 + 15x^2 + 81x - \frac{12}{5}$$

— одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

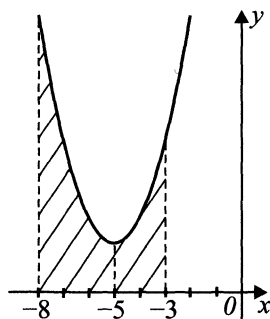


Рис. 136.

В9. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороны основания 6 и высотой $\frac{9}{\pi}$. Найдите его объём.

В10. Пете нужно забить в стенку гвоздь. Если гвоздь стальной, то он согнётся с вероятностью 0,2, а если гвоздь железный, то он согнётся с вероятностью 0,6. На столе лежат 14 стальных и 6 железных гвоздей. Петя берёт первый попавшийся гвоздь со стола и пытается забить его в стенку. Найдите вероятность того, что этот гвоздь согнётся.

В11. Объём куба равен 20. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины (см. рис. 137).

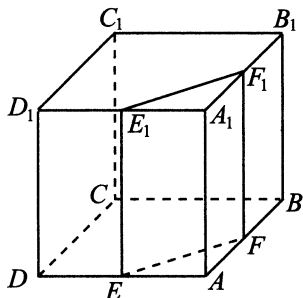


Рис. 137.

В12. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До начала дождя время падения камешков составляло 1,2 с. На сколько метров должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с?

В13. Ксюша решила прочесть книгу объёмом 672 страницы. Ежедневно она читает на одно и то же количество страниц больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что в первый день она прочла 12 страниц. Определите, сколько страниц она прочла в последний день, если всего на чтение этой книги девочка потратила 16 дней.

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{15 - 8x - x^2}$.

Часть 2

C1. Решите уравнение $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 25 = 0$.

C2. В правильной треугольной призме с площадью основания $S_o = 3$ проведено сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Площадь этого сечения $S_c = 5$. Найдите угол, который сечение образует с плоскостью основания.

C3. Решите неравенство $30 \arcsin^2 x + 23\pi \arccos x - 8,5\pi^2 \geq 0$.

C4. Определите, какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника, одна из сторон которого $a = 3$, а радиус вписанной окружности $r = 1$.

C5. Определите, при каких значениях параметра a число a лежит между корнями уравнения $a^2x^2 + (35a - 10a^2)x - 50a + 24 = 0$.

C6. Дана сумма n слагаемых: $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2}$, $n \in N$.

Найдите:

а) сумму четырёх слагаемых S_4 ;

б) все натуральные значения n , при которых $S_n \geq \frac{1}{4}$;

в) все натуральные значения n , при которых $S_n \leq \frac{1}{5}$;

г) все натуральные значения n , при которых $S_n = \frac{n}{n^2 + n + 6}$.

Вариант № 24

Часть 1

B1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 1580 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

B2. На диаграмме 138 показана среднесуточная температура воздуха в городе Ростове-на-Дону с 15 по 27 ноября 2010 года. По горизонтали указываются даты, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднесуточную температуру в Ростове-на-Дону в период с 21 по 27 ноября 2010 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.

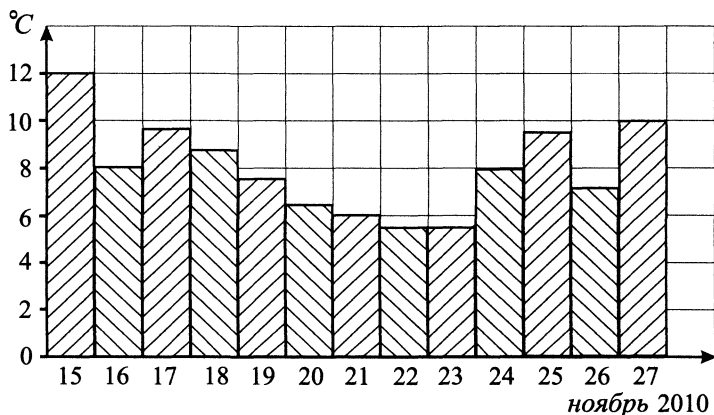


Рис. 138.

В3. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $A(1; 5)$, $B(5; 5)$, $C(5; -1)$ (см. рис. 139).

В4. Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки протяжённостью 1500 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить стоимость топлива для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

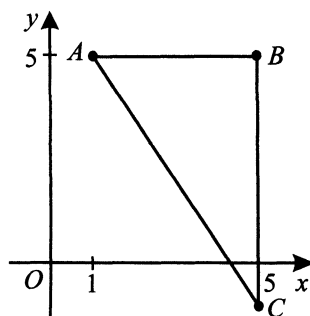


Рис. 139.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	8	3500
Б	Бензин	11	3300
В	Газ	14	3000

Цена дизельного топлива — 20 рублей за литр, бензина — 22 рубля за литр, газа — 15 рублей за литр.

В5. Найдите корень уравнения $\log_2(6 - x) = \log_4 x$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите меньший из них.

В6. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $9 : 4 : 5$. Найдите большую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 98.

В7. Найдите $8x - 27y + 68$, если $\frac{7x - 13y + 8}{3x - 8y + 14} = 5$.

В8. На рисунке 140 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 + 18x^2 - 81x + 214$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

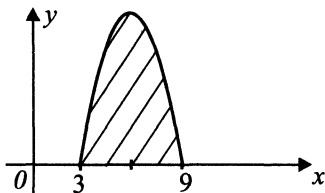


Рис. 140.

В9. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и $4\sqrt{2}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

В10. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, шахматисту нужно набрать хотя бы 1,5 очка по итогам двух игр. Если шахматист выигрывает, он получает 1 очко, в случае ничьей — 0,5 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что шахматисту удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятность выигрыша и проигрыша одинакова и равна 0,3.

В11. Диаметр основания конуса равен 12, а угол при вершине осевого сечения 90° (см. рис. 141). Вычислите объём конуса, делённый на π .

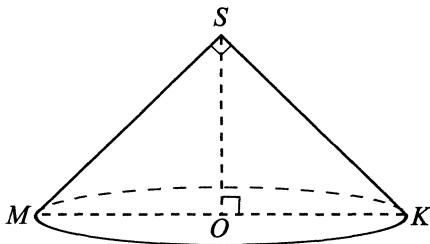


Рис. 141.

V12. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 150$ мг. Период его полураспада $T = 3$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 18,75 мг?

V13. Весной катер идёт по течению в 1,8 раза быстрее, чем против течения. Летом течение становится на 0,5 км/ч медленнее, поэтому летом катер идёт по течению в $\frac{5}{3}$ раз быстрее, чем против течения. Определите собственную скорость катера (в км/ч).

V14. Найдите точку минимума функции $y = (x - 3)^2(x + 4) - 2$.

Часть 2

C1. Решите уравнение $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

C2. В правильной треугольной призме с площадью основания $S_o = 3$ через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведено сечение, площадь которого $S_c = 5$. Найдите расстояние от вершины основания, через которую не проходит сечение, до плоскости сечения.

C3. Решите неравенство $18 \arccos^2 x + 27\pi \arcsin x - 6,5\pi^2 \leq 0$.

C4. Найдите стороны треугольника с наименьшей площадью, у которого одна из сторон равна 6, а радиус вписанной окружности равен 2.

C5. Определите значения параметра a , при которых число a лежит между корнями уравнения $a^2x^2 + (7a - 6a^2)x + 6a - 8 = 0$.

C6. Дана сумма n слагаемых $S_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3n} \cdot \frac{1}{3n+3}$, $n \in N$.

Найдите:

а) сумму четырёх слагаемых S_4 ;

б) все такие натуральные значения n , при которых $S_n \geq \frac{1}{9}$;

в) все такие натуральные значения n , при которых $S_n \leq \frac{1}{10}$;

г) все такие натуральные значения n , при которых $S_n = \frac{n}{n^2 + 2n + 21}$.

Вариант № 25

Часть 1

В1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 80 копеек. Счётчик электроэнергии 1 марта показал 7 834 киловатт-часов, а 1 апреля показал 7 903 киловатт-часа. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за март? Ответ дайте в рублях.

В2. На рисунке 142 точками показано суточное количество осадков, выпадавших с 14 по 26 ноября. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков в миллиметрах, выпавшее в соответствующий день. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней указанного периода не было осадков.

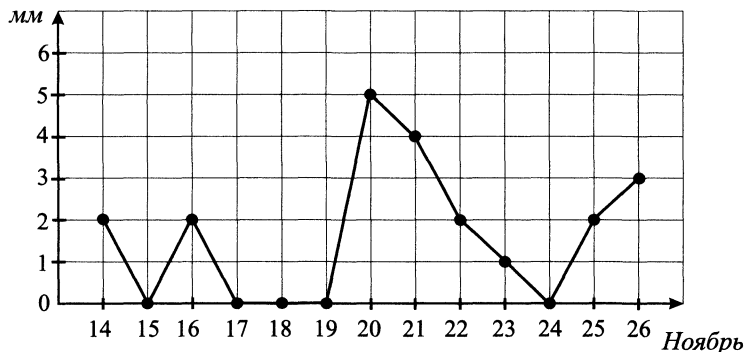


Рис. 142.

В3. Прямая a проходит через точки с координатами $(0; 3)$ и $(1; 0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(2; 0)$ и параллельна прямой a (см. рис. 143). Найдите ординату точки пересечения прямой b с осью Oy .

В4. Для того чтобы связать шапку, варежки и носки, рукодельнице нужно 300 граммов шерсти красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 70 рублей за 60 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 40 рублей за 50 граммов. Один пакетик краски стоит 30 рублей и рассчитан на окраску 100 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

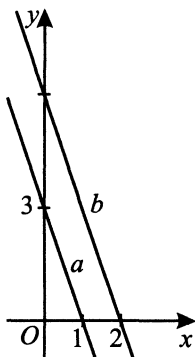


Рис. 143.

В5. Найдите корень уравнения $\sqrt{-12 + 7x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

В6. Стороны угла A пересекают окружность в четырёх точках (B , C , D , E), при этом окружность делится на дуги, которые относятся как $3 : 5 : 6 : 4$ в порядке против часовой стрелки, начиная с дуги, заключённой внутри угла. Найдите величину угла A (в градусах).

В7. Найдите значение выражения $3x + y - 4z$, если $4x - y + z = 1$ и $5x + 4y - 13z = 62$.

В8. На рисунке 144 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-3) - F(-10)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

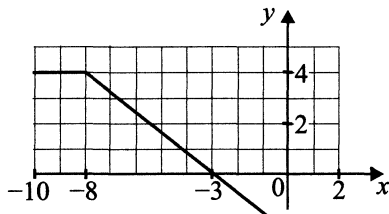


Рис. 144.

В9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 8, найдите угол между прямыми FA и $D_1 E_1$ (см. рис. 145). Ответ дайте в градусах.

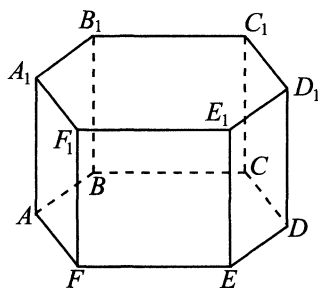


Рис. 145.

В10. На тренировку пришёл 21 школьник, среди них два брата — Василий и Павел. Школьников случайным образом делят на три футбольные команды по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Василий и Павел окажутся в одной команде.

В11. Цилиндр описан около шара (см. рис. 146). Объём шара — 8 см^3 . Найдите объём цилиндра (в см^3).

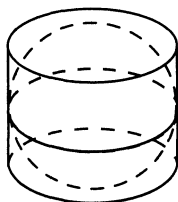


Рис. 146.

В12. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 7 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 35 \text{ м/с}$? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

В13. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 70 км/ч , проходит мимо неподвижно стоящего на платформе человека за 1 минуту 12 секунд. Определите длину поезда в метрах.

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x^3}$ на отрезке $[1; 16]$.

Часть 2

C1. а) Решите уравнение $8 \sin x \cos^3 x - 2 \sin 2x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -2\right]$.

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 , так, что сечение — ромб. Найдите площадь сечения, если $AB = 3$, $BC = 2$ и $AA_1 = 5$.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} |9x - 20| - |9x - 18| \geq 3 - |9x|, \\ \log_2(19 - 9x) - 3 \log_{19-9x} 2 \geq 2. \end{cases}$

C4. В треугольнике ABC с углом B , равным 45° , и стороной $AC = 8$ AH — высота. Прямая AH пересекает описанную около треугольника окружность в точке D (не совпадающей с вершиной треугольника). Площадь треугольника BDH равна 9. Найдите BC .

C5. Найдите все такие значения параметра a , что каждое число, являющееся корнем уравнения $3^{|x|+1} - a^3 + 240 \cdot \sin \frac{\pi|x|}{4} = 5a^2 + 3a + 3$ при этом значении a , не будет корнем при любом другом значении параметра.

C6. На книжных полках магазина выставлено 100 книг нескольких авторов. Среди любых шестнадцати книг, взятых наугад, обязательно окажется хотя бы четыре книги одного автора. Обязательно ли среди выставленных книг имеется:

а) 20 книг одного автора?

б) 21 книга одного автора?

Вариант № 26

Часть 1

B1. Клиент взял в банке кредит на сумму 18 000 рублей на год под 15% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму вместе с процентами. Сколько рублей клиент должен вносить в банк ежемесячно?

B2. На рисунке 147 точками показано количество золотовалютных резервов в России за период с 10 по 20 февраля 2011 года. По горизонтали

указываются числа месяца, по вертикали — количество золотовалютных резервов в миллиардах долларов США. Для наглядности точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим количествами золотовалютных резервов в период с 11 по 17 февраля (в миллиардах долларов США).

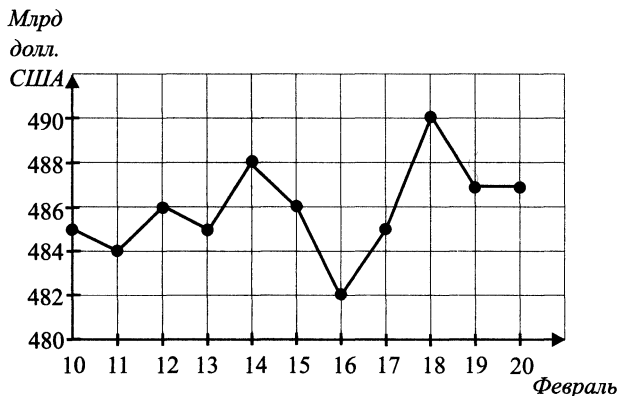


Рис. 147.

В3. Найдите площадь фигуры (в см^2), изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. В ответе запишите результат $\frac{S}{\pi}$ (см. рис. 148).

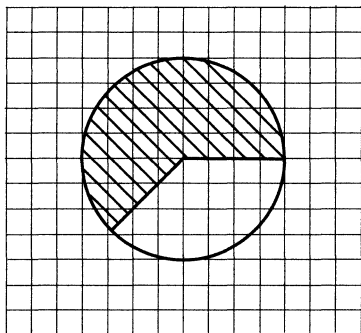


Рис. 148.

В4. Строительной фирме нужно приобрести 135 тонн камня у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена камня (руб. за тонну)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	1800	17 000	При заказе с доставкой на сумму свыше 200 000 рублей предоставляется скидка 15%
Б	1700	10 500	При заказе на сумму свыше 200 000 рублей доставка бесплатно
В	1600	14 000	При заказе на сумму свыше 240 000 рублей доставка бесплатно

В5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+12} = 81^{-2x}$.

В6. Углы A, B, C четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, относятся как $3 : 2 : 7$. Найдите больший угол этого четырёхугольника (в градусах).

В7. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{5 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 14 \cos \alpha} = 0,35$.

В8. На рисунке 149 изображён график функции $y = F(x)$, одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 2)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 1]$.

В9. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 8, AD = 4\sqrt{3}, AA_1 = 12$ (см. рис. 150). Ответ дайте в градусах.

В10. На концерте выступают группы музыкантов — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из России будет выступать после группы из Франции и после группы из Италии? Результат округлите до сотых.

В11. Основанием пирамиды служит квадрат, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а две смежные боковые грани, имеющие с ней общее ребро, наклонены к плоскости основания под углом 30° (см. рис. 151). Высота пирамиды равна 3. Найдите объём пирамиды.

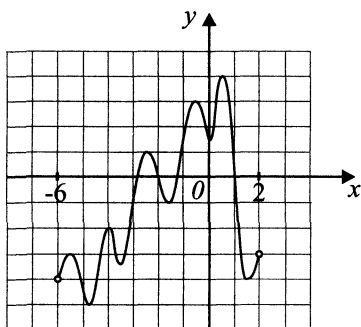


Рис. 149.

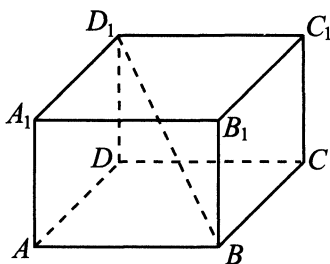


Рис. 150.

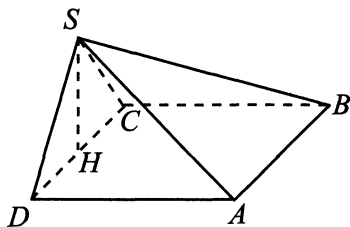


Рис. 151.

В12. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

В13. Ремонт одной и той же квартиры Виктор и Алексей делают за 8 дней, как и Андрей вместе с Виктором, при этом Алексей с Андреем могут выполнить этот ремонт за 12 дней. Сколько дней будет длиться ремонт, если все 3 мастера будут работать одновременно?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = 2 \sin x - 2x \cos x - 0,5x^2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\sin x \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin x + \frac{3}{8} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -5\right]$.

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через вершину A проведена секущая плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке E так, что получившееся сечение — ромб, площадь которого равна 11. Найдите отношение $EC : CC_1$, если $AB = BC = 3$ и $AA_1 = 5$.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} |x^2 - x| - |2x + 3| \leq 3 + |x|, \\ 9x^2 - x - 12 \cdot 3^{x^2} + 3^{2x+3} \geq 0. \end{cases}$

С4. В треугольнике ABC с углом B , равным 45° , и стороной $CB = 8$ AH — высота. Прямая AH пересекает описанную около треугольника окружность в точке D . Площадь треугольника CAD равна 12. Найдите AC .

С5. Найдите все такие значения параметра a , что каждое число, являющееся корнем уравнения $2x^4 - \frac{4}{3}a^3 = 7a^2 + 6a - 162 \sin |x|$ при этом значении a , не будет корнем при любом другом значении параметра.

С6. В коробке находится 80 шариков нескольких цветов. Среди любых тринадцати шариков, взятых наугад, обязательно окажется четыре шарика одного цвета.

а) Обязательно ли среди шариков в коробке имеется 20 шариков одного цвета?

б) Какое максимальное число шариков можно удалить из коробки, чтобы, не нарушив условия задачи (об обязательном присутствии четырёх шариков одного цвета среди любых тринадцати, взятых наугад), можно было утверждать, что в коробке имеется 19 шариков одного цвета?

в) Какое минимальное число шариков нужно добавить в коробку, чтобы, не нарушив условия задачи (об обязательном присутствии четырёх шариков одного цвета среди любых тринадцати, взятых наугад), можно было утверждать, что в коробке находится 21 шарик одного цвета?

Вариант № 27

Часть 1

В1. Аня купила проездной билет на месяц и сделала за месяц 55 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 400 рублей, а разовая поездка составляет 2,5% от стоимости проездного билета?

В2. На рисунке 152 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку, на сколько градусов Цельсия наибольшая температура 13 мая превышала наибольшую температуру 11 мая.

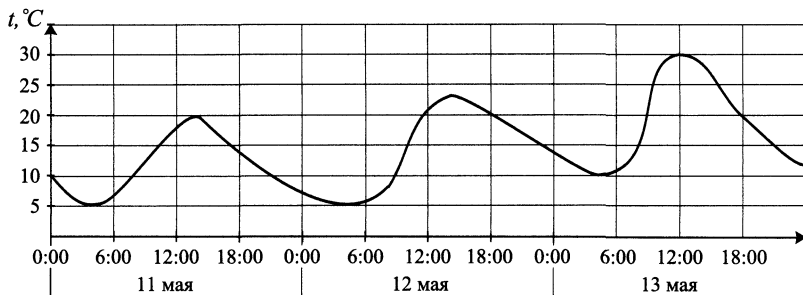


Рис. 152.

В3. Стороны параллелограмма равны 15 и 10. Высота, опущенная на большую сторону, равна 6. Найдите высоту, опущенную на меньшую сторону параллелограмма (см. рис. 153).

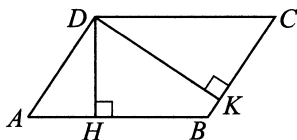


Рис. 153.

В4. Строительный подрядчик планирует купить 15 тонн облицовочного кирпича у одного из трёх поставщиков. Вес одного кирпича 5 кг. Цены и условия доставки приведены в таблице. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

Поставщик	Стоимость кирпича (руб. за штуку)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	16	6000	При стоимости заказа свыше 40 000 рублей предоставляется скидка 8%, а доставка осуществляется бесплатно
Б	15	10 000	При заказе на сумму свыше 25 000 рублей доставка со скидкой 70%
В	17	3500	За каждые 90 оплаченных кирпичей — 10 кирпичей в подарок. При заказе на сумму свыше 42 000 рублей доставка осуществляется бесплатно

В5. Найдите корень уравнения $(x + 1,5)(\sqrt{x^2 - 4x - 5}) = 0$. В ответе запишите корень уравнения или их сумму, если корней несколько.

В6. Острый угол прямоугольного треугольника равен 36° (см. рис. 154). Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.

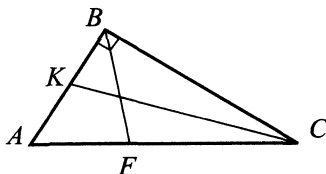


Рис. 154.

В7. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{a}}(a^2b^3)$, если $\log_b a = 1,5$.

В8. Прямая $y = -4x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

В9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро $AB = 4$, ребро $AD = 8$, ребро $AA_1 = 6$. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1 , D_1 и M , если точка M — середина ребра BB_1 .

В10. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Вероятность попадания по цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,7. Сколько выстрелов потребуется сделать для того, чтобы вероятность хотя бы одного попадания по цели была не менее 0,97?

В11. Найдите объём правильной шестиугольной призмы (см. рис. 155), стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны $2\sqrt{3}$.

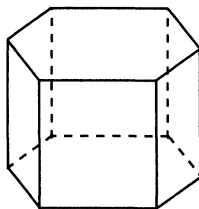


Рис. 155.

В12. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\Pi} = 20^{\circ}C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{В}} = 84^{\circ}C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(^{\circ}C)$, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 30 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 49 м?

В13. Свежий плод инжира содержит 70% воды, а плод сушёного инжира — 3,4%. Сколько килограммов инжира потребуется для получения 10 кг сушёного инжира?

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3$.

Часть 2

- C1.** а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.
 б) Найдите его корни, удовлетворяющие условию $0 < x < \frac{4\pi}{3}$.
- C2.** Для рёбер правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выполняется равенство $AA_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}AB$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .
- C3.** Решите неравенство $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$.
- C4.** Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{2}$, сторона AB равна 5,5, медиана BM равна 5. Найдите AC .
- C5.** Найдите все значения a , при которых расстояние между корнями уравнения $x^2 + (a - 34)x - 35a - 36 = 0$ будет минимальным, а само уравнение имеет ровно 2 корня.
- C6.** Найдите все пары целых чисел x и y , которые удовлетворяют уравнению $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$.

Вариант № 28

Часть 1

- B1.** Цена на холодильник была повышена на 12% и составила 14 000 рублей. Сколько рублей стоил холодильник до повышения цены?
- B2.** На рисунке 156 показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха 8 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.

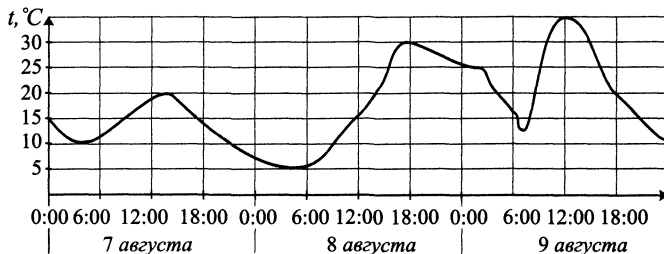


Рис. 156.

В3. Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов (см. рис. 157).

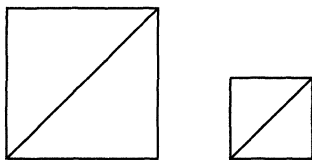


Рис. 157.

В4. Коля загружает на свой компьютер из Интернета файл размером 46 Мб за 40 секунд. Петя загружает файл размером 66 Мб за 60 секунд, а Миша загружает файл размером 27 Мб за 24 секунды. Сколько секунд будет загружаться файл размером 529 Мб на компьютер с наибольшей скоростью загрузки?

В5. Найдите корень уравнения $(\sqrt{5-x}-4)(\sqrt{7-x}-2) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите наибольший из них.

В6. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 5 : 6, считая от вершины тупого угла (см. рис. 158). Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 68.

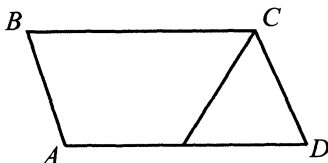


Рис. 158.

В7. Найдите значение выражения $(2 - \log_5 250)(2 + \log_{10} 0,05)$.

В8. Прямая $y = -7x + 3$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 3x - 2$. Найдите a .

В9. От треугольной призмы, объём которой равен 18, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части.

В10. Чтобы поступить в институт на специальность «Архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на специальность «Телевидение», нужно набрать не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов — русскому языку, литературе и истории. Вероятность того, что абитуриент К. получит не менее 75 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по истории — 0,5 и по литературе — 0,7. Найдите вероятность того, что К. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

В11. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $6\sqrt{2}$ и образует углы 30° , 30° и 45° с плоскостями граней параллелепипеда (см. рис. 159). Найдите объём параллелепипеда.

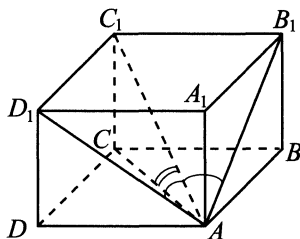


Рис. 159.

В12. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 50$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 200 до 250 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

В13. Десятого января все книги в магазине подешевели на некоторое число процентов, а спустя несколько дней подорожали на то же самое число процентов от установившейся цены. В результате цены стали на 0,25% меньше, чем до десятого января. На сколько процентов подешевели книги 10 января?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(18 + 6x - x^2) + 4$.

Часть 2

С1. а) Решите уравнение $\sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right)$.

б) Найдите его корни, удовлетворяющие условию $0 < x < \frac{3\pi}{2}$.

С2. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC . Боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и $AC = BC$. На ребре MC взята точка K — середина этого ребра. Найдите угол между плоскостями BAK и AKC , если $MB = AC$.

С3. Решите неравенство $\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2$.

С4. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

С5. Вычислите отрицательный коэффициент b и корни уравнения $x^2 + bx - 1 = 0$, если известно, что с увеличением каждого из этих корней на единицу они становятся корнями уравнения $x^2 - b^2x - b = 0$.

С6. Решите уравнение $1! + 2! + \dots + n! = m^2$, где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Вариант № 29

Часть 1

В1. Студент получил гонорар в размере 1200 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 50 рублей за штуку и букет должен состоять из нечётного числа цветов?

В2. На графике 160 показано изменение удельной теплоёмкости водного раствора некоторого вещества в зависимости от температуры. По горизонтали указывается температура в градусах Цельсия, по вертикали — удельная теплоёмкость в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$. Определите по рисунку, при какой наибольшей температуре удельная теплоёмкость раствора составит не более $4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$. Ответ дайте в градусах Цельсия.

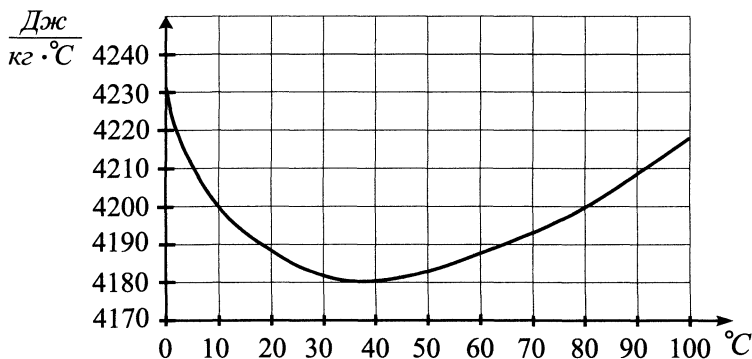


Рис. 160.

В3. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность (см. рис. 161)?

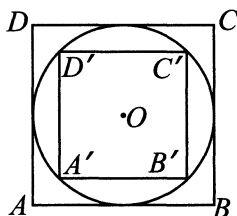


Рис. 161.

В4. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 7 кубометров пеноблоков и 3 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 50 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2900 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 280 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

В5. Найдите корни уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

В6. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны меньше расстояния до меньшей стороны на 4. Его периметр равен 52. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

В7. Найдите частное $g(a) : g\left(\frac{1}{a}\right)$, если $g(a) = \left(2a + \frac{5}{a}\right)\left(5a + \frac{2}{a}\right)$.

В8. Прямая $y = -7x + 11$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + c$. Найдите c .

В9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 3. Найдите расстояние между вершинами A и E_1 .

В10. В Волшебной стране бывает два типа погоды: ясная и дождливая, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,6 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 11 мая, погода в Волшебной стране дождливая. Найдите вероятность того, что 14 мая в Волшебной стране будет ясная погода.

В11. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр, радиус основания которого равен $3\sqrt{3}$, а высота равна 7 (см. рис. 162).

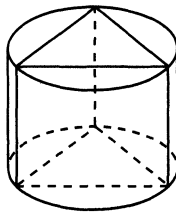


Рис. 162.

В12. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 30$ В, частота $\omega = 80^\circ/\text{с}$, фаза $\varphi = 30^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже чем 15 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

В13. Компания «Омега-транс» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10 000 долларов. Каждый год, начиная с 2004 года, она получала прибыль, которая составляла 100% от капитала предыдущего года. А компания «Елена-плюс» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2004 году, имея капитал в размере 5000 долларов, и, начиная с 2005 года, ежегодно получала

прибыль, составляющую 300% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний (более успешной) был больше капитала другой компании к концу 2008 года, если прибыль из оборота не изымалась?

В14. Найдите наибольшее значение функции $y = 2 \cos x - \frac{12}{\pi}x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Часть 2

С1. Решите уравнение $\sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = 2 \sin \frac{x}{2}$.

С2. В треугольной пирамиде $SABC$ $SC = 10$, C — проекция вершины S на плоскость основания, $AC = \sqrt{21}$, $BC = 2\sqrt{11}$, $AB = 6$. Точки M и P — середины рёбер SA и SB соответственно. Найдите площадь сечения, проходящего через точки M , P , C .

С3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{2-x}{x^3+x^2} \geq \frac{1-2x}{x^3-3x^2}, \\ \frac{(x-1)(3-x)}{\log_2|x-1|} \leq 0. \end{cases}$$

С4. Окружность радиуса 13 вписана в угол 60° . Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках A и B . Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{a^2-x^2}((ax)^2 - 1) = 1$ имеет два решения.

С6. Решите уравнение в натуральных числах: $3^m + 7 = 2^n$.

Вариант № 30

Часть 1

В1. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 6%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Вася хочет положить на счёт своего мобильного телефона не меньше 500 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) он должен положить в приёмное устройство данного терминала?

В2. На графике (рис. 163) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближённо выражается формулой $v = 0,045n$, где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не менее 80 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

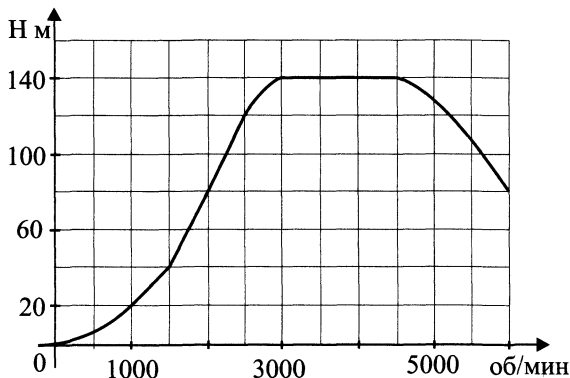


Рис. 163.

В3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24. Точка M — середина стороны DA . Найдите площадь трапеции $AMCB$.

В4. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 20 000 рублей сроком на 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
Банк А	150 руб. в год	4
Банк Б	Бесплатно	2
Банк В	10 руб. в месяц	3

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное число процентов.

В5. Найдите корни уравнения $\cos \frac{\pi(x+4)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

В6. Найдите косинус угла MON . В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $3\sqrt{2}$ (см. рис. 164).

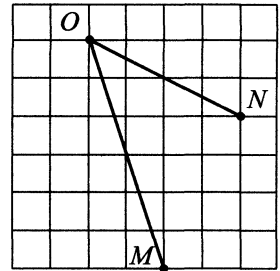


Рис. 164.

В7. Найдите $f(3x+4) + f(4-3x)$, если $f(x) = \sqrt[5]{x-8} + \sqrt[5]{x}$.

В8. Прямая $y = 6x + 5$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 + bx + 17$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

В9. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AC_1 = 2BC$. Найдите угол между прямыми BD_1 и CA_1 . Ответ дайте в градусах.

В10. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадки. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончатся шоколадки, равна 0,4. Вероятность того, что шоколадки закончатся в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня шоколадки останутся в обоих автоматах.

В11. Объём треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 2 (см. рис. 165). Найдите объём шестиугольной пирамиды.

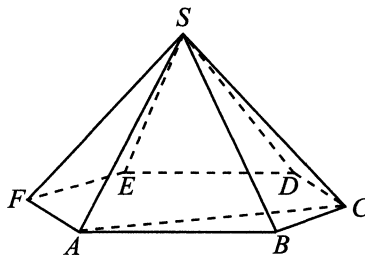


Рис. 165.

В12. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 10$ В, частота $\omega = 100^\circ/\text{с}$, фаза $\varphi = 0^\circ$. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже, чем 5 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

В13. Грузовой автомобиль перевозит технику из одного города в другой, каждый день проезжая на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый день грузовой автомобиль прошёл 520 км. Определите, сколько километров проехал грузовой автомобиль за третий день, если весь путь он проделал за 5 дней и расстояние между городами составляет 3270 км.

В14. Найдите наименьшее значение функции $y = 11 \sin x - 13x + 5$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Часть 2

С1. Решите уравнение $\sqrt{\left(1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)^2 + \sin^2 x} = -2 \cos \frac{x}{2}$.

С2. В треугольной пирамиде $SABC$ все углы при вершине C прямые, $SC = 4$, $AC = BC = 3$. На рёбрах SA и SB взяты точки M и N соответственно, так что $\frac{SM}{MA} = \frac{BN}{NS} = \frac{2}{3}$. Найдите косинус угла между прямыми CM и CN .

С3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}, \\ \frac{(x-1)(x-2)}{\lg(10^x-1)} \geq 0. \end{cases}$$

С4. Окружность радиуса 10 вписана в угол 60° . Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках A и B . Расстояние между центрами окружностей равно 12. Найдите AB .

С5. При каких a уравнение $\log_{4-x^2}(ax+2) = \log_{\frac{1}{4-x^2}}(x-1)$ имеет ровно одно решение?

С6. Решите в целых числах уравнение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{7}$.

Решение варианта №5

Часть 1

В1. Так как $\frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$, то наименьшее достаточное число палаток — 9.

Ответ: 9.

В2. По рисунку определяем, что 17 сентября выпал 1 мм осадков.

Ответ: 1.

В3. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7,5$ (см. рис. 166).

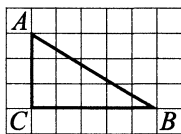


Рис. 166.

Ответ: 7,5.

В4. Автобусом: 10 мин + 1 ч 25 мин + 25 мин = 120 мин.

Электричкой: 40 мин + 55 мин + 30 мин = 125 мин.

Маршрутным такси: 35 мин + $\frac{3}{4}$ часа + 35 мин = 115 мин.

Наименьшее возможное время в пути — 115 минут.

Ответ: 115.

В5. $x = 3\frac{6}{7} : \left(-\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{27}{7} : \frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{27}{7} \cdot \frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{27 \cdot 7}{7 \cdot 3}\right) = -9$,

$x = -9$.

Ответ: -9.

В6. $\cos B = \frac{BC}{AB}$, $0,5 = \frac{BC}{AB}$, $BC = 0,5AB$, $BC = 8$.

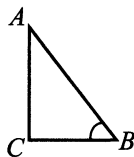


Рис. 167.

Ответ: 8.

$$\mathbf{B7.} (\sqrt{15} - \sqrt{2})(\sqrt{15} + \sqrt{2}) = (\sqrt{15})^2 - (\sqrt{2})^2 = 15 - 2 = 13.$$

Ответ: 13.

B8. На касательной выберем две точки $A(8; 8)$ и $B(3; 1)$, тогда

$$f'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 1}{8 - 3} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: 1,4.

B9. CA_1 — диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 168).

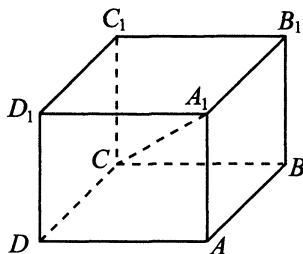


Рис. 168.

$$CA_1^2 = CD^2 + CB^2 + CC_1^2.$$

$$CD = AB = 8, \quad CB = AD = 3, \quad CC_1 = AA_1 = 5.$$

$$CA_1^2 = 64 + 9 + 25, \quad CA_1^2 = 98.$$

Ответ: 98.

B10. Вероятность того, что поход за продуктами выпадет Диме, равна

$$\frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

B11. По условию прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, значит, в основании параллелепипеда — квадрат со стороной $a = 2R$, где R — радиус основания цилиндра; $a = 2 \cdot 1 = 2$. Высота параллелепипеда h равна высоте цилиндра; $h = 1$. Объём параллелепипеда найдём по формуле $V = a^2 \cdot h$; $V = 2^2 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

В12. Используя формулу $R = \frac{4In + Op + 2Tr}{A}$, выразим

$A = \frac{4In + Op + 2Tr}{R}$, после чего подставим наибольшие значения

$In = 3, Op = 3, Tr = 3$ в выражение $A = \frac{12 + 3 + 6}{105}$; $A = 0,2$.

Ответ: 0,2.

В13. Среднюю скорость автомобиля найдём по формуле $v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t}$;

$v_{\text{ср.}} = \frac{360 + 180 + 200}{360 : 60 + 180 : 90 + 200 : 100} = 74$ (км/ч).

Ответ: 74.

В14. $y' = 3x^2 - 8x - 3, y' = 0, 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

$3 \in (2; 5); -\frac{1}{3} \notin (2; 5)$.

$y(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = -12$;

$y(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = -16$;

$y(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 2 = 12$.

Из чисел $-16, -12, 12$ наименьшее число -16 .

Ответ: -16 .

Часть 2

С1. а) Исходное уравнение равносильно уравнению $3^{3 \cos x - \cos 2x} = 3^{-1}$, $3 \cos x - \cos 2x = -1$. Учитывая, что $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, получим $3 \cos x + 1 - 2 \cos^2 x = -1, 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$.

Пусть $\cos x = t, |t| \leq 1$. Тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0, t = \frac{3 \pm 5}{4}, t = -\frac{1}{2}$

($t = 2$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$), $\cos x = -\frac{1}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$

$k \in \mathbb{Z}$.

б) Из серии $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ выберем корни, принадлежащие проме-

жутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $-\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq \pi, -\frac{7\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{\pi}{3}, -\frac{7}{12} < k \leq \frac{1}{6},$

$k = 0, x = \frac{2\pi}{3}$.

Из серии $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ выберем корни, принадлежащие промежутку $(-\frac{\pi}{2}; \pi]$: $-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq \pi$, $\frac{\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{5\pi}{3}$, $\frac{1}{12} < k \leq \frac{5}{6}$, таких целых k нет.

Значит, $x = \frac{2\pi}{3}$ — единственный корень из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

С2. Пусть H — середина AC (см. рис. 169). Заметим, что $AB = BC$, так как $ABCD$ — квадрат, а значит, BH — медиана и высота равнобедренного треугольника ABC , $BH \perp AC$. Ясно, что BH — проекция KH на плоскость ABD , следовательно, $KH \perp AC$ по теореме о трёх перпендикулярах. Тогда $\angle KHB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями ABD и AKC , $\sin \angle KHB = \frac{3}{4}$.

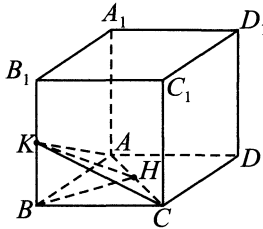


Рис. 169.

$BK = KB_1 = 3$, так как K — середина BB_1 . Из прямоугольного треугольника BKH получим по определению синуса, что $\frac{KB}{KH} = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{KH} = \frac{3}{4}$, $KH = 4$. Тогда по теореме Пифагора $BH^2 = KH^2 - KB^2 = 16 - 9 = 7$, $BH = \sqrt{7}$. В квадрате $ABCD$ диагонали AC и BD равны и точкой пересечения делятся пополам. BH проходит через середину AC и точку H , а значит, BH лежит на BD , $BH = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = HC$. В равнобедренном прямоугольном треугольнике BHC по теореме Пифагора $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{2BH^2} = \sqrt{14}$.

Ответ: $\sqrt{14}$.

С3. Решим по отдельности каждое неравенство системы:

$$1) \frac{7^{x+1}}{2^{x-1}} \geq 84, \quad 14 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x \geq 84, \quad \left(\frac{7}{2}\right)^x \geq 6, \quad x \geq \log_{\frac{7}{2}} 6.$$

2) Решим второе неравенство системы, сделав замену $t = x^2 - 3x$, получим неравенство $\sqrt{9(t+4)} < t$. ОДЗ: $t \geq -4$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9(t+4) < t^2, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 9t - 36 > 0, \\ t > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(t - \frac{9+15}{2}\right)\left(t - \frac{9-15}{2}\right) > 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-12)(t+3) > 0, \\ t > 0; \end{cases}$$

$$t > 12.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$x^2 - 3x > 12; \quad x^2 - 3x - 12 > 0; \quad \left(x - \frac{3 - \sqrt{57}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{57}}{2}\right) > 0,$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{57}}{2}; +\infty\right).$$

$$3) \text{ Учитывая, что } \frac{3 - \sqrt{57}}{2} < 0, \quad \log_{\frac{7}{2}} 6 > \log_{\frac{7}{2}} 1 = 0 \text{ и}$$

$$\log_{\frac{7}{2}} 6 < \log_{\frac{7}{2}} \frac{49}{4} = 2 < \frac{3 + \sqrt{57}}{2}, \text{ получим ответ исходной системы:}$$

$$x \in \left(\frac{3 + \sqrt{57}}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{3 + \sqrt{57}}{2}; +\infty\right).$$

С4. Возможны 2 случая.

1) $CM = 3$, $MD = 7$ (см. рис. 170). Заметим, что в четырёхугольники $AKMD$ и $KBCM$ можно вписать окружности, поэтому $AK + DM = AD + KM = BC + KM = MC + KB$, то есть $AK + 7 = KB + 3$, $KB - AK = 4$.

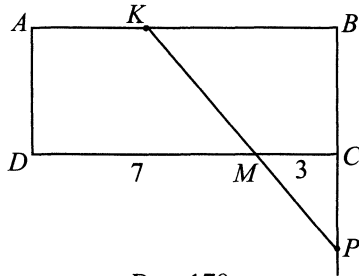


Рис. 170.

При этом $AK + KB = 10 \Rightarrow KB = 7, AK = 3$, откуда видно, что трапеции $AKMD$ и $BCMK$ равны. Пусть $AD = a$, тогда радиус окружности, вписанной в $AKMD$, равен $\frac{a}{2}$. По условию $AD \cdot BA = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$,

$$10a = \pi a^2, a = \frac{10}{\pi}.$$

Заметим, что $\triangle MCP \sim \triangle KBP$ ($\angle KPB$ общий, $\angle MCP = \angle KBP$).

Значит, $\frac{MC}{KB} = \frac{CP}{BP}$. Пусть $CP = x$. Отсюда $\frac{3}{7} = \frac{x}{x + \frac{10}{\pi}}$, $7x = 3x + \frac{30}{\pi}$,

$$x = \frac{15}{2\pi}; PB = \frac{15}{2\pi} + \frac{10}{\pi} = \frac{35}{2\pi}.$$

2) $CM = 7, MD = 3$ (см. рис. 171). Аналогично предыдущему случаю $BK = 3, BC = \frac{10}{\pi}, BP = \frac{15}{2\pi}$.

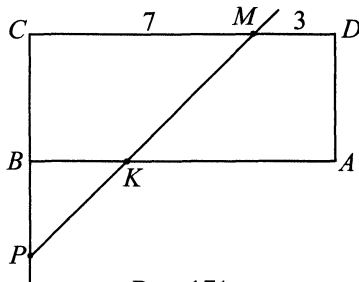


Рис. 171.

Ответ: $\frac{15}{2\pi}; \frac{35}{2\pi}$.

С5. Будем решать систему графически. Графиком первого уравнения является график функции $y = \begin{cases} -5, & x \leq -3 \\ 2x + 1, & x > -3. \end{cases}$

Второе уравнение задаёт окружность (см. рис. 172). В точке $(-5; -5)$ графики касаются при любом значении a . При $a < 0$ центр окружности ниже прямой $a = -5$, а значит, это единственная общая точка. При $a = 0$ единственное решение — это тоже $x = -5, y = -5$. При $a > 0$ система имеет ровно 2 решения тогда и только тогда, когда указанная окружность имеет единственную общую точку с прямой $y = 2x + 1$, т.е. уравнение $(x + 5)^2 + (y - a + 5)^2 = a^2$ имеет единственное решение.

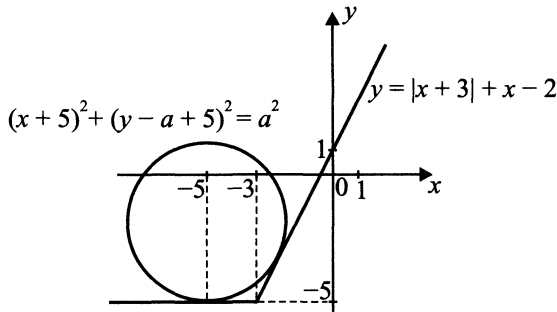


Рис. 172.

$$x^2 + 10x + 25 + 4x^2 + a^2 + 36 - 12a + 24x - 4ax = a^2,$$

$$5x^2 + (34 - 4a)x + 61 - 12a = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (17 - 2a)^2 - 5(61 - 12a) = 289 - 68a + 4a^2 - 305 + 60a = 4a^2 - 8a - 16.$$

$\frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 4 = 0, a = 1 \pm \sqrt{5}$. Так как $a > 0, a = 1 + \sqrt{5}$. Три решения будет при $a > 1 + \sqrt{5}$.

Ответ: $(1 + \sqrt{5}; +\infty)$.

С6. а) Заметим, что все делители числа k^2 разбиваются на пары $(N; \frac{k^2}{N})$, где $\frac{k^2}{N} \neq N$ при $k \neq N$. Таким образом, число k^2 имеет нечётное число делителей, в том числе при $k = n!$, а значит, $d((n!)^2)$ не может быть чётным числом.

б) Заметим, что если $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, где p_i — простые числа, то $d(k) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$. Число $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ — раскладывается

не более чем на 3 множителя, неравных 1. Если уравнение $d((n!)^2) = 105$ имеет решение, то $(n!)^2$ (а значит и $n!$) имеет не более 3 простых делителей, отсюда следует, что $n \leq 5$. При $n = 1$ число $(n!)^2$ имеет 1 делитель, при $n = 2$ число $(n!)^2$ имеет 3 делителя, при $n = 3$ число $(n!)^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ имеет $(2+1)(2+1) = 9$ делителей, при $n = 4$ число $(n!)^2 = 2^6 \cdot 3^2$ имеет 21 делитель, при $n = 5$ число $(n!)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ имеет 63 делителя. Значит, решений нет.

в) Так как 108 чётное число, то $2^n \cdot (n!)^2$ не должно являться квадратом, а значит n — нечётно. Заметим, что при $n = 5$ верно равенство $2^n \cdot (n!)^2 = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5^2$, а потому $d(2^n \cdot (n!)^2) = 108$. Осталось показать, что других решений нет. Пусть $k_1 < k_2$, тогда $2^{k_1} \cdot (k_1!)^2 < 2^{k_2} \cdot (k_2!)^2$. При этом все делители числа $2^{k_1} \cdot (k_1!)^2$ являются делителями числа $2^{k_2} \cdot (k_2!)^2$, это можно увидеть, считая $n! = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$. Отсюда очевидно, что $d(2^{k_2} \cdot (k_2!)^2) > d(2^{k_1} \cdot (k_1!)^2)$. Значит, при $n > 5$ выполняется $d(2^n \cdot (n!)^2) > 108$, а при $n < 5$ выполняется $d(2^n \cdot (n!)^2) < 108$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 5.

Глава II. Сборник задач для подготовки к ЕГЭ

Базовый уровень (часть В)

§ 1. Алгебра и начала анализа

1.1. Выражения и преобразования

1.1.1. Степень с рациональным показателем

1. Найдите значение выражения $5^9 \cdot 6^{12} : 30^9$.

2. Упростите выражение $\frac{b^{4,44}}{b^{3,11} \cdot b^{3,33}}$ и найдите его значение при $b = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Найдите значение выражения (3–4):

3. $3^4 \cdot 7^5 : 21^4$.

4. $\frac{(3a^2)^3 \cdot (4b)^2}{(12a^3b)^2}$.

1.1.2. Степени и корни

5. Найдите значение выражения $\sqrt{2a - \sqrt{a^2 + 2}} \cdot \sqrt{2a + \sqrt{a^2 + 2}}$ при $a = 1$.

Вычислите (6–7):

6. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14 + \sqrt{6}}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14 - \sqrt{6}}}$.

7. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{65 - \sqrt{45}}} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65 + \sqrt{45}}}$.

Вычислите значение выражения (8–11):

8. $2^{3-\sqrt{2}} \cdot 2^{3+\sqrt{2}} - 100$.

9. $3^{2+\sqrt{3}} \cdot 3^{2-\sqrt{3}} + 3^2$.

10. $3 \cdot \sqrt[3]{216} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

$$11. \frac{20}{\sqrt[5]{1024}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Найдите значение выражения (12–16):

$$12. \frac{(\sqrt[11]{5 \cdot a^7})^{33}}{a^{21}}, \text{ если } a \neq 0.$$

$$13. \frac{\sqrt{81 \sqrt[11]{m}}}{\sqrt[11]{2048 \sqrt{m}}} \text{ при } m > 0.$$

$$14. 2x - 7 + \sqrt{4x^2 - 20x + 25}, \text{ если } x = 2, 5.$$

$$15. \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2a-15)^2}, \text{ если } 3 < a < 7,5.$$

$$16. \frac{18 \sqrt[65]{33\sqrt{a}} - 11 \sqrt[15]{143\sqrt[3]{a}}}{14 \sqrt[39]{55\sqrt{a}}} \text{ при } a \neq 0.$$

Найдите значение выражения (17–22):

$$17. \frac{3 - 7\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x} \text{ при } x > 0.$$

$$18. \left(\sqrt{3\frac{5}{17}} - \sqrt{7\frac{7}{17}} \right) : \sqrt{\frac{7}{34}}.$$

$$19. \frac{25 \sqrt[10]{2m}}{\sqrt[30]{2m} \cdot \sqrt[15]{2m}} \text{ при } m > 0.$$

$$20. \sqrt{t^2 - 16t + 64} + t \text{ при } t \leq 8.$$

$$21. \sqrt{(b-12)^2} + \sqrt{(b-7)^2} \text{ при } 7 \leq b \leq 12.$$

$$22. \frac{\sqrt[4]{b^3} \cdot (\sqrt{7b})^2}{b^{2,75}} \text{ при } b > 0.$$

1.1.3. Логарифмические и показательные выражения

Вычислите (23–24):

23. $\frac{\log_7 21}{\log_{21} 7} - \frac{\log_7 147}{\log_3 7}$.

24. $\log_2^2 3 + \frac{\log_2 12}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 144}{\log_3 2}$.

Найдите значение выражения (25–28):

25. $(3 \log_{27} 3,5 - \log_3 10,5 - 1) 5^{3 \log_5 2}$.

26. $5 \log_3 49 \cdot \log_7 81 + 17^{\log_{17} 8}$.

27. $\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 8 \cdot \log_7 9$.

28. $\log_{36} 5 \cdot \log_8 3 \cdot \log_{25} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 6$.

Вычислите (29–31):

29. $\log_{10} 2 \cdot \log_5 10 \cdot \log_2 5$.

30. $98 \cdot 7^{\log_7 \frac{1}{49}}$.

31. $256 \cdot 4^{\log_4 \frac{1}{64}}$.

Вычислите значение выражения (32–33):

32. $11 - 3 \log_3 \sqrt{3}$.

33. $13 - 3 \log_2 \sqrt{8}$.

Найдите значение выражения (34–61):

34. $49^{\log_7 4}$.

35. $4^{2+\log_4 7}$.

36. $5^{2+\log_5 12}$.

37. $5^{2+\log_5 4}$.

38. $2^{\log_2 7+3}$.

39. $8^{\log_2 5}$.

40. $9^{\frac{\ln 6}{\ln 3}}$.

41. $\frac{\log_7 \sqrt[5]{35}}{\log_7 35}$.

42. $\frac{\ln 42}{\ln \sqrt[3]{42}}$.

43. $\log_4 5 \cdot \log_5 64$.

44. $\log_{625} 7 \cdot \log_7 5$.

45. $102 \cdot \log_5 \sqrt[6]{5}$.

46. $108 \cdot \log_{11} \sqrt[8]{11}$.

47. $\log_{81} \log_7 343$.

48. $5 \cdot 4^{\log_2 3+1}$.

49. $7^{3 \log_7 4}$.

50. $144^{\log_{12} 14}$.

51. $\log_4 25,6 + \log_4 10$.

52. $3^{4+\log_3 6}$.

