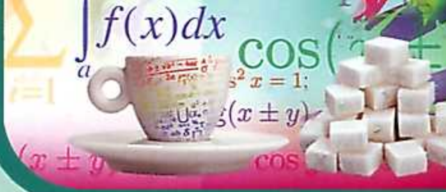


ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ-2014

ЧАСТЬ 2:

АЛГЕБРА и НАЧАЛА АНАЛИЗА

Пособие для «чайников»

ЛЕГИОН

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Е. Г. Коннова

МАТЕМАТИКА
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ-2014
ЧАСТЬ 2: АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Пособие для «чайников»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

Учебно-методическое пособие

™

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2013

ББК 22.1
К 65

Рецензент:
Н. М. Резникова — учитель высшей категории.

Коннова Е. Г.

К 65 Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 2: Алгебра и начала анализа / Е. Г. Коннова, В. А. Дрёмов, С. О. Иванов; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 160 с. — (Готовимся к ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0465-4

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков в решении задач базового уровня B5, B7, B8, B12, B14** на ЕГЭ по математике.

Пособие состоит из 5 параграфов (каждому заданию посвящён отдельный параграф), которые включают в себя разбор решений типовых задач, подобных приведённым в открытом банке заданий ЕГЭ, а также варианты для самостоятельного решения. Кроме того, приведено 12 обобщающих тренировочных тестов, включающих по одному заданию группы B5, B7, B8, B12, B14.

Другие задания части В рассматриваются в следующих книгах: «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников". Часть 1: Арифметика и алгебра» и «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников". Часть 3: Геометрия».

Пособие входит в **учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**. Продиагностировать уровень математической подготовки и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать пособия, которые понадобятся в процессе подготовки, поможет брошюра **«Готовимся к ЕГЭ по математике. С чего начать?»**, содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0465-4

Оглавление

2. Зак. № 225

От авторов

Книга «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников“. Часть 2: Алгебра и начала анализа» входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион». Пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ-2014. Оно адресовано учащимся выпускных классов общеобразовательных учреждений, учителям, ученикам вечерних школ и тем, кто собирается сдавать ЕГЭ после перерыва в обучении.

Прежде всего это **самоучитель** и **тренажёр** для тех, кто хочет научиться решать задачи части В без репетитора. Также эта книга может использоваться для **контроля** умений решать задачи части В при повторении курса математики в рамках подготовки к ЕГЭ.

Материал, представленный в этой книге, служит для формирования **устойчивых навыков в решении задач базового уровня**. Не секрет, что большинство выпускников, даже получивших на ЕГЭ высокий балл, допускают по 2 – 3, а иногда и больше ошибок именно в части 1 предлагаемого теста, хотя большинство задач этой части решается устно. Причина — отсутствие упомянутых выше навыков.

Воспользовавшись этой книгой, вы научитесь безошибочно выполнять задания B5, B7, B8, B12, B14 и сэкономите время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 5 параграфов, каждый из которых включает в себя диагностическую работу, разбор решений типовых задач, подобных приведённым в открытом банке заданий ЕГЭ*, а также варианты для самостоятельного выполнения. Кроме того, приведено **12 обобщающих тренировочных тестов**, включающих по од-

---

*См. сайт http://mathege.ru/or/ege/Main

ному заданию B5, B7, B8, B12, B14. Каждый вариант рекомендуем выполнять в течение 20 – 30 минут, затем проверить правильность решения с помощью ответов, приведённых в конце пособия. Если ответы не совпадут, попробуйте ещё раз решить задачу, а при необходимости найдите подобную среди разобранных примеров.

Задания части B, отсутствующие в данной книге, рассматриваются в следующих книгах: «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников“. Часть 1: Арифметика и алгебра» и «Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для „чайников“. Часть 3: Геометрия».

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион»:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты.
- Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2014. Учебно-тренировочные тесты.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2014. Теория вероятностей.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 1: Арифметика и алгебра.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 2: Алгебра и начала анализа.
- Математика. Базовый уровень ЕГЭ-2014. Пособие для «чайников». Часть 3: Геометрия.
- Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2014 (C1, C3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы.
- Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание C5.
- Математика. 11-й класс. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа.

- Математика. 10-й класс. Промежуточная аттестация в форме ЕГЭ.
- Математика. 10 – 11 классы. Карманный справочник.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (C1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задание С2. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решаем С3 методом рационализации.
- Геометрия. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9. Учимся решать задачи и повторяем теорию.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий части С. Решения и комментарии.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: математический бой. Задания частей В и С.

Продиагностировать уровень знаний и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать пособия, которые понадобятся в процессе подготовки, поможет брошюра **«Готовимся к ЕГЭ по математике. С чего начать?»**, содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ЕГЭ» издательства «Легион».

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно прислать почтой или на электронный адрес: `legionrus@legionrus.com`.

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства: `http://forum.legionr.ru`.

Желаем успехов на экзамене!

B5. Решение уравнений

Диагностическая работа

1. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{16}}(14 - x) = -2$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+11} = \frac{1}{81}$.

3. Найдите решение уравнения $\left(\frac{1}{13}\right)^{x+11} = 13^x$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{38 - 11x} = 4$.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{-21 + 10x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите корень уравнения $2x^2 - 13x + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $\frac{4}{13}x = -3\frac{2}{13}$.

8. Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(x-4)}{6} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Понятие уравнения

ⓘ *Немного полезной информации*

Уравнение — это равенство, в котором содержится неизвестная величина (переменная). Напомним основные правила, с помощью которых можно решить уравнение.

- При умножении суммы на множитель каждое слагаемое умножают на этот множитель:

  $a(d + c - r) = ad + ac - ar$:

  $$8(x + 2y - 3) = 8x + 16y - 24;$$

  $-a(-b + d - c) = ab - ad + ac$:

  $$-7(-1 + 3x - 4) = 7 - 21x + 28.$$

- При переносе слагаемого из одной части уравнения в другую перед этим слагаемым меняют знак:

  $$5 - x = 3 - 2x$$
  $$-x + 2x = 3 - 5$$

- Знаки перед каждым слагаемым в уравнении можно одновременно поменять на противоположные:

  $$5 - x = 3 - 2x,$$
  $$-5 + x = -3 + 2x.$$

- Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю и все другие множители при этом имеют смысл. Например, $(x + 5)(x - 2) = 0$, если или $x + 5 = 0$, или $x - 2 = 0$. Отсюда получаем два корня уравнения: $x = -5$; $x = 2$.

Задачи с решениями

1. Решите уравнение $(x + 5)\sqrt{x - 2} = 0$.

Решение.

Пусть $(x + 5)\sqrt{x - 2} = 0$. Значит, либо $(x + 5) = 0$, либо $\sqrt{x - 2} = 0$. То есть либо $x = -5$, либо $x = 2$. При $x = -5$ множитель $\sqrt{x - 2}$ не будет иметь смысла (так как подкоренное выражение должно быть неотрицательно), поэтому заданное уравнение имеет один корень: $x = 2$.

Ответ: 2.

Уравнения бывают разные, в этом разделе мы разберём основные виды простейших уравнений.

Линейные уравнения

Немного полезной информации

Линейные уравнения — это уравнения вида $ax = b$, где неизвестным является x, а буквы a и b обозначают заданные числа.

Если $a = 0$, то либо уравнение не имеет корней (как, например, уравнение $0x = 7$), либо x может быть любым числом (если $0x = 0$). При $a \neq 0$ корень уравнения находят по формуле:

$$x = b : a.$$

Задачи с решениями

2. Найдите корень уравнения $-5x = 3$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на -5.

$x = 3 : (-5)$; $x = -0{,}6$ — корень заданного уравнения.

Ответ: $-0{,}6$.

3. Найдите корень уравнения $-5x + 4 = 3$.

Решение.

$$-5x = 3 - 4,$$
$$-5x = -1,$$

$$5x = 1,$$
$$x = 1 : 5,$$
$$x = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

4. Найдите корень уравнения $-5x - 4 = 3x - 2$.

Решение.

$$-5x - 3x = -2 + 4,$$
$$-8x = 2,$$
$$x = 2 : (-8),$$
$$x = -0{,}25.$$

Ответ: $-0{,}25$.

5. Найдите корень уравнения $-5\frac{2}{3}x = 1\frac{5}{12}$.

Решение.

$$x = 1\frac{5}{12} : \left(-5\frac{2}{3}\right),$$

$$1\frac{5}{12} : \left(5\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{12} : \frac{17}{3} = \frac{17}{12} \cdot \frac{3}{17} = \frac{3}{12} = 3 : 12 = 0{,}25,$$
$$x = -0{,}25.$$

Ответ: $-0{,}25$.

Квадратные уравнения

ⓘ *Немного полезной информации*

Квадратные уравнения — это уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Основная формула для решения квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Задачи с решениями

6. Решите уравнение $3x^2 + 4x - 207 = 0$. Если корней более одного, в ответ запишите меньший корень.

Решение.

$3x^2 + 4x - 207 = 0$. Для данного уравнения $a = 3$, $b = 4$ и $c = -207$. Подставим эти значения в формулу для нахождения корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-207)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{2500}}{6} = \frac{-4 \pm 50}{6};$$

$$x_1 = \frac{-4 - 50}{6} = -9, \quad x_2 = \frac{-4 + 50}{6} = \frac{46}{6}.$$

Получили два различных корня. Так как $-9 < \frac{46}{6}$, то $x = -9$ — меньший корень исходного уравнения.

Ответ: -9.

7. Решите уравнение $x^2 = 36$.

1-й способ.

Решение.

Неполное квадратное уравнение можно решить разложением на множители.

$$x^2 - 36 = 0,$$
$$(x - 6)(x + 6) = 0,$$
$$x_1 = 6, \quad x_2 = -6.$$

Ответ: 6; -6.

2-й способ.

Также уравнение $x^2 = 36$ можно решить и по-другому:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{36},$$
$$x_{1,2} = \pm 6,$$
$$x_1 = 6, \quad x_2 = -6.$$

Ответ: 6; −6.

8. Решите уравнение $x^2 = 36x$.

Решение.

$$x^2 - 36x = 0.$$

Вынесем x за скобку:

$$x(x - 36) = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 36.$$

Ответ: 0; 36.

Дробно-рациональные уравнения

Задачи с решениями

9. Решите уравнение $\dfrac{5x-6}{3x+4} = 8.$

Решение.

$\dfrac{5x-6}{3x+4} = \dfrac{8}{1}$. Приведём к общему знаменателю:

$\dfrac{5x-6}{3x+4} = \dfrac{8(3x+4)}{1(3x+4)}$. Так как дроби с одинаковым знаменателем равны, то их числители тоже должны быть равны:

$$5x - 6 = 8(3x + 4),$$
$$5x - 6 = 24x + 32,$$
$$5x - 24x = 32 + 6,$$

$$-19x = 38,$$
$$x = -2.$$

При $x = -2$ знаменатель $3x + 4$ не равен нулю, значит, это корень исходного уравнения.

Ответ: -2.

10. Решите уравнение $\dfrac{2x-21}{x+12} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Решение.

Превратим это уравнение в пропорцию — равенство двух дробей:

$$\frac{2x-21}{x+12} = \frac{x}{1}.$$

В пропорции произведение крайних членов равно произведению средних (если говорить образным языком, «умножаем крест-накрест»):

$$\frac{2x-21}{x+12} = \frac{x}{1}.$$

Получим $x(x+12) = 2x - 21$; $x^2 + 12x = 2x - 21$; $x^2 + 10x + 21 = 0$. Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = -3$; $x_2 = -7$. Убеждаемся, что оба числа являются корнями исходного уравнения, и пишем в ответ бо́льшее из них.

Ответ: -3.

Иррациональные уравнения

① *Немного полезной информации*

При решении иррациональных уравнений нам приходится возводить обе части уравнения в квадрат. Нужно помнить, что квадратный корень не может быть отрицательным. Если в уравнении квадратный корень равен выражению, которое может быть отрицательным, необходимо делать проверку. Например, в уравнении $\sqrt{2x+87}=-11$ корней нет.

Задачи с решениями

11. Решите уравнение $\sqrt{2x+87}=11$.

Решение.

Возведём обе части уравнения в квадрат.

$$\left(\sqrt{2x+87}\right)^2=11^2,$$
$$2x+87=121,$$
$$2x=121-87,$$
$$2x=34,$$
$$x=17.$$

Ответ: 17.

В этом уравнении проверка не нужна, но гораздо проще проверить получившийся ответ, чем понять, нужна проверка или нет. Кроме того, проверка позволяет понять, не сделаны ли были ошибки в вычислениях во время решения уравнения.

12. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5x+39}{16}}=\dfrac{1}{2}$.

Решение.

$$\left(\sqrt{\frac{5x+39}{16}}\right)^2=\frac{1}{4},$$
$$\frac{5x+39}{16}=\frac{4}{16},$$
$$5x+39=4,$$
$$5x=4-39,$$

$$5x = -35,$$
$$x = -7.$$

Проверка: $\sqrt{\dfrac{5\cdot(-7)+39}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: -7.

13. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+63} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бо́льший из них.

Решение.

$$(\sqrt{2x+63})^2 = (-x)^2,$$
$$2x+63 = x^2,$$
$$x^2 - 2x - 63 = 0,$$
$$x_1 = -7,\ \ x_2 = 9.$$

Выполняем проверку: $x_1 = -7$ подходит, так как
$\sqrt{2(-7)+63} = \sqrt{49} = -(-7)$;
$x_2 = 9$ не является корнем, потому что квадратный корень равен «$-x$», а значит, x должно быть неположительным числом. Другими словами, при проверке получим $\sqrt{2\cdot 9+63} \neq -9$.

Ответ: -7.

14. Найдите корень уравнения $\sqrt{87-10x} = \sqrt{87-x^2}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бо́льший из них.

Решение.

$$87 - 10x = 87 - x^2,$$
$$-10x = -x^2,$$
$$x^2 - 10x = 0,$$
$$x(x-10) = 0,$$

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 10.$$

Выполняем проверку: $x_1 = 0$ подходит; $x_2 = 10$ не является корнем, так как выражение $\sqrt{(87 - 10 \cdot 10)}$ не имеет смысла.

Ответ: 0.

Показательные уравнения

Немного полезной информации

Самые простые показательные уравнения решают приведением обеих частей уравнения к одному основанию: $a^x = a^y$, откуда получают $x = y$.

При этом нужно помнить, что $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^k$,

обратно $a^k = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-k}$; $\quad a^0 = 1;\quad a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a};\quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$

Задачи с решениями

15. Найдите корень уравнения $9^{x-24} = 729$.

Решение.

Заметим, что $729 = 9^3$.

$$9^{x-24} = 9^3,$$
$$x - 24 = 3,$$
$$x = 3 + 24,$$

$x = 27$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 27.

16. Найдите корень уравнения $5^{2x+4} = \frac{1}{25}$.

Решение.

$$\begin{aligned} 5^{2x+4} &= 5^{-2}, \\ 2x + 4 &= -2, \\ 2x &= -2 - 4, \\ 2x &= -6, \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Ответ: -3.

Логарифмические уравнения

ⓘ *Немного полезной информации*

По определению логарифма: $\log_a x = y$, если $x = a^y$. При таком способе решения проверка не нужна.

Помните! **Основание логарифма и основание степени при этом переходе совпадают!**

Самые простые логарифмические уравнения также решают приведением логарифмов в обеих частях уравнения к одному основанию: $\log_a x = \log_a y$, откуда $x = y$. В таких случаях при решении логарифмических уравнений нужно делать проверку, чтобы под знаком логарифма было только положительное число. При этом нужно помнить, что в выражении $\log_a x$ переменные $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, а также что $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^k = k$; $c \log_a b = \log_a b^c$.

Задачи с решениями

17. Найдите корень уравнения $\log_2(x+8)=5$.

Решение.

По определению логарифма:

$$x+8=2^5,$$
$$x+8=32,$$
$$x=24.$$

Проверяем: $x+8=24+8>0$. Вообще говоря, проверка здесь не нужна.

Ответ: 24.

18. Найдите корень уравнения $\log_5(2x+8)=-1$.

Решение.

$2x+8=5^{-1}$; $2x+8=\frac{1}{5}$; $2x+8=0{,}2$; $2x=0{,}2-8$; $2x=-7{,}8$; $x=-7{,}8:2$; $x=-3{,}9$.

Проверка здесь не нужна.

Ответ: $-3{,}9$.

19. Найдите корень уравнения $\log_{15}(3x-9)=\log_{15}(x-17)$.

Решение.

$3x-9=x-17$, $3x-x=-17+9$, $2x=-8$, $x=-4$.

Проверка: $\log_{15}(3\cdot(-4)-9)=\log_{15}(-4-17)$. Под знаком логарифма не может стоять отрицательное число, поэтому $x=-4$ не является корнем этого уравнения.

Ответ: корней нет.

20. Найдите корень уравнения $\log_5(3x-9)=2\log_5 6$.

Решение.

$$\log_5(3x-9)=\log_5 6^2,$$
$$3x-9=6^2,$$

$$3x - 9 = 36,$$
$$3x = 36 + 9,$$
$$3x = 45,$$
$$x = 15.$$

Проверка: $\log_5(3 \cdot 15 - 9) = 2\log_5 6$,
$\log_5(36) = \log_5 36$,
$x = 15$ — корень уравнения.

Ответ: 15.

Тригонометрические уравнения

① *Немного полезной информации*

Как правило, решение любого тригонометрического уравнения сводится к решению одного из трёх видов простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = a$, $\cos x = a$ или $\operatorname{tg} x = a$.

Для всех тригонометрических уравнений характерно то, что мы получаем бесконечное число корней уравнения, хотя пишем при этом одно или два выражения для корней. Это происходит потому, что тригонометрические функции периодические, то есть повторяющиеся через определённый промежуток — период. То есть если у нас есть один корень, то будет и ещё бесконечно много, отличающихся друг от друга на величину, равную периоду.

В приведённых задачах требуется в ответе указать наибольший отрицательный или наименьший положительный корень. Часто при решении таких уравнений возникают формулы вида $x = 1 + 4k$, $x = 3 + 4k$, где $k \in Z$. Разберёмся, что это означает и как по этим формулам получить корни уравнения.

Запись $k \in Z$ означает, что k может быть любым целым числом, то есть может принимать значения 0; 1; −1; 2; −2; …; 419; −419 и так далее. Число 419 мы взяли для примера.

Подставим некоторые значения k в первую формулу:

$k = 0, \qquad x = 1 + 4 \cdot 0 = 1;$

$k = 1, \qquad x = 1 + 4 \cdot 1 = 5;$

$k = -1, \qquad x = 1 + 4 \cdot (-1) = 1 - 4 = -3;$

$k = 2, \qquad x = 1 + 4 \cdot 2 = 9;$

$k = -2, \qquad x = 1 + 4 \cdot (-2) = 1 - 8 = -7.$

Так можно будет получить сколь угодно много различных корней.

Теперь подставим значения k во вторую формулу:

$k = 0, \qquad x = 3 + 4 \cdot 0 = 3;$

$k = 1, \qquad x = 3 + 4 \cdot 1 = 7;$

$k = -1, \qquad x = 3 + 4 \cdot (-1) = 3 - 4 = -1;$

$k = 2, \qquad x = 3 + 4 \cdot 2 = 11;$

$k = -2, \qquad x = 3 + 4 \cdot (-2) = 3 - 8 = -5.$

Попробуем найти наибольший отрицательный корень. Выбираем отрицательное число, которое ближе всего к нулю. Для первой формулы это −3, для второй — это −1, ближе к нулю (и больше) число −1, значит, наибольший отрицательный корень равен −1.

Теперь попробуем найти наименьший положительный корень. Выбираем положительное число, которое ближе всего к нулю. По первой формуле это 1, по второй — это 3, ближе к нулю (и меньше) число 1, значит, наименьший положительный корень равен 1.

Некоторые значения обратных тригонометрических функций

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Уравнение $\cos x = a$ имеет корни при $-1 \leqslant a \leqslant 1$, общая формула:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \text{ где } k \in Z. \quad (1)$$

Для уравнения $\cos x = -b$ удобно применять формулу

$$x = \pi \pm \arccos b + 2\pi k, \text{ где } k \in Z. \quad (2)$$

Чтобы найти наибольший отрицательный или наименьший положительный корни, нужно подставить в формулу $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$ и выбрать необходимые числа.

Задачи с решениями

21. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

Так как в правой части стоит отрицательное число, воспользуемся формулой (2).

$\frac{2\pi x}{3} = \pi \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

С помощью таблицы значений обратных тригонометрических функций находим $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\frac{2\pi x}{3} = \pi \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Разделим каждый член уравнения на π.

$\frac{2x}{3} = 1 \pm \frac{1}{6} + 2k$, где $k \in Z$. Теперь умножим каждый член уравнения на 3, а потом разделим на 2, получим

$$2x = 3 \pm \frac{3}{6} + 6k,$$

$$x = 1{,}5 \pm 0{,}25 + 3k.$$

Наименьший положительный корень уравнения получаем при $k = 0$. Это корень $x = 1{,}5 - 0{,}25 = 1{,}25$.

Ответ: 1,25.

Немного полезной информации

Уравнение $\sin x = a$ имеет корни при $-1 \leqslant a \leqslant 1$, корни находят как совокупность $x = \arcsin a + 2\pi k$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Для уравнения $\sin x = -b$ удобно применять формулы $x = -\arcsin b + 2\pi k$, $x = \pi + \arcsin b + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Задачи с решениями

22. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

$\frac{\pi x}{4}=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k,\ \ \frac{\pi x}{4}=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k$, где $k\in Z$.

