АБИТУРИЕНТ

МАТЕМАТИКА

экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ

- *краткая теория*
- *методические комментарии*
- *образцы решения задач*
- *задания для самостоятельной работы*

Абитуриент

А.Н. Манова

Математика

Экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ

- *Краткая теория*
- *Методические комментарии*
- *Образцы решения задач*
- *Задания для самостоятельной работы*

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2012

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
М23

Манова А.Н.

М32 Математика. Экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ : учебное пособие / А.Н. Манова. — Ростов н/Д : Феникс, 2012. — 541, [1] с. — (Абитуриент)

ISBN 978-5-222-18863-7

Учебно-методическое пособие адресовано выпускникам средних школ (11 класс) для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике. В нем представлены краткий теоретический материал, методические рекомендации с учетом современных требований, образцы решения типовых тестовых заданий, задания для самоподготовки, учебно-тренировочные тесты.

Пособие подготовлено в соответствии с кодификаторами элементов содержания и требований для составления контрольных измерительных материалов для проведения в 2012 году единого государственного экзамена.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-18863-7 ББК 22.1я72

Предисловие

Настоящее учебное пособие представляет собой сборник заданий для подготовки к единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике для учащихся 11-х классов.

Пособие содержит краткий теоретический материал по алгебре, тригонометрии, геометрии, началам математического анализа, информацию для запоминания, методические рекомендации к решению задач по всем темам, включенным в ЕГЭ, образцы решения типовых тестовых заданий по математике и задания для самостоятельной работы, соответствующие уровням сложности письменных заданий от В1 до С6, 11 вариантов учебно-тренировочных тестов, а также задания повышенной трудности для учащихся, поступающих на факультеты с углубленным изучением математики (отмечены*). С 2012 года в ЕГЭ включены вопросы по темам «Элементы комбинаторики» и «Элементы теории вероятностей».

Назначение пособия – предоставить учащимся 11-х классов информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2002–2011 годов по математике, о степени трудности заданий.

В пособии даны ответы к нерешенным в сборнике заданиям.

Участники ЕГЭ должны быть готовы к любой неожиданности, задачи на экзамене всегда отличаются от анонсированных в демонстрационном варианте. Поэтому мы не стремимся натаскивать учащихся на решение однотипных задач. Цель пособия – научить выпускников ориентироваться и в незнакомой математической ситуации, опираясь на основы теоретических знаний.

Если учащийся запомнит всю информацию в начале каждой главы, научится ее применять, обратит внимание на предложенные рекомендации, ему будут посильны любые задания экзаменационной работы.

Желаем успеха на экзамене.

Условные обозначения

N — множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Q — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел;

R^+ — множество положительных чисел;

$\Rightarrow$ — следует;

$\Leftrightarrow$ — равносильно, эквивалентно;

$\forall$ — для всех, для любого, для каждого;

$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$;

$E(f)$ — множество значений функции $y = f(x)$ (область изменения, область значений функции);

const — постоянная величина;

$\in$ — принадлежит. Например, $x \in Z$ — x принадлежит множеству целых чисел, т. е. x является целым числом; $0 \notin N$ — 0 не является натуральным числом;

$\varnothing$ — пустое множество, т.е. множество, которое не имеет элементов;

∞ — бесконечность;

$(a; b)$ — интервал (промежуток), концы промежутка исключаются;

$[a; b]$ — закрытый промежуток, концы которого принадлежат множеству;

r — радиус окружности, вписанной в многоугольник;

R — радиус окружности, описанной около многоугольника;

C — длина окружности;

S — площадь геометрической фигуры;

V — объем геометрического тела;

$\sim$ — знак подобия геометрических фигур;

v — скорость;

$\sqrt{}$ — радикал (корень).

Глава 1
Арифметика

§1. Арифметические действия с дробями

Задания части 1 (B1-B12) на ЕГЭ не проверяются, засчитывается только результат.

Запомните!

Участник ЕГЭ, не владеющий правилами действий с дробными и целыми числами, не сможет получить правильный результат ни в одном из предложенных на экзамене заданий. На экзамене запрещается использование калькулятора.

Выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b – числа, одночлены или многочлены, называется дробью.

a – числитель дроби, b – знаменатель дроби.

Дробь существует (имеет смысл), если знаменатель не равен нулю (на ноль делить нельзя).

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\boxed{\frac{a}{b} = 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b \neq 0. \end{cases}}$$

Дробь равна единице, если числитель равен знаменателю (числитель и знаменатель не равны нулю).

$$\boxed{\frac{a}{b} = 1, \quad \text{если} \quad a = b \neq 0.}$$

$\frac{0}{0}$ — неопределенность.

Основное свойство дроби

Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}} \; \boxed{\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}}, \; m \neq 0, \; b \neq 0.$$

Сократить дробь – это значит числитель и знаменатель разделить на одно и то же число (или выражение), не равное нулю, если числитель и знаменатель имеют одинаковые делители.

Например:

1) $\frac{20}{30} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3}$.

2) $\frac{km}{kn} = \frac{m}{n}, k \neq 0, n \neq 0$.

Запомните!

Сократить можно только члены умножения. Слагаемые не сокращаются.

Например: дробь $\frac{a \pm b}{a}$ сократить нельзя, можно почленно разделить $(a \pm b)$ на a, $a \neq 0$:

Запомните!

Если $a < b$, $\frac{a}{b}$ – правильная дробь ($a \in N$, $b \in N$),

$\frac{a}{b} < 1$ – правильная дробь меньше единицы.

Если $m > n$, $\frac{m}{n}$ – неправильная дробь ($m \in N$, $n \in N$), $\frac{m}{n} > 1$ – неправильная дробь больше единицы.

Простую дробь можно обратить в десятичную, если ее числитель разделить на знаменатель.

Например: $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $2\frac{7}{20} = 2{,}35$; $\frac{1}{3} \approx 0{,}333...$ (бесконечная периодическая дробь).

Десятичную дробь можно обратить в простую.

Например: $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $3{,}55 = 3\frac{55}{100} = 3\frac{11}{20}$.

Запомните!

Если среди делителей знаменателя простой дроби есть только цифры 2 и 5, то эта дробь обращается в конечную десятичную дробь.

Например: $\frac{1}{20} = 0{,}05$.

Если среди делителей знаменателя простой дроби кроме цифр 2 и 5 есть и другие числа, то эта дробь обращается в бесконечную десятичную дробь.

Например: $\frac{1}{6} \approx 0{,}1666... \approx 0{,}1(6)$.

Запомните!