53. $2^{2+\log_4 121}$.

54. $\log_3 81 + \log_3 \frac{1}{9}$.

55. $\log_4 8 + \log_9 81$.

56. $\frac{42}{5^{\log_5 7}}$.

57. $\log_5 12,5 + \log_5 10$.

58. $(1 - \log_9 45) \cdot (1 - \log_5 45)$.

59. $\log_{0,2} 7 \cdot \log_7 0,04$.

60. $\log_{0,7} 10 - \log_{0,7} 7$.

61. $\log_{13} 0,25 + \frac{\log_3 4}{\log_3 13}$.

1.1.4. Тригонометрические выражения

Вычислите (62–67):

62. $\frac{\cos 71^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 19^\circ}{2 \cos 69^\circ \cdot \cos 8^\circ + 2 \cos 82^\circ \cdot \cos 21^\circ}$.

63. $\frac{3(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{2 \cdot \sin 70^\circ}$.

64. $\sin 30^\circ (\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ)$.

65. $\cos 60^\circ (\cos 25^\circ \cos 35^\circ - \sin 25^\circ \sin 35^\circ)$.

66. $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

67. $\frac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ}$.

Найдите значение выражения (68–77):

68. $\frac{8 \sin 36^\circ \cdot (\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ}$.

69. $\frac{\sqrt{3}}{\sin 40^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ}$.

70. $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \cos 45^\circ \cos 75^\circ$.

71. $\frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ \cos 105^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \sin 108^\circ \sin 27^\circ}$.

72. $\operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, если $\sin \alpha = 0,6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$73. 5 \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 \cos(\alpha + 3\pi), \text{ если } \cos \alpha = \frac{1}{4}.$$

$$74. 2 \operatorname{tg}(\alpha - 5\pi) + \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \text{ если } \cos \alpha = \frac{5}{13} \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0.$$

$$75. 2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin^2(\alpha - \pi), \text{ если } \sin \alpha = 0,5.$$

$$76. \sin(2\alpha) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\pi - \alpha) + \cos^2(\alpha + \pi), \text{ если } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$77. \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin 2x} \text{ при } x = \frac{3\pi}{8}.$$

Вычислите значение выражения (78–84):

$$78. 1 - (\cos 45^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ)^2.$$

$$79. (\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ)^2 + 0,5.$$

$$80. \frac{\sqrt{2}(\sin 70^\circ + \sin 20^\circ)}{\cos 25^\circ}.$$

$$81. \frac{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}{\sqrt{2} \cos 5^\circ}.$$

$$82. \sin^2 t + \cos^2 t - 3 \sin \pi + 7 \cos \pi.$$

$$83. \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4.$$

$$84. 2\left(3 - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}\right).$$

$$85. \text{Найдите } \cos \alpha, \text{ если } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ и } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

Найдите значение выражения (86–87):

$$86. 8\sqrt{6} \sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{3}.$$

$$87. \frac{6 \sin 37^\circ \cdot \sin 53^\circ}{\sin 74^\circ}.$$

$$88. \text{Найдите } \operatorname{tg} \alpha, \text{ если } \frac{17 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}{6 \sin \alpha - 32 \cos \alpha} = 2.$$

$$89. \text{Найдите значение выражения } -16 \sin(\pi + \beta) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right), \text{ если}$$

$$\sin \beta = -\frac{1}{2}.$$

90. Найдите $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{-1}{2\sqrt{5}}$.

$$2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)$$

91. Найдите значение выражения $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$.

1.1.5. Комбинированные выражения

Найдите значение выражения (92–93):

92. $\sqrt{0,04} + \log_4 2\sqrt{2} + 2^{\log_2 3}$.

93. $3^{\log_3 2} - \sqrt{0,09} + 3 \log_9 \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

1.2. Уравнения. Системы уравнений

1.2.1. Логарифмические и показательные уравнения

Решите уравнение (94–100):

94. $5^{3x-1} \cdot 25^{7-5x} = 0,2$.

95. $8^{2x+3} - 4^{3x+2} = 62$.

96. $725 - 4 \cdot 5^x = 5^{x+2}$.

97. $4^{x-2} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9$.

98. $9^x = 8 \cdot 3^{x+1} + 81$.

99. $2^{2x+1} + 2^{2x+2} + 2^{2x+3} + 2^{2x+4} = 240$.

100. $\log_4 \log_2 \left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Найдите корень уравнения (101–106):

101. $\log_3(x+5) = 3$.

102. $2 - \lg(10-x) = 0$.

103. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 64$.

104. $7^{\frac{3}{x}} = 343$.

105. $4^{x-4} = 64$.

106. $5^{x+2} = 125$.

107. Решите уравнение $\log_3(4-x) = 4$.

Найдите корень уравнения (108–112):

108. $5^{x-24} = \frac{1}{125}$.

109. $4^{x-11} = \frac{1}{64}$.

$$110. \left(\frac{1}{3}\right)^{10x-2} = \frac{1}{27}.$$

$$111. \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} = 625.$$

$$112. \log_3(x+4) = \log_3(5x+2).$$

Решите уравнение (113–119):

$$113. \log_{\frac{1}{4}}(1-3x) = -2.$$

$$114. \log_{17}(5x+7) = \log_{17} 22.$$

$$115. \log_3(7x+1) = 3 \log_9 4.$$

$$116. 2^{x+3} = 4^{x-1}.$$

$$117. \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 27.$$

$$118. 5^{3x+7} = 0,04.$$

$$119. \left(\frac{1}{16}\right)^{2x-9} = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Найдите корень уравнения (120–123):

$$120. \log_2(x+1) = 2.$$

$$121. 2^{2x-4} = 16.$$

$$122. 17^{x-16} = 17.$$

$$123. \left(\frac{1}{6}\right)^{2-x} = 36.$$

$$124. \text{Найдите корень уравнения } \log_{15}(2x+11) = \log_{15} 4.$$

$$125. \text{Найдите корень уравнения } \log_{0,5}(5x-1) = \log_{0,5} 14.$$

Найдите корень уравнения (126–131):

126. $\left(\frac{1}{4}\right)^{11-9x} = \frac{1}{16}$.

127. $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-17} = 125$.

128. $\log_6(12 - 5x) = 2$.

129. $\log_7(3x - 8) = 2$.

130. $3^{5x-17} = 27$.

131. $2^{12-2x} = \frac{1}{8}$.

1.2.2. Тригонометрические уравнения

132. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\cos \frac{\pi(4x - 7)}{3} = -\frac{1}{2}.$$

133. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin \frac{2\pi x}{3} = \frac{1}{2}.$$

134. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\operatorname{tg} \frac{5\pi x}{4} = -1$.

1.2.3. Рациональные уравнения

135. Найдите корень уравнения $\frac{3}{7}x = -6\frac{3}{7}$.

136. Решите уравнение $\frac{1-2x}{x+13} = -3$.

137. Решите уравнение $-x = \frac{x+6}{-3x-4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

138. Найдите корень уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наименьший из них.

139. Решите уравнение $2x^2 - 9x - 35 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите их сумму.

Решите уравнение (140–141):

140. $(3x - 14)^2 = (3x + 2)^2$.

141. $(8x - 5)^2 = (8x + 5)^2$.

Найдите корень уравнения (142–145):

142. $\frac{15x}{6x^2 - 9} = -5$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

143. $\frac{16x^2 - 9}{12x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

144. $\frac{5x}{x - 12} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

145. $\frac{14 - 3x}{2x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

146. Решите уравнение $\frac{x - 3}{9x + 4} = \frac{x - 3}{4x + 9}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

1.2.4. Иррациональные уравнения

Решите уравнение (147–158):

147. $\sqrt{128 - x^2} = -x$.

148. $x - 6 = \sqrt{8 - x}$.

149. $x - 3 = \sqrt{9 - x}$.

150. $\sqrt{5x + 2} = 10$.

151. $\sqrt{4x - 6} = 12$.

152. $\sqrt{7x + 1} = 6$.

153. $\sqrt{10 - 2x} = 4$.

154. $\sqrt{5x - 3} = 2\sqrt{x}$.

155. $\sqrt{4 - 2x} = 2\sqrt{1 - x}$.

156. $\sqrt{57 - 3x} = 3$.

157. $\sqrt{\frac{3x - 17}{7}} = 4$.

158. $\sqrt{\frac{11}{6 - 4x}} = \frac{1}{2}$.

159. Решите уравнение $-x = \sqrt{15 - 2x}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Найдите корень уравнения (160–161):

160. $\sqrt{-41 + 3x} = 7$.

161. $\sqrt{-27 - x} = 11$.

Найдите корень уравнения (162–163):

$$162. \sqrt{\frac{2x-8}{4}} = 3.$$

$$163. \sqrt{\frac{4}{5x-2}} = 1.$$

1.3. Функции

1.3.1. Возрастание, убывание, экстремум функции (без нахождения производной)

164. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 6)$. На рисунке 173 изображён график её производной. Укажите число точек максимума функции $y = f(x) - x - 2$ на промежутке $(-4; 6)$.

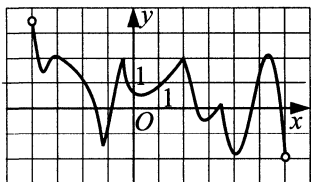


Рис. 173.

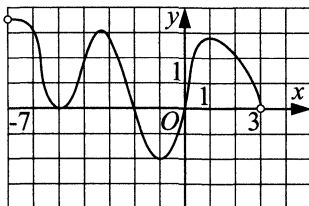


Рис. 174.

165. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7; 3)$. На рисунке 174 изображён график её производной. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-7; 3)$.

166. Функция $y = g(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке 175 изображён график её производной. Найдите точку x_0 , в которой функция $y = g(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 1]$.

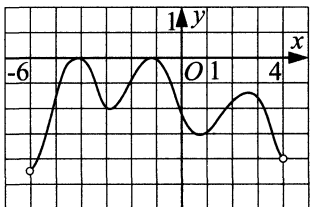


Рис. 175.

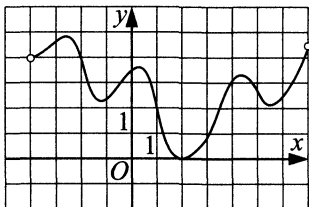


Рис. 176.

167. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 7)$. На рисунке 176 изображён график её производной. Найдите точку x_0 , в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[-2; 5]$.

168. Функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале $(-6; 4)$. На рисунке 177 изображён график её производной. В какой точке функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего значения?

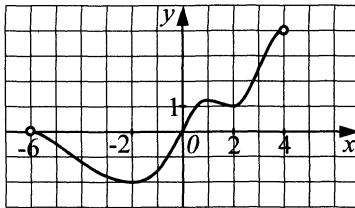


Рис. 177.

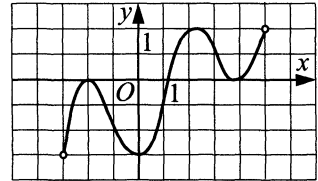


Рис. 178.

169. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3; 5)$. На рисунке 178 изображён график её производной. Укажите количество точек максимума функции $y = f(x)$.

170. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3; 5)$. На рис. 179 изображён график её производной. Укажите количество точек минимума.

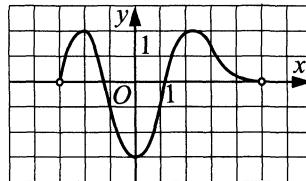


Рис. 179.

171. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рисунке 180 изображён график её производной. Укажите количество точек экстремума.

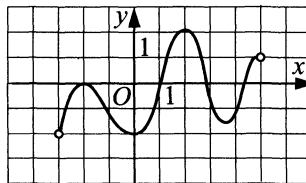


Рис. 180.

1.3.2. График функции

172. На рисунке 181 изображён график изменения скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не менее 60 км/ч?

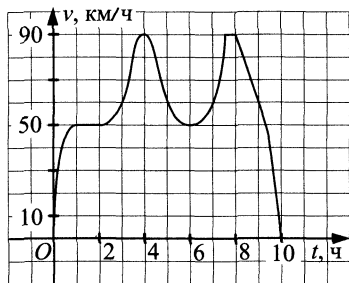


Рис. 181.

173. На рисунке 182 изображён график изменения курса евро в течение 5 дней с 4 марта по 8 марта. Определите наименьшую стоимость евро 6 марта (в руб.).

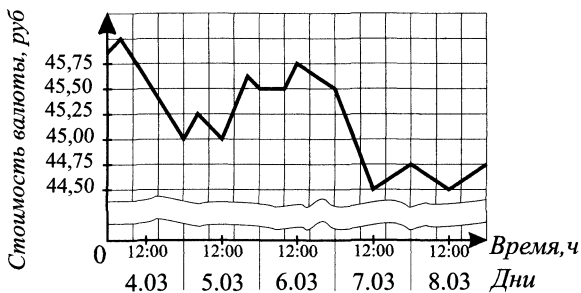


Рис. 182.

174. На графике (см. рис. 183) показано изменение скорости велосипедиста на протяжении трёхчасовой поездки за город (по оси ординат откладывается скорость в км/ч, по оси абсцисс — время в часах). Определите по графику максимальную скорость велосипедиста за вторую половину пути.

175. В инкубаторе требуется поддерживать температуру воздуха от 37°C до 39°C . На рисунке 184 показано, как изменялась температура воздуха в инкубаторе в течение 12 часов. Сколько часов температура воздуха в инкубаторе удовлетворяла требованиям?

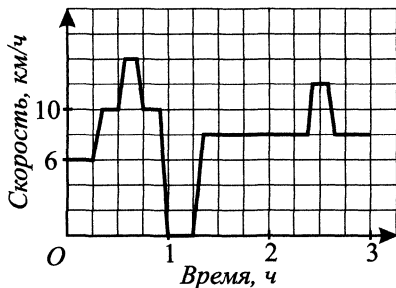


Рис. 183.

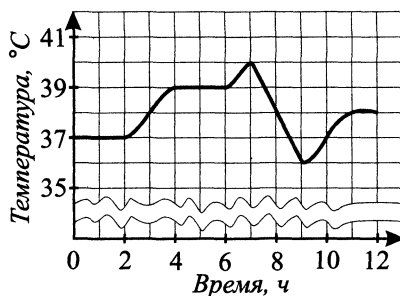


Рис. 184.

176. На графике (см. рис. 185) показано изменение популяции кабанов в лесополосе за год. Определите наименьшее число особей летом.

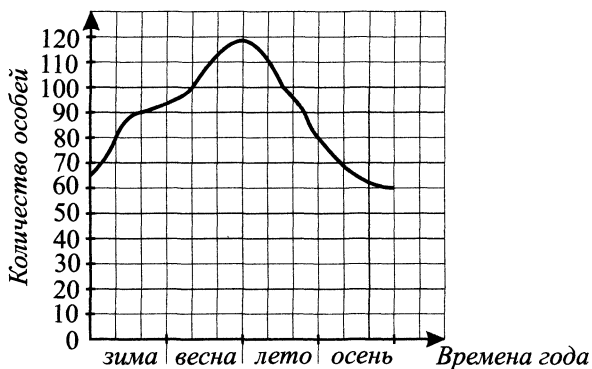


Рис. 185.

177. На графике (см. рис. 186) показано изменение количества выпавших осадков по области в течение месяца. Определите по графику количество дней в этом месяце, когда осадки не выпадали.

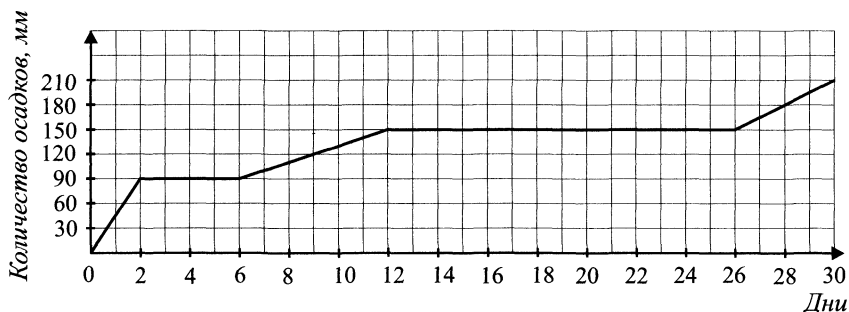


Рис. 186.

178. На рисунке 187 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 мая 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов была наименьшей.

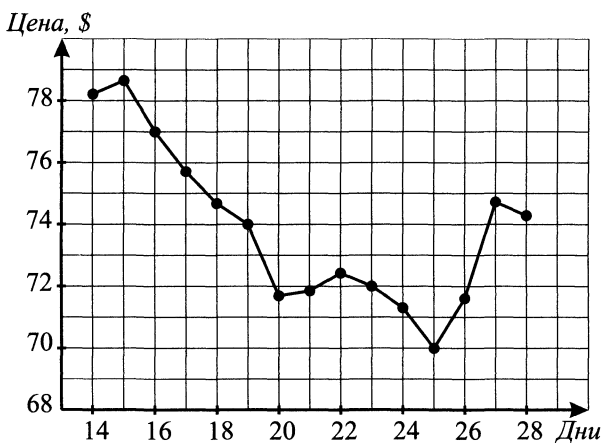


Рис. 187.

179. На рисунке 188 жирными точками показан курс евро по отношению к рублю во все дни с 31 октября по 30 ноября 2008 года. По горизонтали указывается шкала месяца, по вертикали — курс евро к рублю. Определите по рисунку, в который из дней ноября 2008 года было выгоднее всего купить евро.

Курс евро

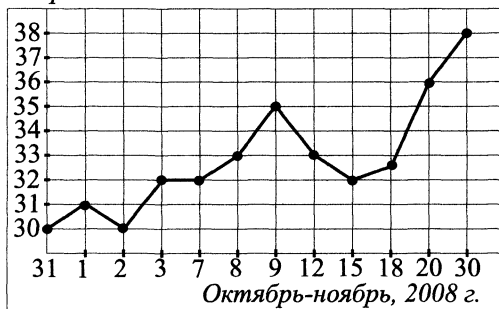


Рис. 188.

180. На рисунке 189 жирными точками показан курс евро по отношению к рублю во все дни с 31 октября по 30 ноября 2008 года. По горизонтали указывается шкала месяца, по вертикали — курс евро к рублю. Определите по рисунку, в который из дней ноября 2008 года было выгоднее всего продать евро.

Курс евро

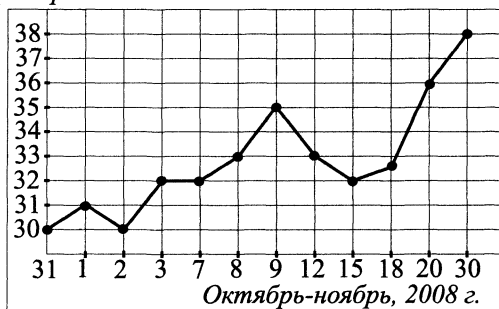


Рис. 189.

181. На рисунке 190 жирными точками показана среднесуточная температура воздуха с 13 по 31 июня. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Используя график, определите наименьшую среднесуточную температуру в период с 17 по 28 июня.

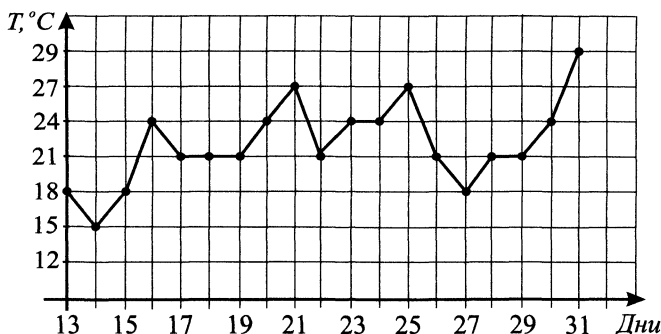


Рис. 190.

182. На графике (см. рис. 191) представлено изменение стоимости акций мебельной компании в период с 18 июля по 5 августа. 20 июля предприниматель купил пакет акций, а 4 августа продал его и в результате получил прибыль 2700 рублей. Сколько акций было в пакете?

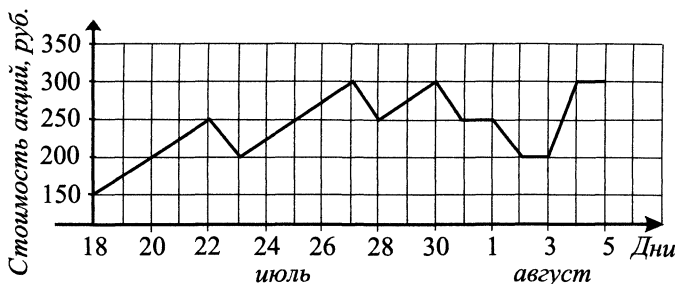


Рис. 191.

183. На графике (см. рис. 192) представлены изменения стоимости акций косметической компании в первые две недели декабря. Предприниматель купил 30 акций 9 декабря и собирается получить прибыль, равную 4500 рублей. Какого числа предприниматель должен продать все акции, чтобы получить в точности ту прибыль, на которую он рассчитывал?

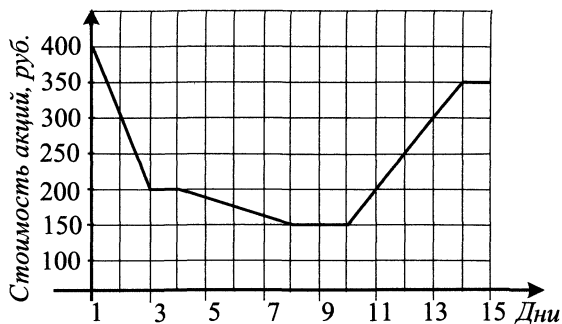


Рис. 192.

184. На графике (см. рис. 193) представлены изменения стоимости акций компании «Море и горы» в первые две недели октября. В первую неделю октября бизнесмен купил 18 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль (в рублях) он мог получить?

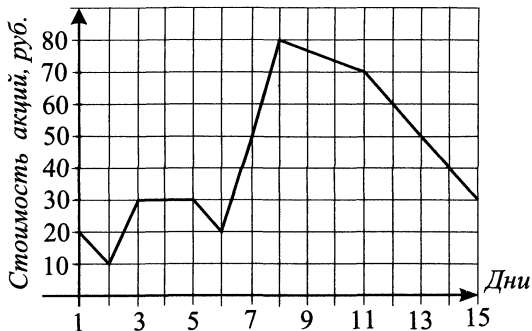


Рис. 193.

185. На графике (см. рис. 194) представлены изменения стоимости акций компании «Гиацинт» в первые три недели июля. 4 июля бизнесмен купил 20 акций этой компании. Четверть из них он продал 12 июля, а остальные — 15 июля. Сколько рублей бизнесмен потерял в результате этих операций?

186. Посев семян моркови рекомендуется проводить в начале мая при дневной температуре воздуха не ниже $+8^{\circ}\text{C}$. На рисунке 195 показан прогноз дневной температуры воздуха в течение первых двух недель мая. Определите, в течение скольких дней за период с 3 по 12 мая можно производить посев моркови.

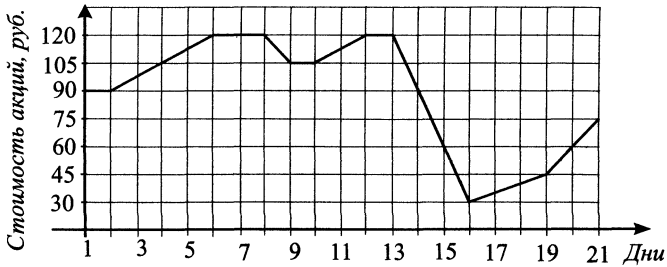


Рис. 194.

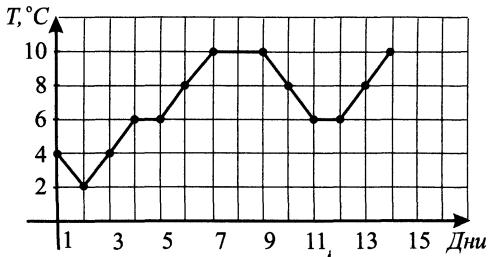


Рис. 195.

187. На рисунке 196 точками отмечено среднесуточное давление воздуха в Ростове-на-Дону с 12 по 19 февраля 2010 года. Для наглядности точки на графике соединены линиями. По графику определите наибольшее давление в период с 14 по 19 февраля.

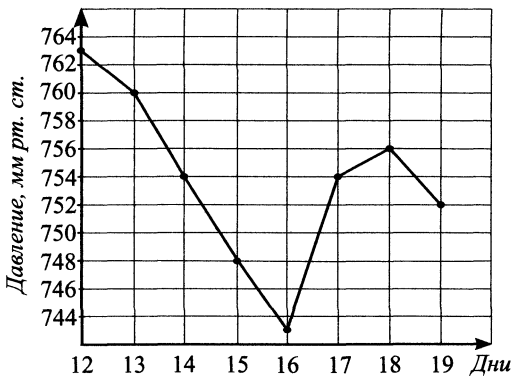


Рис. 196.

188. На рисунке 197 изображён график зависимости температуры в Ростове-на-Дону от времени с 12 по 17 февраля 2010 года. По графику определите наибольшую температуру воздуха в Ростове-на-Дону с 12 по 15 февраля.

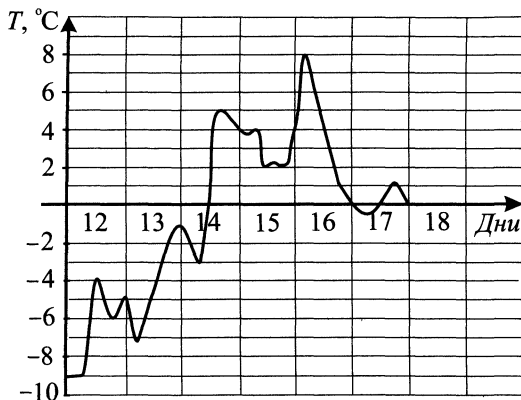


Рис. 197.

189. На рисунке 198 жирными точками показана среднесуточная влажность воздуха в Ростове-на-Дону с 12 по 19 февраля 2010 года. Для наглядности точки на рисунке соединены линиями. Определите наименьшую среднесуточную влажность воздуха за указанный период.

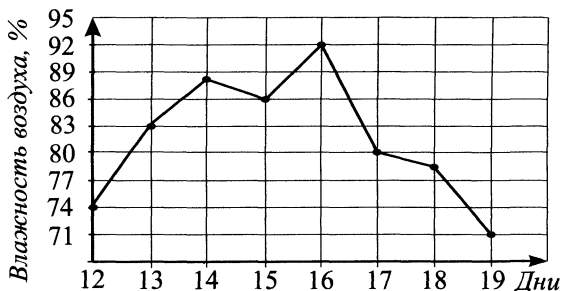


Рис. 198.

190. На рисунке 199 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Казанской области с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день в миллиметрах. Для нагляд-

ности точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 2 миллиметров осадков.

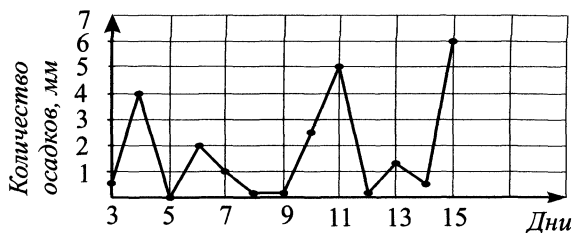


Рис. 199.

191. На диаграмме (см. рис. 200) показано число автомобилей, продаваемых фирмой за каждый месяц 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество автомобилей. Определите по диаграмме количество месяцев, в каждом из которых было продано менее 5000 автомобилей.

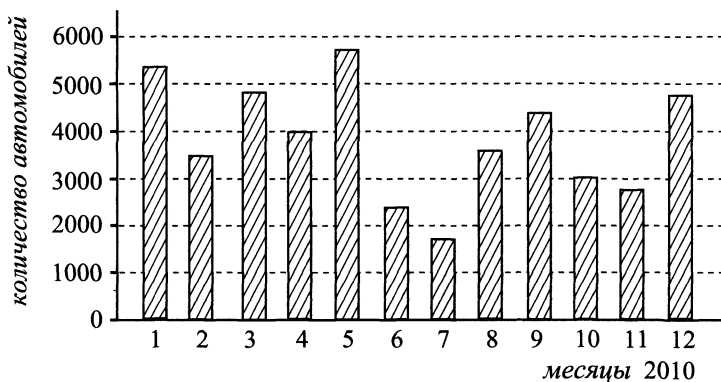


Рис. 200.

192. На диаграмме (см. рис. 201) показано изменение температуры воздуха на протяжении четырёх суток. По горизонтали указывается время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по диаграмме самую высокую температуру 16 марта. Ответ дайте в градусах Цельсия.

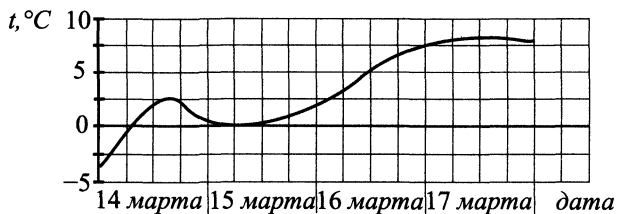


Рис. 201.

193. На рисунке 202 показано изменение цены акций некоторой компании за период с 29.08.2011 г. по 25.09.2011 г. в рублях. По горизонтали отмечены дни, по вертикали — цены акций этой компании за указанный период.

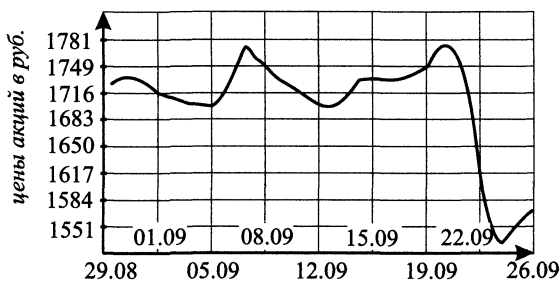


Рис. 202.

Найдите разность (в рублях) между ценами акций этой компании 01.09.2011 и 22.09.2011.

194. На диаграмме (см. рис. 203) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в г. Челябинске. Найдите количество месяцев со среднемесячной температурой выше 15°C .

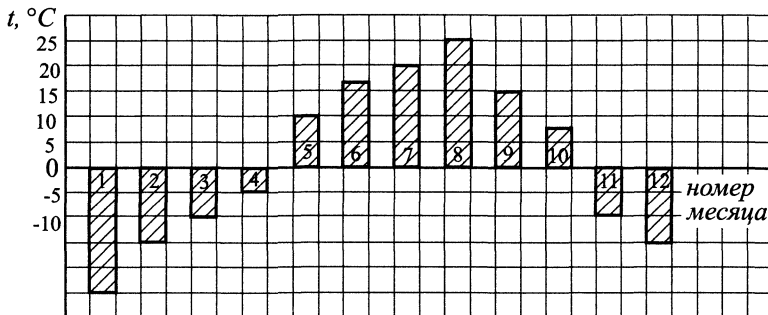


Рис. 203.

195. На диаграмме (см. рис. 204) показано изменение среднегодового курса доллара с 2003 по 2010 годы. На оси абсцисс отчается время в годах, на оси ординат — стоимость доллара в рублях. Укажите самый большой среднегодовой курс доллара за период с 2007 по 2010 годы. Ответ дайте в рублях.

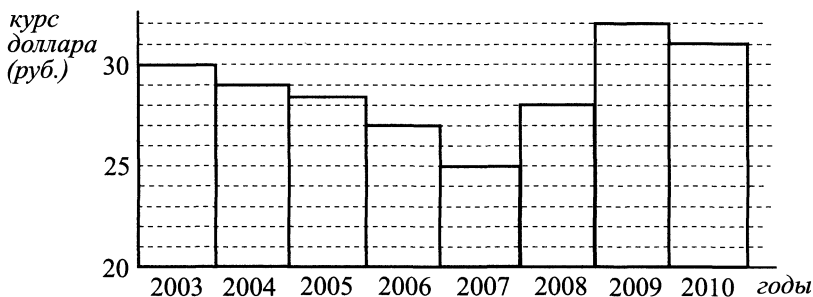


Рис. 204.

196. На диаграмме (см. рис. 205) показан уровень атмосферных осадков H (мм) в г. Нижнем Новгороде в 2004 году. По горизонтали отчается время в месяцах (указаны номера месяцев в году), по вертикали — ежемесячный уровень выпавших осадков (в мм). Сколько раз уровень осадков был ниже, чем в предыдущем месяце?

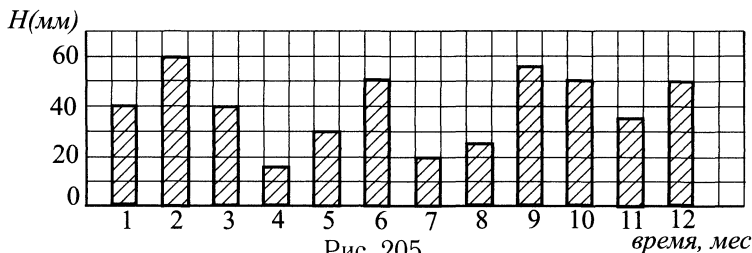


Рис. 205.

197. На диаграмме (см. рис. 206) показано изменение цены нефти в период с 2003 по 2006 год. По горизонтали отчается год, по вертикали — стоимость одного литра нефти в рублях. Укажите год в период с 2003 по 2006, когда цена одного литра в течение всех кварталов была одной и той же.

198. При работе фонарика батарейка разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке 207 показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси

цена, руб.

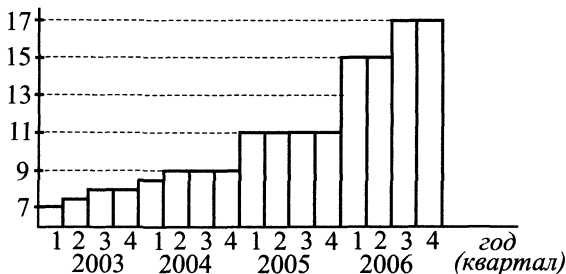


Рис. 206.

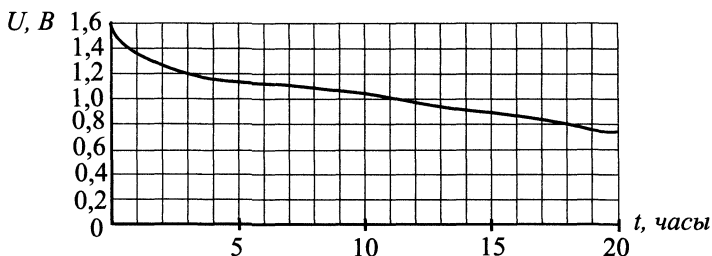


Рис. 207.

отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах.

Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,2 вольт до 0,8 вольт.

199. На графике (см. рис. 208) показана температура воздуха с 15 по 18 июля в некотором городе. По горизонтали отмечается время суток в часах (деления проведены через каждые 6 часов), по вертикали — температура воздуха в градусах Цельсия. Найдите по графику наибольшую температуру воздуха (в градусах Цельсия) 16 июля.

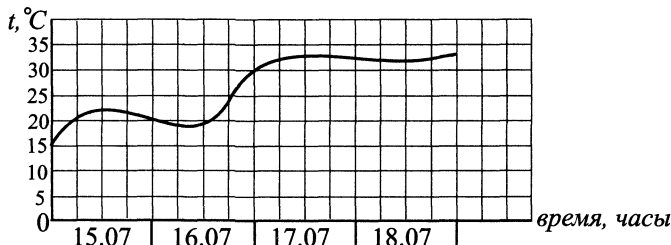


Рис. 208.

200. На рисунке 209 точками показано суточное количество осадков, выпавших в городе Томске 22 октября в 1925, 1930, 1935, 1940, 1945, 1950, 1955, 1960 годах. По горизонтали указываются года, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий год в миллиметрах. Для наглядности точки соединены линией. Определите по рисунку, какое наибольшее количество осадков выпало 22 октября в Томске в рассмотренные годы. Ответ дайте в миллиметрах.

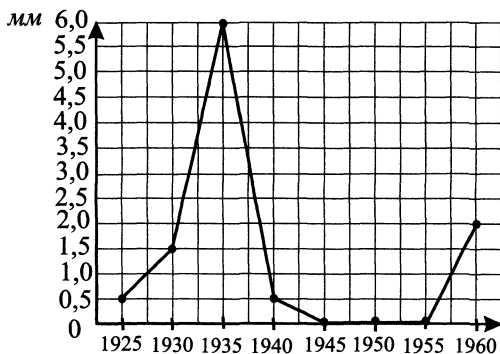


Рис. 209.

201. На графике (см. рис. 210) показан процесс нагревания некоторого прибора. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента включения прибора, на оси ординат — температура прибора в градусах Цельсия.

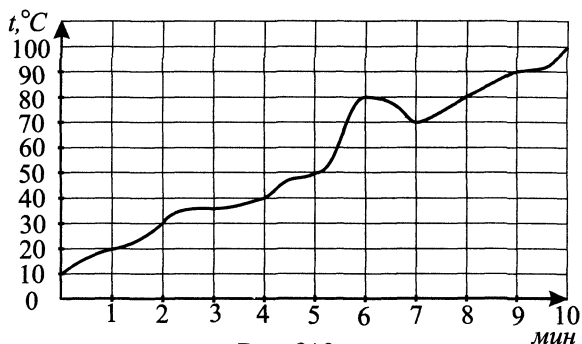


Рис. 210.

Определите по рисунку, за сколько минут прибор нагреется от 50°C до 90°C .

202. На графике (см. рис. 211) показано изменение температуры воздуха в некотором городе с 5 сентября по 7 сентября. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за весь этот период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

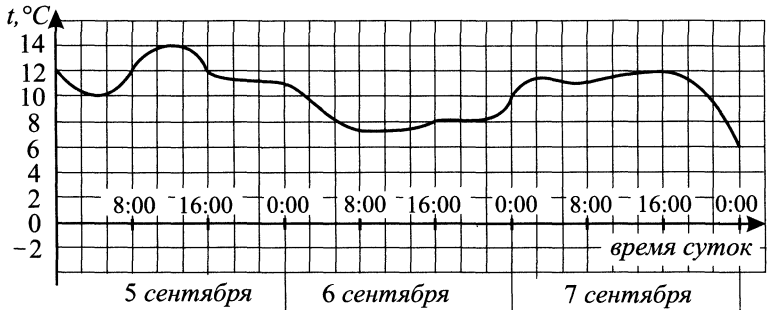


Рис. 211.

203. На диаграмме (см. рис. 212) показано распределение площадей (в тыс. га) сельскохозяйственных угодий в Центральном федеральном округе. По горизонтали указаны названия сельскохозяйственных угодий, по вертикали — занимаемая ими площадь.



Рис. 212.

Определите по диаграмме, сколько тыс. га сельскохозяйственных угодий в Центральном ФО занято в сумме под залежь и насаждения.

204. На диаграмме (см. рис. 213) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) на протяжении одного года в некотором городе. По горизонтали отмечается номер месяца в году, по вертикали — температура воздуха. Укажите количество месяцев, в которых среднемесячная температура воздуха была выше 5°C .

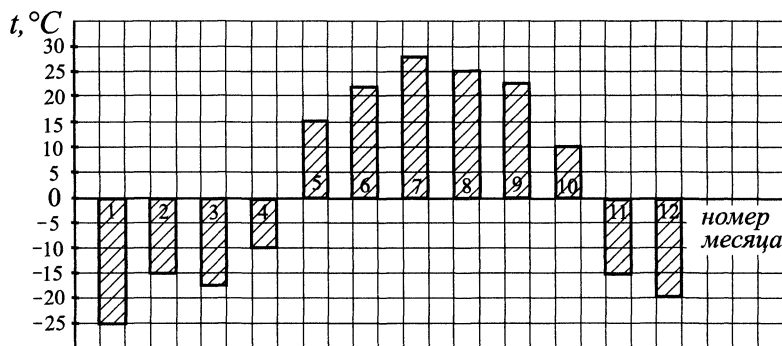


Рис. 213.

1.3.3. Производная функции

Вычисление производной

205. Вычислите производную функции $y = \frac{(11x + 2)^2}{e^x}$ в точке $x = 0$.

206. Вычислите производную функции $y = \frac{(2x + 3)^3}{e^x}$ в точке $x = 0$.

207. Найдите производную функции $\ln x - 3x^2 + 5x + 2$ и вычислите её значение при $x = 5$.

Геометрический смысл производной

208. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику производной $f'(x)$ функции $f(x) = 3 \operatorname{ctg}^2 x$ в его точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

209. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 214 изображён график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 120° к положительному направлению оси абсцисс.

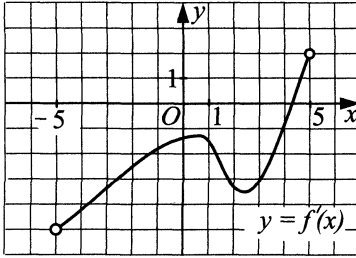


Рис. 214.

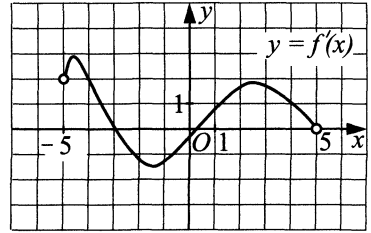


Рис. 215.

210. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 215 изображён график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 150° к положительному направлению оси абсцисс.

211. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 216 изображён график производной этой функции. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные во всех точках, абсциссы которых — положительные целые числа. Укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых проведённые касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.

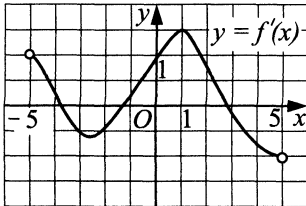


Рис. 216.

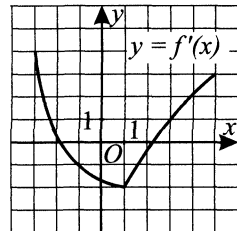


Рис. 217.

212. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рис. 217 изображён график производной этой функции.

213. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$, если на рисунке 218 изображён график производной этой функции.

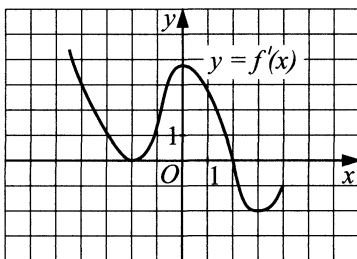


Рис. 218.

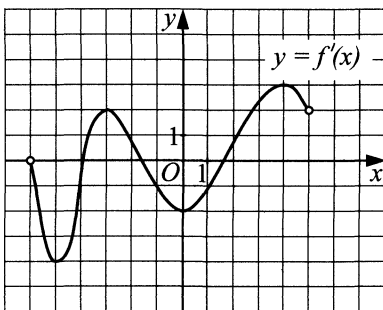


Рис. 219.

214. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$, если на рисунке 219 изображён график производной этой функции.

215. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

216. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 2x^2 + 3x - 8$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

217. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 4)$. На рис. 220 изображён график её производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.

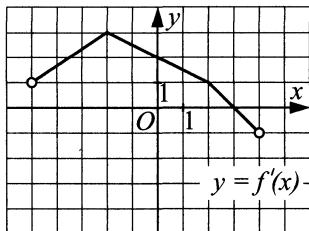


Рис. 220.

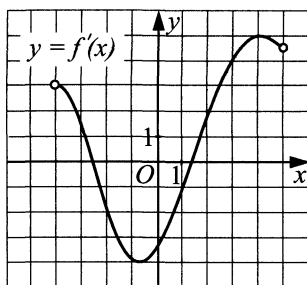


Рис. 221.

218. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке 221 изображён график её производной. Найдите угол наклона (в градусах) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$ к положительному направлению оси Ox .

219. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 4)$. На рисунке 222 изображён график её производной. Определите абсциссу точки, касательная в которой составляет с осью Ox угол в 45° .

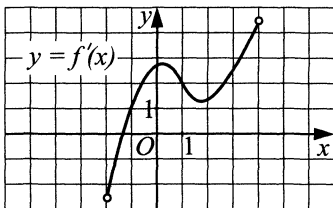


Рис. 222.

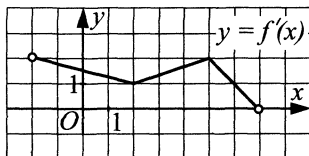


Рис. 223.

220. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 7)$. На рис. 223 изображён график её производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом в 30° к положительному направлению оси абсцисс.

221. В точке A графика функции $y = -x^2 + 4x + 11$ проведена касательная к нему, параллельная прямой $y = 1 - 2x$. Найдите сумму координат точки A .

222. На рисунке 224 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке $(2; -1)$. Найдите значение производной этой функции при $x = 2$.

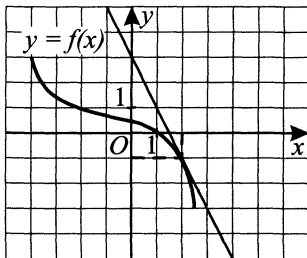


Рис. 224.

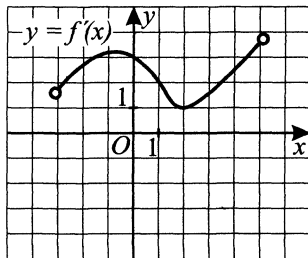


Рис. 225.

223. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рисунке 225 изображён график её производной. Найдите угол наклона касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$, к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Ответ укажите в градусах.

224. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = e^{2x+1} - 3x^4$ в точке с абсциссой $x_0 = -0,5$.

225. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2e^{5x-2} + 5x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{2}{5}$.

226. На рисунке 226 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 1. Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = 1$.

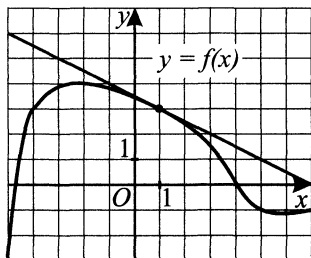


Рис. 226.

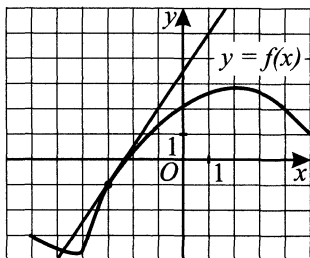


Рис. 227.

227. На рисунке 227 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной -3 . Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = -3$.

228. Прямая $y = 38x - 28$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 + 8x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

229. На рисунке 228 изображены график функции $f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0 .

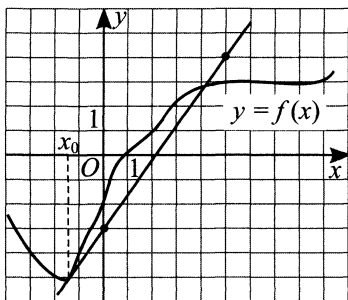


Рис. 228.

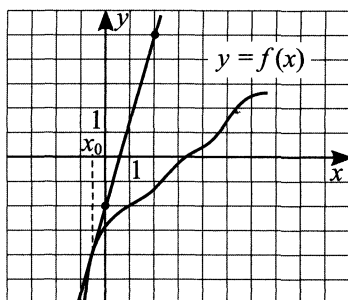


Рис. 229.

230. На рисунке 229 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .

231. На рисунке 230 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

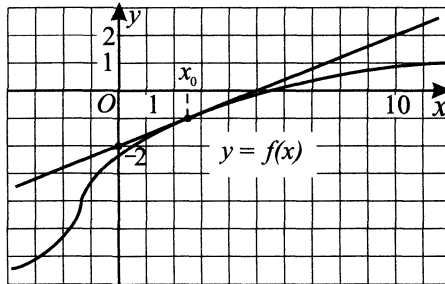


Рис. 230.

232. На рисунке 231 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

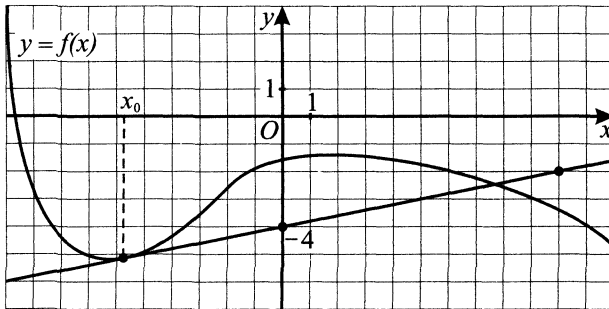


Рис. 231.

233. На рисунке 232 изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 5. Найдите $f'(5)$.

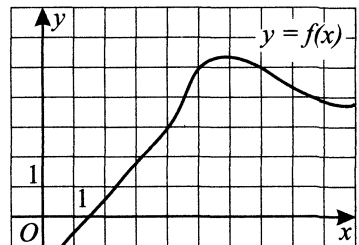


Рис. 232.

234. На рисунке 233 изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.

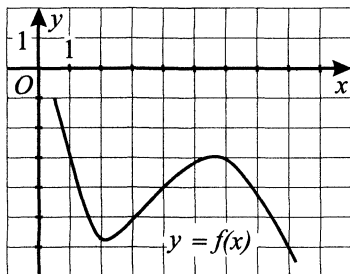


Рис. 233.

235. На рисунке 234 изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 1$ или совпадает с ней.

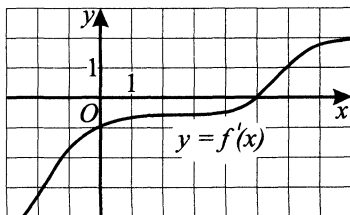


Рис. 234.

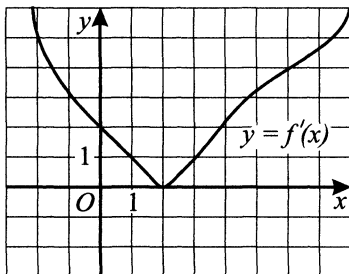


Рис. 235.

236. На рисунке 235 изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 1$ или совпадает с ней.

237. Прямая $y = 3x - 10$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

238. Прямая $y = -x - 3$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3,5x^2 + x - 1$. Найдите абсциссу точки касания.

239. На рисунке 236 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-8; 7]$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

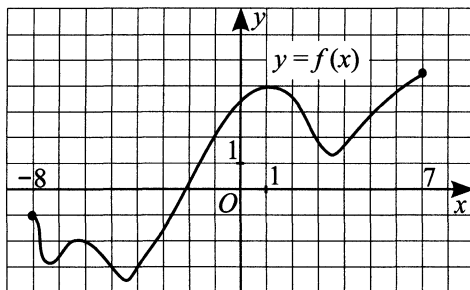


Рис. 236.

240. На рисунке 237 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-8; 7]$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -15$.

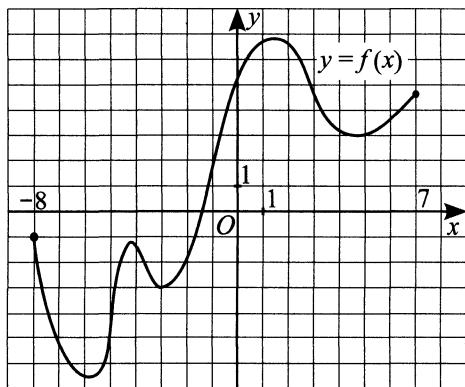


Рис. 237.

241. На рисунке 238 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

242. На рисунке 239 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$ или совпадает с ней.

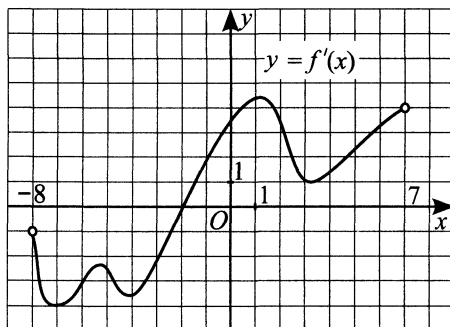


Рис. 238.

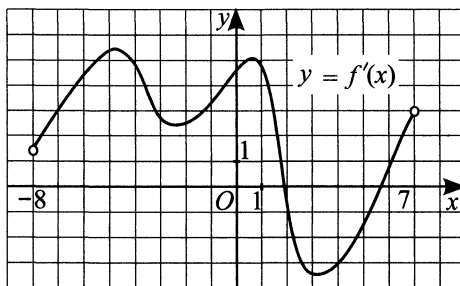


Рис. 239.

243. На рисунке 240 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите, в какой точке отрезка $[2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

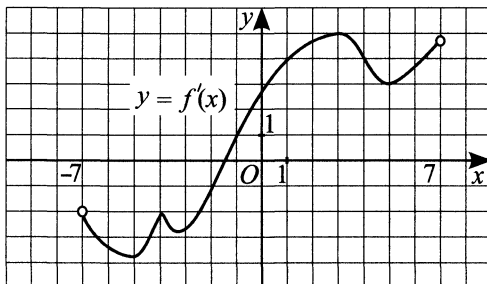


Рис. 240.

244. На рисунке 241 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-1; 5)$.

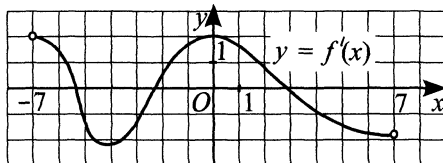


Рис. 241.

245. На рисунке 242 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 5$ или совпадает с ней.

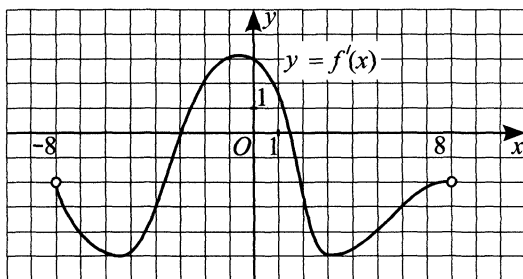


Рис. 242.

246. На рисунке 243 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-6; 6]$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

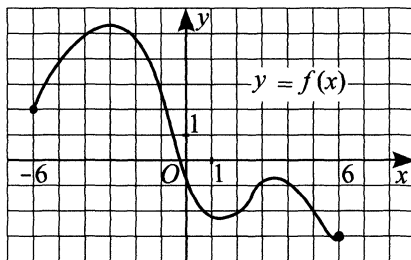


Рис. 243.

247. На рисунке 244 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. В какой точке отрезка $[-4; 1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

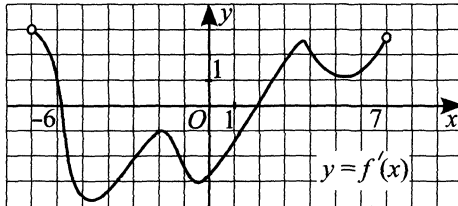


Рис 244.