$\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ \frac{\pi x}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi k.$

Делим каждый член уравнения на π.

$\frac{x}{4}=\frac{1}{4}+2k,\ \ \frac{x}{4}=1-\frac{1}{4}+2k.$

Умножаем на 4.

$x=1+8k,\ \ x=3+8k$, где $k\in Z$.

Наибольший отрицательный корень уравнения получится при $k=-1$. То есть $x=1-8=-7$ или $x=3-8=-5$. При этом -5 — бóльшее число.

Ответ: -5.

Немного полезной информации

Уравнение $\operatorname{tg}x=a$ имеет корни $x=\operatorname{arctg}a+\pi k$, где $k\in Z$.

Задачи с решениями

23. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{3}=\sqrt{3}$.

Решение.

$$\frac{2\pi x}{3} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k, \text{ где } k \in Z,$$

$$\frac{2\pi x}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$2x = 1 + 3k,$$

$$x = 0{,}5 + 1{,}5k.$$

Наименьший положительный корень уравнения получаем при $k = 0$. Это корень $x = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $\log_7(21 + x) = \log_7(2x + 3)$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 32$.

3. Найдите корень уравнения $49^{x-8} = 7$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{7x + 15} = 8$.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{6 - 5x} = -2x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

6. Найдите корень уравнения $\frac{4}{6}x = -3\frac{2}{3}$.

7. Найдите корень уравнения $\frac{x + 31}{x - 3} = -4$.

8. Найдите корень уравнения $x^2 - 7x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $\log_3(7-x) = 2\log_3 7$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{5-2x} = 2$.

3. Найдите корень уравнения $8^{-6+2x} = 8$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{54+3x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

5. Найдите корень уравнения $\frac{6}{7}x = 4\frac{2}{7}$.

6. Найдите корень уравнения $x = \frac{-3x+4}{x-3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $2x^2 + 11x + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бо́льший из них.

8. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x^2 - 8x + 16} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $\log_8(5-x) = 3$.

2. Найдите корень уравнения $7^{3-2x} = 7$.

3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+5} = 27^x$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{59-11x} = 9$.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{112-6x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите корень уравнения $-\frac{x+4}{x+7} = -6$.

7. Найдите корень уравнения $2x^2+x-21=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

8. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\dfrac{\pi(x-2)}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $\log_5(7+x)=3$.

2. Найдите корень уравнения $7^{-6+x}=343$.

3. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-3}=3$.

4. Найдите корень уравнения $\sqrt{10-3x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

5. Найдите корень уравнения $x^2-25=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. Найдите корень уравнения $x^2+2x-15=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $\dfrac{x-9}{x-3}=6$.

8. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\dfrac{\pi(x+3)}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 5

1. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x+3}=4^x$.

2. Найдите корень уравнения $\sqrt{50-17x}=4$.

3. Найдите корень уравнения $\dfrac{x+12}{x-3} = -4$.

4. Найдите корень уравнения $\dfrac{x}{x+7} = 8$.

5. Найдите корень уравнения $-\dfrac{4}{3}x = -3\dfrac{2}{6}$.

6. Найдите корень уравнения $x^2+9x+8=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $2x^2-6x+4=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бóльший из них.

8. Найдите корень уравнения $\cos\dfrac{\pi(x+2)}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

B7. Вычисления и преобразования

Диагностическая работа

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{2}{3}+2\frac{4}{5}\right)\cdot 4{,}5$.

2. Найдите значение выражения $3^{0,34}\cdot 27^{1,22}$.

3. Найдите значение выражения $5^{\sqrt{3}+1}\cdot 5^{1-\sqrt{3}}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{3}a)^2\cdot\sqrt[5]{a^4}}{5a^{2,8}}$ при $a>0$.

5. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{7}$.

6. Найдите значение выражения $33\cdot 7^{\log_7 8}$.

7. Найдите значение выражения $\frac{17\sin 13^\circ\cos 13^\circ}{\sin 26^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{5\cos\alpha+3\sin\alpha}{2\sin\alpha+7\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=1{,}5$.

Действия с обыкновенными дробями

Немного полезной информации

Вспомним, как производить простейшие вычисления с обыкновенными дробями. Чтобы перемножить дроби, нужно умножить их числители и записать результат в числитель, а потом перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc},$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 6} = \frac{25}{42}.$$

Если числитель и знаменатель дроби делятся на одно и то же число, то на него обычно делят каждый из них и называют это «сократить дробь»:

$$\frac{20}{30} = \frac{20 : 10}{30 : 10} = \frac{2}{3}.$$

Иногда сокращение выполняют во время умножения дробей:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}.$$

Если дроби смешанные (с выделенной целой частью), то нужно их перевести в обыкновенные (состоящие только из числителя и знаменателя). Для этого целую часть умножают на знаменатель, прибавляют числитель и результат записывают в числитель, а знаменатель оставляют прежним:

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5},$$

$$3\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5} \cdot \frac{5}{19} = \frac{19}{5} \cdot \frac{5}{19} = 1.$$

Чтобы перевести неправильную дробь (числитель больше знаменателя) в смешанную (выделить целую часть), нужно числитель разделить на знаменатель с остатком. Тогда неполное частное будет целой частью, остаток будет числителем, а знаменатель останется тем же:

$$\frac{19}{5} = 19 : 5 = 3 \text{ (остаток 4)},$$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}.$$

Чтобы перевести обыкновенную дробь в десятичную, надо числитель разделить на знаменатель:

$$\frac{6}{25} = 6 : 25 = 0{,}24.$$

Десятичную дробь можно перевести в обыкновенную. Например, 0,201 читается как «ноль целых двести одна тысячная». Пишем $\frac{201}{1000}$.

Чтобы умножить обыкновенную дробь на десятичную, нужно или обыкновенную перевести в десятичную, или десятичную в обыкновенную:

$$\frac{2}{5} \cdot 0{,}25 = 2 : 5 \cdot 0{,}25 = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}100 = 0{,}1;$$

$$\frac{2}{5} \cdot 0{,}25 = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{100} = \frac{50}{500} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Чтобы разделить число на обыкновенную дробь, нужно в этой дроби поменять местами числитель со знаменателем и умножить число на полученную дробь:

$$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{15}.$$

Чтобы целое число записать в виде обыкновенной дроби, нужно записать его со знаменателем 1:

$$15:3\frac{6}{7}=\frac{15}{1}:\frac{3\cdot 7+6}{7}=\frac{15}{1}:\frac{27}{7}=\frac{15}{1}\cdot\frac{7}{27}=\frac{15\cdot 7}{1\cdot 27}=$$

$$=\frac{5\cdot 7}{1\cdot 9}=\frac{35}{9}.$$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители и записать числитель новой дроби, а знаменатель оставить прежним. Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть их числители и записать числитель новой дроби, а знаменатель оставить прежним. Если у дробей есть целая часть, то нужно сначала сложить или вычесть целые части:

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

$$3\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}=3+2+\frac{4+3}{5}=5+\frac{7}{5}=6\frac{2}{5}.$$

Можно при сложении и вычитании дробей сразу перевести все дроби в обыкновенные (без целой части):

$$3\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 5+4}{5}+\frac{2\cdot 5+3}{5}=\frac{19}{5}+\frac{13}{5}=\frac{32}{5}=6\frac{2}{5},$$

$$-\frac{3}{8}-2\frac{1}{8}=-\left(\frac{3}{8}+2\frac{1}{8}\right)=-2\frac{4}{8}=-2\frac{1}{2}.$$

Сложить дроби с разными знаменателями можно двумя способами.

1. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительные множители так, чтобы новый знаменатель был равен наименьшему общему кратному знаменателей исходных дробей. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3^{\backslash 3}}{8}+\frac{5^{\backslash 2}}{12}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{9+10}{24}=\frac{19}{24}.$$

2. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй и наоборот. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3^{\backslash 12}}{8}+\frac{5^{\backslash 8}}{12}=\frac{3\cdot 12}{8\cdot 12}+\frac{5\cdot 8}{12\cdot 8}=\frac{36}{96}+\frac{40}{96}=$$
$$=\frac{36+40}{96}=\frac{76}{96}=\frac{19}{24}.$$

Разберём ещё пример сложения и пример вычитания дробей.

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2^{\backslash 4}}{5}+\frac{3^{\backslash 5}}{4}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20};$$

$$2\frac{2}{3}-4\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 3+2}{3}-\frac{4\cdot 4+3}{4}=\frac{8}{3}-\frac{19}{4}=\frac{8^{\backslash 4}}{3}-\frac{19^{\backslash 3}}{4}=$$
$$=\frac{32}{12}-\frac{57}{12}=-\frac{57-32}{12}=-\frac{25}{12}=-2\frac{1}{12}.$$

3. Зак. № 225

Задачи с решениями

1. Найдите значение выражения $\left(-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}\right)\cdot 9{,}6$.

Решение.

1) $-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{4\cdot 3+2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{14}{3}=$

$$=-\frac{7^{\backslash 3}}{8}+\frac{14^{\backslash 8}}{3}=-\frac{21}{24}+\frac{112}{24}=\frac{112-21}{24}=\frac{91}{24}.$$

2) $\frac{91}{24}\cdot 9{,}6=\frac{91}{24}\cdot 9\frac{6}{10}=\frac{91}{24}\cdot\frac{96}{10}.$

Сокращаем 96 и 24, $96:24=4$,

$$\frac{91}{24}\cdot\frac{96}{10}=\frac{91\cdot 4}{10}=\frac{364}{10}=36\frac{4}{10}=36{,}4.$$

Ответ: 36,4.

Действия со степенями

Немного полезной информации

Вспомним основные формулы.

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};$$

$$a^n:a^m=a^{n-m};$$

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m};$$

$$(ab)^m=a^m\cdot b^m;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

Задачи с решениями

2. Найдите значение выражения $5^7 \cdot 5^{10} : 5^{15}$.

Решение.

$5^7 \cdot 5^{10} : 5^{15} = 5^{7+10-15} = 5^2 = 25.$

Ответ: 25.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{18} \cdot x^7}{x^{20}}$ при $x = 8$.

Решение.

$\dfrac{x^{18} \cdot x^7}{x^{20}} = x^{18+7-20} = x^5 = 8^5 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 64 \cdot 64 \cdot 8 =$
$= 32\,768.$

Ответ: 32 768.

4. Найдите значение выражения $2^9 \cdot 11^6 : 22^6$.

Решение.

$2^9 \cdot 11^6 : 22^6 = \dfrac{2^9 \cdot 11^6}{22^6} = \dfrac{2^9 \cdot 11^6}{(2 \cdot 11)^6} = \dfrac{2^9 \cdot 11^6}{2^6 \cdot 11^6} = \dfrac{2^9}{2^6} =$
$= 2^{9-6} = 2^3 = 8.$

Ответ: 8.

5. Найдите значение выражения $121^2 \cdot 3^2 : 99$.

Решение.

$121^2 \cdot 3^2 : 99 = \dfrac{\left(11^2\right)^2 \cdot 3^2}{11 \cdot 3^2} = \dfrac{3^2 \cdot 11^4}{3^2 \cdot 11} = 11^{4-1} = 11^3 = 1331.$

Ответ: 1331.

6. Найдите значение выражения $2^{\sqrt{12}-6} \cdot 2^{3-\sqrt{12}}$.

Решение.

$2^{\sqrt{12}-6} \cdot 2^{3-\sqrt{12}} = 2^{\sqrt{12}-6+3-\sqrt{12}} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125.$

Ответ: 0,125.

4. Зак. № 225

7. Найдите значение выражения $0{,}4^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{2}{9}} \cdot 10^{\frac{8}{9}}$.

Решение.

$$0{,}4^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{2}{9}} \cdot 10^{\frac{8}{9}} = (0{,}4 \cdot 5^2 \cdot 10^8)^{\frac{1}{9}} = (0{,}4 \cdot 25 \cdot 10^8)^{\frac{1}{9}} =$$
$$= (10 \cdot 10^8)^{\frac{1}{9}} = (10^9)^{\frac{1}{9}} = 10^1 = 10.$$

Ответ: 10.

8. Найдите значение выражения $9^{\frac{2}{7}} \cdot 81^{\frac{5}{14}}$.

Решение.

$$9^{\frac{2}{7}} \cdot 81^{\frac{5}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot (9^2)^{\frac{5}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot 9^{\frac{10}{14}} = 9^{\frac{2}{7}} \cdot 9^{\frac{5}{7}} = 9^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 9^{\frac{7}{7}} = 9.$$

Ответ: 9.

9. Найдите значение выражения $\frac{x^{-10} \cdot x^{-8}}{x^{-19}}$ при $x = 5$.

Решение.

$$\frac{x^{-10} \cdot x^{-8}}{x^{-19}} = x^{(-10)+(-8)-(-19)} = x^{-18+19} = x^1 = x = 5.$$

Ответ: 5.

Действия с многочленами

ⓘ *Немного полезной информации*

Вспомним основные правила действий с многочленами.

Распределительный закон:

$$a \cdot (b + c - k) = ab + ac - ak.$$

Этот закон позволяет не только раскрывать скобки, но и упрощать вычисления.

$38 \cdot 46 + 38 \cdot 254 - 38 \cdot 200 = 38(46 + 254 - 200) =$
$= 38 \cdot 100 = 3800.$

Переместительные законы:

$$a - b + c - k = a + c - b - k,$$

$$a \cdot b : c \cdot k = a \cdot b \cdot k : c.$$

Если в примере написана алгебраическая сумма (то есть встречаются только знаки «+» и «−»), то слагаемые можно поменять местами, но перемещать их нужно вместе с тем знаком, который стоит перед слагаемым.

Например, $38 - 126 + 236 - 141 = 236 - 126 + 38 - 141 = 110 + 38 - 141 = 148 - 141 = 7$.

Если в примере есть только действия умножение и деление (и нет скобок), то есть встречаются только знаки «·» и «:», то числа можно поменять местами, но перемещать их опять-таки нужно вместе с тем знаком, который стоит перед числом.

Например, $64 : 9 \cdot 45 : 16 = 64 : 16 \cdot 45 : 9 = 4 \cdot 45 : 9 = 45 : 9 \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$.

Задачи с решениями

10. Найдите значение выражения $3x(3x - 15) - 9x^2 + 8x + 11$ при $x = 200$.

Решение.

Упростим данное выражение.

$3x(3x - 15) - 9x^2 + 8x + 11 = (3x)^2 - 15 \cdot 3x - 9x^2 + 8x + 11 = 9x^2 - 45x - 9x^2 + 8x + 11 = -37x + 11$.

Подставим значение переменной $x = 200$.

$-37x + 11 = -37 \cdot 200 + 11 = -7400 + 11 = -7389$.

Ответ: -7389.

11. Найдите значение выражения $\dfrac{(7a)^2 - 7a}{7a^2 - a}$.

Решение.

$$\frac{7a(7a-1)}{a(7a-1)}=\frac{7a}{a}=7.$$

Ответ: 7.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{3\left(3x^3\right)^2\cdot(5y)^3}{(15x^2y)^3}$.

Решение.

$$\frac{3\left(3x^3\right)^2\cdot(5y)^3}{(15x^2y)^3}=\frac{3\cdot 3^2\left(x^3\right)^2\cdot 5^3y^3}{15^3\left(x^2\right)^3y^3}=\frac{3^3x^6\cdot 5^3y^3}{3^3\cdot 5^3x^6y^3}=1.$$

Ответ: 1.

13. Найдите значение выражения $\dfrac{3\left(k^3\right)^8+13\left(k^6\right)^4}{\left(4k^{12}\right)^2}$.

Решение.

$$\frac{3\left(k^3\right)^8+13\left(k^6\right)^4}{\left(4k^{12}\right)^2}=\frac{3k^{24}+13k^{24}}{16k^{24}}=\frac{16k^{24}}{16k^{24}}=1.$$

Ответ: 1.

14. Найдите значение выражения $\dfrac{25x^2-9}{5x+3}-5x$.

Решение.

$$\frac{25x^2-9}{5x+3}-5x=\frac{(5x+3)(5x-3)}{5x+3}-5x=(5x-3)-5x=-3.$$

Ответ: -3.

15. Найдите значение выражения

$$(25a^2-4)\cdot\left(\frac{1}{5a-2}-\frac{1}{5a+2}\right).$$

Решение.

$$(25a^2-4)\cdot\left(\frac{1}{5a-2}-\frac{1}{5a+2}\right)=$$

$$=(5a-2)(5a+2)\cdot\left(\frac{5a+2}{(5a-2)(5a+2)}-\frac{5a-2}{(5a-2)(5a+2)}\right)=$$

$$=(5a-2)(5a+2)\frac{5a+2-(5a-2)}{(5a-2)(5a+2)}=$$

$$=(5a-2)(5a+2)\frac{4}{(5a-2)(5a+2)}=4.$$

Ответ: 4.

16. Найдите $\dfrac{t(x)}{t\left(\frac{1}{x}\right)}$, если $t(x)=\left(x+\frac{5}{x}\right)\left(5x+\frac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$.

Решение.

$$t\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}+5x\right)\left(\frac{5}{x}+x\right)=t(x),$$

$$\frac{t(x)}{t\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{t(x)}{t(x)}=1.$$

Ответ: 1.

17. Найдите $k(b)+k(5-b)$, если $k(b)=\dfrac{b(5-b)}{b-2{,}5}$ при $b\neq 2{,}5$.

Решение.

$$k(5-b)=\frac{(5-b)(5-(5-b))}{5-b-2{,}5}=\frac{(5-b)b}{2{,}5-b}=-k(b).$$

$$k(b)+k(5-b)=k(b)-k(b)=0.$$

Ответ: 0.

18. Найдите $\dfrac{x}{y}$, если $\dfrac{6x-7y}{7x+6y}=13$.

Решение.

$$\frac{6x-7y}{7x+6y}=13, \text{ делим числитель и знаменатель на } y.$$

$$\frac{6\cdot\frac{x}{y}-7}{7\cdot\frac{x}{y}+6}=13,$$

$$6\cdot\frac{x}{y}-7=13\left(7\cdot\frac{x}{y}+6\right),$$

$$6\cdot\frac{x}{y}-7=91\cdot\frac{x}{y}+78,$$

$$85\cdot\frac{x}{y}+85=0,$$

$$\frac{x}{y}=-1.$$

Ответ: -1.

19. Найдите $\dfrac{2x+5y+9}{x+2y+4}$, если $\dfrac{x}{y}=2$.

Решение.

Так как $\dfrac{x}{y}=2$, то $x=2y$. Подставим $2y$ вместо x в выражение $\dfrac{2x+5y+9}{x+2y+4}$.

$$\frac{4y+5y+9}{2y+2y+4}=\frac{9y+9}{4y+4}=\frac{9(y+1)}{4(y+1)}=\frac{9}{4}=2{,}25.$$

Ответ: 2,25.

20. Найдите значение выражения $\dfrac{9x^2+y^2-(3x+y)^2}{2xy}$.

Решение.

$$\frac{9x^2+y^2-(3x+y)^2}{2xy}=\frac{9x^2+y^2-(9x^2+6xy+y^2)}{2xy}=$$

$$=\frac{9x^2+y^2-9x^2-6xy-y^2}{2xy}=-\frac{6xy}{2xy}=-3.$$

Ответ: -3.

21. Найдите значение выражения $\dfrac{15abc-(-3cab)}{9bca}$.

Решение.

$$\frac{15abc-(-3cab)}{9bca}=\frac{15abc+3abc}{9abc}=\frac{18abc}{9abc}=2.$$

Ответ: 2.

22. Найдите значение выражения $\dfrac{13a^8b^4-\left(3a^4b^2\right)^2}{a^8b^6}$ при $b=4$.

Решение.

$$\frac{13a^8b^4-(3a^4b^2)^2}{a^8b^6}=\frac{13a^8b^4-9a^8b^4}{a^8b^6}=\frac{4a^8b^4}{a^8b^6}=\frac{4a^8b^4}{a^8b^6}=$$

$$=\frac{4}{b^2}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

23. Найдите значение выражения $4p(x)-8x+4$, если $p(x)=2x-6$.

Решение.

$4p(x)-8x+4=4(2x-6)-8x+4=8x-24-8x+4=-20.$

Ответ: -20.

24. Найдите значение выражения $x+2y+6z$, если $3x+y=10$, $5y+18z=2$.

Решение.

Сложим левые и правые части выражений $3x + y = 10$ и $5y + 18z = 2$. Получим $3x + 6y + 18z = 12$. Разделим на 3, получим $x + 2y + 6z = 4$.

Ответ: 4.

25. Найдите значение выражения $3k(3x) - 2k(x + 7) - 7x$, если $k(x) = x - 14$.

Решение.

$k(3x) = 3x - 14$. $\quad k(x + 7) = x + 7 - 14 = x - 7$.
$3k(3x) - 2k(x + 7) - 7x = 3(3x - 14) - 2(x - 7) - 7x =$
$= 9x - 42 - 2x + 14 - 7x = 7x - 28 - 7x = -28$.

Ответ: -28.

Действия с корнями

① *Немного полезной информации*

Вспомним основные формулы:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, если k нечётно и
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a^m|}$, если k чётно;

$$\sqrt[n]{a + b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

Задачи с решениями

26. Найдите значение выражения $\dfrac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{14x^{\frac{1}{18}}x^{\frac{1}{9}}}{x^{\frac{1}{6}}} = 14x^{\frac{1}{18}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}} = 14x^{\frac{1}{18}+\frac{2}{18}-\frac{3}{18}} =$$
$$= 14x^0 = 14.$$

Ответ: 14.