Десятичная дробь увеличивается в 10, 100, 1000 и т. д. раз, если запятую перенести вправо через столько знаков, сколько нулей содержит множитель.

Например: $18{,}7695 \cdot 100 = 1876{,}95$.

Десятичная дробь уменьшится в 10, 100, 1000 и т. д. раз, если запятую перенести влево через столько знаков, сколько нулей содержит делитель.

Например: $847{,}8 : 1000 = 0{,}8478$.

Смешанное число

$4+\frac{2}{5}=4\frac{2}{5}=4{,}4$ — это *смешанное число* (т. е. сумма целого числа и дроби).

Смешанное число можно обратить в неправильную дробь.

Например: $8\frac{3}{4}=\frac{8\cdot 4+3}{4}=\frac{35}{4}$.

Неправильную дробь можно обратить в смешанное число, если числитель разделить на знаменатель (при этом получится сумма целого числа и дроби).

Например: $\frac{22}{7}=3\frac{1}{7}$.

1. Обратите смешанные числа в неправильные дроби:

$3\frac{5}{9}$; $2\frac{7}{8}$; $4\frac{1}{2}$; $5\frac{3}{4}$; $2\frac{8}{9}$.

2. Обратите неправильные дроби в смешанные числа:

$\frac{40}{9}$; $\frac{37}{5}$; $\frac{21}{4}$; $\frac{48}{7}$; $\frac{24}{5}$.

Запомните!

Натуральные числа, которые делятся **только** на единицу и на себя, называются простыми.

Например: 13; 5; 11 и т. д.

Натуральные числа, которые делятся на единицу, на себя и на другие числа, называются составными.

Например: 4; 20; 36 и т. д.

Наименьшее общее кратное нескольких чисел (НОК) — наименьшее число, которое делится (без остатка) на все данные числа.

Например:

1) НОК чисел 6 и 3 — это число 6;

2) НОК чисел 4 и 6 — это число 12.

Сложение, вычитание, умножение и деление дробей

При сложении и вычитании дробей необходимо найти НОЗ — наименьший общий знаменатель (наименьшее число, которое делится на все знаменатели данных дробей).

Для нахождения НОЗ нескольких дробей все знаменатели нужно разложить на простые множители, из первого знаменателя выписать все множители, из других знаменателей — только те, которые еще не писали. Произведение этих чисел и будет наименьшим общим знаменателем. (Это правило справедливо и для алгебраических дробей.)

$$\frac{a^{(n}}{mk}+\frac{b^{(m}}{nk}=\frac{an+bm}{m\cdot n\cdot k}.$$

Если складываются (или вычитаются) смешанные числа, то отдельно складывают (вычитают) целые числа, отдельно дробные, затем находят сумму результатов.

Например:

1) $8\frac{3}{7}+2\frac{5}{14}=10+\frac{6+5}{14}=10\frac{11}{14}.$

2) $5\frac{2}{9}-2\frac{2}{3}=3\frac{2-6}{9}=2\frac{9+2-6}{9}=2\frac{5}{9}$, так как $3=2+\frac{9}{9}$.

3. Выполните действия:

$8-\frac{3}{11}$;	$20\frac{1}{3}-13\frac{5}{6}$;	$1-\frac{5}{13}$;
$9-2{,}4$;	$1+0{,}98$;	$8\frac{5}{7}+2\frac{1}{14}$;
$16-8{,}05$;	$8\frac{1}{9}-2$;	$5-1\frac{2}{7}$;
$3{,}2+1\frac{1}{3}$;	$8\frac{1}{3}+2\frac{5}{6}$;	$9-2\frac{5}{9}$;
$5{,}06-2{,}6$;	$8\frac{2}{9}-2$;	$3{,}2-1{,}8$.

Запомните!

Умножение и деление дробей выполняется по формулам:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}} \quad \boxed{\frac{m}{n}:\frac{c}{d}=\frac{m\cdot d}{n\cdot c}}$$

Если числители и знаменатели полученных дробей имеют общие множители, необходимо **сократить**, затем выполнять умножение.

4. Выполните действия:

$0{,}8:100$; $3:\frac{3}{4}$; $3{,}542:0{,}7$; $0{,}9\cdot 100$; $1:4\frac{1}{3}$;

$25:100;\quad 18\frac{6}{7}:3;\quad 2{,}6:100;\quad 1\frac{2}{3}:1\frac{1}{9};\quad 1\frac{1}{4}\cdot 2\frac{2}{5};$

$\frac{8}{11}:2;\quad 2\frac{1}{2}:5;\quad \frac{3}{5}:0;\quad 0:\frac{2}{7};\quad 3\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}.$

Комментарий. Все перечисленные свойства дробей и правила действий с дробями справедливы и для алгебраических дробей (у которых числители и знаменатели не числа, а алгебраические выражения).

Запомните!

Порядок действий.

Сначала выполняются действия в скобках, затем умножение и деление (слева направо), затем сложение и вычитание (слева направо):

$$a\overset{\mathrm{V}}{-}b\overset{\mathrm{III}}{:}\left(m\overset{\mathrm{II}}{-}n\overset{\mathrm{I}}{:}c\right)\overset{\mathrm{VI}}{+}d\overset{\mathrm{IV}}{\cdot}k.$$

Если имеются возведение в степень и извлечение корня, то эти действия выполняются первыми (до умножения и деления).

5. Выполните действия:

1) $3{,}075:1{,}5-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+3{,}26\right);$

2) $12{,}5+2{,}2\cdot\left(17{,}5-8{,}25\cdot\frac{10}{11}\right);$

3) $1{,}75-\frac{7}{9}\cdot\left(0{,}85+\frac{4}{35}\right);$

4) $0{,}08\cdot 10+\frac{8}{13}\cdot 26.$

Вычислите (6; 7):

6. 1) $0{,}8:100+0{,}26\cdot 10;$

3) $4{,}5-1\frac{5}{11}+4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3};$

2) $\left(8-\frac{1}{3}\right)\cdot 2-\left(6-1\frac{5}{9}\right):2;$ 4) $0{,}06\cdot 10+\frac{3}{17}\cdot 34.$

7.1) $\left(8-2\frac{3}{7}\right):6\frac{1}{2}+2\cdot\left(11\frac{1}{7}-2\frac{9}{14}\right);$

2) $5\frac{1}{3}:1\frac{1}{7}-1\frac{1}{2}:0{,}9;$ 3) $\left(11-\frac{1}{5}\right):2-\left(3-1\frac{3}{7}\right)\cdot 2;$

4) $7{,}5\cdot\left(6\frac{2}{5}-5{,}9\right)+10{,}8;$ 5) $19{,}6\cdot 2\frac{1}{2}-\left(2{,}625-1\frac{5}{12}\right):\frac{1}{8}.$

§2. Пропорция

Пропорция – это равенство двух отношений:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d},}$$

где a, b, c, d – числа или выражения, не равные нулю; a и d – крайние члены пропорции; b и c – средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов равно произведению средних членов пропорции.

$$\boxed{ad = bc}$$

Запомните!