248. На рисунке 245 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на интервале $(-6; 5)$.

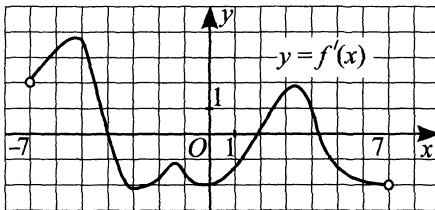


Рис. 245.

249. На рисунке 246 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

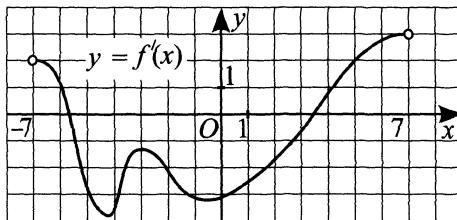


Рис. 246.

250. На рисунке 247 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Укажите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 15$.

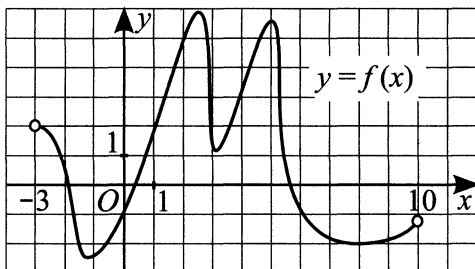


Рис. 247.

251. На рисунке 248 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-3; 10]$. Найдите сумму абсцисс точек экстремума функции $f(x)$.

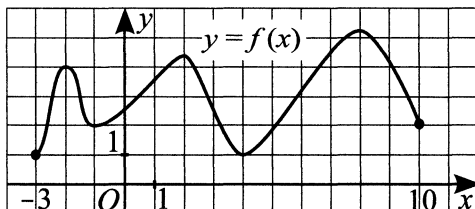


Рис. 248.

252. На рисунке 249 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 9]$.

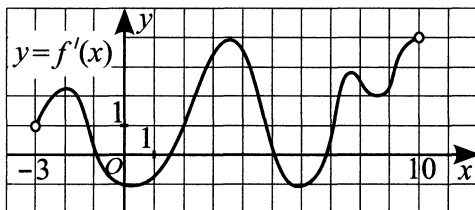


Рис. 249.

253. На рисунке 250 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-9; 3)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-7; 2]$.

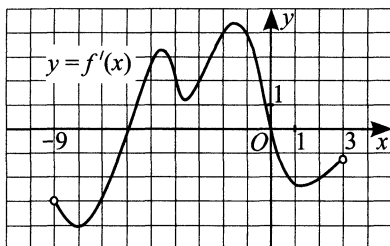


Рис. 250.

254. На рисунке 251 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

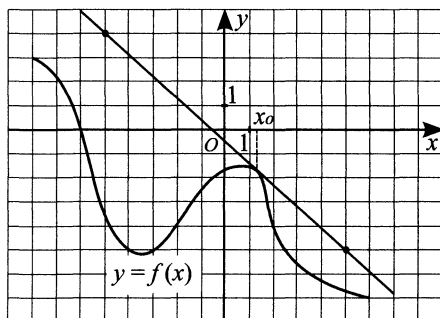


Рис. 251.

255. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[-4; 4]$. На рисунке 252 изображён график этой функции. Найдите наибольшую из длин промежутков возрастания функции.

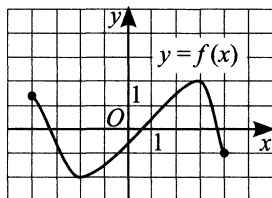


Рис. 252.

256. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-4; 6]$. На рисунке 253 изображён график этой функции. Найдите наибольшую из длин промежутков убывания функции.

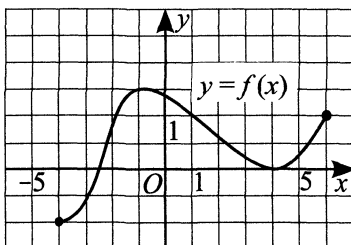


Рис. 253.

257. На рисунке 254 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

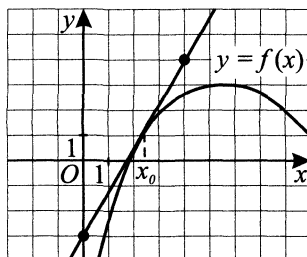


Рис. 254.

258. На рисунке 255 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

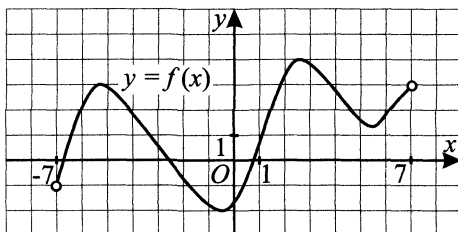


Рис. 255.

259. На рисунке 256 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 6)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

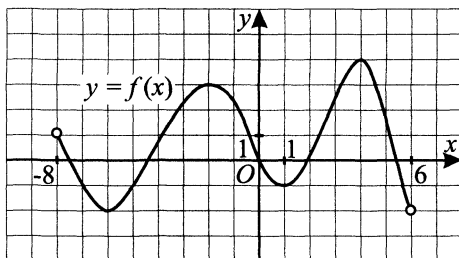


Рис. 256.

260. На рисунке 257 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 10)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 8]$.

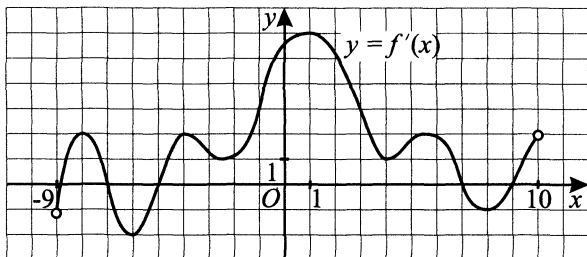


Рис. 257.

261. На рисунке 258 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

262. На рисунке 259 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

263. Прямая $y = 9x + 5$ является касательной к графику функции $y = -x^2 + bx - 11$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 1.

264. Прямая $y = 3x - 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 4x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.

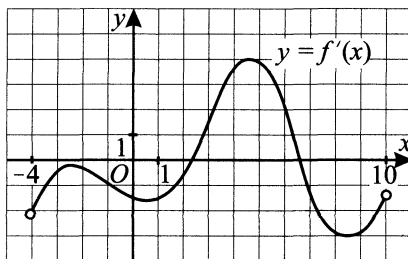


Рис. 258.

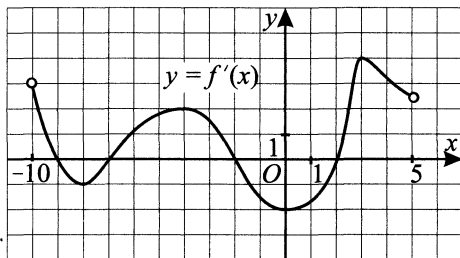


Рис. 259.

265. Прямая $y = 3x + 30$ параллельна касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 - 5x - 18$. Найдите наименьшую из возможных абсцисс точек касания.

266. На рисунке 260 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

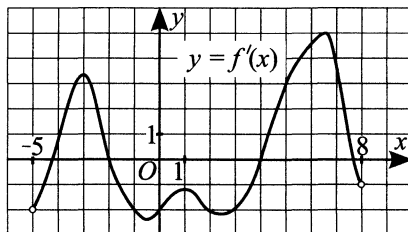


Рис. 260.

267. На рисунке 261 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 11)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 10]$.

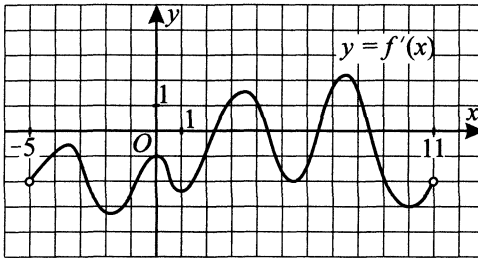


Рис. 261.

268. На рисунке 262 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены семь точек: x_1, x_2, \dots, x_7 . Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.

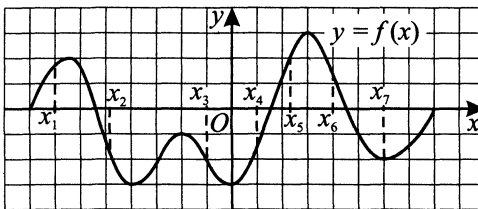


Рис. 262.

269. Прямая $y = -x + 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

270. На рисунке 263 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 7)$. В какой точке отрезка $[-4; 5]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

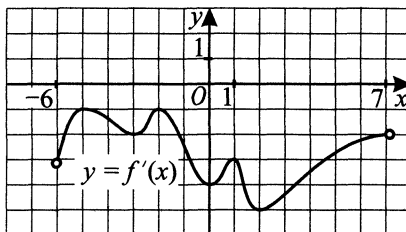


Рис. 263.

271. На рисунке 264 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 10)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.

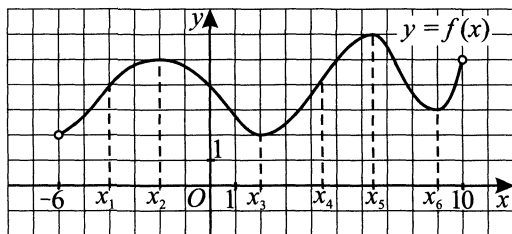


Рис. 264.

272. На рисунке 265 изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек x_1, x_2, \dots, x_8 . Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ положительна. В ответ запишите количество найденных точек.

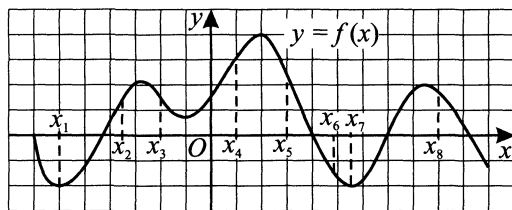


Рис. 265.

273. На рисунке 266 изображены график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

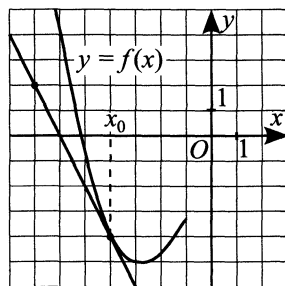


Рис. 266.

274. На рисунке 267 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 8$.

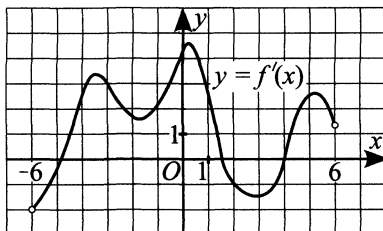


Рис. 267.

275. На рисунке 268 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке x_0 . Уравнение касательной $y = 2x - 6$. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{2}f(x) + 7$ в точке x_0 .

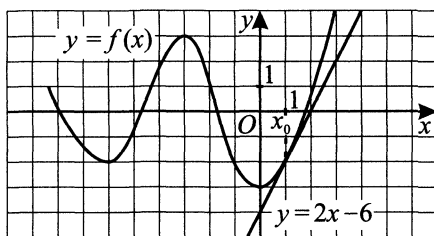


Рис. 268.

276. На рисунке 269 изображён график функции $y = f(x)$, определённой и дифференцируемой на интервале $(-6; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 4$.

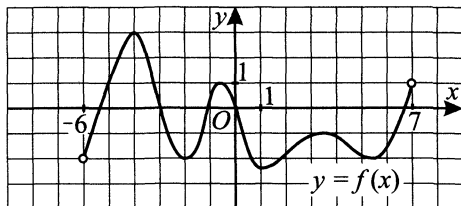


Рис. 269.

277. На рисунке 270 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 3]$.

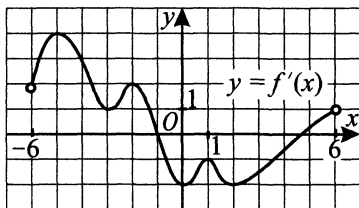


Рис. 270.

278. На рисунке 271 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. В какой точке отрезка $[-6; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

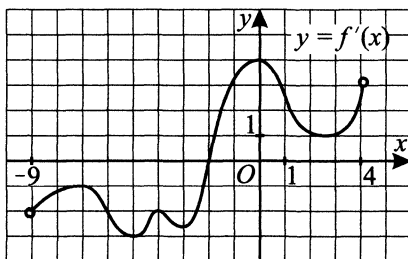


Рис. 271.

279. На рисунке 272 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8; 6]$.

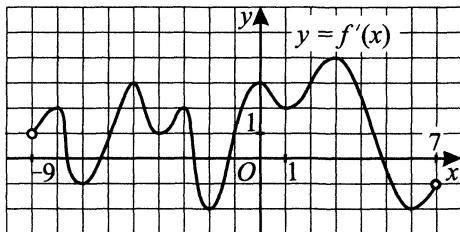


Рис. 272.

280. На рисунке 273 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

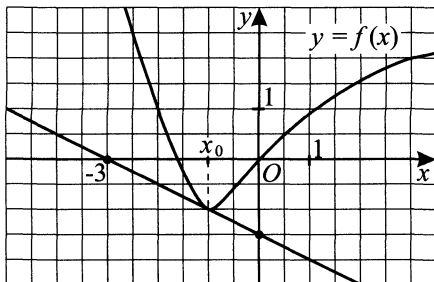


Рис. 273.

281. На рисунке 274 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

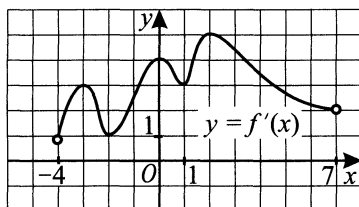


Рис. 274.

282. На рисунке 275 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

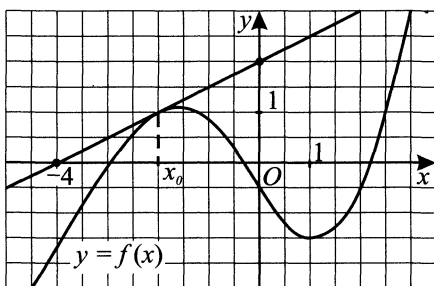


Рис. 275.

Физический смысл производной

283. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = 1,5t^2 - 3t + 7$, где $x(t)$ — координата в момент времени t . В какой момент времени скорость точки будет равна 12?

284. Точка движется по координатной прямой по закону $x(t) = 0,75t^2 + t - 7$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . В какой момент времени скорость точки будет равна 19?

285. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = -2t^2 + 20t - 7$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . В какой точке координатной прямой произойдет мгновенная остановка?

286. На рисунке 276 представлены график движения тела и касательная к графику в момент времени $t = 5$. Определите по графику скорость движения тела (в км/ч) в этот момент времени.

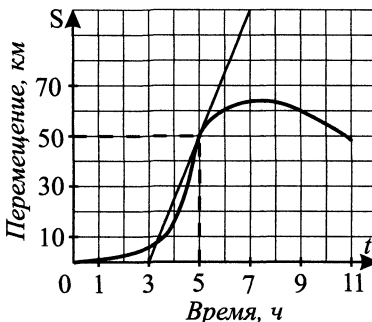


Рис. 276.

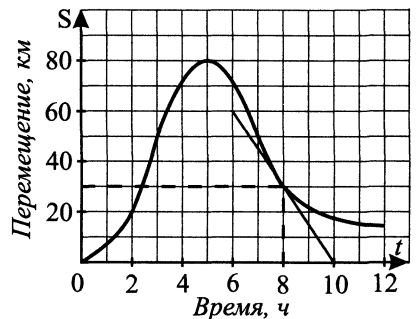


Рис. 277.

287. На рисунке 277 представлены график движения тела и касательная к графику в момент времени $t = 8$. Определите по графику скорость движения тела (в км/ч) в этот момент времени.

288. Перемещение материальной точки задано функцией $y = S(t)$ на промежутке $[0; 8]$. На рисунке 278 изображён график её производной. Найдите момент времени, в который скорость данной точки была равна 2.

289. Перемещение материальной точки задано функцией $y = S(t)$ на промежутке $[0; 8]$. На рисунке 279 изображён график её производной. Найдите момент времени, в который скорость данной точки была равна 3.

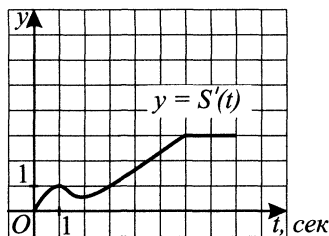


Рис. 278.

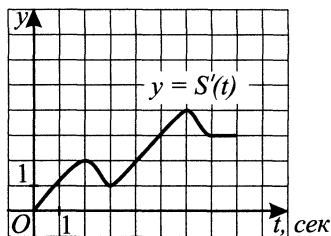


Рис. 279.

290. Мотоциклист в первые 5 с движения проезжал расстояние (в метрах), которое можно описать формулой $S(t) = t^3 + 3t$. Найдите его ускорение в момент времени $t = 1$ (в м/с^2).

291. При проведении испытаний нового скоростного болида в первые 6 с его движения скорость изменялась по формуле $v(t) = 36t - 3t^2$ в метрах в секунду. Какое расстояние прошёл болид за это время? (Ответ укажите в метрах.)

292. Ребёнок на санках в первые 4 с движения с горки проезжал расстояние, заданное формулой $S(t) = \frac{t^3}{2} + 2t$. Найдите его ускорение в момент времени $t = 3$.

293. При метании бумеранга его скорость изменялась по формуле $v(t) = 9t - t^2$ в метрах в секунду. Найдите расстояние, которое преодолел бумеранг, если он был в движении 9 секунд. (Ответ укажите в метрах.)

294. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 4t^2 - 34t + 5$ (x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения). Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

295. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0,4t^3 - 2t^2 + t$ (x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с начала движения). Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t = 5$ с.

296. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{5}t^5 + t^4 - t^3 + 5t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите скорость точки (в м/с) в момент времени $t = 2$ с.

297. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2,5t^2 - 2t + 2, \text{ где } x \text{ — расстояние от точки отсчёта в метрах,}$$

t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) скорость точки была равна 4 м/с?

298. На рисунке 280 изображена зависимость скорости некоторой материальной точки от времени. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — скорость v в метрах в секунду. Определите, сколько раз за время движения ускорение точки обращалось в ноль (начало и конец движения не учитываются).

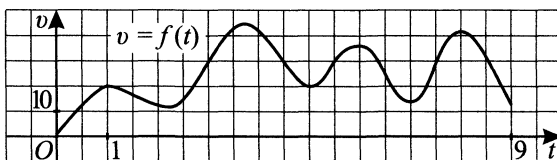


Рис. 280.

Наибольшее, наименьшее значение функции.

Монотонность функции, экстремумы

299. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{4x - 1} - x$.

300. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_4 \frac{3}{x^2 + 4x + 12}$ на отрезке $[-6; 0]$.

Найдите наибольшее значение функции (301–302):

301. $f(x) = x - \log_2 x$ на отрезке $[\frac{1}{2}; 2]$.

302. $y = (x - 4)^2(x - 1)$ на отрезке $[1,5; 4,5]$.

Найдите наименьшее значение функции (303–304):

303. $y = \frac{x^5}{15} - x^3$ на отрезке $[0; 4]$.

304. $y = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Найдите наибольшее значение функции (305–306):

305. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 4x + 3)$ на отрезке $[0; 2]$.

306. $f(x) = 3(5x - 4)^2 - (5x - 4)^3$ при $|2x - 3| \leq 1$.

307. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 4(2x - 3)^3 + (2x - 3)^4$ при $|2x + 1| \leq 1$.

308. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^3 + 3x + 5$ на отрезке $[-1; 2]$.

309. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x + 8$ на отрезке $[-3; 2]$.

310. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 3)e^{x+2}$ на отрезке $[-5; -3]$.

311. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 \cos x - \frac{24}{\pi}x + 3$ на отрезке $[-\frac{2\pi}{3}; 0]$.

312. Найдите наибольшее значение функции $y = 2 \cos x - \frac{18}{\pi}x + 1$ на отрезке $[-\frac{2\pi}{3}; 0]$.

313. Найдите наибольшее значение функции $y = 4 \operatorname{ctg} x + 4x + 3 - 2\pi$ на отрезке $[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi]$.

314. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x + 3 \operatorname{ctg} x - 1 - \frac{3}{4}\pi$ на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

315. Найдите точку минимума функции $y = (5 - x)e^{2-x}$.

316. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 7)e^{x-6}$ на отрезке $[1; 7]$.

317. Найдите точку максимума функции $y = (x - 8)e^{5-x}$.

318. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 7)e^{x-8}$ на отрезке $[7; 8]$.

319. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 12)e^{x-11}$ на отрезке $[10; 12]$.

320. Найдите наименьшее значение функции $y = (2x - 14)e^{x-6}$ на отрезке $[5; 7]$.

321. Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \cos x + 3\sqrt{3}x - \pi\sqrt{3} + 8$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

322. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\sqrt{2} \cos x + 4x - \pi - 1$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

323. Найдите наименьшее значение функции $y = 6 \cos x - 10x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

324. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 7x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

325. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 4 \sin x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

326. Найдите наименьшее значение функции $y = 2 \sin x - 8x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

327. Найдите наименьшее значение функции $y = 2 \sin x - 3x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

328. Найдите наибольшее значение функции $y = 2 \sin x - \frac{6}{\pi}x + 1$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

329. Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \operatorname{tg} x - 2x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

330. Найдите наименьшее значение функции $y = 7 \operatorname{tg} x - 2x + 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

331. Найдите точку минимума функции $y = (x + 4)e^{x-4}$.

332. Найдите точку минимума функции $y = (2 - x)e^{2-x}$.

333. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \log_2(x + 6)^2$ на отрезке $[-5, 5; 0]$.

334. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \log_2(x + 3)^2$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

335. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5 \ln(x + 4) + 2$ на отрезке $[-3; 0]$.

336. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x + 2)^3$ на отрезке $[-1, 5; -1]$.

337. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

338. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{2x} + 2^x - 2$ на отрезке $[-1; 2]$.

339. Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \ln(x + 6) - 6x + 11$ на отрезке $[-5; 5; 0]$.

340. Найдите наименьшее значение функции $y = 6 + 27x - x^3$ на отрезке $[-3; 4]$.

341. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 6x - x^2$ на отрезке $[-2; 4]$.

342. Найдите точку минимума функции $y = 15x^2 - x^3$.

343. Найдите точку максимума функции $y = 15x^2 - x^3$.

344. Найдите точку максимума функции $y = (27 - x)e^{x+27}$.

345. Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{16}{x}$ на отрезке $[1; 8]$.

346. Найдите точку максимума функции $y = x + \frac{16}{x}$.

347. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 169}$.

348. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 49}{x}$ на отрезке $[1; 7]$.

349. Найдите точку минимума функции $y = (2 - x)^2 e^{5-x}$.

350. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 17)e^{x+2}$.

351. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 8x + 6 \ln x + 19$ на отрезке $[\frac{15}{17}; \frac{19}{17}]$.

352. Найдите наименьшее значение функции $y = 3 + 24x - 2x^2 - 20 \ln x$ на отрезке $[\frac{1}{7}; \frac{13}{7}]$.

353. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 5)^4 - 10x$.

354. Найдите точку минимума функции $y = 5 + \log_4(x^2 - 8x + 21)$.

355. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 3 \operatorname{tg} x + \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

356. Найдите наибольшее значение функции $y = 24 \sin x - 12\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\pi + 2$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

357. Найдите наибольшее значение функции $y = (10 - x)e^{x-9}$ на отрезке $[8; 10]$.

358. Найдите наименьшее значение функции $y = (4x^2 + 24x - 24)e^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

359. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 150x + 11$.

360. Найдите точку максимума функции $y = 17 - 2x^{\frac{3}{2}} + 9x$.

361. Найдите наибольшее значение функции $y = 5^{-3x^2+18x-24}$.

362. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{16}{x} + x$ на отрезке $[4; 8]$.

363. Найдите точку максимума функции $y = -\sqrt{x^2 - 8x + 17}$.

364. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 361}{x}$.

365. Найдите точку минимума функции $y = (4x - 3)\sin x + 4\cos x - 4$, принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

366. Найдите точку максимума функции $y = 2\sin x - (2x - 7)\cos x + 7$, принадлежащую промежутку $(\pi; \frac{3\pi}{2})$.

367. Найдите наименьшее значение функции $y = 16x - \ln(8x) + 4$ на отрезке $[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}]$.

368. Найдите наименьшее значение функции $y = 10\ln(x + 3) - 4x + 2$ на отрезке $[-2; -0,5]$.

1.3.4. Первообразная функции

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (369–382):

369. $y = 24x - 9x^2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 0$.

370. $y = e^x$, $x = 0$, $x = \ln \frac{5}{2}$, $y = 0$.

371. $y = \frac{1}{x} - 1$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 4$, $y = 0$.

372. $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $y = 0$.

373. $y = x^2$, $y = x + 2$.

374. $y = -3x^2 - 3x$, $y + 9x + 9 = 0$.

375. $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$.

376. $y = x^3 - x, y = 8x.$

377. $y = x^2 + |x| + 1, y = 3|x| + 4.$

378. $y = 3x^4 - 6x^2 + 3, y = 3 - 3x^2.$

379. $y = 3x(x^2 - 3x + 3), y = 3x^2.$

380. $y = 3 \cos 2x, x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{\pi}{4}$ и $y = 0.$

381. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}, y = \frac{1}{2}, y = 2$ и осью ординат.

382. $y = \sin x, y = \cos x, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi.$

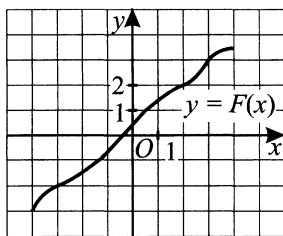
383. Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1.$ Найдите угловой коэффициент касательной кграфику функции $y = F(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi.$ 384. На рисунке 281 изображён график функции $y = F(x)$, где F — первообразная функции $f.$ Найдите площадь под графиком функции f на отрезке $[-3, 2].$ 

Рис. 281.

§ 2. Арифметика и алгебра

2.1. Текстовые задачи

2.1.1. Проценты, сплавы, смеси

385. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов 10%-го раствора было взято?

386. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 24 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный новый сплав содержал 40% меди?

387. Два сосуда с раствором щёлочи разных концентраций (по объёму) содержат вместе 20 л раствора. Первый сосуд содержит 4 л щёлочи, а второй — 6 л. Сколько процентов щёлочи содержит первый сосуд, если второй содержит щёлочи на 40% меньше первого?

388. Сплав меди с цинком, содержащий 5 кг цинка, сплавляли с 15 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве понизилось по сравнению с первоначальным на 30%. Какова была первоначальная масса сплава, если известно, что она была меньше 20 кг?

389. Сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, сплавляли со 100 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным на 20%. Сколько серебра в сплаве?

390. Количество элементов выпускаемой продукции неудачного предприятия с момента открытия ежемесячно падало на 40% по отношению к предыдущему месяцу. В последний, пятый месяц работы предприятие выпустило 324 элемента продукции, после чего было закрыто. Сколько элементов продукции было выпущено предприятием за время своего существования?

391. Два литра шестипроцентного уксуса разбавили тремя литрами однопроцентного уксуса. Каково процентное содержание уксуса в полученном растворе?

392. При распродаже летней коллекции одежды скидка составила 40%, а прибыль, получаемая магазином, снизилась до 20%. Сколько процентов прибыли от этой коллекции получал магазин до распродажи?

393. В связи с подорожанием энергоресурсов фирма по перевозке грузов планировала увеличить тарифы на свои услуги на 30%, но для сохранения прежнего объёма заказов её руководство установило тариф, который составил 90% от первоначально планируемого. На сколько процентов подорожали услуги фирмы?

394. Молокозавод планирует увеличить выпуск продукции на 10%. На сколько процентов увеличится чистая прибыль завода, если отпускная цена его продукции возросла на 15%, а её себестоимость для завода, которая до этого составляла $\frac{3}{4}$ отпускной цены, увеличилась на 20%.

395. В результате расширения компании сотовой связи и одновременно снижения тарифов на 50% ежемесячный объём продаж её услуг вырос в 3 раза. Через сколько месяцев дополнительная прибыль, получаемая компанией, компенсирует затраты на расширение, если они составили половину прежнего годового дохода компании?

396. Ювелирное изделие состоит из серебра и золота. В начале года серебро дорожает на 5%, а золото — на 20% по сравнению с предыдущим годом, в результате чего стоимость ювелирного изделия увеличивается на 15%. Какую часть ювелирного изделия составляет золото, если в предыдущем году 1 г золота стоил в 18 раз дороже 1 г серебра? (Ответ дать в виде десятичной дроби.)

397. В сосуде находится 10%-ный раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объёма. Какое процентное содержание спирта оказалось окончательно в сосуде?

398. Бетономешалка содержит раствор цемента, состоящий из цемента, песка и воды. Из бетономешалки вылили $\frac{2}{5}$ находящегося в ней раствора цемента, а к оставшейся части добавили некоторое количество песка и некоторое количество воды так, что бетономешалка оказалась заполненной на $\frac{7}{9}$ первоначального объёма раствора. При этом раствор цемента стал содержать 27% цемента. Сколько процентов цемента изначально было в растворе?

399. В стране поставили задачу удвоения ВВП за 2 года. Сколько процентов должен составить рост ВВП за год? (Результат округлите до целого числа.)

400. В стране 10 аэропортов. С самого крупного за сутки взлетает 42 самолета, а с каждого последующего (в порядке убывания интенсивности) на 4 меньше. Сколько самолетов взлетает за сутки со всех 10 аэропортов?

401. Василий Петрович собирается взять ссуду в коммерческом банке. Определите максимальную величину суммы (в руб.), которую Василий Петрович может взять у банка под 20% годовых, если он хочет полностью расплатиться с банком в течение двух лет, выплачивая в конце каждого года не более чем 90 000 руб.

402. Мария Павловна открыла счёт в банке на сумму 20 тыс. руб. Через год после начисления банком процентов она пополнила счёт на 30 тыс. руб. А ещё через год сумма на её счёте составила 60 950 руб. Определите, сколько процентов годовых выплачивает банк по виду вклада, открытого Марией Павловной.

403. Технологический процесс обогащения руды состоит из трёх этапов, на каждом из которых происходит уменьшение доли примесей в руде на определённое число процентов по отношению к предыдущему этапу. На первом этапе доля примесей уменьшается на 20%, на втором этапе — на 15%, на третьем этапе — на 10%. На сколько процентов уменьшается доля примесей в руде после завершения этого процесса?

404. Расценки на грузоперевозки по железной дороге увеличивались за год дважды: на 20% в первый раз, и на 10% — во второй. Определите, на сколько процентов возрастут расходы почтовой фирмы на железнодорожный транспорт, если объём перевозимой ею по железной дороге почты вырос на 30%.

405. При консервировании фруктов банок с абрикосовым компотом было закупорено на 10% больше, чем банок с вишнёвым компотом. Причем с вишнёвым компотом трёхлитровых банок было закупорено на 25% больше, а литровых — на 15% меньше, чем с абрикосовым компотом. Сколько процентов составляют трёхлитровые банки с абрикосовым компотом от всех закупоренных с этим компотом банок? (Ответ округлите до целого числа.)

406. В начале учебного года издательство выпустило на 20% книг по математике больше, чем книг по физике. Причём по физике книг для девятого класса было выпущено на 10% больше, а для одиннадцатого класса — на 25% меньше, чем книг по математике. Сколько процентов составляют книги по физике для девятого класса от всех книг, выпущенных по физике? (Ответ округлите до целого числа.)

407. Имеются два сплава, в первом из которых содержится 40%, а во втором — 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава необходимо добавить к 20 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 30% серебра?

408. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Соединив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько килограммов олова содержится в получившемся сплаве?

409. Имеются два раствора цемента, состоящих из воды, песка и цемента. Известно, что первый раствор содержит 10% воды, а второй — 40% цемента. Процентное содержание песка в первом растворе в два раза больше, чем во втором. Смешав 300 кг первого раствора и 400 кг вто-

рого раствора, получили новый раствор, в котором оказалось 30% песка. Сколько килограммов цемента содержится в получившемся растворе?

410. В первой канистре находится пятипроцентный раствор соли, а во второй канистре — десятипроцентный. В пустое ведро выливают половину раствора из каждой канистры. В результате ведро содержит семипроцентный раствор. Во сколько раз масса раствора в первой канистре больше массы раствора во второй?

411. В первой колбе находится однопроцентный раствор уксуса, а во второй колбе — пятипроцентный. В третью колбу выливают половину раствора из каждой колбы. В результате колба содержит двухпроцентный раствор. Во сколько раз масса раствора в первой колбе больше массы раствора во второй?

412. Фирма «Абрикос» занимается производством сока. В новом году фирма решила выпускать сок в новой, более качественной упаковке, которая на 15% дороже предыдущей. В результате стоимость сока увеличится на 5%. Сколько процентов от общей стоимости пакета сока первоначально составляла стоимость упаковки? (Ответ округлите до целого числа.)

413. Хозяин магазина музыкальных инструментов распорядился заменить у гитар струны из нейлона на металлические, которые на 50% дороже струн из нейлона. В результате стоимость каждой из этих гитар возросла на 1%. Сколько процентов от стоимости всей гитары составляла стоимость струн из нейлона?

414. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из неё металл содержит 4% примесей. Сколько тонн руды необходимо взять, чтобы выплавить из неё 15 тонн металла?

415. Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержится 12 кг хрома. Найдите процентное содержание хрома в полученном сплаве, если известно, что содержание хрома в первом куске чугуна было на 5% меньше, чем во втором, и что если бы первый кусок был в два раза тяжелее, то в сплаве оказалось бы 16 кг хрома.

416. Сплавляя два одинаковых по весу слитка, состоящих только из золота и серебра, с разным содержанием золота, получили сплав, в котором содержится 3 кг золота. Если бы второй слиток был в два раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 11 кг серебра. Известно, что процентное содержание золота в первом слитке было на 20% больше, чем во втором. Сколько килограммов серебра содержится в полученном сплаве?

417. Имеется два раствора кислоты. Первый раствор состоит из 1056 г кислоты и 44 г воды, а второй — из 756 г кислоты и 1344 г воды. Из этих растворов нужно получить 1500 г нового раствора, содержание кислоты в котором 40%. Сколько граммов первого раствора нужно для этого взять?

418. Имеется два достаточно больших слитка сплава золота с медью. Первый слиток содержит 92% золота, а второй — 80% золота. Из этих слитков надо получить 600 г сплава, содержание золота в котором 85%. Определите массу куска, который для этого необходимо взять от первого слитка.

419. Салон модной одежды выставил на продажу новую коллекцию, сделал наценку 80% от закупочной цены. После продажи 0,75 всей коллекции салон распродал оставшуюся часть коллекции со скидкой 60% от продажной цены. Сколько процентов от закупочной цены коллекции составила прибыль салона?

420. Салон модной одежды выставил на продажу новую коллекцию, сделал наценку 140% от закупочной цены. После продажи 0,85 всей коллекции салон распродал оставшуюся часть с одинаковой скидкой от продажной цены (в процентном отношении) на все элементы коллекции. Сколько процентов составила эта скидка, если прибыль салона от продажи всей коллекции составила 113% от закупочной цены?

421. Антикварный магазин, купив портсигар и статуэтку, продал их, получив 40% прибыли. Во сколько раз портсигар обошёлся дороже магазину, чем статуэтка, если на портсигаре было получено 35% прибыли, а на статуэтке — 60%?

422. Кондитерская фабрика производит 20 видов шоколада. В новом году 5 из этих видов будут производить на 10% больше, а другие 7 видов — на 20% больше. На сколько процентов увеличится выпуск шоколада на фабрике, если в старом году все виды шоколада производились в одинаковом количестве?

423. За два года количество безработных в регионе снизилось на 60%. На сколько процентов снизилась безработица за первый год, если во второй год снижение было в два с половиной раза больше, чем в предыдущем (в процентном отношении)?

424. После двух последовательных повышений размер пенсии был увеличен на 56%. На сколько процентов повысили пенсию в первый раз, если второе повышение было в полтора раза больше первого (в процентном отношении)?

425. В сосуде было 20 литров кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров воды доливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 36%-ный раствор кислоты?

426. В сосуде было 10 литров масла. Часть масла отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров воды доливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 81%-ный раствор?

427. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся сплав содержал 40% меди?

428. В течение третьего квартала стоимость некоторого пакета акций изменялась следующим образом: 15 августа стоимость пакета акций была на 25% выше, чем его стоимость 1 июля, а среднее арифметическое его стоимости 30 сентября и 1 июля равнялось его стоимости 15 августа. На сколько процентов подорожал пакет акций за период с 15 августа по 30 сентября?

429. Магазин выставил на продажу товар с наценкой 45% от закупочной цены. После продажи 0,6 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

430. После проведения санитарной обработки полей количество колорадского жука уменьшилось на 40%, а количество капустницы — на 20%. В целом количество насекомых уменьшилось на 25%. Сколько процентов от общего числа насекомых составляла капустница до санитарной обработки?

431. Население города за 2 года увеличилось с 20000 до 22050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения этого города.

432. Сплав меди и цинка массой 12,5 кг содержит 40% меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал меди и цинка поровну?

433. К раствору соляной кислоты добавили 100 г соляной кислоты. В результате получили 600 г 18%-ного раствора соляной кислоты. Сколько граммов соляной кислоты содержалось в исходном растворе?

434. Скорость скачивания файла с сайта 0,25 Мб/сек. Сколько процентов файла величиной 75 Мб скачается с сайта за 2 минуты?

- 435.** Файл 1,5 Мб скачивается с сайта за 27 секунд. За сколько минут скачается файл величиной 80 Мб, если скорость скачивания увеличится на 20%?
- 436.** Тетя Маша пошла на продуктовый рынок и купила там 1 кг черешни, после чего заметила в продаже еще черешню стоимостью 90 рублей за кг, что было на 10% дешевле той, что она уже купила, и взяла ещё 1 кг этих ягод. Не меньше какой суммы в рублях было у тети Маши с собой изначально?
- 437.** Есть два раствора щёлочи суммарным объёмом 19 литров. Первый раствор содержит 5 литров щёлочи, второй — 2 литра. Найдите объём в литрах первого раствора, если процентное содержание щёлочи в нём в 1,5 раза меньше, чем во втором.
- 438.** Эльдар на день рождения Эльвире купил флэш-карту объёмом 16 Гб за 1200 рублей, после чего увидел флэш-карту объёмом 32 Гб. И хотя она стоила на 60% дороже уже купленной, Эльдар взял в подарок её, решив флэш-карту меньшей ёмкости оставить себе. Не меньше какой суммы в рублях было у Эльдара с собой изначально?
- 439.** Есть два куска сплава металлов. Масса олова в первом 5 кг, во втором — 7 кг. Найдите массу второго сплава, если процентное содержание олова в нём в 3 раза больше, чем в первом, и если суммарный вес обоих кусков сплава равен 44 кг.
- 440.** Из 30 центнеров муки 40% было продано оптом, а остальное расфасовано в пакеты по 2 кг. В один ящик вмещается 40 пакетов. Сколько ящиков потребуется, чтобы разместить пакеты с мукой?
- 441.** Стоимость комплекта учебников по математике составляет 420 руб. Какое максимальное количество комплектов по математике может приобрести библиотека на 5000 руб, если комплект подорожает на 15%?
- 442.** Стоимость 20 мячей до уценки составляла 900 руб. Какое максимальное количество мячей можно приобрести на ту же сумму после их уценки на 10%?
- 443.** В маршрутном такси 20 посадочных мест. Какое минимальное количество такси потребуется для того, чтобы перевезти 87 учащихся от школы до Дворца спорта, если каждое такси будет заполнено школьниками на 90%?
- 444.** Операционист банка обслуживает за день в среднем 30 человек. Какой процент клиентов от общего числа обслуживаемых в день операционист может обслужить за 2 часа работы, если одному клиенту он уделяет 10 минут?

445. В ящике с шоколадками $\frac{2}{3}$ шоколадок содержат орехи, а $\frac{5}{6}$ — изюм.

Сколько процентов шоколадок содержат и орехи, и изюм, если каждая шоколадка содержит хотя бы одну из добавок?

446. В группе студентов $\frac{3}{5}$ владеют английским языком, а $\frac{7}{10}$ — немецким.

Сколько процентов студентов владеют обоими языками, если каждый студент владеет хотя бы одним из этих языков?

447. Поздравительная открытка стоит 20 рублей. Какое максимальное число открыток можно будет купить на 200 рублей после повышения цены на 25%?

448. Метр сетевого кабеля стоит 10 рублей. Какое максимальное количество метров кабеля можно будет купить на 300 рублей, если цена на него упадёт на 10%? (Кабель продают только целым количеством метров.)

449. Тракторист за день вспахивает 8 га пашни. Сколько дней понадобится трактористу, чтобы вспахать поле площадью 120 га, если его производительность увеличится на 25%?

450. Пирожок в школьном буфете стоит 12 рублей. Какое максимальное число пирожков можно будет купить на 50 рублей после снижения цены пирожка на 25%?

451. Набор карандашей стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких наборов можно будет купить на 360 рублей после повышения цены на 10%?

452. Калькулятор стоит 100 рублей. Какое наибольшее число таких калькуляторов можно будет купить на 500 рублей после понижения их цены на 20%?

453. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 рублей за штуку. Торговая наценка составляет 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1400 рублей?

454. Тетрадь стоит 50 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 570 рублей после понижения цены на 10%?

455. Мобильный телефон стоил 6650 рублей, а после снижения цены стал стоить 5852 рубля. На сколько процентов была снижена цена?

456. Во фруктовом отделе магазина находится 1000 фруктов, причём 76% из них не цитрусовые. Известно, что 65% цитрусовых составляют не апельсины. Сколько апельсинов в отделе?

- 457.** Клиент взял в банке кредит 100 000 рублей на год под 14% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму вместе с процентами. Сколько рублей должен клиент вносить в банк ежемесячно?
- 458.** Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы работник получил 13 485 рублей. Сколько составляет его заработная плата? (Ответ дайте в рублях.)
- 459.** Стаканчик сырых семечек стоит 5 рублей, а жареных — на 60% больше. Сколько стаканов жареных семечек можно купить на 100 рублей?
- 460.** Поставщик привозит в магазин пирожные, а в магазине после наценки 40% от стоимости их продают по цене 21 рубль. Сколько пирожных можно купить у поставщика на 70 рублей?
- 461.** Цена одного литра кефира была повышена на 15% и составила 32 рубля 20 копеек. Сколько рублей стоил литр кефира до повышения цены?
- 462.** Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата программиста составила 35 тысяч рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?
- 463.** Штучный товар стоит 180 руб. Какое количество этого товара можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены на 15%?
- 464.** Положив в банк 2000 рублей, вкладчик получил через два года 4380 рублей 80 копеек. Какой процент начислял банк ежегодно?
- 465.** Билет в театр стоит 500 руб. Какое максимальное количество билетов можно купить на 5000 рублей после повышения цены билета на 15%?
- 466.** Положив в банк 1500 рублей, вкладчик получил 1949,4 рублей через два года. Какой процент начислял банк ежегодно?
- 467.** Банк дважды в течение года повышал процентную ставку по кредиту на 12%. Найдите, на сколько процентов повысился платёж за кредит по истечении года. (Знак % не писать).
- 468.** Одна книга из серии «От Кантемира до Кушнера» стоит 180 рублей. Какое наибольшее количество книг этой серии можно купить на 1050 рублей, если скидка составляет 25%?
- 469.** Одна поездка в маршрутном такси стоит 20 рублей. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить на 1600 рублей после повышения цены проезда на 30%?
- 470.** 8 выпускников школы собираются продолжить обучение в вузах других городов. Они составляют 5% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

471. В сосуд, содержащий 6 литров 15%-го водного раствора некоторого вещества, добавили 4 л воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

472. Цена телевизора составляет 40 000 руб. Ежемесячно торговая компания уменьшает цену на одно и то же количество процентов от предыдущей цены. Найдите, на сколько процентов уменьшалась цена телевизора каждый месяц, если через 2 месяца телевизор купили за 35 344 руб.

473. В городе R живёт 200 000 жителей. Среди них 10% детей и подростков. Среди взрослых 50% не работает (пенсионеры, студенты и т. п.). Сколько взрослых жителей в городе R работает?

474. Стоимость одной поездки в автобусе была повышена на 28% и составила 16 рублей. Сколько рублей стоила одна поездка до повышения цены?

475. Видеокарта стоит 2400 рублей. После снижения цены она стала стоить 1632 рубля. На сколько процентов была снижена цена на видеокарту?

476. Магазин покупает средство от комаров по 120 рублей за флакон и продаёт с наценкой 35%. Какое наибольшее число флаконов можно купить в этом магазине на 900 рублей?

477. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия в размере 7%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Студентка L хочет положить на счёт своего мобильного телефона не менее 220 рублей. Какую минимальную сумму (в рублях) она должна положить в приёмное устройство данного терминала?

478. Анна, Мария, Людмила и Александра учредили компанию с уставным капиталом 240 000 рублей. Анна внесла 15% уставного капитала, Мария — 43 200 рублей, Людмила — 0,25 уставного капитала, а оставшуюся часть внесла Александра. Учредители договорились, что полученную прибыль они будут делить пропорционально внесённому вкладу. Найдите сумму (в рублях), причитающуюся Александре, если годовая прибыль компании составила 820 000 рублей.

2.1.2. Движение

479. Автотурист проехал на автомобиле в первый день 720 км. В каждый следующий день он проезжал на 40 км меньше. Сколько дней путешествовал автотурист, если за всё время путешествия он проехал 5040 км?

480. Мотоциклист предполагал проехать расстояние 90 км за определённое время. Проехав 54 км, он должен был остановиться у закрытого шлагбаума на 5 мин. Продолжив движение, он увеличил скорость на 6 км/ч и прибыл к месту назначения в намеченное время. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

481. Два автомобиля выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу по одной и той же дороге. Первый автомобиль прибывает в пункт B через 15 часов после выезда, а второй прибывает в пункт A через 4 часа после их встречи. Сколько времени прошло от момента выезда автомобилей до момента их встречи, если оба автомобиля двигались с постоянной скоростью?

482. Из пункта A в пункт B выезжает велосипедист и прибывает в пункт B через 45 минут. Одновременно с ним, по той же самой дороге, из пункта B в пункт A выходит пешеход. Пешеход прибывает в пункт A через 1 час после встречи с велосипедистом. Считая, что велосипедист и пешеход двигались с постоянной скоростью, определите, сколько минут прошло от начала движения велосипедиста и пешехода до момента их встречи.

483. Спортсмен, стартуя с одного конца бассейна, доплывает до другого конца бассейна, поворачивает и плывёт обратно. В тот момент, когда он поворачивает, по соседней дорожке навстречу ему выплывает другой спортсмен, который проплывает расстояние от одного до другого конца бассейна за 36 секунд. Первый спортсмен вернулся к месту своего старта через 25 секунд после того, как поравнялся со спортсменом, плывшим ему навстречу. Предполагая, что скорость спортсменов всё время была постоянной, определите, через сколько минут после начала заплыва первый спортсмен вернулся к месту старта.

484. Катер прошёл 10 км против течения реки, а затем 45 км по течению, затратив на весь путь 2 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 5 км/ч.

485. Ученик идёт в школу со скоростью 5 км/ч. За минуту до звонка он спохватывается и бежит весь оставшийся путь со скоростью 20 км/ч. В результате он опаздывает на урок всего на одну минуту. За сколько секунд до звонка должен был спохватиться школьник, чтобы успеть вовремя?

486. Студент идёт в университет со скоростью 2 км/ч, за пять минут до начала занятий он прибавляет шаг и оставшийся путь проходит со скоростью 6 км/ч. В результате студент опаздывает на 20 минут. За какое минимальное время (в минутах) до начала занятий ему нужно было прибавить шаг, чтобы опоздать не больше, чем на 15 минут?

487. Пешеход идёт вдоль дороги. Мимо него проезжают попутные автобусы с интервалом 10 минут. С каким интервалом (в минутах) автобусы проезжают мимо остановки, если скорость автобуса в десять раз больше скорости пешехода?

488. Моторная лодка прошла против течения реки 16 км и возвратилась назад, затратив на обратный путь на 40 минут меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки 2 км/ч. Во сколько раз скорость лодки в стоячей воде больше скорости течения реки?

489. Теплоход отошел от пристани одновременно с плотом и прошел вниз по реке 42 км. Сделав остановку на 1 час, он двинулся обратно вверх по реке. Пройдя 12 км, он встретился с плотом. Во сколько раз собственная скорость теплохода больше скорости течения реки, если скорость течения реки равна 4 км/ч?

490. Теплоход проходит от пристани A до пристани B по течению реки за 3 ч, а против течения — за 4 ч. За сколько часов проплывёт это расстояние плот?

491. Маша собирает ведро малины за 3 часа, а Саша — за 5 часов. За сколько часов они наберут 2 ведра малины, если будут собирать ягоды вместе с постоянной скоростью?

492. Расстояние между двумя городами 180 км. Рейсовый автобус проходит это расстояние на 27 минут медленнее маршрутного такси. Если скорость автобуса увеличить на 10 км/ч, а маршрутного такси уменьшить на 10 км/ч, то они будут проходить это расстояние за равное время. Определите первоначальную скорость автобуса.

493. Два велосипедиста стартовали одновременно и движутся в одном направлении с постоянной скоростью по трассе. В момент старта второй велосипедист находился перед первым на расстоянии 146 м. Первый велосипедист догнал второго через 1 минуту, пройдя расстояние, равное $\frac{1}{120}$ от общей протяжённости дистанции, и финишировал на 30 минут раньше второго. Определите скорость первого велосипедиста (в км/ч).

494. Из A в B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути со скоростью на 20 км/ч большей скорости первого. В результате они прибыли в пункт B одновременно. Найдите скорость первого автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

495. Прогулочный катер вышел в 14:00 из пункта A в пункт B , расположенный в 20 км от пункта A . Пробыв 15 минут в пункте B , катер отправился назад и вернулся в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что скорость катера равна 12 км/ч.

496. Моторная лодка в 9:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 14 км от пункта A . Пробыв 1 час 20 минут в пункте B , лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 17:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 5 км/ч.

497. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на один час позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

498. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 60 км больше, чем велосипедист. Определите скорость мотоциклиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 2 часа 40 минут раньше велосипедиста. Ответ дайте в км/ч.

499. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 60 км, выехал с постоянной скоростью велосипедист, а через полчаса после него со скоростью на 10 км/ч большей выехал второй велосипедист. Найдите скорость первого велосипедиста, если в пункт B он прибыл на 30 минут позже второго. Ответ дайте в км/ч.

500. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист со скоростью 20 км/ч, а через час — еще один со скоростью 30 км/ч. Найдите расстояние от A до B , если велосипедисты приехали в пункт B в одно и то же время. Ответ дайте в км.

501. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 40 км, выехал велосипедист со скоростью 40 км/ч. Когда он проехал ровно половину пути от A до B , следом за ним выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста за 10 км до пункта B . Найдите скорость сближения между велосипедистом и мотоциклистом. Ответ дайте в км/ч.

502. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два мотоциклиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым мотоциклистом. Найдите скорость первого мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

503. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B , расстояние между которыми равно 108 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. В пути он сделал остановку на 3 часа и в результате затратил на обратный путь столько же

времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B . Ответ дайте в км/ч.

504. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B , расстояние между которыми равно 120 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 2 км/ч меньше прежней, в результате чего велосипедист затратил на обратный путь на два часа больше, чем на путь из A в B . Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B . Ответ дайте в км/ч.

505. Два велосипедиста одновременно отправились в пробег протяжённостью 84 километра. Первый ехал со скоростью, на 5 км/ч большей скорости второго, и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

506. Моторная лодка прошла против течения реки 144 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 3 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

507. Моторная лодка прошла по течению реки 140 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 3 часа больше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 17 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

508. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 221 км и сразу возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч и на путь против течения реки теплоход затратил на 4 часа больше, чем на путь по течению реки. Ответ дайте в км/ч.

509. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 315 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

510. На озере от пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 3 часа после этого следом за ним со скоростью, на 3 км/ч большей, отправился второй. Расстояние между пристанями равно 418 км. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

511. От пристани A к пристани B отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним со скоростью, на 2 км/ч большей, отправился второй. Расстояние между пристанями равно 255 км. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно со вторым. Ответ дайте в км/ч.

512. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 156 км, одновременно выехали автомобилист и мотоциклист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 25 км больше, чем мотоциклист. Определите скорость мотоциклиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 1,5 часа позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

513. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 90 км, одновременно выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если он прибыл в пункт B на 3 часа позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

514. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два мотоциклиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 30 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 20 км/ч больше скорости первого. В результате они прибыли в пункт B одновременно. Найдите скорость второго мотоциклиста на второй половине пути.

515. Первые 432 км автомобиль ехал по шоссе со скоростью 72 км/ч, следующие 150 км — со скоростью 75 км/ч, а затем 66 км проехал за 1 час. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

516. Теплоход проходит расстояние в 180 км по течению реки, после стоянки 2 часа возвращается в пункт отправления через 26 часов после начала движения. Найдите скорость теплохода (в км/час) в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/час.

517. Из двух городов, расстояние между которыми 720 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 70 км/час и 80 км/час?

518. Экскурсионный теплоход проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Найдите собственную скорость теплохода (в км/ч), если он прошёл 120 км, скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длилась 2 часа, а в пункт отплытия он вернулся через 10 часов.

519. Из одного города в другой, расстояние между которыми 105 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Определите скорость мотоциклиста, если известно, что он проезжает в час на 20 км больше, чем велосипедист, и в другой город он прибыл на 4 часа раньше. Ответ дайте в км/ч.

520. Путь в $158\frac{2}{3}$ км велосипедист преодолевает на 2 часа быстрее, чем пешеход. Какова скорость велосипедиста, если известно, что он в час проезжает на 3 км больше, чем проходит пешеход? Ответ укажите в км/ч.

521. Экскурсионный теплоход регулярно перемещается из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 570 км. Теплоход отправился с постоянной скоростью из A в B . После прибытия он отправился обратно со скоростью на 8 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на отдых на 4 часа. В результате теплоход затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от A до B . Найдите скорость теплохода на пути из A в B . Ответ дайте в км/ч.

522. Первые два часа автомобиль двигался со скоростью 65 км/ч, следующий час — со скоростью 80 км/ч, а затем три часа — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

523. Из одной точки круговой трассы, длина которой 15 км, одновременно в одном направлении стартовали два мотоциклиста. Первый мотоциклист двигался со скоростью 60 км/ч и через 45 минут после старта опережал второго мотоциклиста на один круг. Найдите скорость (в км/ч) второго мотоциклиста.