27. Найдите значение выражения $\sqrt{406^2 - 294^2}$.

Решение.

$$\sqrt{406^2 - 294^2} = \sqrt{(406+294)(406-294)} = \sqrt{700\cdot 112} =$$
$$= \sqrt{7\cdot 100\cdot 7\cdot 16} = 10\cdot 7\cdot 4 = 280.$$

Ответ: 280.

28. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{1{,}4}\cdot\sqrt{8{,}4}}{\sqrt{0{,}06}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{1{,}4}\cdot\sqrt{8{,}4}}{\sqrt{0{,}06}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}4}{0{,}06}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 1{,}4}{0{,}01}} = \frac{1{,}4}{0{,}1} = 14.$$

Ответ: 14.

29. Найдите значение выражения
$$\left(\sqrt{25\frac{3}{5}} - \sqrt{14\frac{2}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right).$$

Решение.

$$\left(\sqrt{25\frac{3}{5}}-\sqrt{14\frac{2}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right) = \left(\sqrt{\frac{128}{5}}-\sqrt{\frac{72}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{2}{45}}\right) =$$

$$=\left(8\sqrt{\frac{2}{5}}-6\sqrt{\frac{2}{5}}\right):\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)=\left(2\sqrt{\frac{2}{5}}\right):\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)=2:\frac{1}{3}=6.$$

Ответ: 6.

30. Найдите значение выражения $\dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{15}-17}$.

Решение.

$$\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{15}-17}=\frac{12-4\sqrt{15}+5}{4\sqrt{15}-17}=\frac{-4\sqrt{15}+17}{4\sqrt{15}-17}=-1.$$

Ответ: -1.

31. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a-7)^2}$ при $5<a<7$.

Решение.

$\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a-7)^2}=|a-5|+|a-7|$. Так как $a>5$, то $|a-5|=a-5$. Так как $a<7$, то $|a-7|=7-a$. Значит, $|a-5|+|a-7|=(a-5)+(7-a)=7-5=2$.

Ответ: 2.

32. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{5}x\right)^2\cdot\sqrt[5]{x^4}}{x^{2,8}}$ при $x>0$.

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{5}x\right)^2\cdot\sqrt[5]{x^4}}{x^{2,8}}=\frac{5x^2\cdot x^{\frac{4}{5}}}{x^{2,8}}=5x^{2+\frac{4}{5}-2,8}=5x^{2+0,8-2,8}=$$
$$=5x^0=5.$$

Ответ: 5.

33. Найдите значение выражения $\dfrac{17\sqrt[3]{\sqrt[18]{x}}-8\sqrt[6]{\sqrt[9]{x}}}{3\sqrt{\sqrt[27]{x}}}$ при $x>0$.

Решение.

$$\frac{17\sqrt[3]{\sqrt[18]{x}}-8\sqrt[6]{\sqrt[9]{x}}}{3\sqrt{\sqrt[27]{x}}}=\frac{17\sqrt[3\cdot18]{x}-8\sqrt[6\cdot9]{x}}{3\sqrt[2\cdot27]{x}}=$$

$$=\frac{17\sqrt[54]{x}-8\sqrt[54]{x}}{3\sqrt[54]{x}}=\frac{9\sqrt[54]{x}}{3\sqrt[54]{x}}=3.$$

Ответ: 3.

34. Найдите $\dfrac{f(3-x)}{f(3+x)}$, если $f(x)=\sqrt[3]{x(6-x)}$ при $|x|\neq 3$.

Решение.

$$f(3-x)=\sqrt[3]{(3-x)(6-(3-x))}=\sqrt[3]{(3-x)(3+x)},$$

$$f(3+x)=\sqrt[3]{(3+x)(6-(3+x))}=\sqrt[3]{(3+x)(3-x)}=$$

$$=f(3-x),\quad \frac{f(3-x)}{f(3+x)}=1.$$

Ответ: 1.

Логарифмические выражения

ⓘ *Немного полезной информации*

Пусть $a>0,\ a\neq 1,\ x>0$. Тогда $a^{\log_a x}=x$.

Вспомним основные формулы.

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\ y>0;$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y,\ y>0;$$

$$\log_a(x^b)=b\log_a x;\quad \log_{a^b}(x)=\frac{1}{b}\log_a x;$$

$$\log_a x=\frac{1}{\log_x a},\ x\neq 1.$$

Пусть $b>0,\ b\neq 1,\ x>0$. Тогда $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Задачи с решениями

35. Найдите значение выражения $\log_7 4{,}9 + \log_7 10$.

Решение.

$\log_7 4{,}9 + \log_7 10 = \log_7(4{,}9 \cdot 10) = \log_7 49 = \log_7(7^2) = 2.$

Ответ: 2.

36. Найдите значение выражения $6^{2\log_6 5}$.

Решение.

$6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2} = 5^2 = 25.$

Ответ: 25.

37. Найдите значение выражения $8^{\log_2 3}$.

Решение.

$8^{\log_2 3} = \left(2^3\right)^{\log_2 3} = 2^{3\cdot\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^3 = 3^3 = 27.$

Ответ: 27.

38. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 8$.

Решение.

$$\log_{0,25} 8 = \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = \frac{1}{-2} \cdot 3\log_2 2 = -1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.

39. Найдите значение выражения $\log_{16} \log_3 9$.

Решение.

$$\log_{16} \log_3 9 = \log_{16} 2 = \log_{2^4} 2 = \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

40. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{15}} \sqrt{15}$.

Решение.

$$\log_{\frac{1}{15}} \sqrt{15} = \log_{15^{-1}} 15^{0,5} = -1 \cdot 0{,}5 \cdot \log_{15} 15 = -0{,}5.$$

Ответ: $-0{,}5$.

41. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7}$.

Решение.

$$\frac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7} = \frac{\log_{25} 7}{\log_{25^2} 7} = \frac{\log_{25} 7}{\frac{1}{2}\log_{25} 7} = 1 : \frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

42. Найдите значение выражения $\log_{11} 3 \cdot \log_9 11$.

Решение.

$$\log_{11} 3 \cdot \log_9 11 = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 9} = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 3^2} = \frac{\log_{11} 3}{2\log_{11} 3} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

43. Найдите значение выражения $105 \cdot \log_4 \sqrt[3]{4}$.

Решение.

$$105 \cdot \log_4 \sqrt[3]{4} = 105 \cdot \log_4 4^{\frac{1}{3}} = 105 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_4 4 = 35.$$

Ответ: 35.

44. Найдите значение выражения $(\log_2 32) \cdot (\log_3 27)$.

Решение.

$(\log_2 32) \cdot (\log_3 27) = (\log_2 2^5) \cdot (\log_3 3^3) =$

$= (5\log_2 2) \cdot (3\log_3 3) = 5 \cdot 3 = 15.$

Ответ: 15.

45. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}}$.

Решение.

$$\frac{7^{\log_3 18}}{7^{\log_3 2}} = 7^{\log_3 18 - \log_3 2} = 7^{\log_3 (18:2)} = 7^{\log_3 9} = 7^2 = 49.$$

Ответ: 49.

46. Найдите значение выражения $(1-\log_3 15)(1-\log_5 15)$.

Решение.

$$(1-\log_3 15)(1-\log_5 15)=(\log_3 3-\log_3 15)(\log_5 5-\log_5 15)=$$
$$=\left(\log_3\frac{3}{15}\right)\left(\log_5\frac{5}{15}\right)=\left(\log_3\frac{1}{5}\right)\left(\log_5\frac{1}{3}\right)=$$
$$=(-\log_3 5)(-\log_5 3)=\frac{1}{\log_5 3}\cdot\log_5 3=1.$$

Ответ: 1.

47. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 50}{2+\log_5 2}$.

Решение.
$$\frac{\log_5 50}{2+\log_5 2}=\frac{\log_5 50}{\log_5 25+\log_5 2}=\frac{\log_5 50}{\log_5(25\cdot 2)}=\frac{\log_5 50}{\log_5 50}=1.$$
Ответ: 1.

48. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 4}{\log_7 5}+\log_5 0{,}25$.

Решение.
$$\frac{\log_7 4}{\log_7 5}+\log_5 0,25=\log_5 4+\log_5 0{,}25=\log_5(4\cdot 0{,}25)=$$
$$=\log_5 1=0.$$

Ответ: 0.

49. Найдите значение выражения $\log^3_{\sqrt5} 25$.

Решение.

$$\log^3_{\sqrt5} 25=(\log_{\sqrt5} 25)^3=\left(\log_{5^{0,5}} 5^2\right)^3=\left(\frac{1}{0{,}5}\cdot 2\cdot\log_5 5\right)^3=$$
$$=4^3=64.$$

Ответ: 64.

Тригонометрические выражения

50. Найдите значение выражения $\dfrac{32(\sin^2 18° - \cos^2 18°)}{\cos 36°}$.

Решение.

$$\frac{32(\sin^2 18° - \cos^2 18°)}{\cos 36°} = \frac{-32(\cos^2 18° - \sin^2 18°)}{\cos 36°} =$$

$$= \frac{-32(\cos 36°)}{\cos 36°} = -32.$$

Ответ: -32.

51. Найдите значение выражения $\dfrac{3\cos 35°}{\sin 55°}$.

Решение.

$$\frac{3\cos 35°}{\sin 55°} = \frac{3\cos 35°}{\sin(90° - 35°)} = \frac{3\cos 35°}{\cos 35°} = 3.$$

Ответ: 3.

52. Найдите значение выражения $14\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

$$14\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 14\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = 42.$$

Ответ: 42.

53. Найдите значение выражения $3\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}\cos 7\pi$.

Решение.

$$3\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\cos 7\pi = 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(6\pi + \pi) = \frac{9}{2}\cos\pi =$$

$$= -\frac{9}{2} = -4{,}5.$$

Ответ: $-4{,}5$.

54. Найдите значение выражения $\dfrac{16}{\sin\left(-\dfrac{29\pi}{4}\right)\cos\dfrac{65\pi}{4}}$.

Решение.

$$\frac{16}{\sin\left(-\dfrac{29\pi}{4}\right)\cos\dfrac{65\pi}{4}} = -\frac{16}{\sin\dfrac{29\pi}{4}\cos\dfrac{65\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{16}{\sin\left(7\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(16\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= -\frac{16}{-\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}} = \frac{16}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 16 : \frac{1}{2} = 16\cdot 2 = 32.$$

Ответ: 32.

55. Найдите значение выражения $-5\sqrt{3}\cos(-390^\circ)$.

Решение.

$$-5\sqrt{3}\cos(-390^\circ) = -5\sqrt{3}\cos(390^\circ) =$$

$$= -5\sqrt{3}\cos(360^\circ+30^\circ) = -5\sqrt{3}\cos 30^\circ = -5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{-15}{2} = -7{,}5.$$

Ответ: $-7{,}5$.

56. Найдите значение выражения $4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-750^\circ)$.

Решение.

$$4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-750^\circ) = -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(750^\circ) =$$

$$= -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(720^\circ+30^\circ) = -4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,30^\circ = -4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -4.$$

Ответ: -4.

57. Найдите значение выражения $\dfrac{28\sin 316^\circ}{\sin 44^\circ}$.

Решение.

$$\frac{28\sin 316^\circ}{\sin 44^\circ} = \frac{28\sin(360^\circ - 44^\circ)}{\sin 44^\circ} = \frac{28\sin(-44^\circ)}{\sin 44^\circ} =$$

$$= -\frac{28\sin 44^\circ}{\sin 44^\circ} = -28.$$

Ответ: -28.

58. Найдите значение выражения $\dfrac{12\,\mathrm{tg}\,168^\circ}{\mathrm{tg}\,12^\circ}$.

Решение.

$$\frac{12\,\mathrm{tg}\,168^\circ}{\mathrm{tg}\,12^\circ} = \frac{12\,\mathrm{tg}(180^\circ - 12^\circ)}{\mathrm{tg}\,12^\circ} = \frac{12\,\mathrm{tg}(-12^\circ)}{\mathrm{tg}\,12^\circ} =$$

$$= -\frac{12\,\mathrm{tg}\,12^\circ}{\mathrm{tg}\,12^\circ} = -12.$$

Ответ: -12.

59. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\sin^2 22^\circ + \sin^2 112^\circ}$.

Решение.

$$\frac{6}{\sin^2 22^\circ + \sin^2 112^\circ} = \frac{6}{\sin^2 22^\circ + \sin^2(90^\circ + 22^\circ)} =$$

$$= \frac{6}{\sin^2 22^\circ + \cos^2(22^\circ)} = 6.$$

Ответ: 6.

60. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 17 - 1 = 16$. Так как $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$, поэтому $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{16} = 4$.

Ответ: 4.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\left(3\frac{4}{5}+1\frac{5}{6}\right)\cdot 3$.

2. Найдите значение выражения $\frac{2^{0,48}}{4^{1,24}}$.

3. Найдите значение выражения $(9x^2+4y^2-(3x-2y)^2):xy$.

4. Найдите значение выражения $\frac{a^{2,35}}{a^{2,97}\cdot a^{1,38}}$ при $a=2,5$.

5. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 5}$.

6. Найдите значение выражения $\log_2\log_2 256$.

7. Найдите значение выражения $\frac{18(\sin^2 36^\circ-\cos^2 36^\circ)}{\cos 72^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{\sin\alpha\cdot(5\cos\alpha+2)}{(10\cos\alpha+4)\cdot\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=5$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $3^{2\frac{1}{3}}\cdot 9^{1\frac{1}{3}}$.

2. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2,1}\cdot\sqrt{1,4}}{\sqrt{6}}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{x^{-8}\cdot x^{6}}{x^{-3}}$ при $x=28$.

4. Найдите значение выражения $(9x^2-25)\cdot\left(\frac{1}{3x-5}-\frac{1}{3x+5}\right)$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{10} 13}{\log_{10} \sqrt[7]{13}}$.

6. Найдите значение выражения $4^{\log_2 5}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{4\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $5\cos(\pi - \alpha) - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $5^8 \cdot 2^6 : 10^7$.

2. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}\right)^2$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{x^5 \cdot x^6}{x^9}$ при $x = 12$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{f(y)}{f\left(\frac{1}{y}\right)}$, если $f(y) = \left(2y - \frac{3}{y}\right)\left(3y - \frac{2}{y}\right)$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 57}{\log_8 57}$.

6. Найдите значение выражения $\log_5 0{,}5 + \log_5 50$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin^2 35^\circ + \sin^2 125^\circ}$.

8. Найдите значение выражения $4\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $77^8 : 11^7 : 7^6$.

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}} - \sqrt{5\frac{2}{5}}\right) : \sqrt{0{,}6}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{6+\sqrt{35}}$.

4. Найдите значение выражения
$(13-2x)(13+2x)+4x^2+5x-69$ при $x=68$.

5. Найдите значение выражения $\log_3 8 \cdot \log_2 27$.

6. Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 64}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 13^\circ}{\sin 347^\circ}$.

8. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\dfrac{3\cos\alpha+2\sin\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=1{,}6$.

Вариант 5

1. Найдите значение выражения $\sqrt{565^2-452^2}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}$.

3. Найдите $2g(y)-10y+3$, если $g(y)=5y-7$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(8x)^2-8x}{8x^2-x}$.

5. Найдите значение выражения $38\log_{25}\sqrt{5}$.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{7}{3^{\log_3 8}}$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{3}\operatorname{tg} 750^\circ$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+3\cos(\pi+\beta)}{\cos(\beta-\pi)}$.

B8. Производная и исследование функций

Диагностическая работа

1. Прямая $y = 4x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 1 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

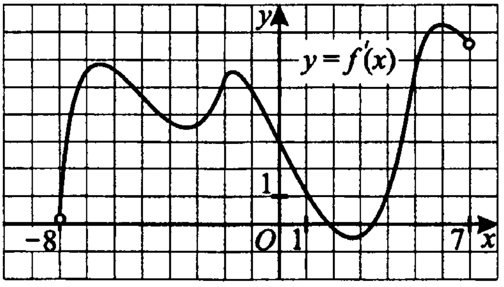


Рис. 1.

3. На рисунке 2 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

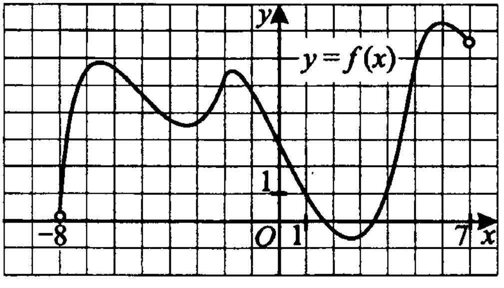


Рис. 2.

4. На рисунке 3 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 14$ или совпадает с ней.

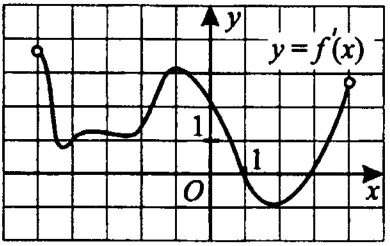


Рис. 3.

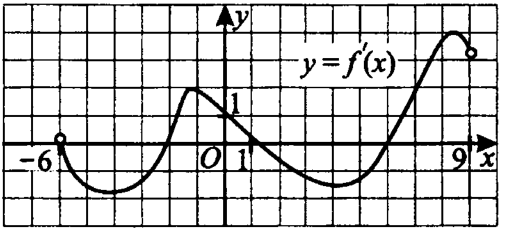


Рис. 4.

5. На рисунке 4 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 4]$.

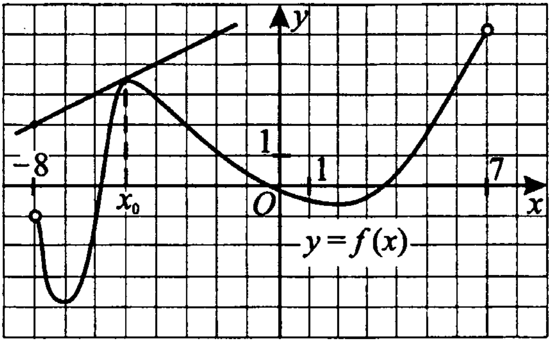


Рис. 5.

6. На рисунке 5 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

7. На рисунке 6 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 4$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

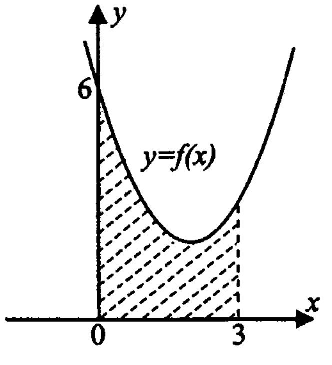


Рис. 6.

Понятие производной

Немного полезной информации

Производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Функцию, имеющую производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в этой точке). Процесс вычисления производной называется дифференцированием. Производная функции также является функцией.

Производной функции в точке называют число, равное пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при стремящемся к нулю приращении аргумента.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

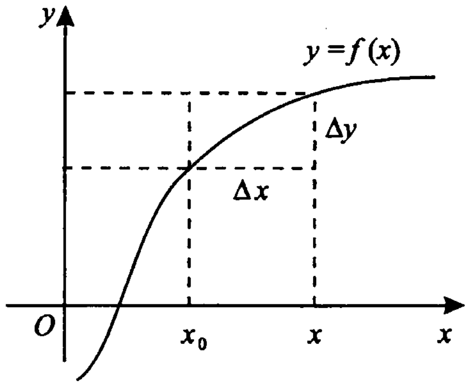


Рис. 7.

Рассмотрим рисунок 7. Здесь $\Delta x = x - x_0$ — это приращение (изменение) аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции.

По определению производной

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Производные некоторых элементарных функций

$$(c)' = 0, \text{ где } c = const;$$
$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}, \text{ где } \alpha = const;$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$
$$(\sin x)' = \cos x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(a^x)' = a^x \ln a;$$
$$(e^x)' = e^x;$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \ \ c - const;$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$
$$(uv)' = u'v + uv';$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$y = f\big(g(x)\big), \ \ y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \text{ где } u = g(x).$$

Геометрический смысл производной

Значение производной функции в точке $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. Нужно помнить, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной (или, другими словами, тангенсу угла, образованного касательной и положительным направлением оси Ox).

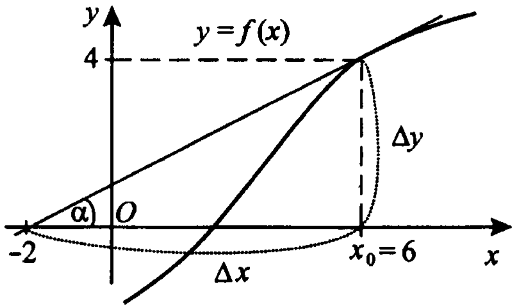


Рис. 8.

Например, на рисунке 8 $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k_{\text{кас}}$.

Видим, что $\Delta y = 4$, $\Delta x = 8$. Тогда $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.

Обратите внимание, что Δy и Δx вместе с отрезком касательной образуют прямоугольный треугольник. Если в этом треугольнике мы разделим Δy на Δx, то получим абсолютное значение производной. Знак производной мы можем определить тремя способами.

1-й способ.

Если точка принадлежит промежутку возрастания функции, то значение производной в этой точке положительно, а если промежутку убывания, то значение производной отрицательно.

2-й способ.

Рассмотрим угол между касательной к графику функции в некоторой точке и осью абсцисс (это угол, отсчитываемый в положительном направлении — против часовой стрелки — от положительного направления оси Ox до касательной). Если угол острый, то значение производной в этой точке положительно, а если угол тупой, то значение производной в этой точке отрицательно.

