ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ-2014

ЧАСТЬ 3:

ГЕОМЕТРИЯ

Пособие для «чайников»

ЛЕГИОН

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Е. Г. Коннова

МАТЕМАТИКА
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ
ЕГЭ-2014
ЧАСТЬ 3: ГЕОМЕТРИЯ

Пособие для «чайников»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

Учебно-методическое пособие

ТМ

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1
К 65

Рецензенты:
Н. М. Резникова — учитель высшей категории;
Е. А. Войта — аспирант кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета.

Коннова Е. Г.

К 65 Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 3: Геометрия / Е. Г. Коннова, В. А. Дрёмов, С. О. Иванов; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 208 с. — (Готовимся к ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0475-3

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков в решении задач базового уровня В3, В6, В9, В11** на ЕГЭ по математике.

Пособие состоит из 6 параграфов, которые включают в себя разбор решений типовых задач, подобных приведённым в открытом банке заданий ЕГЭ, а также варианты для самостоятельного решения. Кроме того, приведено 16 обобщающих тренировочных тестов, каждый из которых содержит 5 заданий по планиметрии и стереометрии, аналогичных предлагаемым на ЕГЭ.

Другие задания части В рассматриваются в следующих книгах: «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников". Часть 1: Арифметика и алгебра» и «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников". Часть 2: Алгебра и начала анализа».

Пособие входит в **учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**. Продиагностировать уровень математической подготовки и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать пособия, которые понадобятся в процессе подготовки, поможет брошюра **«Готовимся к ЕГЭ по математике. С чего начать?»**, содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0475-3

Оглавление

2. Зак. № 249

От авторов

Книга «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников“. Часть 3: Геометрия» входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион». Пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ-2014. Оно адресовано учащимся выпускных классов общеобразовательных учреждений, учителям, ученикам вечерних школ и тем, кто собирается сдавать ЕГЭ после перерыва в обучении.

Прежде всего, это **самоучитель** и **тренажёр** для тех, кто хочет научиться решать задачи части В без репетитора. Также эта книга может использоваться для **контроля** умений решать задачи части В при повторении курса математики в рамках подготовки к ЕГЭ.

Материал, представленный в этой книге, служит для формирования **устойчивых навыков в решении задач базового уровня**. Не секрет, что большинство выпускников, даже получивших на ЕГЭ высокий балл, допускают по $2-3$, а иногда и больше ошибок именно в части 1 предлагаемого теста, хотя большинство задач этой части решается устно. Причина — отсутствие упомянутых выше навыков.

Воспользовавшись этой книгой, вы научитесь безошибочно выполнять задания В3, В6, В9, В11 и сэкономите время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 6 параграфов, каждый из которых включает в себя диагностическую работу, разбор решений типовых задач, подобных приведённым в открытом банке заданий ЕГЭ*, а также варианты для самостоятельного выполнения. Кроме того, приведено **16 обобщающих тренировочных тестов**, включающих по 5 задач, аналогичных предлагаемым на ЕГЭ в качестве заданий В3, В6, В9, В11. Каждый вариант рекомендуем выполнять в течение $20-30$ минут, затем проверить правильность решения с помощью

*См. сайт http://mathege.ru/or/ege/Main

ответов, приведённых в конце пособия. Если ответы не совпадут, попробуйте ещё раз решить задачу, а при необходимости найдите подобную среди разобранных примеров.

Задания части В, отсутствующие в данной книге, рассматриваются в следующих книгах: «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников“. Часть 1: Арифметика и алгебра» и «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников“. Часть 2: Алгебра и начала анализа».

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион»:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Теория вероятностей.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 1: Арифметика и алгебра.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 2: Алгебра и начала анализа.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 3: Геометрия.
- Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2014 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы.
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5.
- Математика. 11-й класс. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа.

- Математика. 10-й класс. Промежуточная аттестация в форме ЕГЭ.
- Математика. 10 – 11 классы. Карманный справочник.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (С1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С2. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решаем С3 методом рационализации.
- Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи и повторяем теорию.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий части С. Решения и комментарии.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: математический бой. Задания частей В и С.

Продиагностировать уровень знаний и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать пособия, которые понадобятся в процессе подготовки, поможет брошюра **«Готовимся к ЕГЭ по математике. С чего начать?»**, содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион».

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно прислать почтой или на электронный адрес:
`legionrus@legionrus.com`.

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства:
`http://forum.legionr.ru`.

Желаем успехов на экзамене!

§1. Площади

Диагностическая работа

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 1). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

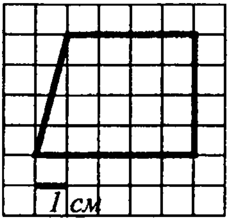


Рис. 1.

2. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 2.

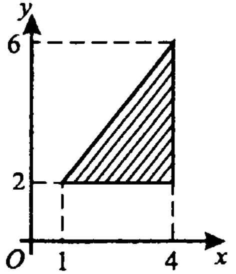


Рис. 2.

3. Найдите площадь ромба, вершины которого имеют координаты (2; 6), (4; 10), (6; 6), (4; 2) (см. рис. 3).

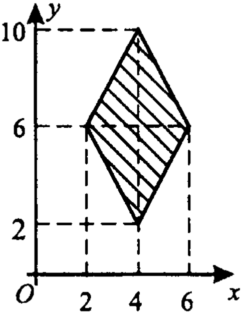


Рис. 3.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 4). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

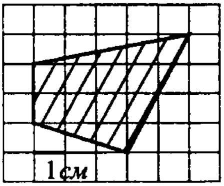


Рис. 4.

5. Найдите площадь сектора S, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 5). В ответе укажите $\dfrac{S}{\pi}$.

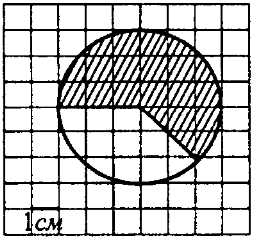


Рис. 5.

Прямоугольный треугольник

ⓘ *Немного полезной информации*

В этой главе мы рассмотрим простые виды задач по геометрии, а именно задачи, в которых нужно найти площади плоских фигур, нарисованных на клетчатой бумаге или расположенных на координатной плоскости.

Для решения таких задач требуется знать не очень много формул, поэтому их решение доступно практически каждому.

Давайте вспомним эти формулы и разберём примеры их применения.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы (c) равен сумме квадратов катетов (a и b):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов: $S = \dfrac{ab}{2}$.

Напомним, что у прямоугольного треугольника есть прямой угол, равный 90°. Сторона напротив прямого угла (самая длинная) называется **гипотенузой**, две прилежащие к прямому углу стороны называют **катетами**.

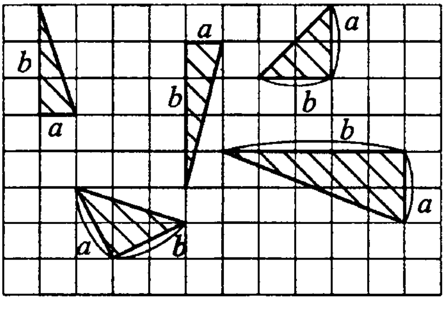


Рис. 6.

На рисунке 6 приведены чертежи некоторых прямоугольных треугольников, у которых показаны катеты a и b.

Задачи с решениями

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 7). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

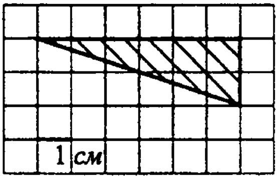


Рис. 7.

Решение.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. В данном треугольнике катеты равны 2 см и 6 см (посчитаем по клеточкам), поэтому площадь $S = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ (см^2).

Ответ: 6.

Немного полезной информации

Теперь рассмотрим задачу, в которой точки изображены на **координатной плоскости**. Напомним, что любая точка на координатной плоскости характеризуется двумя числами — **координатами**. Первая координата называется **абсциссой (x)**, вторая координата называется **ординатой (y)**. На рисунке 8 точки A, B и C имеют координаты $A(4;10)$, $B(0;2)$, $C(8;2)$.

Посмотрим внимательно на рисунок 8. Если у двух точек одинаковые абсциссы (x), как у точек T и A, или одинаковые ординаты (y), как у точек B, T и C, то соответствующие от-

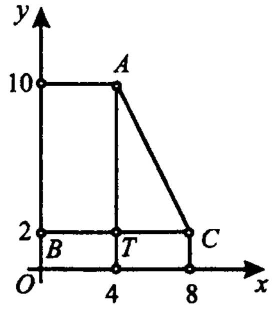


Рис. 8.

резки параллельны осям координат. AT параллелен Oy, BC параллелен Ox. В таких случаях длину отрезка легко найти, если вычесть различающиеся координаты точек.

Например, найдём длину отрезка AT, где $A(4;10)$, $T(4;2)$. Абсциссы (x) у них равны. Найдём разность ординат (y), длина AT равна $10-2=8$.

Длину отрезка TC, параллельного оси Ox, можно найти, если вычесть их абсциссы: $8-4=4$.

Длину AC найдём по теореме Пифагора. Треугольник ACT прямоугольный, $AC^2=TC^2+AT^2$.

$AC^2=4^2+8^2=16+64=80$. $AC=\sqrt{80}$.

Задачи с решениями

2. Найдите площадь треугольника (в см^2), вершины которого имеют координаты $(4;2)$, $(6;2)$, $(4;10)$ (см. рис. 9).

Решение.

1-й способ.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Найдём длину катета BA. Абсциссы (x) у них равны. Находим разность ординат (y), длина AB

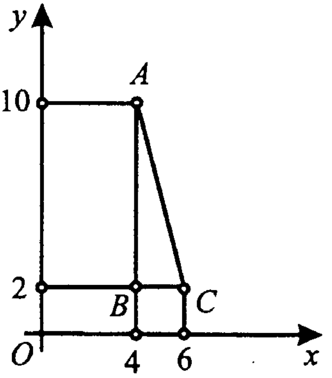


Рис. 9.

равна $10 - 2 = 8$. Длину отрезка BC, параллельного оси Ox, можно найти, если вычесть их абсциссы: $6 - 4 = 2$. Тогда площадь $S = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8$ (см^2).

Ответ: 8.

2-й способ.

Нанесём координатную сетку (нарисуем линии с промежутком 1 прямо на данном чертеже, рисунок 10). После этого по клеточкам посчитаем длину катетов и вычислим площадь. $AB = 8$, $BC = 2$, $S = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8$ (см^2).

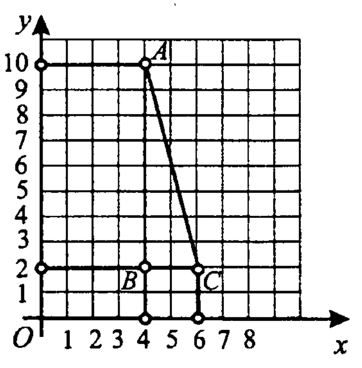


Рис. 10.

Ответ: 8.

При этом способе решения задач важно не ошибиться и не пропускать числа и линии в координатной сетке, их нужно проводить с разницей в единицу.

Площадь треугольника

ⓘ *Немного полезной информации*

Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны (a) на высоту (h), проведённую к этой стороне: $S = \frac{ah}{2}$.

На рисунке 11 приведены чертежи некоторых треугольников, у которых обозначены одна из сторон a и высота, проведённая к этой стороне h.

Как правило, удобно брать ту сторону, которая проходит по линиям клетчатой бумаги (или же проходит параллельно осям координат).

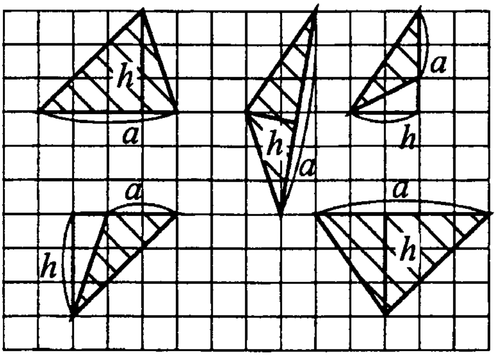


Рис. 11.

Задачи с решениями

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 12). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

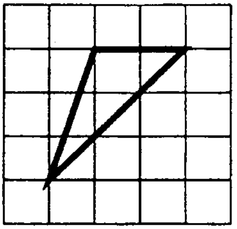


Рис. 12.

Решение.

1-й способ.

Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны (a) на высоту (h), проведённую к этой стороне. Проведём высоту h. Треугольник тупоугольный, поэтому высота проводится вне треугольника.

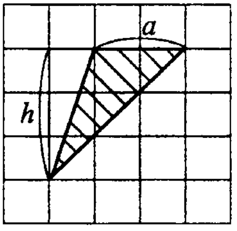


Рис. 13.

На рисунке 13 сторона $a = 2$ см, высота $h = 3$ см.

$S = \frac{ah}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ см^2.

Ответ: 3.

Заметим, что так как клетки имеют размер 1 см $\times$ 1 см, то площадь в квадратных сантиметрах получится, если мы будем по рисунку считать размер отрезков в клетках. Поэтому единицы длины в этих задачах можно и не писать.

2-й способ.

Достроим треугольник BCM до прямоугольного треугольника MCA (см. рис. 14).

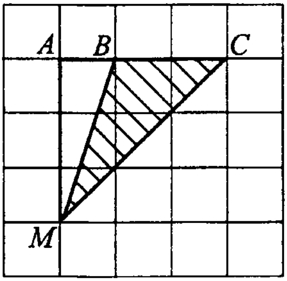


Рис. 14.

Тогда искомую площадь треугольника BCM можно найти как разность площадей двух прямоугольных треугольников MAC и MAB.

Катеты первого из них равны 3 см и 3 см, катеты второго — 3 см и 1 см.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, следовательно,

$$S_{MAC} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5; \quad S_{MAB} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5;$$

$$S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MAB} = 4{,}5 - 1{,}5 = 3.$$

Ответ: 3.

Площадь четырёхугольника

ⓘ *Немного полезной информации*

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон:

$$S = ab.$$

На рисунке 15 приведены чертежи некоторых прямоугольников, у которых показаны смежные стороны a и b.

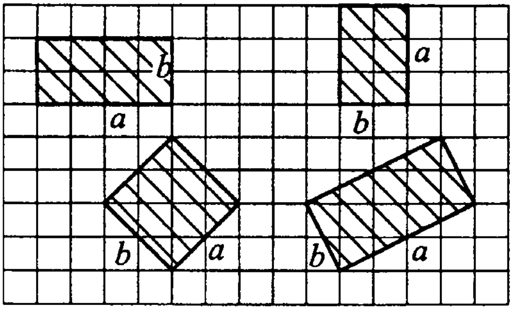


Рис. 15.

Задачи с решениями

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 16). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

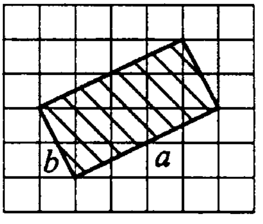


Рис. 16.

Решение.

1-й способ.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон a и b. Для того чтобы найти стороны прямоугольника, рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 2$ и $BC = 1$ и гипотенузой $AC = b$ (см. рис. 17).

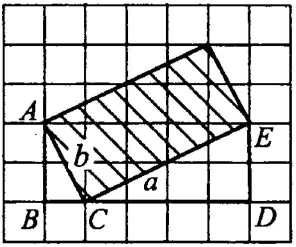


Рис. 17.

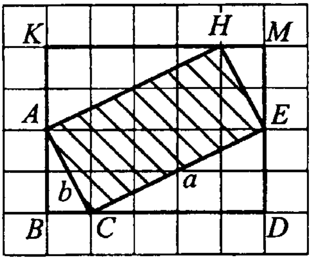


Рис. 18.

По теореме Пифагора гипотенуза $AC = b$ равна $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Из треугольника CDE с катетами $CD = 4$ и $DE = 2$ найдём гипотенузу CE. $a = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$. Следовательно, площадь прямоугольника $S = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10$.

Ответ: 10.

2-й способ.

Достроим прямоугольник $ACEH$ до прямоугольника $BKMD$ (см. рис. 18). Чтобы найти площадь $ACEH$, нужно из площади прямоугольника $BKMD$ вычесть площади прямоугольных треугольников AKH, HME, EDC и ABC.

Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, то площадь каждого из двух больших треугольников (AKH и EDC) равна 4, а площадь каждого из двух маленьких треугольников (HME и ABC) равна 1. Площадь прямоугольника $BKMD$ равна $4 \cdot 5 = 20$. Следовательно, площадь искомого прямоугольника будет равна $20 - 1 - 1 - 4 - 4 = 10$.

Ответ: 10.

Заметим, что подобным «достраиванием» можно найти площадь любого многоугольника на клетчатой бумаге.

5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 19). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

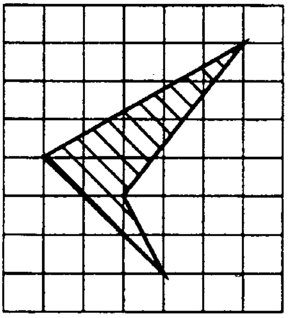


Рис. 19.

Решение.

Достроим четырёхугольник до прямоугольника (см. рис. 20).

Чтобы найти площадь четырёхугольника, нужно из площади прямоугольника со сторонами 5 и 6 вычесть площади четырёх прямоугольных треугольников и квадрата. Попробуйте посчитать площади прямоугольных треугольников самостоятельно, величины этих площадей указаны на рисунке.

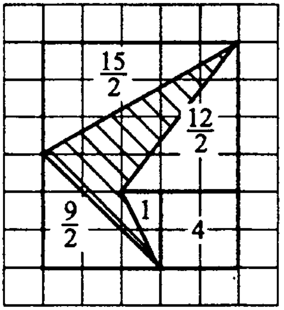


Рис. 20.

Получаем площадь заданного четырёхугольника:

$S = 30 - 7{,}5 - 6 - 1 - 4{,}5 - 4 = 7$.

Ответ: 7.

Площади круга и сектора

ⓘ *Немного полезной информации*

Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса:

$$S = \pi R^2.$$

Задачи с решениями

6. Найдите площадь S круга, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 21). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

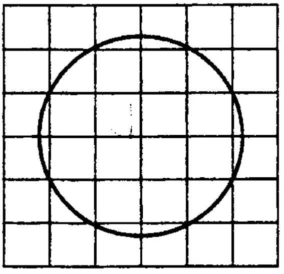


Рис. 21.

Решение.

Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса. Найдём радиус. Из центра O проведём радиус OA. В треугольнике OAB сторона OA — гипотенуза, катеты равны 1 и 2 (см. рис. 22).

Найдём гипотенузу по теореме Пифагора.
$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Площадь круга $S = \pi(\sqrt{5})^2 = 5\pi$.
$\frac{S}{\pi} = \frac{5\pi}{\pi} = 5$.

Ответ: 5.

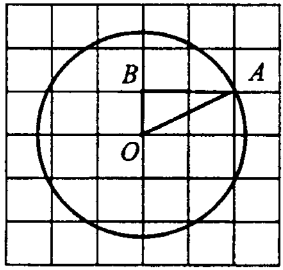


Рис. 22.

7. На клетчатой бумаге нарисовано два круга (см. рис. 23). Площадь внутреннего круга равна 3. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

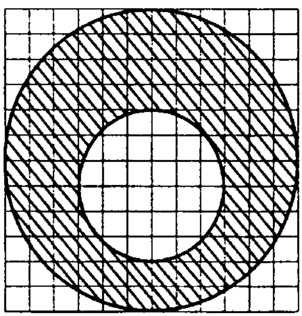


Рис. 23.

Решение.

Радиус R внутреннего круга — 3 клетки, его площадь равна $\pi R^2 = 3$. Радиус внешнего круга — 6 клеток, то есть $2R$, поэтому его площадь равна $\pi \cdot (2R)^2 = 3 \cdot 4 = 12$. Площадь заштрихованной фигуры равна разности $12 - 3 = 9$.

Ответ: 9.

ⓘ *Немного полезной информации*

Площадь сектора с углом α градусов равна $\dfrac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$.

Задачи с решениями

8. Найдите площадь S сектора с углом 18 градусов и радиусом 4.

В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

Решение.

Посчитаем площадь сектора по формуле

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 18}{360} = 0{,}8\pi. \quad \frac{S}{\pi} = 0{,}8.$$

Ответ: 0,8.

9. Найдите площадь S заштрихованного сектора, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 24). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

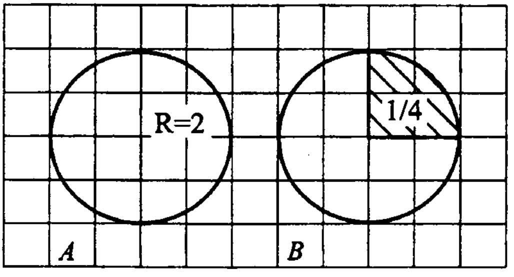


Рис. 24.

Решение.

На рисунке A площадь круга с радиусом $R = 2$ равна $\pi R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

На рисунке B площадь сектора составляет $\frac{1}{4}$ от площади круга (если круг разделить на 4 равные части, то одна из них как раз и будет равна заданному сектору), то есть $\frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$.

Можно было решать задачу по-другому. Площадь сектора равна площади круга, делённой на 4. $S : 4 = 4\pi : 4 = \pi$.

$\frac{S}{\pi} = 1.$

Ответ: 1.

10. Найдите площадь S заштрихованных секторов на рисунках C и D, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 25). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

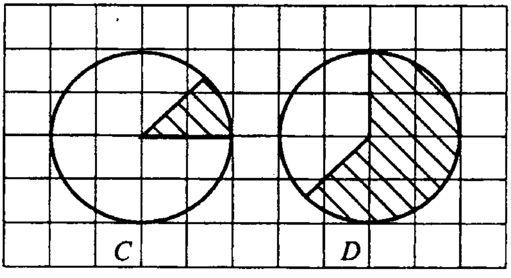


Рис. 25.

Решение.

Посчитаем, какая часть круга закрашена. Проведя дополнительные линии (см. рис. 26), видим, что сектор на рисунке C составляет $\frac{1}{8}$ часть круга, а сектор на рисунке D составляет $\frac{5}{8}$ частей круга (круг разделён на 8 равных частей, и закрашено 5 таких частей).

Находим площади секторов на рисунках C и D.

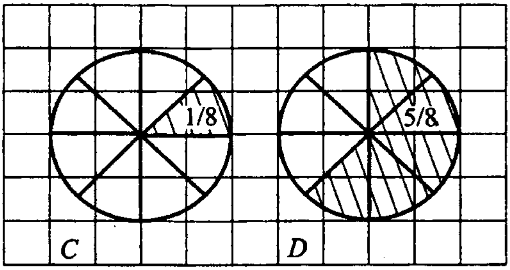


Рис. 26.

1-й способ.

Поделим площадь круга на 8, получим площадь сектора на рисунке C, потом умножим эту площадь на 5, получим площадь сектора на рисунке D.

$$S_C = 4\pi : 8 = 0{,}5\pi;\ \frac{S}{\pi} = 0{,}5;\ S_D = 4\pi : 8 \cdot 5 = 2{,}5\pi;\ \frac{S}{\pi} = 2{,}5.$$

Ответ: 0,5 и 2,5.

2-й способ.

Найдём площадь $\frac{1}{8}$ круга.

$$S_C = \frac{1}{8} \cdot 4\pi = 0{,}5\pi;\ \frac{S}{\pi} = 0{,}5;\ S_D = \frac{5}{8} \cdot 4\pi = 2{,}5\pi;\ \frac{S}{\pi} = 2{,}5.$$

Ответ: 0,5 и 2,5.

ⓘ *Немного полезной информации*

А теперь перейдём к формулам, которые неплохо бы знать каждому выпускнику, но, к сожалению, многие забывают их к 11-му классу. Заметим, что в принципе можно обойтись и без них при решении данных задач (находя площадь как сумму или разность площадей прямоугольников и треугольников), но иногда это приводит к длинным вычислениям.

Площадь трапеции

Напомним, что **трапеция** — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований $(a + b)$ на высоту (h):

$$S = \frac{(a+b)h}{2}.$$

На рисунке 27 приведены чертежи некоторых трапеций, у каждой из которых показаны основания a и b и высота h.

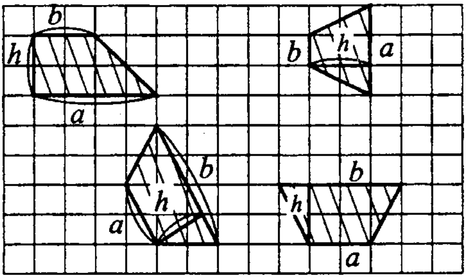


Рис. 27.

Задачи с решениями

11. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 28). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

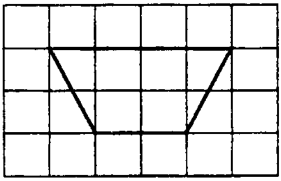


Рис. 28.

Решение.

1-й способ.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований на высоту. Обозначим трапецию $ABCD$. Проведём из точки D высоту DM к основанию AB. По рисунку 29 видно, что высота равна 2 см, основания $AB = 4$ см, $DC = 2$ см.

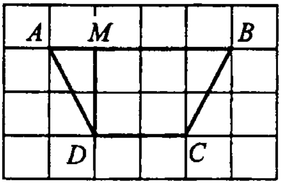


Рис. 29.

Площадь трапеции $S = \dfrac{(2+4)\cdot 2}{2} = 6$ (см^2).

Ответ: 6.

2-й способ.

Разобьём трапецию на три части — два прямоугольных треугольника и квадрат. Сторона квадрата 2, площадь квадрата $S_1 = 2 \cdot 2 = 4$, катеты каждого из прямоугольных треугольников 1 и 2, площадь каждого из прямоугольных треугольников равна половине произведения катетов, $S_2 = 1 \cdot 2 : 2 = 1$. Получаем, что площадь трапеции $S = 4 + 1 + 1 = 6$ (см^2).

Ответ: 6.

12. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 30). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

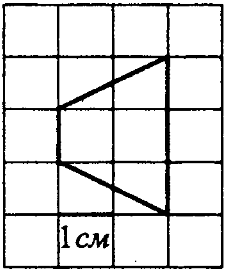


Рис. 30.

Решение.

Обозначим трапецию $ABCD$. Проведём высоту DH. На рисунке 31 видно, что высота равна 2 см, основание $AD = 1$ см, $BC = 3$ см.

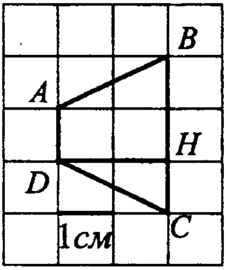


Рис. 31.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту: $S = \dfrac{(1+3)\cdot 2}{2} = 4$ (см^2).

Ответ: 4.

13. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1;2)$, $(1;6)$, $(6;12)$, $(6;6)$ (см. рис. 32).

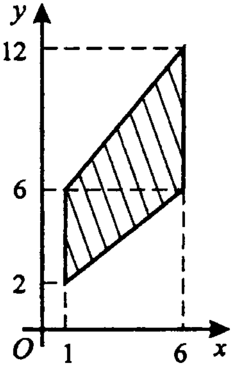


Рис. 32.

Решение.

1-й способ.