524. Катер прошёл против течения реки 120 км и вернулся в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость катера в неподвижной воде (в км/ч), если скорость течения реки 4 км/ч.

525. Теплоход проходит по течению реки расстояние 126 км от одного пункта до другого с постоянной скоростью. Сделав стоянку на 3 часа, теплоход возвратился в пункт отправления, затратив на всю прогулку 19 часов. Найдите скорость течения (в км/ч), если собственная скорость теплохода 16 км/ч.

526. Первые 150 км автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч, следующие 210 км — со скоростью 70 км/ч, а затем 150 км — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) автомобиля на протяжении всего пути.

527. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо семафора за 18 с. Найдите длину поезда (в м).

528. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 150 км, одновременно выехали автомобилист и мотоциклист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 15 км больше, чем мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он прибыл в пункт B на 2 ч 15 мин позже автомобилиста.

529. Электропоезд, двигаясь равномерно со скоростью 63 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой 600 м, за 1 мин и 2 с. Найдите длину электропоезда (в м).

530. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 1100 метрам. Найдите длину пассажирского поезда (в м), если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 мин 6 с.

531. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B , расстояние между которыми 120 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость велосипедиста (в км/ч) на пути из A в B .

532. Расстояние между городами A и B составляет 641 км. Из A в B выехал автомобиль со скоростью 75 км/ч, через 4 часа навстречу ему из города B выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A (в км) автомобили поравняются?

2.1.3. Работа, производительность

533. Для разгрузки баржи имеется три крана. Первому крану для разгрузки всей баржи требуется времени в четыре раза меньше, чем второму, и на 9 ч больше, чем третьему. Три крана, работая вместе, разгрузили бы баржу за 18 ч, но по условиям эксплуатации одновременно могут работать только два крана. Определите наименьшее время (в часах), необходимое для разгрузки баржи. (Производительность каждого крана постоянна в течение всей работы.)

534. Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительности этих механизмов неодинаковы, и при совместном действии задание выполняется ими за 30 ч. Однажды совместная работа двух механизмов продолжалась только 6 ч, после чего один из них вышел из строя, и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 ч. За какое время (в часах) выполнил бы всё задание механизм, который вышел из строя, работая самостоятельно с присущей

ему производительностью? (Производительность каждого механизма постоянна в течение всей работы.)

535. Два механических крота разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за 27 дней. Эти два крота начали одновременно рыть данный тоннель с разных концов, при этом после того как первый прорыл $\frac{1}{3}$ длины тоннеля, второй сломался. Оставшуюся часть тоннеля первый крот прорыл самостоятельно за 8 дней. За сколько дней прорыл бы весь тоннель первый крот, работая самостоятельно? (Производительность каждого крота постоянна в течение всей работы.)

536. Рабочий за первый день выполнил 18% от всей порученной ему работы. В каждый следующий день он увеличивал производительность на 1%. За сколько дней рабочий выполнит всю работу.

537. Компьютер решает последовательно несколько задач. На решение каждой следующей задачи компьютер тратит на 0,2 с меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач компьютеру, если первая из них была решена за 1,8 с, а решение всех задач, кроме последней, заняло 7,8 с?

538. Для подготовки в серьёзный вуз школьник решал в течение 30 дней задачи. Для достижения прогресса он ежедневно увеличивал количество рассматриваемых им задач на одно и то же число. После подготовки школьник посчитал, что общее количество рассмотренных им задач за первые двадцать дней равно количеству задач, рассмотренных за последние десять дней. Во сколько раз больше он рассмотрел задач за последние пятнадцать дней по сравнению с первыми пятнадцатью днями?

539. В крупном лесхозе к новогодним праздникам производили вырубку сосен для поставки их в города. Каждый последующий день количество вырубленных сосен увеличивалось на 200% по сравнению с предыдущим днём. Сколько дней продолжалась рубка сосен, если во второй день рубки вырубали 12 сосен, а в последний день — 2916 сосен?

540. Опытный рабочий изготавливает 40 деталей на 2 часа быстрее, чем молодой рабочий изготавливает 30 деталей. За сколько часов оба этих рабочих изготовят вместе 120 деталей, если за 1 час опытный рабочий изготавливает на 5 деталей больше молодого рабочего?

541. Автоматизированная мойка машин обслуживает 20 автомобилей на 5 часов быстрее, чем ручная мойка обслуживает 45 автомобилей. За сколько часов ручная мойка обслужит 105 автомобилей, если автоматизированная мойка обслуживает за 1 час на 7 автомобилей больше, чем ручная?

542. Бригада рабочих за несколько дней должна была изготовить 360 деталей, работая с постоянной производительностью. Изготавливая ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на 1 день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

543. Ученик, выполняя домашнее задание по математике, решил первую задачу за 1 ч. На решение каждой следующей задачи он тратил на 6 мин. меньше, чем на предыдущую. Оказалось, что на выполнение всего домашнего задания по математике школьник потратил 5 ч 24 мин. Сколько задач было задано ученику?

544. Бассейн заполняется водой за 6 часов с помощью трёх насосов, работающих вместе. Производительности первого и второго насосов относятся как 3 : 5, причём первый и второй насосы, работая вместе, заполняют бассейн в 4 раза быстрее, чем третий насос, работая один. На сколько процентов будет заполнен бассейн за 3 часа 36 минут совместной работы первого и третьего насосов?

545. Цистерна заполняется бензином за 5 часов с помощью трёх насосов, работающих вместе. Производительности второго и третьего насосов относятся как 2 : 3, причём первый насос, работая в одиночку, заполняет цистерну в 3 раза медленнее, чем второй и третий насосы, работая вместе. На сколько процентов окажется заполнена цистерна, если 6 часов она будет заполняться первым насосом, а потом ещё 5 часов — вторым?

546. В цехе есть новые и старые станки. Производительности старого и нового станков относятся как 2 : 9. Заказ можно выполнить с помощью пяти старых и двух новых станков за определённое время. Сколько процентов заказа можно выполнить за это же время с помощью шести старых и одного нового станка?

547. Из трёх насосов бассейн заполняется за 5 часов. Производительности насосов относятся как 3 : 4 : 5. Сколько часов заполнялся бассейн, если сначала работал только первый насос, через час включились второй и третий, а ещё через час первый насос сломался?

548. Два каменщика могут выложить стену за 6 часов. Через три часа после начала работы второй каменщик получил травму и ушел, после чего первый закончил работу за 4 часа. Сколько часов потребовалось бы для

того, чтобы выложить стену, второму каменщику, если бы он не получил травму и работал один?

549. Первый автопогрузчик работает вдвое быстрее второго, а вместе они загружают вагон за 10 часов. Известно, что сначала работал только первый, а потом они работали вместе, в результате чего вся погрузка заняла 11 часов. Сколько часов работал только первый автопогрузчик?

550. В фирме «Рога и копыта» работают два менеджера. За 4 дня работы они продали $\frac{3}{5}$ от всего товара, находящегося на складе, при этом объёмы их продаж соотносятся как 4 : 5. Затем один из них заболел, а второй ушёл в отпуск, и вместо них начал работать новый сотрудник. Скорость работы нового сотрудника в два раза ниже скорости работы первого менеджера. Когда первый менеджер выздоровел (а второй ещё был в отпуске), на складе осталось 20% товара от первоначального объёма. Определите, сколько дней болел первый менеджер.

551. Доставка грузов на МКС осуществляется ракетой «Протон». Рейс в одну сторону на основном двигателе занимает 10 часов. В одном из рейсов был использован дополнительный двигатель в течение 2 часов, при этом время полета составило 8 часов. Найдите отношение мощности основного двигателя к мощности дополнительного двигателя, если считать, что скорость ракеты прямо пропорциональна мощности её двигателей, а при одновременной работе двух двигателей их мощности суммируются.

552. Два насоса, работая одновременно, могут откачать воду из бассейна за 3 часа 45 минут. Если сначала откачать половину воды одним насосом, а потом оставшуюся половину другим насосом, то на это уйдёт 8 часов. За сколько минут можно откачать воду тем насосом, который работает быстрее?

553. Первый насос перекачивает 45 м^3 воды на 30 минут быстрее, чем второй 50 м^3 . Сколько воды (в м^3) ежечасно перекачивает первый насос, если он перекачивает за час на 5 м^3 воды больше, чем второй?

554. Две бригады, работая вместе, вспахали поле за 4 часа. За сколько часов может вспахать поле первая бригада, работая самостоятельно, если ей необходимо на 6 часов меньше, чем второй бригаде?

555. Два садовника вместе стригут кусты за 5 часов. Если бы первый садовник подстригал кусты один 3 часа, то второму понадобилось бы 7,5 часов, чтобы доделать работу до конца. За сколько часов второй садовник может один подстричь все кусты?

556. Два комбайна могут вспахать поле за 15 часов. Если бы первый комбайн работал 7 часов один, то второму надо было бы работать 21 час, чтобы доделать работу до конца. За сколько часов первый комбайн вспашет всё поле?

557. Три трактора, работая вместе, могут вспахать поле за 4 часа. Это же поле первый и второй тракторы могут вспахать за 6 часов. За сколько часов это поле может вспахать третий трактор, работая самостоятельно?

558. В фермерском хозяйстве имеется три комбайна. Первый и второй комбайны могут убрать пшеничное поле за 4 часа, второй и третий комбайны могут убрать это поле за 6 часов, первый и третий комбайны — за 12 часов. За сколько часов уберут это поле три комбайна, работая вместе?

559. Заказ на 99 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа медленнее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что он за час делает на 2 детали больше, чем первый?

560. Заказ на 360 деталей первый рабочий выполняет на два часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на две детали больше?

561. На изготовление 126 деталей мастер затрачивает на два часа меньше, чем ученик на изготовление 143 таких же деталей. Известно, что мастер за час делает на одну деталь больше, чем ученик. Сколько деталей в час делает ученик?

562. На шлифовку 264 деталей мастер затрачивает на четыре часа меньше, чем ученик на шлифовку 256 таких же деталей. Известно, что мастер за час шлифует на шесть деталей больше, чем ученик. Сколько деталей в час шлифует мастер?

563. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 675 литров она заполняет на 2 минуты быстрее, чем первая труба?

564. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 336 литров она заполняет на минуту дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 375 литров?

565. Заказ на 189 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

566. Двое рабочих должны выполнить заказ за 12 часов. Через 6 часов после начала работы второго рабочего перевели на другой участок, и первый рабочий закончил работу за 8 часов. Сколько часов потребовалось бы второму рабочему для того, чтобы выполнить весь заказ самостоятельно?

567. Валя и Света выполняют контрольную работу. Валя отвечает за час на 12 вопросов работы, а Света — на 15. Они одновременно начали выполнять работу, и Валя выполнила всю работу позже Светы на 15 минут. Сколько вопросов в работе?

568. Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 300 литров она заполнит на 18 минут быстрее, чем первая труба?

569. Каменщики Антон и Петя выкладывают один кирпичный забор за 8 часов, Петя и Дима выполняют эту же работу за 12 часов, а Антон и Дима — за 9,6 часа. Найдите, за сколько часов каменщики выполняют эту работу, если будут работать втроем.

570. В помощь садовому насосу, перекачивающему 6 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за 2 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 27 литров воды?

571. Один токарь может выполнить заказ за 10 часов, второй — за 15 часов, а третий — за 12 часов. За сколько часов три токаря выполняют заказ, работая совместно?

572. Маша и Даша выполняют одинаковый тест. Маша за час отвечает на 15 вопросов теста, а Даша — на 12. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Даша закончила свой тест на 20 минут позже Маши. Сколько вопросов содержал тест?

2.1.4. Разные задачи

573. Заводу поступил срочный заказ: изготовить за ночь детали определённого вида. Заказчик принял на себя обязательство заплатить за каждую изготовленную деталь по 500 рублей. В распоряжении завода имеется три бригады, каждая из которых состоит из специалистов и учеников. Состав бригад приведен в таблице.

Бригада	Специалисты	Ученики
№ 1	10 человек	5 человек
№ 2	7 человек	13 человек
№ 3	11 человек	2 человека

Один специалист за ночь изготавливает 20 деталей, а ученик — 7 деталей. Завод в ночь может выставить для работы только одну бригаду. В результате решения руководства завода в ночь вышла работать бригада, которая принесёт заводу наибольшую выручку. Сколько тысяч рублей заплатит заказчик заводу за изготовленные ночью детали?

574. Из города A в город B можно добраться напрямую, а можно поехать через населенный пункт C . Расстояния между всеми пунктами указаны на рисунке 282. Средняя скорость на прямой дороге до B равна 80 км/ч, на дороге от A до C — 60 км/ч, от C до B — 100 км/ч. Сколько часов займет наиболее быстрый путь от A до B ?

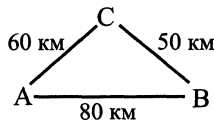


Рис. 282.

575. Спортсмен выполняет прыжки в воду с вышки. Уравнение траектории его движения, пока он не коснулся воды, описывается формулой $y = -2t^2 + 8$ (y — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд спортсмен находился на высоте не менее шести метров от поверхности воды?

576. Из города A в город B можно добраться напрямую, а можно поехать через населенный пункт C . Расстояния между всеми пунктами указаны на рисунке 283. Средняя скорость на прямой дороге до B равна 60 км/ч, на дороге от A до C — 100 км/ч, от C до B — 80 км/ч. Сколько часов займет наиболее долгий путь от A до B ?

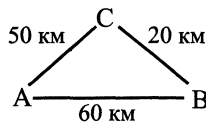


Рис. 283.

577. Лыжник прыгает с трамплина. Уравнение траектории его движения, пока он не приземлился, описывается формулой $y = -\frac{1}{2}t^2 + 5$ (y — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд лыжник находился на высоте не менее трёх метров?

578. Колебания грузика на пружине описываются формулой $l = 20 + 5 \cos t$ (где l — длина пружины в сантиметрах, t — время, прошедшее с начала колебаний в секундах). Определите, сколько раз за первые 12 с длина пружины становилась равной 18 см.

579. На схеме (см. рис. 284) указаны длины туристических маршрутов (в км). На маршрутах, изображённых сплошной линией, средняя скорость движения равна 6 км/ч. На маршрутах, изображённых пунктирной линией, средняя скорость движения равна 4 км/ч. Туристы выбрали 8-часовой маршрут из пункта A в пункт C . Чему равна длина этого маршрута?

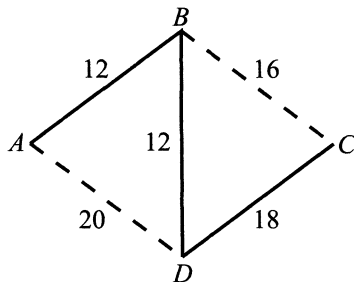


Рис. 284.

580. Мяч ударился о стенку на высоте 3 метра, после этого мяч упал на землю по такой траектории, что расстояние до земли как функция расстояния до стенки выражалась формулой $h(d) = 3 - 0,48d^2$ (все величины указаны в метрах). На каком расстоянии от стенки мяч коснулся земли (ответ также укажите в метрах)?

581. Три карандаша весят на 7 граммов больше, чем одна ручка, а три ручки весят на 11 граммов больше, чем один карандаш. Сколько весят 5 ручек и 5 карандашей (ответ укажите в граммах)?

582. В таблице представлены результаты прохождения эстафеты, состоящей из трёх дистанций, участниками одной из команд.

Определите среднюю скорость (в м/мин), с которой была пройдена вся дистанция эстафеты участниками этой команды.

Номер участника эстафеты	Время, за которое пройдена дистанция (в секундах)		
	1-я дистанция (3000 м)	2-я дистанция (2700 м)	3-я дистанция (1500 м)
12	480		
15		450	
23			270

583. Движение автомобиля во время торможения описывается формулой $S(t) = 30t - 5t^2$ (S — тормозной путь в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала торможения до полной остановки автомобиля). Най-

дите, сколько секунд автомобиль находился в движении с момента начала торможения до его полной остановки.

584. В таблице представлены данные о времени движения двух электричек на различных участках пути.

Определите наименьшую среднюю скорость (в км/ч), с которой можно доехать от станции 1 до станции 6, если продолжительность остановки на каждой станции составляет 1,5 мин (время стоянки на станциях 1 и 6 не учитывать) и расстояние между этими станциями равно 117 км.

Номера электричек	Время прохождения участков пути, мин					
	от 1 до 2	от 2 до 3	от 3 до 4	от 4 до 5	от 5 до 6	от 6 до 7
I	20	20	25	26	20	23
II	20	25	24	25	20	19

585. Мяч после удара о поверхность Земли движется вертикально вверх. Высота мяча определяется по формуле $h(t) = 4t - t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее после удара о Землю). Определите, сколько секунд мяч находился на высоте не менее 3 м.

586. В таблице приведён денежный годовой оборот (в у. е.) бирж A и B по кварталам.

Биржа	Годовой оборот в у.е.			
	I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал
A	$4,2 \cdot 10^4$	$13 \cdot 10^3$	$0,87 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^4$
B	$0,63 \cdot 10^5$	$4,7 \cdot 10^4$	$22 \cdot 10^3$	$3,7 \cdot 10^4$

Определите, на сколько у. е. годовой оборот биржи A меньше годового оборота биржи B .

587. Точка движется по координатной прямой по закону $S(t) = 0,25t^4 - 12t^2 - 3t + 8$ (S — расстояние в сантиметрах, t — время в секундах, прошедшее с момента движения). В какой момент времени после начала движения ускорение точки будет равно 3 см/с^2 ?

588. Владелец фирмы считает, что если объём выпуска продукции будет 250 единиц в год, то его прибыль составит 120 000 у.е. По таблице определите прибыль владельца фирмы за год (в у.е.), если она прямо пропорциональна объёму выпускаемой продукции.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Объём продукции, ед.	19	23	26	18	20	20	20	20	32	27	35	40

589. Точка движется по координатной прямой по закону

$$S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t - 15 \quad (S \text{ — расстояние в сантиметрах, } t \text{ — время в}$$

секундах, прошедшее с момента движения). Определите ускорение точки через 3 секунды после начала движения.

590. Из города выезжают два автомобиля и некоторое время движутся по законам $S_1(t) = -t^2 + 6t$ и $S_2(t) = 4t$. На каком расстоянии от города они поравняются?

591. Бабушке для вышивания картины требовалось ниток тёплых тонов в два раза больше, чем холодных. После того, как она заменила некоторые нитки по своему вкусу, ниток тёплых тонов оказалось в полтора раза больше, чем холодных. Во сколько раз бабушка использовала ниток холодных тонов больше, чем предполагалось изначально?

592. Из имеющегося мяса запланировано было сделать котлеты и отбивные, причём котлет в полтора раза меньше, чем отбивных. После приготовления оказалось, что котлет в 1,2 раза меньше, чем отбивных, но их суммарное количество осталось запланированным. Во сколько раз предполагаемое количество отбивных больше того, которое было изготовлено?

593. При игре в бадминтон высота (в м), на которой находится волан, описывается формулой $h(t) = 2 + 4t - t^2$. Сколько секунд волан находится на высоте не менее 5 метров?

594. Теплоход рассчитан на 840 пассажиров и 26 членов команды. Спасательная шлюпка может вместить 72 человека. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

595. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План «0»	Нет	1,2 руб. за 1 Мб
2. План «800»	650 руб. за 800 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб
3. План «Безлимитный»	900 руб. в месяц	Нет

Пользователь планирует, что его трафик составит 950 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 950 Мб?

596. Брандспойт, закреплённый под определённым углом на пожарной машине, выстреливает струю воды с постоянной начальной скоростью. Траектория струи воды описывается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a = -\frac{1}{450}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 1$ — постоянные параметры. На каком минимальном расстоянии в метрах от забора нужно расположить машину, чтобы вода перелетала через верх? Высота забора 13 м.

597. Для изготовления книжных витрин требуется заказать 10 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $2,5 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекла и шлифовку краёв. Сколько рублей стоит самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (рублей за 1 м^2)	Резка и шлифовка (рублей за одно стекло)
А	220	185
Б	240	125
В	260	120

598. Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена пенобетона (рублей за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	2300	4500	
Б	2250	5500	При заказе на сумму свыше 100 000 рублей доставка бесплатно
В	2350	3700	При заказе более 60 м^3 доставка бесплатно

599. Стоимость проезда в маршрутном такси составляет 14 рублей, а стоимость проезда в автобусе — 9 рублей. Андрей каждый день ездит в институт и домой без пересадок на маршрутке. Сколько рублей за 30 дней он сэкономит, если будет вместо этого ездить на автобусе также без пересадок?

600. Полуторалитровая бутылка воды стоит 15 рублей 50 копеек. Какое наибольшее число литров воды можно купить на 200 рублей, если покупать воду только в таких полуторалитровых бутылках?

601. Стоимость проезда в троллейбусе 8 рублей. Ярослав 3 дня в неделю ездит в институт и обратно без пересадок. На сколько больше денег (в рублях) за неделю он потратит, если будет ездить вместо троллейбуса на такси, с учетом того, что расстояние от института до его дома 12 км, а тариф такси — 60 рублей за первые 5 км и по 10 рублей за каждый следующий километр?

602. Объём усечённой пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 и высотой h считается по формуле $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$. Определите (в см)

наименьшую площадь S_2 , чтобы объём пирамиды был не меньше $\frac{7}{3}$ см³, если $S_1 = 1$ см², $h = 1$ см.

603. Стоимость проезда в автобусе от Ростова до Новочеркасска 32 рубля, а расстояние между ними составляет 40 км. На сколько дешевле обойдется поездка вдвоём из Ростова в Новочеркасск на автомобиле, если расход бензина — 6,7 литров на 100 км, а литр бензина стоит 22 рубля? (Ответ укажите в рублях.)

604. Объём усечённой пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 и высотой h вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$. Определите (в см²) наименьшую площадь S_2 , при которой объём пирамиды будет не меньше $\frac{19}{3}$ см³, если $S_1 = 4$ см², $h = 1$ см.

605. Для остекления веранды требуется заказать 35 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,24 м². В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м ²)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	315	20	
Б	330	17	
В	400	10	При заказе товара на сумму свыше 2 000 рублей резка бесплатно

606. Маршрутное такси за месяц проезжает 10 000 км. Стоимость одного литра бензина составляет 21,2 рублей. Средний расход бензина на 100 км

составляет 11 л. Каковы ежемесячные затраты (в руб.) на бензин для одного маршрутного такси?

607. Для перевозки 10 т груза на 170 км можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Каждая компания предлагает необходимое количество автомобилей одной грузоподъёмности. Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвый способ перевозки?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки (руб. за 10 км)	Грузоподъёмность автомобиля (т)
А	70	2,4
Б	100	3
В	120	4

608. Килограмм апельсинов стоит 35 рублей. Сколько рублей сдачи получит покупатель со ста рублей при покупке 1 кг 700 г апельсинов?

609. Строительной фирме нужно приобрести 70 кубометров строительного бруса у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2400	16400	
Б	2600	2300	При заказе на сумму свыше 190 000 руб. доставка бесплатно
В	2700	4700	При заказе на сумму свыше 170 000 руб. доставка бесплатно

610. На спидометре американского автомобиля скорость указывается в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 75 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

611. Строительной фирме нужно приобрести 110 кубометров пенобетона у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько тысяч рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Цена пенобетона (руб. за м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2200	17400	
Б	2300	9800	При заказе на сумму свыше 250 000 руб. доставка бесплатно
В	2500	500	При заказе более 100 м ³ доставка бесплатно

612. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или пеноблочный. Для фундамента из пеноблоков необходимо 6 кубометров пеноблоков и 3 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 45 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2200 рублей, щебень стоит 700 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

613. Сварили 5 литров вишнёвого компота и 9 литров абрикосового. Сколько банок вместимостью 700 мл можно полностью заполнить этими компотами? (Считать, что компоты нельзя смешивать.)

614. Круассан стоит 6 рублей 80 копеек. Какое наибольшее число круассанов можно купить на 50 рублей?

615. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
Повременный	100 руб. в месяц	0,4 руб.
Комбинированный	250 руб. за 8 часов в месяц	0,3 руб. за 1 минуту сверх 8 часов в месяц
Безлимитный	330 руб.	0 руб.

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 600 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце составит 500 минут? Ответ укажите в рублях.

616. У фермера 53 куриных и 48 гусиных яиц. Сколько потребуется инкубаторов для вывода птенцов из этих яиц, если в каждый инкубатор можно поместить 19 яиц?

617. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	3 руб. за 1 Мб
План «400»	500 руб. за 400 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 400 Мб
План «800»	750 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 700 Мб в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик составит 600 Мб?

618. Семья из четырёх человек едет из одного города в другой. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 830 руб. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 км пути, расстояние по шоссе равно 1600 км, а цена бензина составляет 21,3 рубля за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой семьи?

619. Саша купила абонемент для занятий танцами на 8 посещений. За время действия абонемента она посетила 7 занятий. Сколько рублей она сэкономила, если разовое занятие стоит 320 рублей, а абонемент на 8 занятий — 1870 рублей?

620. Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки по маршруту протяжённостью 1500 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Сколько рублей заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за сутки)
А	Дизельное	6,5	3670
Б	Бензин	9,6	3200
В	Газ	13,2	3250

Цена дизельного топлива 16 рублей за литр, бензина — 20 рублей за литр, газа — 15 рублей за литр.

621. Билет на выставку известного художника стоит 300 рублей. Стоимость билета для студента художественного училища составляет 40% от

обычной стоимости. За день выставку посетило 73 человека, из них 52 являются студентами художественного училища имени Сурикова. Сколько рублей должно быть в кассе?

622. Для изготовления книжных полок требуется заказать 50 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла равна $0,3 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	380	81
Б	410	78
В	415	73

623. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

Автобус	От дома до автобусной станции 10 минут	Автобус в пути: 2 часа 15 минут	От остановки автобуса до дачи пешком 20 минут
Электричка	От дома до станции железной дороги 30 минут	Электричка в пути: 1 час	От станции до дачи пешком 45 минут
Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси 15 минут	Маршрутное такси в пути: 1 час 50 минут	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 25 минут

624. В магазине проходит акция: четыре лимона по цене трёх. Какое наибольшее число лимонов можно приобрести за 100 рублей, если один лимон стоит 7 рублей?

625. Клиент хочет арендовать автомобиль на двое суток для поездки протяжённостью 1200 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	9	3300
Б	Бензин	12	3100
В	Газ	15	3000

Цена дизельного топлива — 21 рубль за литр, бензина — 22 рубля за литр, газа — 17 рублей за литр.

626. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 3 недели?

627. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предложить на выбор одну из скидок: либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо 15% на звонки в другие регионы, либо 25% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 420 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 280 рублей на звонки в другие регионы и 460 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает самую выгодную для себя скидку. Сколько рублей клиент предполагает заплатить в следующем месяце с учётом скидки суммарно за звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, звонки в другие регионы и мобильный интернет?

628. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана:

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
1. Super	60 руб. в месяц	0,5 руб.
2. Extra	320 руб. за 500 минут в месяц	0,4 руб. за 1 минуту сверх 500 минут в месяц
3. Super Extra	420 руб. в месяц (безлимитный тариф)	

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 700 минут в месяц. Однако фактически он проговорил 500 минут. Сколько рублей составила переплата по сравнению с оптимальным для данной ситуации тарифом?

629. Из пункта A в пункт D ведут три линии железной дороги. На дороге, ведущей через B , максимально допустимая средняя скорость — 60 км/ч, через C — 70 км/ч, а на той, которая не имеет промежуточных пунктов, — 90 км/ч. Если два поезда идут по одной линии, то между ними должен быть выдержан интервал хотя бы в 20 минут. На рисунке 285 показана схема линий и расстояние между пунктами по линиям. Три поезда готовы выехать из A одновременно (но могут и в разное время). Каково наименьшее количество часов, за которое все три поезда доберутся в D ?

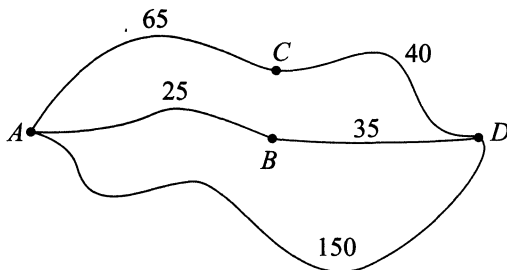


Рис. 285.

630. Семье из четырёх человек (двое взрослых и двое несовершеннолетних детей) необходимо добраться из Ростова-на-Дону в Санкт-Петербург. Можно ехать поездом, можно лететь самолётом, при этом билеты на участок пути до Москвы и после Москвы приобретаются независимо. Стоимость билета Ростов-на-Дону — Москва составляет 1400 рублей на поезде и 1320 рублей на самолёте. А от Москвы до Санкт-Петербурга стоимость билета на поезд составляет 820 рублей и 1120 рублей — на самолёт. При этом стоимость проезда между вокзалом и аэропортом составляет 27 рублей с каждого человека за услуги метрополитена. Если же добираться только поездом, то пересадка осуществляется на одном вокзале. Аналогично, если добираться двумя самолётами, то пересадка осуществляется в одном аэропорту. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую поездку, если железная дорога предоставляет несовершеннолетним скидку в размере 10%, и вся семья перемещается, не разделяясь?

631. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить возможность подключения нескольких услуг. Услуга «Счастье» представляет собой скидку 15% на звонки абонентам других сотовых компаний в регионе, стоимость подключения услуги 50 рублей. Услуга «Вызов свободе» представляет собой скидку 8% на звонки в другие регионы, сто-

имость подключения услуги 120 рублей. Услуга «Паук» заключается в двадцатипроцентной скидке на услуги мобильного интернета, стоимость её подключения 60 рублей.

Клиент посмотрел распечатку своих звонков за прошлый месяц и выяснил, что за месяц он потратил 450 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 700 рублей — на звонки в другие регионы и 500 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце он будет совершать звонки в другие регионы, использовать мобильный интернет, совершать звонки абонентам других компаний в своём регионе в тех же временных и информационных объёмах. Сколько рублей он может максимально сэкономить, подключив соответствующие услуги, если его предположение окажется верным?

632. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 60 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 7381 киловатт-час, а 1 июня — 8124 киловатт-часа. Сколько рублей надо заплатить за электроэнергию за май?

633. В таблице указаны средние цены на некоторые товары в продуктовых магазинах «Мечта», «Правда», «Здоровый дух».

Наименование товара	«Мечта» (цены в руб.)	«Правда» (цены в руб.)	«Здоровый дух» (цены в руб.)
Пирожок с мясом	21	23	27
Пирожок с печенью	17	16	18
Хачапури с сыром	33	29	36
Хачапури с мясом	45	43	40
Сок, 1 л	42	44	46
Конфеты, 1 кг	128	130	124

Определите, в каком из этих магазинов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 5 хачапури с сыром, 4 л сока и 7 кг конфет. В ответ напишите стоимость данного набора в этом магазине (в рублях).

634. Летом килограмм помидоров стоит 40 рублей. Валентина Львовна купила 3 кг 300 г помидоров. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 рублей?

635. Магазин одежды «Карлсон» заключает договоры со швейными фабриками. В договорах указывается, какой процент от суммы, вырученной за продажу одежды, поступит в доход магазина.

Фирма-производитель	Процент от выручки, поступающий в доход магазина	Примечание
Бети	9%	Все изделия
Прометей	12%	Изделия ценой до 5500 рублей
Прометей	7%	Изделия ценой свыше 5500 рублей
Искра	11%	Все изделия

В преёскуранте приведены цены на 4 пиджака. Определите, продажа какого пиджака наиболее выгодна для магазина. В ответ запишите, сколько рублей поступит в доход магазина от продажи этого пиджака.

Фирма-производитель	Изделие	Цена (руб.)
Прометей	Пиджак «Браво»	5600
Прометей	Пиджак «Вау»	5300
Искра	Пиджак «Супер»	4800
Бети	Пиджак «Классик»	5200

636. Диагональ экрана составляет 63,5 см. Сколько дюймов составляет диагональ экрана? (Считать, что один дюйм равняется 2,54 см).

637. Для того чтобы построить забор, фирме надо приобрести 3 тонны кирпича. Один кирпич весит 4 кг.

Фирма	Цена за 1 кирпич (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
Строитель	17,5	1000	При покупке на сумму более 12 000 руб. доставка бесплатно
Атлант	16	1500	При покупке свыше 700 кирпичей доставка со скидкой 50%
Титан	15,5	1200	

Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

638. Гражданин К. купил абонемент в театр и посетил 13 спектаклей. Сколько рублей он сэкономил, если абонемент обошёлся в 4500 рублей, а каждый отдельный билет на соответствующие места стоил 400 рублей?

639. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за одну минуту разговора
«Маятник»	Нет	0,38 рублей
«Подобие»	150 рублей за 350 минут	0,26 рублей за 1 минуту сверх 350 минут
«Болтун» (безлимитный)	250 рублей	

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составит 600 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая продолжительность разговора в этом месяце действительно составит 600 минут? Ответ дайте в рублях.

640. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,6 грамма в сутки в течение 42 дней. В одной упаковке 12 таблеток по 0,2 грамма. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

641. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 1600 км. В таблице приведены характеристики трёх автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант?

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за сутки)
А	Дизельное	5	3400
Б	Бензин	9	1100
В	Газ	12	2100

Цена дизельного топлива — 17,8 рублей за литр, бензина — 26,5 рублей за литр, газа — 14 рублей за литр.

642. Тетрадь стоит 2 руб. 98 коп. Какое наибольшее количество тетрадей можно купить на 600 руб.?

643. Для транспортировки 73 тонн сахара на 800 км можно воспользоваться услугами одной из трёх фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая перевозка?

Поставщик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей
Отрочество	4100	4,5
Юность	9300	12
Зрелость	8300	10

644. Одна роза стоит 80 рублей. В пятницу в цветочном магазине действует специальное предложение: заплатив за две розы, покупатель получает три розы (одну — в подарок). Какое наибольшее количество роз можно получить за 500 рублей в пятницу в этом магазине?

645. Одна поездка по железной дороге (для взрослого человека) из пункта А в пункт Я стоит 800 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 60% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 2 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

646. Из пункта А в пункт D ведут три дороги. Через пункт В идёт грузовик со средней скоростью 48 км/ч, через пункт С идёт автобус со средней скоростью 55 км/ч. Третья дорога без промежуточных пунктов, и по ней движется легковой автомобиль со средней скоростью 82 км/ч. На рисунке 286 показана схема дорог и расстояние (в км) между пунктами по дорогам. Все три автомобиля выехали из А одновремен-

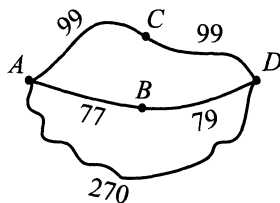


Рис. 286.

но. Какой автомобиль доберётся до D раньше других? В ответе укажите, сколько часов он будет находиться в дороге.

647. В летнем лагере на каждого участника полагается 400 граммов риса в день. В лагере 143 человека. Сколько килограммовых пачек риса понадобится на весь лагерь на 8 дней?

648. В первом банке одну украинскую гривну можно купить за 4,23 рубля. Во втором банке 40 гривен — за 164 рубля. В третьем банке 30 гривен — за 122 рубля 40 копеек. Какую наименьшую сумму (в рублях) придётся заплатить за 120 гривен?

649. Василий Петрович загружает на свой компьютер из Интернета файл размером 78 Мб за 63 секунды, Василий Егорович — 79 Мб за 64 секунды, а Василий Васильевич — 77 Мб за 62 секунды. Сколько секунд будет загружаться файл объёмом 462 Мб на компьютер с наибольшей скоростью загрузки из сети Интернет?

650. В среднем трафик гражданина Сеткина за месяц в дневное время составляет 1,3 Гб, а в ночное время 3,2 Гб. Раньше Сеткин платил 120 рублей за каждый гигабайт трафика, но год назад он перешёл на другой тарифный план, и теперь за гигабайт трафика днём он платит 180 рублей, а ночью — 79 рублей. В течение 12 месяцев тарифы и трафик не менялись. На сколько рублей больше заплатил бы Сеткин за год, если бы не перешёл на другой тарифный план? (Трафик не округляется.)

651. Семья из трёх человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Красный Сулин. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1360 рублей. Автомобиль расходует 9 л бензина на 100 км, цена бензина — 26,5 рублей за литр, а расстояние по шоссе 1700 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

652. В пачке 500 листов А4. За один рабочий день фирма расходует 230 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 21 рабочий день?

653. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4,5 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 3 тонны щебня и 30 мешков цемента. Кубометр пеноблока стоит 2200 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 260 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

654. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
«С ветерком»	100 рублей	Нет	9
«В путь»	Бесплатно	15 мин — 150 руб.	11
«В дорогу»	50 рублей	15 мин — 150 руб.	10

655. В доме, в котором живёт Джек, 7 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 4 квартиры. Джек живёт в квартире № 58. В каком подъезде живёт Джек?

656. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 10 тонн природного камня и 12 мешков цемента. Для бетонного фундамента — 6 тонн щебня и 46 мешков цемента. Тонна камня стоит 1220 рублей, щебень стоит 680 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 240 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

§ 3. Геометрия

3.1. Планиметрия

3.1.1. Вписанная и описанная окружность, треугольник

657. В треугольнике ABC синус угла C равен $\frac{3}{5}$, $AC = 5$, радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 1. Найдите сторону BC , если $AB < AC$.

658. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом B , равным 30° , описана окружность радиусом $7\sqrt{2}$. Её диаметр AD пересекает сторону BC в точке E . Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника AEC .

659. Окружность радиусом 15, вписанная в равнобедренный треугольник, делит боковую сторону этого треугольника в отношении $2 : 3$, считая от вершины основания. Во сколько раз длина окружности, описанной около этого треугольника, превосходит число π ?

660. В равнобедренном треугольнике точка касания вписанной окружности делит боковую сторону в отношении $2 : 5$, считая от вершины основания. Радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен $2\sqrt{5}$. Найдите боковую сторону.

661. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса $\sqrt{2}$. Его вершины делят окружность на три части в отношении $1 : 2 : 3$. Найдите сторону правильного треугольника, площадь которого равна площади треугольника ABC .

662. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 287).

663. В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 17$, $BC = 14$ и $CD = 22$ вписана окружность (см. рис. 288). Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

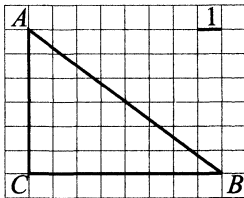


Рис. 287.

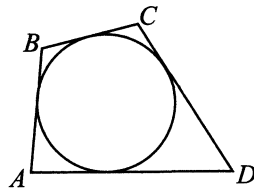


Рис. 288.

664. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 125° , угол CAD равен 55° (см. рис. 289). Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.

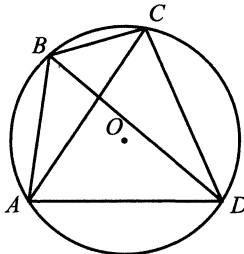


Рис. 289.

665. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 8. Найдите высоту этого треугольника (см. рис. 290).

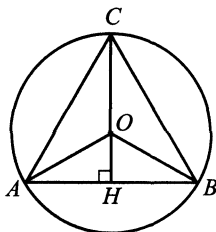


Рис. 290.

3.1.2. Прямоугольный треугольник

666. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2 , а его периметр — 24 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

3.1.3. Треугольник

667. В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки $AD = 4$ и $DC = 5$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите площадь треугольника ABD .

668. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° . Расстояние от точки M , лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а до боковых сторон равно 3. Найдите AC .

669. В треугольнике ABC сторона BC равна $2\sqrt{97}$, и она больше половины стороны AC . Найдите сторону AB , если медиана BM равна 12, а площадь треугольника ABC равна 96.

670. В треугольнике ABC сторона AB равна 10, угол A — острый. Найдите медиану BM , если $AC = 20$, а площадь треугольника ABC равна 96.

671. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 3 : 4$ и $BN : NC = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника MNA равна 9.

672. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 2 : 3$ и $BN : NC = 4 : 9$. Найдите площадь четырёхугольника $AMNC$, если площадь треугольника ABC равна 130.

673. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что длина отрезка AD равна 3, косинус угла BDC равен $\frac{13}{20}$, а сумма углов ABC и ADB равна π . Найдите периметр треугольника ABC , если длина стороны BC равна 2.

674. Отрезки KP и MH имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что $KH \parallel MP$, $OH = 4$, $OM = 5$. Найдите отношение периметров треугольников OKM и OHP . Отрезки KP и MH имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что $KH \parallel MP$, $OH = 4$, $OM = 5$. Найдите отношение периметров треугольников OKM и OHP .

675. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Найдите сторону AB этого треугольника, если $AC = 30$ и $BC = 12\sqrt{5}$.

676. Дан треугольник ABC . Известно, что $AC = 10$, $BC = 12$ и $\angle CAB = 2\angle CBA$. Найдите длину стороны AB .

677. В треугольнике ABC с тупым углом B и со стороной BC длиной 5 проведена биссектриса BD . Площади треугольников ABD и BCD равны соответственно $\frac{60\sqrt{2}}{11}$ и $\frac{50\sqrt{2}}{11}$. Найдите длину стороны AC .

678. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 6, а диаметр вписанной окружности равен 2. Найдите радиус описанной около данного треугольника окружности.

679. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M , при этом $AB_1 = 24$, $BB_1 = 32$. Найдите площадь треугольника ABM .

680. В равнобедренном треугольнике KLM с основанием KM высоты LP и KB пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника KLO , если $LO = 5$, $PO = 4$.

681. В $\triangle ABC$ $\angle A = 30^\circ$, точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Прямые AO и BO пересекают описанную вокруг $\triangle ABC$ окружность в точках M и N соответственно. Найдите величину угла C в градусах, если известно, что $AM = MN$.

682. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к боковой стороне, делит её в отношении 5 : 8, считая от вершины. Найдите длину основания данного треугольника, если радиус его вписанной окружности равен 2.

683. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AC и CB и углом при вершине C , равным 120° , проведены биссектрисы AM и BN , равные 5. Найдите площадь четырёхугольника $ANMB$.

684. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AC и CB и углом при вершине C , равным 120° , проведены биссектрисы AM и BN . Найдите длину биссектрисы BN , если площадь четырёхугольника $ANMB$ равна 12,25.

685. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена биссектриса CD . Найдите площадь треугольника ACD , если $CB = 6$, $BD = 3$.

686. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла BAC , равного 60° . Известно, что $BC = 6$, $CD = 2$. Определите градусную меру угла ABC .

687. В равнобедренном треугольнике с острым углом при вершине боковая сторона равна 25, а его площадь равна 300. Найдите основание треугольника.

688. Биссектриса AM треугольника ABC делит сторону CB на отрезки $CM = 10$ и $MB = 14$. AB равно $21\sqrt{2}$. Найдите радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.

689. На координатной плоскости заданы точки $A(-1; 3)$, $B(2; -3)$, $C(-1; -4)$. Вычислите площадь треугольника ABC .

690. На координатной плоскости заданы точки $A(0; 1)$, $B(3; 2)$, $C(3; 5)$. Вычислите площадь треугольника ABC .

691. В равнобедренном треугольнике PKM с основанием PM боковая сторона PK равна 13, а $\cos P = \frac{\sqrt{105}}{13}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

692. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{3}{5}$, $AB = 20$. Найдите BC .

693. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos B = \frac{4}{5}$, $AB = 15$. Найдите AC .

694. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $BC = 8$. Найдите $\cos A$.

695. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 29$, $BC = 21$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

696. В треугольнике ABC $AB = 8$, $\angle A = \angle B$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите биссектрису CH .
697. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\cos A = 0,6$. Найдите площадь треугольника ABC .
698. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона равна 22, а $\cos C = \frac{4\sqrt{6}}{11}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.
699. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 8, а высота, проведённая к основанию, равна $3\sqrt{7}$. Найдите косинус угла A .
700. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = \sqrt{13}$, $AC = 3$. Найдите $\text{ctg } \angle A$.
701. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$. Найдите $\sin \angle B$.
702. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\sin B = 0,2$, $BC = 6\sqrt{6}$. Найдите AC .
703. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AB = 25$, $\cos A = 0,28$. Найдите BC .
704. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 10$, $\sin A = \frac{12}{13}$. Найдите высоту CH .
705. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 12,5$, $BC = 12$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A .
706. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 1,6$, а диагональ прямоугольника равна 2. Найдите синус угла ACD .
707. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, CH — высота, $AB = 2,5$, $BH = 2$. Найдите косинус угла ABC .
708. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AB = 13$, высота CH равна 5. Найдите котангенс угла ABC .
709. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 26$, CH — высота, $AH = 10$. Найдите тангенс угла ACB .
710. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CH — высота, $BC = 8$, $BH = 2\sqrt{7}$. Найдите $\cos \angle A$.
711. В треугольнике ABC (см. рис. 291) угол B равен 90° , $BC = 5$, $\text{tg } \angle C = 2,4$. Найдите AC .
712. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos \angle B = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B .

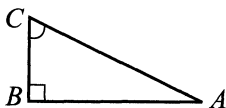


Рис. 291.

713. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона $AB = 10$, $\cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите высоту, проведённую к основанию.

714. В треугольнике ABC $AC = BC = 16$, $\sin \angle B = \frac{3\sqrt{23}}{16}$. Найдите AB .

715. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin \angle A = \frac{7}{36}$, $AB = 144$.

Найдите BC .

716. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = \sqrt{74}$, $AC = 5$. Найдите котангенс угла B .

717. В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$, высота $CH = \sqrt{28}$. Найдите косинус угла ACB .

718. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = 0,2$, $AC = 6\sqrt{6}$. Найдите BC .

719. В треугольнике ABC угол C равен 90° . Найдите синус внешнего угла при вершине A , если $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$.

720. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 3, а косинус угла при вершине равен $-0,28$. Найдите радиус вписанной в него окружности.

721. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 5$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Найдите высоту CH .

722. В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 8$, $\sin A = \frac{1}{4}$. Найдите AH .

723. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 9 (см. рис. 292). Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившейся параллелограмма $CLDK$.

724. В треугольнике ABC $AC = CB$, AH — высота, $\sin \angle BAC = 0,2$. Найдите $\cos \angle BAH$.

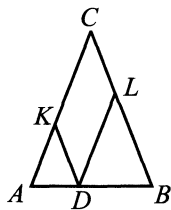


Рис. 292.

725. В треугольнике ABC $AC = BC = 9$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите высоту CH .

726. В треугольнике ABC угол A равен 64° , угол B равен 80° . AL , BN и CK — биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 293). Найдите угол AOK . Ответ дайте в градусах.

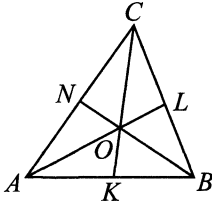


Рис. 293.

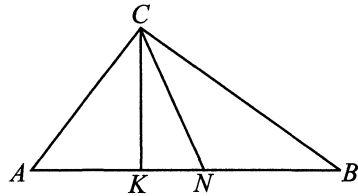


Рис. 294.

727. Острые углы прямоугольного треугольника равны 38° и 52° . Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 294). Ответ дайте в градусах.

728. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 70° . Найдите третий угол треугольника. Ответ дайте в градусах.

729. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 30$, $AC = 18$. Найдите синус внешнего угла при вершине A .

3.1.4. Параллелограмм. Квадрат. Ромб

730. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке L , лежащей на стороне AD . Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если известно, что $CL = 12$, а площадь $\triangle ABL$ равна 15.

731. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке L , лежащей на стороне AD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BL = 6$, а периметр $\triangle CDL$ равен 18.

732. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках L и K соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BL = 6$, $CK = 8$ и $AB : AD = 1 : 3$.

733. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках L и K соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BL = 5$, $CK = 12$ и $AB : AD = 2 : 3$.

734. В параллелограмме $ABCD$ точка M лежит на прямой CD . Через точку пересечения диагоналей параллелограмма O и точку M проведена прямая, которая пересекает BC в точке E и AD в точке F . Найдите отношение площадей $S_{EFCD} : S_{ECM}$, если $EC : FD = 2 : 1$.

735. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 1,6$ и $AF = 6,4$. M — точка пересечения прямых AB и EF . Найдите периметр треугольника ABD , если $BM = 1$ и $\angle BAD = 60^\circ$.

736. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P . Найдите периметр треугольника BKP , если $DC = 10$, $PK = 6$, $DK = 9$.

737. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке M и прямую AD в точке N . Найдите периметр треугольника ABN , если $MD = 5$, $MN = 4$, $BM = 6$.

738. В параллелограмме $ABCD$ проведена высота CH к стороне AD . Косинус угла A равен $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, а сторона AB равна $2\sqrt{5}$. Прямая BH делит диагональ AC в отношении $3 : 5$, считая от вершины A . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

739. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает стороны AB в точке N и прямую BC в точке M . Найдите длину отрезка CN , если $DC = 3\sqrt{3}$, $MD = 9$, $BN = \sqrt{3}$.

740. Определите синус острого угла параллелограмма, если его высоты равны 5 и 7 , а периметр равен 48 .

741. Определите тангенс острого угла параллелограмма, если его высоты равны $3\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$, а периметр равен 32 .

742. Дан ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A . Площадь ромба равна 135 , а $\sin \angle A = \frac{3}{5}$. Высота DK пересекает диагональ AC в точке L . Найдите длину отрезка DL .

743. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 20$, $\sin C = \frac{3}{5}$. Высота, опущенная из вершины B , пересекает сторону AD в точке H . Найдите площадь треугольника ABH .

744. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 20$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Высота, опущенная из вершины D , пересекает сторону BC в точке H . Найдите площадь треугольника CDH .

745. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом C $\sin A = 0,28$. Найдите $\cos B$.

746. Найдите площадь ромба, если его высота равна $\sqrt{2}$, а тупой угол 150° .

747. Диагонали четырёхугольника равны 6 и 9 (см. рис. 295). Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

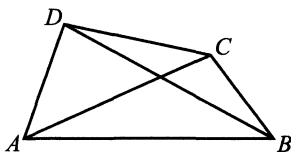


Рис. 295.

748. Диагонали ромба относятся как 3 : 4. Периметр ромба равен 300. Найдите высоту ромба.

3.1.5. Трапеция

749. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите длину большего основания трапеции.

750. В равнобедренной трапеции длины оснований 21 и 9, а длина высоты 8. Найдите диаметр описанной около трапеции окружности.

751. Основания трапеции равны 10 и 5, а диагонали — 9 и 12. Найдите площадь трапеции.

752. В трапецию $ABCD$ с прямым углом BAD вписана окружность радиуса 5. Найдите среднюю линию трапеции, если угол между ней и боковой стороной CD трапеции равен 30° .

753. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD равны 18 и 16 соответственно. На диагонали AC как на диаметре построена окружность, пересекающая прямую AB в точке K . Найдите длину AK , если известно, что $\angle CAB$ в два раза меньше $\angle ABD$.

754. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD равны 12 и 10 соответственно. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB$ в два раза меньше $\angle ABD$.

755. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Точка касания делит боковую сторону трапеции на отрезки длиной 2 и 8. Найдите периметр трапеции.

756. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 3. Диагонали трапеции пересекаются в точке O , площадь треугольника AOB равна 6. Найдите площадь трапеции.

757. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 2. Диагонали трапеции пересекаются в точке O , площадь треугольника BOC равна 3. Найдите площадь четырёхугольника $BOCP$, где P — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции.

758. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а длина её средней линии равна 9. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

759. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 17 соответственно, боковые стороны равны 13. Найдите тангенс острого угла трапеции.

760. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 3, высота трапеции равна 5. Котангенс острого угла равен 1,4. Найдите большее основание.

761. Большее основание равнобедренной трапеции равно 27, боковая сторона равна 25. Синус угла при основании трапеции равен 0,96. Найдите меньшее основание.

762. В равнобедренной трапеции косинус острого угла равен $\frac{1}{4}$, основания равны 5 и 9. Найдите боковую сторону трапеции.

763. Высота равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{3}$, а продолжения боковых сторон пересекаются на расстоянии $6\sqrt{3}$ от большего основания под углом 60° . Найдите сумму оснований трапеций.

764. Основания трапеции равны 5 и 7. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции (см. рис. 296).

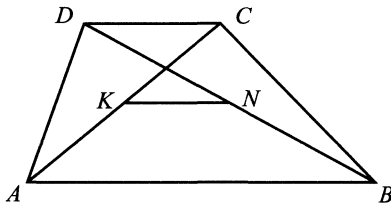


Рис. 296.

765. Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 27. Боковые стороны равны 17. Найдите тангенс острого угла трапеции.

3.1.6. n -угольники

766. Около окружности, радиус которой равен $3\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, описан правильный двенадцатиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого двенадцатиугольника.

3.1.7. Окружность, касательная, секущая

767. Хорды окружности AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P . PH — высота треугольника ADP . Угол $ADP = 30^\circ$, $AH = 2$, $PC = 6$. Найдите отношение площади треугольника ADC к площади треугольника ABC .

768. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 3 и 4. Расстояние между их центрами равно 5. Определите длину их общей хорды.

769. Пусть MN и KF — диаметры окружности с центром в точке O (см. рис. 297). Угол MKF равен 38° . Найдите угол FON . Ответ дайте в градусах.

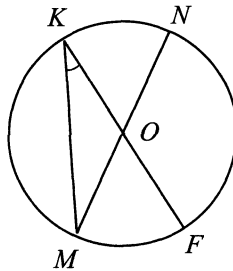


Рис. 297.

770. В окружность радиуса 11 вписан квадрат, в который также вписана окружность. Во внутреннюю окружность вписан прямоугольный треугольник с тангенсом одного из углов, равным 7. Найдите площадь этого треугольника.

771. Хорда BC делит окружность радиуса 14 на две части, градусные величины которых относятся как 6 : 30 (см. рис. 298). Найдите хорду BC .

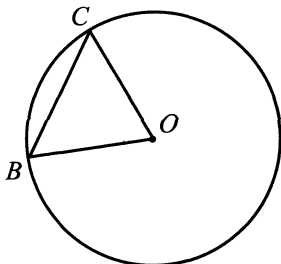


Рис. 298.

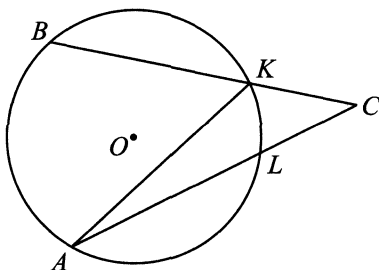


Рис. 299.