3-й способ.

Возьмём координаты произвольной точки касательной (x_1, y_1). Теперь рассмотрим любую точку касательной, абсцисса которой x_2 больше, чем абсцисса первой точки. Если при этом и её ордината y_2 больше y_1, то производная положительна, если меньше — производная отрицательна.

Полезно знать, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны и что прямая, параллельная оси абсцисс Ox, имеет угловой коэффициент, равный нулю.

Задачи с решениями

1. На рисунке 9 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

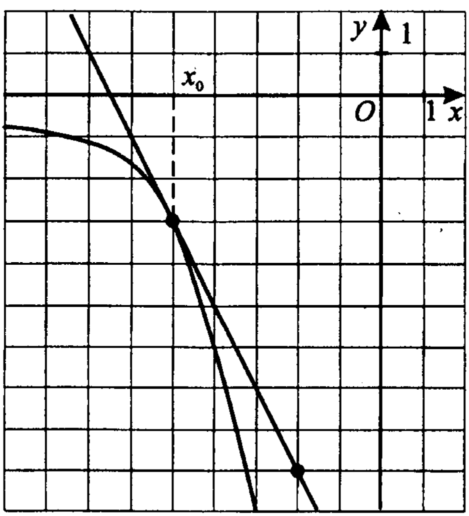


Рис. 9.

Решение.

По графику функции видно, что функция — убывающая, поэтому знак производной в точке касания — «минус». Выберем две точки касательной. Например, $(-2; -9)$ и $(-5; -3)$. Разность их абсцисс $\Delta x = 3$, разность ординат $\Delta y = 6$. Делим Δy на Δx, получаем $6 : 3 = 2$, ставим знак «$-$».

Ответ: -2.

Применение производной к исследованию функций

Разберём решение некоторых задач, связанных с геометрическим смыслом производной.

2. Прямая $y = 3x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Так как прямая $y = 3x - 5$ параллельна касательной, то угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту прямой $y = 3x - 5$, то есть $k = 3$. Так как касательная проведена к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$, то значение производной в точке касания равно значению углового коэффициента касательной, то есть $y'(x) = 3$.

Найдём производную функции $y = x^2 + 2x - 7$.

$y'(x) = (x^2 + 2x - 7)' = 2x + 2$. Из равенства $y'(x) = 3$ можно найти абсциссу точки касания. $2x + 2 = 3$; $2x = 1$; $x = 1 : 2$; $x = 0{,}5$.

Ответ: $x = 0{,}5$.

3. Прямая $y = -4x + 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Угловой коэффициент касательной $y = -4x + 15$ равен -4. Получим $y'(x) = -4$, где
$y'(x) = (x^3 + 3x^2 - 4x + 11)' = 3x^2 + 6x - 4$.
$3x^2+6x-4 = -4$; $3x^2+6x = 0$; $3x(x+2) = 0$, следовательно, $x = 0$, либо $x = -2$.

Мы получили два возможных значения для абсциссы точки касания. Выбрать одно из них можно, подставив найденные значения x в формулы функции и касательной. В точке касания значения функции и прямой должны совпасть.

При $x = 0$ $y = x^3+3x^2-4x+11 = 0^3+3\cdot0^2-4\cdot0+11 = 11$;
$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot 0 + 15 = 15$.
$y(0) = 11$, $y_{\text{кас}}(0) = 15$.

Так как значения функции и касательной при $x = 0$ разные, абсцисса $x = 0$ нам не подходит.

Проверим при $x = -2$:
$y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 11 =$
$-8 + 12 + 8 + 11 = 23$;
$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot (-2) + 15 = 8 + 15 = 23$.

Значения функции и касательной при $x = -2$ равны, значит, абсцисса точки касания $x = -2$.

Ответ: -2.

4. На рисунке 10 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Определите количество целых точек на этом интервале, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

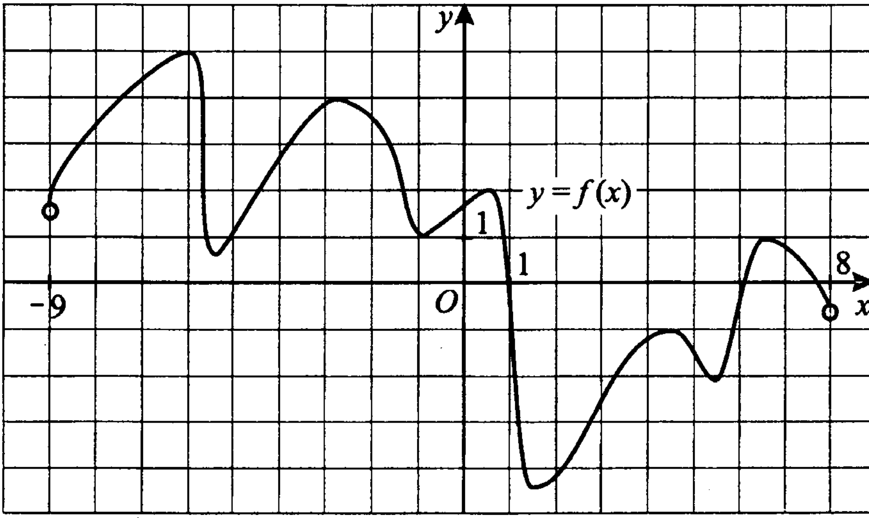


Рис. 10.

Решение.

Целые точки — это точки с целочисленными значениями абсцисс (x). Производная функции $f(x)$ положительна, если функция возрастает.

На рисунке 11 отмечены точки, принадлежащие промежуткам возрастания, в которых производная функции $f(x)$ положительна. Это точки -8; -7; -5; -4; -3; 0; 2; 3; 4; 6. Количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна, равно 10.

Ответ: 10.

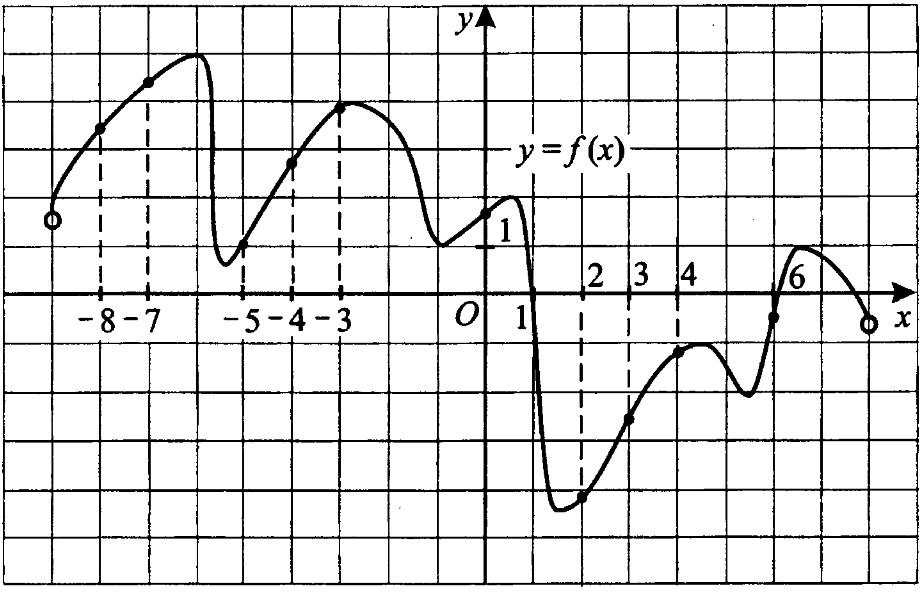


Рис. 11.

5. На рисунке 10 изображён график функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение.

Определяем на графике точку, у которой абсцисса x лежит на отрезке $[-8, -4]$, а ордината y наибольшая из возможных, то есть эта точка «самая высокая». Для данного графика это точка $(-6; 5)$. Значит, $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = -6$.

Ответ: -6.

6. На рисунке 10 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек на отрезке $[-8; 3]$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$.

Решение.

Нарисуем прямую $y = 3$ (см. рис. 12). Посчитаем количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$. По рисунку видно, что число таких точек равно 6.

Ответ: 6.

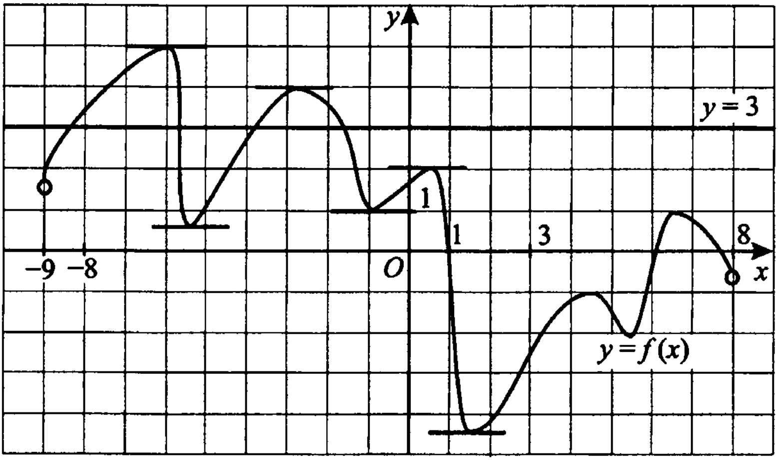


Рис. 12.

7. На рисунке 13 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.

Решение.

На рисунке 13 изображён график функции $y = f(x)$. Говоря образно, точки экстремума — это те значения x, при которых на графике видны «горбики» и «впадинки». Видим, что точками экстремума данной функции являются точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 7$ и $x = 9$. Сумма точек экстремума функции $y = f(x)$ равна $-1 + 0 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 = 28$.

Ответ: 28.

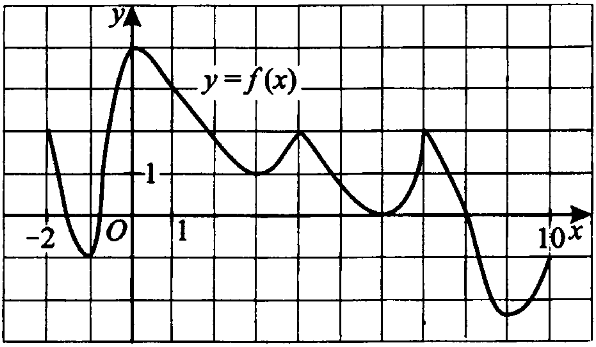


Рис. 13.

Теперь разберём несколько задач, в которых дан график производной функции.

8. На рисунке 14 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

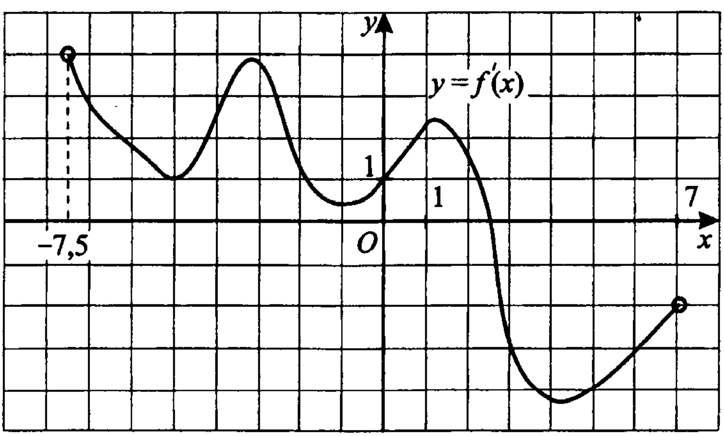


Рис. 14.

Решение.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней, если её угловой коэффициент $k = 1$. Но значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых производная $f'(x) = 1$. Построим прямую $y = 1$, параллельную оси Ox (см. рис. 15). Видим, что прямая и график функции имеют 4 общие точки. Это и значит, что $f'(x) = 1$ в этих четырёх точках, и в них касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

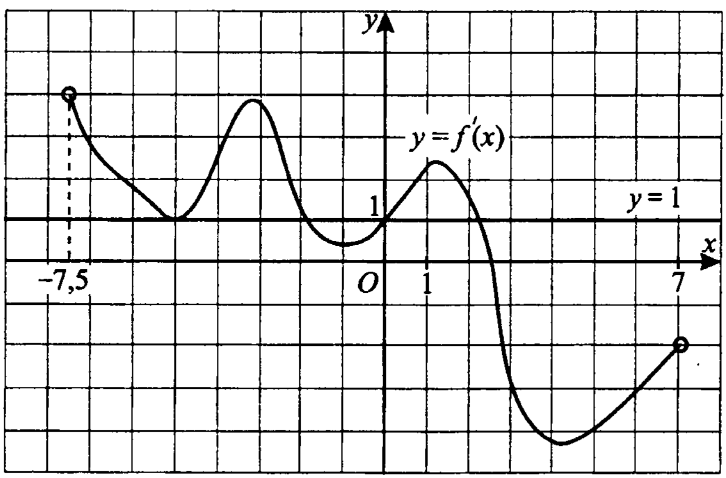


Рис. 15.

Ответ: 4.

9. На рисунке 14 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите промежутки возрастания функции. В ответе запишите количество целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Функция возрастает на промежутках, в которых её производная положительна. Найдём те целые точки на графике, в которых производная положительна (лежит выше оси абсцисс Ox). Видим, что эти точки лежат в интервале от $-7{,}5$ до $2{,}5$. Целых среди них 10.

Ответ: 10.

10. На рисунке 14 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на отрезке $(-7{,}5; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение.

На отрезке $[-5; -2]$ производная функции $y = f'(x)$ положительна, следовательно, $f(x)$ на этом отрезке возрастает и принимает наименьшее значение на левом конце отрезка (или, другими словами, при наименьшем значении x). В данном случае это $x = -5$.

Ответ: -5.

11. На рисунке 16 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 3]$.

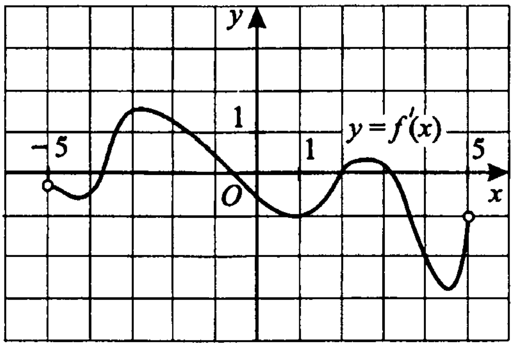


Рис. 16.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку производная меняет знак, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Производная функции $y = f'(x)$ на отрезке $[-4; 3]$ меняет знак три раза, поэтому количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно 3.

Ответ: 3.

12. На рисунке 17 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$ на интервале $(-3; 3)$.

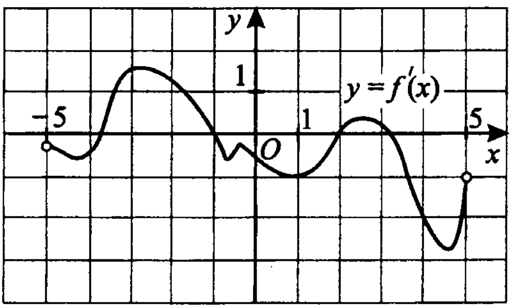


Рис. 17.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через неё знак производной меняется, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Таких точек на интервале $(-3; 3)$ две: $x = -1$ и $x = 2$.

Точка является точкой максимума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку знак производной меняется с «+» на «−». В данном случае точкой максимума является точка $x = -1$ (см. рис. 18).

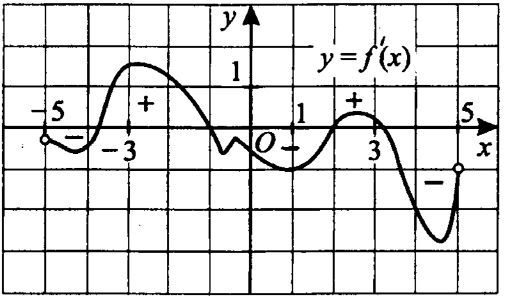


Рис. 18.

Ответ: −1.

13. На рисунке 17 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 18) и выберем промежутки, где производная положительна (на них функция возрастает). К точкам возрастания функции относятся также концы этих промежутков.

Видим, что целые точки, входящие в промежутки возрастания, — это $-3, -2, -1, 2$ и 3. Их сумма равна -1.

Ответ: −2.

14. На рисунке 19 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 20 на с. 72) и выберем промежутки, где производная отрицательна (на них

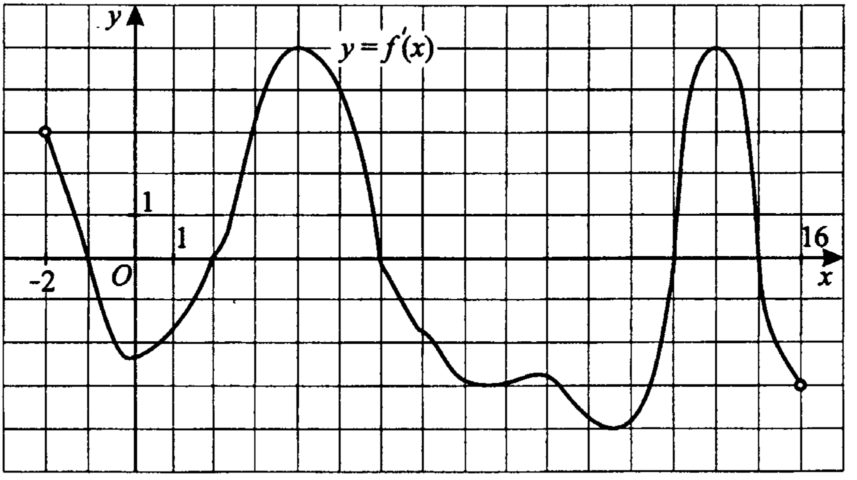


Рис. 19.

функция убывает). Это и будут промежутки убывания: [−1; 2], [6; 13], [15; 16). Длина наибольшего из них равна 13 − 6 = 7.

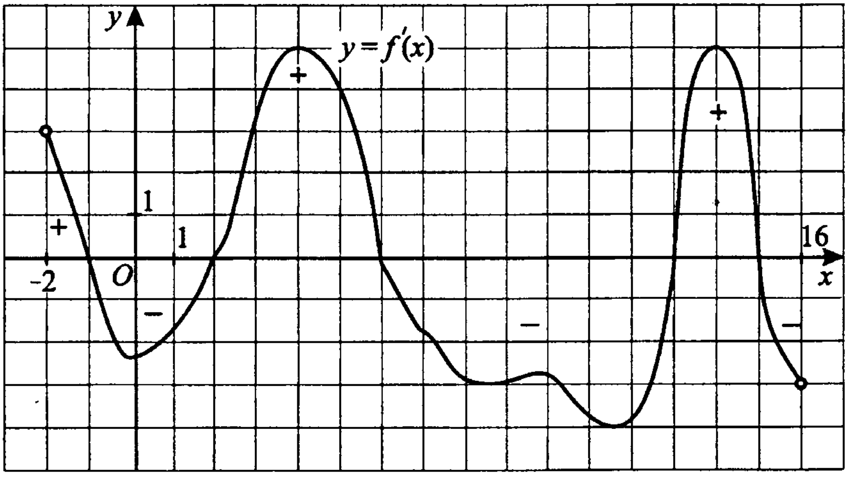


Рис. 20.

Ответ: 7.

15. На рисунке 21 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 4, 6. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

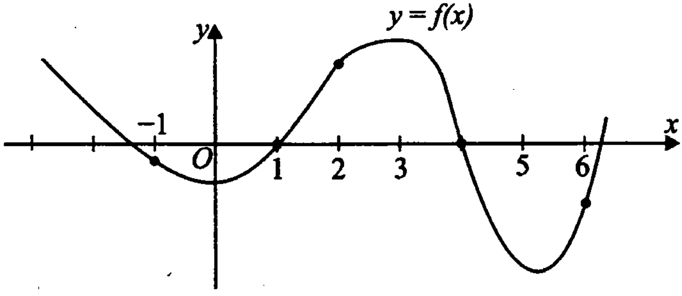


Рис. 21.

Решение.

Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. $f'(x)$ наименьшее в точке, в которой касательная образует самый маленький тупой угол с осью Ox («горка» в этом месте на вид «самая крутая»). Проведём касательные в заданных точках (см. рис. 22). Тупые углы (а значит, $f'(x) < 0$) в точках $x = -1$ и $x = 4$. $\alpha < \beta$, значит, наименьшая производная в точке 4.

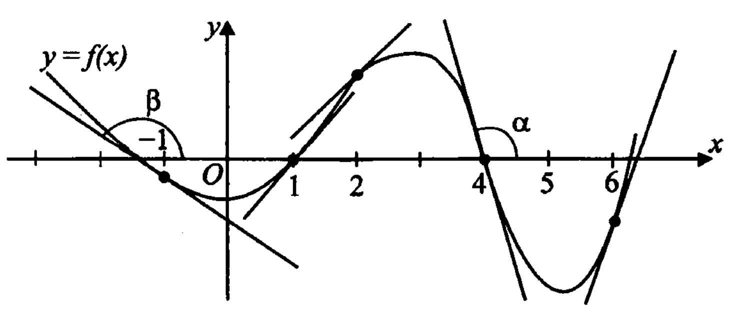


Рис. 22.

Ответ: 4

Первообразная

ⓘ *Немного полезной информации*

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A выполняется $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$.

Две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную величину. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то при любом числе C функция $F(x) + C$ тоже будет первообразной для $f(x)$.

Все графики первообразных для одной и той же функции $f(x)$ получаются друг из друга сдвигом вдоль оси Oy (см. рис. 23).