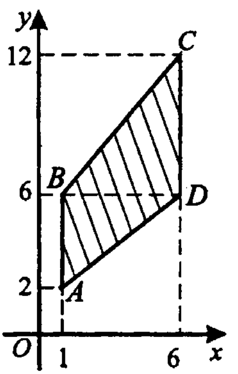


Рис. 33.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований на высоту. Обозначим трапецию $ABCD$ (см. рис. 33). Проведём из точки B перпендикуляр к CD. Этим перпендикуляром будет BD. Высота $BD = 6 - 1 = 5$, основания трапеции AB и CD равны 4 и 6 соответственно. Найдём площадь трапеции $S = \dfrac{(6+4)\cdot 5}{2} = 25$.

Ответ: 25.

2-й способ.

Разобьём трапецию на два прямоугольных треугольника ABD и DBC (см. рис. 33). Площадь прямоугольного треугольника ABD с катетами $AB = 4$ и $BD = 5$ равна половине произведения катетов, то есть $4 \cdot 5 : 2 = 10$. Площадь прямоугольного треугольника DBC с катетами $DB = 5$ и $CD = 6$ равна половине произведения катетов, то есть $6 \cdot 5 : 2 = 15$. Площадь трапеции равна сумме площадей треугольников ABD и DBC. Получим $S = 10 + 15 = 25$.

Ответ: 25.

Площадь ромба

ⓘ *Немного полезной информации*

Напомним, что **ромб** — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны и делятся пополам точкой пересечения.

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

На рисунке 34 приведены чертежи некоторых ромбов, у которых показаны диагонали.

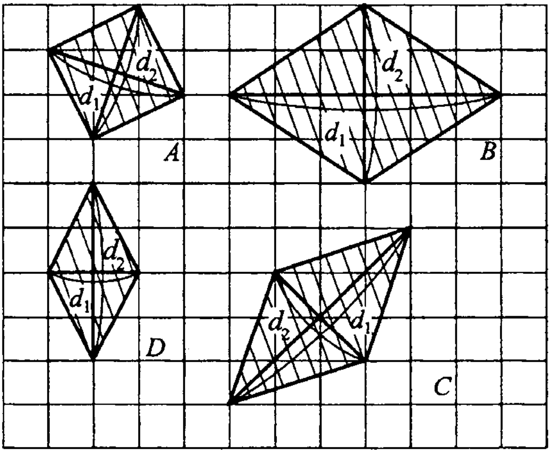


Рис. 34.

Обратите внимание, площади ромбов для рисунков B и D легко посчитать по этой формуле, а для рисунков A и C сначала придётся вычислить длины диагоналей. Например, для рисунка A длины диагоналей вычислим по теореме Пифагора: $d_1 = d_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $S_A = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$.

На рисунках B и D диагонали каждого из ромбов проходят по линиям клеток, считаем их длину по рисунку. Диагонали ромба B равны 6 и 4, диагонали ромба D равны 2 и 4. Найдём их площади. $S_B = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$, $S_D = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4$.

Задачи с решениями

14. Найдите площадь ромба на рисунке C (см. рис. 34).

Решение.

1-й способ.

Диагонали находим как гипотенузы прямоугольных треугольников ACB и MPK по теореме Пифагора (см. рис. 35).

Диагональ $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$, $MP = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Площадь ромба $S = \dfrac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8$.

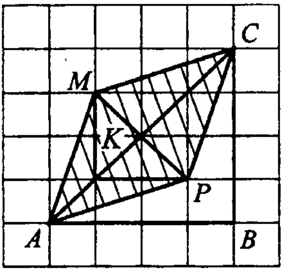


Рис. 35.

Ответ: 8.

2-й способ.

Достроим ромб $AMCP$ до квадрата $ATCB$ (см. рис. 36).

Чтобы найти площадь ромба, нужно из площади квадрата $ATCB$, которая составляет 16 клеток, вычесть площадь че-

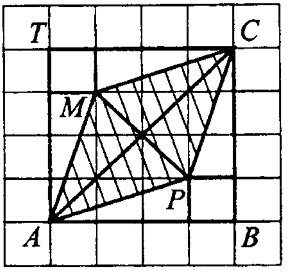


Рис. 36.

тырёх треугольников с катетами 1 и 3 и площадью 1,5 и двух квадратов со стороной 1 и площадью 1. Тогда площадь ромба равна $16 - (1{,}5 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 8$.

Ответ: 8.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 37). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

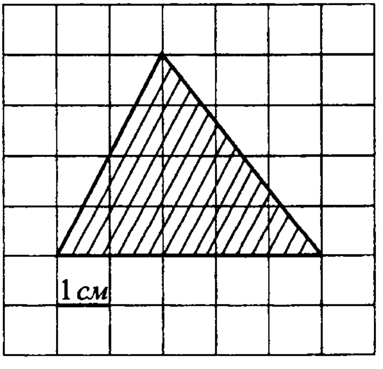


Рис. 37.

2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 38). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

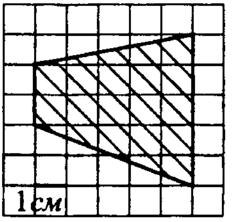


Рис. 38.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 39.

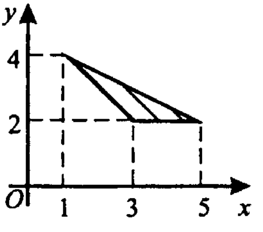


Рис. 39.

4. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 4), (5; 3), (3; 2) (см. рис. 40).

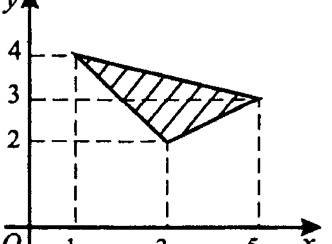


Рис. 40.

5. Найдите площадь S кольца, ограниченного окружностями, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 41). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

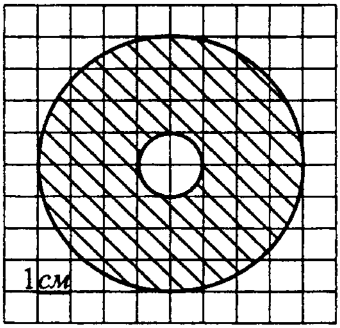


Рис. 41.

Вариант 2

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 42). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

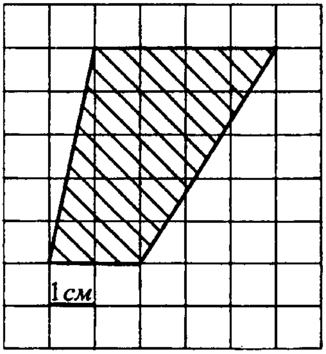


Рис. 42.

2. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1; 2), (1; 5), (3; 3), (3; 6) (см. рис. 43).

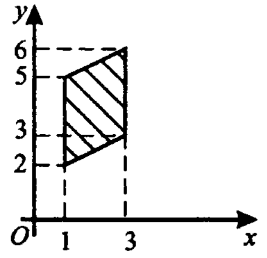


Рис. 43.

3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1; 0), (6; 3), (5; 6), (0; 3) (см. рис. 44).

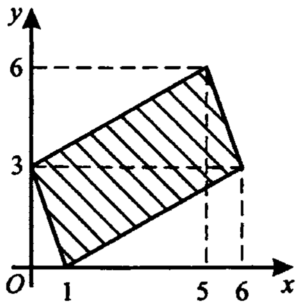


Рис. 44.

4. Найдите площадь S треугольника, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 45).

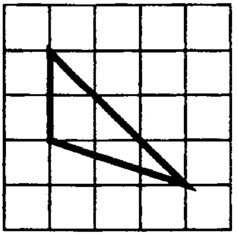


Рис. 45.

5. Найдите площадь S кольца, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 46). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

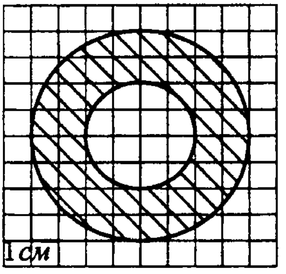


Рис. 46.

Вариант 3

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 47). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

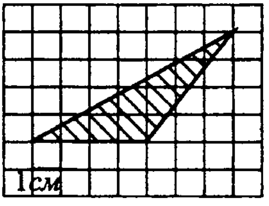


Рис. 47.

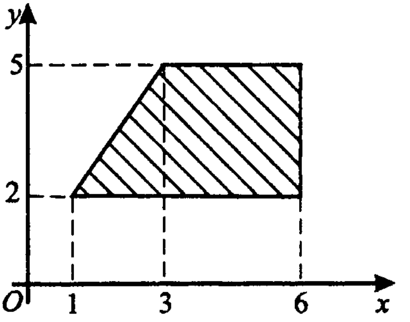


Рис. 48.

2. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1; 2)$, $(3; 5)$, $(6; 5)$, $(6; 2)$ (см. рис. 48).

3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 49.

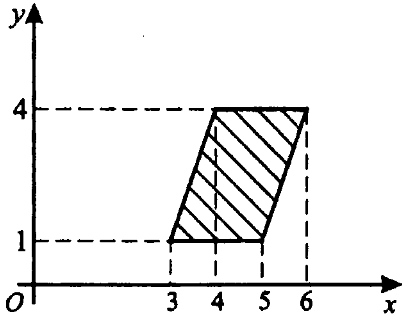


Рис. 49.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 50). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

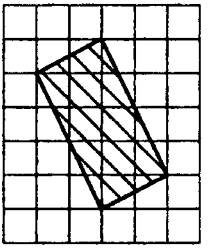


Рис. 50.

5. Найдите площадь S сектора, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 51). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

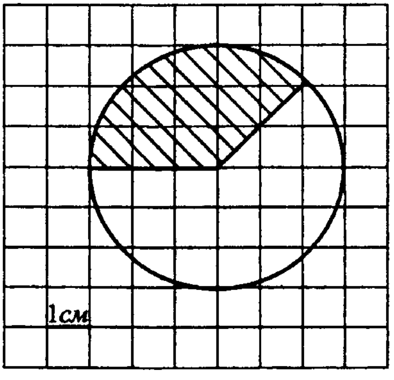


Рис. 51.

Вариант 4

1. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 52.

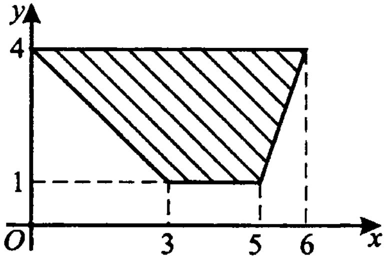


Рис. 52.

2. На рисунке 53 изображён треугольник. Найдите его площадь.

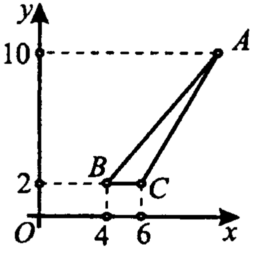


Рис. 53.

3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (12; 2), (10; 12), (6; 12) (см. рис. 54).

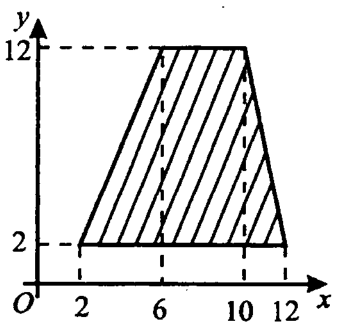


Рис. 54.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 55). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

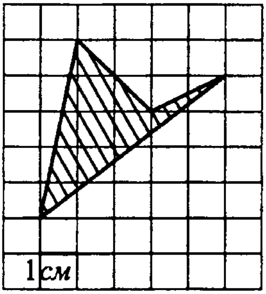


Рис. 55.

5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображены две окружности (см. рис. 56). Найдите площадь S заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

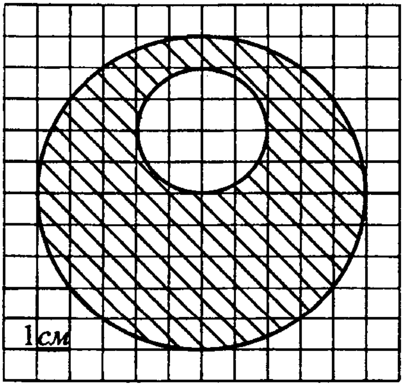


Рис. 56.

Вариант 5

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 57). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

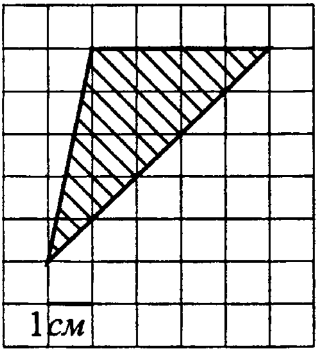


Рис. 57.

2. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1; 2), (2; 5), (5; 3), (6; 6) (см. рис. 58).

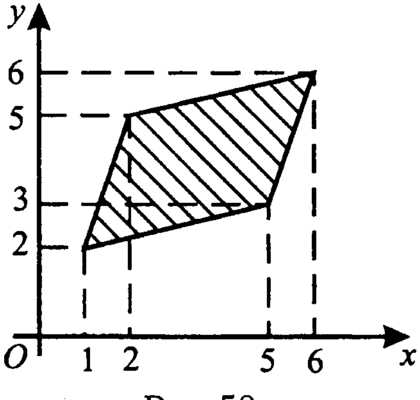


Рис. 58.

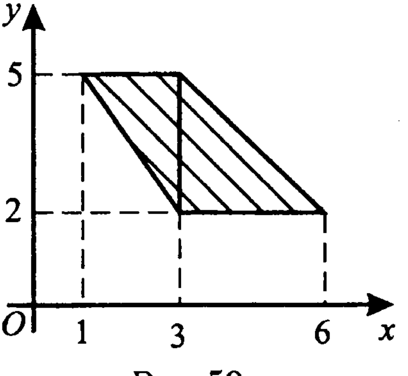


Рис. 59.

3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 59.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 60). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

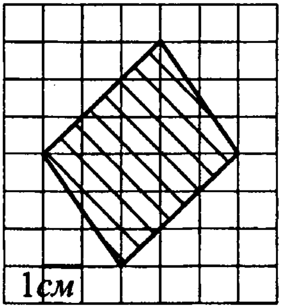


Рис. 60.

5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображены две окружности (см. рис. 61). Найдите площадь S заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

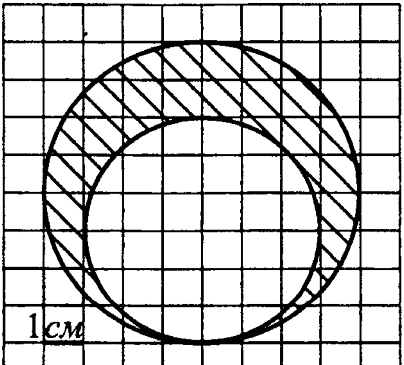


Рис. 61.

§2. Координаты и векторы

Диагностическая работа

1. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(3, 8)$ относительно начала координат (см. рис. 62).

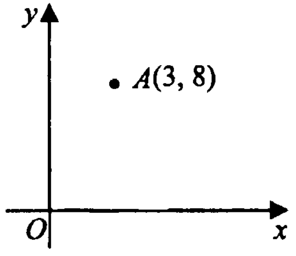


Рис. 62.

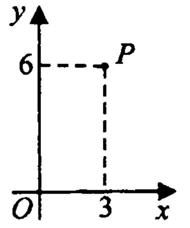


Рис. 63.

2. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $A(5, -8)$ и $C(-3, -2)$.

3. Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(3, 6)$, чтобы она касалась оси абсцисс (см. рис. 63)?

4. Диагонали ромба $ABCD$ равны 60 и 80 (см. рис. 64). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

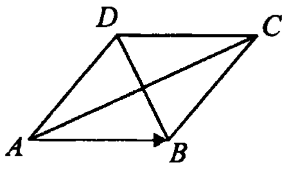


Рис. 64.

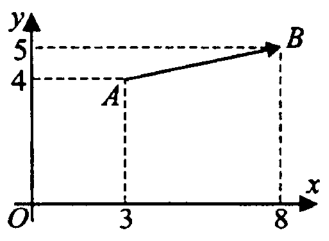


Рис. 65.

5. Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{AB}$ (см. рис. 65).

Координаты точек

ⓘ *Немного полезной информации*

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy (см. рис. 66).

Длина отрезка AB, для которого известны координаты его концов $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$, определяется по формуле $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Координаты середины отрезка вычисляются по формулам:
$x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

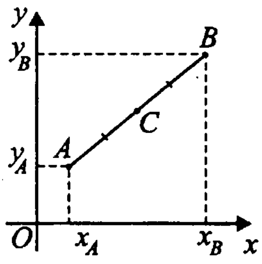


Рис. 66.

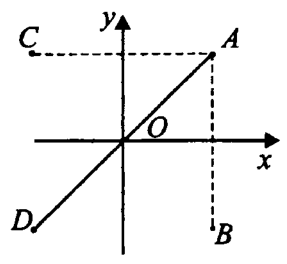


Рис. 67.

Если точки A и B симметричны относительно оси Ox (оси абсцисс), то их ординаты противоположны (см. рис. 67), а абсциссы равны: $A(x;\ y)$, $B(x;\ -y)$.

Если точки A и C симметричны относительно оси Oy, то их абсциссы противоположны, а ординаты равны: $A(x; y)$, $C(-x; y)$.

Если точки A и D симметричны относительно начала координат, то их координаты противоположны: $A(x;\ y)$, $D(-x;\ -y)$.

Задачи с решениями

1. Найдите расстояние от точки B с координатами $(12; -5)$ до начала координат (см. рис. 68).

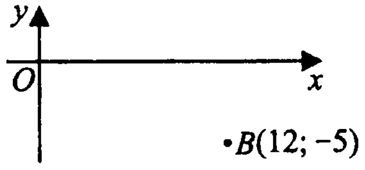


Рис. 68.

Решение.

Начало координат находится в точке $O(0;\ 0)$. Расстояние от O до B равно $OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} =$
$= \sqrt{(12-0)^2 + (-5-0)^2} = 13.$

Ответ: 13.

2. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(2; 5)$ относительно оси Oy (см. рис. 69).

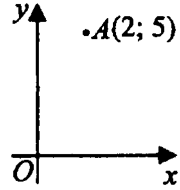


Рис. 69.

Решение.

Точке A симметрична точка $B(-2;\ 5)$ (см. рис. 70). Абсцисса точки B равна -2.

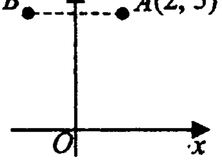


Рис. 70.

Ответ: -2.

3. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(-4; 6)$ и $B(2; 4)$ (см. рис. 71).

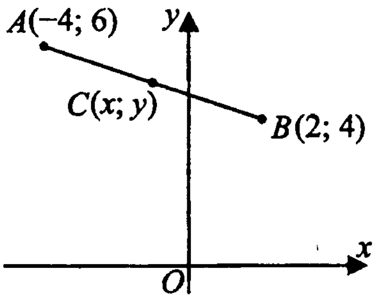


Рис. 71.

Решение.

Пусть $C(x;\ y)$ — середина AB. Тогда ордината точки C $y = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6+4}{2} = 5$. Ордината равна 5.

Ответ: 5.

4. Точки $A(-1; -2)$, $B(4; -1)$, $C(6; 5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей (см. рис. 72).

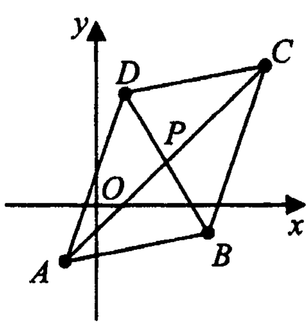


Рис. 72.

Решение.

Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Абсцисса точки P равна $\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+6}{2} = 2{,}5.$

Ответ: 2,5.

5. Найдите ординату центра окружности (см. рис. 73), описанной около прямоугольника $ABCD$, вершины которого имеют координаты соответственно $(2; 2)$, $(2; -6)$, $(-4; -6)$, $(-4; 2)$.

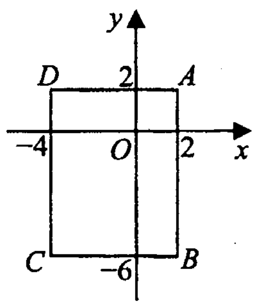


Рис. 73.

Решение.

Центр описанной окружности прямоугольника лежит на середине диагонали. Найдём ординату середины AC. $y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + (-6)}{2} = -2.$

Ответ: -2.

6. Точки $O(0;0)$, $B(8;2)$, $C(0;8)$ являются вершинами параллелограмма (см. рис. 74). Найдите ординату точки M.

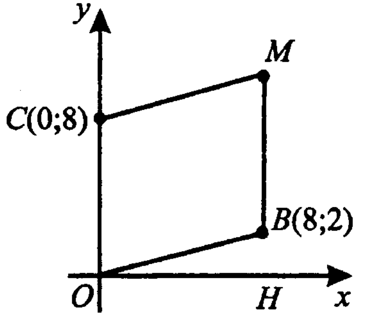


Рис. 74.

Решение.

Ордината — это координата по оси Oy. Она равна длине отрезка HM (см. рис. 75). $HB = 2$, так как ордината B равна 2. Поскольку противоположные стороны параллелограмма равны, то $OC = BM = 8$. Тогда $HM = 2 + 8 = 10$.

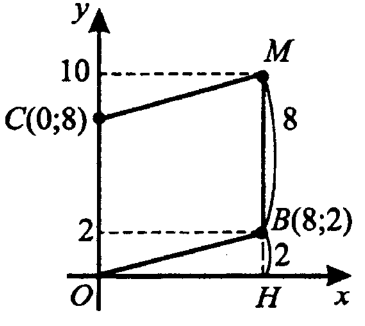


Рис. 75.

Ответ: 10.

7. Прямая a проходит через точки с координатами $(0;2)$ и $(-4;0)$. Прямая b проходит через точку с координатами $(0;-4)$ и параллельна прямой a (см. рис. 76). Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

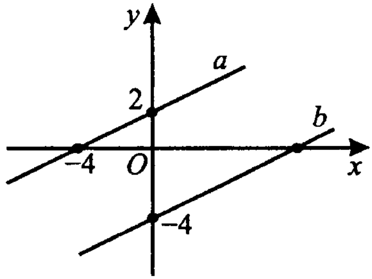


Рис. 76.

Решение.

1-й способ.

Нарисуем картинку на клетчатой бумаге (см. рис. 77).

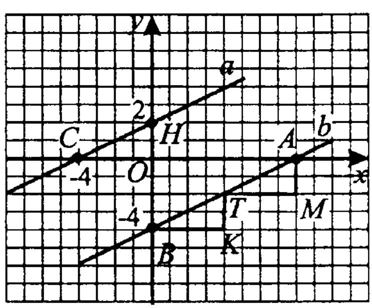


Рис. 77.

Абсцисса точки пересечения прямой b с осью Ox равна длине отрезка OA. Так как прямые параллельны, углы HCO и ABK равны, достроим 2 треугольника BKT и TMA, равных треугольнику HCO.

$OA = BK + TM = 4 + 4 = 8.$

Ответ: 8.

2-й способ.

Треугольники CHO и BOA подобны по трём углам (см. рис. 78), значит, их стороны пропорциональны. $OB : OH = OA : OC$, тогда $4 : 2 = OA : 4$. $OA = 8$.

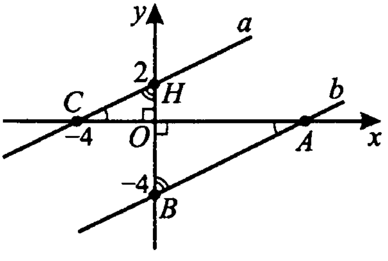


Рис. 78.

Ответ: 8.

8. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(12; 0)$ и $(0; 12)$ (см. рис. 79).

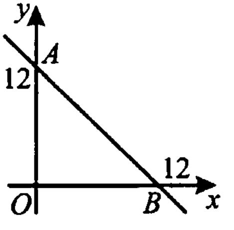


Рис. 79.

Решение.

1-й способ.

Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, который прямая образует с положительным направлением оси

Ox (там, где на оси стрелочка). В нашей задаче это угол a (см. рис. 80).

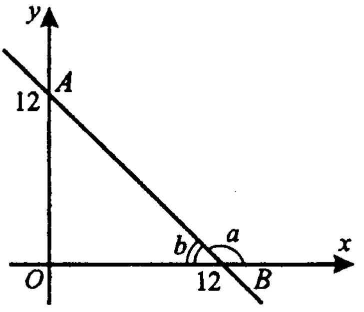


Рис. 80.

Он тупой, значит, его тангенс отрицательный и по модулю равен тангенсу угла $b = 180° - a$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB с катетами $OA = 12$ и $OB = 12$. Тангенс угла b равен $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{12}{12} = 1$. Тангенс угла a равен -1. Угловой коэффициент прямой равен -1.

Ответ: -1.

2-й способ.

Угловой коэффициент прямой K можно получить так: $K = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δy и Δx — разницы координат двух любых точек прямой. Например, для $A(0;12)$ $x_1 = 0$, $y_1 = 12$, для $B(12;0)$ $x_2 = 12$, $y_2 = 0$. $\Delta y = y_1 - y_2 = 12 - 0 = 12$. $\Delta x = x_1 - x_2 = 0 - 12 = -12$. $K = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 12 : (-12) = -1$.

Ответ: -1.

Векторы

Ⓘ *Немного полезной информации*

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом, называется **вектором**.

Вектор характеризуется модулем (длиной отрезка) и направлением. Два вектора, имеющие одинаковые модули и направления, равны.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают $\overrightarrow{AB}$ или строчной (маленькой) буквой, например $\vec{a}$ (см. рис. 81).

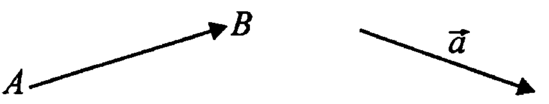


Рис. 81.

Модуль (длину) вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$.

Сумма векторов — это вектор, который можно получить двумя способами (см. рис. 82). Заметим, что для любых точек A, B и C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

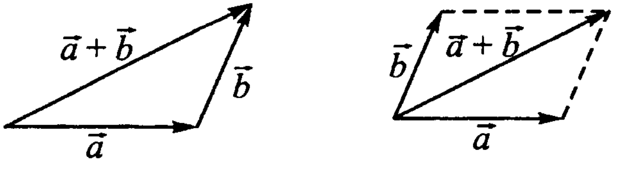


Рис. 82.

Разность векторов тоже можно получить двумя способами: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ или $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (см. рис. 83).

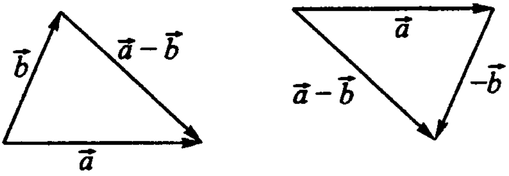


Рис. 83.

Задачи с решениями

9. Стороны правильного треугольника KNP равны 10 (см. рис. 84). Найдите длину вектора $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP}$.

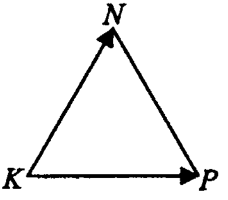


Рис. 84.

Решение.

$\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{PN}$, $|\overrightarrow{PN}| = 10$.

Ответ: 10.

10. Стороны правильного треугольника KNP равны 10 (см. рис. 85). Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP}$.

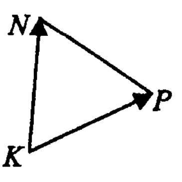


Рис. 85.