Основное свойство пропорции:

$\boxed{a : b = c : d}$ — $\boxed{a \cdot d = b \cdot c}$

Неизвестный член пропорции находят по формулам

$\boxed{a : x = c : d}$ — $\boxed{x = \dfrac{a \cdot d}{c}}$

$\boxed{x : b = c : d}$ — $\boxed{x = \dfrac{b \cdot c}{d}}$

Чтобы найти неизвестный средний член пропорции, нужно произведение крайних членов разделить на известный средний член пропорции.

Чтобы найти неизвестный крайний член пропорции, нужно произведение средних членов разделить на известный крайний член пропорции.

Производные пропорции

Если $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d},}$ то справедливы и следующие пропорции, полученные из данной.

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}; \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \quad \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}; \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d};$$

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Производные пропорции очень часто применяют в геометрических задачах при вычислении элементов подобных фигур, а также при нахождении физических величин.

Найдите неизвестный член пропорции (8–10):

8. 1) $3:1\frac{1}{2}=x:0{,}6;$

2) $0{,}6:x=\frac{1}{2}:4;$

3) $3\frac{1}{3}:x=2\frac{1}{3}:3{,}9;$

4) $0{,}8:\frac{1}{4}=x:\frac{1}{16};$

5) $7\frac{1}{3}=\frac{2}{9}x;$

6) $\frac{7}{9}x=11\frac{2}{3}.$

9. 1) $1{,}4x : 8{,}1 = 4{,}5 : 2{,}7;$

2) $1{,}7x : 8{,}5 = 8{,}4 : 10{,}5;$

3) $\frac{2x+3}{8-x}=2;$

4) $\frac{4x-5}{2x-3}=2{,}5.$

10. 1) $3=\frac{2x-1}{4x+5};$

2) $\frac{5x-6}{2x+1}=0;$

3) $1{,}5:3\frac{1}{3}x=\frac{3}{14}:4\frac{2}{7};$

4) $\frac{4x-3}{2x+5}=1.$

Решите уравнения, используя основное свойство пропорции (11–13):

11. 1) $\frac{y}{5}=\frac{y+12}{9};$

2) $\frac{x+2}{3}=\frac{4}{5};$

3) $8=\frac{y-3}{4};$

4) $3=\frac{2m-4}{7};$

5) $\frac{t-16}{5}=\frac{9-t}{2};$

6) $\frac{m-1}{7}=\frac{2m+1}{15}.$

12. 1) $\frac{2t-7}{3}=5;$

2) $\frac{5+2v}{3}=\frac{2v-4}{2};$

3) $\frac{1+2a}{4}=3;$

4) $\frac{3}{2a-1}=2.$

13. 1) $S = vt$, найдите v.

2) $x = ab$, найдите a.

3) $t=\frac{a+b}{a-b}$, найдите b.

4) $m = 3a^2x$, найдите x.

14. 1) $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, найдите v_0. 3) $a = \frac{v_t - v_0}{t}$, найдите t.

2) $S = \frac{at^2}{2}$, найдите a. 4) $a = \frac{F}{m}$, найдите m.

§3. Проценты

Процент — сотая часть числа. 1% — 0,01.

Процент можно обратить в дробь, разделив его на 100%. Например: 20% — 0,2; 7% — 0,07.

Типы задач на проценты

I. Найти проценты известного числа.

а) Процент обратить в дробь (разделить его на 100%).

б) Данное число умножить на полученную дробь.

Например: найти 30% числа 210.

а) 30% : 100% = 0,3; б) 210 · 0,3 = 63.

II. Найти число по известной величине некоторого процента этого числа.

а) Процент обратить в дробь.

б) Величину процента разделить на полученную дробь.

Например: найти число, 7% которого составляют 21.

а) 7% : 100% = 0,07;

б) 21 : 0,07 = 300.

Комментарий. Нахождение числа по известной величине процента можно рассматривать следующим образом. 7% числа x составляют 21, т. е. $0{,}07 \cdot x = 21 \Rightarrow x = 21 : 0{,}07 = 2100 : 7 = 300$.

III. *Процентное отношение двух чисел* показывает, сколько процентов одно число составляет от другого числа.

Чтобы найти процентное отношение чисел a и b, нужно отношение чисел a и b умножить на 100%, т. е. $\boxed{\dfrac{a}{b}\cdot 100\%}$ – процентное отношение чисел a и b.

Запомните!

Формула сложного процента.

$$x_n = x_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

где $p\%$ — поэтапный прирост (увеличение первоначальной величины в процентах);

x_0 — первоначальная величина;

n — количество этапов.

15. Сбербанк в конце года начисляет 20% к сумме, находящейся на счете в начале года. Каким станет вклад, равный 1600 р., через год?

Решение.

В задаче требуется найти 120% числа 1600.

1) 120% : 100% = 1,2.

2) $1600 \cdot 1{,}2 = 1920$ (р.)

Ответ: 1920.

16. Тридцатипроцентный раствор содержит 60 г кислоты. Какова масса раствора?

Решение.

В задаче требуется найти число, 30% которого составляют 60. Пусть x г – масса раствора.

1) 30% : 100% = 0,3.

2) $0{,}3x = 60 \Rightarrow x = 60 : 0{,}3 = 200$ (г).

Ответ: 200.

17. В 30 кг морской воды содержится 1,5 кг соли. Каково процентное содержание соли в морской воде?

Решение.

Требуется найти, сколько процентов число 1,5 составляет от числа 30, т. е. процентное отношение чисел 1,5 и 30.

$$\frac{1{,}5 \cdot 100\%}{30} = 5\%.$$

Ответ: 5.

18. Банк выплачивает 10% годовых. Каков будет вклад в 1400 р. через 4 года?

Решение.

Применим формулу сложного процента.

$x_4 = 1400 \cdot (1 + 0{,}1)^4 = 1400 \cdot 1{,}1^4 = 2049{,}74$ (р.).

Ответ: 2049,74.

19. Цена товара с 200 р. дважды понижалась каждый раз на 20%. Какова окончательная цена товара?