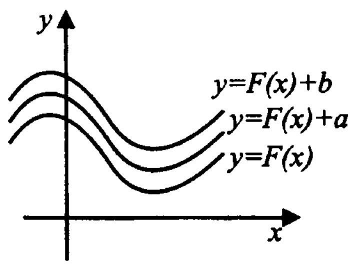


Рис. 23.

Процесс отыскания функции по заданной производной называют **интегрированием**.

Как проверить, правильно ли мы нашли первообразную для данной функции? Нужно найти производную от найденной первообразной. Например, $y = \frac{1}{3}x^3 + 5$ является первообразной функции $y = x^2$, потому что

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2.$$

Задачи с решениями

16. На рисунке 24 изображён график функции $y = F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $y = f(x)$.

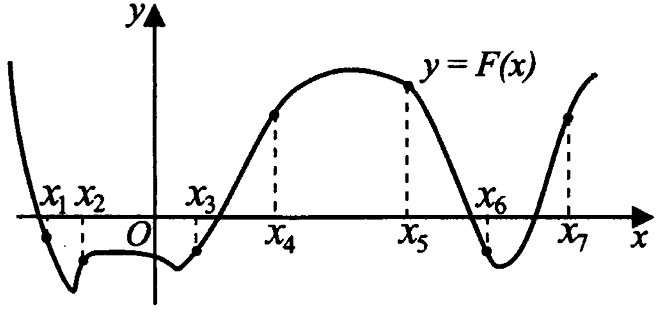


Рис. 24.

Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 те, в которых функция $f(x)$ положительна. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение.

Функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$, поэтому $f(x) > 0$ на всех интервалах, где $F(x)$ возрастает. Находим по рисунку, какие точки принадлежат промежуткам возрастания $F(x)$ (исключая концы промежутков, где $F'(x) = f(x) = 0$). Это точки x_2, x_3, x_4, x_7 — их количество равно 4.

Ответ: 4.

Площадь криволинейной трапеции и определённый интеграл

ⓘ *Немного полезной информации*

На рисунке 25 изображена фигура, ограниченная снизу отрезком $[a; b]$, с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей неотрицательные значения. Такую фигуру называют криволинейной трапецией, отрезок $[a; b]$ — её основанием.

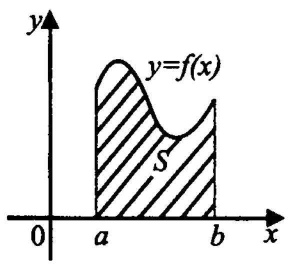


Рис. 25.

Площадь S криволинейной трапеции можно вычислить с помощью первообразной функции по формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Разность $F(b)-F(a)$ равна **определённому интегралу** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, обозначаемому так: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читают: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»).

Можно написать формулу для площади криволинейной трапеции следующим образом: $S = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

В этом состоит геометрический смысл определённого интеграла. Отметим, что формула $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ справедлива для функций любых знаков, а не только для неотрицательных.

Задачи с решениями

17. На рисунке 26 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \dfrac{2x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

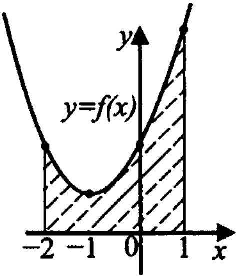


Рис. 26.

Решение.

Криволинейная трапеция на рисунке 26 ограничена отрезками прямых $x = -2$ и $x = 1$ и графиком функции $y = f(x)$. Для вычисления площади фигуры используем формулу $S = F(b) - F(a)$, в нашем случае $a = -2$, $b = 1$.

$$S = F(1) - F(-2) = \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 -$$

$$- \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + 2 + 3 - 1 - \left(-\frac{16}{3} + 8 - 6 - 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{16}{3} + 4 - 1 =$$

$$= \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9.$$

Ответ: 9.

18. На рисунке 27 изображён график функции $y = f(x) = 5 - |x+1| - |x-2|$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$.

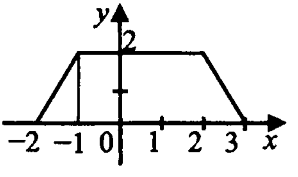


Рис. 27.

Решение.

Найдём определённый интеграл, посчитав площадь трапеции $ABCD$ (см. рис. 28)

$$\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx = S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BA = \frac{3 + 4}{2} \cdot 2 = 7.$$

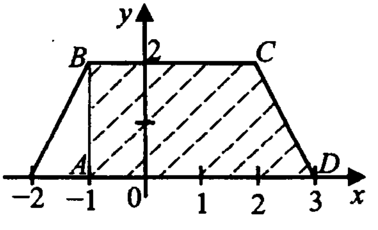


Рис. 28.

Ответ: 7.

19. На рисунке 29 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $F(x)$, которая является первообразной для функции $f(x)$, параллельна прямой $y = 3x + 8$ или совпадает с ней.

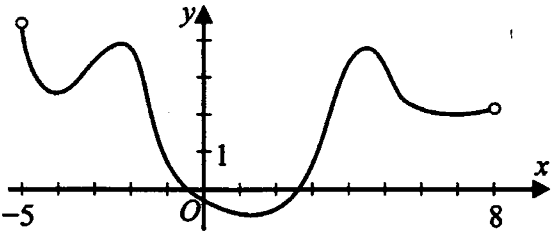


Рис. 29.

Решение.

Функция $y = f(x)$ является производной для $F(x)$, то есть $f(x) = F'(x)$. Значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть $f(x) = F'(x) = 3$. Проведём прямую $y = 3$, параллельную оси Ox (см. рис. 30). Она пересекает график в 5 точках. В этих точках касательная к графику функции $y = F(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 8$ или совпадает с ней.

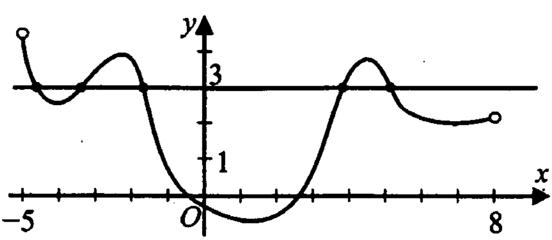


Рис. 30.

Ответ: 5.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Прямая $y = 2x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 31 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 13$.

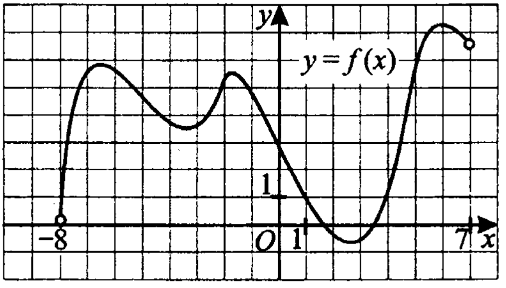


Рис. 31.

3. На рисунке 32 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 4x - 7$ или совпадает с ней.

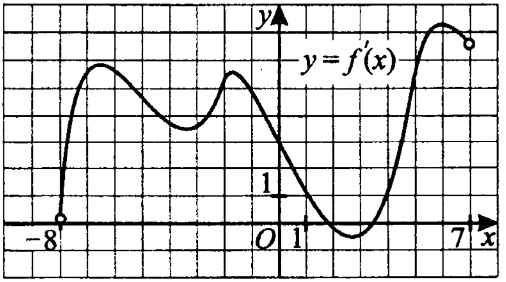


Рис. 32.

4. На рисунке 33 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. В какой точке отрезка $[-1; 7]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

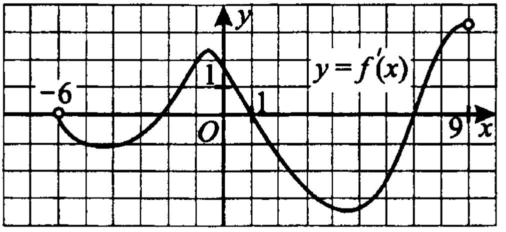


Рис. 33.

5. На рисунке 34 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

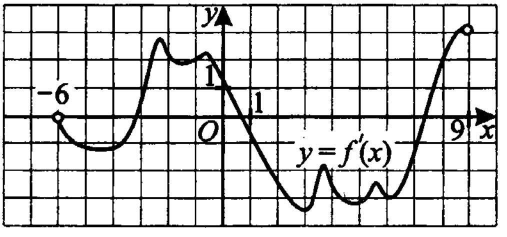


Рис. 34.

6. На рисунке 35 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

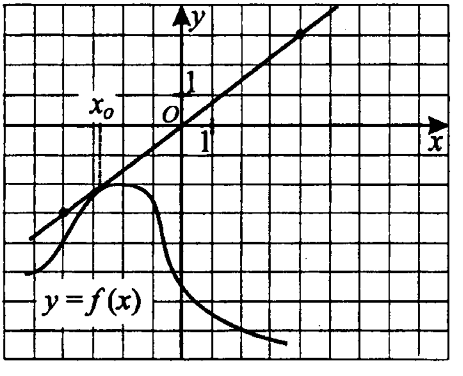


Рис. 35.

7. На рисунке 36 изображён график некоторой функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(0; +\infty)$. Одна из первообразных этой функции равна

$F(x) = \dfrac{-3}{x^2} + 2x - 3.$

Найдите площадь заштрихованной фигуры.

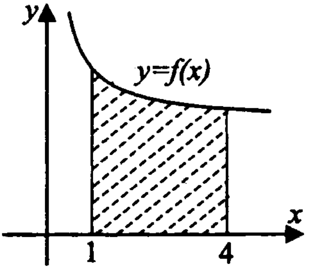


Рис. 36.

Вариант 2

1. Прямая $y = 47x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 37 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

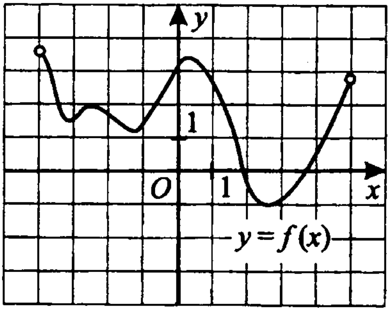


Рис. 37.

3. На рисунке 38 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. В какой точке отрезка $[-4; 1]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

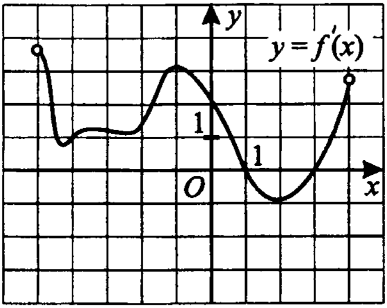


Рис. 38.

4. На рисунке 39 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$.

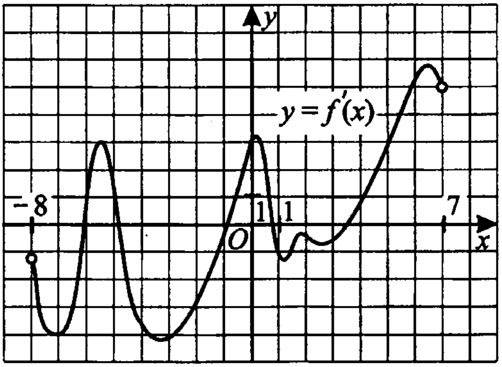


Рис. 39.

5. На рисунке 40 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

6. На рисунке 41 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

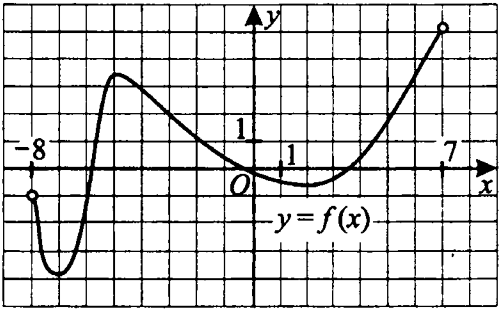


Рис. 40.

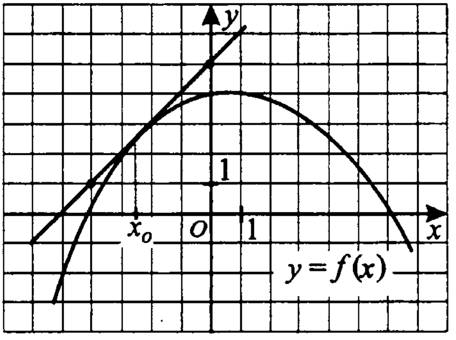


Рис. 41.

7. На рисунке 42 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$.

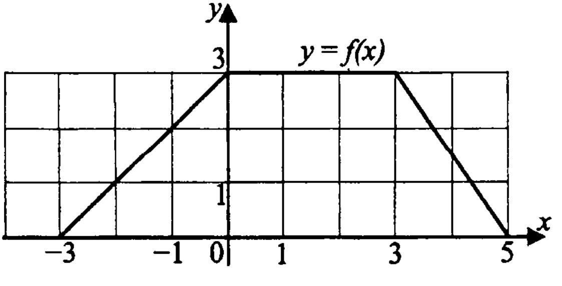


Рис. 42.

Вариант 3

1. Прямая $y = 3x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 3x - 18$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 43 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

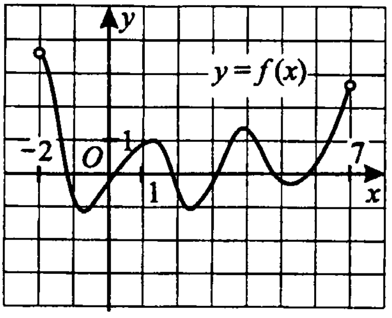


Рис. 43.

3. На рисунке 44 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-6; 1]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

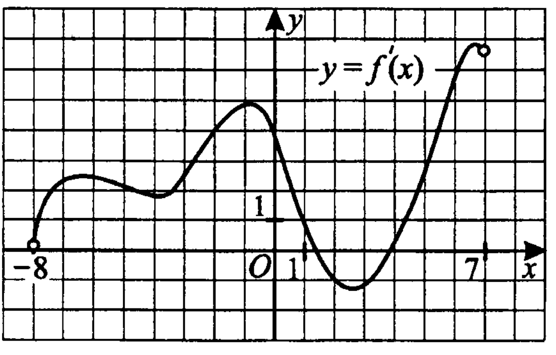


Рис. 44.

4. На рисунке 45 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

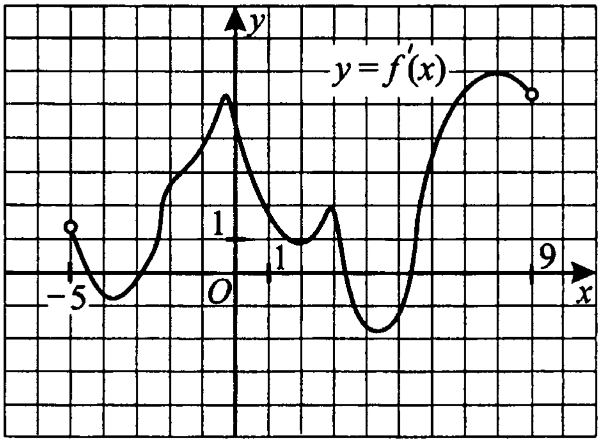


Рис. 45.

5. На рисунке 46 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.

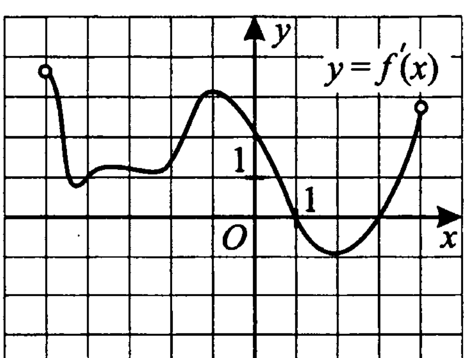


Рис. 46.

6. На рисунке 47 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

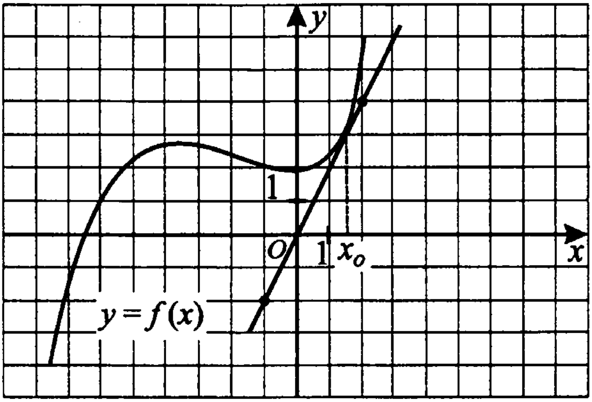


Рис. 47.

7. На рисунке 48 изображён график функции $y = F(x)$, которая является одной из первообразных функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int_{-3}^{6} f(x)dx$.

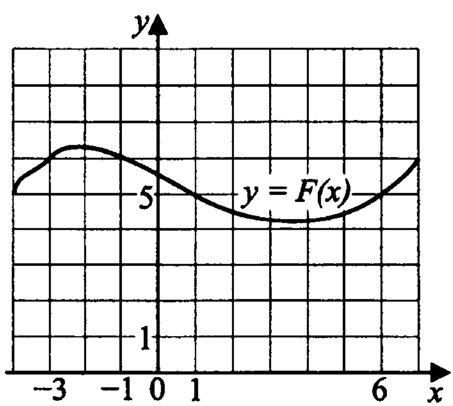


Рис. 48.

Вариант 4

1. Прямая $y = -3x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 49 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

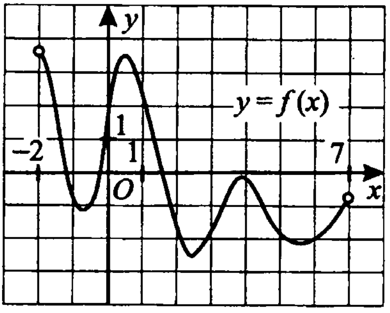


Рис. 49.

3. На рисунке 50 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

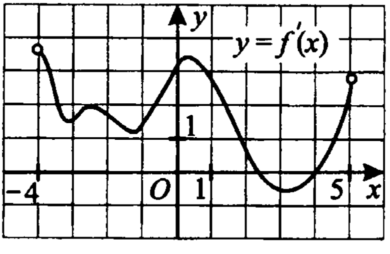


Рис. 50.

4. На рисунке 51 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

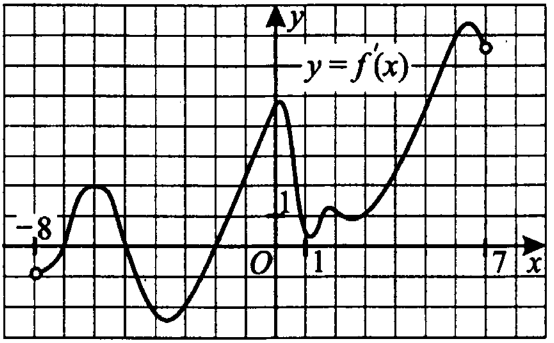


Рис. 51.

5. На рисунке 52 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$.

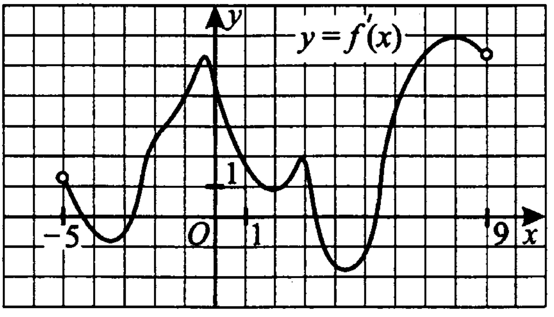


Рис. 52.

Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

6. На рисунке 53 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

7. На рисунке 54 изображён график функции $y = F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $y = f(x)$. Найдите количество точек на промежутке $[-5; 8]$, в которых функция $f(x)$ равна нулю.

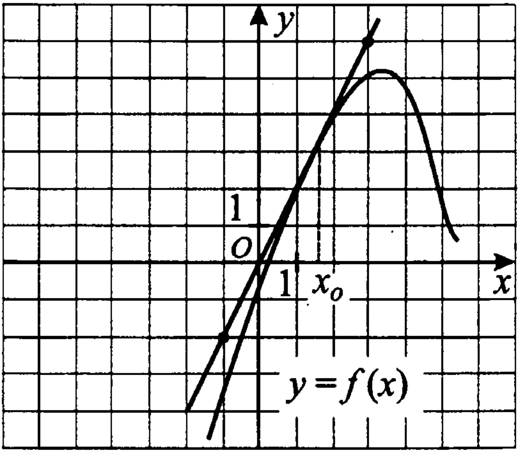


Рис. 53.

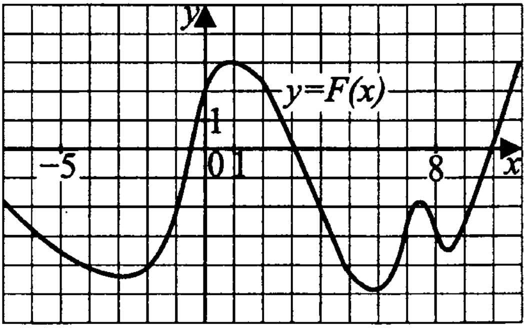


Рис. 54.

Вариант 5

1. Прямая $y = -5x + 19$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 18$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 55 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.

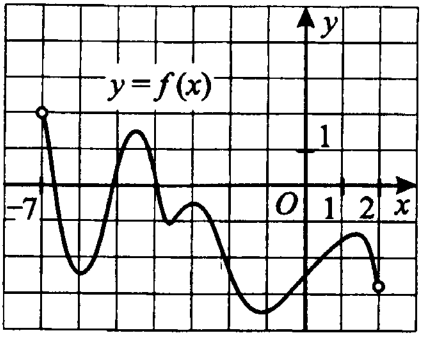


Рис. 55.