Решение.

Достроим $\triangle KPN$ до ромба $KPTN$ (см. рис. 86). $\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KT}$. Найдём длину KT из $\triangle KTP$ с углом $P = 120°$. Согласно теореме косинусов,
$KT^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (-0{,}5) = 300.$

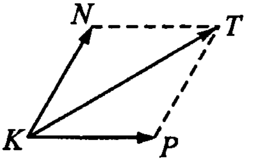


Рис. 86.

Ответ: 300.

Координаты вектора

① *Немного полезной информации*

Пусть точки A и B имеют координаты $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле $x = x_B - x_A$, $y = y_B - y_A$.

Длина вектора, или модуль вектора $\overrightarrow{AB}\{x;\ y\}$:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Заметим, что если ввести координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, что длины этих векторов равны 1, а направление вектора $\vec{i}$ совпадает с направлением оси Ox, вектора $\vec{j}$ — оси Oy, то любой вектор $\vec{a}$ на координатной плоскости можно представить в виде разложения $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где числа x, y называют координатами вектора $\vec{a}$. Обычно записывают $\vec{a}\{x;\ y\}$ или $\vec{a}(x;\ y)$.

Координаты суммы и разности векторов $\vec{a}\{x_a;\ y_a\}$ и $\vec{b}\{x_b;\ y_b\}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\{x_c;\ y_c\}, x_c = x_a + x_b, y_c = y_a + y_b.$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{p}\{x_p;\ y_p\}, x_p = x_a - x_b, y_p = y_a - y_b.$$

Для параллелограмма известно, что его противоположные стороны равны и параллельны. Например, для параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 87) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

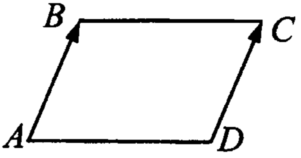


Рис. 87.

Диагонали параллелограмма пересекаются в середине диагоналей, поэтому $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ (см. рис. 88).

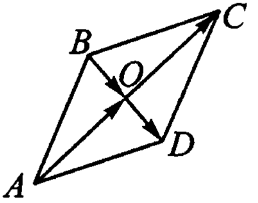


Рис. 88.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a}\{x_a;\ y_a\}$, $\vec{b}\{x_b;\ y_b\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

Задачи с решениями

11. Найдите длину вектора $\vec{a}\{5; -12\}$ (см. рис 89).

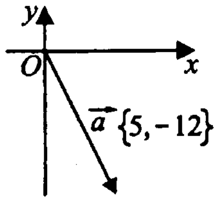


Рис. 89.

Решение.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13.$

Ответ: 13.

12. Точки $A(-1; -2)$, $B(4; -1)$, $C(6; 5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 90).

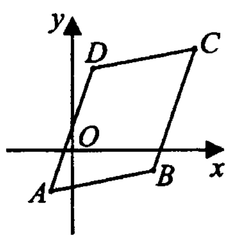


Рис. 90.

Решение.

Стороны параллелограмма $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, поэтому $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Найдём ординаты векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. $y_D - y_A = y_C - y_B$, $y_D - (-2) = 5 - (-1)$, $y_D = 6 - 2 = 4$.

Ответ: 4.

13. Стороны правильного треугольника MKN равны 10 (см. рис. 91). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{KN}$ и $\overrightarrow{KM}$.

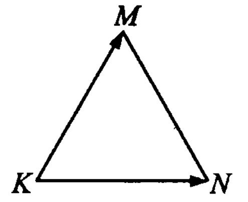


Рис. 91.

Решение.

Скалярное произведение векторов вычисляют по формуле $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = |\overrightarrow{KN}| \cdot |\overrightarrow{KM}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами. В правильном $\triangle MKN$ углы равны по 60°, поэтому $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 100 \cdot 0{,}5 = 50$.

Ответ: 50.

14. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 92).

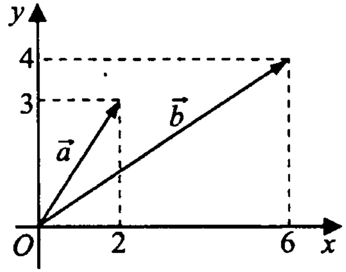


Рис. 92.

Решение.

Найдём координаты вектора $\vec{a}$. Он выходит из начала координат, поэтому его координаты равны координатам его конца: $\vec{a}\{2;\ 3\}$. Аналогично $\vec{b}\{6;\ 4\}$.

$\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{2-6;\ 3-4\}$, то есть $\{-4;\ -1\}$. Сумма координат $-4 + (-1) = -5$.

Ответ: -5.

15. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 92).

Решение.

$\vec{a}\{2;\ 3\}$, $\vec{b}\{6;\ 4\}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{2+6;\ 3+4\}$ или $\{8;\ 7\}$.

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 8^2 + 7^2 = 64 + 49 = 113$.

Ответ: 113.

16. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 92).

Решение.

$\vec{a}\{2;\ 3\}$, $\vec{b}\{6;\ 4\}$. Тогда
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24.

17. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 93). Ответ выразите в градусах.

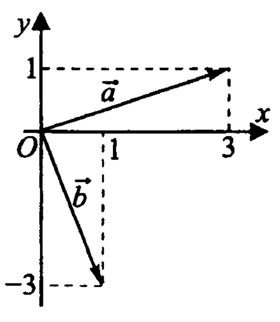


Рис. 93.

Решение.

$\vec{a}\{3;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ -3\}$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{3\cdot 1 + 1\cdot(-3)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = 0.$

$\alpha = 90^\circ$.

Ответ: 90.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(-6; 4)$ и $B(4; 16)$.

2. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 94).

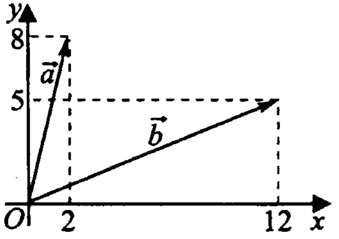


Рис. 94.

3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 94).

4. Стороны правильного треугольника MKP равны 12 (см. рис. 95). Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MP}$.

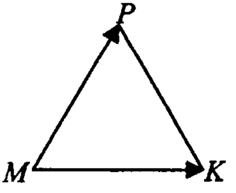


Рис. 95.

5. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 96). Ответ дайте в градусах.

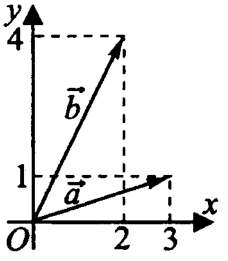


Рис. 96.

Вариант 2

1. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $O(0; 0)$ и $A(6; 4)$.

2. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и отрезка, соединяющего точки $A(-4; 6)$ и $B(4; 0)$.

3. Точки $O(0; 0)$, $A(8; 6)$, $B(3; 4)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 97).

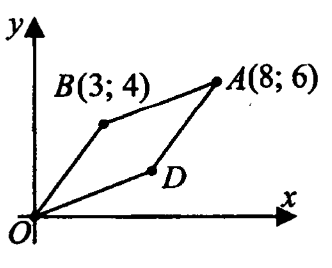


Рис. 97.

4. Найдите длину вектора $\vec{a}\ \{9; 40\}$ (см. рис. 98).

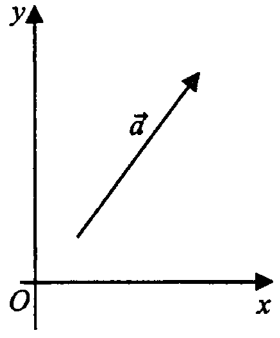


Рис. 98.

5. Стороны правильного треугольника MKP равны $5\sqrt{3}$ (см. рис. 99). Найдите длину вектора $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MK}$.

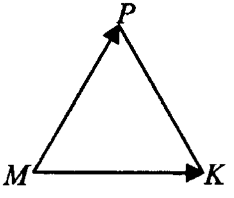


Рис. 99.

Вариант 3

1. Найдите ординату точки, симметричной точке $B(6; -2)$ относительно оси абсцисс (см. рис. 100).

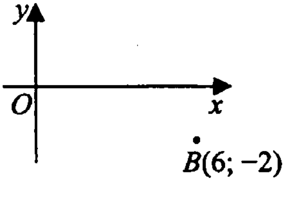


Рис. 100.

2. Найдите косинус угла наклона отрезка, соединяющего точки $O(0; 0)$ и $A(5; 12)$, к оси абсцисс (см. рис. 101). В ответ запишите косинус угла, умноженный на 26.

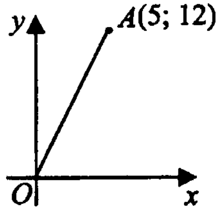


Рис. 101.

3. Точки $O(0; 0)$, $A(8; 6)$, $B(3; 4)$ и $D(5; 2)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей (см. рис. 102).

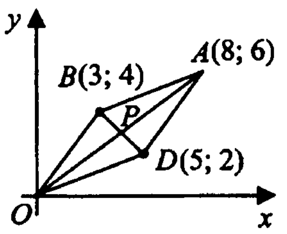


Рис. 102.

4. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(-2; 4)$ имеет координаты $(6; 2)$ (см. рис. 103). Найдите сумму координат точки B.

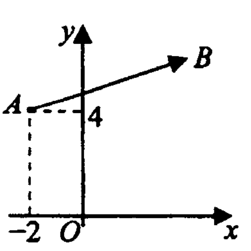


Рис. 103.

5. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 15 и 6 (см. рис. 104). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

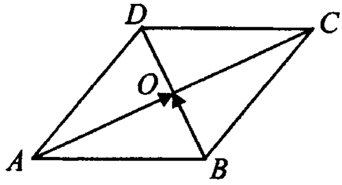


Рис. 104.

Вариант 4

1. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(6; 4)$ и $B(14; -2)$.

2. Найдите ординату точки пересечения оси Oy и прямой, проходящей через точку $B(7; 3)$ и параллельной прямой, проходящей через начало координат и точку $A(7; 6)$ (см. рис. 105).

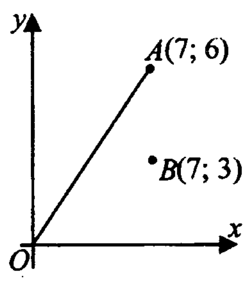


Рис. 105.

3. Найдите абсциссу центра окружности (см. рис. 106), описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(9; 0)$, $(0; 12)$, $(9; 12)$.

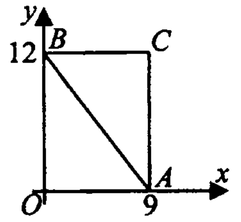


Рис. 106.

4. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 16 (см. рис. 107). Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

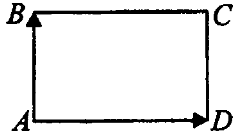


Рис. 107.

5. Стороны правильного треугольника MKP равны 14. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MP}$.

Вариант 5

1. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 и 4. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

2. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(1;5)$ имеет координаты $(4;2)$. Найдите ординату точки B.

3. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 108).

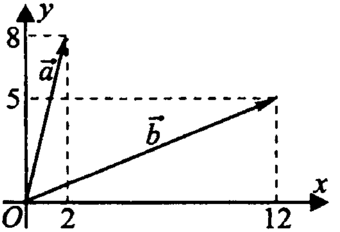


Рис. 108.

4. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 5. Диагонали пересекаются в точке O (см. рис. 109). Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

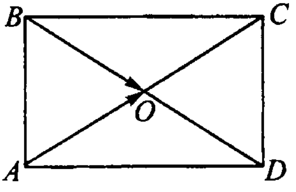


Рис. 109.

5. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 110).

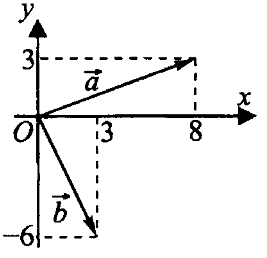


Рис. 110.

§3. Углы и длины

Диагностическая работа

1. В ромбе $MPKT$ угол MTP равен 41° (см. рис. 111). Найдите угол PKT. Ответ дайте в градусах.

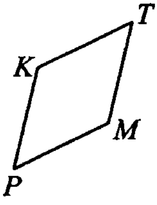


Рис. 111.

2. Касательные MA и MB к окружности образуют угол AMB, равный 159°. Найдите величину меньшей дуги AB, ограниченной точками касания. Ответ дайте в градусах (см. рис. 112).

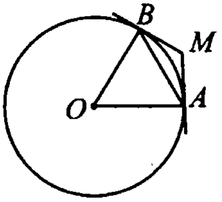


Рис. 112.

5. Зак. № 249

3. Найдите величину угла MPK. Ответ дайте в градусах (см. рис. 113).

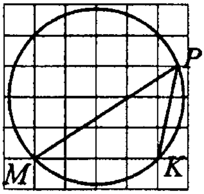


Рис. 113.

4. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 12 и 5, считая от вершины, противолежащей основанию (см. рис. 114). Найдите периметр треугольника.

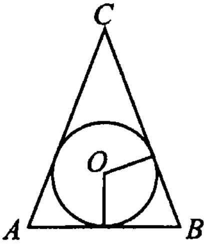


Рис. 114.

5. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные величины которых относятся соответственно как $5 : 3 : 4 : 6$ (см. рис. 115). Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

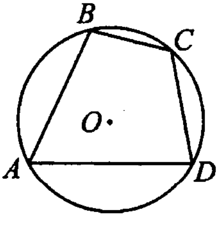


Рис. 115.

Свойства треугольника

Немного полезной информации

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром**.

$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC.$

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника**.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника**.

Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника**.

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. На рисунке 116 MN — средняя линия треугольника ABC.

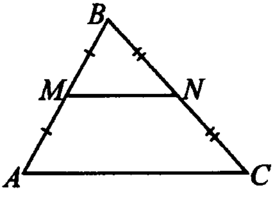


Рис. 116.

1. Средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна половине этой стороны. $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

2. Средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника (см. рис. 117).

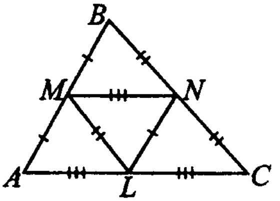


Рис. 117.

Сумма углов треугольника равна 180°. На рисунке 118 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

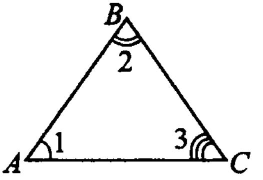


Рис. 118.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

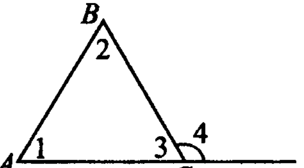


Рис. 119.

Например, $\angle 4$ и $\angle 3$ — смежные, следовательно, $\angle 4$ — **внешний угол** треугольника ABC (см. рис. 119). Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Угол 4 — внешний угол треугольника ABC. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

Задачи с решениями

1. В треугольнике MPK угол P равен 35° (см. рис. 120), угол K равен 95°, MB — биссектриса, E — такая точка на MP, что $ME = MK$. Найдите угол PBE. Ответ дайте в градусах.

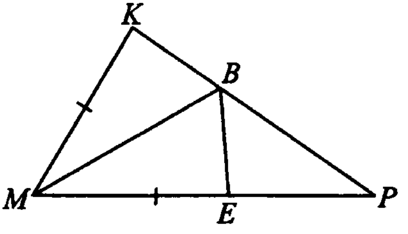


Рис. 120.

Решение.

$\triangle MKB = \triangle MBE$ по первому признаку ($KM = ME$ по условию, MB — общая сторона. $\angle KMB = \angle BME$, так как MB — биссектриса), $\angle BEM = \angle K = 95°$.

Внешний угол $\triangle BEP$ равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то есть $\angle BEM = \angle P + \angle PBE$.

$\angle PBE = 95° - 35° = 60°$.

Ответ: 60.

2. На рисунке 121 угол 1 равен 52°, угол 2 равен 26°, угол 3 равен 48°. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.

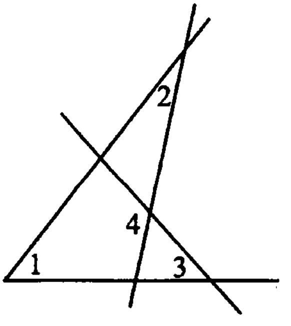


Рис. 121.

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°, а четырёхугольника — 360°.

В $\triangle ACE$ $\angle 5 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 52° - 26° = 102°$ (см. рис. 122).

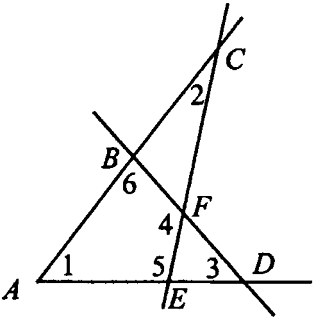


Рис. 122.

В $\triangle ABD$ $\angle 6 = 180° - \angle 1 - \angle 3 = 180° - 52° - 48° = 80°$.
В четырёхугольнике $ABFE$ $\angle 1 + \angle 6 + \angle 4 + \angle 5 = 360°$,
$\angle 4 = 360° - 52° - 80° - 102° = 126°$.

Ответ: 126.

3. В треугольнике VHR стороны $VR = HR = 12$, высота VD равна 6 (см. рис. 123). Найдите угол R. Ответ дайте в градусах.

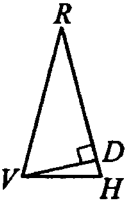


Рис. 123.

Решение.

В прямоугольном $\triangle VDR$ $\angle D = 90°$, гипотенуза $VR = 12$, катет $VD = 6$. Если катет равен половине гипотенузы, то напротив этого катета лежит угол, равный 30°. Поэтому $\angle R = 30°$.

Ответ: 30.

4. В треугольнике ABC CH — высота, AK — биссектриса, O — точка пересечения прямых CH и AK, угол BAK равен 31°. Найдите угол AOC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 124).

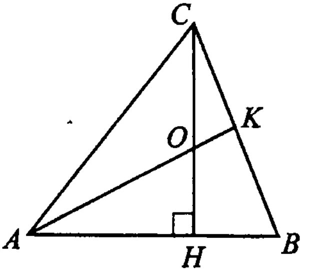


Рис. 124.

Решение.

AK — биссектриса, значит, $\angle CAK = \angle BAK = 31°$, $\angle CAH = 2 \cdot 31° = 62°$.

В $\triangle ACH$ $\angle AHC = 90°$, $\angle HCA = 180° - 90° - 62° = 28°$.

Рассмотрим $\triangle ACO$.

$\angle AOC = 180° - \angle HCA - \angle CAO = 180° - 28° - 31° = 121°$.

Ответ: 121.

5. Острые углы прямоугольного треугольника равны 39° и 51°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 125).

Решение.

В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 39°$, $\angle B = 51°$.

CD — биссектриса, $\angle ACD = \angle DCB = 45°$.

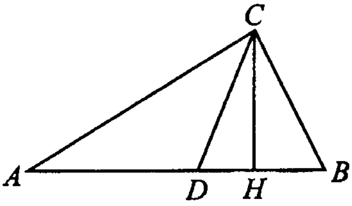


Рис. 125.

CH — высота, $\angle AHC = 90°$. Нужно найти $\angle DCH$, он равен разности $\angle ACH - \angle ACD$.

Найдём $\angle ACH$ из $\triangle ACH$.

$\angle ACH = 180° - 90° - 39° = 51°$. $\angle DCH = 51° - 45° = 6°$.

Ответ: 6.

6. Один из внешних углов треугольника равен 85°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $2 : 3$ (см. рис. 126). Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

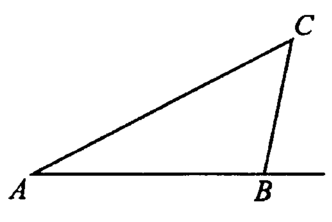


Рис. 126.

Решение.

Сумма углов, не смежных с данным внешним углом, равна величине этого внешнего угла, то есть $\angle A + \angle C = 85°$.

Обозначим $\angle A = 2x$, $\angle C = 3x$.

$2x + 3x = 85$, $5x = 85$, $x = 17$.

$\angle C = 3x = 3 \cdot 17 = 51°$ — наибольший из углов A и C.

Ответ: 51.

7. Основания трапеции AB и DC равны 14 и 10 соответственно (см. рис. 127). Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции диагональ BD.

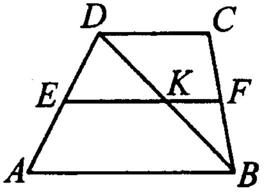


Рис. 127.

Решение.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции, и её концы являются серединами боковых сторон. $DC \parallel AB \parallel EF$, $ED = EA$, $BF = CF$. Параллельные прямые DC, EF и AB проходят через концы равных отрезков на одной прямой (AD), значит, и на прямой DB они отсекают равные отрезки (по теореме Фалеса). $BK = DK \Rightarrow EK$ и KF — средние линии $\triangle ADB$ и $\triangle DCB$. Средняя линия треугольника равна половине параллельной ей стороны, $EK = AB : 2 = 14 : 2 = 7$; $KF = DC : 2 = 10 : 2 = 5$. Больший из отрезков равен 7.

Ответ: 7.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AE. $AB = AE = CE$. Найдите меньший угол треугольника ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 128).

Решение.

$AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ — равнобедренный, и углы при основании равны (см. рис. 129). $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично в равно-

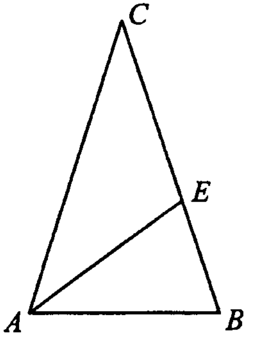


Рис. 128.

бедренном $\triangle ACE$ $\angle 3 = \angle 4$. $\angle 5 = \angle 3$, так как AE — биссектриса. $\angle CAB + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$ как суммы углов треугольников. Обозначим $\angle B = x$, $\angle 4 = \angle C = y$.

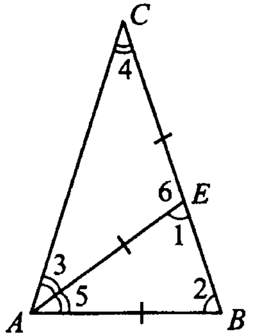


Рис. 129.

$$\begin{cases} 2y + x + y = 180, \\ y + x + x = 180; \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + x = 180, \\ y + 2x = 180; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 72, \\ y = 36. \end{cases}$$

$\angle C = 36°$, $\angle B = 72°$, $\angle A = 2y = 72°$.

Меньший угол равен 36°.

Ответ: 36.

9. В треугольнике ABC угол A равен 48°, $\angle ACD = 102°$. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 130).

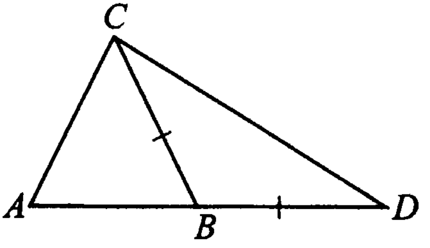


Рис. 130.

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°,
$\angle A + \angle D + \angle ACD = 180°$, $\angle D = 180° - 48° - 102° = 30°$.
$\triangle DBC$ — равнобедренный ($BC = BD$) $\Rightarrow$ углы при основании равны, $\angle BCD = \angle D = 30°$.

Ответ: 30.

10. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 156°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах (см. рис. 131).

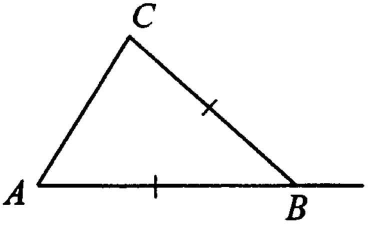


Рис. 131.

Решение.

Внешний угол треугольника равен сумме углов, не смежных с ним. $\angle A + \angle C = 156°$. ΔABC — равнобедренный, углы при основании равны. $\angle A = \angle C = 156° : 2 = 78°$.

Ответ: 78.

Окружность, касательные и секущие

① *Немного полезной информации*

Окружность — это множество точек плоскости, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки (центра).

Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности, называется **радиусом**.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**. k — касательная (см. рис. 132).

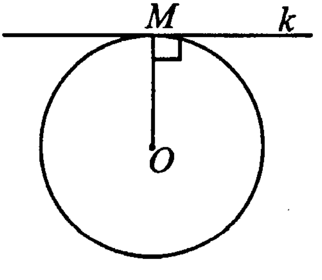


Рис. 132.

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется **секущей**.

Свойства касательных и секущих.

1°. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2°. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через центр окружности и эту общую точку.

Пусть дана окружность с центром O, MP и MK — касательные, K и P — точки касания $\Longrightarrow$ $MP = MK$, $\angle 1 = \angle 2$, $OP^2 + PM^2 = OM^2$ (см. рис. 133).

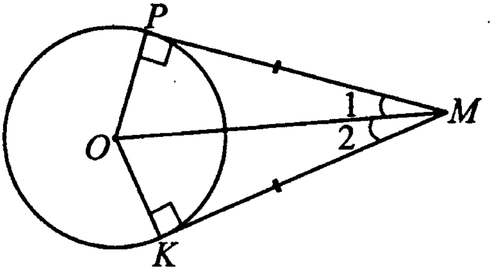


Рис. 133.

3°. Если касательная пересекается с секущей, то квадрат отрезка касательной равен произведению расстояний от общей точки прямых до точек пересечения секущей с окружностью.

Пусть дана окружность с центром O, MK — секущая, MP — касательная, P — точка касания $\Longrightarrow$ $MP^2 = MK \cdot MK_1$ (см. рис. 134).

Хорда — это отрезок, концы которого лежат на окружности.

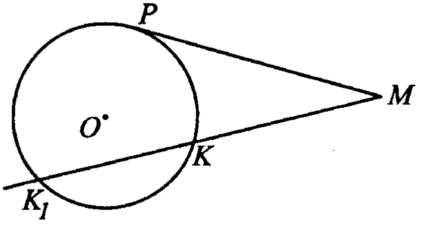


Рис. 134.

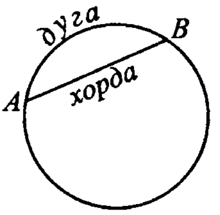


Рис. 135.

AB — хорда, $\smile AB$ — дуга (см. рис. 135).

Дуга — это часть окружности, соединяющая две точки окружности (см. рис. 135).

Задачи с решениями

11. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные (см. рис. 136). Периметры отсечённых треугольников равны 5, 6, 8. Найдите периметр треугольника ABC.

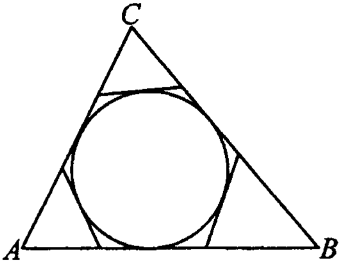


Рис. 136.

Решение.

Рассмотрим рис. 137. Периметр $\triangle CDP$ равен $DC + CP + PM + MD$, также $P_{BGE} = BG + GF + FE + EB$, $P_{ANR} = NA + AR + RL + LN$.

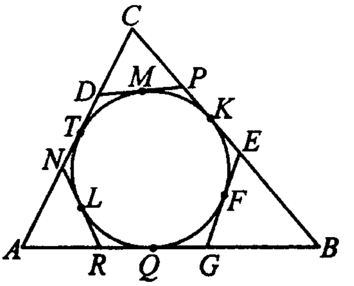


Рис. 137.