20. Цена комплекта мебели составляет 50 000 р. Ее снизили на 20%, затем еще на 15%. Какова цена мебели после двух снижений?

21. Товар поступил в продажу по цене 500 р. В течение первой недели цена товара остается неизменной, а в первый день каждой следующей недели снижается на 20% от текущей цены. По какой цене будет продаваться товар в течение третьей недели?

22. Население Эфиопии составляет $75{,}6 \cdot 10^6$ человек. Городское население — $11{,}79 \cdot 10^6$ человек. Сколько процентов населения Эфиопии проживают в городах?

23. Сколько процентов число 3 составляет от числа 15?

24. Сколько литров воды нужно взять, чтобы из 200 г соли приготовить 5%-ный раствор? (Масса 1 л воды равна 1 кг.)

25. Население Великобритании составляет $59{,}48 \cdot 10^6$ человек, ее территория равна $244{,}14 \cdot 10^3$ км^2. Найдите число, характеризующее среднюю плотность населения Великобритании.

26. Площадь Португалии равна $92{,}39 \cdot 10^3$ км^2, население — $10{,}44 \cdot 10^6$ человек. Вычислите среднюю плотность населения Португалии.

27. В Норвегии проживает $4{,}6 \cdot 10^6$ человек, в Осло — $821{,}3 \cdot 10^3$ человек. Сколько процентов населения Норвегии проживает в столице?

28. Население города составляет 800 000 человек. 10% — дети и подростки. 30% взрослого населения не работает. Сколько жителей города работают?

29. Оптовая цена чашки 80 р. Наценка в магазине 35%. Какое наибольшее количество чашек можно купить в магазине на 800 р.?

30. Площадь поверхности Земли $510{,}2 \cdot 10^6$ км^2. Площадь Мирового океана $361{,}1 \cdot 10^6$ км^2. Сколько процентов поверхности Земли занимает Мировой океан? Результат округлите до десятых долей.

31. Площадь суши $149{,}1 \cdot 10^6$ км^2. Сколько процентов поверхности Земли составляет суша? (Площадь Земли $510{,}2 \cdot 10^6$ км^2.)

§4. Задания для подготовки к ЕГЭ (B1, B12)

32. После повышения цены на 18% кофемолка стала стоить 2832 р. Сколько стоила кофемолка до повышения цены?

33.1. Миксер стоил 900 р., после снижения цены — 765 р. На сколько процентов была снижена цена?

33.2. Комод после повышения цены на 16% стал стоить 6960 р. Сколько стоил комод до повышения цены?

34. Железнодорожный билет стоит 1200 р., в период каникул компания предоставляет школьникам скидку 40%. Сколько должна заплатить за билет группа из 32 учащихся и трех преподавателей?

35.1. Флакон жидкого мыла стоит 160 р. Во время распродажи мыло продается со скидкой 35%. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 600 р.?

35.2. Флакон духов по дисконтной карте продается со скидкой 15% за 1870 р. Какова его цена без скидки?

Запомните!

При решении задач на сплавы, растворы и смеси используются следующие закономерности.

1. Всегда выполняется закон сохранения объема или массы: $V = V_1 + V_2$; $m = m_1 + m_2$.

2. Объемная и массовая концентрация вещества есть число, показывающее, какую долю всего объема или массы составляет данное вещество.

Например, если имеется 20%-ный раствор соли, то в этом растворе 0,2 объема или массы составляет чистая соль.

Если в растворе содержится 20 г соли, то при добавлении чистой воды изменяется процентное содержание соли в новом растворе.

Если сплав содержит олово и свинец в отношении 3 : 5, то в этом сплаве $\frac{3}{8}$ его массы составляет олово, а $\frac{5}{8}$ — свинец.

Запомните!

При решении задач на проценты необходимо учитывать следующие закономерности:

1. За 100% принимают то число, с которым сравнивают.

2. Если число a увеличено на $p\%$, то оно увеличено в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз, $(100\% + p\%) : 100\%$.

Это правило применяется при решении задач на **повышение** цен, компонентов растворов и т. д.

3. Если число m уменьшено на $q\%$, то оно уменьшено в $\left(1-\frac{q}{100}\right)$ раз, $(100\% - p\%) : 100\%$.

Это правило применяется при решении задач на **понижение** цен, **скидки** и т. д.

4. Если m кг некоторого вещества содержится в n кг смеси (раствора, сплава), то процентное содержание (концентрация) этого вещества в этой смеси вычисляют по формуле $\frac{m}{n}\cdot 100\%$. т.е. находят процентное отношение чисел m и n.

36. Один раствор содержит 20% кислоты, а второй — 70%. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л раствора с 50%-ным содержанием кислоты?

Решение.

Получим уравнение $0{,}2x + 0{,}7(100 - x) = 50$;

	Кислота, %	Кислота, л	Взяли раствора, л
I раствор	20	$0{,}2x$	x
II раствор	70	$0{,}7(100-x)$	$100-x$
Новый раствор	50	$0{,}5\cdot 100=50$	

$x = 40$, $100 - x = 60$.

Ответ: 40, 60.

37. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 20 кг, содержащей 30% меди. Сколько олова нужно добавить, чтобы получить сплав с 20%-ным содержанием меди?

Решение.

Сплавы	Масса сплава, кг	Медь	Медь, кг
I	20	30%	6
II	$(20 + x)$	20%	6

Пусть нужно добавить x кг олова.
20% числа $(20 + x)$ составляют 6 кг $\Rightarrow 0{,}2(20 + x) = 6$.
$6 : 0{,}2 = 20 + x$.
$20 + x = 30 \Rightarrow x = 10$.
Ответ: 10.

38. Смесь чая состоит из индийского и грузинского сортов. Индийский составляет 30% смеси. Если добавить 120 г индийского чая, то его содержание в смеси будет 45%. Каков первоначальный вес смеси?

39. Семья из четырех человек отправилась на отдых. Взрослый билет стоит 1400 р., на детский — скидка 40%. Сколько денег заплатят за проезд родители с двумя детьми?

40. В разгар сезона ягоды дешевле, чем весной, на 30%. Сколько можно купить ягод на те же деньги, на которые весной можно купить 2,8 кг?

41. Морская вода содержит 5% соли. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской, чтобы концентрация соли составила 1,5%?

42. Вкладчик положил в банк деньги под 20%. После начисления процентов он взял некоторую сумму. После второго начисления процентов оказалось, что на счете сумма на 4% меньше первоначальной. Сколько процентов от исходной суммы было изъято вкладчиком?

Решение.
Пусть x р. – исходная сумма,
a р. – сумма, изъятая после первого начисления.