3. На рисунке 56 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

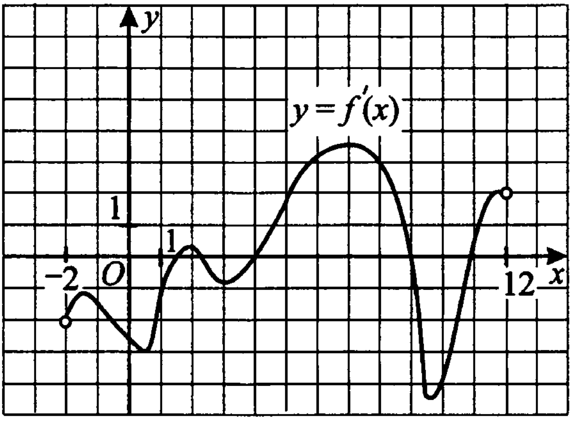


Рис. 56.

4. На рисунке 57 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 15$ или совпадает с ней.

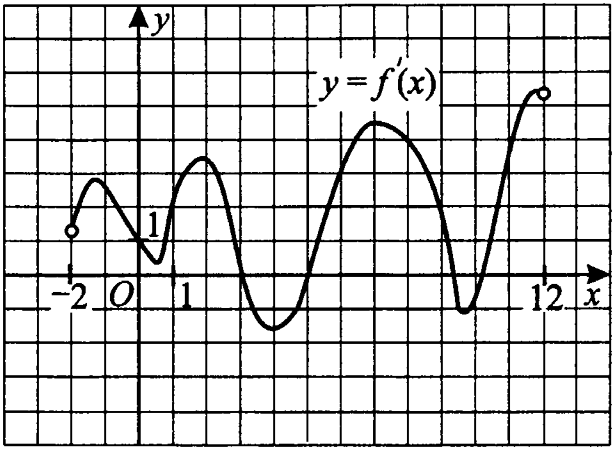


Рис. 57.

5. На рисунке 58 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4; 5)$.

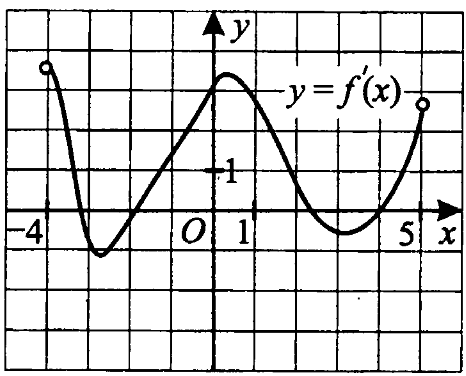


Рис. 58.

6. На рисунке 59 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

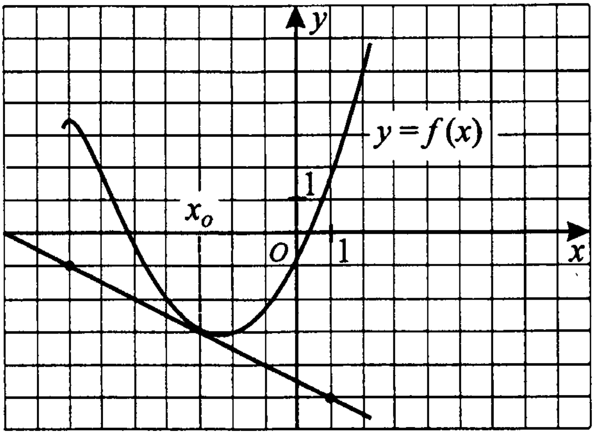


Рис. 59.

7. На рисунке 60 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $F(x)$, которая является первообразной функции $f(x)$, параллельна прямой $y = 8 - 5x$ или совпадает с ней.

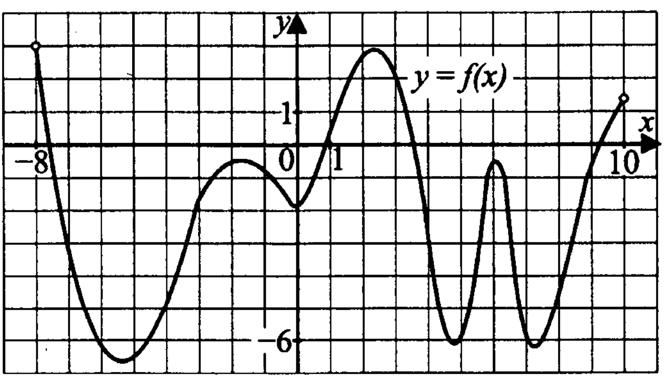


Рис. 60.

Вариант 6

1. На рисунке 61 изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

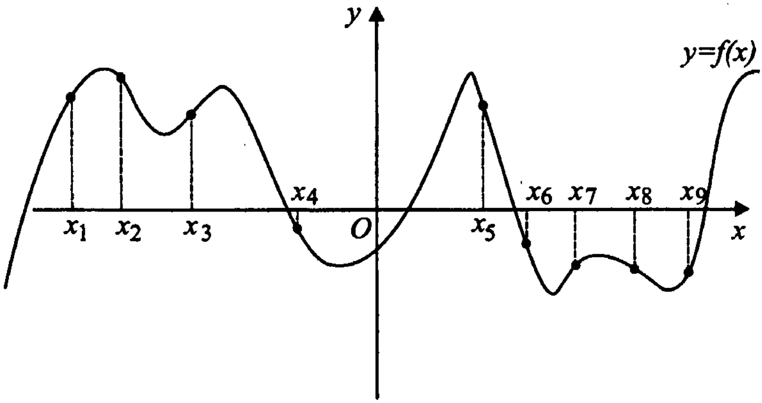


Рис. 61.

2. На рисунке 62 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?

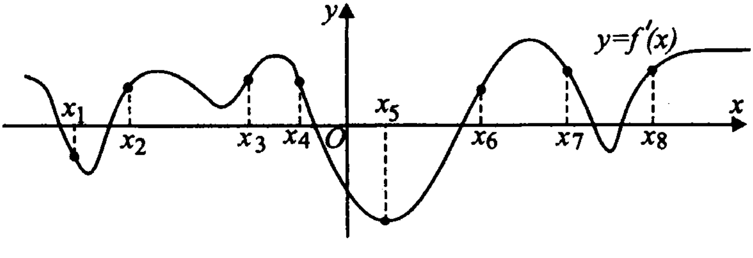


Рис. 62.

3. На рисунке 63 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-5, -4, -2, -1, 1, 3$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

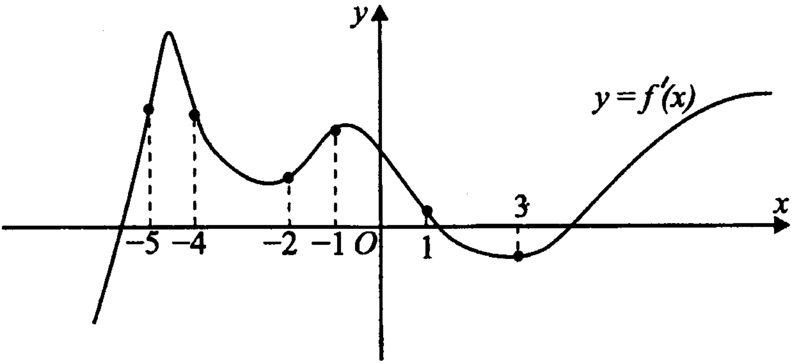


Рис. 63.

4. На рисунке 64 изображён график функции $y = F(x)$, одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на интервале $(-7; 5)$.

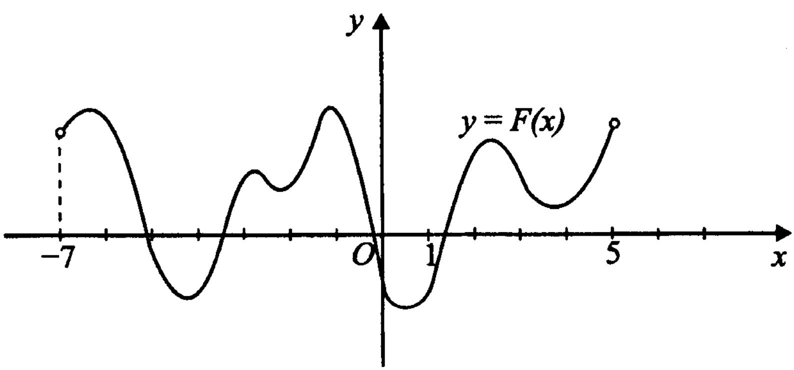


Рис. 64.

5. На рисунке 65 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(-3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

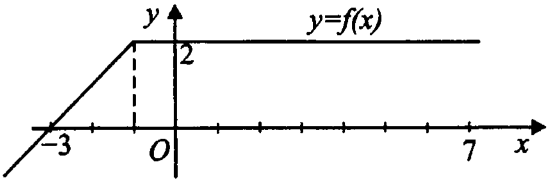


Рис. 65.

6. На рисунке 66 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция

$$F(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - \frac{12}{5}$$

является одной из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

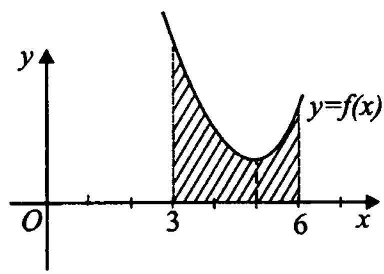


Рис. 66.

7. На рисунке 67 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -2x^3 + 51x^2 - 420x + 14$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

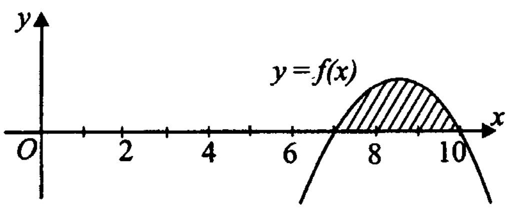


Рис. 67.

Вариант 7

1. На рисунке 68 изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

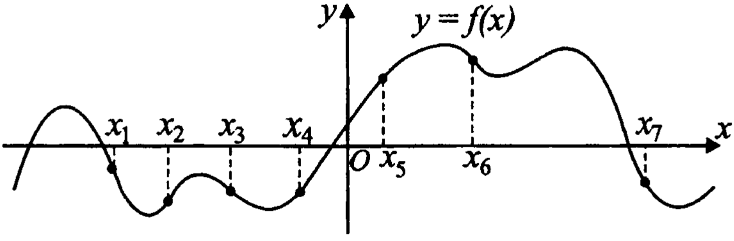


Рис. 68.

2. На рисунке 69 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?

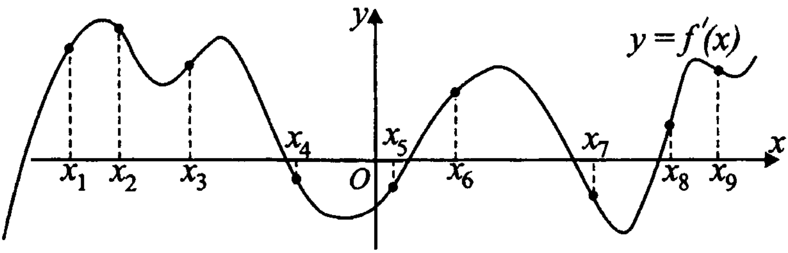


Рис. 69.

3. На рисунке 70 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, -2, -1, 1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

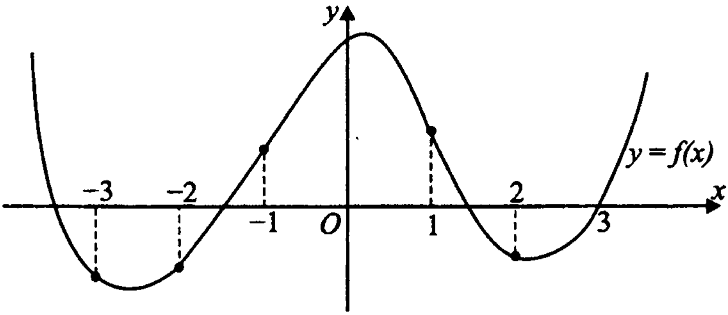


Рис. 70.

4. На рисунке 71 изображён график функции $y = F(x)$, одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-4; 5]$.

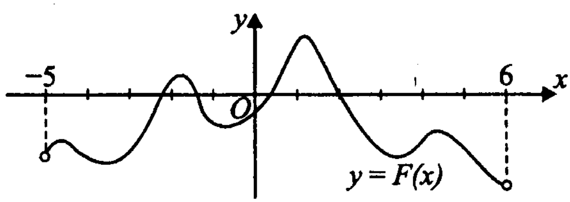


Рис. 71.

5. На рисунке 72 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(1) - F(-7)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

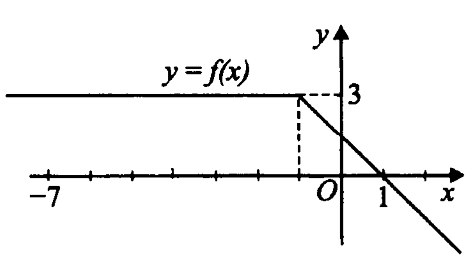


Рис. 72.

6. На рисунке 73 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 9x^2 + 29x + \frac{4}{17}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

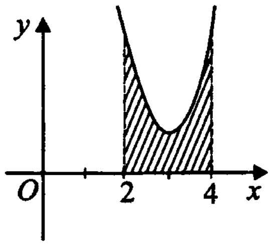


Рис. 73.

7. На рисунке 74 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{x^3}{4} + 6x^2 - 45x + 64$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

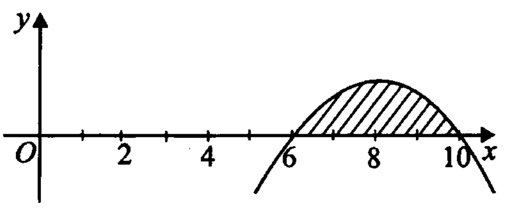


Рис. 74.

B12. Прикладные задачи

Диагностическая работа

1. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 550 - 30n$. Определите наименьший уровень цены n (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц ($h = q \cdot n$) составит не менее 2480 тыс. руб.

2. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После того как кран открыли, вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 8{,}95 - 3{,}36t + 0{,}314t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

3. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + xt + yt^2$, где $T_0 = 140\,\text{К}$, $x = 60\,\text{К/мин}$, $y = -0{,}25\,\text{К/мин}^2$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1240 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

4. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 60%, если температура холодильника $T_2 = 180°$?

Решение прикладных задач

ⓘ *Немного полезной информации*

В заданиях данного типа рассматриваются реальные процессы, в которых необходимо найти нужный результат по заданной функции и начальным условиям или конкретным значениям входящих в формулу параметров. Все формулы для этих заданий взяты либо из школьного курса физики, либо из экономических дисциплин. В зависимости от условия составляется или уравнение, или неравенство относительно значений функции. В большинстве случаев получаются квадратные уравнения или неравенства. Реже — линейные. В уравнениях третьей и четвёртой степени, как правило, удаётся достаточно просто подобрать соответствующий корень. Решения упрощаются за счёт того, что в реальных процессах фигурируют в основном положительные величины. В идеале, конечно, надо стремиться понять физический смысл задачи, дать развёрнутый ответ, соответствующий тематике задания. Практически — достаточно получить конкретное число для внесения в бланк ответов.

Задачи с решениями

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 9-балльной шкале целыми числами от -4 до 4.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — всемеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

Решение.

Пусть по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, равную x, тогда рейтинг можно посчитать по формуле

$$R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A} = \frac{7x + x + 3x + x}{A} = \frac{12x}{A}.$$

По условию, $R = x$, $\frac{12x}{A} = x$, $A = 12$.

Ответ: 12.

2. Коэффициент полезного действия теплового двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД двигателя будет не менее 75%, если температура холодильника $T_2 = 350$ К?

Решение.

1-й способ.

Составим и решим неравенство:

$$\eta \geqslant 75\%,$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geqslant 75\%,$$

$$\frac{T_1 - 350}{T_1} \geqslant 0{,}75,$$

$$T_1 - 350 \geqslant 0{,}75T_1,$$

$$T_1 - 0{,}75T_1 \geqslant 350,$$

$$0{,}25T_1 \geqslant 350,$$

$$T_1 \geqslant 1400.$$

Итак, чтобы КПД данного теплового двигателя был не менее 75%, температура нагревателя должна быть не менее 1400 К.

Ответ: 1400.

2-й способ.

Подставим в формулу заданные значения и решим полученное уравнение при КПД, равном 75%. Если найденное значение будет единственным, неравенство составлять и решать не нужно.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

$$75\% = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

$$75 = \frac{T_1 - 350}{T_1} \cdot 100.$$

Умножим обе части уравнения на T_1.

$$75T_1 = (T_1 - 350) \cdot 100,$$
$$75T_1 = 100T_1 - 35\,000,$$
$$35\,000 = 100T_1 - 75T_1,$$
$$25T_1 = 35\,000,$$
$$T_1 = 35\,000 : 25,$$
$$T_1 = 1400.$$

3. Зависимость объёма спроса на продукцию некоторой фирмы от цены продукции задаётся формулой $q(p) = 280 - 10p$, где p — цена (тыс. руб.), q — спрос (единиц в месяц). Определите максимальный уровень цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 960 тыс. руб.

Решение.

Составим функцию выручки предприятия, затем неравенство, соответствующее условию задачи.

$$r = q \cdot p = (280 - 10p)p.$$

По условию $r \geqslant 960$, поэтому

$$(280 - 10p)p \geqslant 960.$$

Решим квадратное неравенство:

$$280p - 10p^2 \geqslant 960,$$
$$-10p^2 + 280p - 960 \geqslant 0,$$

$$10p^2 - 280p + 960 \leqslant 0,$$
$$p^2 - 28p + 96 \leqslant 0,$$

$p_1 = 4$, $p_2 = 24 \Rightarrow p \in [4; 24]$, $p_{max} = 24$. То есть максимальный уровень цены, при котором выручка предприятия составит не менее 960 тыс. руб., равен 24 тыс. руб.

Ответ: 24.

4. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 800\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 700 000 руб. в месяц.

Решение.

Найдём месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет равна 700 000 руб. в месяц. Если такое значение будет единственным, неравенство составлять и решать не нужно.

1-й способ.

Выразим искомую величину сначала в общем виде, затем вычислим конкретное значение.

$$\pi = q(p - v) - f,$$
$$\pi + f = q(p - v),$$
$$q = \frac{\pi + f}{p - v} = \frac{700\,000 + 800\,000}{400 - 300} = \frac{1\,500\,000}{100} = 15\,000.$$

Итак, при наименьшем месячном объёме в 15 000 изделий прибыль предприятия будет составлять не менее 700 000 руб.

2-й способ.

Подставим в формулу заданные значения и решим полученное уравнение.

$$\pi = 700\,000, \quad f = 800\,000, \quad v = 300, \quad p = 400,$$
$$\pi = q(p - v) - f,$$
$$700\,000 = q(400 - 300) - 800\,000,$$
$$100q - 800\,000 = 700\,000,$$
$$100q = 1\,500\,000,$$
$$q = 1\,500\,000 : 100,$$
$$q = 15\,000.$$

Ответ: 15 000.

5. Высота столба жидкости в баке с открытым краном меняется по закону $H(t) = 1{,}28 - 0{,}8t + 0{,}125t^2$, где t — время в минутах, H — высота в метрах. Через сколько минут после открытия крана вода полностью вытечет из бака?

Решение.

Если вода вытекает полностью, то очевидно, что высота жидкости в баке равна нулю. Получаем $H = 0$, составляем и решаем квадратное уравнение:

$$H(t) = 0,$$
$$1{,}28 - 0{,}8t + 0{,}125t^2 = 0,$$
$$D = (0{,}8)^2 - 4 \cdot 0{,}125 \cdot 1{,}28 = 0,$$
$$t = \frac{-(-0{,}8)}{2 \cdot 0{,}125} = 3{,}2.$$

Итак, вода полностью вытекает из бака через 3,2 секунды после открытия крана.

Ответ: 3,2.

6. Зависимость температуры нагревательного элемента прибора от времени имеет вид $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 100$ К, $a = 37{,}5$ К/мин, $b = -0{,}25$ К/мин^2. Прибор может испортиться при температуре свыше 1000 К. Определите момент времени (в минутах), когда прибор необходимо отключить, чтобы он не вышел из строя.

Решение.

Зависимость температуры нагревательного элемента от времени имеет вид квадратичной функции. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как коэффициент при t^2 отрицателен ($b = -0{,}25 < 0$). График процесса изменения температуры показан на рисунке 75.

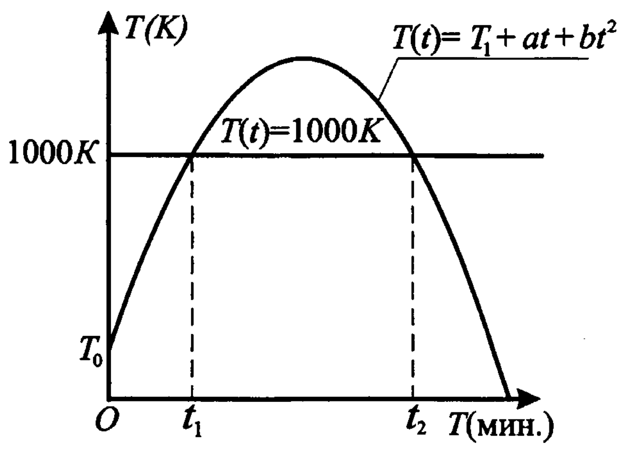


Рис. 75.