772. Угол ACB равен 26° . Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек K и L , равна 80° (см. рис. 299). Найдите угол KAL . Ответ дайте в градусах.

3.1.8. Разные задачи

773. На клетчатой бумаге с клетками размером $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён отрезок (см. рис. 300). Найдите его длину в сантиметрах.

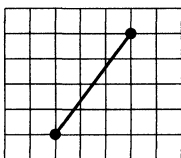


Рис. 300.

774. Найдите произведение длин векторов \vec{AB} и \vec{AC} (см. рис. 301).

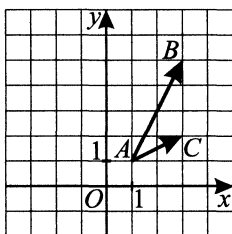


Рис. 301.

775. Найдите длину медианы AM треугольника ABC (см. рис. 302).

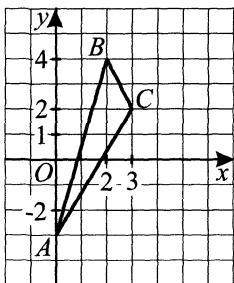


Рис. 302.

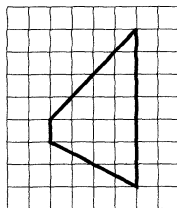


Рис. 303.

776. На клетчатой бумаге $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображена трапеция (см. рис. 303). Найдите её площадь в см^2 .

777. На клетчатой бумаге с клетками $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён треугольник (см. рис. 304). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

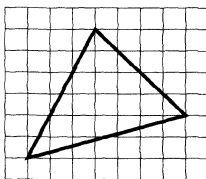


Рис. 304.

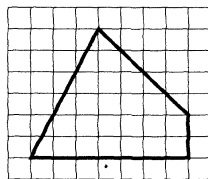


Рис. 305.

778. На клетчатой бумаге с клетками $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён четырёхугольник (см. рис. 305). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

779. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 306). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

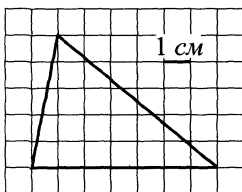


Рис. 306.

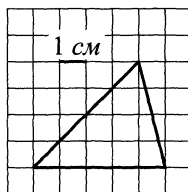


Рис. 307.

780. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 307). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

781. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 308). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

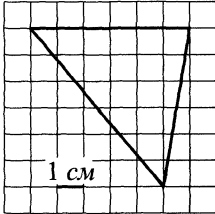


Рис. 308.

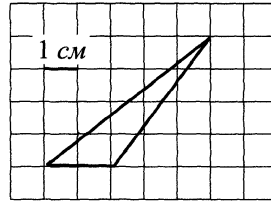


Рис. 309.

782. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 309). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

783. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (рис. 310). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

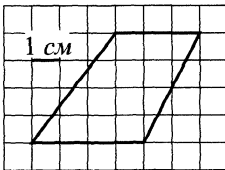


Рис. 310.

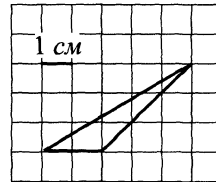


Рис. 311.

784. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён треугольник (см. рис. 311). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

785. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображена трапеция (см. рис. 312). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

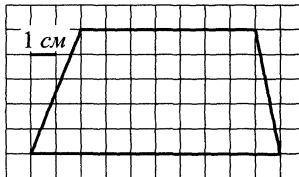


Рис. 312.

786. Найдите площадь треугольника (см. рис. 313), вершины которого имеют координаты $(0; 0)$, $(5; 6)$, $(9; 4)$.

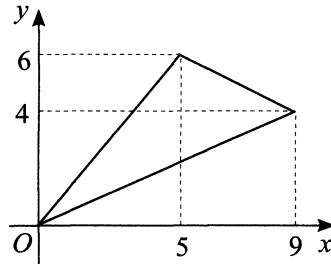


Рис. 313.

787. Найдите площадь параллелограмма (см. рис. 314), вершины которого имеют координаты $(2; 4)$, $(2; 7)$, $(10; 1)$, $(10; 4)$.

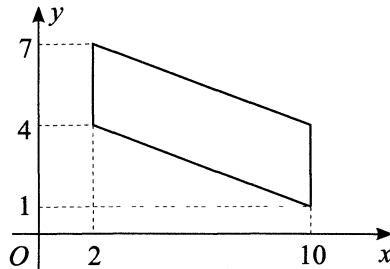


Рис. 314.

788. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 315), вершины которого имеют координаты $(2; 6)$, $(3; 1)$, $(9; 7)$, $(10; 2)$.

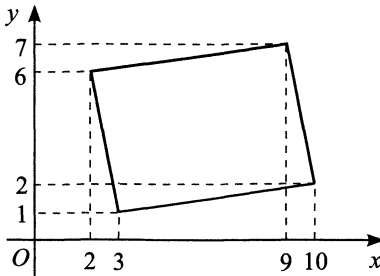


Рис. 315.

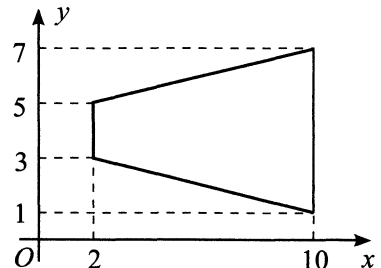


Рис. 316.

789. Найдите площадь трапеции (см. рис. 316), вершины которой имеют координаты $(2; 3)$, $(2; 5)$, $(10; 1)$, $(10; 7)$.

790. Найдите площадь трапеции (см. рис. 317), вершины которой имеют координаты $(2; 1)$, $(3; 6)$, $(8; 6)$, $(11; 1)$.

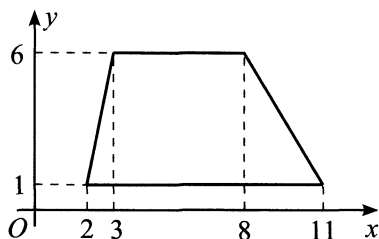


Рис. 317.

791. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 318), вершины которого имеют координаты $(2; 2)$, $(6; 7)$, $(9; 1)$, $(13; 4)$.

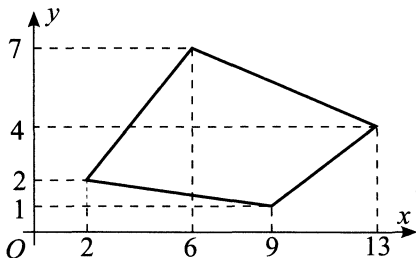


Рис. 318.

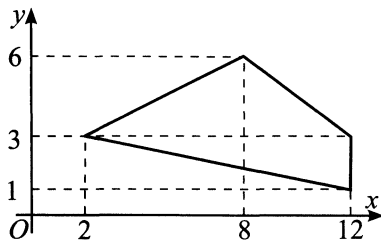


Рис. 319.

792. Найдите площадь четырёхугольника (см. рис. 319), вершины которого имеют координаты $(2; 3)$, $(8; 6)$, $(12; 1)$, $(12; 3)$.

793. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён квадрат (см. рис. 320). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

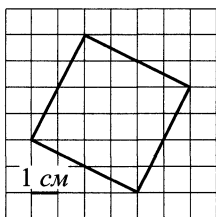


Рис. 320.

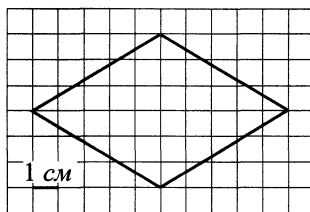


Рис. 321.

794. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён ромб (см. рис. 321). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

795. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён четырёхугольник (см. рис. 322). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

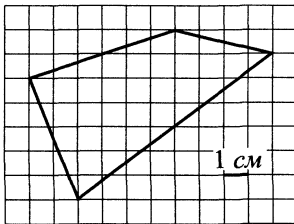


Рис. 322.

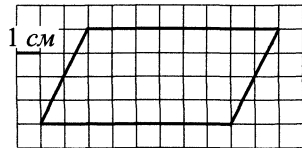


Рис. 323.

796. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён параллелограмм (см. рис. 323). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

797. На клетчатой бумаге с клетками размером $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён параллелограмм (см. рис. 324). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

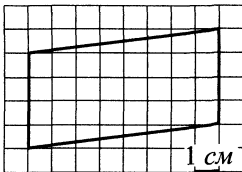


Рис. 324.

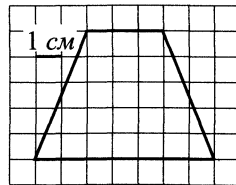


Рис. 325.

798. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 325). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

799. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 326). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

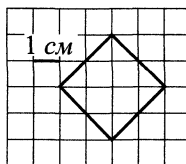


Рис. 326.

800. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(2; 3)$, $(4; 7)$, $(7; 7)$, $(10; 3)$ (см. рис. 327).

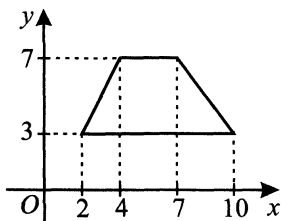


Рис. 327.

801. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(0; 5)$, $(4; 7)$, $(7; 0)$, $(11; 2)$ (см. рис. 328).

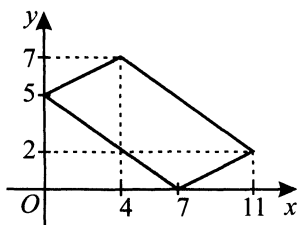


Рис. 328.

802. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 329). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

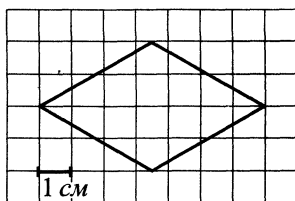


Рис. 329.

803. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 330). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

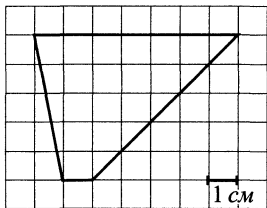


Рис. 330.

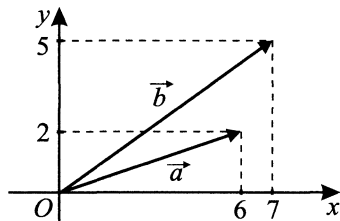


Рис. 331.

804. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 331).

805. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 1,5 и 2. Найдите длину вектора $\vec{AO} + \vec{DO}$ (см. рис. 332).

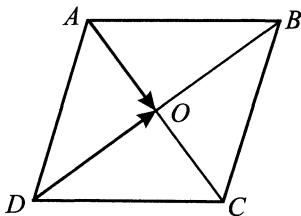


Рис. 332.

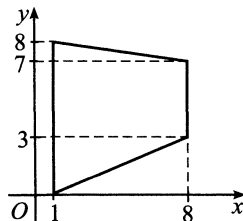


Рис. 333.

806. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1; 0)$, $(1; 8)$, $(8; 3)$, $(8; 7)$ (см. рис. 333).

807. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображена фигура (см. рис. 334). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

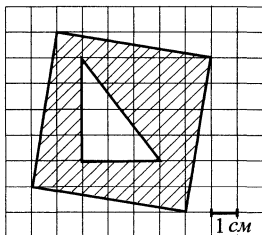


Рис. 334.

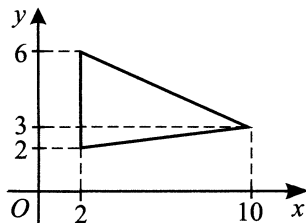


Рис. 335.

808. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(2; 2)$, $(2; 6)$, $(10; 3)$ (см. рис. 335).

809. Найдите синус угла AOB (см. рис. 336). В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{13}$.

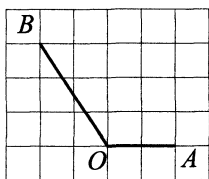


Рис. 336.

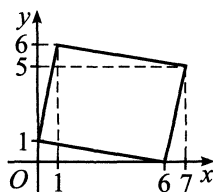


Рис. 337.

810. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты $(0; 1)$, $(1; 6)$, $(7; 5)$, $(6; 0)$ (см. рис. 337).

811. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 338). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

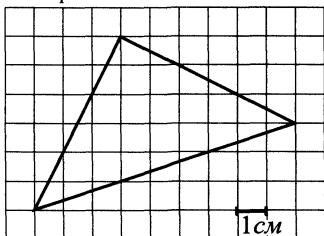


Рис. 338.

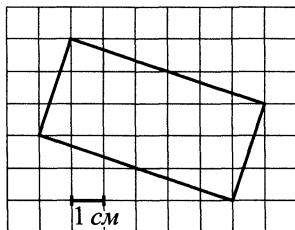


Рис. 339.

812. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 339). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

813. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(3; 1)$, $(7; 1)$, $(7; 7)$, $(9; 7)$ (см. рис. 340).

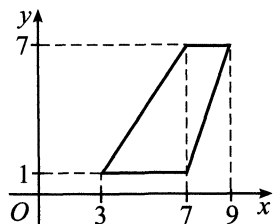


Рис. 340.

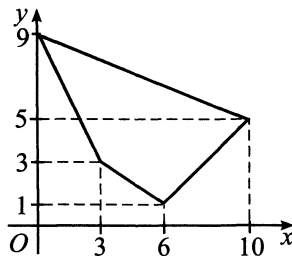


Рис. 341.

814. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(0; 9)$, $(3; 3)$, $(6; 1)$, $(10; 5)$ (см. рис. 341).

815. Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости (см. рис. 342).

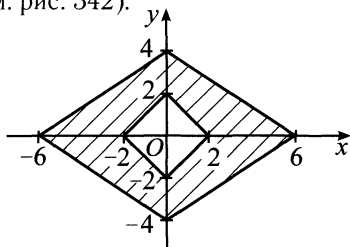


Рис. 342.

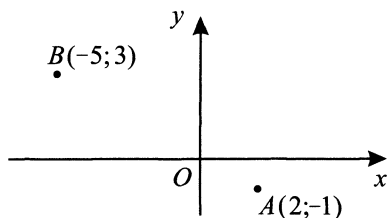


Рис. 343.

816. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(2; -1)$ и $B(-5; 3)$ (см. рис. 343).

817. На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображена заштрихованная фигура (см. рис. 344). Найдите её площадь S в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

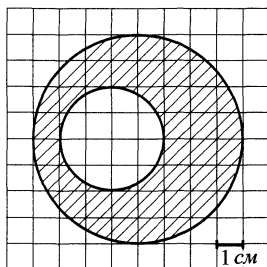


Рис. 344.

818. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(-4; 0)$, $(-2; 8)$, $(2; 3)$, $(5; 5)$ (см. рис. 345).

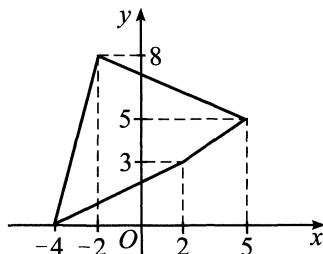


Рис. 345.

819. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 346). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

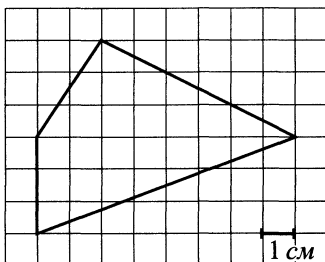


Рис. 346.

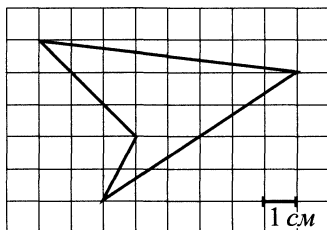


Рис. 347.

820. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис. 347). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

821. Площадь сектора круга радиуса 4 равна 9 (см. рис. 348). Найдите длину его дуги.

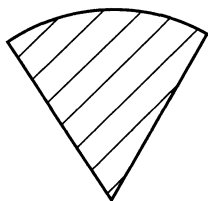


Рис. 348.

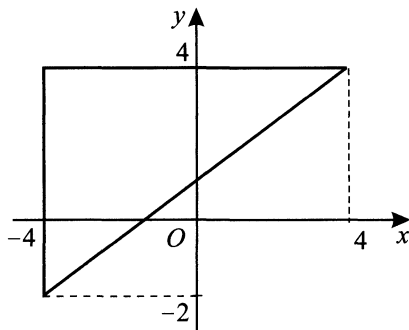


Рис. 349.

822. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(-4; -2)$, $(-4; 4)$, $(4; 4)$ (см. рис. 349).

3.2. Стереометрия

3.2.1. Пирамида

823. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 8 (см. рис. 350). Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

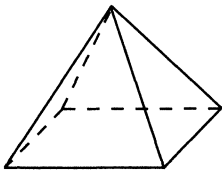


Рис. 350.

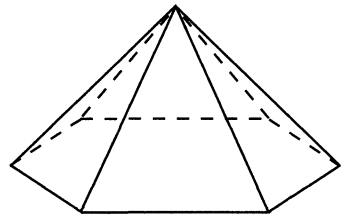


Рис. 351.

824. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13 (см. рис. 351). Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

825. Объём первой пирамиды равен 24 м^3 . У второй пирамиды площадь основания в 6 раз больше, чем площадь основания первой пирамиды, а высота второй пирамиды в три раза меньше, чем у первой. Найдите объём второй пирамиды. Ответ дайте в кубических метрах.

826. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды, если боковое ребро равно 16, а высота пирамиды равна 8.

827. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона основания равна 6, а высота равна $3\sqrt{14}$.

828. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие наклонены к плоскости основания под углом 30° . Высота пирамиды равна 5. Найдите объём пирамиды.

829. Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 24. Длина бокового ребра равна 13 (см. рис. 352). Найдите высоту SO .

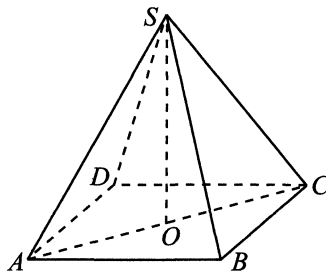


Рис. 352.

830. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все рёбра увеличить в 1,7 раза?

831. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 18, а апогема равна 14.

3.2.2. Призма. Параллелепипед

832. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду (см. рис. 353). Уровень воды достигает 20 см. На какой высоте (в сантиметрах) будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого?

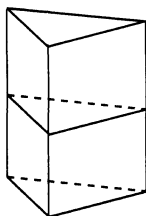


Рис. 353.

833. Объём правильной шестиугольной призмы равен $3\sqrt{3}$, сторона основания равна 2 (см. рис. 354). Найдите высоту призмы.

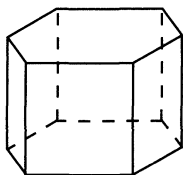


Рис. 354.

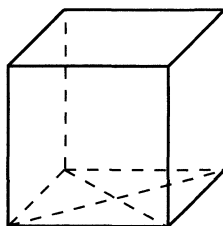


Рис. 355.

834. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, а её боковое ребро равно 20 (см. рис. 355).

835. Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 10, а высота равна 6 (см. рис. 356).

836. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 357). Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы, если площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 18.

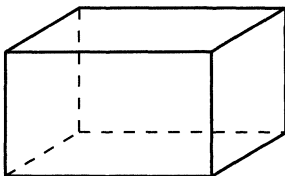


Рис. 356.

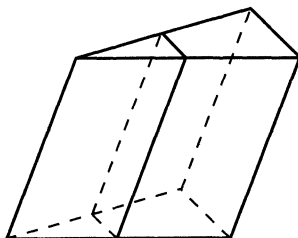


Рис. 357.

837. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со сторонами $AB = 6$, $AD = 7$, $AA_1 = 9$.

838. В сосуд, имеющий форму правильной тринадцатиугольной призмы налили 720 см^3 воды, а затем полностью погрузили туда деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 18 см до отметки 21 см . Чему равен объём детали? Объём выразите в см^3 .

839. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны $9,3$. Найдите расстояние между точками C_1 и F_1 .

840. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C , A_1 , B_1 , C_1 , D_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 8$, $AD = 12$, $AA_1 = 4$ (см. рис. 358).

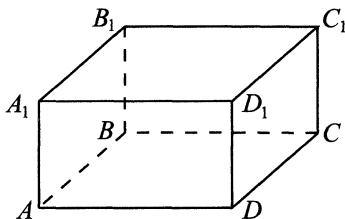


Рис. 358.

841. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежит квадрат со стороной 2,5, а боковые рёбра равны $8\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 60° .

842. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, для которого $AA_1 = 17$, $AB = 19$, $AD = 17\sqrt{3}$. Найдите угол $B_1 C B$. Ответ дайте в градусах.

843. Найдите котангенс угла ABD_2 многогранника, изображённого на рисунке 359.

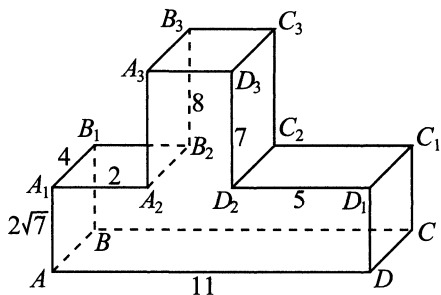


Рис. 359.

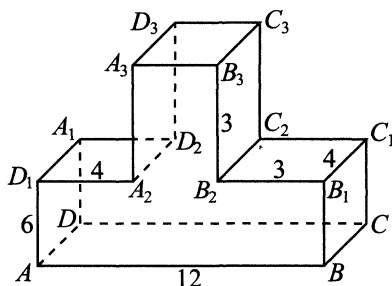


Рис. 360.

844. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 17, а боковое ребро 8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $C, D, E, F, C_1, D_1, E_1, F_1$.

845. Найдите косинус угла $BA_2 A_3$ многогранника, изображённого на рисунке 360. Все двугранные углы многогранника — прямые.

846. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 361), у которого $AB = 4$, $AD = 22$, $AA_1 = 6$.

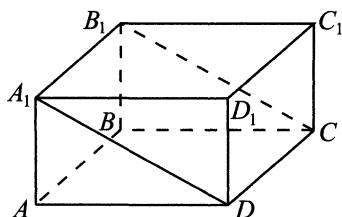


Рис. 361.

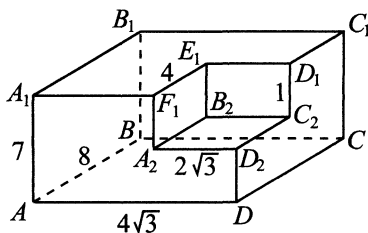


Рис. 362.

847. Найдите угол $AB_2 B$ многогранника, изображённого на рисунке 362. Ответ дайте в градусах.

848. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 23,5. Найдите его объём.

849. Найдите расстояние между вершинами A_1 и E многогранника, изображённого на рисунке 363. Все двугранные углы многогранника — прямые.

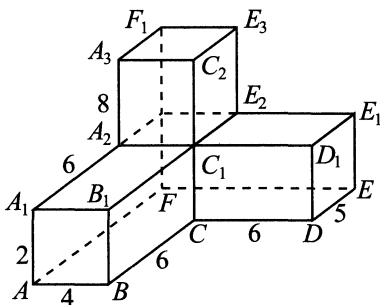


Рис. 363.

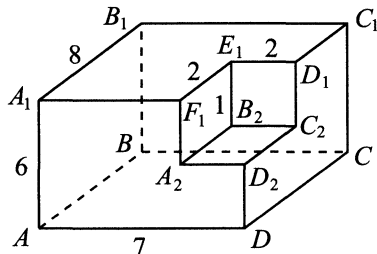


Рис. 364.

850. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и B_2 многогранника, изображённого на рисунке 364.

851. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна 2, а высота — 19. Найдите квадрат расстояния между A и E_1 .

852. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 48 и 14. Площадь её поверхности равна 728. Найдите высоту призмы.

853. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра основания и боковые рёбра равны 8. Найдите угол $AC_1 C$. Ответ дайте в градусах.

854. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 4, а высота AA_1 равна $8\sqrt{2}$. Найдите расстояние между точкой C и серединой бокового ребра AA_1 .

855. Найдите расстояние между вершинами D и B_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = AA_1 = 17,5$, $AD = 17,5\sqrt{2}$.

3.2.3. Куб

856. Диагональ грани куба равна $3\sqrt{2}$ (см. рис. 365). Найдите объём куба.

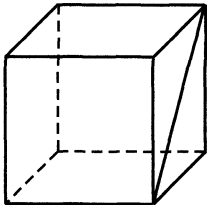


Рис. 365.

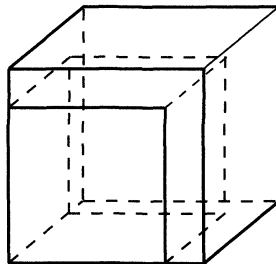


Рис. 366.

857. Ребро куба равно 5. Насколько нужно его увеличить, чтобы площадь поверхности куба увеличилась на 144 (см. рис. 366)?

858. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 367). Объём треугольной пирамиды $A_1 B C_1 D$ равен 3. Чему равен объём куба?

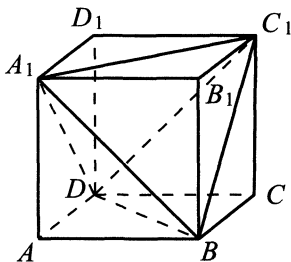


Рис. 367.

3.2.4. Конус

859. Объём первого конуса равен 6 см^3 . У второго конуса и высота, и образующая в два раза больше, чем у первого. Найдите объём второго конуса.

860. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 368. В ответе укажите значение величины $\frac{V}{\pi}$.

861. Объём первого конуса равен 18 м^3 . У второго конуса высота в четыре раза меньше, а радиус основания в два раза больше, чем у первого. Найдите объём второго конуса. Ответ дайте в кубических метрах.

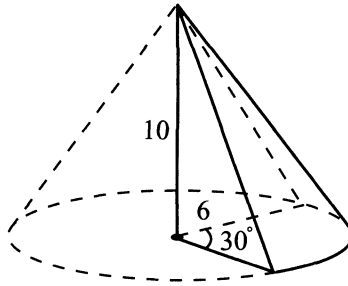


Рис. 368.

862. Площадь полной поверхности конуса равна 90π , а радиус основания равен 5. Найдите высоту конуса.

863. Радиус основания конуса равен 4, высота — 93. Найдите объём V части этого конуса, изображённой на рисунке 369. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

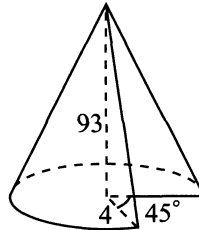


Рис. 369.

864. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса 13,5. Определите объём исходного конуса.

865. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 24 и высотой 2,5. Найдите его объём, делённый на π .

3.2.5. Цилиндр

866. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π , высота равна 2 (см. рис. 370). Найдите диаметр основания цилиндра.

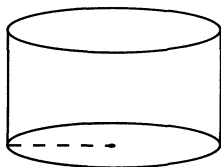


Рис. 370.

867. Радиус основания цилиндра равен 14, высота — 9. Найдите объём V части этого цилиндра, изображённой на рисунке 371. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

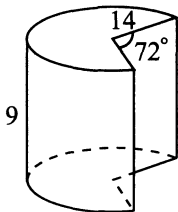


Рис. 371.

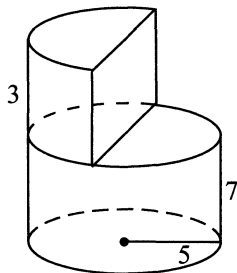


Рис. 372.

868. Найдите объём V части фигуры, изображённой на рисунке 372. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

3.2.6. Комбинации тел

869. Основания цилиндра и конуса совпадают, а площадь полной поверхности цилиндра в два раза больше площади полной поверхности конуса. Найдите длину образующей конуса, если высота цилиндра равна 10.

870. Объём конуса равен объёму цилиндра, а высота конуса в два раза больше высоты цилиндра. Площадь основания цилиндра равна 15. Найдите площадь основания конуса.

871. Сфера вписана в прямой круговой цилиндр с площадью основания 24. Чему равна площадь сферы?

872. В шар вписан цилиндр с площадью основания 4π и синусом угла между образующей цилиндра и диагональю его осевого сечения, равным $\frac{1}{5}$. Найдите отношение площади поверхности шара к площади основания цилиндра.

873. В правильном тетраэдре, площадь поверхности которого равна 18 см^2 , отметили середины всех его рёбер и построили октаэдр с вершинами в этих серединах. Найдите площадь поверхности построенного октаэдра.

874. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt[3]{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

875. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 3. Объём параллелепипеда равен 72 (см. рис. 373). Найдите высоту цилиндра.

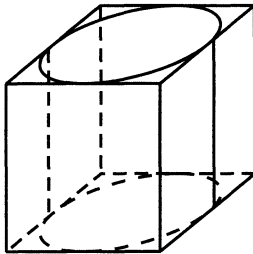


Рис. 373.

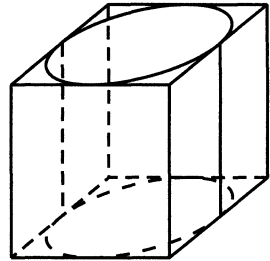


Рис. 374.

876. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 374), радиус основания которого равен 5. Высота цилиндра равна 7. Найдите объём параллелепипеда.

877. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$ (см. рис. 375). Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

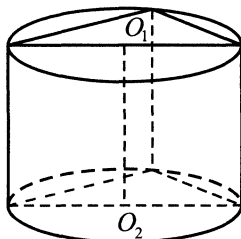


Рис. 375.

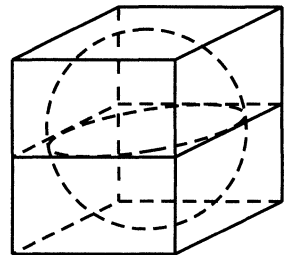


Рис. 376.

878. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиусом 2,5 (см. рис. 376). Найдите его объём.

879. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 377). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 15.

880. В окружность основания цилиндра вписан правильный треугольник (см. рис. 378). Найдите объём пирамиды той же высоты, что и цилиндр, в основании которого лежит этот треугольник, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

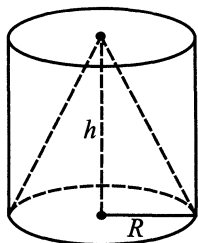


Рис. 377.

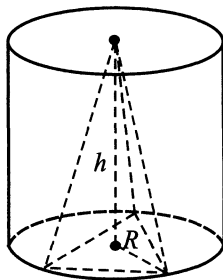


Рис. 378.

881. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 379). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра той же высоты, что и пирамида. Найдите объём цилиндра, если объём пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

882. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 379). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра, той же высоты, что и пирамида. Найдите объём пирамиды, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

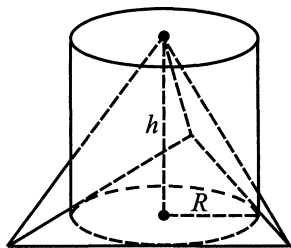


Рис. 379.

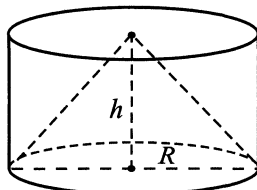


Рис. 380.

883. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 380). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 12.

884. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, высота которого равна 2 (см. рис. 381). Найдите радиус цилиндра, если известно, что площадь боковой поверхности призмы равна 12.

885. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объём параллелепипеда (см. рис. 381).

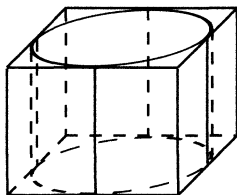


Рис. 381.

886. Объём цилиндра равен 9. У конуса радиус основания в 3 раза больше, а высота в 2 раза меньше. Найдите объём конуса.

§ 4. Теория вероятностей и статистика

4.1. Теория вероятностей

4.1.1. Классическое определение вероятности

887. В доме сорок восемь квартир. В тридцати из них ранним утром среды никого не будет. Пришедший в это время почтальон наберёт в домофон наудачу номер одной из квартир. Какова вероятность того, что ему ответят?

888. На книжной полке Максима 25 книг: 12 детективов, 4 учебника по математике и 9 книг в жанре «фэнтези». Найдите вероятность того, что наудачу взятая с этой полки книга окажется учебником по математике.

889. Юра дважды бросал кубик. Найдите вероятность того, что при втором броске у него выпало столько же очков, сколько и при первом. Ответ округлите до сотых.

890. Пете и Юре нужно написать реферат на одну и ту же тему. Ученики нашли в Интернете один и то же набор из 10 рефератов на заданную тему, и каждый скачал наугад выбранный реферат из этого набора. Какова вероятность того, что представленные рефераты оказались различными?

891. Алексей подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка. Какова вероятность того, что он сделает ровно 4 подбрасывания?

892. В мешке лежит пять неразличимых на ощупь карточек с буквами А, Т, А, К, А. Какова вероятность того, что, наудачу извлекая по очереди карточки и выкладывая их на столе, можно получить слово «АТАКА»?

893. Какова вероятность того, что наудачу взятое целое число из диапазона 0–999 больше 449?

894. Карточки с цифрами от 1 до 4 наудачу извлекают из мешка и кладут по порядку. Какова вероятность того, что карточку с цифрой 3 извлекут последней?

895. В книге 400 страниц, из них на 36 есть картинки. Школьник открывает книгу на наудачу выбранной странице. Какова вероятность того, что на открытой странице не будет картинки?

896. Готовясь к экзамену по ОБЖ, Влад выучил 16 билетов из 40. На экзамене он вытянул наудачу 1 билет. Найдите вероятность того, что это будет выученный билет.

897. В партии 1050 деталей, из них 630 — типа А, а остальные — типа Б. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь — типа Б?

898. В классе 20 человек, из них четыре Светы и пять Дим. Директор вызвал наугад одного из учеников. Какова вероятность, что вызванного ученика зовут Света или Дима?

899. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 1 раз.

900. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Ответ округлите до сотых.

901. На чемпионате мира по фигурному катанию участвуют 75 спортсменов, среди них 12 — из России, 8 — из Китая. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что 13-м будет выступать спортсмен из России.

902. Ракета поражает цель с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что цель не окажется поражённой после 4 запусков ракеты?

903. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не менее 11 очков. Ответ округлите до сотых.

904. Из семидесяти пяти парашютов шесть неисправных. Какова вероятность того, что наудачу взятый парашют исправен?

905. Мастер не выпался и за день из пятнадцати деталей сделал восемь бракованных. По стечению обстоятельств в конце дня комиссия технического контроля взяла на проверку две наудачу выбранные детали. Мастера уволят, если хотя бы одна деталь окажется бракованной. Какова

вероятность того, что в результате проверки мастер прекратит работу на данном заводе?

906. У Григория в понедельник шесть уроков: три по математике и три по русскому языку. Он наудачу пропустил два из них (необязательно подряд) для прохождения медицинской комиссии. Какова вероятность того, что оба пропущенных урока — по математике?

907. В сборнике билетов по физике всего 30 билетов, в 6 из них встречается вопрос по механике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по механике.

908. В сборнике билетов по географии всего 25 билетов, в 12 из них встречается вопрос, касающийся Евразии. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос, касающийся Евразии.

909. В сборнике билетов по истории всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос по XVII веку. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по XVII веку.

910. В сборнике билетов по математике всего 40 билетов, в 8 из них встречается вопрос по тригонометрии. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по тригонометрии.

911. В чемпионате по гимнастике участвуют 36 спортсменов: 6 из Германии, 3 из Франции, остальные — из России. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из России.

912. В соревнованиях по метанию копья участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Дании, 11 спортсменов из Швеции и 9 — из Греции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Дании.

913. На семинар приехали 5 учёных из Норвегии, 3 из России и 4 из Финляндии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятым окажется доклад учёного из России.

914. На чемпионате по прыжкам в длину выступают 16 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 6 прыгунов из Бразилии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать прыгун из Бразилии.

915. В среднем из 1200 лампочек, поступивших в продажу, 6 неисправны. Найдите вероятность того, что одна случайно выбранная для контроля лампочка исправна.

916. В среднем из 1500 телевизоров, поступивших в продажу, 30 имеют дефект. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля телевизор без дефектов.

917. В среднем из 2000 утюгов, поступивших в продажу, 8 имеют дефект. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля утюг без дефектов.

918. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

919. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет все четыре раза.

920. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 50 докладов — первые три дня по 14 докладов, остальные в четвёртый день. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

921. Конкурс певцов проводится в течение пяти дней. Всего заявлено 40 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 12 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится во второй день конкурса?

922. Перед началом первого тура чемпионата по фехтованию участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате соревнуются 36 спортсменов, среди которых 8 участников из России, в том числе Василий Петров. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Петров будет фехтовать с каким-либо спортсменом из России.

923. Карточки с цифрами от 1 до 4 наудачу извлекают из мешка и кладут по порядку. Какова вероятность того, что карточку с цифрой 3 извлекут последней?

924. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Результат округлите до сотых.

925. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

- 926.** В мастерской собирают компьютеры. В среднем на 50 качественных компьютеров приходится семь компьютеров со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что компьютер, выбранный наугад из числа собранных в этой мастерской, окажется качественным. Результат округлите до сотых.
- 927.** В конкурсе юных чтецов участвуют 12 человек: трое мальчиков, остальные девочки. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что первой будет выступать девочка.
- 928.** Для зачёта по геометрии было составлено 50 задач, из них повышенного уровня — 12. Какова вероятность того, что наудачу взятая задача будет задачей повышенного уровня?
- 929.** В корзине 20 шаров, из них 15 — белые, остальные — красные. Какова вероятность того, что наудачу взятый из корзины шар — красный?
- 930.** У Максима есть монеты достоинством 1 рубль — 12 штук, 2 рубля — 5 штук, 5 рублей — 3 штуки, 10 рублей — 4 штуки. Наугад он достаёт одну монету и подбрасывает её. Какова вероятность того, что выпадет орёл пятирублёвой монеты?
- 931.** Школьная научно-практическая конференция проводится в 6 дней. Всего запланировано 64 доклада — первые два дня по 20 докладов, остальные распределены поровну между третьим, четвёртым и пятым днями. В последний день запланировано награждение победителей. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад Васи П. окажется запланированным на предпоследний день конференции?
- 932.** На улице неправильно припарковано 48 автомобилей, среди которых автомобиль Маши. Эвакуатор выбрал случайным образом и вывез на штрафстоянку 12 автомобилей. Какова вероятность, что автомобиль Маши не вывезли на штрафстоянку?
- 933.** В первый день чемпионата по шахматам каждый участник играет одну партию, соперники определяются жеребьёвкой. Всего в чемпионате соревнуются 46 шахматистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Андрей Васильев. Найдите вероятность того, что в первый день Андрей Васильев будет играть с каким-либо спортсменом из России.
- 934.** В книге 400 страниц, из них на 48 есть картинки. Школьник открывает книгу на наудачу выбранной странице. Какова вероятность того, что на открытой странице не будет картинки?
- 935.** В классе 20 человек, из них три Светы и пять Дим. Директор вызвал наугад одного из учеников. Какова вероятность, что вызванного ученика зовут Света или Дима?

936. На чемпионате мира по фигурному катанию участвуют 80 спортсменов, среди них 12 — из России, 8 — из Китая. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что 17-м будет выступать спортсмен из России.

937. У Петра очень много тетрадей: часть из них в линию, а остальные — в клеточку. При этом из 15 тетрадей в среднем 9 в клеточку. Найдите вероятность того, что наугад взятая тетрадь — в линию.

938. В одном из магазинов в среднем из каждых 50 ноутбуков 19 бракованных. Какова вероятность того, что Владимир, купивший ноутбук наугад, приобрёл бракованный товар?

939. Мама сказала Ване купить 1 упаковку мороженого, но забыла уточнить — сливочного или пломбира. В магазине с системой самообслуживания стояло 9 упаковок пломбира и 11 — сливочного мороженого. Ваня выбрал 1 упаковку наудачу. Какова вероятность того, что он купил сливочное мороженое?

940. На остановке стояло 16 автобусов и 9 троллейбусов. Какова вероятность того, что Оля, выбравшая транспорт наугад, села в автобус?

941. В шкафу у Людмилы Аркадьевны лежало 80 пакетиков чая, из них 32 — чёрный чай, 14 — белый, 12 — красный, а остальные пакетики — зелёный чай. Какова вероятность того, что наудачу взятый пакетик — с зелёным чаем?

942. В среднем на каждые 75 страниц без опечаток в новом словаре приходится 25 страниц с опечатками. Какова вероятность того, что на наугад открытой странице есть опечатки?

943. Среди посетителей парикмахерской в среднем на 26 новых клиентов приходится 14 клиентов, которые там уже когда-либо стриглись. Найдите вероятность того, что в пятницу последним будет обслуживаться клиент, посещавший эту парикмахерскую раньше.

944. В концерте школьной самодеятельности выступают по очереди 6 восьмиклассников, 7 девятиклассников, 8 десятиклассников и 4 одиннадцатиклассника. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность того, что четвёртым не будет выступать девятиклассник?

945. На витрине магазина с системой самообслуживания стоит 96 упаковок йогурта, из них 21 — с клубничной начинкой, 31 — с малиновой, 15 — с банановой. Артём взял наудачу 1 упаковку йогурта. Какова вероятность того, что это йогурт с клубничной или банановой начинкой?

946. На курсы по английскому языку записалось 25 человек. Их разбили на 5 групп: в первой — 7 человек, во второй — 6 человек, а в остальных

группах участников поровну. Какова вероятность того, что Василий Пончиков, записавшийся на курсы, попадет в пятую группу?

Повышенный уровень 1 (С1, С2)

§ 5. Алгебра и начала анализа (С1)

5.1. Уравнения. Системы уравнений

5.1.1. Логарифмические и показательные уравнения

Решите систему уравнений (947–952):

$$947. \begin{cases} \log_{0,5} \left(\frac{y}{x} \right) + \log_2(y+1) = \log_2 3, \\ 4^{(x+y)} \cdot 4^y - 2^{y^2} = \log_{0,2} 1. \end{cases}$$

$$948. \begin{cases} x^y = 2^6, \\ \log_2 x = y - 1. \end{cases}$$

$$949. \begin{cases} y^{2 \log_y x+1} - 4y^2 - 3y = 0, \\ \log_x(2xy) - \log_x 2 = \log_y x^2. \end{cases}$$

$$950. \begin{cases} y^2 - \log_3 x^y = y, \\ x^{y+1} - 3^{12} \cdot x = 0. \end{cases}$$

$$951. \begin{cases} 4^{(x-y)^2+x} = 4^{x+1}, \\ 5^{x+y-1} = 25. \end{cases}$$

$$952. \begin{cases} 3^{2x+1} - 3 \cdot 2^y = 231, \\ 2 \cdot 3^x - 2^{\frac{y}{2}+1} = 14. \end{cases}$$

Решите уравнение (953–955):

$$953. \frac{\log_2^2(x-5) + \frac{1}{2} \log_2(x-5)^2 - 20}{\log_x(x-6)} = 0.$$

$$954. \log_2(6-x) \cdot \log_3(2x+4) + 3 = \log_2(6-x) + 3 \log_3(2x+4).$$

$$955. \log_3(2-x) \cdot \log_2(3x+7) + 4 = 4 \log_3(2-x) + \log_2(3x+7).$$

5.1.2. Тригонометрические уравнения

Решите уравнение (956–960):

$$956. 5 \sin 6x + 4 = 2 \sin 12x + 5 \cos 6x.$$

$$957. \frac{\cos x - 1}{\cos x} + 2 \operatorname{ctg} x \cdot \sin x = 0.$$

$$958. 3 \operatorname{tg} x \cdot \cos x - \frac{2 \sin x + 1}{\sin x} = 0.$$

$$959. \frac{2 \sin 2x}{\operatorname{ctg} x} + 3 \cos^2 x = 1 - 2 \cos x.$$

$$960. 8 - 4 \sin^2 x = \sin 2x \operatorname{ctg} x - 9 \cos x.$$

Решите уравнение (961–968):

$$961. \frac{2 \sin^2 x + 11 \sin x - 6}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = 0.$$

$$962. \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} = 0.$$

$$963. \frac{\operatorname{tg}^3 x - 1}{\cos^2 x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

$$964. \frac{\operatorname{ctg}^5 x + 1}{\sin^2 x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

$$965. \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0.$$

$$966. \frac{12 \cos^4 x - \cos 2x - 3}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

$$967. \frac{2 \cos^2 x - 2 \cos x + \sqrt{2} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 0.$$

$$968. \frac{4 \sin^2 x - 4 \sin x + 2\sqrt{3} - 3}{\sin^2 x - 3 \cos^2 x} = 0.$$

$$969. \text{ а) Решите уравнение } 2 \cos^2 x - 2 \sin 2x + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$970. \text{ а) Решите уравнение } (2\sqrt{3} - 4) \cos^2 x - (2\sqrt{3} + 1) \sin 2x + 4 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$971. \text{ а) Решите уравнение } \frac{1 - \cos^2 2x}{\operatorname{tg} x} + 2 \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = 3 \cos x \cdot \sin 2x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

$$972. \text{ а) Решите уравнение } 2 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

973. а) Решите уравнение $\frac{\cos x}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 3\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi, 4\pi]$.

974. а) Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}} - 4\left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 1\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[6\pi; 7\pi]$.

5.1.3. Иррациональные уравнения

Решите уравнение (975–978):

975. $\sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+3}+2)^2} - 7 = 3$.

976. $\frac{\sqrt{4x^2+14x-98}}{8x+2} = \frac{\sqrt{4x^2+14x-98}}{2x-7}$.

977. $(2x-5)\sqrt{2x^2-9x+4}+10=4x$.

978. $(x+1)\sqrt{3x^2+17x+10}-4=4x$.

5.1.4. Комбинированные уравнения

Решите уравнение (979–980):

979. $\log_3(x^2-2x+2) - \log_{0,3} 3^{x^2-2x+1} = 0$.

980. $\log_4(x^2-4x+5) + \log_{0,4} \frac{x^2-1}{x^2} = 0$.

Решите систему уравнений (981–989):

981. $\begin{cases} 5^{3x+4y} - 25^{2x-3y} = 0, \\ \sqrt{12-2x+19y} + \sqrt{x-9y+2} = 5. \end{cases}$

982. $\begin{cases} \log_{13x+10}(4-2x-y) = \log_{(13x+10)2}(16-8y-16x), \\ \operatorname{ctg}(5y+3x-7) \cdot \operatorname{tg}(2+4x-y) = 1. \end{cases}$

983. $\begin{cases} 2^{3y-x+3} + 2^{4+3y-x} = 6, \\ \sqrt{x-8y+3} = 2x-y+1. \end{cases}$

984. $\begin{cases} 2^{y+2x-1} + 4^{y+2x-1} = 6, \\ \sqrt{y+3} = 1 + \sqrt{5-x}. \end{cases}$

985. $\begin{cases} 9^{3x-2y} = 6 + 27^x \cdot 9^{-y}, \\ \sqrt{y} - \sqrt{x-2} = 1. \end{cases}$

986. $\begin{cases} \lg(2+y) + 2 \lg 2 = \lg 2x, \\ \sqrt{y^2+2} = x+y-4. \end{cases}$

$$987. \begin{cases} 3^{2y+3x+1} + 3^{3-2y-3x} = 82, \\ \sqrt{22 - 5x + 4y} = 2 - 2y - 3x. \end{cases}$$

$$988. \begin{cases} \sqrt{7y - 4x + 2} = x - 3y - 3, \\ 2^{x-3y-2} + 2^{3y-x+4} = 5. \end{cases}$$

$$989. \begin{cases} 2^{3x-2y-3} + 2^{y-2x-4} = 1, \\ \sqrt{\frac{2^x}{2^y}} + 4 + 2^{y-2x} = 2^{3x-2y+1} + 6. \end{cases}$$

Решите уравнение (990–994):

$$990. \log_{\operatorname{tg} x}(\sin 2x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1) = 0.$$

$$991. \log_{\operatorname{ctg} x}(\sin 2x + \operatorname{ctg} x \cdot \sin x + 1) = 0.$$

$$992. |\log_4(|x| + 3)| = |x|.$$

$$993. \frac{\log_2 x}{\log_3 |x - 10|} - \frac{1}{2 \cdot \log_x 2} = 0.$$

$$994. \frac{6 \cos 2x - 8 \cos x + 7}{(6 \cos x - 1)\sqrt{-\sin x}} = 0.$$

Решите систему уравнений (995–996):

$$995. \begin{cases} 5x - 2^y = 3 + \sqrt{5x - x^2}, \\ y - \log_2(x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

$$996. \begin{cases} y^2 + 3^x = 4 + \sqrt{y^2 - y + 3}, \\ x - \log_3(1 - y) = 0. \end{cases}$$

Решите уравнение (997–998):

$$997. \log_3^2(3x^2 + x + 1) - \log_{\frac{1}{9}}(9x^2 + 3x + 3) = 18,5.$$

$$998. \log_5(15 + \sqrt{x-5}) + \log_{\sqrt{x-5}+15} 25(\sqrt{x-5} + 15) = 4.$$

Решите систему уравнений (999–1018):

$$999. \begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-6x-23}} = 6 - \sqrt{x^2 - 6x - 23}, \\ \log_3 x = y. \end{cases}$$

$$1000. \begin{cases} 3^{\sqrt{x^2-7x-7}} = 5 - 2\sqrt{x^2 - 7x - 7}, \\ \log_2 x = y. \end{cases}$$

$$1001. \begin{cases} x \log_2(xy) - x^2 = -10, \\ \log_2 x + \log_2 y = -3. \end{cases}$$

$$1002. \begin{cases} 9x^6 + 6 - 8 \sin y = 4x^4 + 3x, \\ 24x^3 - \frac{26}{81} - 8 \sin y = 4x^4 + 3x. \end{cases}$$

$$1003. \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 = 62, \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$$

$$1004. \begin{cases} x^2 + y^2 + x^2y^2 - 8xy = 20, \\ x + y + xy = 14. \end{cases}$$

$$1005. \begin{cases} 36^{2x+1} + 16 \cdot 4^{2x-1} = 24 \cdot 12^{2x}, \\ \sin y = -x. \end{cases}$$

$$1006. \begin{cases} 49^{2x-1} + 81 \cdot 9^{2x-3} = 42 \cdot 21^{2x-2}, \\ \cos y = x. \end{cases}$$

$$1007. \begin{cases} 4x + y = 4\sqrt{xy} - 16, \\ 16x^2 + y^2 = 8xy + 64. \end{cases}$$

$$1008. \begin{cases} x + 9y = 6\sqrt{xy} - 25, \\ x^2 + 81y^2 = 18xy + 25. \end{cases}$$

$$1009. \begin{cases} x^2 + 4x + 2\sqrt{x(x+4)} - 1 = 9, \\ 4 \sin y \cos y = x. \end{cases}$$

$$1010. \begin{cases} x(2x - 5) + \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = -1, \\ \cos^2 y - \sin^2 y = x. \end{cases}$$

$$1011. \begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (6\sqrt{\cos x} - 1)(5y + 4) = 0. \end{cases}$$

$$1012. \begin{cases} y - \sin x = 0, \\ (8\sqrt{\sin x} - 1)(3y - 4) = 0. \end{cases}$$

$$1013. \begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (1 - 5\sqrt{\cos x})(3y - 8) = 0. \end{cases}$$

$$1014. \begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (2 - 3\sqrt{\sin x})(5y - 4) = 0. \end{cases}$$

$$1015. \begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (3\sqrt{\sin x} - 2)(6y - 3) = 0. \end{cases}$$

$$1016. \begin{cases} 2y + 3 \cos x = 0, \\ (\ln(\cos x) + 1)(y - 1) = 0. \end{cases}$$

$$1017. \begin{cases} y + \sin x = 0, \\ (\ln |\sin x| - 2)(2 \sin y - 1) = 0. \end{cases}$$

$$1018. \begin{cases} y - \cos x = 0, \\ (\sqrt{\cos x} - 3)(2 \sin y - \sqrt{2}) = 0. \end{cases}$$

Решите уравнение (1019–1020):

$$1019. (3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0.$$

$$1020. (2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2) \cdot \sqrt{16 - 4x^2} = 0.$$

Решите систему уравнений (1021–1022):

$$1021. \begin{cases} 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 12 = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

$$1022. \begin{cases} 9^{2y} - 3 \cdot 9^{y+1} + 72 = 0, \\ \cos x = y. \end{cases}$$

Решите уравнение (1023–1024):

$$1023. (\log_3 x + \log_x 3 + 2)(\log_3 x - \log_{3x} x) = 6.$$

$$1024. (\log_2 x + 2 \log_x 2)(\log_2 x - 2 \log_x 2) = 3.$$

Решите систему уравнений (1025–1038):

$$1025. \begin{cases} \frac{2x-2}{x-y} - \frac{3y}{x+y} = 3, \\ \frac{6x-6y}{x-1} + \frac{5x+5y}{y} = 7. \end{cases}$$

$$1026. \begin{cases} \frac{3x-1}{y+1} - \frac{3y-1}{x+1} = 2, \\ \frac{3y+3}{3x-1} + \frac{2x+2}{3y-1} = 1. \end{cases}$$

$$1027. \begin{cases} 3 \sin y - \cos^2 y + 6 \cos x = 0, \\ 2 \sin^2 x + 5 \cos x = 4. \end{cases}$$

$$1028. \begin{cases} 2 \sin^2 y + 9 \cos y - 3 \sin x = 0, \\ 2 \cos^2 x - 5 \sin x = 5. \end{cases}$$

$$1029. \begin{cases} \frac{2x+5y}{2y} + \frac{y-2x}{x} = 2,5, \\ x|y| + x^2 + y^2 = 1 + 2x. \end{cases}$$

$$1030. \begin{cases} \frac{3x-y}{y} + \frac{3y+4x}{x} = -3, \\ x|y| + x^2 - y^2 - 3 = 2x. \end{cases}$$

$$1031. \begin{cases} (x+2)^2 + \sqrt{x^2 + 4x + 19} = 57, \\ y^2 = x - 1. \end{cases}$$

$$1032. \begin{cases} x^2 - \sqrt{x^2 - x + 10} = x + 2, \\ y^2 = x - 2. \end{cases}$$

$$1033. \begin{cases} 2 \cos x - \sqrt{y+1} = 0, \\ 2^{2 \sin x} + 4\sqrt{2} = 2^{\sin x+2} + 2^{\sin x+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$1034. \begin{cases} |x - 2\sqrt{2}| - 2 \sin y = 0, \\ 3^{\operatorname{ctg} y+1} + 8 = 3^{1-\operatorname{ctg} y}. \end{cases}$$

$$1035. \begin{cases} (\log_x y + 2)(\log_y x - 1) = -2, \\ (x+1)^2 + (2y+1)^2 = 2x + 4y + 7. \end{cases}$$

$$1036. \begin{cases} (\log_x y - 6)(\log_y x - 1) = 2, \\ \log_x y - \log_2 x = 3. \end{cases}$$

$$1037. \begin{cases} 25^x = 30 - 5^x; \\ 6\sqrt{3} \cos y = x + 2. \end{cases}$$

$$1038. \begin{cases} 9^x = 3^x + 72; \\ 2\sqrt{3} \sin y = x + 1. \end{cases}$$

Решите уравнение (1039–1042):

$$1039. (4 \cos^2 x - 12 \cos x + 5)\sqrt{-7 \sin x} = 0.$$

$$1040. (6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4)\sqrt{-5 \cos x} = 0.$$

$$1041. \frac{4 \cos^2 x - 3}{\log_5(-\operatorname{tg} x)} = 0.$$

$$1042. (2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3)(1 - \log_2(-\sin x)) = 0.$$

Решите систему уравнений (1043–1044):

$$1043. \begin{cases} x^2 - x + 1 = x + 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

$$1044. \begin{cases} x^2 - x + 4 = 4(2x + 1), \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

Решите уравнение (1045–1055):

$$1045. \frac{\log_8^2(x-3) + \log_8 \frac{1}{(x-3)^5} + 6}{\sqrt{x-100}} = 0.$$

$$1046. \frac{1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x}{\sqrt{\cos x}} = 0.$$

$$1047. \frac{4 - 5 \cos x - 2 \sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

$$1048. \frac{2^{3\sqrt{x}} - 7 \cdot 2^{2\sqrt{x}-1} + 7 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} - 1}{\sqrt{3x-1}} = 0.$$

$$1049. \frac{3^{3x^2} - 13 \cdot 3^{2x^2-1} + 13 \cdot 3^{x^2-1} - 1}{\sqrt{x^2 - x}} = 0.$$

$$1050. \frac{8 \cos^2 x + 2 \sin x - 7}{\sqrt{3 \cos x + 2\sqrt{2}}} = 0.$$

$$1051. \frac{12 \sin^2 x + 4 \cos x - 7}{\sqrt{2 - 3 \sin x}} = 0.$$

$$1052. \frac{2^{(2+\sqrt{2}) \cos x} - 2^{\sqrt{2} \cos x} - 2^{2 \cos x+2} + 4}{\sqrt{(2 \sin x - 1)(1 - 2 \cos x)}} = 0.$$

$$1053. \frac{25^{\sin x} + 5^{\sin x+1} - 6}{\sqrt{(2 \cos x - 1)(\sqrt{3} - 2 \sin x)}} = 0.$$

$$1054. \sin 12x - 1 = (|\sin 2x| - \cos 6x)^2.$$

$$1055. \cos 6x - 1 = (|\cos x| - \sin 4x)^2.$$

Решите систему уравнений (1056–1057):

$$1056. \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{4 \cos^2 x} = \frac{2}{5} - 5^{1-y^2}, \\ \frac{5^{3-2y^2} - 25 \frac{1}{5} \cdot 5^{1-y^2} + 1}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0. \end{cases}$$

$$1057. \begin{cases} 6^{y^2-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-4 \sin^2 x} = \frac{5}{3}, \\ \frac{6^{2y^2-4} - 36 \frac{1}{6} \cdot 6^{y^2-2} + 6}{\sqrt{5 \sin x + 1}} = 0. \end{cases}$$

$$1058. \text{ а) Решите уравнение } \sqrt{1 + \frac{1}{\cos x}} = \operatorname{tg} x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

1059. а) Решите уравнение $\sqrt{2} - \sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$.