Нужно найти $\frac{a}{x} \cdot 100\%$ (процентное отношение a и x).

Начисление	Сумма на счете, р.	Остаток, р.
I	$1{,}2x$	$(1{,}2x - a)$
II	$(1{,}2x - a) \cdot 1{,}2$	$0{,}96x$

$(1{,}2x - a) \cdot 1{,}2 = 0{,}96x.$
$1{,}44x - 1{,}2a = 0{,}96x.$

$0{,}48x = 1{,}2a \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{0{,}48}{1{,}2} = 0{,}4.$

$\frac{a}{x} \cdot 100\% = 40\%.$

Ответ: 40.

43. Вкладчик положил в банк 10 000 р., через два года сумма увеличилась до 12 100 р. На сколько процентов ежегодно увеличивалась первоначальная сумма?

Решение.

Пусть на $x\%$ увеличивался вклад ежегодно.

Через год вклад равен $10\,000 \cdot \frac{100 + x}{100}$ р. $= 100(100 + x)$р.,

через 2 года – $100(100 + x) \cdot \frac{100 + x}{100} = (100 + x)^2$.

$(100 + x)^2 = 12\,100 \Rightarrow 100 + x = 110 \Rightarrow x = 10\%$.

Ответ: 10.

44. Свежие грибы содержат 90% воды, а сушеные – 15%. Сколько получится сушеных грибов из 68 кг свежих?

Решение.

1) Доля сухого вещества в свежих грибах составляет 10%, т. е. $68 \cdot 0{,}1 = 6{,}8$ (кг).

2) 6,8 кг составляют 100% – 15% = 85% массы сушеных грибов, т. е. $0{,}85x = 6{,}8$ (x кг — масса сушеных грибов).

$x = 6{,}8 : 0{,}85$.

$6{,}8 : 0{,}85 = 8$ (кг), значит, из 68 кг свежих грибов получится 8 кг сушеных.

Ответ: 8.

45. Сырок стоил 6 р. Какое наибольшее количество сырков можно купить на 75 р. после повышения цены на 15%?

46. После двух последовательных повышений на одно и то же число процентов цена товара повысилась с 192 р. до 300 р. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз?

47. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу, содержащую 75% воды?

48. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили на 15%, после второго снижения еще раз снизили на 10%. На сколько процентов снизилась первоначальная цена товара после трех снижений?

49. В библиотеке имеются книги на трех иностранных языках. Английские книги составляют 36% всех книг на иностранных языках, французские – 75% английских, остальные 185 книг – немецкие. Сколько книг на иностранных языках в библиотеке?

50. В январе завод выполнил 105% месячного плана, в феврале произвел продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план?

Решение.

Пусть x – план выпуска продукции на 1 месяц.

Месяц	Выпущено	За 2 месяца	Перевыполнение	По плану
Январь	$1{,}05x$	$2{,}142x$	$2{,}142x - 2x = 0{,}142x$	$2x$
Февраль	$1{,}05x \cdot 1{,}04x$			

Нужно найти $\frac{0{,}142x}{2x} \cdot 100\% = 7{,}1\%$.

Ответ: 7,1.

51. Набор конфет состоит из трех сортов, массы которых относятся как 3 : 7 : 10. Массу конфет первого сорта увеличили на 8%, второго – на 4%. На сколько процентов надо уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы масса набора не изменилась?

Решение.

Пусть x – общая мера (принимается для удобства обоснований).

Сорт	Первоначальная масса	Новая масса
I	$3x$	$1{,}08 \cdot 3x = 3{,}24x$
II	$7x$	$1{,}04 \cdot 7x = 7{,}28x$
III	$10x$	$20x - 10{,}52x = 9{,}48x$
Всего	$20x$	

$\left.\begin{matrix} 3{,}24x \\ 7{,}28x \end{matrix}\right\} 10{,}52x$

Требуется найти, сколько процентов число 9,48 составляет от числа 10 (новая масса от первоначальной).

$$\frac{9{,}48 \cdot 100\%}{10} = 94{,}8\%; \qquad 100\% - 94{,}8\% = 5{,}2\%.$$

Ответ: 5,2.

Примечание: общую меру можно не вводить.

52. Для выпечки изделия нужно смешать гречневую, ржаную и пшеничную муку в отношении 1 : 2 : 8. Решили изменить рецепт, массу гречневой муки увеличили на 20%, ржаной на 6%. На сколько процентов нужно уменьшить количество пшеничной муки, чтобы общая масса не изменилась?

53. Первый раствор на 3 л больше второго. Первый раствор содержит 10% кислоты, второй – 40%. Из двух растворов получили третий с 20%-ным содержанием кислоты. Найдите объем (в литрах) третьего раствора.

54. Число m больше числа n на 25%. На сколько процентов число n меньше числа m?

55. Дневная норма ученика составляет 80% от дневной нормы мастера. На сколько процентов дневная норма мастера больше дневной нормы ученика?

Решение.

Пусть x – дневная норма мастера, тогда $0{,}8x$ – норма ученика; $x - 0{,}8x = 0{,}2x$, на $0{,}2x$ норма мастера больше.

Найдем процентное отношение чисел $0{,}2x$ и $0{,}8x$:

$$\frac{0{,}2x \cdot 100\%}{0{,}8x} = 25\%.$$

Ответ: 25.

56. Проездной билет стоит 600 р., разовый – 18 р. За месяц произведено 45 поездок. Сколько денег сэкономлено?

57. Из 42 кг свежих грибов, содержащих 95% воды, получили 3 кг сушеных. Каков процент содержания воды в сухих грибах?

58. Имеются два сплава с разным содержанием золота. В первом сплаве содержится 35%, а во втором – 60% золота. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 40% золота?

Решение.

Сплавы	Масса сплава	Масса золота
I	x	$0{,}35x$
II	y	$0{,}6y$
III	$x + y$	$0{,}4(x + y)x = 0{,}35x + 0{,}6y$

$0{,}4(x + y)x = 0{,}35x + 0{,}6y,$

$0{,}05x = 0{,}2y \Rightarrow x = \dfrac{0{,}2y}{0{,}05x}$; $x = 4y.$

Ответ: 4 : 1.

59. Кусок сплава меди с оловом массой 48 кг содержит 40% меди. Сколько меди следует добавить к этому куску, чтобы получить сплав, содержащий 60% меди?

60. К раствору, который содержит 40 г кислоты, добавили 200 г воды, и концентрация раствора изменилась на 10%. Сколько воды содержал первый раствор?