Таким образом, температура 1000 К достигается дважды: первый раз на промежутке возрастания, второй — на промежутке убывания. Но реально до второго раза температура просто не дойдёт, так как прибор уже в момент времени t_1

выйдет из строя. Значит, наша цель — определить меньший корень квадратного уравнения:

$$100 + 37{,}5t - 0{,}25t^2 = 1000,$$
$$0{,}25t^2 - 37{,}5t + 900 = 0, \qquad \Big| \times 4$$
$$t^2 - 150t + 3600 = 0,$$
$$t_1 = 30, \quad t_2 = 120.$$

Следовательно, чтобы прибор не вышел из строя, его нужно выключить не позже чем через 30 минут после начала работы.

Ответ: 30.

7. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется формулой $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 21 Ом?

Решение.

В этой задаче главное — понять, что здесь обозначают переменные, входящие в формулу. Общее сопротивление должно быть не меньше 21 Ом, в формуле общее сопротивление обозначается R, $R \geqslant 21$. Приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом и обозначается R_1, и электрообогреватель с сопротивлением R_2 подключены параллельно. Составим и решим неравенство:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R,$$

$$\frac{70R_2}{70 + R_2} \geqslant 21,$$

$$70R_2 \geqslant (70 + R_2) \cdot 21,$$

$$70R_2 \geqslant 1470 + 21R_2,$$

$$70R_2 - 21R_2 \geqslant 1470,$$

$$R_2 \geqslant 30.$$

Значит, для нормального функционирования данной электросети наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя должно быть не менее 30 Ом.

Ответ: 30.

8. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{7} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P составляет $19{,}551 \cdot 10^{22}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

Решение.

Выразим T^4 из формулы $P = \sigma S T^4$: $T^4 = \dfrac{P}{\sigma S}$.

Подставим заданные значения переменных:

$$T^4 = \frac{19{,}551 \cdot 10^{22}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10^{16}} = \frac{19{,}551}{5{,}7} \cdot 7 \cdot 10^{22+8-16} =$$

$$= 3{,}43 \cdot 7 \cdot 10^{14} = 343 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^3 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^4 \cdot 10^{12},$$

$$T = \sqrt[4]{7^4 \cdot 10^{12}} = 7 \cdot 10^3 = 7000.$$

Следовательно, температура данной звезды составляет 7000 K.

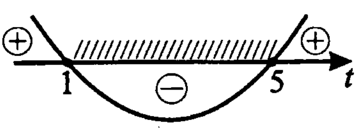
Ответ: 7000.

9. Изменение высоты полёта брошенного вертикально вверх мяча описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 30t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд мяч находился на высоте не менее 25 м?

Решение.

Составим и решим неравенство:

$$h(t) \geqslant 25,$$
$$-5t^2 + 30t \geqslant 25,$$
$$t^2 - 6t \leqslant -5,$$
$$t^2 - 6t + 5 \leqslant 0,$$
$$t_1 = 1, t_2 = 5.$$
$$t \in [1; 5],$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4.$$



Итак, на высоте не менее 25 м мяч находился в течение 4 секунд.

Ответ: 4.

10. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Решение.

1-й способ.

Обозначим длину зазора через m и свяжем её с температурой. Затем определим значение температуры, при которой зазор станет равным нулю. Расстояние от начала одного рельса до начала следующего L складывается из длины рельса и зазора между рельсами. В исходном состоянии $L = l_0 + m_0$, после нагрева $L = l(t^\circ) + m$. При $m = 0$ получим

$$l(t^\circ) = l_0 + m_0,$$

$$l_0 + m_0 = l_0(1 + \alpha t^\circ), \qquad \Big|: l_0,$$

$$1 + \frac{m_0}{l_0} = 1 + \alpha t^\circ,$$

$$\alpha t^\circ = \frac{m_0}{l_0},$$

$$t^\circ = \frac{m_0}{\alpha l_0},$$

$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = \frac{5}{20} \cdot 10^2 = 25^\circ.$$

Следовательно, при 25 °C каждый рельс удлинится на 6 мм и зазор между ними исчезнет.

Ответ: 25.

2-й способ.

Длина зазора станет равной нулю, если рельс станет длиннее на величину исходного зазора:

$$l(t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$l_0(1 + \alpha t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ) - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 + 20 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = 25.$$

Ответ: 25.

11. Парашютисты-экстремалы определяют высоту сооружений для будущих прыжков, засекая время падения небольших камней с вершин сооружений до поверхности приземления. Приближённая зависимость высоты от времени свободного падения имеет вид $h = 4{,}9t^2$. Здесь h — высота в метрах, t — время в секундах. С вершины первого сооружения камень падал 4,5 с. На сколько метров второе сооружение выше первого, если с вершины второго сооружения камень падал на 1 с дольше?

Решение.

Составим выражение для определения разности высот и вычислим эту величину.

$h_1 = 4{,}9t_1^2, \quad h_2 = 4{,}9t_2^2,$

$\Delta h = h_2 - h_1 = 4{,}9(t_2^2 - t_1^2) = 4{,}9(5{,}5^2 - 4{,}5^2) =$
$= 4{,}9(5{,}5 - 4{,}5)(5{,}5 + 4{,}5) = 49.$

То есть второе сооружение выше первого на 49 м.

В этой задаче можно было сначала вычислить высоту каждого из зданий, а потом найти разность этих высот. Вычисления были бы немного более громоздкими, но ответ, конечно же, получился бы таким же.

Ответ: 49.

12. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки, g — ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью (в м/с) надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 90 см? (g считать равным 10 м/с^2.)

Решение.

Приведём данные к требуемым единицам измерения: 90 см = 0,9 м.

Составим неравенство по условию задачи и решим его относительно скорости.

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) > 0,$$

$$\frac{v^2}{L} - g > 0,$$

$$v^2 > gL, \quad v > 0,$$

$$v > \sqrt{gL} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3.$$

Итак, скорость вращения ведёрка должна быть не менее 3 м/с.

Ответ: 3.

13. Глубоководники проектируют новый батискаф в виде сферы радиуса R. Выталкивающая сила Архимеда, действующая на батискаф, вычисляется по формуле $F_A = \rho g V = \rho g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Определите максимальный радиус батискафа (в метрах), если сила Архимеда по технологии не должна превосходить 1 130 400 Н. При расчёте примите следующие значения постоянных: $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ Н/кг, $\pi = 3{,}14$.

Решение.

$$F_A \leqslant 1\,130\,400,$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \leqslant 1\,130\,400,$$

$$R^3 \leqslant \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{\pi \rho g \cdot 4},$$

$$R^3 \leqslant \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{3{,}14 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 4} = 27,$$

$$R \leqslant 3.$$

Следовательно, радиус батискафа не должен превышать 3 м.

Ответ: 3.

14. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2{,}5$ — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{1000}$ и $b = -\frac{1}{10}$ — постоянные, t — время в минутах с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ приведите в минутах.)

Решение.

Отсутствие воды в баке означает, что $H(t) = 0$. Подставим данные параметры в левую часть формулы, составим и решим уравнение.

$$H(t) = 0,$$
$$at^2 + bt + H_0 = 0,$$
$$\frac{t^2}{1000} - \frac{t}{10} + 2{,}5 = 0,$$
$$t^2 - 100t + 2500 = 0,$$
$$(t - 50)^2 = 0,$$
$$t = 50.$$

То есть вода из бака будет вытекать в течение 50 минут.

Ответ: 50.

15. Модель камнеметательной машины выстреливает камни под определённым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{200\text{ м}}$, $b = \frac{9}{20}$ — постоянные параметры, x — горизонтальная составляющая расстояния от машины до камня, y — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены, высота которой 7 м, нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 2 метров?

Решение.

По условию $y \geqslant 7 + 2 = 9$. Подставим в левую часть формулы $ax^2 + bx \geqslant 9$ заданные значения параметров и решим неравенство.

$$-\frac{x^2}{200} + \frac{9x}{20} \geqslant 9, \qquad \Big| \times(-200)$$

$$x^2 - 90x + 1800 \leqslant 0,$$

$$(x - 30)(x - 60) \leqslant 0,$$

$$x \in [30; 60],$$

$$x_{\max} = 60.$$

То есть наибольшее расстояние от крепостной стены равно 60 м.

Ответ: 60.

16. Мотоциклист, движущийся по городу с постоянной скоростью $v_0 = 57$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 18$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города определяется выражением $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах, прошедшее с момента выезда из города. Определите наибольшее время (в минутах), в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор обеспечивает покрытие на расстоянии не далее, чем 42 км от города.

Решение.

Составим и решим неравенство.

$$57t + \frac{18t^2}{2} \leqslant 42,$$

$$9t^2 + 57t - 42 \leqslant 0, \qquad \Big|: 3$$

$$3t^2 + 19t - 14 \leqslant 0,$$

$$3\left(t+7\right)\left(t - \frac{2}{3}\right) \leqslant 0,$$

$$t \in \left[-7; \frac{2}{3}\right],$$

$$t_{\max} = \frac{2}{3}\,\text{ч} = \frac{2}{3} \cdot 60\,\text{мин} = 40\,\text{мин}.$$

Итак, мотоциклист будет находиться в зоне действия сотовой связи 40 минут.

Ответ: 40.

17. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 33$ м/с и тормозящий с постоянным ускорением $a = 6$ м/с^2, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 84 метров.

Решение.

Подставим в левую часть формулы значения данных параметров, составим и решим неравенство.

$$33t - \frac{6t^2}{2} \geqslant 84,$$

$$-3t^2 + 33t - 84 \geqslant 0, \qquad \Big|: (-3)$$

$$t^2 - 11t + 28 \leqslant 0,$$

$$(t-4)(t-7) \leqslant 0,$$
$$t \in [4; 7],$$
$$t_{\min} = 4.$$

То есть с момента начала торможения прошло не менее 4 с.

Ответ: 4.

18. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 3$ кг и радиусом $R = 14$ см и двух боковых массами по $M = 2$ кг, радиусами $R+h$. При этом момент инерции катушки (в кг $\cdot$ см^2) относительно оси вращения определяется выражением $I = \dfrac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h (в см) момент инерции катушки не превышает предельных для неё 942 кг $\cdot$ см^2?

Решение.

Подставим данные значения параметров в правую часть формулы, составим и решим неравенство.

$$\frac{(3+2\cdot 2)\cdot 14^2}{2} + 2(28h + h^2) \leqslant 942,$$
$$686 + 2(28h + h^2) \leqslant 942,$$
$$h^2 + 28h - 128 \leqslant 0,$$
$$(h+32)(h-4) \leqslant 0,$$
$$h \in [-32; 4],$$
$$h_{\max} = 4.$$

То есть, чтобы момент инерции катушки не превышал 942 кг $\cdot$ см^2, нужно, чтобы $h \leqslant 4$ см.

Ответ: 4.

19. В боковой стенке высокого цилиндрического бака с водой вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 45$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. К какому моменту времени в баке останется не более $\frac{4}{9}$ первоначального объёма? Ответ выразите в секундах.

Решение.

Составим и решим уравнение. Объём воды в баке можно выразить как $V = H \cdot S$, где H — высота воды в баке, а S — площадь его поперечного сечения. S — величина постоянная, следовательно, бак будет заполнен водой на $\frac{4}{9}$ объёма, когда высота воды в нём составит $\frac{4}{9}$ первоначальной $H(t) = \frac{4}{9}H_0$.

$$H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2 = \frac{4}{9}H_0.$$

Пусть $kt = x$,

$$\frac{g}{2}x^2 - \sqrt{2gH_0}x + \frac{5}{9}H_0 = 0,$$

$$5x^2 - 30x + 25 = 0, \qquad \Big|: 5$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5,$$
$$k = \frac{1}{200},$$
$$\frac{t}{200} = x,$$
$$t_1 = 200, \quad t_2 = 1000.$$

Итак, объём бака составит $\frac{4}{9}$ первоначального объёма через 200 с. Второй корень не подходит по смыслу задания, так как здесь рассматривается только промежуток времени до полного опустошения бака.

Ответ: 200.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить холодильник. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого холодильника, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 48 Ом?

2. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{324} \cdot 10^{17}$м^2, а излучаемая ею мощность P равна $184{,}68 \cdot 10^{18}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

3. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -4t^2 + 25t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 25 метров.

4. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При температуре 0 °C между рельсами оставили зазор в 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(°\mathrm{C}^{-1})$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Вариант 2

1. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $h(q) = q(p - m) - k$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 8000$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $m = 2000$ руб., постоянные расходы предприятия $k = 10\,500\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 1 500 000 руб. в месяц.

2. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \cos(wt + \varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда $U_0 = 4$ В, частота $w = 100°/\text{с}$, фаза $\varphi = 20°$. Датчик настроен так, что, если напряжение U в нём не ниже 2 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

3. После паводка уровень воды в колодце может повыситься. Можно определить его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$ м. До паводка время падения камушков составляло 1,2 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше, чем на 0,2 с? (Ответ выразите в м.)

4. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\phi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 60°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 20°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки ϕ достигнет 3150°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Вариант 3

1. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 280$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 30$ м/с и $v = 20$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 330 Гц?

2. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 200$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T \log_2 \dfrac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 280$ К — температура воздуха, p_1 (атм.) — начальное давление, а p_2 (атм.) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более 1 537 200 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние от линзы до лампочки d_1 может изменяться в пределах от 85 см до 105 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

4. К источнику с ЭДС $E = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, определяется формулой $U = \frac{E \cdot R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 10 В? Ответ выразите в омах.

Вариант 4

1. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 300$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракететы, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 180 м? Ответ выразите в км/с.

2. Автомобиль, масса которого равна $m = 1200$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $s = 300$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле $F = \dfrac{2ms}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 1800 Н. Ответ выразите в секундах.

3. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 4\sin\dfrac{2\pi t}{3}$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,2} = const$, где p (атм.) — давление, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 51,2 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 64 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Вариант 5

1. Небольшой мячик бросают под острым углом α к поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 14$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\text{м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 9,8 м?

2. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\phi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки ϕ достигнет 1980°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

3. Два тела, массой $m = 5$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Под каким наименьшим углом α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 60 джоулей энергии?

4. Груз массой 0,7 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 1{,}2\cos \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее 0,252 Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

Вариант 6

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -3 до 3.

Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность — втрое дороже, чем оперативность. В результате формула примет вид $R = \dfrac{2In + Op + 3Tr}{A}$.

Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 60?

2. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от -2 до 2.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вшестеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{6In + Op + 2Tr + Q}{A}$.

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

3. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 300\sqrt{2}$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать седьмой максимум на решётке с периодом, не превосходящим 4200 нм?

4. Катер должен пересечь реку шириной $L = 45$ м и скоростью течения $u = 0{,}3$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \dfrac{L}{u} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 150 с?

Вариант 7

1. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)\,\dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,9) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Гусь», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,6, а оценка экспертов равна 0,45.

2. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 24 километра? Ответ выразите в километрах.

3. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \dfrac{m}{m+M} \cdot v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 60$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 340$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,45 м/с?

4. Груз массой 0,12 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = \frac{1}{3}\cos \pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее $5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

B14. Наибольшие и наименьшие значения функций

Диагностическая работа

1. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x - 7x - 12$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.
2. Найдите наименьшее значение функции $y = 18x - 18\operatorname{tg} x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.
3. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(2x) - 4$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right]$.
4. Найдите точку минимума функции $y = (x + 24)e^{x-8}$.

Применение производной для исследования функции

Немного полезной информации

Вспомним основные правила, которые позволяют исследовать свойства функции с помощью производной.

10. Зак. № 225

Для всех этих правил есть общее условие: они выполняются для непрерывных функций. Полезно помнить, что если у функции можно посчитать производную, то функция непрерывна.

Если производная положительна (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция возрастает на этом отрезке.

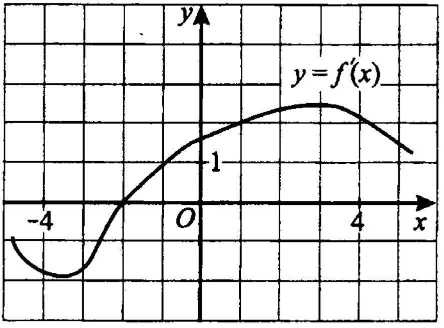


Рис. 76.

Если производная отрицательна (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках отрезка), то функция убывает на этом отрезке.

Например, по графику $f'(x)$, изображённому на рисунке 76, можно установить:

- $f(x)$ убывает на отрезке $[-4;-2]$ (здесь $f'(x) \leqslant 0$, причём равна нулю производная только в одной точке $x=-2$);
- $f(x)$ возрастает на отрезке $[-2;5]$ (здесь $f'(x) \geqslant 0$, причём равна нулю производная только в одной точке $x=-2$).

Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$ (см. рис. 77), причём в точке $x = x_0$ производная равна нулю или не существует, то точка $x = x_0$ — точка экстремума (точка минимума или точка максимума).

Рис. 77.

Приведём пример нахождения точек максимума и минимума по графику производной. На рисунке 78 изображены два графика производных разных функций. На обоих графиках $x = a$ — точка максимума функции $f(x)$; $x = b$ — точка минимума функции $f(x)$.

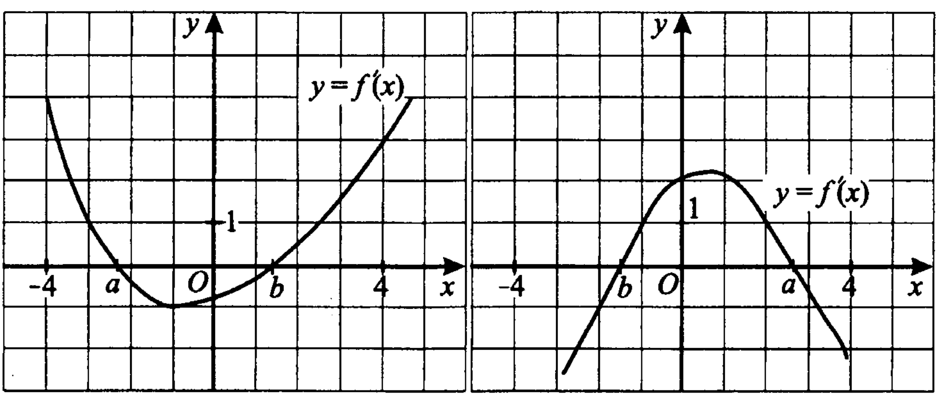


Рис. 78.

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает наибольшее и наименьшее значения либо на концах отрезка, либо в тех точках, где производная равна нулю (или не существует). Поэтому один из способов отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке — посчитать её значения на концах отрезка и в точках, где производная равна нулю (или не существует), и выбрать из них наибольшее или наименьшее значение.

Второй способ отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке — исследовать функцию на монотонность (другими словами, на возрастание-убывание), построить эскиз и посчитать значения функции в нужных точках.

Точки максимума могут как совпадать, так и не совпадать с точками, где функция принимает наибольшее значение. То же можно сказать про точки минимума и про точки, где функция принимает наименьшее значение.

Давайте разберём на примерах, что это значит.

Задачи с решениями

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+7)e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$.

Решение.

1-й способ.

1. Найдём значения функции на концах отрезка:

   $y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27}$, так как $e \approx 2{,}7$;

   $y(-7) = (-7+7)e^{-7+8} = 0.$

2. Найдём производную:

   $y' = \left((x+7)e^{x+8}\right)' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)(e^{x+8})' =$
   $= 1e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}.$

3. Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю:
   $(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8=0; \quad x=-8.$

4. Это значение $x=-8$ принадлежит промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

5. Найдём значение функции в точке, где производная равна нулю:
   $y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$

6. Выберем из пунктов 1 и 5 наименьшее значение функции. Видим, что из чисел $-\frac{20}{27}$; -1; 0 наименьшим является -1.

Ответ: -1.

2-й способ.

1. Найдём производную: $y' = \left((x+7)e^{x+8}\right)' = (x+8)e^{x+8}$.

2. Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю:
   $(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8=0; \quad x=-8.$

3. Проверим, принадлежат ли эти значения x промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

4. Нарисуем числовую ось и нанесём на неё нули ($x=-8$) и знаки производной, которые определяются с помощью пробной точки (см. рис. 79).

$y'(-9) = (-9+8)e^{-9+8} = -1e^{-1} < 0;$
$y'(-7) = (-7+8)e^{-7+8} = 1e > 0.$

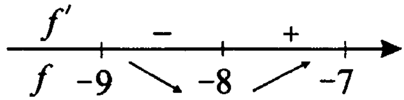


Рис. 79.

5. Чертим эскиз графика функции (см. рис. 80).

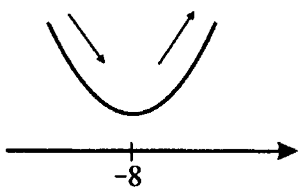


Рис. 80.

По рисунку видно, что наименьшее значение функция принимает в точке $x = -8$.

6. Вычисляем значение функции в точке $x = -8$:
$y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$

Ответ: -1.

2. Найдите наименьшее значение функции

$y = 3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. Найдём производную:
$y'(x) = (3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15)' = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} + 0 =$
$= 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}.$

2. Определим знаки производной $y'(x) = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$. Это выражение неотрицательно при всех значениях x, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$ (всегда выполняется $3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} \geqslant 3\sqrt{2}\cdot(-1) + 3\sqrt{2} = 0$). Следовательно, $y'(x) \geqslant 0$, и функция возрастает при всех значениях x. Наименьшее значение возрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка (при наименьшем возможном значении аргумента $x = 0$).