1060. а) Решите уравнение

$$\sqrt{\cos^2 5x - 10 \cos 5x + 25} - \sqrt{(7 \cos 5x - 10)^2} = -8.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right)$.

1061. а) Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 3x - 6 \sin 3x + 9} - \sqrt{(5 \sin 3x - 8)^2} = -7$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$.

1062. Решите уравнение $(8 \cos^2 x + 2 \sin x - 7) \log_{\frac{5\pi}{2} - x} \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

1063. а) Решите уравнение $(5 \sin^2 x + 4 \cos x - 4) \ln(x - 7) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

1064. а) Решите уравнение $4^{3 \cos^2 x - 2 \sin x - 2} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

1065. а) Решите уравнение $9^{2 \sin^2 x + \cos x - 1} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[4\pi; 5\pi]$.

1066. а) Решите уравнение $16^{\sin 2x + \frac{1}{2}} - 9(16^{\sin x})^{\cos x} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{2\pi}{5}\right]$.

1067. а) Решите уравнение $9^{2 \cos 2x + 0,5} - 28 \cdot 9^{2 \cos^2 x - 1} + 9 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}\right)$.

§ 6. Геометрия (С2)

6.1. Стереометрия

6.1.1. Пирамида

1068. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = \sqrt{3}$, $SC = 2\sqrt{10}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN , где M — середина ребра AS , а точка N делит ребро BC в отношении $1 : 2$.

1069. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = \sqrt{3}$, $SC = 2\sqrt{2}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой CN , где N — середина ребра AS .

1070. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ угол между ребром SA и плоскостью основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды, если α проходит через точку A и середину ребра SC параллельно диагонали BD .

1071. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Через сторону основания AB и середину бокового ребра SE проведено сечение. Найдите тангенс угла между прямой AE и плоскостью проведённого сечения.

1072. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Через сторону основания AB и середину бокового ребра SD проведено сечение. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью проведённого сечения.

1073. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ высота DH равна стороне основания. Точка K — середина бокового ребра DA . Найдите угол наклона прямой KH к плоскости основания пирамиды.

1074. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ высота SH в два раза меньше диагонали основания. Точка K делит боковое ребро SA в отношении $1 : 2$, считая от вершины A . Найдите угол наклона прямой KH к плоскости основания пирамиды.

1075. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все рёбра равны 4. Найдите расстояние между прямыми AB и SC .

1076. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания $ABCDEF$ равны 3, а боковые рёбра равны 5. Найдите угол между прямыми SE и AF .

1077. Дан правильный тетраэдр, в который вписана сфера радиуса r . Найдите отношение $\frac{r}{R}$, где R — радиус сферы, описанной около тетраэдра, вершинами которого являются точки пересечения высот граней исходного тетраэдра.

1078. Дан правильный тетраэдр, около которого описана сфера радиуса R . Найдите отношение $\frac{R}{r}$, где r — радиус сферы, вписанной в тетраэдр, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис граней исходного тетраэдра.

1079. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $PABC$ равна 6, а ребро $AP = \sqrt{28}$. Точка N делит высоту PO пополам. Найдите $\angle OAN$.

1080. Высота PO правильной треугольной пирамиды $PABC$ равна $\sqrt{108}$, а сторона её основания ABC равна 6. Точка N делит высоту PO в отношении $2 : 1$, считая от точки P . Найдите $\angle BNO$.

1081. В правильной треугольной пирамиде сторона основания составляет $\frac{1}{3}$ бокового ребра. Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями.

1082. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 4, а угол BFD равен 60° , где F — середина SC . Найдите высоту пирамиды.

1083. В правильном тетраэдре $SABC$ точки M и N делят ребро SB на три равные части. Найдите угол между плоскостями AMC и ANC .

1084. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна боковому ребру, точки M и N делят ребро SC на три равные части. Найдите угол между плоскостями AMD и AND .

1085. В сферу объёмом 36π вписана правильная шестиугольная пирамида. Расстояние от центра сферы до основания пирамиды равно 1. Найдите объём пирамиды.

1086. В сферу объёмом 36π вписана правильная восьмиугольная пирамида. Расстояние от центра сферы до основания пирамиды равно 1. Найдите объём пирамиды.

1087. Ребро правильного тетраэдра равно $4\sqrt{2}$. Определите радиус шара, касающегося всех рёбер тетраэдра.

1088. Шар радиуса $3\sqrt{2}$ касается всех рёбер правильного тетраэдра. Определите длину рёбер этого тетраэдра.

1089. В правильной треугольной пирамиде $ABCS$ ребро основания AB равно боковому ребру $AS = 4$. Точка K является серединой апофемы боковой грани BCS . Найдите угол между прямыми BK и AC .

1090. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите угол, образованный гранями SAB и SCB .

1091. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка K — середина ребра SB . Найдите расстояние от точки B до плоскости AKC .

1092. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 4, а её высота равна 2. Найдите расстояние от прямой BC до боковой грани SAD .

1093. Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 3, а её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30° . Найдите расстояние от прямой BC до боковой грани SAD .

1094. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Через вершину основания проведено сечение, параллельное противоположной стороне основания и перпендикулярное противоположной боковой грани пирамиды. Сечение наклонено к плоскости основания пирамиды под углом, тангенс которого равен $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найдите объём пирамиды.

1095. В правильном тетраэдре со стороной $\sqrt{2}$ найдите длину отрезка, соединяющего середины несмежных рёбер.

1096. Правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны 4, касается треугольной пирамиды $KSBC$ общей гранью SBC . $SK \parallel AB$, $KB = 4$. Найдите KO , если известно, что O — центр основания пирамиды $SABCD$.

1097. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC все рёбра равны 6. Грань SBC является основанием пирамиды $KSBC$, которая пересекается с $SABC$ только по грани SBC . Ребро SK параллельно высоте треугольника ABC , опущенной из вершины A . $SK = 3\sqrt{3}$. Найдите AK .

6.1.2. Призма. Параллелепипед

1098. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 16$, $CC_1 = 9$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и $AB_1 D_1$.

1099. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $CC_1 = 9$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.

1100. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, $\angle A C A_1 = \operatorname{arctg} 2$, $\angle D B D_1 = \operatorname{arctg} 4$, $CC_1 = 1$. Найдите объём параллелепипеда.

1101. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, $\angle A C A_1 = \operatorname{arctg} 3$, $\angle D B D_1 = \operatorname{arctg} 4$, $CC_1 = 2$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

1102. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$.

Известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ и $AB = CC_1$. Найдите угол между плоскостями ABC и ADF , где F — середина ребра BB_1 .

1103. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадратом со стороной 2, а пространственная диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 B_1 C_1 D_1$ и плоскостью ADC_1 .

1104. Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадратом со стороной 3, а пространственная диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{21}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 B_1 C_1 D_1$ и плоскостью ADC_1 .

1105. Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Плоскость, проведённая через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует угол, равный 60° , с плоскостью основания, а полученное сечение имеет площадь $5\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

1106. Определите объём правильной четырёхугольной призмы, если её диагональ образует с боковой гранью угол 30° , а сторона основания равна $3\sqrt{2}$.

1107. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник ABC , в котором $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$. Высота призмы равна $2\sqrt{6}$. Найдите MN , где M — середина CC_1 , а N — середина AB .

1108. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием $AB = 10$. Найдите расстояние между прямой CC_1 и прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой CM_1 , где M_1 — середина стороны $A_1 B_1$.

1109. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 5, найдите расстояние от точки C до прямой $D_1 E_1$.

1110. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 7, найдите расстояние от точки B до прямой $D_1 C_1$.

1111. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 6, найдите расстояние от точки A до прямой $E_1 D_1$.

1112. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 4, а боковые рёбра — 3. Найдите угол между прямыми BD и AD_1 .

1113. В прямой треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 4, точки K и M лежат на серединах боковых рёбер AA_1 , BB_1 соответственно, а точка L лежит на середине ребра $A_1 C_1$. Найдите косинус угла между прямой BB_1 и плоскостью KLM .

1114. В призме $ABC A_1 B_1 C_1$ все рёбра равны $\sqrt{3}$, угол между боковым ребром AA_1 и высотой AN нижнего основания призмы ABC равен 30° и проекция точки A_1 на плоскость ABC лежит на высоте AN . Точки K и M лежат на рёбрах $A_1 C_1$ и $A_1 B_1$ соответственно, при этом $2A_1 M = MB_1 = 2A_1 K = KC_1$. Найдите площадь сечения призмы AKM .

1115. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна 8, высота равна 3. Найдите косинус угла между плоскостями $B_1 D F_1$ и $E D_1 C$.

1116. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна 8, высота равна 5. Найдите косинус угла между плоскостями CEB_1 и $AE_1 C_1$.

1117. Дана правильная треугольная призма, диагональ боковой грани которой составляет с боковым ребром угол 60° . Найдите угол между скрещивающимися диагоналями смежных боковых граней призмы.

1118. Дана правильная треугольная призма со стороной основания, равной 4, боковым ребром, равным $8\sqrt{2}$. Найдите косинус угла между диагональю боковой грани и плоскостью смежной боковой грани.

1119. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дано $AB = 2$ и $BC = 4$. На ребре AA_1 выбрана точка K так, что $A_1 K = 4$, а на ребре BB_1 — точка L так, что $B_1 L = 3$. Найдите площадь сечения, проходящего через точки K , L и D_1 .

1120. В треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ основанием является прямоугольный треугольник с катетами $AB = 9$, $AC = 12$. $A_1 B = 6$ является высотой призмы. Найдите угол между плоскостями $A_1 B_1 B$ и $B_1 BC$.

1121. В призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием является ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 6$ и $BD = 8$. H — точка пересечения диагоналей ромба. Высота призмы $C_1 H = 3$. Найдите угол между плоскостями $A_1 CD$ и DCC_1 .

6.1.3. Куб

1122. Точка O лежит на ребре DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка P является точкой пересечения диагоналей грани $ABCD$. $DO : DD_1 = 1 : 5$. Найдите косинус угла между прямой OP и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины C .

1123. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K лежит на ребре AA_1 , точка M лежит на ребре $D_1 C_1$, длина ребра $BC = 10$. Найдите косинус угла между прямой KM и диагональю куба, которая выходит из вершины B , если $AK : KA_1 = 2 : 3$, $D_1 M : MC_1 = 7 : 3$.

1124. На ребре CD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка P — середина этого ребра. Найдите синус угла между прямой $C_1 P$ и диагональной плоскостью $AA_1 C_1 C$.

1125. На ребре AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка Q — середина этого ребра. Найдите синус угла между прямой $C_1 Q$ и диагональной плоскостью $AA_1 C_1 C$.

1126. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны равны $3\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения $AB_1 D_1$.

1127. Центры каждой грани куба являются вершинами выпуклого многогранника. Найдите его объём, если диагональ куба равна 6.

1128. Центры каждой грани куба являются вершинами выпуклого многогранника, объём которого равен 4,5. Найдите площадь поверхности куба.

6.1.4. Конус

1129. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Определите градусную меру угла сектора, являющегося развёрткой боковой поверхности этого конуса.

1130. Развёрткой боковой поверхности конуса является полукруг. Определите градусную меру угла при вершине осевого сечения этого конуса.

1131. Диаметр и хорда AB основания конуса равны соответственно 24 и 16, а высота конуса равна $\sqrt{125}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения конуса, проходящей через вершину конуса и хорду AB .

1132. Диаметр и хорда AB основания конуса равны соответственно 26 и 24. Тангенс угла между образующей и основанием конуса равен 8. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения конуса, проходящей через вершину конуса и хорду AB .

1133. На окружности основания конуса радиуса 4 отмечены точки A , B и симметричные им относительно центра окружности точки C , D . Найдите угол между плоскостью, проходящей через вершину конуса и прямую

AB , и плоскостью, проходящей через вершину конуса и прямую CD , если $AB = 4$ и длина образующей равна 5.

1134. В окружности основания конуса радиуса 3 проведены две равноотстоящие от центра основания хорды AB и BC . Точка O — вершина данного конуса. Найдите угол между плоскостями AOB и BOC , если $\angle ABC = 90^\circ$ и высота конуса равна 4.

6.1.5. Цилиндр

1135. В цилиндре отрезок AB является диаметром нижнего основания и равен 10. Точка C лежит на окружности верхнего основания цилиндра и одновременно принадлежит осевому сечению цилиндра, перпендикулярному отрезку AB . Найдите косинус угла между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра, если отрезок BC равен 13.

1136. В цилиндре отрезок AB является диаметром нижнего основания. Точка C лежит на окружности верхнего основания цилиндра и одновременно принадлежит осевому сечению цилиндра, перпендикулярному отрезку AB . Найдите радиус основания цилиндра, если косинус угла между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра равен $0,225$, а отрезок BC равен 41.

6.1.6. Шар

1137. На шаровой поверхности лежат все вершины треугольника ABC . Точка O — центр шара. Найдите угол между прямой AO и плоскостью треугольника, если $AB = AC = 10$, $BC = 12$, $AO = 12,5$.

1138. На шаровой поверхности лежат все вершины равнобедренной трапеции $ABCD$, у которой меньшее основание BC равно боковой стороне, а острый угол равен 60° . Точка O — центр шара. Найдите угол между прямой AO и плоскостью трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

1139. Дан шар с центром в точке O и два круга с площадями 12 и 16, образованные сечениями шара параллельными плоскостями. Точка O является центром большего из кругов, на окружности меньшего из кругов взяли точку A . Найдите угол между прямой OA и плоскостью, содержащей больший круг.

1140. Дан шар с центром в точке O и два круга с площадями 100 и 200, образованные сечениями шара параллельными плоскостями. Найдите расстояние между этими плоскостями, если одна из них содержит точку O .

6.1.7. Комбинации тел

1141. В цилиндр с высотой 10 вписан конус (основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, вершина конуса — середина верхнего основания цилиндра), угол между пересекающимися образующими цилиндра и конуса равен 30° . Найдите площадь всей поверхности конуса.

1142. Около шара описан усечённый конус, площадь одного основания которого в 4 раза больше площади другого. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

1143. Около шара описана правильная усеченная четырёхугольная пирамида, у которой площадь одного основания в 9 раз больше площади другого. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

1144. В цилиндр высотой 2 и радиусом основания 1 вписана правильная восьмиугольная призма $ABCDEFKMA_1B_1C_1D_1E_1F_1K_1M_1$. Точка P — середина бокового ребра E_1E . Найдите угол между прямыми BD_1 и PA .

Повышенный уровень 2 (С3)**§ 7. Алгебра и начала анализа****7.1. Уравнения. Системы уравнений****7.1.1. Иррациональные уравнения**

Решите уравнение (1145–1146):

$$1145. x(1 - 2x^2)\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{8}.$$

$$1146. 3x - 4x^3 = \sqrt{1 - x^2}(1 - 4x^2).$$

7.1.2. Комбинированные уравнения

Решите уравнение (1147–1148):

$$1147. \log_{2x+2} \sin x = \log_{11+10x-x^2} \sin x.$$

$$1148. \log_{3x+14} \cos x = \log_{20+8x-x^2} \cos x.$$

7.2. Неравенства**7.2.1. Логарифмические и показательные неравенства**

1149. Найдите все значения t , при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b = 2^{-6t} - 5 \cdot 2^{-2t}(2^{-t} + 2^{2t})$ и $c = -2^{6t} + 6 \cdot 2^{3t} + 7$ не меньше -9 .

1150. Найдите все значения $x < 2$, при каждом из которых хотя бы одно из двух чисел $a = \log_2(6x - 2x^2) + \log_{\frac{1}{4}}(x - 3)^2$ и $b = \frac{1}{\log_4(5x + 6x^2)}$ больше 1.

1151. Найдите такие значения x , при которых положительным является ровно одно из двух чисел $a = \lg x + \frac{7}{\ln x^3} + \log_x 7$ и $b = (2 \log_3 x - 1 - 3 \log_x 9)(\log_3 x + 3)$.

1152. Найдите все значения $x > 2$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = 2 \log_x 27 - \log_3 81x$ и $b = \log_3^2 x^3 - 28 \log_3 x$ больше -3 .

Решите неравенство (1153–1186):

$$1153. \frac{1}{2} \log_{4+x}(x^2 + 2x + 1) + \log_{-x-1}(-x^2 - 5x - 4) \leq 3.$$

$$1154. \log_{1-x}(1 + x - 2x^2) + \frac{1}{4} \log_{1+2x}(x^2 - 2x + 1)^2 \geq -1.$$

$$1155. \log_{x-2} \log_3 \frac{x+3}{x-3} > \log_{\frac{1}{x-2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3}.$$

$$1156. \log_{x+6} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-5}{x+5} < \log_{\frac{1}{x+6}} \log_2 \frac{x+5}{x-5}.$$

$$1157. 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} < 6.$$

$$1158. 7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} < 14.$$

$$1159. \frac{\log_{3^{x-1}} 27}{\log_{3^{x-1}}(-27x)} \leq \frac{1}{\log_3 \log_{\frac{1}{3}} 3^x}.$$

$$1160. \frac{\log_{2^{x+8}} 4}{\log_{2^{x+8}}(-4x)} \leq \frac{1}{\log_2 \log_{\frac{1}{2}} 2^x}.$$

$$1161. \log_3((5^{-x^2} - 7)(5^{-x^2+9} - 1)) + \log_3 \frac{5^{-x^2} - 7}{5^{-x^2+9} - 1} - \log_3(5^{2-x^2} - 1)^2 > 0.$$

$$1162. \log_7 \frac{3^{-x^2} - 8}{3^{26-x^2} - 3} + \log_7((3^{-x^2} - 8)(3^{26-x^2} - 3)) > \log_7(3^{3-x^2} - 1)^2.$$

$$1163. \frac{\log_{4^{x-5}} 64}{\log_{4^{x-5}}(-256x)} \leq \frac{1}{\log_4 \log_{\frac{1}{4}} 4^x}.$$

$$1164. \frac{\log_{2^{x+4}} 8}{\log_{2^{x+4}}(-16x)} \leq \frac{1}{\log_2 \log_{\frac{1}{3}} 3^x}.$$

$$1165. \log_2 \left((2^{-x^2} - 4)(2^{-x^2+1} - 1) \right) - \log_2 \frac{2^{-x^2} - 4}{2^{-x^2+1} - 1} \geq \log_2 (2^{5-x^2} - 8)^2.$$

$$1166. \log_{0,5} \left((2^{-x^2} - 8)(2^{-x^2+2} - 1) \right) - \log_{0,5} \frac{2^{-x^2+2} - 1}{2^{-x^2} - 8} \geq \\ \geq \log_{0,5} (2^{1-x^2} - 2)^2.$$

$$1167. \log_5^2(x-8) - 6 \log_5(\sqrt{x-8}) \geq 4 - 25(x-8) \cdot (\log_5(x-8) - 4).$$

$$1168. \log_3^2(x-2) + 3(x-2) \cdot (2 \log_3 \sqrt{x-2} + 3) \geq 7 \log_3(x-2) + 30.$$

$$1169. 7^{18} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{5\sqrt{x}} > 1.$$

$$1170. 5^{33} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{x}} > 1.$$

$$1171. \frac{2^{2|x-3|} + 4}{5} < 2^{|x-3|}.$$

$$1172. \frac{5^{2|x+1|} + 5}{6} < 5^{|x+1|}.$$

$$1173. \log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1}.$$

$$1174. \log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}.$$

$$1175. 3^{2x} - 2^{x+\frac{3}{2}} \geq 2^{x+\frac{5}{2}} + 9^{x-1}.$$

$$1176. 5^{x+\frac{2}{3}} - 8^x \geq 2^x \cdot 4^{x-1} + 5^{x-\frac{1}{3}}.$$

$$1177. \log_{|2x+3|}(x^2 - 10x + 9) \geq 2.$$

$$1178. \log_{|3x+2|}(x^2 - 5x + 4) \geq 2.$$

$$1179. 4 \log_{x+1}(1 - x^2) - \frac{1}{4} \log_{x+1}^2(x-1)^4 \geq 5.$$

$$1180. 2 \log_{x+2}(4 - x^2) - \frac{1}{4} \log_{x+2}^2(x-2)^2 \geq 3.$$

$$1181. 5 \log_{11}(x^2 - x - 6) \leq 6 + \log_{11} \frac{(x-3)^5}{x+2}.$$

$$1182. 7 \log_9(x^2 + 3x - 10) \leq 8 + \log_9 \frac{(x-2)^7}{x+5}.$$

$$1183. \frac{\log_2(x^2 - 5x)}{\log_2(x^2)} \leq 1.$$

$$1184. \log_{x^2}(x-5)^2 + \log_{(x-5)^2} x^2 \leq 2.$$

$$1185. \log_{\frac{1}{5}} \left(7^{1+\log_{35} x} - \frac{1}{5^{1+\log_{35} x}} \right) \geq \log_{35} x - 1.$$

$$1186. \log_{\frac{1}{2}} \left(3^{1+\log_6 x} - \frac{1}{2^{1+\log_6 x}} \right) \geq 1 + \log_6 x.$$

Решите систему неравенств (1187–1188):

$$1187. \begin{cases} 3^{2(x-2)} - 4 \cdot 3^{x-2} + 3 \geq 0, \\ \log_{16} 2^x < 1. \end{cases}$$

$$1188. \begin{cases} 2^{2(3-x)} + 3 \cdot 2^{3-x} - 4 \leq 0, \\ \log_{81} 3^x < 1. \end{cases}$$

Решите неравенство (1189–1203):

$$1189. \log_{(x-4)}^3(x+4) - \frac{4}{9} \log_{(x-4)}^2(x+4)^3 + 5 \log_{(x-4)}(x^2 - 16) > 7.$$

$$1190. \frac{1}{27} \log_{(x+2)}^3(x-2)^3 - \frac{1}{5} \log_{(x+2)}^2(x-2)^5 + 8 \log_{(x+2)}(x^2 - 4) < 12.$$

$$1191. \frac{\log_{x+2}(x-2) + 1}{\log_{x+2}^2(x-2) + 1} \cdot (\log_{x+2}(x-2) + \log_{x-2}(x+2)) \geq \\ \geq \log_{x^2-4}(x^2 + 4x + 4).$$

$$1192. \frac{\log_{x+3}(x-3) + 2}{\log_{x+3}^2(x-3) + 2} \cdot (\log_{x+3}(x-3) + 2 \log_{x-3}(x+3)) \geq \\ \geq 1,5 \log_{x^2-9}(x^2 + 6x + 9).$$

$$1193. \frac{x^2 - 4x + 3}{3 \cdot 25^x + 5 \cdot 3^x - 5^x \cdot 15^x - 15} \geq 0.$$

$$1194. \frac{6^x - 3 \cdot 2^x - 0,5 \cdot 3^x + 1,5}{x^2 + 3x + 2} \leq 0.$$

$$1195. 3^{x^2+2x} - 9^{x+2} - 3^{x^2} \cdot 2^x + 81 \cdot 2^x \geq 0.$$

$$1196. 7^{x^2+1} - 7^{2x+1} - 5^x \cdot 7^{x^2-2x} \cdot 7 + 7 \cdot 5^x \leq 0.$$

$$1197. \log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0.$$

$$1198. \log_{0,5}(x-3) - \log_{0,5}(x+3) + \log_{\frac{x-3}{x+3}} 2 > 0.$$

$$1199. \frac{1}{4} x^{2+\log_2 x} - 2 \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4 \leq 0.$$

$$1200. \frac{1}{81} x^{3+\log_3 x} - 2 \log_3^2 x - 6 \log_3 x + 7 \leq 0.$$

$$1201. \log_5 \left(\frac{81x^2 - 2 \cdot 3^{2x^2} + 4}{4 \cdot 2^{2x^2} - 2^{2+x^2} + 4} \right) + 3^{-\log_3(2 \cdot 2^{x^2} - 1)} > 2^{-\log_2(3^{2x^2} - 1)}.$$

$$1202. \log_{0,5} \frac{4^{|x|+1} - 4 \cdot 2^{|x|+1} + 5}{(2^{\sqrt{x}+3} - 2)^2 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 2^{|x|} - 1} > (8 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1)^{-1}.$$

$$1203. \log_{\frac{1}{3}}((x+2)(x+4)) + \log_3(x+4) > -3 \log_{27} 13.$$

Решите систему неравенств (1204–1205):

$$1204. \begin{cases} \log_3^2(x-5)^2 - 4 \log_3(15-3x) \leq 4, \\ 4^x - 2^{x+4} \leq 6 \cdot 2^x + 75. \end{cases}$$

$$1205. \begin{cases} 4^x - 2^{x+1} \leq 2^x + 10, \\ \log_2(8-x^2) + \log_2(x^2-20x+100) \geq 2 \log_2(10-x). \end{cases}$$

Решите неравенство (1206–1207):

$$1206. \frac{1}{1 + \log_3 x} + \log_x 27 \geq \frac{11}{6}.$$

$$1207. \log_{5-2x}(5+8x-4x^2) + \log_{2x+1}(25-20x+4x^2) \leq 4.$$

Решите систему неравенств (1208–1211):

$$1208. \begin{cases} 9^x \geq \sqrt{3} \cdot 3^x + 18, \\ \log_2(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) \leq 1 + \log_2(x-1). \end{cases}$$

$$1209. \begin{cases} 12^x \cdot 4^x + \frac{1}{12} > 4^{2x-1} + 3^{x-1}, \\ \log_{1-x}(x^2 - 5x + 4) \geq 2. \end{cases}$$

$$1210. \begin{cases} 9^x \leq 3^{x+2} - 20, \\ 3 \cdot 2^{1+x\sqrt{2}} \geq 4^{x\sqrt{2}} + 8. \end{cases}$$

$$1211. \begin{cases} 4^{x-0,5} + 15 < 11 \cdot 2^{x-1}, \\ 5^{\frac{x\sqrt{6}}{3}} + 125 < 30 \cdot 5^{\frac{x\sqrt{6}}{6}}. \end{cases}$$

7.2.2. Рациональные неравенства

Решите неравенство (1212–1213):

$$1212. 3x(x-1) + 9 \geq \frac{8}{x+1} - \frac{5}{x-2}.$$

$$1213. x(x+1) + 4 < \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x-1}.$$

7.2.3. Иррациональные неравенства

Решите неравенство (1214–1217):

$$1214. \frac{\sqrt{x^2 + 0,5x}}{x} + 2 \leq \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{-x}.$$

$$1215. \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{2x} + 1,5 \leq \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{-2x}.$$

$$1216. \sqrt{\frac{x^3 + 8}{x}} - x \geq 2.$$

$$1217. \sqrt{(x-1)^2 + \frac{8}{x-1}} \leq x + 1.$$

7.2.4. Неравенства, содержащие модуль

Решите систему неравенств (1218–1219):

$$1218. \begin{cases} \frac{1}{|(x-1)(x-2)|} + \frac{1}{|(x-2)(x-3)|} + \frac{1}{|(x-3)(x-4)|} \geq 0,3, \\ |2x-5| \geq 3. \end{cases}$$

$$1219. \begin{cases} \frac{1}{|(x-2)(x-3)|} + \frac{1}{|(x-3)(x-4)|} + \frac{1}{|(x-4)(x-5)|} \geq \frac{3}{40}, \\ |2x-7| \geq 3. \end{cases}$$

Решите неравенство (1220–1221):

$$1220. \frac{4}{|x+2|-2} \geq |x|.$$

$$1221. \frac{3}{|x+2|-1} \geq |x+1|.$$

7.2.5. Комбинированные неравенства

1222. Найдите все значения x , при каждом из которых выполняются оба неравенства $\frac{(\sin x - 2)\sqrt{16 - x^2}}{\log_2(x+1) - 4} > 0$ и $\frac{\log_3^2(x+2) - 2 \log_3(x+2)}{3\sqrt{x-2} - x} \leq 0$ и

все найденные значения x удовлетворяют неравенству $21x - 2x^2 - 40 \geq 0$.

1223. Найдите все значения x , при которых наибольшее из двух чисел $p = \frac{\log_3(3^x - 1)}{x - 1}$ и $q = 27^{2x} - 3 \cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}} + 1$ не меньше 1.

Решите неравенство (1224–1225):

$$1224. \frac{2\sqrt{x-1} - 3^{\log_3 \frac{x}{3}}}{|x+1| - |x-13|} \geq 0.$$

$$1225. \frac{5^{\log_{25} x} - 0,5^{-\sqrt{x-3}}}{|x+2| - |2x-23|} \leq 0.$$

Решите систему неравенств (1226–1227):

$$1226. \begin{cases} \frac{|3x+175|(x-22)(5-x)}{\sqrt[4]{17x-x^2-42}} \geq 0, \\ \frac{\sqrt{11-x} \cdot \sqrt[6]{(11-x)^3}}{|11-x|} \geq 0. \end{cases}$$

$$1227. \begin{cases} \frac{|7x - 123|(x + 15)(x - 8)}{-\sqrt[4]{x^2 + 3x - 28}} \geq 0, \\ \frac{\sqrt{x + 9} \cdot \sqrt[6]{(x + 9)^3}}{|x + 9|} \geq 0. \end{cases}$$

Решите неравенство (1228–1236):

$$1228. \sqrt{x - 2} \cdot \log_{|x-3|}(x^2 + x - 5) \leq 0.$$

$$1229. \frac{\log_{|x-2|}(3x + 3 - x^2)}{\sqrt{3x - x^2}} \leq 0.$$

$$1230. \sqrt{\log_{11}(x^2 - 17x + 67)} \cdot (17^x \log_{17} x + 17 - 17 \log_{17} x - 17^x) \leq 0.$$

$$1231. \sqrt{\log_5(x^2 - 5x + 7)} \cdot (9^x \log_9 x + 9 - 9 \log_9 x - 9^x) \leq 0.$$

$$1232. \frac{\log_7(2x + 15)}{\log_7(x + 6)} \geq \frac{2 \log_{3^{x-2}} |x|}{\log_{3^{x-2}}(x + 6)}.$$

$$1233. 9^{(x+5)^2(x-7)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-35)^3}} \leq 1.$$

$$1234. \frac{19^{x-1} \log_{19} x + 1 - \log_{19} x - 19^{x-1}}{\sqrt{\log_{13}(x^2 - 19x + 49)}} \leq 0.$$

$$1235. \frac{3^x + 7 \cdot 3^{2-x} - 16}{\sqrt{16^x - 121}} > 0.$$

$$1236. \frac{4^x - 7 - 2^{3+x} + 7 \cdot 2^{3-x}}{\sqrt{3^x - 4}} \leq 0.$$

Решите систему неравенств (1237–1240):

$$1237. \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{2} \log_2 x}}{4} \geq 2^{\frac{1}{4} (\log_2 x)^2}, \\ \frac{27x^2 + 6x - 1}{3x - 8} > 0. \end{cases}$$

$$1238. \begin{cases} \frac{3x^2 - 2,6x + \frac{23}{150}}{x\sqrt{2} - \sqrt{3}} \geq 0, \\ (x^2 - 1)^{2+x} > (x^2 - 1)^{5x-3}. \end{cases}$$

$$1239. \begin{cases} \operatorname{arctg} 4x > 1 \\ \log_2(7^x + 5) + \log_{7^x+5} 8 \leq 4. \end{cases}$$

$$1240. \begin{cases} 10 \operatorname{arccctg} \frac{4\sqrt{5}x}{15} \geq 7, \\ \log_3(5^x + 16) - 6 \log_{5^x+16} 3 > 1. \end{cases}$$

Повышенный уровень 3 (С4, С5)

§ 8. Алгебра и начала анализа (С5)

8.1. Уравнения. Системы уравнений

8.1.1. Логарифмические и показательные уравнения

1241. Найдите все решения уравнения $k \log_3 x^2 + 3k \log_x 3 + \log_x 9 = 2k + 8$ для тех значений параметра k , при которых уравнение имеет два корня, максимальный из которых в 3 раза больше минимального.

1242. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $\sqrt{5p-1} \log_3 x + p \log_x 9 - 5 \log_x 3 - 7 + 5p = 0$ имеет ровно $5p^2 - 6p + 2$ различных корней.

8.1.2. Тригонометрические уравнения

1243. Найдите наибольшее целое отрицательное значение m , при котором уравнение $\sin^2 x - 5m = 4 - 2m \sin^2 x$ не имеет корней.

8.1.3. Рациональные уравнения

1244. При каких значениях параметра p графики функций $y = x^{10} - px^2 + 4x + p$ и $y = x^{10} - 4x^2 + px$ имеют ровно две точки пересечения?

1245. Найдите все значения параметра a , при которых число различных корней уравнения $\frac{3a+8-(a-1)x}{x+1} = a^2+2a+3$ равно числу различных

корней уравнения $(a-3)x^2 - (a-2)x - 1 = 0$.

1246. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$\frac{6+a}{3+x} - \frac{6-a}{3-x} = \frac{6}{a}$ имеет единственное решение.

1247. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнение $x^3 - 5x^2 + 7x = a$ имеет ровно 2 различных корня, которые будут являться корнями уравнения $x^3 - 13x + b = 0$.

1248. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 - (3a-1)x + 2a^2 - a \leq 0, \\ ax = 1 \end{cases}$ имеет решение?

1249. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 - (4a-1)x + 3a^2 - a < 0, \\ ax = 4 \end{cases}$ имеет решение?

1250. Найдите все значения a , при которых уравнение $x^3 - 2ax^2 + a^2x - 3 = 0$ имеет ровно 2 корня.

1251. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\frac{x^3}{a^2} - \frac{2x^2}{a} + x - 3 = 0 \text{ имеет ровно 2 корня.}$$

1252. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ y^2 = (x-3)^2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение?}$$

1253. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \\ y^2 = (x-3)^2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение?}$$

8.1.4. Иррациональные уравнения

1254. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{16-x} + \sqrt{a^2-x} = 16+a \text{ имеет единственное решение.}$$

1255. При каких значениях m уравнение $2\sqrt{1-m(x+2)} = x+4$ имеет единственный корень?

1256. При каких значениях p уравнение $3\sqrt{2x+p} = 1+3x$ имеет два различных корня?

1257. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{8x^2-9a} = a-3x$ имеет ровно один корень.

8.1.5. Уравнения, содержащие модуль

1258. Найдите сумму всех целых значений параметра p , меньших 7, при которых график функции $y = -px^4 + |p-4|x^2$ пересекается с линией $y = 0$ ровно в трех точках.

1259. Найдите все значения параметра a , при котором уравнение

$$\sqrt{ax^3} - |a^3 + 2 - |2a^2 + a||x = 0 \text{ имеет ровно один корень.}$$

1260. Найдите все значения параметра a , при котором уравнение

$$\sqrt{ax^6} - |a^3 + 4 - |4a + a^2||x^4 = 0 \text{ имеет ровно один корень.}$$

1261. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a(a+3) - a|x-4| = (8x-x^2-10) \cdot |x-4| - (8x-x^2-10)(a+3)$ имеет ровно 2 корня.

1262. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a(a+2) - a|x-2| = (4x-x^2-1) \cdot |x-2| - (4x-x^2-1)(a+2)$ имеет ровно 2 корня.

1263. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x+a| + ||x-3|-4| = 1 \text{ имеет ровно два корня.}$$

1264. Найдите все значения b , при каждом из которых уравнение

$$|x-b| + ||x+2|-5| = 2 \text{ имеет ровно два корня.}$$

1265. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $8x - |6x - |x + a|| = 16|x - 3|$ имеет хотя бы один корень.

1266. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $5x - |4x + |3x - a|| = 13|x - 2|$ имеет хотя бы один корень.

1267. Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} a(y - 1) = 2 - 2|x|, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ имеет ровно 3 различных решения.

1268. Найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y + a^2 = |x + 1| \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

1269. Найдите все значения параметра b , при которых система $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = b, \\ b + 2y = |x - 1| \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

1270. Найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = a^2, \\ |x^2 - 3| = y \end{cases}$ имеет более 4 решений.

1271. Найдите все положительные значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + (y + a - 8)^2 = a^2, \\ |4 - x^2| = y \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

1272. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - 1| + x^2 + (a - 3)x + 6 = a$ имеет решение.

8.1.6. Комбинированные уравнения

1273. При каких значениях параметра a один из корней уравнения

$$9^{4x^2 - 4ax - 6a - 8} - 8 = \left| \frac{a + 3}{2x - a} \right| \text{ принадлежит отрезку } [-1; 1]?$$

1274. Даны два уравнения: $\frac{x^4 - 2(3 + p)x + (2p^2 - 3p + 4)}{x^2 + p} = x^2 - p + 17$

и $\frac{p + 2}{3^{x-300}} = \frac{\sqrt{x+3}}{p+2}$. Значение параметра p выбирается таким образом, что число различных корней второго уравнения в сумме с числом $p + 1$ даёт число различных корней первого уравнения. Найдите все значения параметра $p \neq -2$, удовлетворяющие условию, и сумму корней первого уравнения при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1275. Даны два уравнения: $\sqrt{4(p+1)x - 8p - 12} = 2x + p - 1$ и

$\left(2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}\right)^x = 21 - 6x$. Значение параметра p выбирается так, что оба уравнения имеют смысл и число $0,5(p + 2)$ равно произведению числа

различных корней первого уравнения и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

1276. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + xy = 7, \\ x + \sqrt{\frac{y-1}{x^2}} = 1 + \sqrt{y-1}. \end{cases}$$

1277. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + xy + 9x + y = 0, \\ \left(\frac{(x+1)^2}{y+5}\right)^{-0,5} = \sqrt{y+5} - x. \end{cases}$$

Решите систему уравнений (1278–1281):

1278.
$$\begin{cases} 3^{\sin^2 \pi x} + \sqrt{1 + \cos \pi y} = 1, \\ (x^3 - 4xy + y^2 - y - 2x + 1) \log_3(11 + 41x - 12x^2) = 0. \end{cases}$$

1279.
$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{2} + \sqrt{1 - \cos \pi y} = 0, \\ (y^3 - 2xy + x^2 - 2x + 1) \sqrt{17y + 10 - 6y^2} = 0. \end{cases}$$

1280.
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{z-y} = 1 + \sqrt{2y-y^2}. \end{cases}$$

1281.
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y + 1 = 0, \\ \sqrt{y+z} + z = \sqrt{2x+z} + \sqrt{3+2y-y^2}. \end{cases}$$

1282. Найдите число решений системы

$$\begin{cases} y = 6 + \sqrt{4x - x^2}, \\ x^2 y \cdot 2^{3x} + 64(x+1)^3 = (2^x(x+1))^3 + 64x^2 y. \end{cases}$$

1283. Сколько решений имеет система уравнений?

$$\begin{cases} 3x^2 - 4 \cdot 3^{y+1}(x-1) = 3x, \\ x^3 + y + 3 = 0. \end{cases}$$

1284. Сколько решений имеет следующая система уравнений?

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x \cdot 4^y + 4x = 3 \cdot 4^{y+1}, \\ \frac{1}{(x+3)^3} - |y-2| = 0. \end{cases}$$

1285. Найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} y^2(x+1)^2 + 1 = x, \\ 0,5y + \frac{\log_2(x^2 - 4x + 4)}{2y} = \frac{\lg(4x-8)}{\lg 4}. \end{cases}$$

1286. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ x + y = 1 - \sqrt{4xy + 3y - 7x - 5}. \end{cases}$$

1287. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 4x^3 + 9x^2 - 12x + 2 = 0, \\ \frac{y}{x+1} + 5 = 2^{x-y} \sqrt{x^2(x+5) + 4(2x+1)} - xy \end{cases}$$

имеет два решения.

1288. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x^{-y} \sqrt{4x^3 - 3x - 1} = xy - 1, \\ 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1289. Определите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 2y^2 - 3x \cdot y + 2 \cdot 3^x = 0, \\ 9 \cdot 27^{x-1} - 2 \cdot 9^x + 3^{x+1} = 5 - y^2. \end{cases}$$

1290. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{\cos x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos y}, \\ \log_2(\sin x - \cos y) + \log_2(\sin x + \cos y) = -1. \end{cases}$$

1291. Найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0, \\ 3 + (9 - 2x)^{x-y} = y + \sqrt{x^3 - x^2 - 5x - 3}. \end{cases}$$

1292. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (\sqrt{2})^{\cos x} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sin y}, \\ \log_{\sqrt{2}}(\sin x + \cos y) - \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos x - \sin y) = 2. \end{cases}$$

1293. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0, \\ y^2 - (\operatorname{tg} x + \sqrt{8 - x^2})y + \sqrt{8 - x^2} \cdot \operatorname{tg} x = 0. \end{cases}$$

Решите уравнение (1294–1296):

1294. $f(g(x) + 1) - g(f(x) + 3) = 6$, если $f(x) = x^4 - 32x + 50$,

$$g(x) = \begin{cases} -4, & x \geq 5, \\ \frac{2}{5-x} + \log_8(3x-4), & x < 5. \end{cases}$$

1295. $f(g(x)) + g(1 - f(x)) = f(x) + 2$, если известно, что $f(x) = \frac{x+8}{x^2+2}$

$$\text{и } g(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 10, & x \leq -4, \\ 2 - x, & -4 < x \leq 2, \\ \frac{x+1}{2} + \log_3(x+6) - 1, & x > 2. \end{cases}$$

1296. $g(f(x) - 44) + f(g(x)) = 8$, если известно, что $f(x) = -x^6 + 32x + 5$

$$\text{и } g(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 1, \\ \log_2 x + (x-1)^3, & x > 1. \end{cases}$$

1297. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{40} верны условия $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots, 39$. Найдите $a_5 + a_8 + a_{11}$, если известно, что $a_{40} = 1$ и

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x < 3, \\ 3 \cos x - 2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

1298. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{99} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 98$. Найдите $a_{33} + a_{40}$, если известно, что $a_{99} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+8}{x-2}, & \text{если } x < 2, \\ \sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}} + \sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}}, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

1299. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{26} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 25$. Найдите $a_3 + a_4 + a_5$, если известно, что $a_{26} = 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cos \frac{\pi x}{12} - 2, & \text{если } x < 0, \\ \frac{32}{3x+16} - 6, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

1300. Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots, 29$. Найдите $7a_9 - 2a_{17}$, если известно, что $a_{30} = 2$, а

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \frac{8}{x+2}, & \text{если } x < 3, \\ 3 + \frac{x^2}{x+1} + \log_3 \frac{x}{2}, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Решите уравнение (1301–1304):

1301. $f(g(x)) + g(f(x) + f(-x)) = 5$, где $f(x) = 3^x + 2x - \ln 5$,

$$g(x) = \begin{cases} \ln 5, & x \geq -2, \\ 5^{x^2+2x-2} - 4, & x < -2. \end{cases}$$

1302. $\frac{5x^3}{5x^3 - 7x^{\frac{3}{2}} + 6} + \frac{2x^3}{5x^3 - x^{\frac{3}{2}} + 6} = x^{\frac{3}{2}}$.

1303. $2x^6 + \cos(2x^2 + x) = \cos x^3 + 2^{(2x^2+x)^2}$.

1304. $x^{12} + 82 \cos(10x - 21) = 82 \cos(x^2) + (10x - 21)^6$.

1305. Найдите значения a , при которых уравнение

$$x^4(x^2 + \sqrt{a^2 - a - 1}) + \sqrt{(8 - a)^2} + \sqrt{(27 + a)^2} - \sqrt{(8 - a)(27 + a)} = 21$$

имеет единственное решение.

1306. Известно, что уравнение $px^2 + (p + 3)x + 4 = 0$ имеет хотя бы один корень. Найдите все значения параметра p , при которых число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{x - 1}{16 - p} = \frac{1}{\sqrt{x - 5} + 4}.$$

1307. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 \sin 2 = 0$$

имеет единственное решение?

1308. При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4 - 8b \cos(\cos x) - 9x^2 = 0$$

имеет единственное решение?

1309. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xyz = 10, \\ \lg^2 x + \lg^2 y + \lg^2 z = 8, 5, \\ \lg x \cdot \lg y \cdot \lg z = -4, 5. \end{cases}$$

1310. При каких значениях параметра k уравнение $\sqrt[4]{x^3} = x + |x - k|$ имеет ровно один корень.

1311. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - \frac{5a}{2 \cos x - 3} + 10 = 0$$

имеет единственное решение?

1312. При каких значениях параметра a уравнение

$$15 + 7x^2 - \frac{3 \sin \cos x}{4a} = 0$$

имеет единственное решение?

1313. При каких положительных значениях параметра a модуль разности корней уравнения $ax^2 + 2x - 2,25 = 0$ не больше расстояния между точками экстремума функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6ax + 13a^2$?

1314. При каких положительных значениях параметра a расстояние между точками экстремума функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9ax + 4a^2$ не превосходит удвоенного модуля разности корней уравнения $ax^2 + 2\sqrt{6}x - 2 = 0$?

1315. Найдите все значения a , при которых каждое из уравнений

$$\sqrt{41 + 9 \cos x} - a \cos x = 0 \text{ и } |x - a| + 7|x + 2| + 5x = 0$$

имеет хотя бы один корень.

1316. Найдите все значения a , при которых ни одно из уравнений

$$\sqrt{145 + 24 \sin x} + a \sin x = 0 \text{ и } 3x - 9|x - 1| - |x + a| = 0$$

не имеет решений.

1317. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = ax + 6 + |-x^2 - 6x - 5|$ больше 2.

1318. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + 5 + |x^2 + 6x + 5|$ меньше 1.

1319. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 5|x - a^2| - 13x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

1320. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 + 5|x - a^2| - 13x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

1321. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 15|$ меньше 1.

1322. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 15|$ на отрезке $[2,75; 5,25]$ меньше 1.

1323. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

1324. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$ имеет хотя бы одну точку минимума.

1325. Найдите все значения a , при которых уравнение $(3a^2 - 8x(2 - x)^3)(\sin x + \sqrt{3} \cos x + a^2 - 3a + 4) = 0$ имеет корни и все корни неотрицательны.

1326. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(\sin^2 x - 5 \sin x - 2a(\sin x - 3) + 6)(\sqrt{2a} + 8x\sqrt{2x - 2x^2}) = 0$ имеет корни.

1327. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[4; 16]$ значение выражения $\log_2^2 x + 2a$ не больше значения выражения $(a + 2) \log_2 x$.

1328. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $[3; 9]$ значение выражения $\log_3^2 x + a$ не больше значения выражения $(a + 1) \log_3 x$.

1329. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{x - a}{x - 6a} < 0$ выполняется при всех значениях x , таких, что $2 \leq x \leq 3$.

1330. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{x - 2a}{x + a} < 0$ выполняется при всех значениях x , таких, что $-1 \leq x \leq 1$.

1331. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2} \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

1332. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} 2^x(y + 1)(1 - y \cdot 2^x) = a^3, \\ (1 + 2^x)(1 - y \cdot 2^x) = a \end{cases}$$
 не имеет решений?

1333. Найдите значения параметра a , при которых разрешимо неравенство $\frac{\log_{\frac{4a-7}{4}} x^2 + \log_{\frac{4a-7}{4}} x^4 \cdot \log_a x + \log_a^2 x}{(x-1)^2} \leq 0$.

1334. Найдите значения параметра a , при которых разрешимо неравенство $\frac{\log_{\frac{a+1}{108}} x^3 + \log_{\frac{a+1}{108}} x^6 \cdot \log_a x + \log_a^2 x}{(x-1)^2} \leq 0$.

1335. Решите уравнение $\frac{1+4x-\sqrt{6x+15x^2}}{1+4x+\sqrt{6x+15x^2}} = 8a^3 \frac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}$.

1336. Решите уравнение $\frac{1+5x-\sqrt{10x+25x^2}}{1+5x+\sqrt{10x+25x^2}} = \frac{1}{8} c^3 \frac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x}}$.

1337. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнения $2x^2 - ax - 8 = 0$ и $x^3 + bx - 16 = 0$ имеют два общих корня, и найдите эти корни.

1338. Найдите все значения параметров a и b , при которых уравнения $3x^3 + bx^2 - 25 = 0$ и $x^3 - ax + 15 = 0$ имеют два общих корня, и найдите эти корни.

1339. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $4x^2 - 4x - a^2 + 4a \leq 3$ удовлетворяет неравенству $ax(a-2+x) \geq 0$.

1340. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (10+3a)x + 2a^2 + 12a + 16 \leq 0$ удовлетворяет неравенству $ax(x-8-a) \leq 0$.

1341. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $e^{x-a-2} + x^2 \leq a - 5x$ имеет единственное решение.

1342. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых неравенство $e^{x+b+3} + x^2 \leq b - 3x$ имеет единственное решение.

1343. Найдите все значения a , при которых неравенство $\frac{x^2 + 4(a-1)x + 4a^2}{5 - (\cos \sqrt{15-2a-a^2} + 4)} > 0$ выполняется для всех $x \in (-2; 1)$.

1344. Найдите все значения a , при которых неравенство $\frac{x^2 + 2(a-1)x + a^2}{3 - (\cos \sqrt{6-a-a^2} + 2)} > 0$ выполняется для всех $x \in (-1; 1)$.

1345. Найдите все положительные значения a , при которых система $\begin{cases} (|x|-7)^2 + (y-2)^2 = 9, \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1346. Найдите все положительные значения a , при которых система

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (|y|-8)^2 = 16, \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = a^2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

1347. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = |x-a| + 2 \end{cases} \text{ имеет ровно три различных решения.}$$

1348. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\text{уравнений } \begin{cases} |y| = 4 - (x+5)^2, \\ (x+5)^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

1349. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|x+1|} + \sqrt{|y+2|} = 2, \\ x^2 + 2x + y^2 + 4y = 25a^2 - 5 \end{cases} \text{ имеет ровно 4 решения.}$$

1350. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|x-3|} + \sqrt{|y-1|} = 4, \\ x^2 - 6x + y^2 - 2y = 16a^2 - 10 \end{cases} \text{ имеет ровно 4 решения.}$$

1351. Дан многочлен $f(x) = x^2 + |m-2|x + 5 - 2m$. Известно, что

$$g_1(x) = x^2 f\left(1 + \frac{1}{x}\right), g_2(x) = x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Найдите все значения параметра m , при которых число корней хотя бы двух из уравнений $f(x) = 0$, $g_1(x) = 0$ и $g_2(x) = 0$ будет различным.

1352. Дан многочлен $f(x) = x^2 - |3-m|x - m + 4$. Известно, что

$$g_1(x) = (x-1)^2 f\left(\frac{1}{x-1}\right) \text{ и } g_2(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Найдите все значения параметра m , при которых число корней хотя бы двух из уравнений $f(x) = 0$, $g_1(x) = 0$ и $g_2(x) = 0$ будет различным.