61. В одном из двух сплавов, состоящих из меди, цинка и олова, содержится 40% олова, в другом – 26% меди. Процентное содержание цинка в двух сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором 30% цинка. Сколько олова содержится в полученном сплаве?

Решение.

Пусть $x\%$ – содержание цинка в I и II сплавах.

Сплавы	Медь		Цинк		Олово		Масса сплава, кг
	%	кг	%	кг	%	кг	
I			x	$\frac{150 \cdot x}{100}$	40	60	150
II	26	65	x	$\frac{250 \cdot x}{100}$	110		250
Новый			30	120	170		400

Масса цинка в новом сплаве равна сумме масс цинка I и II сплавов.

$\frac{15x}{10} + \frac{25x}{10} = 120 \Rightarrow x = 30\%$ (процентное содержание цинка в I и II сплавах).

Значит, во II сплаве цинка $\frac{25 \cdot 30}{10} = 75$ (кг), олова (250 – 75 – 65) кг = 110 кг. В новом сплаве цинка 60 + 110 = = 170 (кг).

Ответ: 170.

62. На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличилось на 20%, а другое на 45%?

63. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сушеные – 12%. Сколько получится сушеных грибов из 22 кг свежих?

Грибы	Масса	Вода	Сухое вещество	
Свежие	22 кг	90%	10%	$22 \cdot 0{,}1 = 2{,}2$ (кг)
Сухие	?	12%	88%	2,2 кг

Решение.

Требуется найти число, 88% которого составляют 2,2 кг.

$2{,}2 : 0{,}88 = 2{,}5$ (кг).

Ответ: 2,5.

64.1. Первоначально предполагалось, что число мест в оркестре для скрипачей, виолончелистов и трубачей распределится в отношении $1{,}6 : 1 : 0{,}4$. Было решено изменить состав оркестра. В результате скрипачей стало на 25% больше, а виолончелистов на 20% меньше, чем ранее намечалось. Сколько музыкантов каждого жанра было принято в оркестр, если всего приняли 32 человека?

64.2. Подарочный набор состоит из трех сортов конфет. Массы конфет первого, второго и третьего сортов в этом наборе относятся как $3 : 5 : 14$. Массу конфет первого сорта увеличили на 17%, а второго – на 15%. На сколько процентов надо уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы масса всего набора не изменилась?

Решение.

Пусть x – общая мера; массу конфет третьего сорта уменьшили на $a\%$.

Сорт конфет	Масса	Масса после изменения
I	$3x$	$1{,}17 \cdot 3x = 3{,}51x$
II	$5x$	$1{,}15 \cdot 5x = 5{,}75x$
III	$14x$	$\frac{100-a}{100} \cdot 14x$
Всего	$22x$	$22x$

$$3{,}51+5{,}75+\frac{100-a}{50}\cdot 7=22.$$

$$\frac{(100-a)\cdot 7}{50}=12{,}74 \quad (:7).$$

$100 - a = 1{,}82 \cdot 50.$
$a = 9\%.$
Ответ: 9.

65. На распродаже пиджаки продавались со скидкой 20%, костюмы – со скидкой 40%. Покупатель приобрел пиджак и костюм за 9180 р., что на 32% меньше их общей первоначальной стоимости. Найдите первоначальную цену костюма.

66. В сплав олова с серебром, содержащий 5 кг серебра, добавили 15 кг серебра. Содержание олова в новом сплаве понизилось по сравнению с первоначальным на 30%. Какой могла быть первоначальная масса сплава?

Сплавы	Серебро, кг	Масса олова, кг	Масса сплава, кг	Олово, %
I	5	$(x-5)$	x	$\frac{x-5}{x}\cdot 100\%$
II	20	$(x-5)$	$(x+15)$	$\frac{x-5}{x+15}\cdot 100\%$

Решение.

$$\frac{x-5}{x}-\frac{x-5}{x+15}=0{,}3 \Rightarrow 0{,}3x^2-10{,}5x+75=0,$$

$$3x^2-105x+750=0 \Rightarrow x=\frac{105\pm\sqrt{11025-9000}}{6}=\frac{105\pm 45}{6};$$

$x_1 = 10;\ x_2 = 25.$
Ответ: 10 или 25.

67. Проездной билет на месяц стоит 460 р., разовый — 9 р. Пассажир за месяц совершил 71 поездку. Сколько денег он сэкономил?

68. В сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, добавили 100 г золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным на 20%. Сколько серебра в первом сплаве?

69. В пачке 280 листов бумаги. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги надо купить на 6 недель?

70. Дневная норма токаря составляет 19 деталей. Но, применяя более совершенную технологию, он ежедневно изготовлял на 7 деталей больше нормы, поэтому за 3 дня до срока изготовил 20 деталей сверх плана. Сколько деталей изготовил слесарь?

71. Больному прописали принимать таблетки по 0,5 г 3 раза в день в течение 23 дней. В упаковке 8 таблеток по 0,25 г. Какое наименьшее количество упаковок нужно приобрести на весь курс лечения?

72. Три бригады за выполненную работу получили 325 500 р. Какую сумму получит каждая бригада, если первая состояла из 15 человек и работала 21 день, вторая — из 14 человек и работала 25 дней, а количество рабочих третьей бригады, работавшей 20 дней, на 40% превышало число рабочих первой бригады?

Решение.

Бригады	Количество рабочих	Количество дней	Полученная сумма, р.
I	15	21	$15 \cdot 21x$
II	14	25	$14 \cdot 25x$
III	$1{,}4 \cdot 15 = 21$	20	$21 \cdot 20x$

Пусть каждый рабочий за 1 день получал x р.
$315x + 350x + 420x = 325\ 500.$
$x = 300.$
Ответ: 94 500; 105 000; 126 000.

73. Одна бригада производит ремонт и наладку оборудования за 4,5 часа. За какое время выполнят эту работу две бригады, работая вместе, если производительность второй бригады на 25% больше производительности первой?

74. Массы трех сортов конфет относятся как 3 : 8 : 17. Массу конфет первого сорта увеличили на 10%, второго – на 9%. На сколько процентов надо уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы общая масса не изменилась?

75. Рабочий четвертого разряда зарабатывает на 25% больше, чем рабочий третьего разряда. На сколько процентов меньше, чем рабочий четвертого разряда, зарабатывает рабочий третьего разряда?