Но отрезки $TD = DM$, $MP = PK$, $KE = EF$, $FG = GQ$, $QR = RL$, $LN = NT$ как отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки. Тогда

$$P_{ABC} = AB + BC + CA = P_{CDP} + P_{BGE} + P_{ANR} = \\ = 5 + 6 + 8 = 19.$$

Ответ: 19.

Углы, связанные с окружностью

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным углом.**

O — центр окружности, $\angle AOB$ — центральный угол, опирающийся на дугу BA (см. рис. 138).

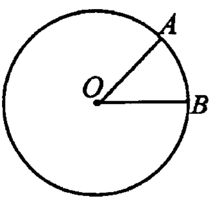


Рис. 138.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

Точки A, B, C лежат на окружности $\Longrightarrow \angle BAC$ — вписанный угол, опирающийся на дугу BC (см. рис. 139).

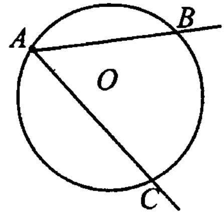


Рис. 139.

1°. Центральный угол равен величине дуги, на которую он опирается.

O — центр окружности, A и B лежат на окружности. $\angle AOB = \smile AB$ (см. рис. 138).

2°. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

$\angle BAC = \frac{1}{2}\smile BC$ (см. рис. 139).

3°. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

A, B, M, C лежат на окружности. $\angle ABC = \angle AMC$ (см. рис. 140).

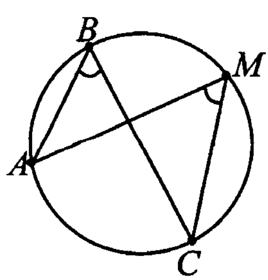


Рис. 140.

4°. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (на диаметр), равен 90° (см. рис. 141).

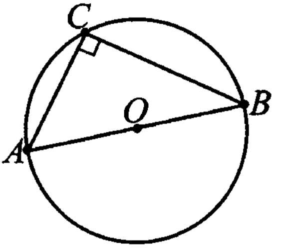


Рис. 141.

5°. Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

BA — хорда, BC — касательная $\Longrightarrow \angle ABC = \frac{1}{2}\smile AB$ (см. рис. 142).

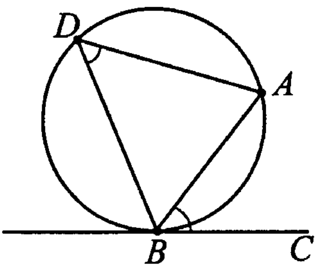


Рис. 142.

6°. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на дугу, заключённую между касательной и хордой.

BA — хорда, BC — касательная $\Longrightarrow \angle ABC = \angle ADB$ (см. рис. 142).

Задачи с решениями

12. Найдите угол ACO, если прямая CA касается окружности в точке A, точка O — центр окружности, дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 128° (см. рис. 143). Ответ дайте в градусах.

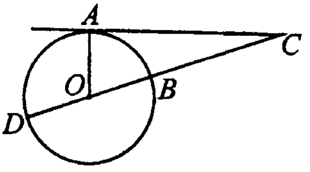


Рис. 143.

Решение.

Угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания, прямой: $\angle OAC = 90°$. Центральный угол DOA равен угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть $\angle DOA = \smile DA = 128°$. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним,
$\angle DOA = \angle OAC + \angle ACO$, $\angle ACO = 128° - 90° = 38°$.

Ответ: 38.

13. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах (см. рис. 144).

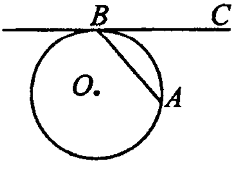


Рис. 144.

Решение.

Угол между хордой и касательной к окружности, проведённой из конца хорды, равен половине угловой величины дуги, которую стягивает эта хорда. $\angle CBA = 0{,}5\smile AB = 0{,}5 \cdot 104^\circ = 52^\circ$.

Ответ: 52.

14. Через концы A и B дуги окружности в 56° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах (см. рис. 145).

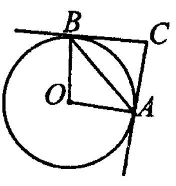


Рис. 145.

Решение.

$\angle OBC = \angle OAC = 90^\circ$, так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. $\angle BOA = \smile BA = 56^\circ$ (центральный угол опирается на дугу 56°). В четырёхугольнике $OBCA$ сумма углов равна 360°. $\angle ACB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.

Ответ: 124.

15. Найдите величину угла MPK. Ответ дайте в градусах (см. рис. 146).

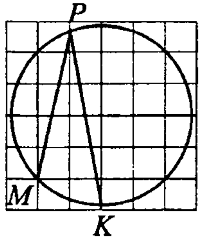


Рис. 146.

Решение.

При формулировании подобных задач имеется в виду, что отмеченная на рисунке дуга MK меньше всей окружности в целое число раз.

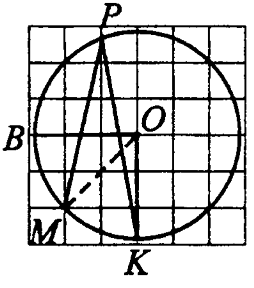


Рис. 147.

Дуга BK — одна четвёртая всей окружности (см. рис. 147), MK — одна восьмая, то есть $360^\circ : 8 = 45^\circ$. Вписанный $\angle MPK$ опирается на дугу MK, значит

$$\angle MPK = \frac{1}{2}\smile MOK = 45^\circ : 2 = 22{,}5^\circ.$$

Ответ: 22,5.

16. Центральный угол на 54° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности (см. рис. 148). Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

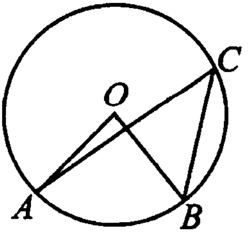


Рис. 148.

Решение.

Центральный угол в два раза больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Если он на 54° больше вписанного угла, то вписанный угол равен 54°.

Ответ: 54.

17. В окружности с центром O AB и CD — диаметры (см. рис. 149). Центральный угол AOD равен 108°. Найдите вписанный угол ABC. Ответ дайте в градусах.

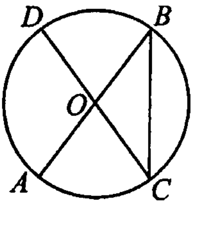


Рис. 149.

Решение.

Диаметр DC опирается на полуокружность $\smile DC = 180°$. $\smile AC = \smile DC - \smile DA = 180° - \angle DOA = 180° - 108° = 72°$. Вписанный угол ABC равен половине угловой величины дуги, на которую опирается. $\angle ABC = 0{,}5 \smile AC = 0{,}5 \cdot 72° = 36°$.

Ответ: 36.

18. Найдите угол ACB, если вписанные углы AMB и MAK опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 106° и 42° (см. рис. 150). Ответ дайте в градусах.

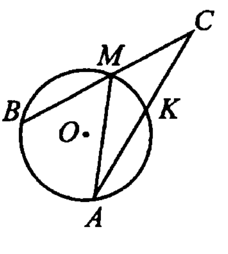


Рис. 150.

Решение.

Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается. $\angle BMA = 0{,}5\smile AB = 0{,}5 \cdot 106^\circ = 53^\circ$. $\angle MAK = 0{,}5\smile MK = 0{,}5 \cdot 42^\circ = 21^\circ$. $\angle BMA$ — внешний к углу M $\triangle AMC$, значит, $\angle BMA$ равен сумме $\angle MCA$ и $\angle MAC$ этого треугольника.
$\angle C = \angle BMA - \angle MAC = 53^\circ - 21^\circ = 32^\circ$.

Ответ: 32.

19. Хорда MP делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как $4 : 8$. Под каким углом видна эта хорда из точки K, принадлежащей меньшей дуге MP? Ответ дайте в градусах (см. рис. 151).

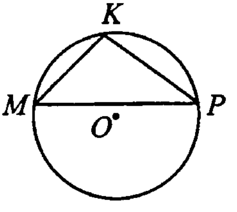


Рис. 151.

Решение.

$\angle MKP$ — вписанный, он равен половине дуги MP, на которую он опирается. Окружность 360° делится на две части, которые относятся как $4 : 8$, обозначим эти части $4x$ и $8x$. $4x + 8x = 360$, $12x = 360$, $x = 360 : 12 = 30$, бóльшая дуга $8x = 8 \cdot 30 = 240$. $\angle MKP = 0{,}5\smile MP = 0{,}5 \cdot 240^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 120.

Описанные и вписанные окружности

Окружность называют **вписанной** в угол или многоугольник (в частности, в треугольник), если она касается всех сторон соответствующего угла или многоугольника (см. рис. 152).

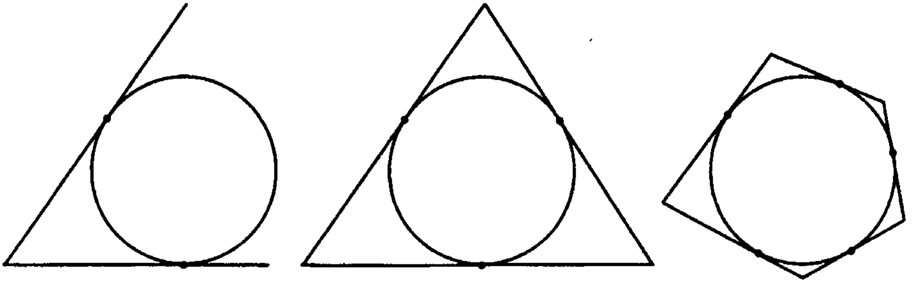


Рис. 152.

Окружность называют **описанной** вокруг многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности (см. рис. 153).

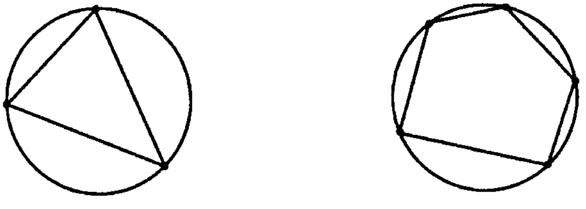


Рис. 153.

1°. Центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе угла.

Окружность с центром O вписана в угол $BAC \Longrightarrow \angle BAO = \angle CAO$ (см. рис. 154).

2°. Центр вписанной в многоугольник окружности лежит в точке пересечения его биссектрис.

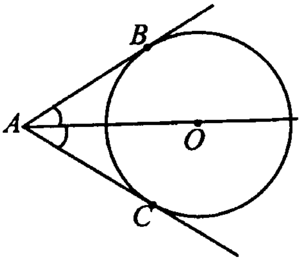


Рис. 154.

В $\triangle ABC$ точка O — центр вписанной окружности $\Longrightarrow$ BO, CO, AO — биссектрисы углов $\triangle ABC$ (см. рис. 155).

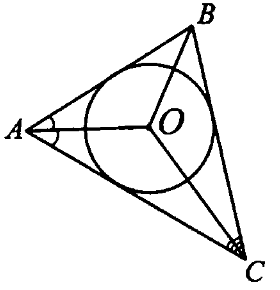


Рис. 155.

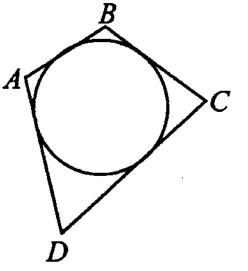


Рис. 156.

3°. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

Окружность вписана в четырёхугольник $ABCD$ $\Longrightarrow$ $AD + BC = AB + DC$ (см. рис. 156).

4°. Центр описанной окружности многоугольника — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

$\triangle ABC$ вписан в окружность, O — центр (см. рис. 157).

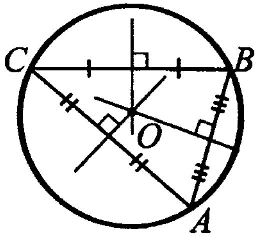


Рис. 157.

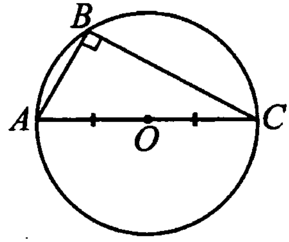


Рис. 158.

5°. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

$\triangle ABC$ вписан в окружность с центром O, $\angle B = 90° \Longrightarrow$ $AO = OC$, точка O лежит на AC (см. рис. 158).

6°. Радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно вычислить по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

7°. Центры вписанной и описанной окружности правильного треугольника совпадают, центр лежит на высоте треугольника и делит её в отношении 2 : 1, считая от вершины.

8°. Если четырёхугольник вписан в окружность, суммы его противоположных углов равны 180°.

$ABCD$ вписан в окружность (см. рис. 159).
$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

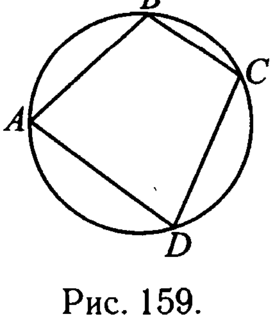


Рис. 159.

9°. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

Задачи с решениями

20. Угол между стороной правильного n-угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведённым в одну из вершин n-угольника (принадлежащих этой стороне), равен 67,5° (см. рис. 160). Найдите n.

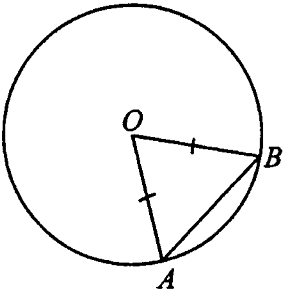


Рис. 160.

Решение.

Пусть AB — сторона n-угольника. $\triangle AOB$ — равнобедренный, так как $OA = OB$ как радиусы, значит, углы при основании равны и $\angle A = \angle B = 67{,}5°$. Найдём $\angle AOB$. $\angle A + \angle B + \angle O = 180° \Rightarrow \angle AOB = 180° - 67{,}5° \cdot 2 = 45°$. Если n-угольник правильный, то $\angle AOB = 360° : n$, тогда $n = 360 : 45 = 8$.

Ответ: 8.

21. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 113°, угол DAC равен 52°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 161).

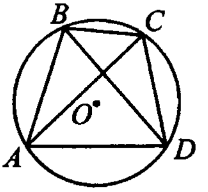


Рис. 161.

Решение.

$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$. $\angle DAC = \angle DBC = 52°$ (как вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу).
$\angle ABD = 113° - 52° = 61°$.

Ответ: 61.

22. Сторона AB остроугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности (см. рис. 162). Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

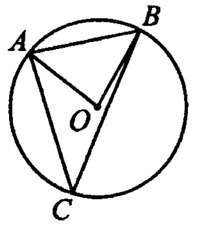


Рис. 162.

Решение.

Пусть O — центр описанной окружности, тогда по условию $OA = OB = AB$ и $\triangle AOB$ правильный, $\angle O = 60°$ — центральный угол, который опирается на дугу AB. $\angle ACB$ — вписанный, опирается на дугу AB.
$\angle ACB = 0{,}5 \cdot \angle AOB = 0{,}5 \cdot 60° = 30°$.

Ответ: 30.

23. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 25, основание равно 30. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 163).

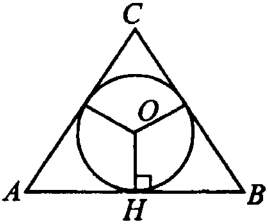


Рис. 163.

Решение.

В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности O лежит на высоте, проведённой к основанию, т.е. $O \in CH$ (см. рис. 164). O — точка пересечения биссектрис. $OH = r$. AO — биссектриса, она делит сторону CH треугольника ACH на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, $\frac{AH}{HO} = \frac{AC}{CO}$. CH — медиана, как высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника ABC, $AH = 30 : 2 = 15$. Из $\triangle ACH$ по теореме Пифагора $CH = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. $\frac{15}{r} = \frac{25}{20 - r}$, $25r = 15(20 - r)$, $40r = 15 \cdot 20$, $r = 7{,}5$.

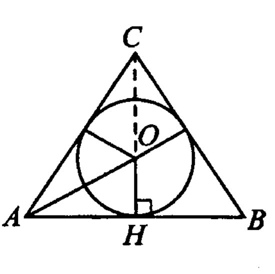


Рис. 164.

Ответ: 7,5.

24. В треугольнике MPR $MR = 32$, $PR = 24$, угол R равен $90°$. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 165).

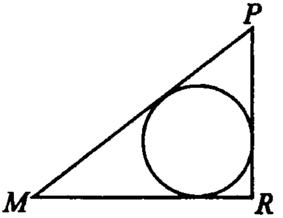


Рис. 165.

Решение.

Воспользуемся формулой для радиуса r вписанной в прямоугольный треугольник окружности. Пусть a, b — катеты, а c — гипотенуза. Тогда $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. Найдём MP.

$$MP = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40, r = \frac{32 + 24 - 40}{2} = 8.$$

Ответ: 8.

25. Около окружности, радиус которой равен $7\sqrt{2}$, описан квадрат (см. рис. 166). Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

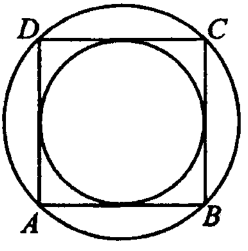


Рис. 166.

Решение.

Если окружность вписана в квадрат, то её диаметр равен стороне квадрата. $AB = 2 \cdot 7\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$.

Если окружность описана вокруг квадрата, то её диаметр является диагональю квадрата, радиус равен половине диаметра. $AC = AB\sqrt{2}$ (например, можно получить это из теоремы Пифагора). $AC = 14\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 28$. Тогда $R = 28 : 2 = 14$.

Ответ: 14.

26. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 42, её бóльшая боковая сторона равна 12 (см. рис. 167). Найдите радиус окружности.

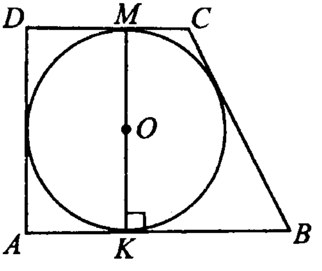


Рис. 167.

Решение.

У четырёхугольника, описанного около окружности, суммы длин противоположных сторон равны, то есть $BC + AD = DC + AB$. Поэтому $AD + CB = \dfrac{P}{2} = 42 : 2 = 21$.

Наибольшая боковая сторона $CB = 12 \Rightarrow AD = 21 - 12 = 9$. Так как $AD \perp AB$, то $MK = AD = 2R$, где R — радиус вписанной окружности. Тогда $R = 9 : 2 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

27. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 30, основание равно 36 (см. рис. 168). Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

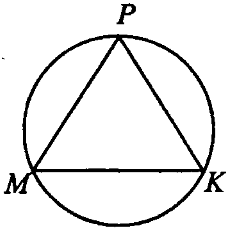


Рис. 168.

Решение.

По теореме синусов $\dfrac{MP}{\sin K} = 2R$, где R — радиус описанной около $\triangle KMP$ окружности. Пусть $MP = PK = 30$, $MK = 36$. Проведём высоту PH (см. рис. 169). В равнобедренном треугольнике KMP высота PH является медианой, $MH = HK = 18$. Найдём PH по теореме Пифагора.

$PH = \sqrt{PK^2 - HK^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24.$

$\sin K = \dfrac{PH}{PK} = \dfrac{24}{30} = 0{,}8.$

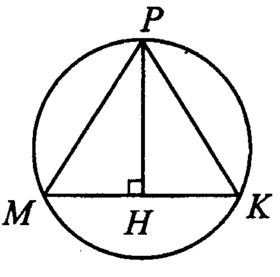


Рис. 169.

$$R = \frac{MP}{2\sin K} = \frac{30}{0{,}8 \cdot 2} = 18{,}75.$$

Ответ: 18,75.

28. Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиусом 12, равен 30° (см. рис. 170). Найдите сторону AB этого треугольника.

Решение.

По теореме синусов для радиуса описанной окружности R выполняется $2R = \dfrac{AB}{\sin C}$.

$AB = 2R\sin C = 2 \cdot 12\sin 30° = 2 \cdot 12 \cdot 0{,}5 = 12.$

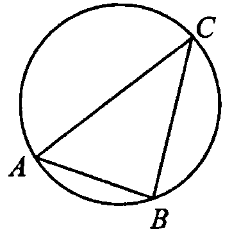


Рис. 170.

Ответ: 12.

29. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 14. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Решение.

Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит на середине гипотенузы, значит, гипотенуза — диаметр. Тогда гипотенуза равна $2 \cdot 14 = 28$.

Ответ: 28.

30. Основания равнобедренной трапеции равны 18 и 80. Радиус описанной окружности равен 41 (см. рис. 171). Найдите высоту трапеции, если центр описанной окружности лежит внутри трапеции.

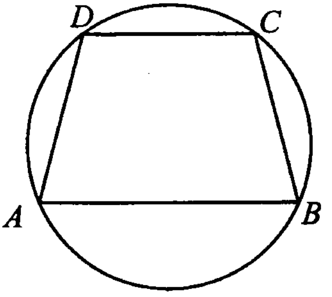


Рис. 171.

Решение.

Проведём высоту HK через центр окружности O, H и K будут лежать на серединах оснований (см. рис. 172). $\triangle AOK$ и $\triangle DHO$ — прямоугольные, $HO^2 = OD^2 - DH^2 = 41^2 - 9^2 = 1600$, $HO = 40$. $OK^2 = AO^2 - AK^2 = 41^2 - 40^2 = 81$, $OK = 9$.
$HK = HO + OK = 40 + 9 = 49$.

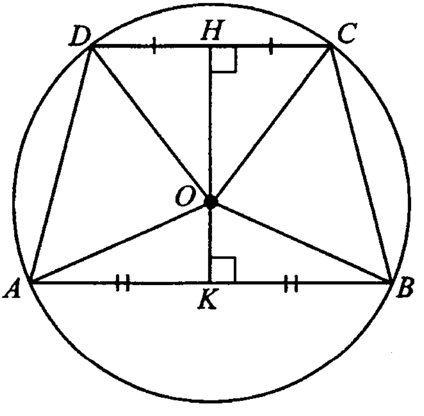


Рис. 172.

Ответ: 49.

31. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, являются вершинами четырёхугольника $ABCD$. Градусные величины углов A, B и D относятся соответственно как $5 : 2 : 6$ (см. рис. 173). Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

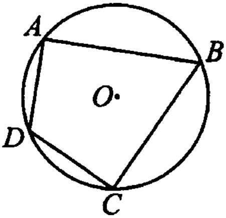


Рис. 173.

Решение.

Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, поэтому сумма его противоположных углов равна 180°.

По условию $\angle A : \angle B : \angle D = 5 : 2 : 6$.

Обозначим $\angle A = 5x$, $\angle B = 2x$, $\angle D = 6x$.

$\angle B + \angle D = 180°$, $8x = 180°$, $x = 22{,}5°$.

$\angle C = 180° - \angle A = 180° - 5x = 180° - 112{,}5° = 67{,}5°$.

Ответ: 67,5.

32. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 7 (см. рис. 174).

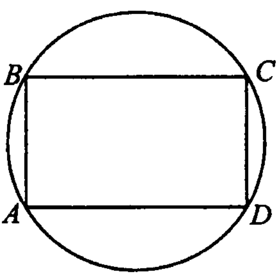


Рис. 174.

Решение.

Если прямоугольник вписан в окружность, то центр этой окружности лежит на середине его диагонали, то есть диагональ в 2 раза больше радиуса. $AC = 2 \cdot 7 = 14$.

Ответ: 14.

33. Периметр правильного шестиугольника равен 612 (см. рис. 175). Найдите диаметр описанной окружности.

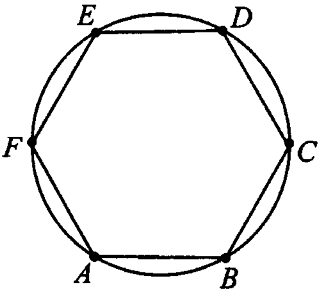


Рис. 175.

Решение.

Проведём диагонали AD, FC, BE (см. рис. 176). В правильном шестиугольнике все стороны и углы равны, а диаметр описанной окружности проходит через противоположные вершины, например F и C. Треугольники, на которые разбился $ABCDEF$, правильные, то есть $FO = OA = AF$. Диаметр FC в 2 раза больше стороны шестиугольника, $FC = 2AB = P : 3 = 612 : 3 = 204$.

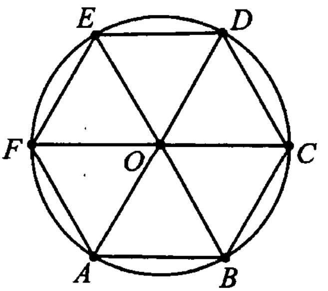


Рис. 176.

Ответ: 204.

34. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$ (см. рис. 177), считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите значение радиуса, умноженное на $\sqrt{2}$.

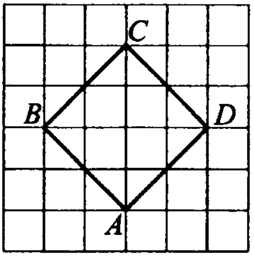


Рис. 177.

Решение.

Построим окружность (см. рис. 178).

Так как квадрат — фигура симметричная, точки касания P и K являются серединами его сторон. Видно, что радиус равен половине PK. Найдём PK по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника PKH.

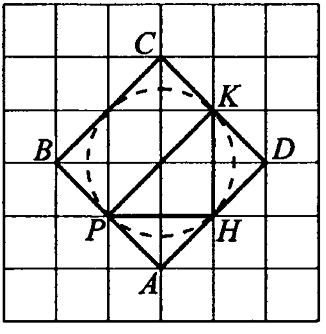


Рис. 178.

$PK = \sqrt{PH^2 + KH^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$. Радиус равен $\sqrt{8} : 2$. Значение радиуса, умноженное на $\sqrt{2}$, равно $\sqrt{8} : 2 \cdot \sqrt{2} = 2$.

Ответ: 2.

35. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$ (см. рис. 179), если стороны клеток равны $\sqrt{8}$.

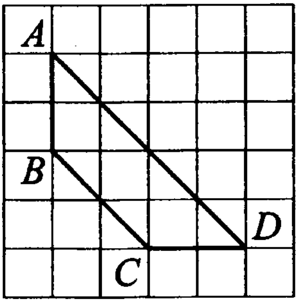


Рис. 179.

Решение.

Средняя линия трапеции соединяет середины боковых сторон трапеции (см. рис. 180).

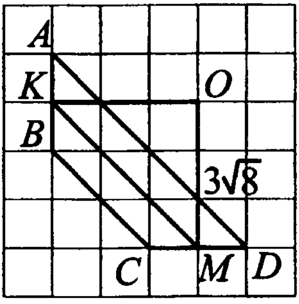


Рис. 180.

Назовём её KM и найдём из прямоугольного треугольника KMO. Длина трёх клеток равна $3\sqrt{8}$. Тогда $KM = \sqrt{KO^2 + OM^2} = \sqrt{(3\sqrt{8})^2 + (3\sqrt{8})^2} = \sqrt{144} = 12$.

Ответ: 12.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Острые углы прямоугольного треугольника равны 22° и 68°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 181).

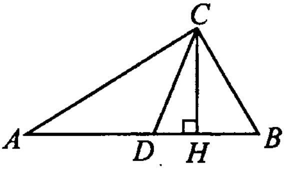


Рис. 181.

2. Угол ACO равен 24°, O — центр окружности. Сторона CA касается окружности в точке A (см. рис. 182). Найдите величину меньшей дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.