1353. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(x^2 - ax + 5x - 2a^2 - a + 6) > 0, \\ x^2 + a^2 = 36 \end{cases} \text{ имеет решение.}$$

1354. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x+a)(2x^2 - 5ax - x - 3a^2 - 11a - 6) < 0, \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases} \text{ имеет решение.}$$

1355. Для каждого значения a решите уравнение

$$25a^2 + \log_3^2 x + \arccos(x-2) - (5a-2)\log_3 x^2 + 4 = 20a.$$

1356. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(3-x-y) + 2 = \log_2(8-3x-5y), \\ (x-a)^2 = y-x+a+9 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

1357. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x+3| + a = \sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня.

1358. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - 2| + a = \sqrt{|x|}$ имеет ровно два корня.

1359. При каких значениях a уравнение $x(x - 2a) + \cos(\pi x + a) \sin a + 1 = \sin(\pi x + a) \cos a - a^2$ имеет только один корень?

1360. При каких значениях b уравнение $x(x + 2b) - \cos(\pi x + b) \cos b + 1 = \sin(\pi x + b) \sin b - b^2$ имеет только один корень?

1361. При каких значениях параметра a уравнение $\pi^2(x - 1)^2 + 4a \cos(2\pi x) + 4a^4 = 0$ имеет единственное решение?

1362. При каких значениях параметра p существует хотя бы одно число x из отрезка $[2; 3]$, удовлетворяющее условию

$$\log_3(4 - |\sin px|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)?$$

8.2. Неравенства

8.2.1. Логарифмические и показательные неравенства

1363. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $\log_x(x - a) > 2$ содержит точку $x = -a$.

8.2.2. Рациональные неравенства

1364. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $ax^2 + 3a > 4x$ не содержит точку $x = a$.

1365. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x^2 + x(a - 6) - 5(a + 4) \geq 0, \\ (a^2 + x^2 - 4)(a^2 + x^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \text{ имеет решения.}$$

1366. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a^2 + x^2 - 9)(a^2 + x^2 - 4x - 5) \leq 0, \\ x^2 + (a + 5)x + 4a + 4 \leq 0 \end{cases} \text{ имеет решение.}$$

8.2.3. Иррациональные неравенства

1367. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $2 + \sqrt{x^2 + ax} > x$ содержит отрезок $[4; 7]$?

1368. Найдите все значения параметра a , для которых при каждом x из промежутка $(1; 5]$ значение выражения $x^2 - 3x + 3$ не равно значению выражения $a\sqrt{x^2 - 3x + 6}$.

8.2.4. Неравенства, содержащие модуль

1369. При каких значениях параметра a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

8.2.5. Комбинированные неравенства

1370. Найдите наибольшее целое a , такое, что между числами a и $3 + 3^{a-2}$ есть решения неравенства

$\sqrt{\log_7(x^2 - 7x + 13)}(12^x \log_{12} x + 12 - 12 \log_{12} x - 12^x) \leq 0$, а сами числа a и $3 + 3^{a-2}$ решениями не являются.

1371. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$\frac{3^x - 6a + 3}{a - 2} + \frac{12}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq \frac{10a + 2}{3 - a - 3^x}$ является отрезком длиной меньше 1.

1372. Найдите все значения a , для каждого из которых оба числа $\frac{1+a}{1-a}$ и

$\frac{a+1}{a-1} + 2\frac{a+1}{(a-1)^2}$ являются решением неравенства

$\log_{3-\sqrt{x}} \log_{0,5}(0,5|x-5| - 1,5) < 0$.

1373. Найдите все значения a , при каждом из которых все решения неравенства $|x - a| + |y| \leq 2$ являются решениями неравенства

$(y + 3)(y - x + 2)(x^2 - 8x + 12 - y) \geq 0$.

1374. Найдите все значения a , при каждом из которых все решения неравенства $|x - a| + 2|y - 3| \leq 1,5$ являются решениями неравенства

$(xy - 6)(x + 1)(2y - x - 4) \leq 0$.

1375. Найдите, при каких значениях параметра a имеет решение система

$$\begin{cases} x^2 - 4x + a^2 - 21 = 0, \\ x^2 - (4a - 3)x + 3a^2 - 3a \leq 0, \\ |x| + |a| \geq 4. \end{cases}$$

1376. Найдите, при каких значениях параметра a имеет решение система

$$\begin{cases} x^2 + 6x + a^2 - 40 = 0, \\ 2x^2 + (9a - 8)x + 4a^2 - 4a \leq 0, \\ |x| + |a| \geq 6. \end{cases}$$

1377. При каких значениях a значение выражения $(\sin x)^{\log_2(\sin x) - |a|}$ больше значения выражения $2^{\log_4(1 - \cos^2 x) + a(a-2)}$ при всех допустимых значениях x ?

1378. Для каждого допустимого значения параметра a решите неравенство $2 \log_{\sin a}(x - 2) \leq \log_{\sin a}(5x + 8)$.

1379. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ 2^{xy} = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1380. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 6(x+y) + y^2 + 9 \leq 0, \\ 2^{(x-3)(y-3)} = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

8.3. Функции

8.3.1. Область определения функции

1381. Найдите все значения a , при которых область определения функции $y = \left(x^{(2x+3) \log_x a} + (\sqrt[4]{x})^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x \log_x a} - a(a^5)^{-\log_2(0,25)} \right)^{-0,5}$ содержит ровно два целых числа.

1382. Найдите все значения a , при которых область определения функции $y = \left(a^x \cdot x^{(x+3) \log_x a} + a^{8+3 \log_x a} - (\sqrt[3]{x})^{9+6x \log_x a} - \sqrt{a^{22}} \right)^{-0,5}$ содержит ровно три целых числа.

1383. Найдите все положительные значения параметра a , при которых в области определения функции $y = \log_a \left(a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12} + \frac{1}{x-10} - 2} \right)$ есть однозначные натуральные числа и не более одного двузначного натурального числа.

1384. Найдите все натуральные значения параметра $n > 1$, при которых отрезок длины n является областью определения функции $y = \sqrt[n]{(5n-6-x)^3 \cdot (2x-32+3n)^{7n-5}}$.

1385. Найдите все значения a , при которых оба числа

$\log_5^2 a - \frac{12}{\log_{5a} 125} + 10$ и $\log_5 a + 2$ принадлежат области определения

функции $f(x) = \sqrt{\frac{(17x-66-x^2) \cdot 4 \log_{625} 5^{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{(x-5)^2-8}}}$.

8.3.2. Комбинированные задачи

1386. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3a(a-2)x + a$ в точке минимума больше значения функции $g(x) = x^3 - 3x^2 - 3(a^2-1)x + a + 1$ в точке максимума.

1387. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3(a-1)(3-a)x + 2a^2 - 5a + 29$ в точке минимума больше значения функции

$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6a(1-a)x + (\sqrt{(2a-1)(a-2)})^2$ в точке максимума.

1388. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{x - 2a^2 + 14a + 3} + \sqrt{x - a^2 + 2a + 21}$ не меньше 3.

1389. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{2a^2 - 8a + 16 - x} + \sqrt{3a^2 + 8a + 7 - x}$ меньше 5.

§ 9. Арифметика и алгебра (С5)

9.1. Задачи на прогрессию

9.1.1. Арифметическая прогрессия

1390. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $a|x + 2| - 4a + 1 \geq ax(x + 4) + |x + 2|$ содержит число $-4,8$ и все члены некоторой конечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 0, и отрицательной разностью.

1391. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $|\log_2(|x - 6| - a)| - a < 0$ содержит число 9,125 и все члены некоторой возрастающей конечной арифметической прогрессии с первым членом, равным 0.

1392. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ содержит все члены некоторой бесконечной арифметической прогрессии, первый член которой меньше a , а разность которой равна 225.

1393. Первый, второй и пятый члены бесконечной возрастающей арифметической прогрессии принадлежат множеству $A = (1; 3) \cup (8; 10)$, а остальные члены этой прогрессии множеству A не принадлежат. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

1394. Из всех членов возрастающей арифметической прогрессии только первый и четвертый не являются решениями неравенства $(\log_{x-3}(2x + 1))(\log_{2x+1} x^2) \geq (\log_{x-3}(3x + 1))(\log_{3x+1}(6,2x - 8,4))$. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

1395. Определите все значения параметра a , при которых не менее одного члена, но не более девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным $-|a| - 4,5$, и разностью 0,5 являются решением неравенства $5a > 4x + 2a\sqrt{5a - 4x} + 3a^2$.

1396. При каких значениях параметра $d > 0$ существует арифметическая прогрессия с разностью d , такая, что среди её членов решениями

неравенства $\left(\frac{(4^x - 5 \cdot 2^x + 4)(\log_2 x - 2)}{\log_3 x - 2}\right) \sqrt{6-x} \leq 0$ являются первый, второй, пятый, шестой члены и только они?

9.1.2. Геометрическая прогрессия

1397. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $x^2 - (a + 6)|x| + 6a \leq 0$ содержит все члены последовательности вида $a_n = -6 + b_n$, где b_n — какая-то бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом, равным 7,5, и положительным знаменателем.

1398. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $(x - 2)^2 - (a + 2)|x - 2| + 2a \leq 0$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 2,9, и положительным знаменателем.

1399. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $x(x - 10) \leq (a + 5)(|x - 5| - 5)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 9,8, и положительным знаменателем.

1400. Первый, второй и четвертый члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии принадлежат множеству $A = \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, а остальные члены прогрессии этому множеству не принадлежат. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

§ 10. Геометрия (С4)

10.1. Планиметрия

10.1.1. Вписанная и описанная окружность, треугольник

1401. В треугольнике ABC высота CH и медиана CK делят угол ACB на три равных угла. Длина отрезка CO , где O — центр вписанной окружности, равна $\frac{3\sqrt{6}}{3 + \sqrt{3}}$. Найдите площадь треугольника ABC .

1402. В треугольнике ABC высота CH и медиана CK делят угол ACB на три равных угла. Площадь треугольника ABC равна $1,5 + \sqrt{3}$. Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

1403. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом 30° .

1404. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом 30° .

1405. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 20, основание 16. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках D и E . Найдите DE .

1406. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках M и K , $MK = 8$ см. Найдите периметр треугольника.

1407. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего $\triangle ABC$, взята точка R так, что RB отличается от RC на 40. Найдите RB , если расстояние от R до точки пересечения отрезков AR и BC равно 21.

1408. В треугольник ABC со сторонами 5, 7 и 9 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны треугольника ABC . Найдите периметр отсечённого треугольника.

1409. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 15, а радиус вписанной окружности равен 6. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

1410. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются под углом 55° . Центр вписанной в треугольник BCD окружности лежит на AC . Найдите величину угла CDB , если $AB = AD$ и $\angle BAD = 110^\circ$.

1411. Во вписанном в окружность четырёхугольнике $ABCD$ угол ABC в два раза больше угла между диагоналями AC и BD . Найдите величину угла DCB , если $\angle CDB = \angle BDA = 25^\circ$.

10.1.2. Треугольник

1412. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка P , отстоящая от катетов на расстоянии $\frac{40}{11}$ и $\frac{36}{11}$. Найдите катеты AC и BC , если площадь треугольника ABC равна 30.

1413. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что отрезок MN параллелен основанию AC . Найдите высоту трапеции $AMNC$, проведённую из точки N , если $AN = 13$, $S_{AMNC} = 60$.

1414. Найдите произведение радиусов всех внеписанных окружностей треугольника со сторонами 4, 5, 6.

1415. Найдите произведение сторон треугольника, если известно, что радиусы его внеписанных окружностей равны 9, 18 и 21.

1416. Площадь треугольника ABC равна 18. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.

1417. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника, если основание треугольника 16, а боковая сторона равна 17.

1418. Высота треугольника CDE , проведённая из вершины D , в 1,4 раза больше диаметра вписанной в этот треугольник окружности. Известно, что площадь треугольника равна 84, сторона $CE = 15$. Найдите сторону CD .

1419. Дан равнобедренный треугольник ABC , где $AB = AC = 12$, $\sin \angle BAC = \frac{1}{3}$. Найдите радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

1420. Дан равнобедренный треугольник ABC , где $AB = AC = 8$. Высота, опущенная на боковую сторону, равна 4. Найдите BC .

1421. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на стороне AB выбрана точка P , а на продолжении основания за точку A — точка Q так, что $\angle BQC = \angle PCA$. Найдите площадь треугольника PQC , если площадь треугольника ABC равна 13.

1422. Основания высот треугольника со сторонами 5, 6, 7 являются вершинами другого треугольника. Найдите периметр последнего.

1423. Основания высот треугольника со сторонами 4, 8 и 10 являются вершинами другого треугольника. Найдите периметр последнего.

1424. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC , которое в 4 раза меньше периметра ABC . Из произвольной точки P основания AC проведены прямые PK и PL , параллельные боковым сторонам. Аналогично из некоторой точки Q стороны AC проведены прямые QT и QN ($K, T \in AB$; $L, N \in BC$). Точка O — точка пересечения PL и QT . Известно, что $AP = 2QC$ и периметры четырёхугольника $BLOT$ и треугольника POQ относятся как 7 : 4. Найдите отношение $QC : AC$.

1425. В треугольнике ABC проведены медианы CM и AN . Из некоторой точки K стороны AC проведены прямые KP и KQ соответственно, параллельные этим медианам ($P \in AB$, $Q \in BC$). Найдите соотношение, в котором CM и AN делят отрезок PQ на три части, если точка пересечения медиан O и отрезок AC лежат по разные стороны прямой, содержащей PQ (не проходящей через O).

1426. В $\triangle ABC$ на стороне BC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AC в точке K . K делит сторону AC на отрезки

длиной 5 и 1. На стороне BC взята точка D так, что AD и BK пересекаются в точке O и $BD = 10$, $DC = 9$. Найдите длину OK .

1427. В прямоугольнике $KLMN$ меньшая сторона равна 4. Отрезок делит прямоугольник на два квадрата, в каждый из которых вписана окружность. Обе окружности лежат внутри равностороннего треугольника ABC , причём каждая сторона этого треугольника касается хотя бы одной из окружностей. Найдите AB , если точки A, B, K, L лежат на одной прямой.

1428. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC параллельным переносом (при этом A перешло в A_1 , B — в B_1). A_1 лежит на отрезке BC . Окружность проходит через те вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, которые не являются их общими точками. Найдите все возможные значения длины AB , если $BC = 6$, $AC = AB$.

10.1.3. Параллелограмм. Квадрат. Ромб

1429. В параллелограмме $ABCD$ площадью $2\sqrt{3}$ высота h в два раза меньше одной из его диагоналей, и угол между этой диагональю и стороной, к которой проведена h , в 3 раза меньше угла между диагоналями параллелограмма. Найдите длину меньшей диагонали.

1430. В параллелограмме $ABCD$ угол между диагональю и основанием AD равен 60° , и угол между диагоналями в три раза больше угла между основанием AD и одной из диагоналей параллелограмма. Высота CH , проведённая к AD , равна $4\sqrt{3}$, диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Найдите OH .

1431. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC равна 8, а диагональ BD равна 4. На AC выбрана точка M таким образом, что вокруг четырёхугольника $BCDM$ можно описать окружность. Пусть N — центр окружности, описанной вокруг треугольника AMD . Найдите длину BN , если $\sin \angle ADM = \frac{1}{2}$.

1432. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC равна 18, а диагональ BD равна 6. На AC выбрана точка M таким образом, что вокруг четырёхугольника $BCDM$ можно описать окружность. Пусть N — центр окружности, описанной вокруг треугольника AMB . Найдите длину DN , если $\sin \angle ABM = \frac{1}{3}$.

1433. В параллелограмме $ABCD$ с площадью 25 сторона AB равна диагонали BD . На стороне CD взята точка K , а на продолжении стороны

BC за точку C — точка T так, что $\angle DTV = \angle KBT$. Найдите площадь треугольника BKT .

1434. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $BC = 7\sqrt{3}$, острый угол равен 30° . Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и DCB .

1435. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 4$, $\angle BAD = 60^\circ$. На двух его противоположных сторонах построены равнобедренные треугольники с углами, равными 120° , при вершинах M и N . Найдите расстояние MN .

1436. Через вершины A, B, C ромба $ABCD$ провели окружность, которая пересекает прямую BD в точке E . Найдите расстояние CE , если площадь ромба равна 10, $\sin \angle A = 0,6$.

10.1.4. Трапеция

1437. В трапеции $ABCD$ точки K и M — середины её оснований AB и CD соответственно, причём DK и BM — биссектрисы соответственно $\angle ADC$ и $\angle ABC$. Большой угол при нижнем основании равен 60° . Найдите периметр трапеции, если её высота равна $3\sqrt{3}$.

1438. В трапеции $ABCD$ точки K и M — середины оснований AB и CD соответственно, причём DK и BM — биссектрисы $\angle ADC$ и $\angle ABC$.

Косинус меньшего угла при нижнем основании равен $\frac{3}{4}$. Найдите длину отрезка KM , если периметр трапеции равен 30.

1439. Основания трапеции $ABCD$ равны 18 и 12, диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, тангенс угла между боковыми сторонами равен $\frac{1}{3}$. Найдите площадь трапеции.

1440. В параллелограмме $AMPK$ биссектрисы углов при стороне AM делят сторону KP точками T и F так, что $PF : FT = 3 : 5$. Найдите PK , если $AK = 24$.

1441. В параллелограмме $AMPK$ биссектрисы углов при стороне AM делят сторону KP точками T и F так, что $PF : FT = 2 : 11$. Найдите AM , если $MP = 26$.

1442. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 10. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются прямой BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF .

1443. В треугольнике ABC $AB = 2\sqrt{39}$, $BC = 14$, $AC = 10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 5$. Окружности, вписанные

в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются прямой BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF .

1444. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 20$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 2 : 3$. Найдите BC .

1445. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 40$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 3 : 5$. Найдите BC .

1446. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

1447. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 2 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

1448. В трапеции $ABCD$ точки K , L , M , N лежат соответственно на AB , BC , CD и DA так, что $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CD} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{2}$. Найдите S_{KLMN} ,

если $\angle ADB = 30^\circ$, $AB = BC = 6$, $\sin \angle ABD = \frac{2}{3}$, $BC \parallel AD$.

1449. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, расстояния от центра окружности до её оснований BC и AD равны 4 и 3 соответственно, синус угла ACD равен 0,8. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон $ABCD$.

1450. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке O так, что одна из них делится в отношении 1 : 2. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника BOC равна 8.

1451. В трапеции $ABCD$ точка N является серединой боковой стороны CD . Найдите площадь трапеции, если сторона AB равна 7 см, а расстояние от точки N до стороны AB равно 5 см.

1452. Длина общей касательной, проведённой к двум окружностям радиусами 4 и 8, равна 5. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

1453. Расстояние между центрами двух окружностей радиусами 1 и 7 равно 10. Найдите длину общей касательной, проведённой к этим окружностям.

1454. Две окружности радиусами R и r ($R > r$) касаются в точке A . Определите сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A , а две другие лежат на разных окружностях, если $R = 5$, $r = 3$.

1455. Расстояние между центрами двух окружностей равно 50. Одна из окружностей имеет радиус 25, вторая — 30. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C . Найдите длину хорды AB , если $AB = 2BC$.

1456. В остроугольном $\triangle ABC$ сторона AB равна $5\sqrt{37}$, сторона $BC = 10\sqrt{10}$, а высота из вершины $B = 30$. На прямой AC взяли точку D так, что $AD : DC = 3 : 2$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BCD$.

1457. В остроугольном $\triangle ABC$ сторона $AB = \sqrt{109}$, сторона $BC = \sqrt{101}$, а высота из вершины $B = 10$. На прямой AC взяли точку D так, что $AD : DC = 4 : 3$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle BCD$.

1458. Две окружности с радиусами 36 и 9 внешне касательны. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность, касательную к двум данным и к их общей касательной.

1459. Две окружности с радиусами 16 и 144 внешне касательны. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность, касательную к двум данным и к их общей касательной.

1460. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 2$ и $AD = 1$. K — точка на прямой AB , из которой стороны AD и CD видны под одним и тем же углом, а L — точка на прямой CD , из которой под одинаковыми углами видны стороны AB и BC . Найдите площадь четырёхугольника $AKCL$.

1461. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB в 3 раза больше стороны AD . K — точка на прямой AB , из которой стороны AD и CD видны под одинаковыми углами, а L — точка на прямой CD , из которой под одинаковыми углами видны стороны AB и BC . Найдите BC , если площадь четырёхугольника $AKCL$ равна 3.

1462. В окружность радиусом $\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

1463. В окружность радиусом $\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 1 и 4. Найдите боковую сторону трапеции.

1464. В трапеции $ABCD$ точки K , F , P и L являются точками пересечения медиан треугольников ABC , BCD , ACD и ABD соответственно. O — точка пересечения отрезков KP и FL . Через точку O проведена прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая боковые сторо-

ны трапеции в точках M и N . Найдите длину отрезка MN , если основания трапеции равны 1 и 4.

1465. В трапеции $ABCD$ точки K , F , P и L являются точками пересечения медиан треугольников ABC , BCD , ACD и ABD соответственно. O — точка пересечения отрезков KP и FL . Через точку O проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. В каком отношении эта прямая делит высоту трапеции, если основания трапеции равны 2 и 5?

1466. Из вершины A трапеции $ABCD$ проведена биссектриса, которая пересекает диагональ BD в точке K . Найдите площадь трапеции, если $AB = 4$, $AD = 12$, $AK = 4,8$, $BC = 3$.

1467. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $9\sqrt{3}$. Сторона $AB = 3\sqrt{3}$, $\angle BCD = 30^\circ$. Найдите диагональ AC .

1468. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 8 и 15, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите площадь этого четырёхугольника.

1469. Периметр равнобедренной трапеции равен 40. В трапецию вписана окружность радиуса 4. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

1470. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке N , образуя угол 30° . Найдите площадь треугольника BNC , если площадь трапеции равна 20.

1471. Окружность вписана в трапецию $ABCD$, площадь которой равна 27. Боковые стороны трапеции AB и DC продолжены до пересечения в точке E . Расстояния от точки E до оснований трапеции относятся как 1 : 2. Известно, что большее основание трапеции равно 9. Найдите AB .

1472. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 8$ и $DC = 5,5$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. Найдите значение выражения $AO \cdot OC + BO \cdot OD$.

1473. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и DC диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. Найдите длину CD , если длина AB равна 5, а значение выражения $AO \cdot OC + BO \cdot OD$ равно 23.

1474. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна к боковой стороне AB . Найдите BC , если известно, что $AD = 25$, $AB + BC = 27$.

1475. В равнобедренной трапеции $ABCD$ отношение длин оснований $DC : AB = 3 : 5$, длина средней линии равна 8. Найдите расстояние от

вершины трапеции до точки пересечения прямых, продолжающих её боковые стороны, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

1476. В трапеции угол между диагоналями равен 30° , и они делят острые углы трапеции пополам. Найдите площадь трапеции, если основание трапеции равно 8.

1477. В трапеции угол между диагоналями равен 45° , и они делят острые углы трапеции пополам. Найдите площадь трапеции, если основание трапеции равно 6.

10.1.5. *n*-угольники

1478. Вокруг правильного 23-угольника $A_1A_2\dots A_{23}$ с центром в точке O описали окружность, и в этот же многоугольник вписали окружность. Кроме того, на лучах $OA_1, OA_2, \dots, OA_{23}$ выбрали соответственно точки B_1, B_2, \dots, B_{23} так, что

$$B_1A_1 = \frac{1}{3}OA_1, B_2A_2 = \frac{1}{3}OA_2, \dots, B_{23}A_{23} = \frac{1}{3}OA_{23}.$$

Оказалось, что $B_1B_2\dots B_{23}$ — также правильный 23-угольник. Найдите отношение площади 23-угольника $B_1B_2\dots B_{23}$ к площади кольца, ограниченного проведёнными окружностями.

1479. Вокруг правильного 29-угольника $A_1A_2\dots A_{29}$ с центром в точке O описали окружность, и в этот же многоугольник вписали окружность. Кроме того, на лучах $OA_1, OA_2, \dots, OA_{29}$ выбрали соответственно точки B_1, B_2, \dots, B_{29} так, что

$$B_1A_1 = \frac{1}{4}OA_1, B_2A_2 = \frac{1}{4}OA_2, \dots, B_{29}A_{29} = \frac{1}{4}OA_{29}.$$

Оказалось, что $B_1B_2\dots B_{29}$ — также правильный 29-угольник. Найдите отношение площади кольца, ограниченного проведёнными окружностями, к площади 29-угольника $B_1B_2\dots B_{29}$.

10.1.6. Окружность, касательная, секущая

1480. Хорда AB и диаметр MN одной и той же окружности не пересекаются, а точка пересечения прямых AM и BN равноудалена от концов хорды AB на расстояние 3. Найдите радиус окружности, если $\angle ANM = 30^\circ$.

1481. Отрезок CD является диаметром некоторой окружности. Через его концы C и D проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках A и B , лежащих по одну сторону от прямой CD . Точка O , в которой пересекаются эти проведённые прямые, равноудалена от концов диаметра CD . Найдите радиус окружности, если длина хорды AB равна 2, а $\angle OCD = 60^\circ$.

1482. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, угол A равен 60° . На стороне AB взята точка Q так, что $BQ : QA = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки Q и A и касающейся прямой, содержащей сторону BC , если $QA = 6$.

1483. В прямоугольном треугольнике ABC угол C — прямой, угол A равен 60° . На стороне AB взята точка Q так, что $BQ : QA = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки Q и A , и касающейся прямой, содержащей сторону BC , если $QA = 4$.

1484. В треугольнике ABC проведена медиана AM . При этом $AB = 7$, $AC = 5$, $AM = 2$. Чему равны площади частей, на которые медиана делит треугольник?

1485. Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} равны. Координаты точки $A(3; 7)$, координаты точки $D(1; 5)$. $\angle DAC = \angle DBC = 30^\circ$. Найдите абсциссу точки C , если известно, что ордината точки B больше 6.

1486. Два вертикальных угла имеют синус, равный $\frac{\sqrt{15}}{4}$. В каждый из этих углов вписана окружность, при этом радиус одной в два раза больше радиуса второй. Расстояние между их центрами равно $12\sqrt{2}$. Найдите диаметр меньшей окружности.

1487. Две параллельные прямые пересечены третьей под углом, синус которого равен $\frac{8}{17}$. Длина отрезка третьей прямой, заключённой между двумя параллельными составляет 32. В накрест лежащие тупые углы вписаны окружности, радиус одной в 3 раза больше радиуса другой, расстояние между их центрами равно 40. Найдите радиус меньшей окружности.

1488. Радиусы окружностей S_1 и S_2 , касающихся в точке A , равны 5 и 2 соответственно. Найдите длину отрезка касательной BF (F — точка касания), проведённой к S_2 из точки B окружности S_1 , если известно, что $AB = 3$.

1489. Радиусы окружностей S_1 и S_2 , касающихся в точке A , равны 7 и 3 соответственно. Касательная, проведённая к S_2 из точки B окружности S_1 , касается окружности S_2 в точке F . Найдите AB , если $BF = 4$.

1490. На плоскости даны две окружности, касающиеся внешним образом в точке T . К этим окружностям проведена общая касательная AB , не проходящая через точку T . Третья окружность касается прямой AB и внешним образом обеих данных окружностей. Известны длины радиусов

двух из трёх рассмотренных окружностей — это числа 64 и 100. Найдите длину радиуса оставшейся окружности.

1491. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и B , меньшую — в точках K и M . Найдите радиус большей окружности, если $AK = 3$, $KM = 2$, $MB = 4$.

1492. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и D . MB и CD — касательные к первой и второй окружностям, B и C — точки на окружностях. $CD = 10$, MB в 2 раза больше CD . Найдите MC , если периметр $MBDC$ равен 45.

1493. В правильном треугольнике ABC со стороной $2\sqrt{3} + 2$ окружность с центром в точке C касается вписанной окружности в точке K и пересекает сторону AC в точке D . Найдите площадь треугольника, образованного точками K , D и точкой пересечения общей касательной к двум этим окружностям, проходящей через точку K , со стороной AC .

1494. Площадь ромба со стороной 4 равна $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной в ромб окружности и двух его сторон.

10.1.7. Вписанная и описанная окружность, четырёхугольник

1495. Окружность касается сторон MN и MK прямоугольника $MNPK$ и проходит через вершину P . Сторону KP она пересекает в точке A . Найдите площадь трапеции $MNAK$, если $MN = 9$ и $NK = \sqrt{145}$.

1496. Четырёхугольник $MNPK$ вписан в окружность, его диагонали пересекаются в точке A . Найдите AP , если $NP = 6$; $MA = 9$ и MP — биссектриса угла NMK и в четырёхугольник $MNPK$ можно вписать окружность.

1497. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O так, что вокруг четырёхугольника A_1OB_1C можно описать окружность. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 4\sqrt{3}$, $BC = 5$.

1498. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен треугольник ABK . Биссектрисы AA_1 и BB_1 этого треугольника пересекаются в точке O так, что вокруг четырёхугольника A_1OB_1K можно описать окружность. Найдите площадь квадрата $ABCD$, если $AK = 3$, $BK = 5$.

Олимпиадные задачи (С6)

§ 11. Алгебра и начала анализа

11.1. Уравнения. Системы уравнений

11.1.1. Тригонометрические уравнения

1499. Найдите все значения a , при которых уравнение $\cos x = (3a - 7)^2$ имеет корни, а числа $\frac{27(2-a)}{4(a-1)^3}$ являются целыми.

1500. Найдите все значения p , при которых уравнение $\sin x = (3p - 2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1-3p}{4p^3}$ являются целыми.

11.1.2. Комбинированные уравнения

1501. Имеет ли система $\begin{cases} 2 \sin x + ab = bx, \\ \sin 2x = b \sin x \end{cases}$ решение, если известно, что a и b таковы, что первое уравнение имеет ровно 2 решения?

1502. Имеет ли система $\begin{cases} 3 \cos x - \left(\frac{\sin a}{2} + 1,5\right)x = -12, \\ \frac{1}{\sin x + 0,5 + \frac{\sin a}{6}} = -|b| \sin x \end{cases}$ решение, если известно, что первое уравнение имеет ровно 2 решения?

1503. Решите уравнение $\underbrace{f(f(\dots f(x))\dots)}_{2012 \text{ раз}} = 3$, где $f(x) = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{3-x^3}}$.

§ 12. Арифметика и алгебра

12.1. Текстовые задачи

12.1.1. Разные задачи

1504. Определите, сколько раз в последовательности a_1, a_2, \dots, a_n , заданной формулой $a_n = \left[\sqrt{5n} + \frac{1}{2}\right]$, встречается число 20. ($[A]$ — целая часть числа A .)

1505. Определите, сколько раз в последовательности a_1, a_2, \dots, a_n , заданной формулой $a_n = [\sqrt{4n+2}]$, встречается число 15. ($[A]$ — целая часть числа A .)

1506. Вдоль окружности по порядку расставили натуральные числа от 1 до 211. Затем, двигаясь вдоль окружности, стали вычёркивать каждое второе число, то есть последовательно числа 2, 4, 6, ..., 210, 1, 5, ..., до тех пор, пока не осталось одно число. Определите, какое число осталось.

1507. Вдоль окружности по порядку расставили натуральные числа от 1 до 100. Затем, двигаясь вдоль окружности, стали вычёркивать каждое второе число, то есть последовательно числа 2, 4, 6, ..., 100, 3, 7, ..., до тех пор, пока не осталось одно число. Определите, какое число осталось.

1508. Найдите все такие последовательности пяти идущих подряд натуральных чисел, что сумма квадратов двух последних чисел последовательности равна сумме квадратов трёх первых чисел. В ответе запишите сумму всех чисел в найденных последовательностях.

1509. Найдите все последовательности шести идущих через одно натуральных чисел, таких, что сумма квадратов двух последних чисел последовательности равна сумме квадратов четырёх первых чисел. В ответе запишите сумму всех чисел в найденных последовательностях.

1510. Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 9a_n + n$ при $n \geq 1$. Найдите все члены последовательности, которые являются точными квадратами.

1511. Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 4a_n + n$ при $n \geq 1$. Найдите все члены последовательности, которые являются точными квадратами.

12.1.2. Десятичная запись числа

1512. Если к десятичной записи натурального числа a приписать справа запятую, а потом некоторый бесконечный набор цифр, то получится десятичная запись такого иррационального числа c , что $(2c - 3)^2 = 3a^2 - 12c + 46$. Найдите все возможные значения числа c .

1513. Если к десятичной записи натурального числа a приписать справа запятую, а потом некоторый бесконечный набор цифр, то получится десятичная запись такого иррационального числа c , что $2c^2 + c = 20a + 10$. Найдите все возможные значения числа c .

1514. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел a и b , $a < b$, что если к десятичной записи числа $b - a$ приписать справа через за-

пятую десятичную запись числа b , то получится десятичная запись числа, равного $\frac{a+b}{a}$.

1515. Найдите сумму всех трёхзначных натуральных чисел n , таких, что первая и последняя цифры числа n^2 равны 1.

1516. Пусть x — 5-значное натуральное число, состоящее из цифр от 1 до 9, взаимно простое с числом $B = 10^5 - 1$. Найдите количество различных чисел (включая число x), взаимно простых с числом B , получаемых из x циклической перестановкой цифр.

1517. Трёхзначные числа m и n являются полными квадратами. Причём m получено из n уменьшением на число вида $111a$, где a — натуральное число. Найдите все такие числа a .

1518. Найдите все такие пары однозначного числа a и двузначного числа b , что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b и учетверить это число, то получится квадратный корень из трёхзначного числа, записанного, не меняя порядка, цифрами чисел a и b .

1519. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n . Найдите все такие натуральные n , при которых $n + S(n) = 2012$.

1520. Если к двузначному числу a приписать справа двузначное число b , то полученное число будет в 3 раза больше произведения чисел a и b . Найдите эти числа.

1521. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать неограниченное количество раз) два числа, одно из которых в 1234567789 раз больше другого?

1522. Найдите натуральное двузначное число, сумма цифр которого равна 14 и при увеличении которого на 46 получается число, произведение цифр которого равно 6.

1523. Найдите трёхзначное натуральное число, если сумма его цифр равна 12 и оно равно $\frac{107}{41}$ числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

1524. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $6n^2 - n + 1$ при натуральном числе n ?

1525. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $8n^2 - 3n + 1$ при натуральном числе n ?

1526. Найдите все трёхзначные натуральные числа, квадрат которых оканчивается этим же числом.

1527. Найдите количество двузначных натуральных чисел, куб которых заканчивается этим же числом.

1528. Существует ли такое натуральное число n , при котором число 2^n будет начинаться на 3842561?

1529. Существует ли такое натуральное число n , при котором число 7^n будет начинаться на 100032452?

1530. Найдите все натуральные значения n , при которых число $1 \underbrace{44 \dots 4}_n 4$ является квадратом натурального числа.

1531. Найдите трёхзначное число, зная, что число его единиц есть среднее геометрическое числа сотен и десятков. Если в его записи поменять местами цифры сотен и десятков и вычесть полученное число из искомого, то разность будет равна 270.

1532. Найдите все натуральные трёхзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

- 1) первая цифра числа в 4 раза меньше суммы двух других его цифр;
- 2) разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 72 без остатка.

1533. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулём, которое при вычёркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

1534. Факториалом натурального числа n (пишут $n!$) называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Также по определению считается, что $0! = 1$. Найдите все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

1535. Четырёхзначное число A оканчивается цифрой 1. Двузначное число, образованное цифрами тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A — три последовательных члена арифметической прогрессии. Среди всех таких чисел A найдите то, у которого разность цифры десятков и цифры сотен наименьшая.

12.1.3. Делимость

1536. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём m и n взаимно просты и $m > n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 клеток прямоугольника. Найдите все возможные значения m и n .

1537. Каждое из чисел 7, 8, ..., 15 умножают на каждое из чисел 3, 4, ..., 8 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ста-

вят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1538. Каждое из чисел $5, 6, \dots, 13$ умножили на каждое из чисел $11, 12, \dots, 20$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом поставили знак плюс или минус, после чего все 90 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1539. Перед каждым из чисел $10, 11, \dots, 18$ и $2, 3, \dots, 12$ произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 99 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1540. Перед каждым из чисел $2, 3, \dots, 8$ и $20, 21, \dots, 28$ произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 63 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1541. Каждое из чисел $3, 4, \dots, 11$ умножают на каждое из чисел $13, 14, 15, 16, 17$ и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1542. Каждое из чисел $2, 3, \dots, 6, 7$ делят на каждое из чисел $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{17}$ и перед каждым из полученных частных произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1543. Перед каждым из чисел $3, 4, \dots, 11$ и $13, 14, 15, 16, 17$ ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго, а затем все результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1544. Перед каждым из чисел $2, 3, \dots, 7$ и $8, 9, \dots, 17$ ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора вычитают каждое из образовавшихся чисел второго, а затем все

результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

1545. Найдите наименьшее натуральное число, четверть которого есть пятая степень, а пятая часть которого есть четвёртая степень.

1546. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого равна пятой степени натурального числа, а пятая часть равна квадрату другого натурального числа.

1547. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 33.

1548. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 77.

1549. Найдите все натуральные значения n , при которых число $\frac{n^2 + 13}{n + 1}$ является натуральным.

1550. Найдите все целые значения m , при которых число $\frac{m^2 - 4}{m + 3}$ является целым.

1551. Найдите все пары целых чисел x и y , при которых является верным равенство $-3xy - 10x + 13y + 35 = 0$.

1552. Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$.

1553. К трёхзначному натуральному числу a приписали его же ещё раз, а затем сложили с единицей. В результате этих действий получили число, являющееся точным квадратом. Найдите все такие a .

1554. К трёхзначному натуральному числу b приписали его же ещё раз, а затем сложили с числом 4. В результате этих действий получили число, являющееся точным квадратом. Найдите все такие b .

1555. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 175. Если все её члены уменьшить на 1 или уменьшить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 175. Какие значения при этих условиях может принимать величина $\frac{n^2 d}{100}$, где d — разность прогрессии, а n — число её членов?

1556. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 325. Если все её члены уменьшить на 1 или уменьшить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 325. Какие значения может принимать при этих условиях величина $\frac{n^2 d}{100}$, где d — разность прогрессии, а n — число её членов?

1557. Решите в целых числах уравнение $4 \cdot 3^x - 35 = y^2$.

1558. Решите в целых числах уравнение $2^x - 63 = y^2$.

1559. Найдите все пары натуральных чисел k и n , таких, что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n^5}\right)^k = \left(\frac{1}{k^5}\right)^n$.

1560. Найдите все пары натуральных чисел k и n , таких, что $k < n$ и $(\sqrt{n^5})^k = (\sqrt{k^5})^n$.

1561. Найдите все четырёхзначные квадратные числа, такие, что два числа, записанные первыми двумя цифрами и последними двумя цифрами, тоже являются квадратными. Число называется квадратным, если оно является квадратом некоторого натурального числа.

1562. Найдите наименьшее шестизначное квадратное число, такое, что два числа, записанные первыми тремя цифрами и последними тремя цифрами, тоже являются квадратными. Число называется квадратным, если оно является квадратом некоторого натурального числа.

1563. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 1, \\ ax + y = b \end{cases}$ разрешима при любых значениях b ?

1564. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 = y^2 + 2, \\ y + a = ax + b \end{cases}$ имеет решения при любых значениях b ?

1565. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b = c(a^2 + b^2), \\ a + b^3 = d(a^2 + b^2). \end{cases}$$

1566. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1935.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

1567. Найдите все такие простые числа p , при которых число $p^2 + 29$ имеет ровно четыре различных делителя.

1568. Произведение всех делителей натурального числа P оканчивается ровно на 96 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число P ?

1569. Может ли сумма первых n чисел натурального ряда оканчиваться на 123456789?

1570. Натуральное число a , меньшее 5000, при делении на 5 и на 9 даёт одинаковый остаток α , при делении на 7 и на 4 даёт остаток β , а при делении на 10 даёт остаток 2. Найдите все возможные значения числа a .

1571. Найдите все натуральные значения a , b , m , n , при которых имеет место равенство $b^m - a^m = (b^n - a^n)b$ при $a \neq b$, $b \neq 1$.

1572. Решите в целых числах уравнение $6x^2 + 5y^2 = 74$.

1573. Решите в целых числах уравнение $19x^2 + 28y^2 = 729$.

1574. Про натуральное число n известно, что для любого натурального числа m выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) m^5 не делится нацело на n^2 ; б) m^{30} делится нацело на n^{17} .

Найдите количество всех таких натуральных n , меньших 60.

1575. Про натуральное число n известно, что для любого натурального числа m выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) m^5 не делится нацело на n ; б) m^{40} делится нацело на n^{13} .

Найдите количество таких натуральных n , меньших 200.

1576. Натуральные числа m и n таковы, что сумма обратных им величин обратна некоторому простому числу. Решите в натуральных числах уравнение $m^2 + 2n^2 = k^2$.

1577. Натуральные числа m и n таковы, что сумма обратных им величин обратна некоторому простому числу. Решите в натуральных числах уравнение $4m^2 + 3n^2 = k^2$.

1578. Найдите все натуральные числа n , для которых $2^8 + 2^{11} + 2^n$ является квадратом натурального числа.

1579. Найдите

а) такое наименьшее натуральное число m , что число $4^m - 2^{100}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3;

б) такое наименьшее натуральное число m , что число $4^m - 4^{62}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 27;

в) такое натуральное число m , не превосходящее 10 000, что $4^m - 4^{53}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3^9 .

1580. Найдите

а) такое наименьшее натуральное число m , что число $4^m - 8^{40}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3;

б) такое наименьшее натуральное число m , что число $4^m - 4^{39}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 27;

в) такое натуральное число m , не превосходящее 20 000, что $4^m - 4^{44}$ является натуральным числом, делящимся нацело на 3^{10} .

1581. Решите уравнение $xy = x^3 - y$ в целых числах.

1582. Решите уравнение $xy + 2 = 3x + 2y$ в целых числах.

1583. На доске выписаны 79 последовательных натуральных чисел.

- а) Всегда ли среди них есть число, сумма цифр которого делится на 13?
б) Приведите пример числа, выписанного на доске первым, если 78 последовательных чисел из этих 79 такие, что сумма цифр каждого из этих чисел не делится на 13.

1584. Для каждого натурального числа n будем обозначать количество его натуральных делителей через $d(n)$ (включая единицу и само число n). Например, $d(1) = 1$, $d(3) = 2$, $d(6) = 4$. Найдите все такие натуральные числа m , что

- а) число $m^2 - 196$ является натуральным и $d(m^2 - 196) = 2$;
б) $d(m^2 + 24) = 3$;
в) число m является простым и $d(m^2 + 23) = 6$.

Ответ приведите отдельно для каждого из трёх пунктов.

1585. Для каждого натурального числа n будем обозначать количество его натуральных делителей через $d(n)$ (включая единицу и само число n). Например, $d(1) = 1$, $d(3) = 2$, $d(6) = 4$. Найдите все такие натуральные числа m , что

- а) число $m^2 - 324$ является натуральным и $d(m^2 - 324) = 2$;
б) $d(m^2 + 40) = 3$;
в) число m является простым и $d(m^2 + 35) = 6$.

Ответ приведите отдельно для каждого из трёх пунктов.

1586. Найдите количество простых чисел среди чисел вида $\frac{3^{2^n} + 5^{2^n} + 6^{2^n}}{2}$ (n — натуральное).

1587. Натуральное число n делится без остатка на 8, на 9, на 11 и имеет 30 делителей, среди которых 1 и само это число n . Найдите все такие натуральные числа.

1588. Натуральное число n делится без остатка на 4, на 9, на 49 и имеет 45 делителей, среди которых 1 и само это число n . Найдите все такие натуральные числа.

1589. На доске записано n различных чисел, каждое из которых является натуральной степенью числа 2. Среднее геометрическое этих чисел равно 8, а среднее арифметическое может быть записано натуральным числом. Найдите все возможные значения n .

1590. На доске записано n различных чисел, каждое из которых является натуральной степенью числа 2. Среднее арифметическое этих чисел равно 112. Найдите все возможные значения n .

Отвѣты к тестам

Отвѣты к заданиям части В (начало)

№	В1	В2	В3	В4	В5	В6	В7	В8	В9	В10	В11	В12	В13	В14
1	15	24	15	2425	11	-0,4	4	6	468	0,4	500	3,5	52	9
2	7	71	24	248	32	0,4	9	-1,4	77	0,25	108	0,4	57	49
3	7,5	20	45	3,9	16	72	2	99	4,5	0,25	20	16	3840	500
4	29	22	16	10,4	5	75	4,4	228	1,8	0,8	840	2400	90	0
5	9	1	7,5	115	-9	8	13	1,4	98	0,2	4	0,2	74	-16
6	23	8	-5	340	3	4	2,5	3	4	0,09	54	0,3875	3,5	20
7	5	5	30	718	11	-0,6	-0,25	5	7	0,5	270	18	50	7
8	172	30	13,5	434	-5	4	3,2	5	6	0,81	170	4	862,5	6
9	5	10	36	3050	-6	15	-0,25	-2	13	0,07	5	3600	17	9
10	144000	2	18	752400	11	23	315	2	64	0,31	36	40	27	-3
11	456	25	15	6720	-1,75	0,75	216	10	81	0,99	16	387,5	45	4
12	9000	4180	6	945	15	0,9	3	2	2	0,12	2,5	30	450	10
13	41	6	15	3,2	2	10	24	9	60	0,4	4	317,5	35	3
14	7	3	6	4095	4	124	30	4	27	0,2	3750	1,4	3,2	3
15	8	4170	16	120	0	2	-35	-1,5	27	0,25	2	80	4	-9
16	45	16	42	1428	-1	-0,25	-3	3	480	0,05	1000	2	375	15
17	11	6	14	3240	-1	6	1,75	25	2	0,955	12	30	3	50
18	8	4	29	3600	3	15	125	4	9	0,91	4	40	5	-50
19	38	5	37	222800	2	96	-4	32	0,75	0,11	2,25	8	20	-2
20	544	6	26,5	423000	1	60	0	32	45	0,375	50	10,4	12	4

Отвѣты к заданиям части В (окончание)

№	В1	В2	В3	В4	В5	В6	В7	В8	В9	В10	В11	В12	В13	В14
21	25	14	20	2,5	5	18	-0,68	-4	2	0,125	125	20	60	2
22	6	3	6	132	-4	3	25	-4	60	0,026	6,25	6,8	275	16
23	71	8	3,5	3920	1,25	0,75	10	65	54	0,32	2,5	4	72	0
24	18170	10	3	9150	4	35	6	108	81	0,33	72	9	14	3
25	124,2	5	6	330	3	30	21	18	60	0,3	12	90	1400	-6
26	1725	6	10	221000	2,4	144	2	8	60	0,33	108	30	6	0
27	150	10	9	44160	2,5	63	8	-1	40	4	144	52	32,2	4
28	12500	25	8	460	3	22	-1	-5	12	0,352	108	62,5	5	7
29	19	80	2	18500	5	9	1	11,5	6	0,496	189	37,5	960000	10
30	540	90	18	20644	-3	3	0	18	60	0,38	12	70	654	5

Ответы к заданиям части С (начало)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
1	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; б) $\frac{29\pi}{4}, \frac{33\pi}{4}$	96	$\{-4; 0\} \cup [1; 2)$	3 или 15	$[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}) \cup \{0\}$	а) 11 единиц; б) нет; в) 7, 9, 13, 13, 13 и 7, 9, 13, 26
2	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; б) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; \delta) \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$	$\frac{8}{3}$	$[-2,5; -2] \cup \cup(2; 3)$	$22\sqrt{3}$ и $14\sqrt{3}$	$\{0\} \cup (\frac{5}{13}; \frac{5}{3}]$	а) 175; б) да; в) 20
3	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; б) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; в) $\frac{7\pi}{2}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}, -\frac{5\pi}{2}$	$15\sqrt{69}$	$\{-8\} \cup (7; 7,5)$	20 или 76	$\{3; 7\}$	а) -3, -2, 7; б) 4; в) нет
4	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; б) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$; в) $\frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}, \frac{31\pi}{4}, \frac{29\pi}{4}$	15	$[\log_3 4,5; 2,25] \cup \cup(5; +\infty)$	$5\sqrt{47}$ и $5\sqrt{23}$	$[-3,25; -3] \cup \cup(-3; 3]$	а) да; б) 39; в) 3 и 6
5	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{14}$	$(\frac{3 + \sqrt{57}}{2}; +\infty)$	$\frac{15}{2\pi}, \frac{35}{2\pi}$	$(1 + \sqrt{5}; +\infty)$	а) нет; б) нет; в) да, $n = 5$

Ответы к заданиям части С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
6	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi k,$ $n, k \in Z;$ б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{8\pi}{3}$	$\frac{12\sqrt{3}}{3}$	$[\log_5 2; 1)$	$13 - \sqrt{7},$ $15 - \sqrt{7}$	$\frac{3 + \sqrt{153}}{4}$	а) 3; б) 5; в) 5
7	а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{6} + \pi m,$ $n, m \in Z;$ б) $\frac{\pi}{6}, \pi, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\sqrt{6}}{3}$	$(0,5; 1) \cup$ $\cup (1; 4)$	100 и 50; 90 и 60; 15 и 135	$0; \log_3 \frac{3}{7}$	а) 88 888 888; б) 64 000 000; в) 15 000 000
8	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$ б) $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$	$16\sqrt{3}$	$(0; \frac{1}{3})$	$\frac{37}{7}$	$[\frac{\sqrt[3]{3}}{27}; \frac{1}{16}] \cup [\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{4}]$	а) 3; б) 2, 3, 4; в) нет решений
9	а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;$ б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{14}}{2}$	$(1; 2]$	$\frac{3}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$	$(-\infty; -\frac{13}{3}) \cup (-\frac{13}{3}; -\frac{9}{4}) \cup$ $\cup (-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}) \cup (-\frac{1}{6}; 0)$	а) 1; б) 100; в) 0
10	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z;$ б) $-\frac{13\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$	$\frac{6}{7}$	$(0; \sqrt{10}]$	$6\sqrt{5}$ или $3\sqrt{30}$	$\{-1\} \cup (-\frac{3}{4}; 0]$	а) 13; б) 23; в) 72

Ответы к заданиям части С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
11	а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{24}{\sqrt{754}}$	$[\log_{2,5} 3; \sqrt{2}] \cup$ $\cup [\sqrt{3}; \log_{2,5} 8]$	$\frac{320\sqrt{3}}{3}$; $\frac{20\sqrt{3}}{3}$	$\{0\} \cup [2\sqrt{2}; +\infty)$	а) 24; б) 28
12	а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$	$\frac{22}{\sqrt{986}}$	$[-2; -\sqrt{3}] \cup$ $\cup (-\sqrt{2}; -\sqrt[4]{2}] \cup$ $\cup [\sqrt[4]{2}; \log_{3,5} 5]$	$2\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$	$\{0\} \cup [\sqrt[4]{18}; +\infty)$	а) 20; б) 26
13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{arctg} 0,975$	$(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}]$	$2\sqrt{13}$ или $3\sqrt{13}$	$\{-1 \pm \frac{\sqrt{22}}{2}\} \cup$ $\cup (-1 - 1,5\sqrt{2}; -2) \cup$ $\cup (0; -1 + 1,5\sqrt{2})$	а) 128; б) 89; в) 28
14	а) $\pm \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{36}$; $-\frac{13\pi}{36}$	$\operatorname{arctg} 0,7\sqrt{6}$	$(\frac{1}{49}; \frac{1}{3}) \cup$ $\cup (4; 49]$	10 или 20	$[-3; 0] \cup$ $\cup \left\{ \frac{-9 \pm \sqrt{93}}{6} \right\}$	а) 720; б) 10800; в) 29520
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$	60°	$(1; 3) \cup (3; +\infty)$	$2\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$	$(0; 1)$	а) 4; 9; Если $m = ck$, $c \in \mathbb{N}$, то б) c^2 ; в) c^2 . Если же $m = ck + r$, $c \in \mathbb{N}$, $0 < r < k$, то б) c^2 ; в) $(c + 1)^2$.