Решение.
Пусть x р. – зарплата рабочего III разряда.
Тогда $1{,}25x$ р. – зарплата рабочего IV разряда.
На $(1{,}25x - x)$ р. меньше зарабатывает рабочий III разряда. Следует найти, сколько процентов число $(1{,}25x - x)$ составляет от числа $1{,}25x$, т. е. процентное отношение этих чисел.

$$\frac{1{,}25x - x}{1{,}25x} \cdot 100\% = \frac{0{,}25}{1{,}25} \cdot 100\% = 20\%.$$

Ответ: 20.

76. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным. Получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

77. Сплав весит 2 кг и состоит из серебра и меди, масса серебра составляет $14\frac{2}{7}\%$ массы меди. Сколько серебра в данном сплаве?

78. Имеется лом стали двух сортов с 5%-ным и 40%-ным содержанием никеля. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получить 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля?

79. Кусок сплава меди и олова массой 12 кг содержит 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску, чтобы получить новый сплав с 40%-ным содержанием меди?

80. Собрали 140 кг грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?

81. На теплоходе находятся 340 пассажиров и 32 члена команды. Сколько 26-местных шлюпок должно быть на теплоходе для эвакуации людей в случае аварии?

82. Цена товара с 22 р. 50 коп. за килограмм повысилась до 25 р. На сколько процентов повысилась цена?

Решение.

Цена повысилась на 2500 – 2250 = 250 (коп.)

Чтобы найти, на сколько процентов повысилась цена, нужно найти, сколько процентов число 250 составляет от числа 2250, т.е. найти процентное отношение этих чисел:

$$\frac{250 \cdot 100\%}{2250} = \frac{100\%}{9} = 11\frac{1}{9}\%.$$

Ответ: $11\frac{1}{9}$.

83. Тетрадь стоила 3 р., после снижения цены она стала стоить 2 р. 60 к. На сколько процентов снижена цена?

84. В двух мешках 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% имеющейся там муки, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

85. Охотничий порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы относится к массе селитры как 0,2 : 1,3, а масса угля составляет $11\frac{1}{9}\%$ массы серы и селитры вместе. Сколько килограммов каждого из веществ пойдет на изготовление 25 кг пороха?

86. В магазин для продажи поступили учебники по физике и математике. Продали 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг. Учебников по математике осталось в 3 раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике поступило в продажу?

87. Количество студентов в институте ежегодно увеличивается на одно и то же число процентов, за 3 года оно возросло с 5000 до 6655 человек. На сколько процентов ежегодно увеличивалось число студентов?

88. В разгар сезона клубника дешевле на 15%, сахар дороже на 10%, варенье дешевле на 10%, чем в начале сезона. Сколько процентов от стоимости варенья составляет стоимость клубники в начале сезона?

Решение.

	Стоимость ягод	Стоимость сахара	Стоимость варенья
В начале сезона	a	b	$a + b$
В разгар сезона	$0{,}85a$	$1{,}1b$	$0{,}85a + 1{,}1b$

Вопрос задачи можно сформулировать так: найти процентное отношение чисел a и $(a + b)$, т. е. $\frac{a}{a+b}\cdot 100\%$.

При составлении уравнения учтем, что варенье в разгар сезона дешевле на 10%, чем в начале сезона, т. е. стоимость варенья $0{,}9(a + b)$.

$0{,}85a + 1{,}1b = 0{,}9(a + b)$;

$1,1b - 0,9b = 0,9a - 0,85a;$
$0,2b = 0,05a \Rightarrow b = 0,25a.$

$$\frac{a}{a+b}\cdot 100\% = \frac{a}{a+0,25a}\cdot 100\% = 1:1,25\cdot 100\% = 0,8\cdot 100\% = 80\%.$$

Ответ: 80.

89. Ежемесячный доход семьи увеличился на 25%, так как зарплата отца увеличилась на 10%, зарплата матери — на 60%. Сколько процентов зарплата матери составляла от дохода семьи до увеличения?

90. Партия товара была продана за 864 000 р. Прибыль составила 8%. Какова себестоимость товара?

Решение.

864 000 руб. составляют 108% себестоимости товара, т. е. необходимо найти число, 108% которого равны 864 000 р.

1) 108% : 100% = 1,08;

2) 864 000 : 1,08 = 800 000.

Ответ: 800 000.

91. Летом баклажаны на 65% дешевле, чем зимой, а помидоры — на 40%, поэтому салат «Фантазия» летом обходится на 60% дешевле, чем зимой. Сколько процентов стоимости овощей в салате составляет зимой стоимость помидоров?

92. Стол стоит 5000 р., на распродаже — 3900 р. На сколько процентов снижена цена ?

93. В период кризиса завод уменьшил выпуск продукции на 60%. На сколько процентов необходимо увеличить выпуск продукции, когда придет необходимость достигнуть первоначального уровня?

Решение.

Пусть a — первоначальный выпуск продукции. Уменьшили на 60%, т. е. стали выпускать 40% от первоначального уровня, т.е. $0,4a$ — это количество продукции, выпускаемое в период кризиса. Найдем, сколько процентов число a

составляет от числа $0{,}4a$ (т. е. процентное отношение $\frac{a \cdot 100\%}{0{,}4a} = 250\%$). Следовательно, увеличить выпуск надо на 250%.

Ответ: 250.

94. На ферме понизилось производство мяса на 75%. На сколько процентов теперь нужно увеличить производство мяса, чтобы достигнуть первоначального уровня?

95. В начале зимы цена на яблоки повысилась на 20% по сравнению с осенью. На сколько процентов реализатору нужно уменьшить количество приобретаемых яблок, чтобы затраты на их покупку увеличились только на 8% по сравнению с осенью?

96. Весной фермер предполагает продать молока на 20% меньше, чем зимой. На сколько процентов надо повысить цену на молоко, чтобы получить за него денег на 4% больше, чем зимой?

Глава 2
Алгебраические выражения

§1. Степени и корни

Определение степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ равных сомножителей}}$$

Правила действий со степенями

Действия со степенями, имеющими отрицательные и дробные показатели степени, выполняются по тем же правилам, что и действия со степенями, имеющими натуральные показатели.

$a, b \in R^+$; $m, n \in Q$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0;$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad b \neq 0;$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \; n > 1, \; n \in N, \; m \in Z;$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Правила действий с радикалами

$\sqrt[n]{a} = b,$ если $b^n = a,\ a \in R^+,\ n \in N,\ n > 1.$

Положительный корень четной степени из положительного числа называется *арифметическим*.

Для любых $a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in N\ (n \geq 2),\ k \in Z$ выполняются равенства

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n - \text{четное число,} \\ a, & \text{если } n - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}, \quad k \geq 2;$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0;$$

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}, \quad k > 0.$$

Таблица квадратов чисел

Десятки \ Единицы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1749	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Запомните!