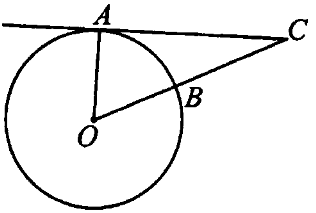


Рис. 182.

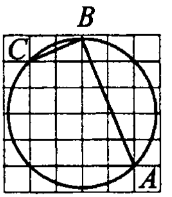


Рис. 183.

3. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 183).

4. Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ (см. рис. 184). Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

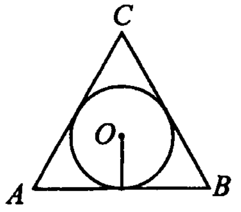


Рис. 184.

5. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны клеток равны 1 (см. рис. 185).

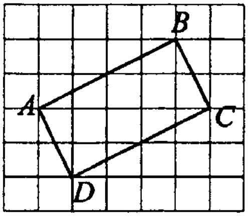


Рис. 185.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 156°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах (см. рис. 186).

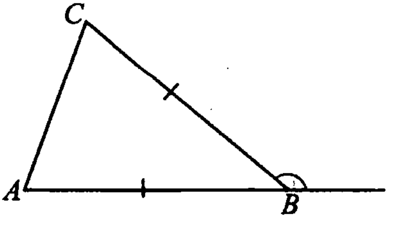


Рис. 186.

2. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности в точке A, O — центр окружности, а дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 94°. Ответ дайте в градусах (см. рис. 187).

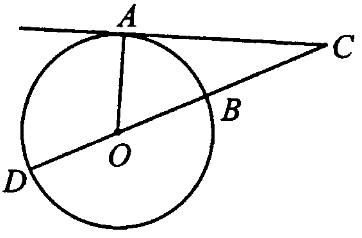


Рис. 187.

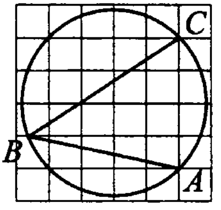


Рис. 188.

3. Найдите градусную величину дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 188).

4. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 16 (см. рис. 189). Найдите высоту этого треугольника.

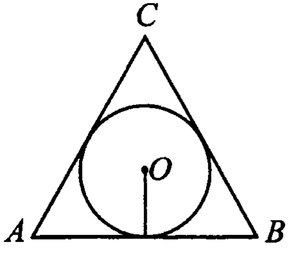


Рис. 189.

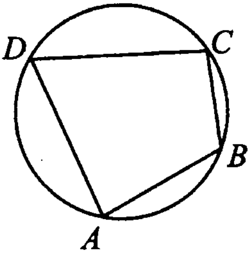


Рис. 190.

5. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 68° и 95° (см. рис. 190). Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC угол A равен 38°, угол C равен 58°. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BK = BC$. Найдите угол K треугольника BCK. Ответ дайте в градусах (см. рис. 191).

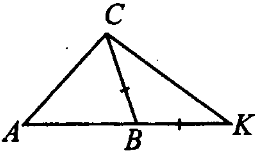


Рис. 191.

2. Угол ACO равен 32°. Его сторона CA в точке A касается окружности с центром в точке O. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 192). Ответ дайте в градусах.

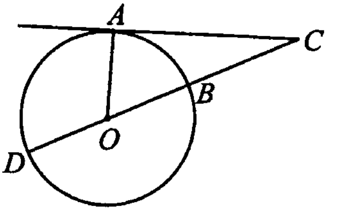


Рис. 192.

3. Хорда PK делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 11 : 7. Под каким углом видна эта хорда из точки M, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах (см. рис. 193).

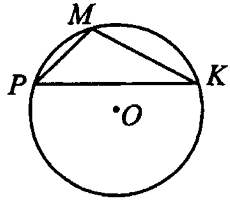


Рис. 193.

4. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 18 (см. рис. 194).

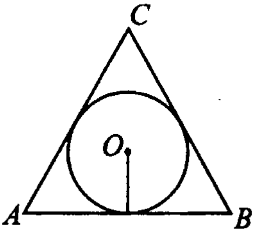


Рис. 194.

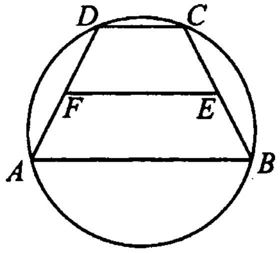


Рис. 195.

5. Около трапеции описана окружность (см. рис. 195). Периметр трапеции равен 142, средняя линия равна 50. Найдите боковую сторону трапеции.

Вариант 4

1. Один из внешних углов треугольника равен 72°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 5 : 13. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах (см. рис. 196).

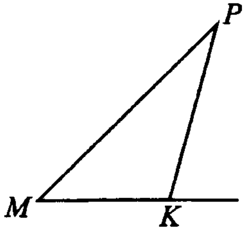


Рис. 196.

2. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 50°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 197).

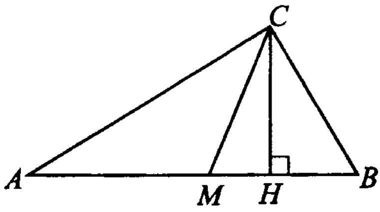


Рис. 197.

3. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности в точке A, O — центр окружности, а меньшая дуга окружности AB, заключённая внутри этого угла, равна 71°. Ответ дайте в градусах (см. рис. 198).

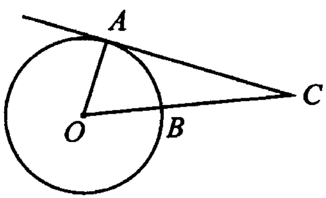


Рис. 198.

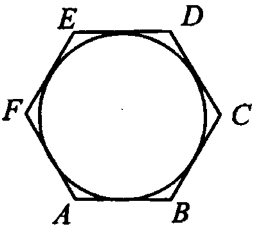


Рис. 199.

4. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $5\sqrt{12}$ (см. рис. 199).

5. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $5\sqrt{2}$ (см. рис. 200).

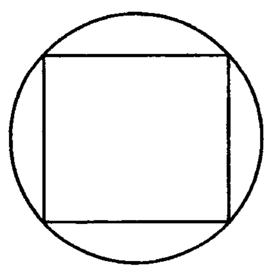


Рис. 200.

Вариант 5

1. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 7. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

2. Острые углы прямоугольного треугольника равны 27° и 63°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 201).

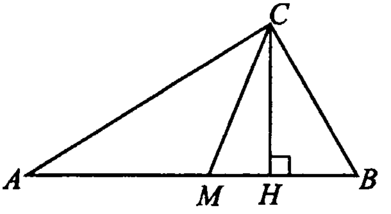


Рис. 201.

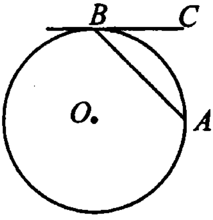


Рис. 202.

3. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах (см. рис. 202).

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 65°, угол CAD равен 42°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 203).

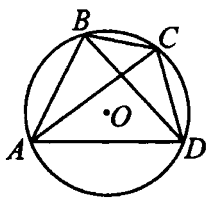


Рис. 203.

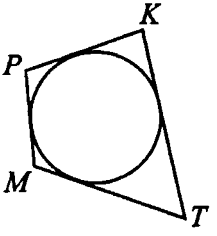


Рис. 204.

5. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как 2 : 3 : 4. Найдите бóльшую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 36 (см. рис. 204).

Вариант 6

1. В треугольнике MPK $MK = PK = 18\sqrt{3}$, угол K равен $120°$. Найдите высоту MH (см. рис. 205).

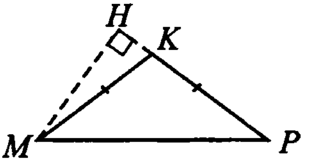


Рис. 205.

2. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 11$, $CD = 24$ (см. рис. 206). Найдите периметр четырёхугольника.

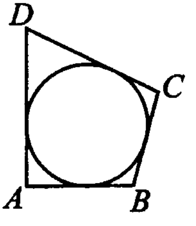


Рис. 206.

3. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $31°$. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 207).

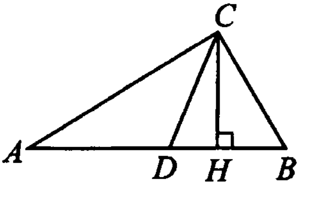


Рис. 207.

4. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника MPK, если стороны клеток равны 1 (см. рис. 208).

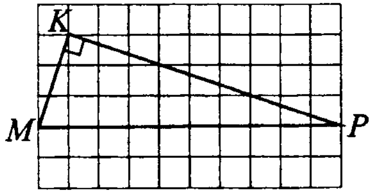


Рис. 208.

5. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, её бо́льшая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности (см. рис. 209).

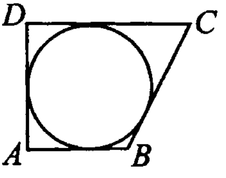


Рис. 209.

Вариант 7

1. В треугольнике MPK $MK = PK$, угол K равен 120°, $MK = 16\sqrt{3}$. Найдите MP (см. рис. 210).

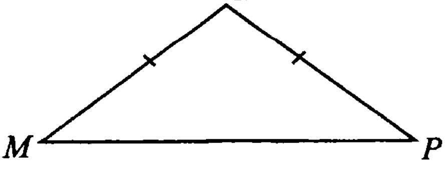


Рис. 210.

2. Угол M треугольника MPK, вписанного в окружность радиуса 5, равен 30° (см. рис. 211). Найдите сторону PK этого треугольника.

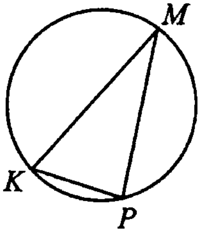


Рис. 211.

3. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 54. Найдите её среднюю линию (см. рис. 212).

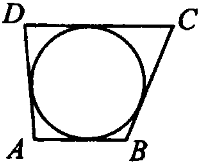


Рис. 212.

4. Сторона MP тупоугольного треугольника MPK равна радиусу описанной около него окружности (см. рис. 213). Найдите угол K. Ответ дайте в градусах.

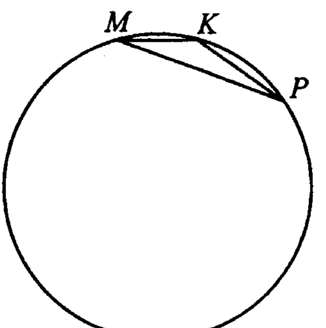


Рис. 213.

5. В треугольнике ABC CH — высота, AD — биссектриса, O — точка пересечения прямых CH и AD, угол BAD равен $19°$. Найдите угол AOC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 214).

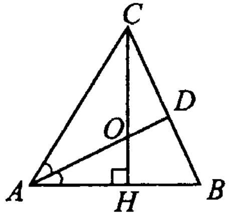


Рис. 214.

Вариант 8

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $127°$, угол CAD равен $31°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 215).

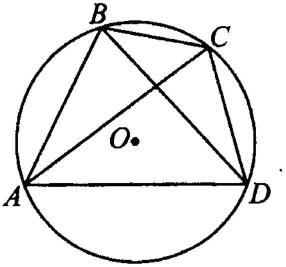


Рис. 215.

2. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 68, две его стороны равны 15 и 26 (см. рис. 216). Найдите бóльшую из оставшихся сторон.

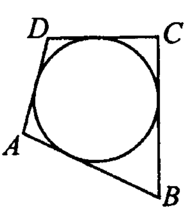


Рис. 216.

3. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 9 (см. рис. 217). Найдите гипотенузу этого треугольника.

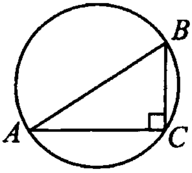


Рис. 217.

4. В четырёхугольник $MPKT$ вписана окружность, $MP = 13$, $PK = 15$ и $KT = 18$ (см. рис. 218). Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

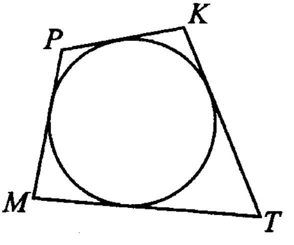


Рис. 218.

5. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 3, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° (см. рис. 219). Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.

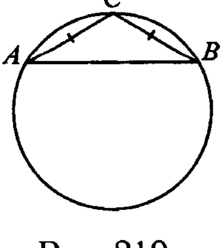


Рис. 219.

§4. Тригонометрия

Диагностическая работа

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos A$, если $AB = 10\sqrt{2}$ и $AC = 7\sqrt{2}$.

2. Про угол α некоторого треугольника известно, что $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$. Найдите $3\operatorname{tg}\alpha$.

3. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 3\sqrt{2}$. Найдите длину CA, если $\sin A = \dfrac{1}{3}$.

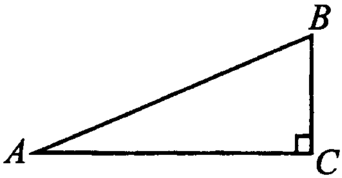
4. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AC и CB дано $AB = 3$ и $\cos A = 0{,}75$. Вычислите BC.

5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin B = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине B.

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике

ⓘ *Немного полезной информации*

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C равен 90°.



Стороны BC и AC называются **катетами**, сторона AB называется **гипотенузой**. Для угла A **прилежащий катет** AC (лежит на стороне угла), **противолежащий катет** BC.

Для прямоугольного треугольника выполняется теорема Пифагора: **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:**

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Например, $AC = 5$, $BC = 12$.
Найдём AB.
В нашем треугольнике AB — гипотенуза, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = 25 + 144 = 169$, $AB = \sqrt{169} = 13$.
Теперь разберём случай, когда нужно найти катет.
Пусть $AB = 10$, $AC = 8$.
Найдём BC.
$AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда $BC^2 = AB^2 - AC^2$,
$BC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$, $BC = \sqrt{36} = 6$.

Теперь вспомним определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$; $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$; $\cos B = \dfrac{BC}{AB}$.

Обратите внимание, в одном и том же прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла, т.е. $\sin A = \cos B$, $\sin B = \cos A$.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{BC}$. Видно, что $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

Основное тригонометрическое тождество позволяет найти синус угла, если известен косинус этого угла, и наоборот.

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, или для острого угла

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$; $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$.

Задачи с решениями

1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 20$, $AC = 16$. Найдите $\sin A$.

Решение.

Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$ найдём противолежащий углу A катет BC (см. рис. 220).

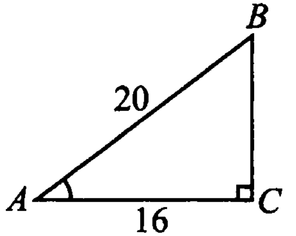


Рис. 220.

$BC^2 = AB^2 - AC^2$, $BC^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$, $BC = \sqrt{144} = 12$.

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

2. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}28$. Найдите $\sin A$.

Решение.

Так как угол A острый, то
$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - 0{,}28^2} = \sqrt{0{,}9216} = 0{,}96$.

Ответ: 0,96.

3. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = \sqrt{91}$, $BC = 3$. Найдите $\cos B$.

Решение.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. По теореме Пифагора найдём гипотенузу AB (см. рис. 221). $AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда $AB^2 = 3^2 + \left(\sqrt{91}\right)^2 = 9 + 91 = 100$; $AB = \sqrt{100} = 10$.

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

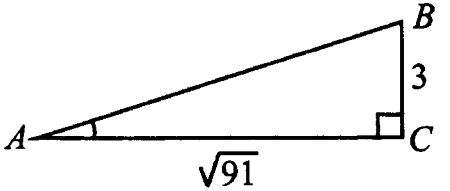


Рис. 221.

Ответ: 0,3.

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \sqrt{15}$. Найдите $\cos A$.

Решение.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Так как треугольник ABC прямоугольный, угол A острый, то для нашего треугольника $\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = \sqrt{15}$ и можно считать, что $BC = \sqrt{15}$, $AC = 1$. По теореме Пифагора найдём гипотенузу AB. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда $AB^2 = 1^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = 1 + 15 = 16$; $AB = \sqrt{16} = 4$.

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Высоты в прямоугольном треугольнике

ⓘ *Немного полезной информации*

В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами. Третья высота, проведённая из вершины прямого угла, делит треугольник на два прямоугольных треугольника, углы которых равны соответственно углам исходного треугольника.

Задачи с решениями

5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, высота $CH = 2\sqrt{54}$, $BC = 15$. Найдите $\cos B$.

Решение.

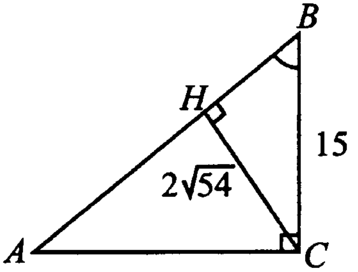


Рис. 222.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHB с прямым углом H и катетами BH и HC (см. рис. 222). Найдём в нём катет BH.

$BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$BH^2 = 15^2 - \left(2\sqrt{54}\right)^2 = 225 - 216 = 9$,

$BH = \sqrt{9} = 3.$

$\cos B = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{3}{15} = 0{,}2.$

Ответ: 0,2.

6. Найдите тангенс угла CAB, изображённого на рисунке 223. В ответе укажите значение тангенса, умноженное на 3.

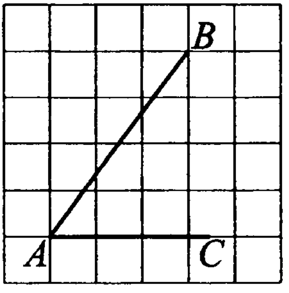


Рис. 223.

Решение.

Достроим угол до прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 224).

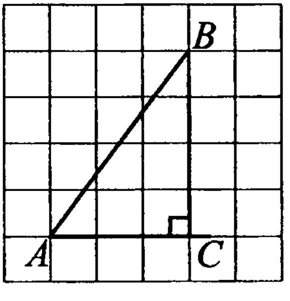


Рис. 224.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

$\operatorname{tg} BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4}{3}$. Значение тангенса, умноженное на 3, равно 4.

Ответ: 4.

Равнобедренный треугольник

ⓘ *Немного полезной информации*

Равнобедренным треугольником называют треугольник, у которого две равные стороны. Эти стороны называют боковыми сторонами, третью сторону называют основанием. Если в задаче дан равнобедренный треугольник, то пользуются его свойствами.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника (между равными сторонами), является медианой и биссектрисой.

Посмотрим на рисунок 225. В треугольнике ABC основание AB, боковые стороны $AC = CB$, угол A равен углу B, высота CH делит AB на равные отрезки $AH = HB$ и угол C на два равных угла.

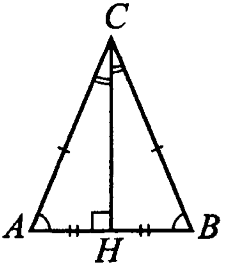


Рис. 225.

Задачи с решениями

7. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите высоту CH.

Решение.

В треугольнике ABC стороны $AC = BC$, значит, он равнобедренный. Высота CH, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, делит AB пополам, поэтому $AH = HB = 24 : 2 = 12$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHA с прямым углом H и катетами AH и HC. $AH = 12$, $\cos A = 0{,}6$. Найдём AC. Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{12}{AC} = 0{,}6.$$

$$AC = 12 : 0{,}6 = 20.$$

По теореме Пифагора
$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16.$$

Ответ: 16.

8. В треугольнике ABC $AB = BC$, высота CH равна 6, $AC = 6\sqrt{5}$ (см. рис. 226). Найдите тангенс угла ACB.

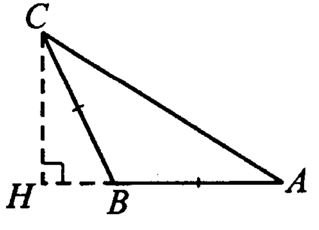


Рис. 226.

Решение.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. В данном треугольнике $BC = BA$, основание AC, равны углы CAB и ACB. Следовательно, можно вместо тангенса угла ACB найти тангенс угла CAB. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH с гипотенузой $AC = 6\sqrt{5}$ и катетами $CH = 6$ и HA. Длину катета HA можно найти по теореме Пифагора.

$$HA = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2 - 6^2} = \sqrt{180 - 36} = \\ = \sqrt{144} = 12.$$

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\operatorname{tg} CAB = \dfrac{HC}{HA} = \dfrac{6}{12} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

9. В треугольнике ABC $AC = BC = 15$, $\sin B = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AB.

Решение.

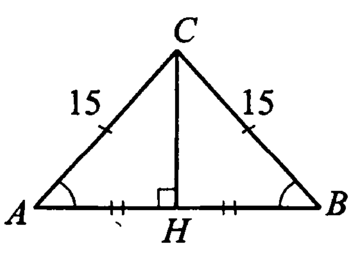


Рис. 227.

В равнобедренном треугольнике ABC высота CH является медианой, значит, $AH = HB$ (см. рис. 227). Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH с гипотенузой $BC = 15$ и катетами CH и HB. В данном треугольнике $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{CH}{CB}$; $\frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{CH}{15}$, тогда $CH = \sqrt{21} \cdot 15 : 5 = 3\sqrt{21}$. Катет HB можно найти по теореме Пифагора: $HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{225 - (3\sqrt{21})^2} = \sqrt{225 - 189} = \sqrt{36} = 6$.

AB в два раза больше HB, $AB = 6 \cdot 2 = 12$.

Ответ: 12.

10. В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 6\sqrt{39}$. Найдите $\sin A$.

Решение.

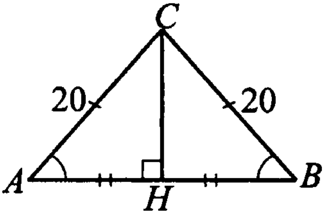


Рис. 228.

Проведём высоту CH, тогда $AH = BH = 3\sqrt{39}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH (см. рис. 228). Катет HC можно найти по теореме Пифагора.

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - (3\sqrt{39})^2} = \sqrt{400 - 351} = \sqrt{49} = 7$, $\sin A = \frac{CH}{CA} = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

Ответ: 0,35.

Тригонометрические функции тупого угла

Немного полезной информации

Рассмотрим развёрнутый угол BAK (см. рис. 229). Луч AP делит его на два смежных угла. Оказывается, синусы этих смежных углов равны, а косинусы противоположны (то есть отличаются только знаком).

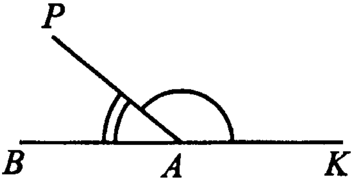


Рис. 229.

Например, если $\sin\angle BAP = 0{,}8$, то $\sin\angle PAK = 0{,}8$, $\cos\angle BAP = 0{,}6$ и $\cos\angle PAK = -0{,}6$.
Тангенсы смежных углов также противоположны.

Задачи с решениями

11. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \dfrac{10}{\sqrt{109}}$.
Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

Решение.

Внешним углом треугольника называют угол, образованный стороной этого треугольника и продолжением другой его стороны. На рисунке 230 внешний угол при вершине A — это угол BAK.

BAK и CAB — смежные углы. Тангенсы смежных углов — противоположные числа (отличаются только знаком), поэтому найдём тангенс угла CAB. Тангенсом угла

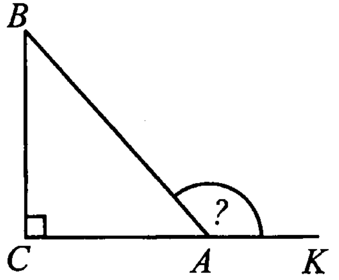


Рис. 230.

называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\cos A = \frac{10}{\sqrt{109}} = \frac{AC}{BA}$. Будем считать, что $AC = 10$, $BA = \sqrt{109}$. Найдём $BC = \sqrt{BA^2 - CA^2} = \sqrt{109 - 100} = \sqrt{9} = 3$. Тогда $\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{10} = 0{,}3$. $\operatorname{tg} BAK = -0{,}3$.

Ответ: $-0{,}3$.

Разные задачи

12. Основания равнобедренной трапеции (см. рис. 231) равны 5 и 11. Боковые стороны равны 5. Найдите синус острого угла трапеции.

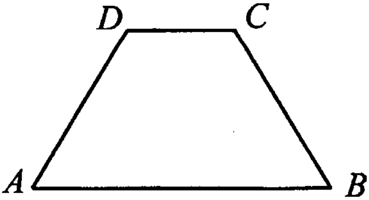


Рис. 231.

Решение.

В равнобедренной трапеции углы при основании равны. Если опустить высоты из вершин C и D на основание AB, то получатся два равных прямоугольных треугольника ADH и CBK (см. рис. 232).

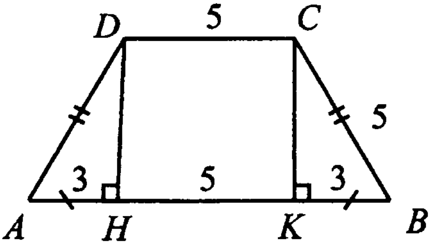


Рис. 232.

$DCKH$ — прямоугольник, $DC = HK = 5$.
$AH = BK = (11 - 5) : 2 = 3$. Синус острого угла трапеции, например A, найдём из прямоугольного треугольника ADH. По теореме Пифагора $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$. $\sin A = \dfrac{DH}{DA} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC = 3$, $AB = 5$. Найдите $\sin B$.

2. Основания равнобедренной трапеции равны 11 и 91. Высота трапеции равна 16. Найдите тангенс острого угла.

3. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна $11\sqrt{2}$, $\cos A = \frac{7}{11}$. Вычислите BC.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, причём известно, что $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$, $AC = 3$. Найдите AB.

5. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC, если $AC = 7$, $\cos A = 0{,}125$.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = \sqrt{17}$, $AB = 17$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

2. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{39}}{8}$ и α является углом некоторого треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 2{,}25$ и $\sin A = \frac{9}{13}$. Найдите длину гипотенузы.

4. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ AC делит угол в отношении $1 : 2$, меньшая его сторона AB равна 16. Найдите диагональ данного прямоугольника.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AB = 11\sqrt{11}$ и $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Найдите AC.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos B$, если $AB = 20$, $AC = 2\sqrt{19}$.

2. Дан острый угол α, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Вычислите $\cos\alpha$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB известен $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а также длина катета $BC = 80$. Найдите длину второго катета.

4. Про прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C известно, что $\cos A = \frac{2}{7}$, $AB = 21\sqrt{5}$. Вычислите BC.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 8\sqrt{58}$ известен $\operatorname{tg} A = \frac{3}{7}$. Найдите AC.

Вариант 4

1. В прямоугольном треугольнике ABC даны длины катета $AC = \sqrt{19}$ и гипотенузы $AB = 10$. Найдите $\sin A$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{2}$. Найдите AC, если $BC = 2{,}8$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $\sin A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $CA = 39$. Найдите AB.

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите BC, если $\sin A = \frac{3}{4}$, $AC = 8\sqrt{7}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 22$, $AD = 33$, $\sin A = \frac{6}{11}$. Найдите длину большей высоты параллелограмма.

9. Зак. № 249

Вариант 5

1. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AC = 16$, $CB = 12$. Найдите $\sin B$.

2. В $\triangle ABC$ найдите $\cos A$, если тангенс угла, внешнего к A, равен $2\sqrt{6}$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA = 15$. Чему равна высота, опущенная на AB, если $\sin A = 0{,}9$?