Ответы к заданиям части С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
16	<p>а) $\pi n, n \in Z;$ $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z;$</p> <p>б) $2\pi, \frac{8\pi}{3}, 3\pi, \frac{10\pi}{3}, 4\pi$</p>	30°	$(0; 1) \cup (2; 4)$	3; 4	$(-\infty; -\frac{15}{14}) \cup$ $\cup \left\{ \frac{7 - 2\sqrt{37}}{9} \right\} \cup$ $\cup [5; +\infty)$	<p>а) 8; 18. Если $m = ck,$ $c \in N,$ то б) $2c^2,$ в) $2c^2.$ Если $m = ck + r,$ $c \in N, 1 < r < k,$ то б) $2c^2,$ в) $2(c+1)^2$</p>
17	<p>а) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$</p> <p>б) $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$</p>	$42\sqrt{11}$	$(1; 3]$	$8\sqrt{3},$ $72\sqrt{3}$	$[0, 5; 2]$	а) нет; б) 17; в) 5
18	<p>а) $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z;$</p> <p>б) $\pm \frac{\pi}{12}, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{12}$</p>	$27\sqrt{3}$	$(0; 1) \cup$ $\cup [4; 5) \cup$ $\cup (5; 6)$	$3\sqrt{2} \pm 4$	$[-32; -25]$	а) 15; б) 5; в) нет
19	<p>а) $-\pi + 4\pi n, n \in Z;$</p> <p>б) $-\frac{7\pi}{3}$</p>	$\arccos \frac{1}{3}$	$(0; 1) \cup$ $\cup [4; \log_2 17]$	24 или 40	$\left[\frac{1}{3}; 9\frac{2}{3} \right]$	а) 75; б) 30
20	<p>а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k; 2\pi m;$</p> <p>б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; k, m, n \in Z;$</p> <p>б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0$</p>	$\arccos \frac{1}{3}$	$[\log_3 8; 2)$	1	$\left[\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3} \right]$	а) 65; б) 20

Ответы к заданиям части С (продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
21	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$ б) $-\frac{19\pi}{3}, -\frac{17\pi}{3}, -\frac{13\pi}{3}$	$\frac{60}{19}$	$(-6; -4) \cup$ $\cup [-3; 1] \cup$ $\cup [5; +\infty)$	3	$(-\infty; -2) \cup$ $\cup \left\{ -\frac{14}{9} \right\} \cup$ $\cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty \right)$	а) можно; б) нельзя; в) нельзя
22	а) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$ б) $\frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, \frac{37\pi}{6}$	350; 425	$\left(\frac{1}{4}; 1 \right) \cup \{5\}$	0	$\left\{ -\frac{9}{4} \right\} \cup [4; 10)$	а) можно; б) нельзя; в) нельзя
23	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}$	$\arccos \frac{3}{5}$	$\left[-1, \frac{1}{2} \right]$	5,4	$(1, 2) \cup (3, 4)$	а) 0, 2; б) $n \in \emptyset;$ в) 1, 2, 3, 4; г) 1, 2
24	1, 2, 3, 4	$\frac{4}{5} \sqrt[4]{27}$	$\left[-1, \frac{1}{2} \right]$	7,8; 7,8; 6	$(-1; 0) \cup$ $\cup (0; 1) \cup (2; 4)$	а) $\frac{4}{45};$ б) $n \in \emptyset;$ в) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; г) 3, 4
25	а) $(-1)^m \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2},$ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n, m \in Z;$ б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{11\pi}{12}, -\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{133}$	$(-\infty; -\frac{1}{9}) \cup$ $\cup \left[\frac{1}{9}; \frac{11}{9} \right] \cup \left(2; \frac{37}{18} \right]$	10 или $2\sqrt{7}$	$a > 1$	а) да; б) нет

Ответы к заданиям части С (окончание)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
26	а) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\pm \frac{\pi}{3} + \pi m$, $n, m \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{4\sqrt{5}}{15}$	$[-2; 1 - \sqrt{3}] \cup$ $\cup [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \cup$ $\cup [1 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{10}]$	$\sqrt{34}$ или $\sqrt{130}$	$a > \frac{3}{4}$	а) да; б) 7, в) 1
27	а) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$	$\arccos \frac{1}{4}$	$(\frac{1}{3}; 1) \cup$ $\cup (1; 2)$	9 и 19	-36	$(-4; -3)$, $(-6; -13)$, $(-14; -5)$
28	а) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$	90°	-1	3; 4	$b = -2$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$	$n = 3$, $m = \pm 3$; $n = 1$, $m = \pm 1$
29	$[4\pi n; 2\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$	$\frac{\sqrt{17255}}{16}$	$(-\infty; -7] \cup$ $\cup (-1; 0) \cup$ $\cup (3; +\infty)$	$\frac{44}{3}$ или $\frac{148}{3}$	$(-\infty; -\sqrt{2}) \cup$ $\cup (-\sqrt{2}; -1) \cup$ $\cup (1; \sqrt{2}) \cup$ $\cup (\sqrt{2}; +\infty)$	$m = 2$, $n = 4$
30	$[\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n]$, $n \in Z$	$\frac{16\sqrt{29}}{145}$	$(\lg 2; 1] \cup \{2\}$	$\sqrt{39}$ или $\sqrt{399}$	$(-\frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \cup$ $\cup (\frac{1-\sqrt{3}}{2}; +\infty)$	$(6, -42)$, $(-42, 6)$, $(56, 8)$, $(8, 56)$, $(14, 14)$

Ответы к сборнику задач

1. 216. 2. 7,2. 3. 7. 4. 3. 5. 1. 6. 2,5. 7. 5,5. 8. -36. 9. 90. 10. 8. 11. 1, 8.
12. 125. 13. 4,5. 14. -2. 15. 10. 16. 0,5. 17. -7. 18. -2. 19. 25. 20. 8. 21. 5.
22. 7. 23. 1. 24. 4. 25. -16. 26. 48. 27. 6. 28. 0,25. 29. 1. 30. 2. 31. 4. 32. 9,5.
33. 8,5. 34. 16. 35. 112. 36. 300. 37. 100. 38. 56. 39. 125. 40. 36. 41. 0,2.
42. 3. 43. 3. 44. 0,25. 45. 17. 46. 13,5. 47. 0,25. 48. 180. 49. 64. 50. 196.
51. 4. 52. 486. 53. 44. 54. 2. 55. 3,5. 56. 6. 57. 3. 58. 1. 59. 2. 60. -1. 61. 0.
62. 0,5. 63. -1,5. 64. 0,25. 65. 0,25. 66. 0,125. 67. 1. 68. 4. 69. 4. 70. 0,5.
71. 3,5. 72. 1,71. 73. 0,75. 74. -2,4. 75. -0,25. 76. 0,75. 77. 1. 78. 0,75.
79. 1,25. 80. 2. 81. 1. 82. -6. 83. 5. 84. 5,5. 85. -0,2. 86. 12. 87. 3. 88. 9.
89. 4. 90. 19. 91. -3. 92. 3,95. 93. -0,3. 94. 2. 95. -0,5. 96. 2. 97. 2. 98. 3.
99. 1,5. 100. 0,0625. 101. 22. 102. -90. 103. -4. 104. 1. 105. 7. 106. 1.
107. -77. 108. 21. 109. 8. 110. 0,5. 111. -2. 112. 0,5. 113. -5. 114. 3.
115. 1. 116. 5. 117. 1. 118. -3. 119. 6. 120. 3. 121. 4. 122. 17. 123. 4.
124. -3,5. 125. 3. 126. 1. 127. 3,5. 128. -4,8. 129. 19. 130. 4. 131. 7,5.
132. 0,75. 133. 0,25. 134. -0,2. 135. -15. 136. -40. 137. -2. 138. -4.
139. 4,5. 140. 2. 141. 0. 142. -1,5. 143. 1,5. 144. 17. 145. -3,5. 146. 3.
147. -8. 148. 7. 149. 5. 150. 19,6. 151. 37,5. 152. 5. 153. -3. 154. 3. 155. 0.
156. 16. 157. 43. 158. -9,5. 159. -5. 160. 30. 161. -148. 162. 22. 163. 1,2.
164. 4. 165. 0. 166. -4. 167. -2. 168. 0. 169. 0. 170. 1. 171. 3. 172. 4.
173. 45,5. 174. 12. 175. 9. 176. 80. 177. 18. 178. 25. 179. 2. 180. 30.
181. 18. 182. 27. 183. 13. 184. 1260. 185. 600. 186. 5. 187. 756. 188. 5.
189. 71. 190. 4. 191. 10. 192. 7,5. 193. 99. 194. 3. 195. 32. 196. 5.
197. 2005. 198. 15. 199. 30. 200. 6. 201. 4. 202. 8. 203. 990,5. 204. 6.
205. 40. 206. 27. 207. -24, 8. 208. 240. 209. 3. 210. 2. 211. 2. 212. 45.
213. 1. 214. 3. 215. 13. 216. 15. 217. 1. 218. 135. 219. -1. 220. 1. 221. 17.
222. -2. 223. 45. 224. 3,5. 225. 12,4. 226. -0,5. 227. 1,5. 228. 5. 229. 1,4.
230. 3,5. 231. 0,4. 232. 0,2. 233. 1. 234. -0,5. 235. 5. 236. 2. 237. -1.
238. 2. 239. 9. 240. 5. 241. -3. 242. 2. 243. 6. 244. 3. 245. 4. 246. 6.
247. -4. 248. 2. 249. -9. 250. 5. 251. 11. 252. 2. 253. 1. 254. -0,9. 255. 5.
256. 5. 257. 1,75. 258. 8. 259. 4. 260. 2. 261. 21. 262. 5. 263. 17. 264. -0,5.
265. -4. 266. 6. 267. 2. 268. 3. 269. -1. 270. 5. 271. 4. 272. 2. 273. -2.
274. 6. 275. -1. 276. 6. 277. 1. 278. -2. 279. 3. 280. -0,5. 281. 6. 282. 0,5.
283. 5. 284. 12. 285. 43. 286. 25. 287. 15. 288. 4,5. 289. 5. 290. 6. 291. 432.
292. 9. 293. 121, 5. 294. 38. 295. 11. 296. 9. 297. 6. 298. 7. 299. 0,75.
300. -1,5. 301. 1, 5. 302. 4. 303. -10,8. 304. -5. 305. 0. 306. 4. 307. -27.
308. 7. 309. -10. 310. 0. 311. 16,5. 312. 12. 313. 3. 314. 2. 315. 6. 316. -1.
317. 9. 318. 0. 319. -1. 320. -2. 321. 11. 322. 3. 323. 7. 324. 9. 325. 6.

326. 3. 327. -2. 328. 5. 329. 3. 330. 5. 331. -5. 332. 3. 333. -31. 334. -18.
335. -13. 336. -3. 337. 8. 338. -1,25. 339. 41. 340. -48. 341. 14. 342. 0.
343. 10. 344. 26. 345. 8. 346. -4. 347. -13. 348. 50. 349. 2. 350. 1. 351. 12.
352. 25. 353. -4,6. 354. 4. 355. 0. 356. 14. 357. 1. 358. -24. 359. 5. 360. 9.
361. 125. 362. 10. 363. 4. 364. -19. 365. 0,75. 366. 3,5. 367. 6. 368. 10.
369. 21,375. 370. 1,5. 371. 2,25. 372. 1,5. 373. 4,5. 374. 32. 375. 0,5.
376. 40,5. 377. 18. 378. 0,8. 379. 9,25. 380. 0,75. 381. 10,5. 382. 2.
383. 1,75. 384. 4. 385. 450. 386. 3. 387. 80. 388. 10. 389. 120. 390. 5764.
391. 3. 392. 100. 393. 17. 394. 10. 395. 12. 396. 0,1. 397. 8. 398. 35. 399. 41.
400. 240. 401. 137500. 402. 15. 403. 38,8. 404. 71,6. 405. 15. 406. 31.
407. 20. 408. 170. 409. 304. 410. 1,5. 411. 3. 412. 33. 413. 2. 414. 24.
415. 7,5. 416. 7. 417. 100. 418. 250. 419. 53. 420. 75. 421. 4. 422. 9,5.
423. 20. 424. 20. 425. 8. 426. 1. 427. 1,5. 428. 20. 429. 21,8. 430. 75. 431. 5.
432. 2,5. 433. 8. 434. 40. 435. 20. 436. 190. 437. 15. 438. 3120. 439. 14.
440. 23. 441. 10. 442. 22. 443. 5. 444. 40. 445. 50. 446. 30. 447. 8. 448. 33.
449. 12. 450. 5. 451. 10. 452. 6. 453. 9. 454. 12. 455. 12. 456. 84. 457. 9500.
458. 15500. 459. 12. 460. 4. 461. 28. 462. 30450. 463. 4. 464. 48. 465. 8.
466. 14. 467. 25,44. 468. 7. 469. 61. 470. 160. 471. 9. 472. 6. 473. 90000.
474. 12,5. 475. 32. 476. 5. 477. 240. 478. 344400. 479. 9. 480. 48. 481. 6.
482. 30. 483. 1,5. 484. 25. 485. 140. 486. 12,5. 487. 9. 488. 5. 489. 2.
490. 24. 491. 3,75. 492. 80. 493. 43,8. 494. 40. 495. 4. 496. 2. 497. 20.
498. 75. 499. 20. 500. 60. 501. 80. 502. 60. 503. 9. 504. 12. 505. 7. 506. 14.
507. 3. 508. 15. 509. 3. 510. 22. 511. 15. 512. 40. 513. 20. 514. 60. 515. 72.
516. 16. 517. 4,8. 518. 16. 519. 35. 520. 17. 521. 30. 522. 70. 523. 40.
524. 16. 525. 2. 526. 68. 527. 450. 528. 25. 529. 485. 530. 450. 531. 10.
532. 465. 533. 20. 534. 75. 535. 72. 536. 5. 537. 7. 538. 2,2. 539. 7. 540. 8.
541. 15. 542. 9. 543. 9. 544. 30. 545. 60. 546. 75. 547. 7. 548. 24. 549. 3.
550. 6. 551. 1. 552. 360. 553. 30. 554. 6. 555. 11,25. 556. 35. 557. 12.
558. 4. 559. 11. 560. 18. 561. 13. 562. 22. 563. 27. 564. 21. 565. 14. 566. 48.
567. 15. 568. 25. 569. 6,4. 570. 6. 571. 4. 572. 20. 573. 117,5. 574. 1. 575. 1.
576. 1. 577. 2. 578. 4. 579. 38. 580. 2,5. 581. 45. 582. 360. 583. 3. 584. 58,5.
585. 2. 586. 4000. 587. 3. 588. 144000. 589. 2. 590. 8. 591. 1,2. 592. 1,1.
593. 2. 594. 13. 595. 900. 596. 60. 597. 7250. 598. 112500. 599. 300.
600. 18. 601. 732. 602. 4. 603. 5,04. 604. 9. 605. 3346. 606. 23320.
607. 5950. 608. 40,5. 609. 184300. 610. 121. 611. 253. 612. 13950. 613. 19.
614. 7. 615. 256. 616. 6. 617. 750. 618. 3067,2. 619. 370. 620. 8900.
621. 12540. 622. 9750. 623. 2,25. 624. 18. 625. 8868. 626. 5. 627. 1034.
628. 10. 629. 1,5. 630. 8436. 631. 57,5. 632. 1931,8. 633. 1229. 634. 868.
635. 636. 636. 25. 637. 12750. 638. 700. 639. 215. 640. 11. 641. 4788.

642. 201. **643.** 520 800. **644.** 9. **645.** 9280. **646.** 3,25. **647.** 458. **648.** 489,6.
649. 372. **650.** 638,4. **651.** 4054,5. **652.** 10. **653.** 10 050. **654.** 535. **655.** 3.
656. 15 080. **657.** 4. **658.** 14. **659.** 62,5. **660.** 21. **661.** 2. **662.** 2. **663.** 25.
664. 70. **665.** 12. **666.** 5. **667.** 6. **668.** 14. **669.** 10. **670.** 12. **671.** 65. **672.** 106.
673. 11. **674.** 1. **675.** 18. **676.** 4,4. **677.** 9. **678.** 3,125. **679.** 240. **680.** 15.
681. 50. **682.** 12. **683.** 6,25. **684.** 7. **685.** 15. **686.** 30. **687.** 30. **688.** 15.
689. 10,5. **690.** 4,5. **691.** 8. **692.** 16. **693.** 9. **694.** 0,6. **695.** 1,05. **696.** 3.
697. 48. **698.** 10. **699.** 0,125. **700.** 1,5. **701.** 0,5. **702.** 3. **703.** 24. **704.** 12.
705. -0,28. **706.** 0,6. **707.** -0,8. **708.** -2,4. **709.** 2,4. **710.** 0,75. **711.** 13.
712. 0,25. **713.** 5. **714.** 14. **715.** 28. **716.** 1,4. **717.** 0,75. **718.** 3. **719.** 0,8.
720. 0,8. **721.** 2. **722.** 30. **723.** 18. **724.** 0,2. **725.** 5,4. **726.** 50. **727.** 14.
728. 145. **729.** 0,8. **730.** 39. **731.** 48. **732.** 72. **733.** 45. **734.** 0,75. **735.** 18.
736. 14. **737.** 35. **738.** 20. **739.** 3. **740.** 0,5. **741.** 1. **742.** 5. **743.** 96. **744.** 96.
745. -0,96. **746.** 4. **747.** 15. **748.** 72. **749.** 15. **750.** 21,25. **751.** 54. **752.** 15.
753. 10,125. **754.** 21,12. **755.** 36. **756.** 32. **757.** 12. **758.** 9. **759.** 2,4. **760.** 17.
761. 13. **762.** 8. **763.** 16. **764.** 1. **765.** 1,875. **766.** 6. **767.** 2. **768.** 4,8.
769. 104. **770.** 16,94. **771.** 14. **772.** 14. **773.** 5. **774.** 10. **775.** 6,5. **776.** 16.
777. 18. **778.** 25. **779.** 17,5. **780.** 10. **781.** 18. **782.** 4. **783.** 14. **784.** 3.
785. 42,5. **786.** 17. **787.** 24. **788.** 36. **789.** 32. **790.** 35. **791.** 36. **792.** 25.
793. 20. **794.** 30. **795.** 33. **796.** 32. **797.** 32. **798.** 25. **799.** 8. **800.** 22. **801.** 34.
802. 14. **803.** 20. **804.** -4. **805.** 1,25. **806.** 42. **807.** 31. **808.** 16. **809.** 3.
810. 31. **811.** 22,5. **812.** 20. **813.** 18. **814.** 34. **815.** 40. **816.** -1,5. **817.** 12.
818. 32,5. **819.** 24. **820.** 14,5. **821.** 4,5. **822.** 5. **823.** 112. **824.** 360. **825.** 48.
826. 24. **827.** 12. **828.** 250. **829.** 5. **830.** 2,89. **831.** 13. **832.** 5. **833.** 0,5.
834. 1040. **835.** 440. **836.** 36. **837.** 117. **838.** 120. **839.** 18,6. **840.** 128.
841. 75. **842.** 30. **843.** 0,5. **844.** 68. **845.** -0,6. **846.** 264. **847.** 60.
848. 103 823. **849.** 15. **850.** 54. **851.** 373. **852.** 0,5. **853.** 60. **854.** 8. **855.** 35.
856. 27. **857.** 2. **858.** 9. **859.** 48. **860.** 10. **861.** 18. **862.** 12. **863.** 434.
864. 108. **865.** 240. **866.** 4. **867.** 1411,2. **868.** 212,5. **869.** 10. **870.** 22,5.
871. 96. **872.** 100. **873.** 9. **874.** 8. **875.** 2. **876.** 700. **877.** 169. **878.** 125.
879. 45. **880.** 0,75. **881.** 1. **882.** 3. **883.** 4. **884.** 0,75. **885.** 4. **886.** 13,5.
887. 0,375. **888.** 0,16. **889.** 0,17. **890.** 0,9. **891.** 0,0625. **892.** 0,05. **893.** 0,55.
894. 0,25. **895.** 0,91. **896.** 0,4. **897.** 0,4. **898.** 0,45. **899.** 0,25. **900.** 0,12.
901. 0,16. **902.** 0,0001. **903.** 0,08. **904.** 0,92. **905.** 0,8. **906.** 0,2. **907.** 0,2.
908. 0,48. **909.** 0,65. **910.** 0,8. **911.** 0,75. **912.** 0,2. **913.** 0,25. **914.** 0,375.
915. 0,995. **916.** 0,98. **917.** 0,996. **918.** 0,5. **919.** 0,0625. **920.** 0,16.
921. 0,175. **922.** 0,2. **923.** 0,25. **924.** 0,03. **925.** 0,08. **925.** 0,88. **927.** 0,75.
928. 0,24. **929.** 0,25. **930.** 0,0625. **931.** 0,125. **932.** 0,75. **933.** 0,4. **934.** 0,88.
935. 0,4. **936.** 0,15. **937.** 0,4. **938.** 0,38. **939.** 0,55. **940.** 0,64. **941.** 0,275.

942. 0,25. 943. 0,35. 944. 0,72. 945. 0,375. 946. 0,16. 947. (2,5; 5).

948. $(4; 3)$, $(\frac{1}{8}; -2)$. 949. $(2; \frac{1}{4})$, $(2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$. 950. $(27; 4)$,

$(\frac{1}{81}; -3)$. 951. (2; 1), (1; 2). 952. (2; 2). 953. 21. 954. -0,5. 955. -1.

956. $\frac{(-1)^{n+1}}{6} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$. 957. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

958. $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$. 959. Нет корней.

960. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 961. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 962. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

963. $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. 964. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. 965. $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

966. $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. 967. $\pm \arccos(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n$, $n \in Z$.

968. $(-1)^n \arcsin(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \pi n$, $n \in Z$. 969. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\arctg 3 + \pi k$,

$k \in Z$. б) $\frac{\pi}{4}$; $\arctg 3$. 970. а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $\arctg \frac{1}{2} + \pi k$, $k \in Z$. б)

$\frac{4\pi}{3}$, $\arctg \frac{1}{2} + \pi$. 971. а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{7\pi}{3}$. 972. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$,

$-\arctg \frac{3}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{9\pi}{4}$. 973. а) $2 \arctg 4 + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $\frac{7\pi}{2}$. 974. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{13\pi}{2}$, $6\pi + 2 \operatorname{arctg} 3$

975. $-2\frac{5}{9}$. 976. -7. 977. 0; 4,5. 978. -6; $\frac{1}{3}$. 979. 1. 980. Нет решений.

981. $(50 \pm 25\sqrt{3}; \frac{10 \pm 5\sqrt{3}}{2})$. 982. $-\frac{9}{13} + \frac{\pi k}{13}$, $\frac{18}{13} - \frac{2\pi k}{13}$, $k \geq 1$, $k \in Z$.

983. $(\frac{-13 + 3\sqrt{41}}{10}; \frac{-11 + \sqrt{41}}{10})$. 984. $(-3 - 2\sqrt{7}; 8 + 4\sqrt{7})$. 985. (3; 4),

(11; 16). 986. (5; 0,5). 987. (1; -2). 988. (-5; -3). 989. (-8; -13).

990. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 991. $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 992. ± 1 . 993. 19.

994. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 995. $(4; \log_2 15)$. 996. (1; -2). 997. 5; $-\frac{16}{3}$.

998. 105. 999. $(9; 2)$. 1000. $(8; 3)$. 1001. $(2, \frac{1}{16})$. 1002. $(\frac{2}{3}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n)$.
 1003. $(2; 3)$, $(3; 2)$. 1004. $(2; 4)$, $(4; 2)$. 1005. $(-\frac{1}{2}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n)$, $n \in Z$.
 1006. $(\frac{1}{2}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in Z$. 1007. $(-0,25; -9)$; $(-2,25; -1)$.
 1008. $(-9; -\frac{4}{9})$; $(-4; -1)$. 1009. $(1; (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2})$.
 1010. $(\frac{1}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n)$. 1011. $(\pm \arccos \frac{1}{36} + 2\pi n; \frac{1}{36})$, $n \in Z$.
 1012. $((-1)^n \arcsin \frac{1}{64} + \pi n; \frac{1}{64})$, $n \in Z$.
 1013. $(\pm \arccos \frac{1}{25} + 2\pi n; \frac{1}{25})$, $n \in Z$.
 1014. $((-1)^n \arcsin \frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9})$, $n \in Z$.
 1015. $((-1)^n \arcsin \frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9})$, $n \in Z$.
 1016. $(\pm \arccos \frac{1}{e} + 2\pi n; -\frac{3}{2e})$, $n \in Z$.
 1017. $((-1)^{n+1} \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6})$, $n \in Z$. 1018. $(\pm \arccos \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4})$,
 $n \in Z$. 1019. $\pm \frac{3}{2}$; 1. 1020. ± 2 ; 1. 1021. $(\frac{1}{2}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n)$, $n \in Z$.
 1022. $(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{1}{2})$, $n \in Z$. 1023. 9; $\frac{1}{27}$. 1024. 4; $\frac{1}{4}$.
 1025. $(0; \frac{1}{3})$, $(\frac{28}{11}; -\frac{35}{33})$. 1026. $(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5})$, $(-\frac{17}{5}; -\frac{43}{15})$.
 1027. $(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $k, n \in Z$. 1028. $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$,
 $k, n \in Z$. 1029. $(1; 1)$, $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$. 1030. $(3; -3)$. 1031. $(5; 2)$, $(5; -2)$.
 1032. $(3; -1)$, $(3; 1)$. 1033. $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; 2)$, $k \in Z$. 1034. $(3\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi + 2\pi k)$,
 $(\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$. 1035. $(2; \frac{1}{2})$. 1036. $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$.

1037. $\left(1; \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi k\right), k \in Z$. 1038. $\left(2; (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in Z$.
1039. $\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. 1040. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.
1041. $\frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. 1042. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. 1043. 0. 1044. 0.
1045. 515. 1046. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$. 1047. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. 1048. 1.
1049. -1. 1050. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z$.
1051. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \pm \arccos \frac{5}{6} + 2\pi k, k \in Z$. 1052. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
1053. $2\pi n, n \in Z$. 1054. $\frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z$. 1055. Решений нет.
1056. $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \sqrt{3}\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\sqrt{3}\right), k \in Z$.
1057. $\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; 1\right), \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; -1\right), n \in Z$. 1058. а) $\pi + 2\pi n,$
 $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $-3\pi; -\frac{5\pi}{3}$. 1059. а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{19\pi}{6}$.
1060. а) $\pm \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}\pi n, n \in Z$; б) $\frac{8\pi}{15}, \frac{2\pi}{3}, \frac{14\pi}{15}$. 1061. а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},$
 $n \in Z$; б) $\frac{43\pi}{18}$. 1062. $2\pi - \arcsin \frac{1}{4}; \frac{13\pi}{6}; \frac{3\pi + 2}{2}$.
1063. а) $8; 3\pi - \arccos \frac{1}{5}; \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, 2\pi k, k \in Z, k > 1$
 б) $8; 3\pi - \arccos \frac{1}{5}$. 1064. а) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$;
 б) $\frac{7\pi}{2}, 3\pi - \arcsin \frac{1}{3}$. 1065. а) $2\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) $4\pi, \frac{14\pi}{3}$.
1066. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$; б) $-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}$.
1067. а) $\frac{\pi k}{3}, k \in Z$; б) $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$. 1068. $\arctg 3$. 1069. 45° .

1070. $\frac{\pi}{6}$. 1071. $\frac{2}{3}$. 1072. $\sqrt{\frac{14}{23}}$. 1073. 60° . 1074. $\arctg \frac{1}{2}$. 1075. $2\sqrt{2}$.
1076. $\arccos 0,6$. 1077. 1. 1078. 9. 1079. 30° . 1080. 45° . 1081. $\arccos \frac{17}{35}$.
1082. $2\sqrt{22}$. 1083. $\arccos \frac{17}{19}$. 1084. $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 1085. $8\sqrt{3}; 16\sqrt{3}$.
1086. $\frac{32\sqrt{2}}{3}; \frac{64\sqrt{2}}{3}$. 1087. 2. 1088. 12. 1089. $\arccos \frac{\sqrt{7}}{14}$.
1090. $\pi - \arccos \frac{1}{3}$. 1091. 0,5. 1092. $2\sqrt{2}$. 1093. 1,5. 1094. 12. 1095. 1.
1096. $2\sqrt{6}$. 1097. $3\sqrt{11}$. 1098. $\arctg \frac{16}{15}$. 1099. $\arctg 3,75$. 1100. 4.
1101. 40. 1102. $\frac{\pi}{4}$. 1103. $\frac{\pi}{3}$. 1104. $\frac{\pi}{6}$. 1105. 30. 1106. 108. 1107. 3,5.
1108. 5. 1109. $\frac{5\sqrt{7}}{2}$. 1110. $\frac{7\sqrt{7}}{2}$. 1111. 12. 1112. $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{5}$. 1113. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.
1114. $\frac{\sqrt{57}}{12}$. 1115. $\frac{13}{5\sqrt{17}}$. 1116. $\frac{71}{13\sqrt{89}}$. 1117. $\arccos 0,125$. 1118. $\frac{\sqrt{33}}{6}$.
1119. 10,5. 1120. $\arccos \frac{3\sqrt{61}}{61}$. 1121. $\arctg \frac{40}{73}$. 1122. $\frac{\sqrt{2}}{9}$. 1123. $\frac{9}{\sqrt{555}}$.
1124. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. 1125. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. 1126. $9\sqrt{3}$. 1127. $4\sqrt{3}$. 1128. 54. 1129. 180.
1130. 60. 1131. 1,25. 1132. 20,8. 1133. $2 \arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 1134. $2 \arcsin \frac{5}{\sqrt{41}}$.
1135. $\frac{5}{12}$. 1136. 9. 1137. 60° . 1138. 60° . 1139. 30° . 1140. $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$. 1141. 100π .
1142. $\arccos \frac{1}{3}$. 1143. $\frac{\pi}{3}$. 1144. $\arccos \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$. 1145. $\cos \frac{11\pi}{24}; \cos \frac{23\pi}{24};$
 $\cos \frac{7\pi}{24}; \cos \frac{19\pi}{24}$. 1146. $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{\pi}{12}; \sin \frac{5\pi}{12}$. 1147. $9; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$. 1148. $-1; 0;$
 $6; 2\pi$. 1149. $(-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [0; 1]$. 1150. $(-\frac{4}{3}; -1) \cup (\frac{1}{6}; \frac{1}{2}) \cup (1; 2)$.
1151. $(0; \frac{1}{27}) \cup (\frac{1}{3\sqrt{3}}; 1) \cup (1; 9]$. 1152. $(2; 9) \cup (27; +\infty)$.
1153. $(-4; -3) \cup \{-2,5\} \cup (-2; -1)$. 1154. 0,5. 1155. $(3; 6)$.

1156. $(15; +\infty)$. 1157. $(\frac{1}{3}; 3)$. 1158. $(\frac{1}{7}; 7)$.
1159. $x \in [-3\sqrt{3}; -1) \cup (-\frac{1}{27}; 0)$. 1160. $x \in [-4; -1) \cup (-\frac{1}{4}; 0)$.
1161. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. 1162. $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.
1163. $[-16; -1) \cup (-\frac{1}{256}; 0)$. 1164. $(-4; -1) \cup (-\frac{1}{16}; 0)$.
1165. $\sqrt{\log_2 \frac{34}{9}} \leq |x| \leq \sqrt{\log_2 \frac{30}{7}}, |x| \neq \sqrt{2}$. 1166. Нет решений.
1167. $(8; 8\frac{1}{25}] \cup [633; +\infty)$. 1168. $(2; 2\frac{1}{27}] \cup [5; +\infty)$. 1169. $[0; 4)$.
1170. $[0; 9)$. 1171. $(1; 3) \cup (3; 5)$. 1172. $(-2; -1) \cup (-1; 0)$.
1173. $(\frac{2}{3}; +\infty)$. 1174. $(0; 0,8] \cup \{2\}$. 1175. $[1,5; +\infty)$. 1176. $(-\infty; \frac{4}{3}]$.
1177. $[-\frac{22}{3}; -2) \cup (-1; 0]$. 1178. $[-\frac{17}{8}; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0]$. 1179. Нет решений.
1180. 0. 1181. $[-13; -2) \cup (3; 9]$. 1182. $[-14; -5) \cup (2; 4]$.
1183. $(-1; 0) \cup (5; +\infty)$. 1184. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup \{2,5\} \cup (4; 5) \cup (5; 6)$.
1185. $(\frac{1}{35}; \frac{26}{35}]$. 1186. $(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$. 1187. $(-\infty; 2] \cup [3; 4)$. 1188. $[3; 4)$.
1189. $(5, \frac{9+\sqrt{33}}{2})$. 1190. $(2; +\infty)$. 1191. $(2; \sqrt{5}) \cup (3; +\infty)$.
1192. $(3; \sqrt{10}) \cup (4; +\infty)$. 1193. $(0,5; 1) \cup (1; 3]$. 1194. $(-2; -1) \cup (-1; 1]$.
1195. $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$. 1196. $(-\infty; 2]$. 1197. $x > 3$. 1198. $3 < x < 9$.
1199. $[2^{-\sqrt{5}-1}; \frac{1}{8}] \cup [2; 2^{\sqrt{5}-1}]$. 1200. $[3^{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}}; \frac{1}{81}] \cup [3; 3^{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}}]$.
1201. $x \in (-\infty; -\sqrt{\log_{4,5} 2}) \cup (\sqrt{\log_{4,5} 2}; +\infty)$. 1202. $[0; 4)$.
1203. $(-2; 11)$. 1204. $[-4; \log_2 25]$. 1205. $[-\sqrt{7}; \log_2 5]$.
1206. $(\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[11]{39}}]$. 1207. $(-0,5; 0) \cup [1; 1,5] \cup (2; 2,5)$.
1208. $[1,5; 2) \cup (4; 3 + \sqrt{3}]$. 1209. $(-\infty; -\log_3 4) \cup (-\frac{1}{2} \log_4 3; 0)$.
1210. $[\log_3 4; \sqrt{2}]$. 1211. $(\sqrt{6}; \log_2 6)$. 1212. $(-\infty; -1) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$.
1213. $(-2; -1) \cup (-1; 1)$. 1214. $(-\infty; -\frac{1}{2}]$. 1215. Нет решений.
1216. $(-\infty; -2] \cup (0; 1]$. 1217. $\{-1\} \cup [2; +\infty)$. 1218. $[-1; 1) \cup (4; 6]$.

1219. $[-3; 2] \cup (5; 10]$. 1220. $[-2 - 2\sqrt{2}; -4] \cup (0; 2]$.

1221. $[-4; -3] \cup (-1; -1 + \sqrt{3}]$. 1222. $(3; 4)$.

1223. $[-4; 0] \cup \left(0; \log_3\left(\frac{3}{2}\right)\right) \cup (1; \infty)$. 1224. $[1; 2] \cup (6; +\infty)$.

1225. $[3; 4] \cup (7; 25)$. 1226. $[5; 11)$. 1227. $(-9; -7) \cup (4; 8] \cup \left\{17\frac{4}{7}\right\}$.

1228. $(2; 3) \cup (3; 4)$. 1229. $(1; 2) \cup (2; 3)$. 1230. $[1; 6] \cup [11; 17]$.

1231. $[1; 2] \cup [3; 9]$. 1232. $(-6; -5) \cup [-3; 0] \cup (0; 2) \cup (2; 5]$.

1233. $(-\infty; -5] \cup \{7\}$. 1234. $[1; 3] \cup (16; 19]$.

1235. $(\log_4 11; \log_3 7) \cup (2; +\infty)$. 1236. $[\log_4 7; 3]$.

1237. $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup \left[2^{2\sqrt{2}}; +\infty\right)$. 1238. $\left(\frac{5}{4}; \sqrt{2}\right)$. 1239. $\left(\frac{1}{4} \operatorname{tg} 1; \log_7 3\right)$.

1240. $\left(\log_5 11; \frac{3\sqrt{5}}{4} \operatorname{ctg} 0,7\right]$. 1241. $k = -\frac{4}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}; k = 2,$

$x_1 = 3, x_2 = 9$. 1242. $\frac{1}{5}; 1\frac{1}{5}$. 1243. -2 . 1244. $(-\infty; 0,8) \cup (4; +\infty)$.

1245. $-2; -\frac{7}{4}; -1; \pm 2\sqrt{2}; 3$. 1246. ± 6 . 1247. $a = 3, b = 12$.

1248. $\left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. 1249. $(-2; -1) \cup \left(1\frac{1}{3}; 2\right)$. 1250. $1,5\sqrt[3]{6}$.

1251. 20, 25. 1252. $3 - 1,5\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 1253. $\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{-2 - \sqrt{2}}{3}$.

1254. $[-8,5; +\infty)$. 1255. $m = -1, m > -\frac{1}{2}$. 1256. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

1257. $(-\infty; 0] \cup [10, 125 + \infty)$. 1258. 17. 1259. 0; 1; 2. 1260. 0; 1; 2.

1261. $(-6; -3) \cup \left\{\frac{\sqrt{13}-5}{2}\right\}$. 1262. $(-3; -2) \cup \left\{\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right\}$.

1263. $(-8; -6) \cup (0; 2)$. 1264. $(-9; -5) \cup (1; 5)$. 1265. $a \in [-45; 39]$.

1266. $a \in [4; 8]$. 1267. $-0,5; 1$. 1268. $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}; -\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$. 1269. $2 \pm \sqrt{3}$.

1270. $\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. 1271. 4, 25; $\frac{-1+4\sqrt{3}}{2}$. 1272. $(-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$.

1273. $[-2,5; -0,5]$. 1274. $p = 0; x_1 + x_2 = -\frac{6}{17}$. 1275. 2. 1276. 2. 1277. 2.

1278. $(1; 5), (3; 11)$. 1279. $(3; 2), (1; 0)$. 1280. $(-1; 0; 1)$. 1281. $(4; 3; 1)$.

1282. 3. 1283. 2. 1284. 4. 1285. 2. 1286. $(-2; 0), (-\log_6 72; \log_6 3)$.

1289. 5. 1290. $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) k, n \in \mathbb{Z}$.

- 1291. 2. 1292.** $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) n, k \in Z$. **1293. 5. 1294. 2.**
1295. $-4; -1; 3$. **1296. 2. 1297. 3. 1298.** -4 . **1299.** -8 . **1300. 10.**
1301. -3 . **1302. 0;** $\sqrt[3]{\frac{9}{25}}; \sqrt[3]{4}$. **1303.** $-1; 0; 1 \pm \sqrt{2}$. **1304.** $-5 - \sqrt{46};$
 $-5 + \sqrt{46}; 3; 7$. **1305.** -20 . **1306. 0. 1307. 0;** $\frac{1}{\cos 1}$. **1308. 0;** $2\sqrt[3]{\cos 1}$.
1309. $\left(\frac{1}{100}; 10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}\right), (10\sqrt{10}; \frac{1}{100}; 10\sqrt{10}), (10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}; \frac{1}{100})$.
1310. $-\frac{27}{2048}; 1$. **1311.** -2 . **1312.** $\frac{\sin 1}{20}$. **1313.** $[1; +\infty)$. **1314.** $(0; 2]$.
1315. $[-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8]$. **1316.** $(-13; -4) \cup (2; 11)$.
1317. $-12 < a < 0,8$. **1318.** $(-\infty; -6) \cup (0,4; +\infty)$.
1319. $(-3; -2) \cup (2; 3)$. **1320.** Таких a нет.
1321. $(-\infty; \frac{1}{12}) \cup (2 + \frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty)$. **1322.** $(-\infty; 0)$.
1323. $\sqrt{0,5} < |a| < \sqrt{2,5}$. **1324.** $(-\infty; +\infty)$. **1325.** $[-\frac{3}{\sqrt{2}}; 1) \cup (2; \frac{3}{\sqrt{2}}]$.
1326. $[-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0]$. **1327.** $[4; +\infty)$. **1328.** $[2; +\infty)$. **1329.** $(0,5; 2)$.
1330. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **1331.** $\{0\} \cup [1; \log_2 \frac{5 + \sqrt{5}}{2}]$.
1332. $a \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, -1 \leq a < 0, 0 < a \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, a \geq 1$. **1333.** $a = 2$.
1334. 3. 1335. $x = \frac{(1 - 2a)^2}{16a - 4a^2 - 1}$, при $2 - \sqrt{3} < a \leq 0,5$.
1336. $x = \frac{(1 - \frac{1}{2}c)^2}{5c}$, при $0 < c \leq 2$. **1337.** $a = 8, b = -20, x = 2 \pm 2\sqrt{2}$.
1338. $a = 14; b = 14; x = -1,5 \pm 0,5\sqrt{29}$. **1339. 2. 1340.** $-4; -5; -6$.
1341. -5 . **1342.** -1 . **1343.** $(-5; -1,5] \cup [0,5; 3)$.
1344. $(-3; -1 - \sqrt{2}) \cup (0,5; 2)$. **1345.** $2; 3 + \sqrt{109}$. **1346.** $6; 4 + 2\sqrt{41}$.
1347. $4\sqrt{2}; 6 - 4\sqrt{2}; 3 \pm \sqrt{7}$. **1348.** ± 4 . **1349.** $-\frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{4}{5}$.
1350. $\pm\sqrt{2}; \pm 4$. **1351.** $4; 2\frac{2}{3}$. **1352. 4. 1353.** $a \in (-1 - \sqrt{17}; 6]$.

1354. $\left(-3; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-6 - \sqrt{86}}{10}; 3\right]$. 1355. При $a = 0,6$ $x = 3$; при

$a \in (-\infty; 0,6) \cup (0,6; +\infty)$ решений нет. 1356. $\left(-5; \frac{8 - \sqrt{35}}{2}\right)$.

1357. $(-\infty; -3) \cup (-2,75; \sqrt{3})$. 1358. $(-\infty; -2) \cup (-1,75; \sqrt{2})$.

1359. $2n + \frac{1}{2}$, где $n \in Z$. 1360. $b = 2n$, где $n \in Z$. 1361. $0, -1$.

1362. $\frac{3\pi + 6\pi k}{13}$, $k \in Z$. 1363. $(-2; -1)$. 1364. $(-\infty; -1) \cup [0; 1]$.

1365. $a \in [-4; 2,4]$. 1366. $a \in \left[-3; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right]$. 1367. $(-3; +\infty)$.

1368. $(-\infty; 0,1\sqrt{15}) \cup (3,25; +\infty)$. 1369. $\left(-\frac{13}{4}; 3\right)$. 1370. 0 . 1371. $[3; 4)$.

1372. $(-1; 0)$. 1373. $a \leq 0$, $a = 4$. 1374. $a \geq 3,5$, $a = 0,5$.

1375. $\left[\frac{2 - \sqrt{46}}{2}; \frac{-6 + \sqrt{14}}{2}\right] \cup \left[3; \frac{2 + \sqrt{46}}{2}\right]$.

1376. $\left[\frac{6 - 2\sqrt{209}}{5}; \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{56}{17}; \frac{6 + 2\sqrt{209}}{5}\right]$. 1377. $(0; 2)$.

1378. $x \in \left[\frac{9 + \sqrt{97}}{2}; +\infty\right)$ при

$a \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, $k \in Z$. 1379. $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$.

1380. $\left[\frac{\sqrt{2}}{32}; 16\sqrt{2}\right]$. 1381. $(1; 2) \cup (6; 7]$. 1382. $(7; 8]$. 1383. $[2; 24)$. 1384. 4 .

1385. $\{5\} \cup [125; 625)$. 1386. Таких a нет. 1387. $(0; 0,5) \cup (2; 1 + \sqrt[3]{4,5})$.

1388. $(-\infty; 6 - 3\sqrt{3}] \cup [3; 9] \cup [6 + 3\sqrt{3}; +\infty)$.

1389. $(-8 - 7\sqrt{2}; -8 - 4\sqrt{3}) \cup (-8 + 4\sqrt{3}; -8 + 7\sqrt{2})$. 1390. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

1391. $(2; 3)$. 1392. $(0; 15)$. 1393. $(1; 1,25)$. 1394. $(2,4; 3]$.

1395. $\left(\frac{1 - \sqrt{73}}{2}; 0\right] \cup [1; 2)$. 1396. $\left(\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right]$. 1397. $(-\infty; 1,5]$.

1398. $(-\infty; 0,9]$. 1399. $(-\infty; 4,8]$. 1400. $\left(\frac{\sqrt{21}}{9}; 1\right)$. 1401. $4,5\sqrt{3}$.

1402. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1403. $\frac{a(2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}})(2 - \sqrt{3})}{2}$; $\frac{a(2\sqrt{3} - 3)}{2}$.

- 1404.** $a\sqrt{2-\sqrt{3}}$; a . **1405.** 9,6. **1406.** 50,4. **1407.** 30 или 70. **1408.** 11.
1409. 13,5. **1410.** 20° ; 90° . **1411.** 65° ; 115° . **1412.** 12; 5 или $4\frac{1}{2}$; $13\frac{1}{3}$.
1413. 12 или 5. **1414.** $\frac{225\sqrt{7}}{8}$. **1415.** 5460. **1416.** 13,5. **1417.** 110,4; $106\frac{98}{115}$.
1418. 13 или 14. **1419.** $6\sqrt{18\pm 12\sqrt{2}}$. **1420.** $8\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$. **1421.** 13.
1422. $\frac{288}{35}$. **1423.** $\frac{481}{40}$. **1424.** 7 : 30. **1425.** 1 : 1 : 1. **1426.** $\frac{18\sqrt{10}}{7}$ или
 $\frac{12\sqrt{21}}{23}$. **1427.** $4(\sqrt{3}+1)$ или $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **1428.** 6, $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. **1429.** 2. **1430.** $4\sqrt{3}$; 4.
1431. 5. **1432.** $6\sqrt{5}$. **1433.** 12,5. **1434.** $\sqrt{201}$; $\sqrt{831}$. **1435.** $\frac{2\sqrt{39}}{3}$; $\frac{2\sqrt{57}}{3}$.
1436. $\frac{5\sqrt{6}}{9}$; $5\sqrt{6}$. **1437.** 60. **1438.** $\sqrt{22}$. **1439.** 180. **1440.** 33; 88. **1441.** 30;
195. **1442.** $2\sqrt{19}-5$; 5. **1443.** $12-\sqrt{39}$; $2+\sqrt{39}$. **1444.** 28; 70. **1445.** 55;
 $146\frac{2}{3}$. **1446.** 2; 3. **1447.** 1; 3. **1448.** $\frac{7}{2}(2\sqrt{3}\pm\sqrt{5})$. **1449.** 3,5; 24,5. **1450.** 18;
72. **1451.** 35. **1452.** $\sqrt{41}$; 13. **1453.** 8; 6. **1454.** $\frac{15\sqrt{3}}{7}$; $\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **1455.** $10\sqrt{21}$;
30. **1456.** $\frac{25\sqrt{10}}{3}$; $\frac{\sqrt{2290}}{3}$. **1457.** $\frac{\sqrt{19897}}{28}$; $\frac{\sqrt{27169}}{20}$. **1458.** $12\sqrt{3}$; $972\sqrt{3}$.
1459. $60,75\sqrt{3}$; $972\sqrt{3}$. **1460.** $2+\sqrt{3}$; 2; $2-\sqrt{3}$. **1461.** 1; $\sqrt{6}-\sqrt{3}$;
 $\sqrt{6}+\sqrt{3}$. **1462.** $\sqrt{16\pm\sqrt{11}}$. **1463.** $\sqrt{8\pm\sqrt{19}}$. **1464.** 2,8. **1465.** 4 : 3.
1466. 28,8. **1467.** $\sqrt{117}$. **1468.** 38,4; 56,25. **1469.** $\frac{1}{2}$; $\frac{32}{55}$. **1470.** 10; 30.
1471. 5 или 8,5. **1472.** 44. **1473.** 4,6. **1474.** 17; 24,5. **1475.** 20; 12. **1476.** 8
или $16(2+\sqrt{3})$. **1477.** $18(\sqrt{2}-1)$ или $18(\sqrt{2}+1)$. **1478.** $\frac{92}{9\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{23}$ или
 $\frac{368}{9\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{23}$. **1479.** $\frac{16\pi}{725}\operatorname{tg}\frac{\pi}{29}$ или $\frac{16\pi}{261}\operatorname{tg}\frac{\pi}{29}$. **1480.** 3. **1481.** 2.
1482. 3 или 21. **1483.** 2 или 14. **1484.** $2\sqrt{6}$. **1485.** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.
1486. $4\sqrt{3}$ или $4\sqrt{5}$. **1487.** 8. **1488.** $3\sqrt{\frac{3}{5}}$ или $3\sqrt{\frac{7}{5}}$. **1489.** $2\sqrt{7}$ или $\frac{2\sqrt{70}}{5}$.
1490. 1600 или $19\frac{61}{81}$. **1491.** 3,5 или 10,5. **1492.** 3. **1493.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

1494. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $7\sqrt{3} - 12$. 1495. 40. 1496. 3. 1497. 15. 1498. 19. 1499. $\frac{5}{2}$; 2.
 1500. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. 1501. Да. 1502. Нет. 1503. $-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. 1504. 8. 1505. 8. 1506. 167.
 1507. 73. 1508. 60. 1509. Нет решений. 1510. 0; 1. 1511. 0; 1. 1512. $\frac{\sqrt{85}}{2}$;
 $2\sqrt{7}$; $\frac{\sqrt{145}}{2}$. 1513. $\frac{\sqrt{1361} - 1}{4}$. 1514. $a = 2, b = 5$. 1515. 10981. 1516. 5.
 1517. 1, 3, 5. 1518. (6, 25). 1519. 1987; 2005. 1520. $a = 17, b = 34$.
 1521. Нет. 1522. 77; 86. 1523. 642. 1524. 3. 1525. 3. 1526. 376; 625.
 1527. 7. 1528. Да. 1529. Да. 1530. $n = 2; n = 3$. 1531. 300 или 412.
 1532. 280, 122, 244, 366, 488. 1533. 180 625. 1534. 145. 1535. 1791.
 1536. (117; 2), (59; 3). 1537. 1; 3267. 1538. 1; 12555. 1539. 1; 2079.
 1540. 1; 1827. 1541. 1; 4725. 1542. 1; 3375. 1543. 0; 990. 1324. 0; 1020.
 1545. 12 800 000. 1546. 200 000. 1547. (7; 4); (17; 16). 1548. (9; 2); (39; 38).
 1549. 1; 6; 13. 1550. -8; -4; -2; 2. 1551. (-4; -3), (4; 5), (6; -5).
 1552. (-6; -7), (-4; 3), (4; -5). 1553. 183; 328; 528; 715; 999. 1554. 205;
 300; 477; 732; 997. 1555. -7; 7. 1556. -13; 13. 1557. (4; -17), (4; 17),
 (2; 1), (2; -1). 1558. (10; -31), (10; 31), (6; -1), (6; 1). 1559. $k = 2; n = 4$.
 1560. $k = 2; n = 4$. 1561. 1681. 1562. 144 400. 1563. (-0,5; 0,5).
 1564. (-1; 1). 1565. (1; 1; 1; 1). 1566. а) нет; б) да; в) 483. 1567. 2; 3.
 1568. 1; 2; 3. 1569. Нет. 1570. 2; 1262; 2522; 3782; 812; 2072; 3332; 4592.
 1571. нет решений. 1572. (3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2).
 1573. решений нет. 1574. 43. 1575. 187. 1576. $m = 3, n = 6, k = 9$.
 1577. $m = 3, n = 6, k = 12$. 1578. $n = 12$. 1579. а) 51; б) 71; в) 6614.
 1580. а) 61; б) 48; в) 19 727. 1581. (0; 0), (-2; 8). 1582. (-2; 2), (0; 1),
 (1; -1), (3; 7), (4; 5), (6; 4). 1583. а) да; б) 9 999 999 960, 9 999 999 961.
 1584. а) 15; б) 1 и 5; в) 3. 1585. а) 19; б) 3 и 9; в) 3. 1586. 0. 1587. 1584.
 1588. 7056, 15 876, 86 436. 1589. 1,2,3. 1590. 3.

Литература

1. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2013 году единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
2. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2013 года по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
3. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
4. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения единого государственного экзамена по математике. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2012. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ № 1897 от 17.12.2010.
6. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. 2004 г. Приказ МО РФ от 05.03.04 № 1089.

7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Минобрнауки РФ № 413 от 17.05.2012.
8. *Евич Л. Н., Ольховая Л. С. и др.* Математика. Устные вычисления и быстрый счёт. Тренировочные упражнения за курс 7–11 классов: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — 231 с.
9. *Лукин Р. Д., Лукина Т. К., Якунина М. С.* Устные упражнения по алгебре и началам анализа. — М.: Просвещение, 1989. — 96 с.
10. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2012. — 416 с.
11. Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2013: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2012. — 272 с.
12. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2012. — 144 с.

Готовимся к ЕГЭ
Учебное издание

Авилов Николай Иванович, **Войта** Елена Александровна,
Дерезин Святослав Викторович, **Иванов** Сергей Олегович,
Казьмин Игорь Александрович, **Коннова** Елена Генриевна,
Корянов Анатолий Георгиевич, **Ольховая** Людмила Сергеевна,
Ольховой Алексей Федорович, **Прокофьев** Александр Александрович,
Резникова Нина Михайловна, **Саакян** Георгий Рубенович,
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014

Под редакцией **Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *С. Верескун*

Подписано в печать с оригинал-макета 26.07.2013.
Формат 60x84¹/₁₆. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,25.
Тираж 60 000 экз. Заказ № 34481.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»

Для писем. 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции. 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Долмановский, 55.
www.legion.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59 www.sarpk.ru



Рекомендует

Готовимся к ЕГЭ

**МАТЕМАТИКА.
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

Пособие предназначено для формирования устойчивых навыков в решении задач по теории вероятностей. Представленный материал охватывает все темы заданий по теории вероятностей из открытого банка ЕГЭ, имеющиеся на момент выпуска книги.

Книга разделена на 3 модуля в соответствии со степенью трудности предлагаемых задач. Каждый модуль содержит диагностическую работу, теоретический материал, задачи с разобранными решениями, варианты для самостоятельной работы.

Пособие является частью учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ», включающего такие книги, как «Математика. ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты», «Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2014 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы» и др.



ИЗДАТЕЛЬСТВО



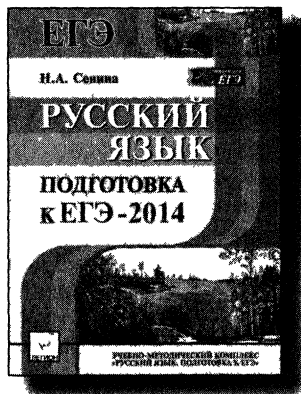
Рекомендует

Готовимся к ЕГЭ

РУССКИЙ ЯЗЫК. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2014

Н. А. Сенина

Учебно-методическое пособие содержит систематизированные и обобщённые теоретические сведения по русскому языку, стилистике и культуре речи; краткий словарь лингвистических и литературоведческих терминов; сборник упражнений, содержащий дидактические материалы по всем темам, включенным в спецификацию ЕГЭ; тридцать новых авторских учебно-тренировочных тестов, составленных в соответствии с действующей спецификацией, главу «Готовимся к части С», содержащую методические рекомендации для подготовки к написанию сочинения. Кроме того, в пособии дан анализ типичных ошибок учащихся, а также советы по их устранению.



Необходимым дополнением к этому пособию являются вторая книга автора «Русский язык. Тематические тесты. Подготовка к ЕГЭ», которая позволяет поэтапно подготовиться к экзамену по всем разделам и темам курса, а также книга Н.А. Сениной и А.Г. Нарушевича «Русский язык. Сочинение на ЕГЭ. Курс интенсивной подготовки».

Пособие адресовано учащимся общеобразовательных учреждений, учителям и может быть использовано для самостоятельной подготовки учащихся.

Издание является основной книгой учебно-методического комплекса «Русский язык. Подготовка к ЕГЭ».

ЕГЭ

Учебно-методический комплекс «МАТЕМАТИКА. Подготовка к ЕГЭ»

под редакцией **Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова** включает следующие издания для обучающихся и учителей:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты + Решебник
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Теория вероятностей
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014 (В1-В6). Пособие для "чайников"
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014 (В7-14). Пособие для "чайников"
- Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2014 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5
- Математика. 11-й класс. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа
- Математика. 10-11 классы. Карманный справочник
- Математика. 10-й класс. Промежуточная аттестация в форме ЕГЭ

Комплекс будет дополнен другими учебно-методическими пособиями, отражающими изменения в нормативных документах ЕГЭ



Издательство включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987

ISBN 978-5-9966-0377-0



344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550
Тел. (863) 303-05-50, 248-14-03

Сайт, интернет-магазин: www.legionr.ru
e-mail: legionrus@legionrus.com

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН



Опт, мелкий опт, интернет-магазин, книга – почтой