3. Вычисляем значение функции в точке $x = 0$.
$y = 3\sqrt{2}\sin 0 + 3\sqrt{2}\cdot 0 - 15 = -15$.

Ответ: -15.

3. Найдите наибольшее значение функции

$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

1. Найдём значения функции на концах отрезка:
$y(0) = 4\sqrt{2}\cos 0 + 4\cdot 0 - \pi - 1 = 4\sqrt{2} - \pi - 1 \approx$
$\approx 6 - 3{,}1 - 1 = 1{,}9$;
$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2} + 4\cdot\frac{\pi}{2} - \pi - 1 = 0 + \pi - 1 \approx 3{,}1 - 1 = 2{,}1$.

2. Найдём производную:
$y'(x) = (4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi - 1)' = -4\sqrt{2}\sin x + 4$.

3. Найдём значения на заданном промежутке, при которых производная равна нулю: $-4\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$;

$-4\sqrt{2}\sin x = -4$; $\sqrt{2}\sin x = 1$; $\sin x = 1/\sqrt{2}$.

Так как x принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, нам подходит $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Найдём значение функции при $x = \frac{\pi}{4}$.

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + 4\cdot\frac{\pi}{4} - \pi - 1 = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - \pi - 1 =$$
$$= 4 - 1 = 3.$$

5. Выберем из пунктов 1 и 4 наибольшее значение функции. Видим, что наибольшим является 3.

Ответ: 3.

4. Найдите наибольшее значение функции

$y = 16x - 16\operatorname{tg} x + 4\pi - 56$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

1. Найдём производную:

$$y' = (16x - 16\operatorname{tg} x + 4\pi - 56)' = 16 - \frac{16}{\cos^2 x} - 0 =$$
$$= \frac{16\cos^2 x - 16}{\cos^2 x} = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$

2. Определим знаки производной:

$$y'(x) = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \leqslant 0.$$

Это выражение неположительно, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$. Следовательно, $y'(x) \leqslant 0$, и функция убывает при всех допустимых значениях x. Наибольшее значение убывающая функция принимает на левом конце заданного промежутка, то есть при наименьшем возможном значении аргумента $x = -\frac{\pi}{4}$.

Вычисляем значение функции в точке $x = -\frac{\pi}{4}$:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 16\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\pi - 56 =$$
$$= -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$$

Ответ: -40.

5. Найдите наибольшее значение функции $y = 20x - \ln(x+4)^{20}$ на отрезке $[-3{,}5; 0]$.

Решение.

1. Найдём производную:

$$y' = (20x - \ln|x+4|^{20})' = 20 - (20\ln|x+4|)' =$$
$$= \begin{cases} 20 - \dfrac{20}{x+4}, & x > -4, \\ 20 + \dfrac{20}{x+4}, & x < -4; \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{20x + 80 - 20}{x+4}, & x > -4, \\ \dfrac{20x + 80 + 20}{x+4}, & x < -4; \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{20x + 60}{x+4}, & x > -4, \\ \dfrac{20x + 100}{x+4}, & x < -4. \end{cases}$$

Но нас интересует только промежуток $[-3{,}5; 0]$.

2. Определим нули и знаки производной на заданном промежутке $x > -4$:
$y'(x) = 0; \quad 20x + 60 = 0; \quad x = -\frac{60}{20}; \quad x = -3.$

3. Отмечаем на числовой оси нули функции ($x = -3$) и точки, где производная (или функция) не существует (в данном случае по определению логарифма $x \neq -4$).

4. Методом «пробной точки» определяем знак производной на каждом промежутке. Для этого считаем значение производной в любой выбранной нами точке каждого промежутка (см. рис. 81).
$$y'(-3{,}5) = \frac{20 \cdot (-3{,}5) + 60}{-3{,}5 + 4} < 0;$$
$$y'(5) = \frac{20 \cdot 5 + 60}{5 + 4} > 0.$$

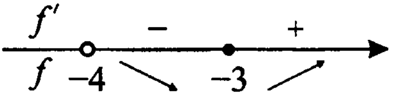


Рис. 81.

5. Отмечаем границы заданного в условии промежутка и смотрим, в какой точке должно быть наименьшее значение функции. В данной задаче наименьшее значение на промежутке $[-3{,}5; 0]$ функция примет в точке $x = -3$ (см. рис. 82).

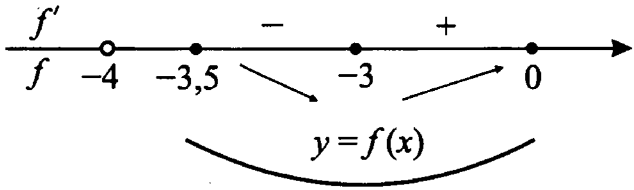


Рис. 82.

6. Вычисляем значение функции в точке $x = -3$:
$y(-3) = 20 \cdot (-3) - \ln(-3+4)^{20} = -60 - \ln 1 = -60.$

Ответ: -60.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции
$y = 16\cos x + 27x - 6$ на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{28x}{\pi} + 7\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; 0\right]$.

3. Найдите наибольшее значение функции
$y = 5\ln(x+5) - 5x + 11$ на отрезке $[-4{,}8; 0]$.

4. Найдите точку максимума функции $y = (31 - x)e^{x+31}$.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее значение функции
$y = 18x - 17\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \ln(x+12)^8$ на отрезке $[-11{,}5; 0]$.

3. Найдите наибольшее значение функции

$y = x^2 - 15x + 13\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (35 - x)e^{35-x}$.

Вариант 3

1. Найдите наибольшее значение функции

$y = 15x - 14\sin x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции

$y = 15x - 15\ln(x + 11) + 4$ на отрезке $[-10{,}5; 8]$.

3. Найдите наибольшее значение функции

$y = 80x - 80\operatorname{tg} x + 20\pi$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Найдите точку максимума функции $y = (23 + x)e^{23-x}$.

Вариант 4

1. Найдите наибольшее значение функции

$y = \frac{51x}{\pi} + 17\sin x + 15$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

2. Найдите наименьшее значение функции

$y = -8x + 8\operatorname{tg} x - 14$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции

$y = 5x^2 - 5x - 5\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

4. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - x - 5)e^{x+8}$.

Вариант 5

1. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 7x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 10]$.

2. Найдите наименьшее значение функции
$y = (x+6)^2(x+1) - 23$ на отрезке $[-7; -4]$.

3. Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 + x + 11) + 3$.

4. Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{x}{x^2 + 81}$.

Вариант 6

1. Найдите наименьшее значение функции $e^{2x} - 8e^{x} + 1$ на отрезке $[1; 3]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $6x^5 - 90x^3 - 5$ на отрезке $[-5; 1]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{-9-12x-3x^2}$.

4. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt{1 - 6x - x^2}$.

Тренировочные варианты

Вариант 1

1. Решите уравнение $x^2 - 16x + 63 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

2. Найдите значение выражения $6^{\sqrt{6}+1} \cdot 6^{2-\sqrt{6}}$.

3. На рисунке 83 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

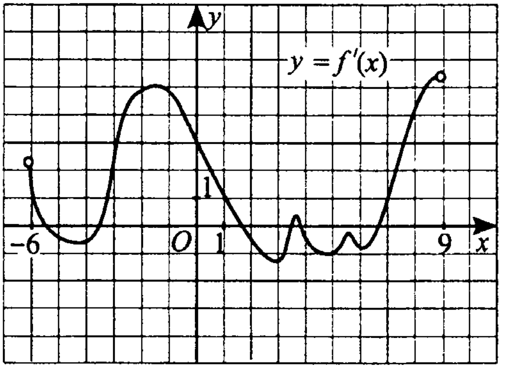


Рис. 83.

4. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой

$h(t) = 20t - 5t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 7,2 метров.

5. Найдите точку максимума функции
$y = (5x^2 - 12x + 12)e^{x+12}$.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{-2 - 11x} = 3$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{6}\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}$.

3. На рисунке 84 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

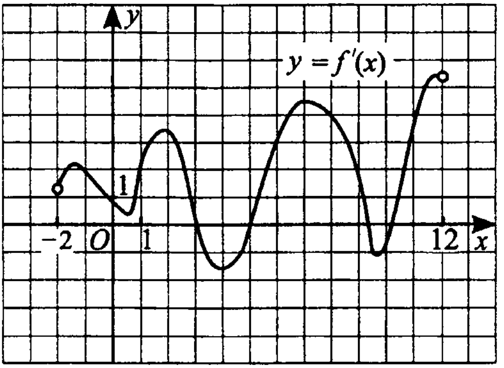


Рис. 84.

4. В розетку электросети подключён прибор с сопротивлением 170 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление R задаётся формулой $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 25,5 Ом.

5. Найдите точку минимума функции $y = (6x^2 - 3x + 3)e^{8-x}$.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5x+3}{7}} = 3$.

2. Найдите значение выражения $16\log_{625}\sqrt{25}$.

3. На рисунке 85 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 5$ или совпадает с ней.

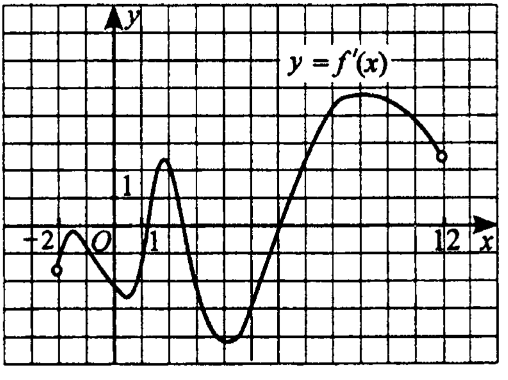


Рис. 85.

4. Коэффициент полезного действия тепловой машины Карно определяется формулой $\eta = \dfrac{T_H - T_X}{T_H}$, где T_H — температура нагревателя, а $T_X = 200$ К — температура холодильника. При каком наименьшем значении температуры нагревателя (в К) КПД этого двигателя будет составлять не менее 0,6?

5. Найдите наименьшее значение функции

$y = 2x^2 + x - 5\ln x + 7$ на отрезке $\left[\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{5x-8}} = \frac{1}{4}$.

2. Найдите значение выражения $2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$.

3. На рисунке 86 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$.

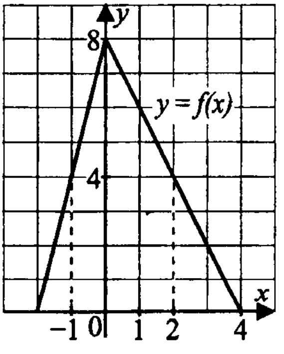


Рис. 86.

4. Зависимость температуры T (в градусах Кельвина) от времени t (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T = a + bt + ct^2$, где $a = 310$ К, $b = 30$ К/мин, $c = -0{,}1$ К/мин^2. Известно, что при температуре нагревателя свыше 2200 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы нужно отключать прибор.

5. Найдите точку максимума функции $y = (x-5)^2 e^{x+8}$.

Вариант 5

1. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{2+x} = 2^{-x}$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{64\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a}}$ при $a > 0$.

3. На рисунке 87 изображён график функции $y = F(x)$, которая является одной из первообразных функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определённый интеграл $\int\limits_1^4 f(x)dx$.

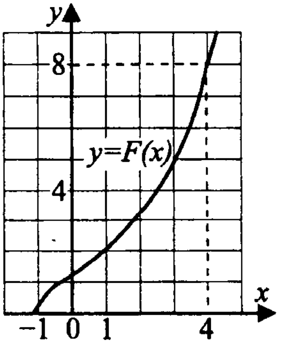


Рис. 87.

4. В боковой стенке бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота h столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 75 - 20t + t^2$, где t — время в секундах. Через сколько секунд вода вытечет из бака?

5. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{5x}{\pi} + 5\operatorname{tg} x - 4$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Вариант 6

1. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2+x} = 32$.

2. Найдите $\dfrac{5\cos 2\alpha}{2\sin 4\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -0{,}4$.

3. На рисунке 88 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

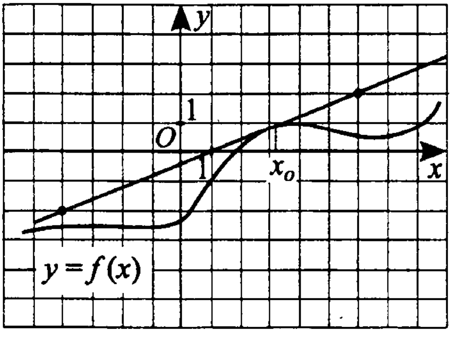


Рис. 88.

4. Зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (руб.) для данного предприятия задаётся формулой $q = 270\,000 - 15\,000p$. Найдите минимальный уровень цены p, при котором значение выручки предприятия $s = p \cdot q$ за месяц составит не менее 1 200 000 рублей.

5. Найдите точку максимума функции $y = (x+3)^2 e^{2-x}$.

Вариант 7

1. Найдите корень уравнения $7^{x-8} = \frac{1}{49}$.

2. Найдите значение выражения $(7a^3 \cdot b^6 + (ab^2)^3) : (2a^3b^4)$ при $b = -2$.

3. Прямая $y = 56$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 21x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

4. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 65$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 52 м? Ответ выразите в км/с.

5. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+11) + 4$.

Вариант 8

1. Найдите корень уравнения $5^{6-x} = 125$.

2. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.

3. На рисунке 89 изображён график функции. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой -3. Найдите $f'(-3)$.

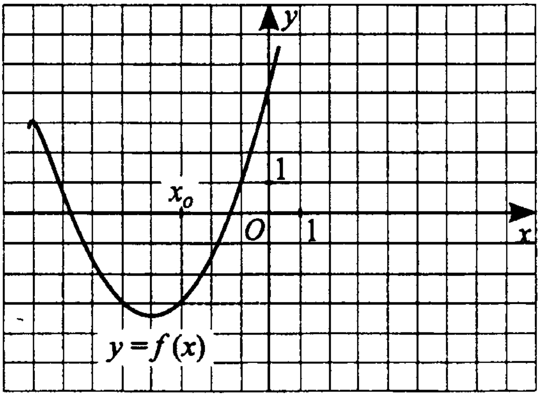


Рис. 89.

4. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к направлению движения. Мощность (в киловаттах) трактора равна $N = Fv\cos\alpha$, скорость $v = 4$ м/с. При каком максимальном угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 160 кВт?

5. Найдите точку минимума функции $y = (x+1)^2 e^{11-x}$.

Вариант 9

1. Найдите корень уравнения $3^{10-3x} = 81$.

2. Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{2a+3b}{4a+b} = \frac{2}{3}$.

3. На рисунке 90 изображён график функции $y = F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 те, в которых функция $f(x)$ отрицательна. В ответе запишите количество найденных точек.

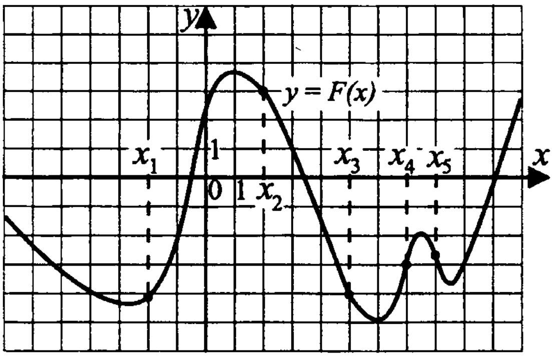


Рис. 90.

4. Автомобиль, масса которого равна $m = 3300$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $s = 400$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле $F = \frac{2ms}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он может пройти указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 6600 Н. Ответ выразите в секундах.

5. Найдите точку максимума функции $y = 3\ln(x+11) - 15x + 4$.

Вариант 10

1. Найдите корень уравнения $\log_5(21 - x) = \log_5 28$.

2. Найдите значение выражения
$\sqrt{a^2 - 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 8a + 16}$ при $3 \leqslant a \leqslant 4$.

3. На рисунке 91 изображён график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

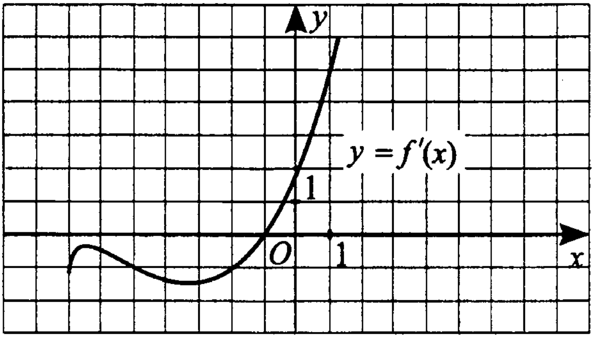


Рис. 91.

4. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,5} = const$, где p (атм.) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 68,4 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 27 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

5. Найдите наименьшее значение функции

$y = \dfrac{24x}{\pi} - 5\sin x - 35$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Вариант 11

1. Найдите корень уравнения $\log_5(21 + x) = \log_5 6$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{3}}$.

3. На рисунке 92 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

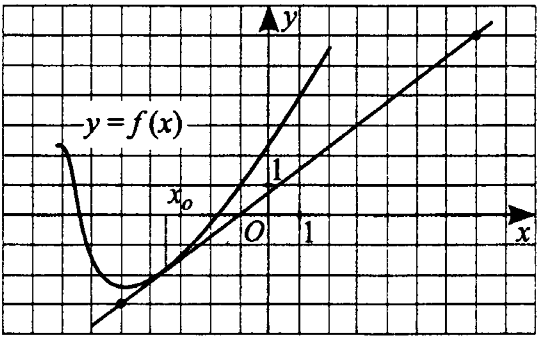


Рис. 92.

4. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 16$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считать $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 12,8 м?

5. Найдите точку максимума функции $y = (x+4)^2 e^{x-4}$.

Вариант 12

1. Найдите корень уравнения $\log_2(37 + x) = 6$.

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{6}{7}} - \sqrt{6\frac{3}{7}}\right) : \sqrt{\frac{5}{7}}$.

3. Прямая $y = 6x - 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 - 2x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 20$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 320$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более 117 120 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

5. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 7x - 7)e^{7-x}$.

Ответы

Ответы к диагностическим работам

B5. Решение уравнений

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
−242	−7	−5,5	2	3	1,5	−10,25	6

B7. Вычисления и преобразования

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
15,6	81	25	0,6	−0,5	264	8,5	0,95

B8. Производная и исследование функций

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
1	−7	6	4	1	0,5	9

B12. Прикладные задачи

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
8	5	20	450

B14. Наибольшие и наименьшие значения функций

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
−6	4	−3	−25

Ответы к вариантам для самостоятельного решения

В5. Решение уравнений

	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	18	5	8,5	7	−2	−5,5	−3,8	−2
Вар. 2	−42	2,625	3,5	9	5	−2	−2,5	3
Вар. 3	−507	1	−2	−2	8	−7,6	3	−2
Вар. 4	118	9	1	2	−5	−5	1,8	6
Вар. 5	−1,8	2	0	−8	2,5	−8	2	−0,5

В7. Вычисления и преобразования

	1	2	3	4	5	6	7	8
Вар. 1	16,9	0,25	12	0,16	45	3	−18	2,5
Вар. 2	243	0,7	28	10	7	25	4	1,75
Вар. 3	2,5	3	144	1	3	2	8	−3,5
Вар. 4	539	−1	2	440	9	8	−8	0,5
Вар. 5	339	1	−11	8	9,5	0,875	1	1

B8. Производная и исследование функций

	1	2	3	4	5	6	7
Вар. 1	0	5	5	1	2	0,75	8,8125
Вар. 2	27	3	1	8	–10	1	11,5
Вар. 3	–4	4	–6	2	3	2	–1
Вар. 4	–5,5	5	–3	–14	24	2	4
Вар. 5	1	6	5	7	4	–0,5	6
Вар. 6	4	2	–5	8	18	18	27
Вар. 7	4	6	1	6	21	6	8

B12. Прикладные задачи

	1	2	3	4
Вар. 1	80	1800	3,75	50
Вар. 2	2000	40	2,2	15
Вар. 3	300	8,8	90	5
Вар. 4	240 000	20	0,25	1,6
Вар. 5	15	18	120	0,5
Вар. 6	0,3	10	45	45
Вар. 7	0,5875	0,045	60	0,33

B14. Наибольшие и наименьшие значения функций

	1	2	3	4
Вар. 1	10	2	31	30
Вар. 2	2	–88	–3	36
Вар. 3	8	–146	80	–22
Вар. 4	15	–14	11	2
Вар. 5	302	–35	–0,5	9
Вар. 6	–15	967	8	–3

Ответы к заданиям тренировочных тестов

	1	2	3	4	5
Вар. 1	7	216	5	3,2	0
Вар. 2	–1	1,5	2	30	0,5
Вар. 3	12	4	4	500	10
Вар. 4	8	–1	18	90	3
Вар. 5	–4	8	6	5	2,25
Вар. 6	–4,5	–3,125	0,4	8	–1
Вар. 7	6	16	10,5	180 000	–10,5
Вар. 8	3	–4	1	60	–1
Вар. 9	2	3,5	3	20	–10,8
Вар. 10	–7	1	–1	7,6	–36,5
Вар. 11	–15	–4	0,75	15	–6
Вар. 12	27	–1	2	4,8	9

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна
Дремов Александр Петрович
Иванов Сергей Олегович

МАТЕМАТИКА.
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ-2014.
ЧАСТЬ 2: АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА.
Пособие для «чайников»

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *С. Верескун*

Подписано в печать с оригинал-макета 18.09.2013.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,3.
Тираж 10000 экз. Заказ № **225.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.