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C дана длина катета $CB = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$ и $\cos A = \dfrac{6}{7}$. Найдите длину другого катета.

5. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC, если $AC = 82$, $\operatorname{tg} A = \dfrac{9}{40}$.

Вариант 6

1. В треугольнике ABC угол C прямой, $\cos A = \dfrac{1}{3}$. Найдите AB, если $AC = \dfrac{8}{5}$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $BC = CA = 40$. Чему равна высота, опущенная на AB, если $\cos A = 0{,}28$?

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 32$ из вершины A опущена высота AK. Найдите $\cos A$, если $BK = 8$.

4. В треугольнике ABC угол C прямой. Известно, что $BC = 8\sqrt{3}$ и $AC = 8$. Найдите $\cos A$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 3\sqrt{17}$ и $\operatorname{tg} A = 4$. Найдите AB.

Вариант 7

1. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA$, $AB = 7$, $\sin A = 0{,}96$. Найдите длину высоты CH.

2. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $BC = CA = 8\sqrt{3}$. Чему равна высота, опущенная на основание, если $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$?

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 3$, $\operatorname{tg} A = 5$. Найдите высоту, опущенную на AB.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 50$ известно, что высота, опущенная к BC, равна 48. Найдите $\cos A$.

5. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 8\sqrt{5}$, $CB = 11\sqrt{5}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

Вариант 8

1. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами BC и CA известно, что длина основания равна 8, а $\sin A = 0{,}6$. Найдите высоту, опущенную к основанию треугольника.

2. В параллелограмме $ABCD$ известен $\sin A = \frac{\sqrt{19}}{10}$. Найдите $\cos B$, если $\angle A$ — острый.

3. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, причём $\sin A = \frac{4}{9}$ и $BC = 3\sqrt{65}$. Найдите AC.

10. Зак. № 249

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, косинус внешнего угла при вершине A равен $-\frac{11}{\sqrt{157}}$, $BC = 2$. Найдите $3 \cdot AC$.

5. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 18. Высота трапеции равна 46. Тангенс острого угла при основании равен $\frac{23}{5}$. Найдите большее основание.

§5. Параллелепипед, призма, пирамида

Диагностическая работа

1. Найдите отношение площади боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды к площади её основания, если сторона основания равна 1, а апофема равна $\sqrt{3}$.

2. Найдите угол AED_2 многогранника, изображённого на рисунке 233. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

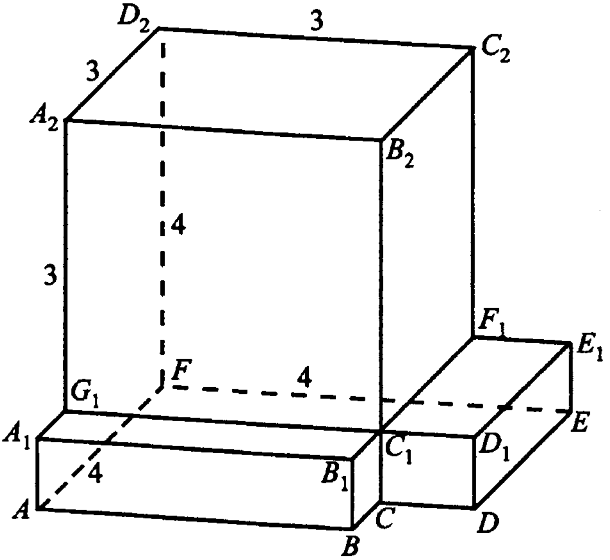


Рис. 233.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра DD_1, точка F — середина ребра D_1A_1, точка K — середина ребра C_1D_1. Найдите угол EFK. Ответ дайте в градусах.

4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь её поверхности равна 960. Найдите высоту призмы (см. рис. 234).

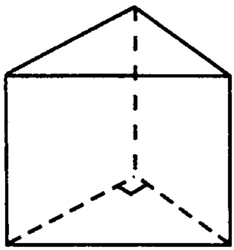


Рис. 234.

5. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 9, объём пирамиды равен 33. Найдите длину отрезка MD.

Прямоугольный параллелепипед

ⓘ *Немного полезной информации*

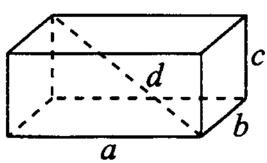


Рис. 235.

Объём прямоугольного параллелепипеда («кирпича», см. рис. 235) равен произведению трёх его измерений:

$$V = abc.$$

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна сумме площадей его шести граней:

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Диагональю прямоугольного параллелепипеда называют отрезок, соединяющий его противоположные вершины. Квадрат длины этого отрезка равен сумме квадратов трёх измерений параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Если все три измерения прямоугольного параллелепипеда равны, то такой параллелепипед называется **кубом** (см. рис. 236).

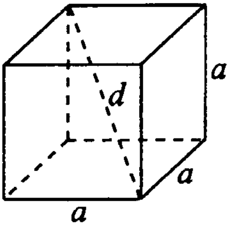


Рис. 236.

Для куба формулы объёма, площади и длины диагонали имеют вид

$$V = a^3, \quad S = 6a^2, \quad d = a\sqrt{3}.$$

Разбиение тела на прямоугольные параллелепипеды

Задачи с решениями

В этих задачах требуется найти объём или площадь поверхности многогранника с прямыми двугранными углами. При решении сначала разбивают данный многогранник на несколько прямоугольных параллелепипедов, а затем подсчитывают объём или площадь поверхности каждого параллелепипеда в отдельности.

1. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 237 (все двугранные углы многогранника прямые).

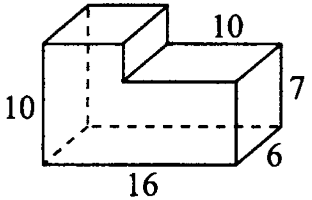


Рис. 237.

Решение.

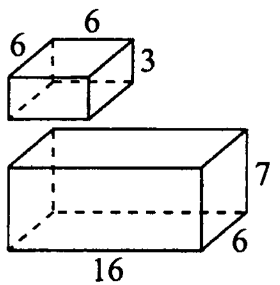


Рис. 238.

Данный многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов (см. рис. 238). Измерения большого параллелепипеда равны 16, 6 и 7. Измерения малого параллелепипеда равны $16 - 10 = 6$, 6 и $10 - 7 = 3$.

Суммарный объём этих параллелепипедов равен $16 \cdot 6 \cdot 7 + 6 \cdot 6 \cdot 3 = 96 \cdot 7 + 36 \cdot 3 = 672 + 108 = 780$.

Ответ: 780.

2. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и K_2 многогранника, изображённого на рисунке 239. Все двугранные углы многогранника прямые.

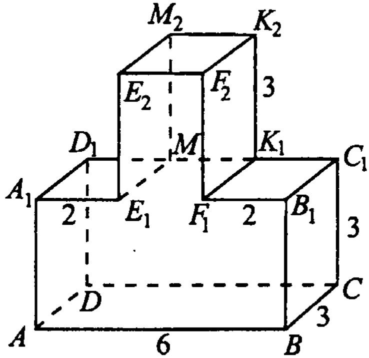


Рис. 239.

Решение.

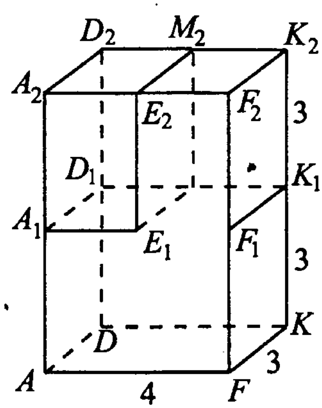


Рис. 240.

Проведём плоскость $F_1F_2K_2$ и отбросим ту часть фигуры, которая оказалась справа. Достроим оставшуюся часть многогранника до прямоугольного параллелепипеда $AFKDA_2F_2K_2D_2$ (см. рис. 240). Квадрат диагонали AK_2

найдём по формуле
$AK_2^2 = FA^2 + DA^2 + AA_2^2 = 4^2 + 3^2 + 6^2 = 16 + 9 + 36 = 61.$

Ответ: 61.

3. Найдите тангенс угла F_2AB многогранника, изображённого на рисунке 241. Все двугранные углы многогранника прямые.

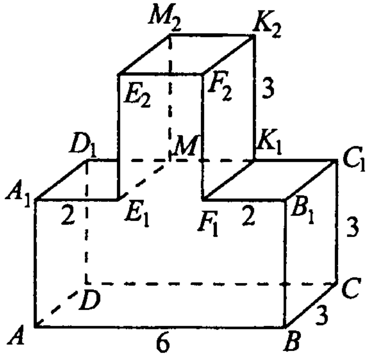


Рис. 241.

Решение.

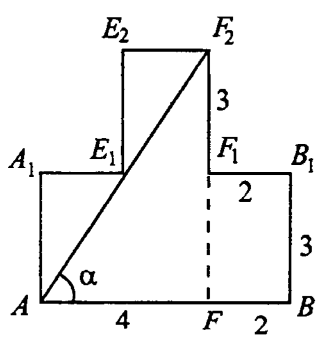


Рис. 242.

Заметим, что угол $F_2AB = \alpha$ лежит в плоскости грани $AA_1E_1E_2F_2F_1B_1B$ многогранника (см. рис. 242). Все углы многогранника прямые, поэтому $F_2F_1 \perp AB$. В прямоугольном $\triangle AF_2F$ $\angle F = 90°$; $\operatorname{tg}\alpha = F_2F : AF = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

4. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 243 (все двугранные углы прямые).

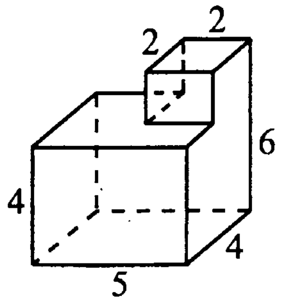


Рис. 243.

Решение.

Данный многогранник составлен из куба с ребром 2 и параллелепипеда $5 \times 4 \times 4$. Площадь поверхности куба равна $6 \cdot 2^2 = 24$. Учтём, что нижняя грань куба «склеена» с параллелепипедом, поэтому её площадь не включается в площадь исходного многогранника. Остаётся $24 - 2 \cdot 2 = 20$.

Площадь поверхности параллелепипеда равна $2(5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = 2 \cdot 56 = 112$. Также следует учесть, что квадрат 2×2 верхней грани параллелепипеда не будет включён в конечную площадь. Остаётся $112 - 2 \cdot 2 = 108$.

Искомая площадь равна $20 + 108 = 128$.

Ответ: 128.

5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 244 (все двугранные углы прямые).

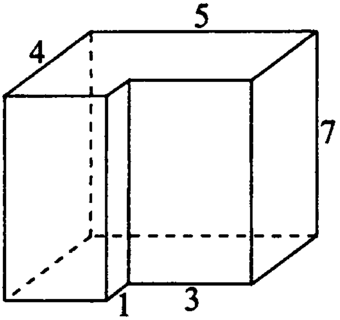


Рис. 244.

Решение.

При решении этой задачи данный многогранник удобнее всего рассматривать как прямую призму с высотой $h = 7$. Основанием этой призмы является многоугольник (см. рис. 245) с периметром $P = 2 \cdot (5 + 4) = 18$ и площадью $S_{\text{осн.}} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17$.

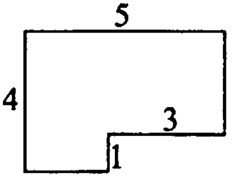


Рис. 245.

Тогда площадь боковой поверхности призмы равна $S_{\text{бок.}} = Ph = 18 \cdot 7 = 126$, а площадь всей поверхности равна $S = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 126 + 2 \cdot 17 = 160$.

Ответ: 160.

Соотношения в прямоугольном параллелепипеде и кубе

Задачи с решениями

6. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 5. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 62. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Решение.

Нам известны два измерения прямоугольного параллелепипеда (2 и 5), нужно найти третье измерение. Обозначим его через x. Тогда площадь поверхности параллелепипеда равна $S = 2(2 \cdot 5 + 2x + 5x)$. По условию $S = 62$, поэтому $2(2 \cdot 5 + 2x + 5x) = 62$; $7x + 10 = 31$; $x = 3$. Искомое ребро равно 3.

Ответ: 3.

7. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём этого параллелепипеда равен 36. Найдите диагональ параллелепипеда.

Решение.

Если обозначить неизвестное ребро через a, то объём равен $V = 2 \cdot 6 \cdot a$. По условию $V = 36$, поэтому $2 \cdot 6 \cdot a = 36$; $a = 3$. Найдём диагональ d данного прямоугольного параллелепипеда.

$d^2 = 2^2 + 6^2 + 3^2$; $d^2 = 4 + 36 + 9$; $d^2 = 49$; $d = 7$.

Ответ: 7.

8. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то площадь его поверхности увеличится на 90. Найдите ребро куба.

Решение.

Обозначим ребро куба через a. Тогда площадь поверхности исходного куба равна $6a^2$, а площадь поверхности увеличенного куба $6(a+1)^2$. По условию $6(a+1)^2 - 6a^2 = 90$; $12a + 6 = 90$; $12a = 84$; $a = 7$.

Ответ: 7.

Параллелепипед и призма

Немного полезной информации

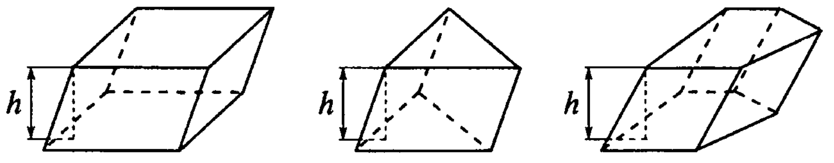


Рис. 246.

Объём параллелепипеда и призмы (см. рис. 246) может быть найден как произведение площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн.}} h.$$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту:

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} h.$$

Площадь всей поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и удвоенной площади основания (так как площади обоих оснований одинаковы):

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Если призма прямая (см. рис. 247), то формулы остаются прежними, но высота прямой призмы равна её боковому ребру. Напомним, что в прямой призме боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. В частности, любая правильная призма является прямой (но в основании правильной призмы к тому же обязательно лежит правильный многоугольник).

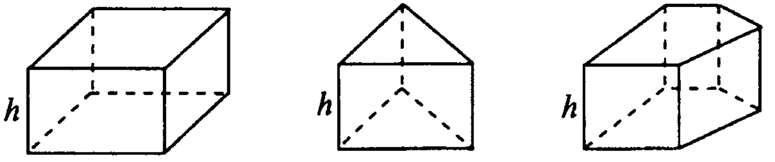


Рис. 247.

В правильной шестиугольной призме основание является правильным шестиугольником. Обозначив сторону этого шестиугольника через a, получаем следующие соотношения (см. рис. 248):

$$S_{\text{основания}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2},$$

$$AD = 2a, \quad AE = a\sqrt{3}, \quad \angle EAD = 30°, \quad \angle EFA = 120°,$$

радиус описанной окружности $AO = a$,

радиус вписанной окружности $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

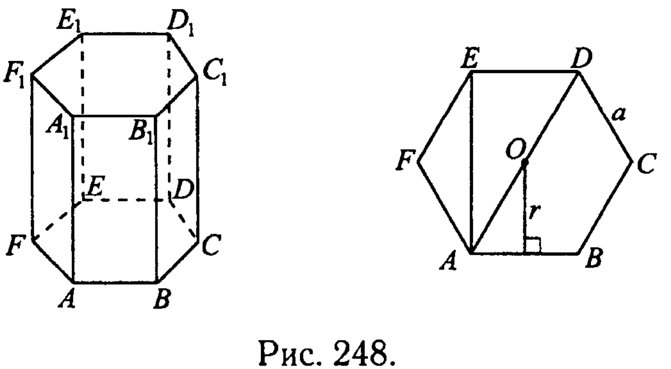


Рис. 248.

Задачи с решениями

9. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 600 см^3 воды (см. рис. 249) и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 12 см до отметки 16 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

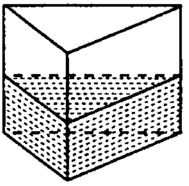


Рис. 249.

Решение.

Обозначим через S площадь основания призмы. Тогда из формулы объёма призмы $V = Sh$ имеем $12S = 600$, $S = 50$ (см^2). После погружения детали суммарный объём детали и воды вычисляется по той же формуле:
$50 \cdot 16 = 800$ (см^3). Объём детали равен $800 - 600 = 200$ (см^3).

Ответ: 200.

10. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 250). Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

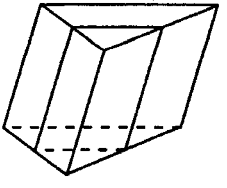


Рис. 250.

Решение.

Обозначим через V_1 и S_1 объём и площадь основания исходной призмы, через V_2 и S_2 объём и площадь основания отсечённой призмы. Так как у обеих призм общая высота, то $\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1}$. Средняя линия отсекает от треугольника в основании исходной призмы подобный треугольник, коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$ (так как средняя линия в 2 раза меньше параллельной ей стороны треугольника). Отсюда $\frac{S_2}{S_1} = k^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4}$; $V_2 = \frac{1}{4}V_1 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

Ответ: 12.

11. Основанием прямой треугольной призмы (см. рис. 251) служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь её поверхности равна 180. Найдите высоту призмы.

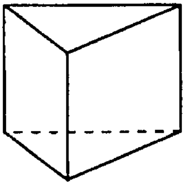


Рис. 251.

Решение.

По теореме Пифагора можно найти гипотенузу c треугольника в основании призмы. $c^2 = 5^2 + 12^2$; $c^2 = 169$; $c = 13$. Периметр основания призмы равен $P = 5+12+13 = 30$. Площадь прямоугольного треугольника в основании равна половине произведения его катетов: $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Площадь боковой поверхности равна $S_{\text{бок.}} = Ph = 30h$. В условии дана площадь всей поверхности призмы $S_{\text{полн.}} = 180$. Отсюда $S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 180$; $30h + 2 \cdot 30 = 180$; $30h = 120$; $h = 4$.

Ответ: 4.

Тетраэдр и пирамида

ⓘ *Немного полезной информации*

Объём тетраэдра и пирамиды (см. рис. 252) можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

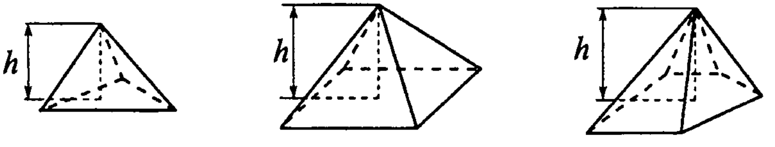


Рис. 252.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания и апофемы (высоты боковой грани, проведённой из вершины пирамиды, см. рис. 253):

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} l.$$

Высота правильной пирамиды падает в центр её основания. Углом между ребром и плоскостью основания называют угол между этим ребром и его проекцией на плоскость основания. На рисунке 254 $SABC$ — правильная пирамида,

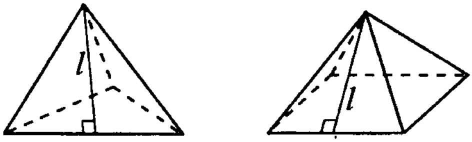


Рис. 253.

SO — высота. Тогда O — центр основания ABC. Угол между ребром AS и плоскостью основания $\alpha = \angle SAO$.

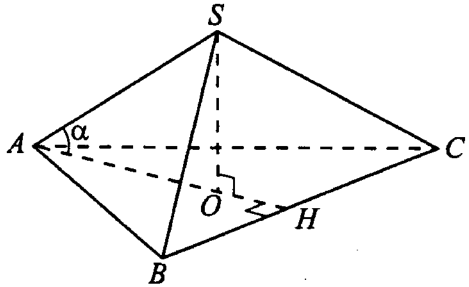


Рис. 254.

Углом между боковой гранью и плоскостью основания называют угол между апофемой боковой грани и проекцией этой апофемы на плоскость основания. На рисунке 255 $ABCS$ — правильная пирамида, SH — апофема, $\beta = \angle AHS$ — угол между гранью BCS и плоскостью основания ABC.

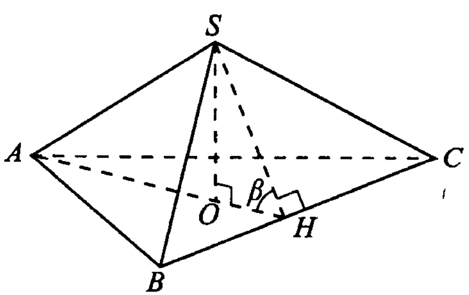


Рис. 255.

Задачи с решениями

12. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды (см. рис. 256) равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

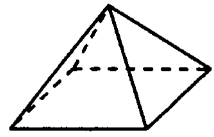


Рис. 256.

Решение.

Проведём апофему EH (см. рис. 257). EH — высота равнобедренного треугольника ABE, поэтому является его медианой, и $AH = BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEH имеем $EH^2 = AE^2 - AH^2$; $EH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$; $EH = 15$. В основании пирамиды лежит квадрат с периметром $4 \cdot 16 = 64$ и площадью $16^2 = 256$. Искомая площадь равна сумме площади основания и площади боковой поверхности:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + \frac{1}{2}Pl = 256 + \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 15 = 256 + 480 = 736.$$

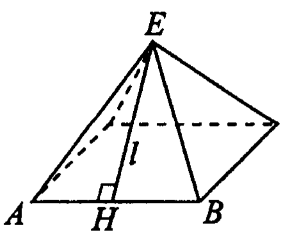


Рис. 257.

Ответ: 736.

13. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° (см. рис. 258). Высота пирамиды равна 12. Найдите объём пирамиды.

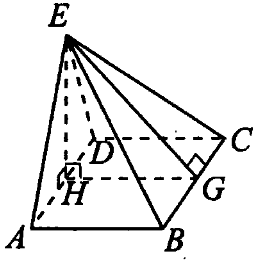


Рис. 258.

Решение.

По условию высота пирамиды $EH = 12$. Из прямоугольного треугольника EHG имеем $\operatorname{ctg}\angle EGH = \dfrac{HG}{EH}$;

$HG = EH\operatorname{ctg}60^\circ = 12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$. Аналогично из прямоугольного треугольника EHA получаем $HA = 4\sqrt{3}$. Площадь прямоугольника в основании

$S_{\text{осн.}} = AB\cdot AD = HG\cdot(2\cdot HA) = 4\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3} = 96$. Объём пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}}h = \dfrac{1}{3}\cdot 96\cdot 12 = 384$.

Ответ: 384.

14. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды (см. рис. 259) равна 4, боковое ребро равно 8. Найдите объём пирамиды.

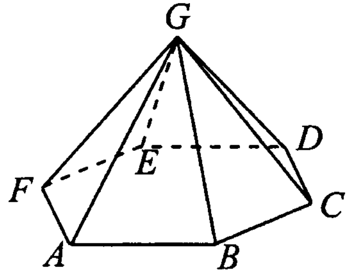


Рис. 259.

Решение.

Опустим из вершины G высоту GH на плоскость основания пирамиды. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник, и точка H — его центр. В правильном шестиугольнике радиус описанной окружности равен стороне шестиугольника, поэтому отрезки AH, BH, ..., FH разбивают шестиугольник на шесть равносторонних треугольников (см. рис. 260). Площадь каждого треугольника равна $4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, поэтому площадь шестиугольника равна $24\sqrt{3}$.

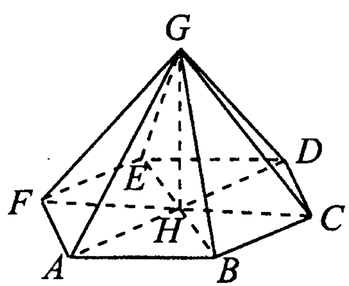


Рис. 260.

Теперь найдём высоту пирамиды. По теореме Пифагора для треугольника AHG имеем $HG^2 = AG^2 - AH^2$; $HG^2 = 8^2 - 4^2$; $HG^2 = 48$; $HG = 4\sqrt{3}$.

4. Объём куба равен $3\sqrt{3}$. Найдите его диагональ (см. рис. 263).

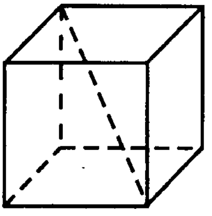


Рис. 263.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 24$, $AA_1 = 15$. Найдите синус угла между прямыми CA и D_1C_1.

Вариант 2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 264). Объём треугольной пирамиды A_1BC_1D равен 3. Чему равен объём куба?

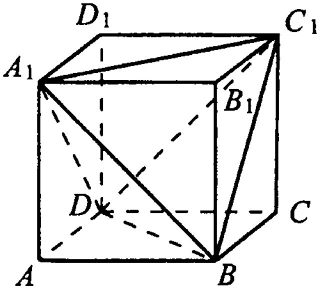


Рис. 264.

2. Найдите угол ADB многогранника, изображённого на рисунке 265. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

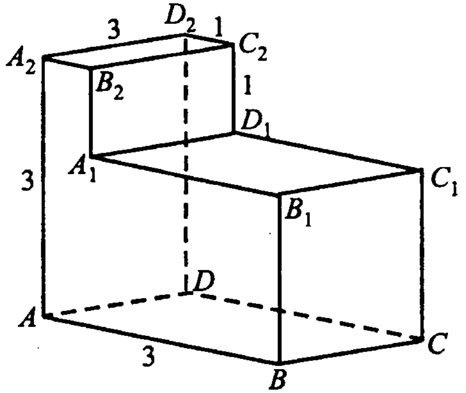


Рис. 265.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол $C_1B_1F_1$. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_3 многогранника, изображённого на рисунке 266. Все двугранные углы многогранника прямые.

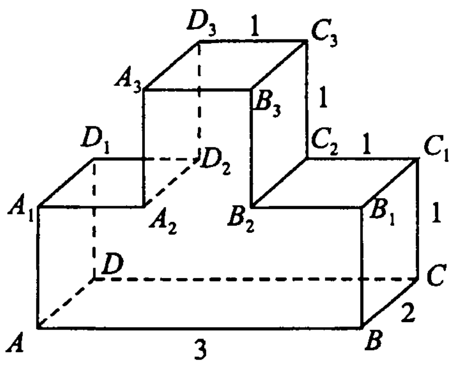


Рис. 266.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

Вариант 3

1. Диагональ грани куба равна $3\sqrt{2}$ (см. рис. 267). Найдите объём куба.

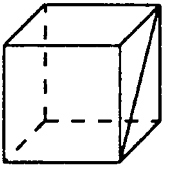


Рис. 267.

2. Найдите угол AA_2C многогранника, изображённого на рисунке 268. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

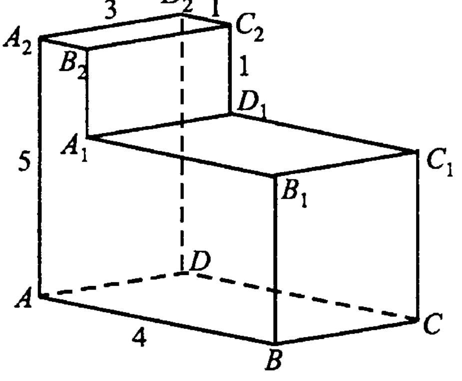


Рис. 268.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол BD_1D. Ответ дайте в градусах.

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности параллелепипеда равна 192. Найдите его диагональ (см. рис. 269).

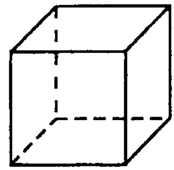


Рис. 269.

5. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 5 и 8. Её объём равен 120. Найдите высоту этой пирамиды.

Вариант 4

1. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 6 (см. рис. 270). Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

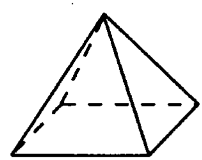


Рис. 270.

2. Найдите тангенс угла ABA_1 многогранника, изображённого на рисунке 271. Все двугранные углы многогранника прямые.

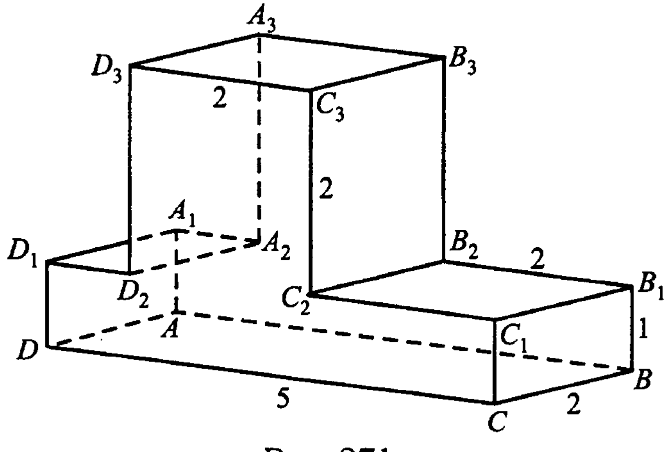


Рис. 271.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и B_1C_1. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 272. Все двугранные углы многогранника прямые.

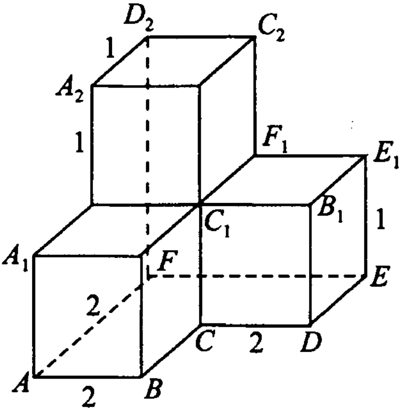


Рис. 272.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 5, объём равен 480. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

Вариант 5

1. Из куба со стороной 5 вырезана правильная четырёхугольная пирамида (рис. 273) со стороной основания 3 и высотой 4. Найдите объём оставшейся части куба.

2. Найдите тангенс угла CDC_3 многогранника, изображённого на рисунке 274. Все двугранные углы многогранника прямые.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BB_1 и A_1D. Ответ дайте в градусах.

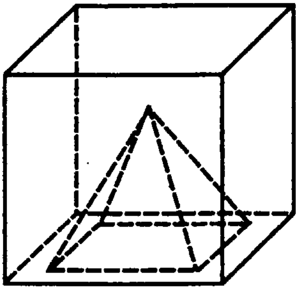


Рис. 273.

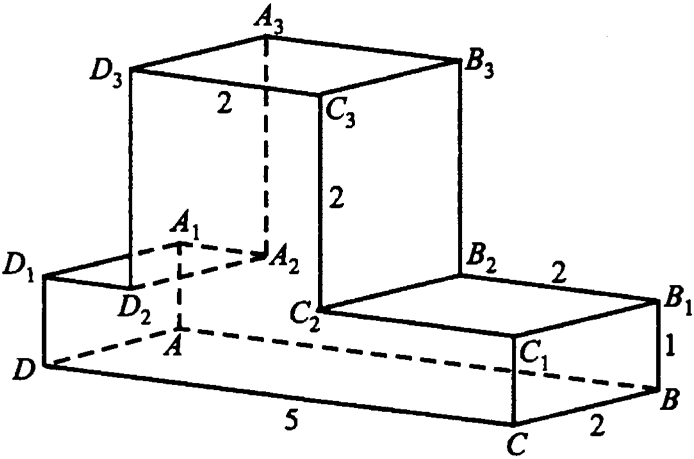


Рис. 274.

4. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 96 и 28 (см. рис. 275). Площадь её боковой поверхности равна 600. Найдите боковое ребро этой призмы.

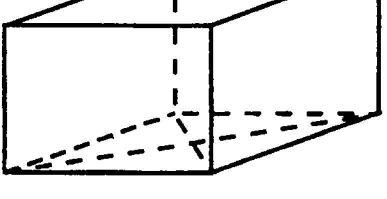


Рис. 275.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $SC = 26$, $AC = 20$. Найдите длину отрезка SO (см. рис. 276).

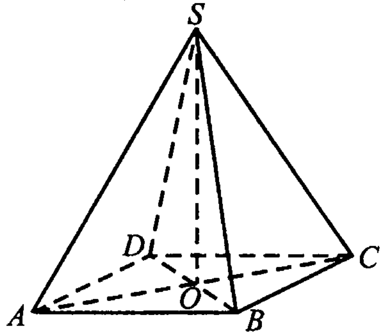


Рис. 276.

Вариант 6

1. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 277 (все двугранные углы многогранника прямые).

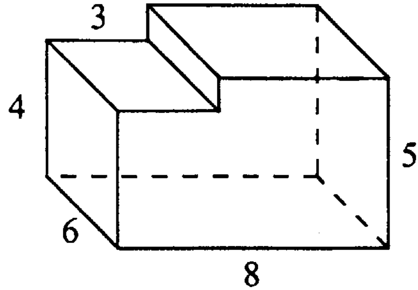


Рис. 277.

2. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $CD = 41$, $AD = 9$, $DD_1 = 40$. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол EAE_1. Ответ дайте в градусах.

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 5 и 6. Объём параллелепипеда равен 480. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины (см. рис. 278).

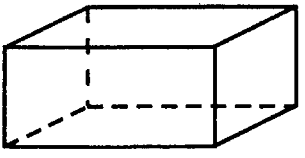


Рис. 278.

5. Объём правильной шестиугольной пирамиды равен 12. Сторона основания равна 2. Найдите боковое ребро (см. рис. 279).

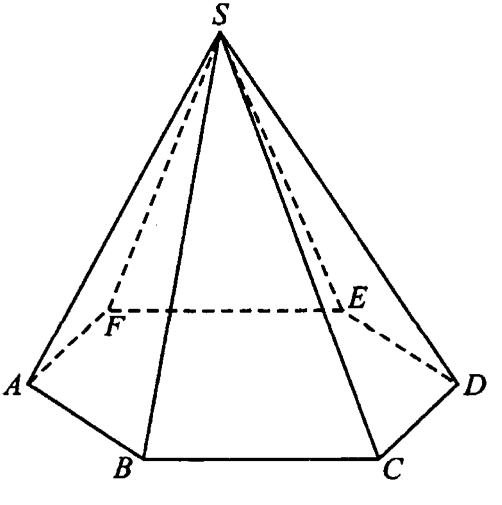


Рис. 279.

Вариант 7

1. В единичном кубе вырезали призму со стороной основания 0,2 и боковым ребром 1 (см. рис. 280). Найдите объём оставшейся части куба.

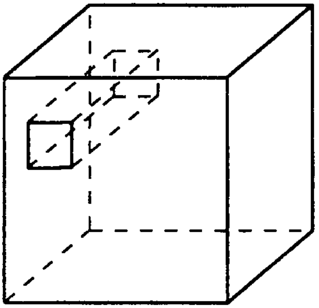


Рис. 280.

2. Найдите угол ACA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = 10$. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1 = 2B_1C_1$. Найдите угол между диагоналями DB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

4. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 5, 8, 25. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда (см. рис. 281).

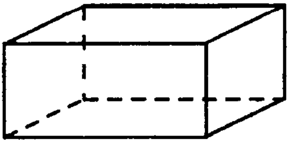


Рис. 281.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ K — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $SK = 10$, а площадь боковой поверхности равна 75. Найдите длину отрезка AB.

Вариант 8

1. Из куба со стороной $\sqrt{12}$ вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром $\sqrt{12}$ (см. рис. 282). Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

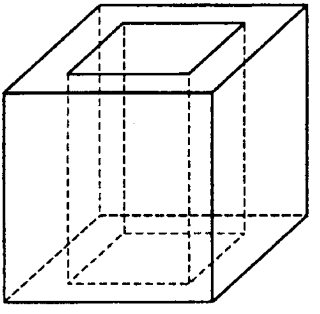


Рис. 282.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 24$, $AA_1 = 15$. Найдите синус угла между прямыми CA и D_1C_1.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 7. Объём призмы равен 84. Найдите её боковое ребро.

5. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 9, объём пирамиды равен 33. Найдите длину отрезка MD.

§6. Цилиндр, конус, шар, комбинация тел

Диагностическая работа

1. Если каждое ребро куба уменьшить на 2, то площадь его поверхности уменьшается на 48. Найдите ребро куба.

2. Объём первого конуса равен 30 м^3. У второго конуса радиус основания в 2 раза больше радиуса первого конуса, а высота второго в 3 раза меньше высоты первого. Найдите объём второго конуса. Ответ укажите в м^3.

3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 и 5 (см. рис. 283). Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

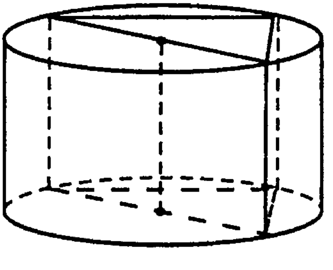


Рис. 283.

4. Высота конуса равна 15, а диаметр основания — 16. Найдите образующую конуса.

Цилиндр

ⓘ *Немного полезной информации*

Для объёма и площади боковой поверхности цилиндра (см. рис. 284) справедливы те же формулы, что и для призмы:

$$V = S_{\text{осн.}}h, \quad S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}}h.$$

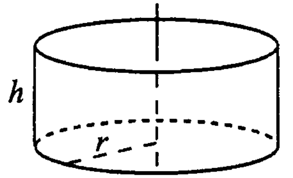


Рис. 284.

Если радиус основания равен r, то площадь основания цилиндра равна πr^2, а периметр — $2\pi r$. Тогда формулы объёма цилиндра, площадей боковой и полной поверхности цилиндра имеют вид

$$V = \pi r^2 h, \quad S_{\text{бок.}} = 2\pi rh, \quad S_{\text{полн.}} = 2\pi r(h + r).$$

Задачи с решениями

1. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 45 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Решение.

Объём воды после переливания остаётся тем же: $V_1 = V_2$; $\pi r_1^2 \cdot 45 = \pi r_2^2 \cdot h_2$. Так как диаметр второго сосуда в 3 раза больше диаметра первого, то и радиус второго втрое больше

12. Зак. № 249

радиуса первого:

$45r_1^2 = (3r_1)^2 \cdot h_2;\;\; 45r_1^2 = 9r_1^2 \cdot h_2;\;\; h_2 = 5.$

Ответ: 5.

2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 6 (см. рис. 285). Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, делённую на π.

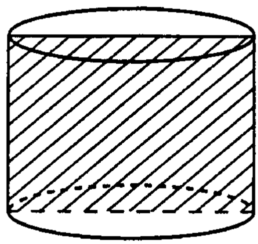


Рис. 285.

Решение.

Осевое сечение — это прямоугольник со сторонами $2r$ и h, где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Площадь этого прямоугольника равна $2rh$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$. Отсюда $\dfrac{S_{\text{бок.}}}{\pi} = 2rh = 6$.

Ответ: 6.

Конус

① *Немного полезной информации*

Объём конуса (см. рис. 286) может быть вычислен по той же формуле, что и объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

Если известен радиус основания r, то объём можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

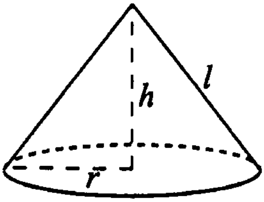


Рис. 286.

Площади боковой и полной поверхности конуса вычисляются следующим образом (l — образующая):

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l, \quad S_{\text{полн.}} = \pi r(r + l).$$

Задачи с решениями

3. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.

Решение.

По условию $h = l\sin 30^\circ = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$ (см. рис. 287 на с. 166); $r = l\cos 30^\circ = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$. Искомый объём равен $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (5\sqrt{3})^2 \cdot 5 = 125\pi$; $\dfrac{V}{\pi} = 125$.

Ответ: 125.

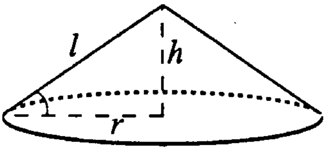


Рис. 287.

4. Длина окружности основания конуса равна 4, образующая равна 5. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Решение.

Обозначим через r радиус основания конуса, через l образующую. Тогда по условию $2\pi r = 4$; $\pi r = 2$.
$S_{\text{бок.}} = \pi r l = 2 \cdot 5 = 10$.

Ответ: 10.

5. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 288. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.

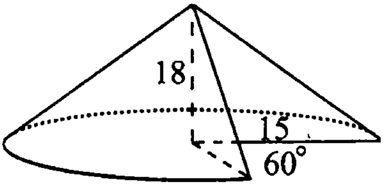


Рис. 288.

Решение.

Угол 60°, вырезанный из основания, составляет $\dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ часть полного угла. Таким образом, $\dfrac{1}{6}$ часть конуса была удалена, $\dfrac{5}{6}$ осталось. Объём конуса с радиусом основания 15 и высотой 18 равен $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 18 = 225 \cdot 6 = 1350\pi$. Искомый объём $V = \frac{5}{6} \cdot 1350\pi = 1125\pi$; $\frac{V}{\pi} = 1125$.

Ответ: 1125.

Шар

Немного полезной информации

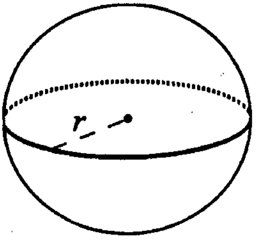


Рис. 289.

Объём шара и площадь его поверхности вычисляются по формулам

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2.$$

Задачи с решениями

6. Объём шара равен $36\,000\pi$. Найдите площадь его поверхности, делённую на π.

Решение.

Обозначим через r радиус шара. Тогда $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\,000\pi$; $r^3 = 27\,000$; $r = 30$. Площадь поверхности шара равна $S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 30^2 = 3600\pi$; $\frac{S}{\pi} = 3600$.

Ответ: 3600.

7. Площадь большого круга шара равна 10 (см. рис. 290). Найдите площадь поверхности шара.

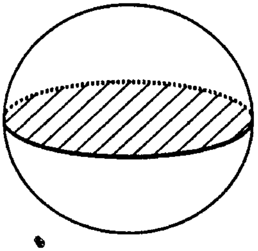


Рис. 290.

Решение.

Обозначим радиус шара через r. Тогда площадь большого круга шара равна πr^2, а площадь поверхности шара — $4\pi r^2$. Таким образом, площадь поверхности шара в 4 раза больше площади большого круга шара и равна $4 \cdot 10 = 40$.

Ответ: 40.

Увеличение и уменьшение геометрических тел

ⓘ *Немного полезной информации*

При увеличении всех линейных измерений тела в k раз площадь поверхности этого тела увеличивается в k^2 раз, а объём этого тела — в k^3 раз. Например, при увеличении радиуса шара в 5 раз площадь его поверхности увеличится в 25 раз, а объём — в 125 раз.

Объём параллелепипеда, призмы, цилиндра и конуса прямо пропорционален высоте и площади основания.

Задачи с решениями

8. Во сколько раз увеличится объём куба, если его рёбра увеличить в 4 раза?

Решение.

Объём куба прямо пропорционален третьей степени его ребра, поэтому объём увеличится в $4^3 = 64$ раза.

Ответ: 64.

9. Во сколько раз увеличится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в три раза?

Решение.

При увеличении всех линейных размеров тетраэдра в 3 раза его объём увеличится в $3^3 = 27$ раз.

Ответ: 27.

10. Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличить в 2,5 раза?

Решение.

Объём конуса прямо пропорционален площади основания. Площадь основания равна πr^2, то есть прямо пропорциональна квадрату радиуса. Таким образом, при увеличении радиуса основания в 2,5 раза объём увеличится в $2{,}5^2 = 6{,}25$ раз.

Ответ: 6,25.

Комбинации тел

Задачи с решениями

11. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 291). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 16.

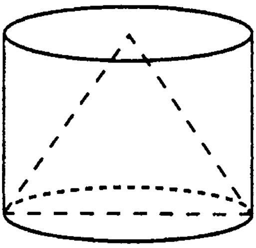


Рис. 291.

Решение.

Объём конуса равен $\frac{1}{3}Sh$, а объём цилиндра — Sh, где S — площадь их общего основания, h — общая высота. Видно, что объём цилиндра в 3 раза больше объёма конуса и равен $16 \cdot 3 = 48$.

Ответ: 48.

12. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 292), радиус основания которого равен 5. Объём параллелепипеда равен 600. Найдите высоту цилиндра.

Решение.

Каждая сторона прямоугольника в основании параллелепипеда равна диаметру цилиндра, то есть $2 \cdot 5 = 10$. Площадь основания параллелепипеда равна $10 \cdot 10 = 100$. Высоту h параллелепипеда находим из формулы объёма параллелепи-

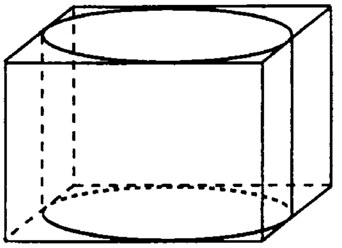


Рис. 292.

педа: $100h = 600$; $h = 6$. Найденная высота параллелепипеда одновременно является и высотой цилиндра.

Ответ: 6.

13. Объём куба равен 30 (см. рис. 293). Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

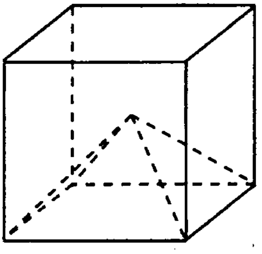


Рис. 293.

Решение.

Рассмотрим куб как четырёхугольную призму. Его объём равен $V_{\text{куб}} = S_{\text{осн.}} h_{\text{куб}}$. Основание пирамиды совпадает с основанием призмы, а высота вдвое меньше высоты призмы. Поэтому

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot \frac{1}{2} h_{\text{куб}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{\text{куб}} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5.$$

Ответ: 5.

14. Объём правильной шестиугольной пирамиды $GABCDEF$ равен 60 (см. рис. 294). Найдите объём треугольной пирамиды $GABC$.

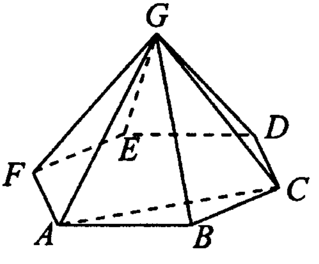


Рис. 294.

Решение.

Обозначим сторону шестиугольника в основании пирамиды через r. Правильный шестиугольник можно разбить на 6 правильных треугольников (как в задаче 12), поэтому площадь шестиугольника равна $6 \cdot \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

Найдём площадь треугольника ABC.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2 =$

$= \dfrac{1}{6}S_{ABCDEF}$.

Таким образом, площадь основания пирамиды $GABC$ в 6 раз меньше площади основания шестиугольной пирамиды, а их высóты совпадают. Поэтому объёмы этих пирамид находятся в том же соотношении, что и площади их оснований.

$V_{GABC} = \dfrac{1}{6}V_{GABCDEF} = \dfrac{1}{6} \cdot 60 = 10$.

Ответ: 10.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π, высота равна 2 (см. рис. 295). Найдите диаметр основания цилиндра.

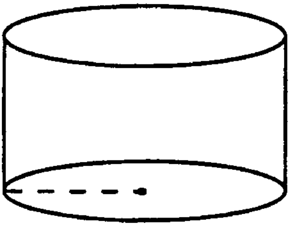


Рис. 295.

2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, высота которого равна 16 (см. рис. 296). Объём параллелепипеда равен 64. Найдите радиус цилиндра.

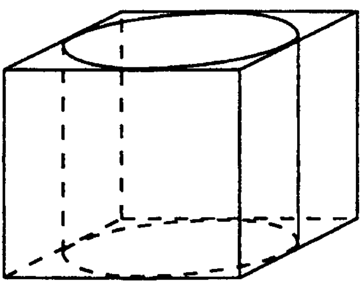


Рис. 296.

3. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объём конуса, если объём шара равен 8.

4. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если радиус шара уменьшится в 3 раза?

Вариант 2

1. Найдите площадь поверхности сферы, если площадь боковой поверхности вписанного в сферу конуса с основанием, совпадающим с сечением сферы, проходящим через её центр (см. рис. 297), равна $6\sqrt{2}$.

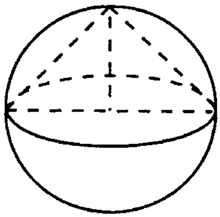


Рис. 297.

2. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра (см. рис. 298), радиус основания которого равен 5, а высота равна $2\sqrt{3}$.

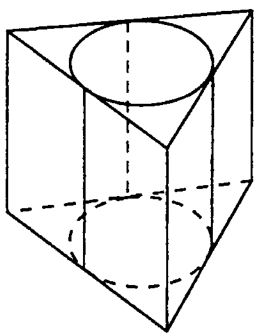


Рис. 298.

3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара (см. рис. 299), если его объём увеличился в 27 раз?

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt[3]{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

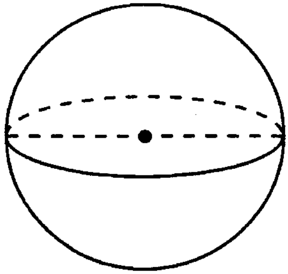


Рис. 299.

Вариант 3

1. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом при основании $60°$ и боковой стороной 6, при этом одно из оснований проходит через центр окружности. Найдите объём конуса, описанного около пирамиды (см. рис. 300), если высота пирамиды равна 10. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

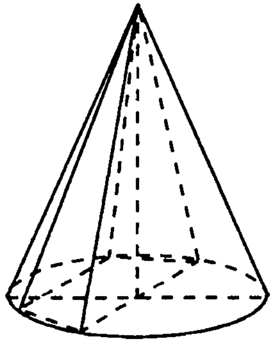


Рис. 300.

2. Объём первой пирамиды равен 24 м^3. У второй пирамиды площадь основания в 6 раз больше, чем площадь основания первой пирамиды, а высота второй пирамиды в три раза мень-

ше, чем первой. Найдите объём второй пирамиды. Ответ дайте в кубических метрах.

3. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной $\sqrt{6}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

4. В конус вписан цилиндр (см. рис. 301), высота которого в три раза меньше высоты конуса. Во сколько раз объём конуса больше объёма цилиндра?

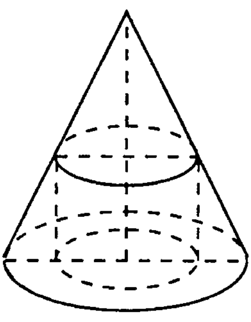


Рис. 301.

Вариант 4

1. Если каждое ребро куба увеличить на 2 (см. рис. 302), то его площадь поверхности увеличится на 192. Найдите ребро куба.

2. Диаметр основания конуса равен 18, а длина образующей — 15. Найдите высоту конуса.

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 35π, а высота — 7. Найдите диаметр основания.

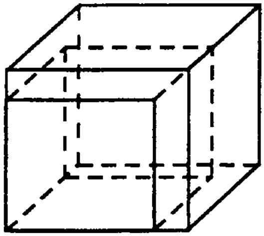


Рис. 302.

4. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Вариант 5

1. Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его объём увеличится на 98. Найдите ребро куба (см. рис. 303).

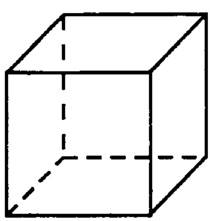


Рис. 303.

2. Радиусы двух шаров равны 9 и 40. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей обоих шаров (см. рис. 304).

3. В шестиугольную призму вписан цилиндр, радиус основания которого равен $5\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы, если её объём равен $30\sqrt{3}$.

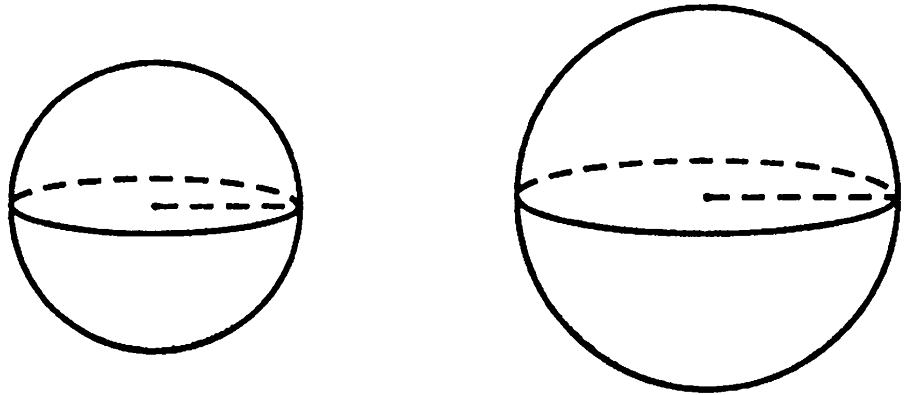


Рис. 304.

4. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 9 см. На какой высоте (в см) будет находиться уровень жидкости, если её перелить во 2-й цилиндрический сосуд, радиус основания которого в 3 раза меньше радиуса 1-го?

Тренировочные тесты

Вариант 1

1. Найдите площадь S заштрихованного сектора (см. рис. 305), считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

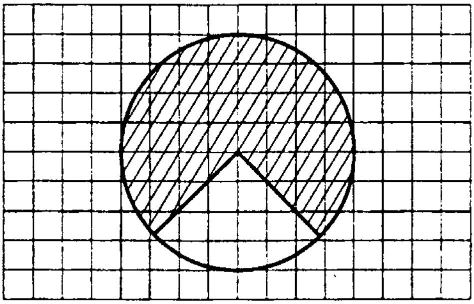


Рис. 305.

2. В прямоугольном треугольнике ABC заданы длины катета $AC = 24$ и гипотенузы $AB = 25$. Найдите $\sin A$.

3. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 13, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

4. Площадь прямоугольника равна 24. Найдите его бо́льшую сторону, если она на 5 больше меньшей стороны.

5. Рёбра правильного тетраэдра равны 34. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер (см. рис. 306).

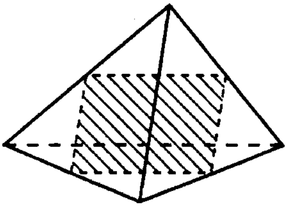


Рис. 306.

Вариант 2

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 307). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

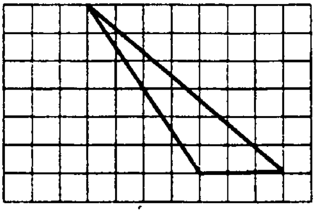


Рис. 307.

2. Известно, что в $\triangle ABC$ $\cos A = -\frac{\sqrt{7}}{4}$. Вычислите синус угла, внешнего к A.

3. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём пирамиды $ABDA_1$.

4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 45, а отношение соседних сторон равно $1:5$.

5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 308 (все двугранные углы прямые).

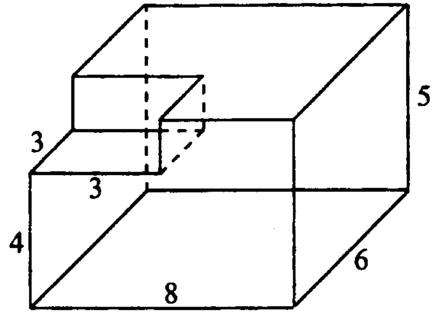


Рис. 308.

Вариант 3

1. Найдите площадь S кольца (см. рис. 309), считая стороны квадратных клеток равными 1. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

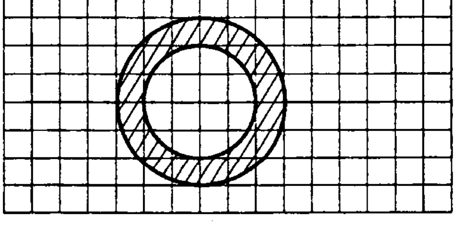


Рис. 309.

2. В треугольнике ABC угол C прямой, $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $AB = 1$. Найдите AC.

3. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 310). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 15.

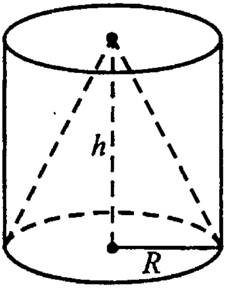


Рис. 310.

4. Периметр прямоугольника равен 46, а площадь равна 120. Найдите диагональ этого прямоугольника.

5. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 311 (все двугранные углы прямые).

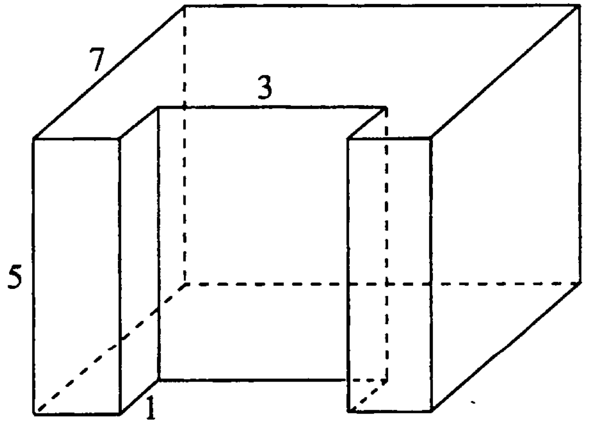


Рис. 311.

Вариант 4

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 312). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

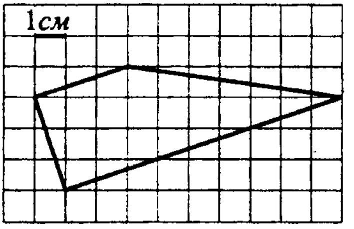


Рис. 312.

2. В прямоугольном треугольнике ABC заданы длины катета $AC = 24$ и гипотенузы $AB = 25$. Найдите высоту CH.

3. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

4. Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 32, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ разделила прямоугольник, равен 28 (см. рис. 313).

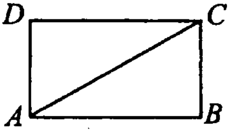


Рис. 313.

5. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 7 (см. рис. 314). Найдите его объём.

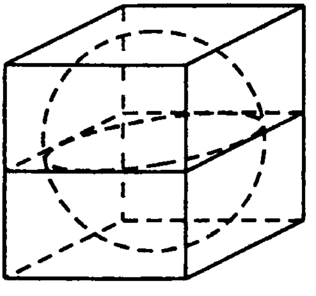


Рис. 314.

Вариант 5

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 315). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

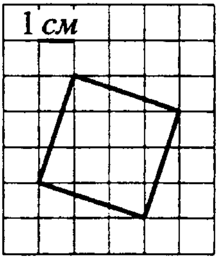


Рис. 315.

2. Треугольник ABC прямоугольный, $\angle C = 90°$. Известно, что $\cos A = \frac{8}{9}$, $AB = 27$. Найдите CA.

3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра с высотой, равной $\frac{6}{\pi}$, если в основание цилиндра вписан прямоугольный треугольник (см. рис. 316) с катетами 3 и 4.

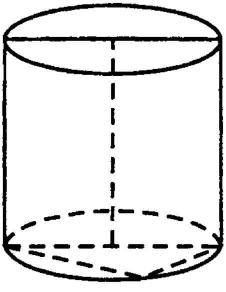


Рис. 316.

4. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 3 больше, чем расстояние от неё до большей стороны (см. рис. 317). Периметр прямоугольника равен 28. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

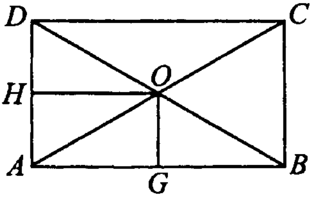


Рис. 317.

5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 28π, а диаметр основания — 4. Найдите высоту цилиндра.

Вариант 6

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 318). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

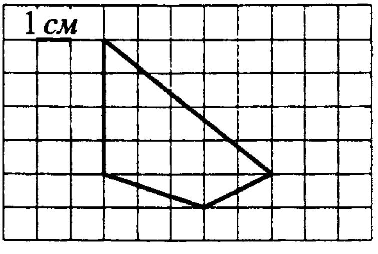


Рис. 318.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AC и CB известны $AB = \sqrt{77}$ и $\cos A = \dfrac{2}{9}$. Найдите высоту, опущенную на основание треугольника.

3. Объём правильной шестиугольной призмы равен $3\sqrt{3}$, сторона основания равна 2 (см. рис. 319). Найдите высоту призмы.

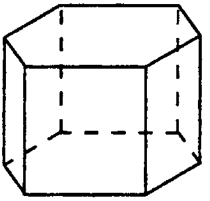


Рис. 319.

4. Стороны параллелограмма равны 21 и 14. Высота, опущенная на первую сторону, равна 6. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма (см. рис. 320).

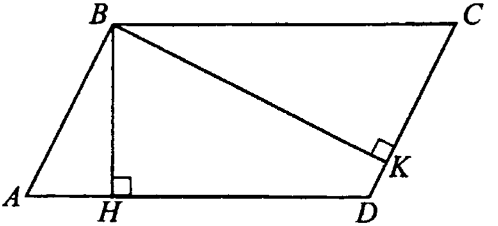


Рис. 320.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и AC (см. рис. 321). Ответ дайте в градусах.

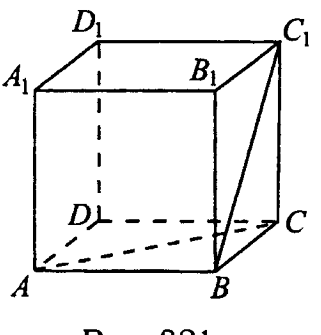


Рис. 321.

Вариант 7

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 322). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

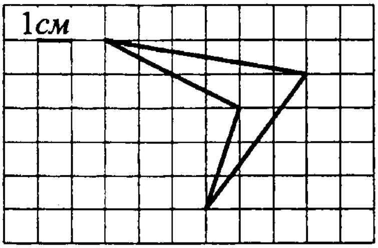


Рис. 322.

2. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AB равна 10. Найдите длину боковой стороны треугольника, если $\operatorname{tg} A = 2\sqrt{2}$.

3. Объём первого конуса равен 18 м^3. У второго конуса высота в четыре раза меньше, а радиус основания в два раза больше, чем у первого. Найдите объём второго конуса. Ответ дайте в кубических метрах.

4. Площадь параллелограмма равна 28, две его стороны равны 7 и 14. Найдите бóльшую высоту этого параллелограмма (см. рис. 323).

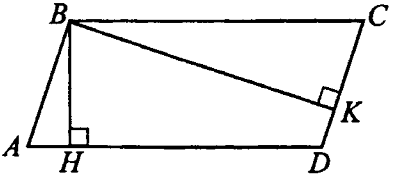


Рис. 323.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке M. Площадь треугольника ABC равна 12, объём пирамиды равен 32. Найдите длину отрезка MS.

Вариант 8

1. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 324.

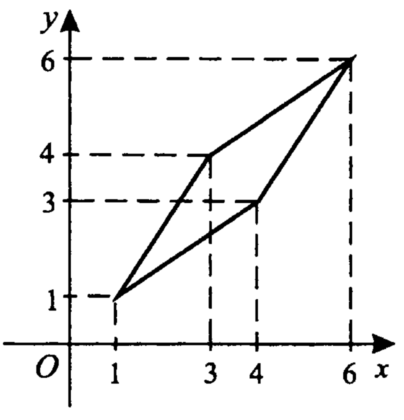


Рис. 324.

2. Найдите по рисунку (см. рис. 325) косинус угла BCK. В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $\sqrt{13}$.

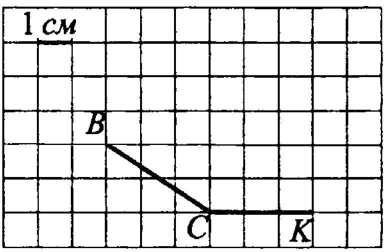


Рис. 325.

3. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду (см. рис. 326). Уровень воды достигает 20 см. На какой высоте (в сантиметрах) будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 2 раза больше, чем у первого?

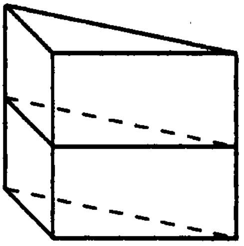


Рис. 326.

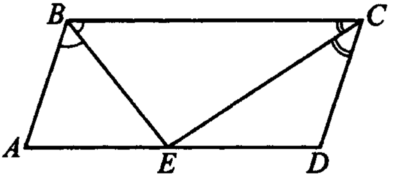


Рис. 327.

4. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне (см. рис. 327). Меньшая сторона параллелограмма равна 8. Найдите его бо́льшую сторону.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $DABCF$ точка O — центр основания, D — вершина, $DO = 24$, $AC = 14$ (см. рис. 328). Найдите боковое ребро DC.

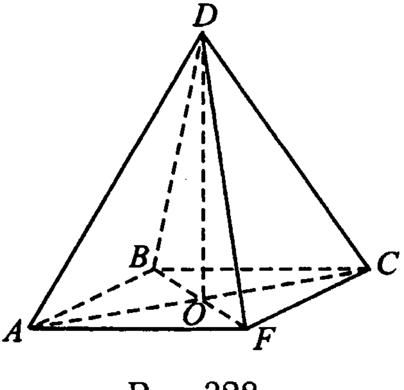


Рис. 328.

Вариант 9

1. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 329.

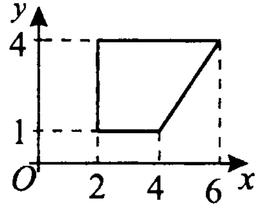


Рис. 329.

2. Найдите косинус тупого угла B параллелограмма $ABCD$, если его сторона $AB = 8$, а высота AH, проведённая к стороне BC, равна 3. В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $\sqrt{55}$.

3. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 330 (все двугранные углы многогранника прямые).

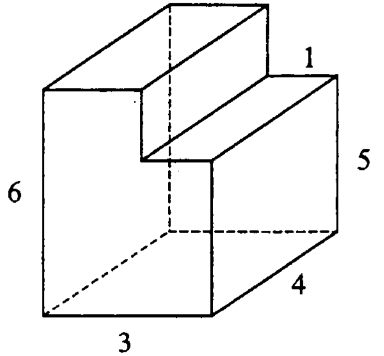


Рис. 330.

4. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 5 : 3, считая от вершины острого угла (см. рис. 331). Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 52.

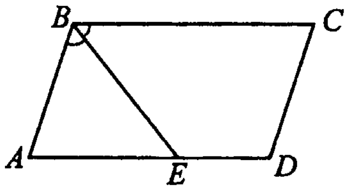


Рис. 331.

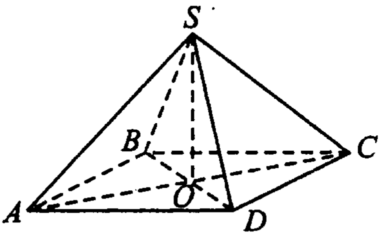


Рис. 332.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SC = 25$, $AC = 48$ (см. рис. 332). Найдите длину отрезка SO.

Вариант 10

1. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты $(1;3)$, $(3;1)$, $(3;6)$, $(1;5)$ (см. рис. 333).

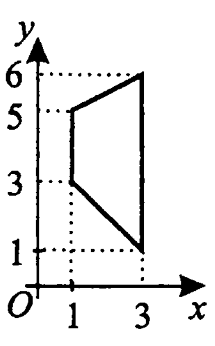


Рис. 333.

2. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC, если $AC = 12\sqrt{2}$, $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

3. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 334 (все двугранные углы многогранника прямые).

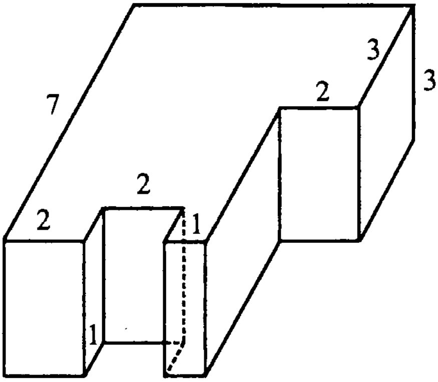


Рис. 334.

4. Площадь прямоугольного треугольника равна 14. Один из его катетов на 3 больше другого. Найдите меньший катет.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 12$, $AD = 16$, $AA_1 = 15$ (см. рис. 335). Найдите синус угла между прямыми CB и D_1B_1.

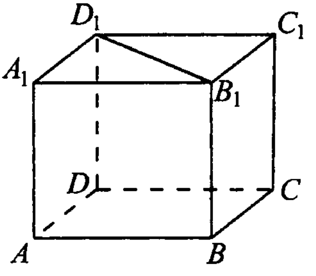


Рис. 335.

Вариант 11

1. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 6), (6; 2), (5; 6) (см. рис. 336).

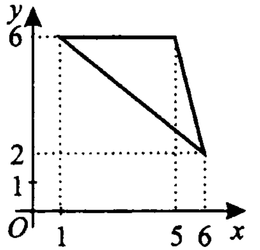


Рис. 336.

2. Найдите по рисунку 337 тангенс угла BCK.

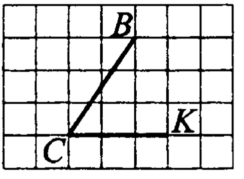


Рис. 337.

3. Объём конуса равен 28. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.

4. У треугольника со сторонами 9 и 8 проведены высоты к этим сторонам (см. рис. 338). Высота, проведённая к первой стороне, равна 12. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

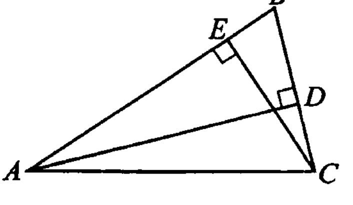


Рис. 338.

13. Зак. № 249

5. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса (см. рис. 339). Образующая конуса равна $73\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

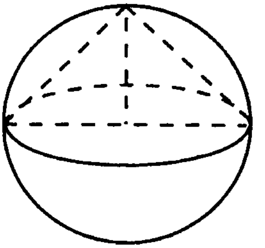


Рис. 339.

Вариант 12

1. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 1), (1; 6), (5; 2) (см. рис. 340).

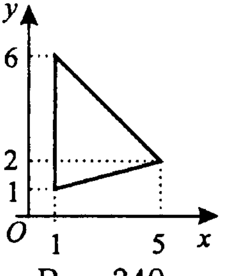


Рис. 340.

2. Найдите косинус угла CAB (см. рис. 341). В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $\sqrt{26}$.

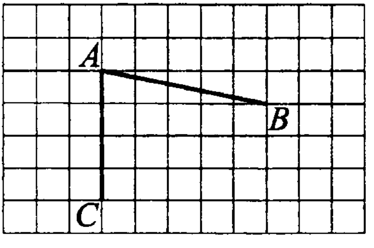


Рис. 341.

3. Куб и пирамида имеют общее основание (см. рис. 342), и высота пирамиды равна ребру куба, равному 3. Найдите объём пирамиды.

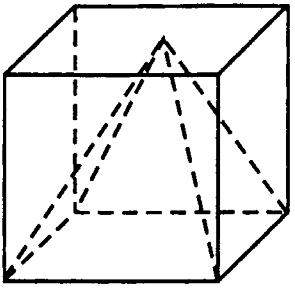


Рис. 342.

4. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а её площадь равна 160 (см. рис. 343). Найдите периметр трапеции.

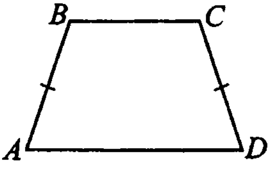


Рис. 343.

5. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса (см. рис. 344). Радиус сферы равен $47\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

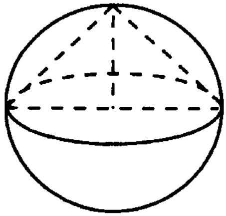


Рис. 344.

Вариант 13

1. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1; 7), (1; 9), (4; 6), (4; 4) (см. рис. 345).

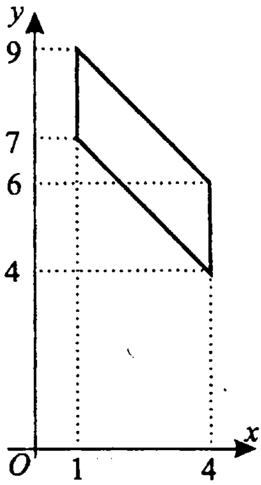


Рис. 345.

2. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 10, основания равны 3 и 21. Найдите косинус острого угла этой трапеции.

3. Найдите квадрат расстояния между вершинами B и D_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 2$, $BC = 4$, $BB_1 = 5$.

4. Основание трапеции равно 21, высота равна 6, а площадь равна 105. Найдите второе основание трапеции.

5. Высота конуса равна 12, а диаметр основания — 10. Найдите образующую конуса.

Вариант 14

1. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(0; 0)$, $(12; 8)$, $(8; 12)$ (см. рис. 346).

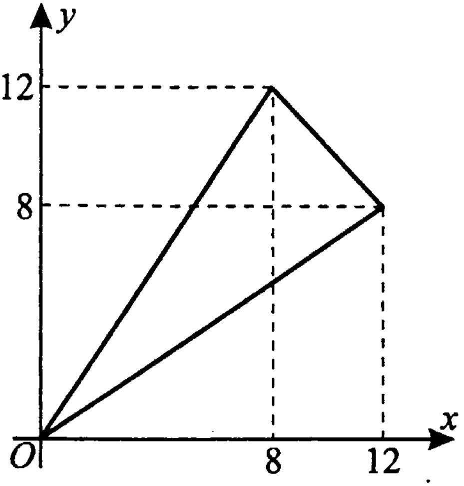


Рис. 346.

2. Найдите косинус тупого угла прямоугольной трапеции. Боковые стороны трапеции равны $\sqrt{51}$ и 10.

3. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 2$, $BC = 4$, $BB_1 = 5$.

4. Площадь треугольника равна 55, а радиус вписанной в него окружности равен 5. Найдите периметр этого треугольника.

5. Диаметр основания конуса равен 30, а длина образующей — 25. Найдите высоту конуса.

Вариант 15

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см×1 см изображён треугольник (см. рис. 347). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

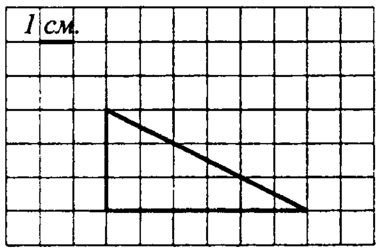


Рис. 347.

2. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 5$, высота $BH = 3$ (см. рис. 348). Найдите высоту AK, проведённую к BC.

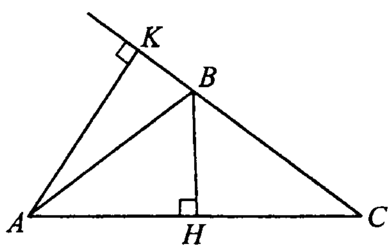


Рис. 348.

3. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_2 многогранника, изображённого на рисунке 349. Все двугранные углы многогранника прямые.

4. Площадь треугольника равна 96, а его периметр 48. Найдите радиус вписанной окружности.

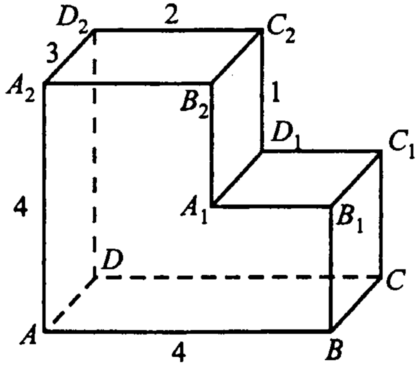


Рис. 349.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны $18\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками D и A_1 (см. рис. 350).

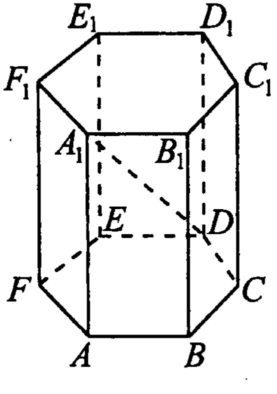


Рис. 350.

Вариант 16

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 351). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

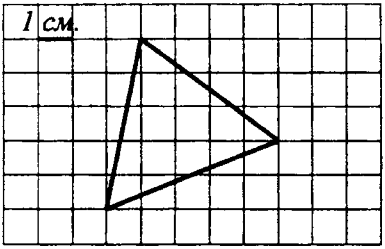


Рис. 351.

2. По рисунку 352 найдите тангенс угла, внешнего к углу A треугольника ABC.

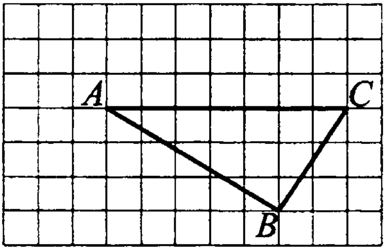


Рис. 352.

3. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 353. Все двугранные углы многогранника прямые.

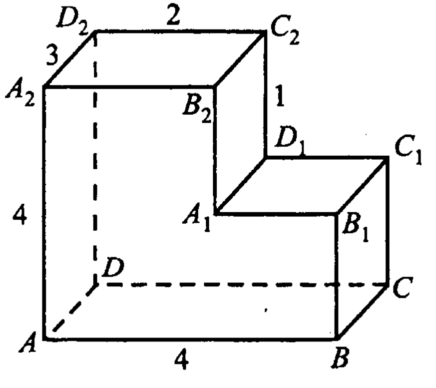


Рис. 353.

4. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 15 (см. рис. 354). Его периметр равен 25. Найдите радиус этой окружности.

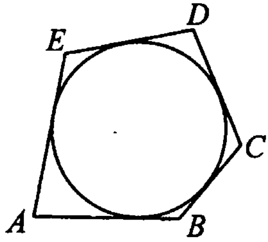


Рис. 354.

5. Найдите тангенс угла A_1DA многогранника, изображённого на рисунке 355. Все двугранные углы многогранника прямые.

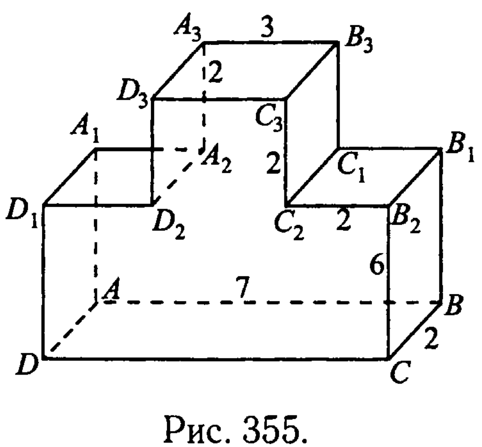


Рис. 355.

Ответы

Ответы к диагностическим работам

§1. Площади

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
18	6	16	12	5,625

§2. Координаты и векторы

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
−3	10	6	50	6

§3. Углы и длины

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
98	21	45	44	110

§4. Тригонометрия

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
0,7	2	4	2	−0,3

§5. Параллелепипед, призма, пирамида

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
2	60	60	30	11

§6. Цилиндр, конус, шар, комбинация тел

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
3	40	89	17

Ответы к вариантам для самостоятельного решения

§1. Площади

	1	2	3	4	5
Вар. 1	10	17,5	2	3	15
Вар. 2	15	6	18	3	12
Вар. 3	8	12	6	10	3,375
Вар. 4	12	8	70	7,5	21
Вар. 5	10	11	7,5	15	7

§2. Координаты и векторы

	1	2	3	4	5
Вар. 1	10	−7	64	12	45
Вар. 2	3	3	2	41	15
Вар. 3	2	10	4	10	0
Вар. 4	10	−3	4,5	20	98
Вар. 5	5	7	365	5	6

§3. Углы и длины

	1	2	3	4	5
Вар. 1	23	66	180	2	2,5
Вар. 2	78	4	90	48	112
Вар. 3	42	122	110	6	21
Вар. 4	52	70	19	20	5
Вар. 5	30	36	52	107	12
Вар. 6	27	70	14	5	2
Вар. 7	48	5	13,5	150	109
Вар. 8	96	19	18	16	6

§4. Тригонометрия

	1	2	3	4	5
Вар. 1	0,6	0,4	12	3,25	1,75
Вар. 2	4	0,625	3,25	32	33
Вар. 3	0,9	0,6	80	45	56
Вар. 4	0,9	0,8	91	24	18
Вар. 5	0,8	–0,2	13,5	1,5	160
Вар. 6	4,8	38,4	0,25	0,5	12,75
Вар. 7	12	12	7,5	0,28	1,375
Вар. 8	3	–0,9	48,75	11	38

§5. Параллелепипед, призма, пирамида

	1	2	3	4	5
Вар. 1	1040	60	2	3	0,96
Вар. 2	9	45	90	12	45
Вар. 3	27	45	60	13	9
Вар. 4	84	0,2	90	12	13
Вар. 5	113	1	45	3	24
Вар. 6	222	45	30	16	4
Вар. 7	0,96	45	60	10	5
Вар. 8	90	0,96	45	12	11

§6. Цилиндр, конус, шар, комбинация тел

	1	2	3	4
Вар. 1	4	1	18	9
Вар. 2	24	180	9	8
Вар. 3	120	48	12	2,25
Вар. 4	7	12	5	5
Вар. 5	3	41	0,2	81

Ответы к заданиям тренировочных тестов

	1	2	3	4	5
Вар. 1	12	0,28	3,25	8	289
Вар. 2	9	0,75	0,5	36	236
Вар. 3	5	0,75	45	17	242
Вар. 4	20	6,72	360	12	2744
Вар. 5	10	24	30	4	7
Вар. 6	12,5	19,25	0,5	9	60
Вар. 7	6,5	15	18	4	8
Вар. 8	5	–3	5	16	25
Вар. 9	9	–6,875	68	16	7
Вар. 10	7	16	117	4	0,6
Вар. 11	8	1,5	3,5	13,5	73
Вар. 12	10	1	9	60	94
Вар. 13	6	0,9	45	14	13
Вар. 14	40	–0,7	29	22	20
Вар. 15	9	4,8	29	4	90
Вар. 16	11,5	–0,6	20	1,2	3

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна
Дремов Александр Петрович
Иванов Сергей Олегович

МАТЕМАТИКА. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ-2014. ЧАСТЬ 3: ГЕОМЕТРИЯ.

Пособие для «чайников»

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 16.10.2013.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12.
Тираж 10 000 экз. Заказ № **249.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.