Степени числа 2

$2^2 = 4$ $\quad 2^4 = 16$ $\quad 2^6 = 64$

$2^3 = 8$ $\quad 2^5 = 32$ $\quad 2^7 = 128$

Степени числа 3

$3^2 = 9$ $\quad 3^3 = 27$ $\quad 3^4 = 81$ $\quad 3^5 = 243$.

97. Вычислите (устно):

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 5^0$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1} \cdot 9$;

3) $x^7 \cdot x^{-5}$; 10) $3m^0 + (3n)^0$; 17) $(a + b)^{-1}$;

4) $x^6 : x^{-4}$; 11) $-0{,}3^0 + (-0{,}2)^0$; 18) $-9^2 - (-3)^2$;

5) $8x^{-3} \cdot 2x^2$; 12) $-2a^0 - (2a)^0$; 19) $\left(\sqrt{5}\right)^2$;

6) $(0{,}5)^{-3} \cdot 2^{-1}$; 13) $2 \cdot m^{-2}$, $m = 2$; 20) $\left(\sqrt{2}\right)^3$;

7) $(0{,}125)^{-2}$; 14) $3 : a^{-3}$; 21) $\sqrt[3]{-27}$;

8) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3} : a^{-1}$; 15) $2^3 \cdot 2^{-5}$; 22) $\sqrt{8}$;

9) $mn^0 : m^{-2}$; 16) $a^{-1} \cdot b^{-1}$; 23) $\sqrt{\frac{1}{0{,}09}}$.

Вычислите (98–105):

98. $0{,}2x^6 \cdot (-5x^2) + 3x^{10} : (-0{,}5x^2)$.

99. $10a^0 \cdot x^4 : 5x^2 - 0{,}6x \cdot 0{,}25x$.

100. $3ab^0 : a^{-2} - \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} \cdot 27a^3$.

101. $7 - 10 \cdot 16^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot 81^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot 128^{\frac{1}{7}}$.

Запомните!

$mn^0 = m \cdot 1 = m$;

$(mn)^0 = m^0 \cdot n^0 = 1$;

m и m^{-1} – взаимно обратные числа. $m \cdot m^{-1} = 1$;

$m : m^{-1} = m \cdot m = m^2$.

Деление можно заменить умножением на обратное число.

102. $0{,}125^{-\frac{1}{3}} + 0{,}81^{-\frac{1}{2}} - 0{,}027^{-\frac{2}{3}}$.

Решение.

Применим формулу $(a^m)^n = a^{mn}$.

$$\left(0{,}5^3\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(0{,}9^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(0{,}3^3\right)^{-\frac{1}{3}} = (0{,}5)^{-2} + (0{,}9)^{-1} - (0{,}3)^{-2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{9}{10}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} = 2 + \frac{10}{9} - \frac{100}{9} = 2 - \frac{90}{9} =$$

$$= 2 - 10 = -8.$$

Ответ: -8.

103. $\left(\dfrac{13^{1,4}}{13^{0,7}} \cdot \sqrt{13}\right)^5 : 13^4$.

104. $0{,}2^0 \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^4\right)^{-0,25} \cdot (1{,}2)^{-1}$.

105. $4^{-4} \cdot 64^3 \cdot 16^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$.

Сравните (106–107):

106. x^{13} и $x^{\frac{21}{2}}$, если $0 < x < 1$.

Решение.

Имеем два значения функции $y = x^n$.

При $0 < x < 1$ функция $y = x^n$ убывает, т. е. меньшему аргументу соответствует большее значение функции. Значит, $x^{13} < x^{\frac{21}{2}}$.

Ответ: $x^{13} < x^{\frac{21}{2}}$.

107. x^6 и x^7, если $0 < x < 1$.

108. Расположите дроби в порядке возрастания:

$\frac{7}{12}$; $\frac{3}{20}$; $\frac{3}{17}$; $\frac{2}{3}$.

Укажите наименьшее из чисел (109–113):

109. $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{8}$; 0,65; 0,79.

Указание: обратите простые дроби в десятичные, разделив числитель на знаменатель, сравните числа и выберите наименьшее.

110. 0,26; $\frac{5}{9}$; $\frac{2}{5}$; 0,93.

111. $\frac{11}{23}$; 0,5; 0,39; $\frac{5}{8}$.

112. $\sqrt{2}$; $\frac{2}{9}$; 0,41; $\frac{3}{7}$.

113. 0,8; $\frac{12}{25}$; 0,49; $\frac{3}{8}$.

Запомните!

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Укажите наибольшее из чисел (114–116):

114. 1,3; 0,43; $\frac{8}{3}$; $\frac{7}{4}$.

115. $\sqrt{3}$; 1,1; $\frac{5}{2}$; $\frac{8}{3}$.

116. $2{,}1;\ \ \frac{5}{3};\ \ \frac{10}{3};\ \ 3{,}1.$

Расположите числа в порядке возрастания (117–120):

117. $\sqrt{0{,}9};\ \ 0{,}3;\ \ \frac{10}{11};\ \ 2\sqrt{3}.$ **118.** $\sqrt{3};\ \ 2\sqrt{3};\ \ 8{,}1;\ \ \frac{2}{3}.$

Решение.

$$\frac{2}{3} \approx 0{,}67;\quad 2\sqrt{3} \approx 3{,}5;\quad \sqrt{63} < \sqrt{64} \Rightarrow \sqrt{63} < 8{,}1;$$

$$\sqrt{63} > \sqrt{49} \Rightarrow \sqrt{63} > 7;\quad 7 > 3{,}5.$$

Ответ: $\frac{2}{3};\ \ 2\sqrt{3};\ \ \sqrt{63};\ \ 8{,}1.$

119. $3\sqrt{5};\ \ \frac{1}{3};\ \ \sqrt{3};\ \ \frac{20}{3}.$ **120.** $\frac{5}{8};\ \ 4\sqrt{2};\ \ 3\sqrt{3};\ \ \frac{30}{7}.$

Расположите числа в порядке убывания (121–123):

121. $\sqrt{2};\ \ \sqrt{3};\ \ \frac{10}{3};\ \ \frac{15}{8}.$

122. $2\sqrt{3};\ \ 3\sqrt{7};\ \ 3\sqrt{6};\ \ 3.$

123. $-3;\ \ 3\sqrt{2};\ \ \sqrt{62};\ \ \frac{11}{3}.$

Найдите значение выражения (124–129):

124. $m^{-\frac{1}{2}} : m^{-\frac{3}{2}}$ при $m = -5$.

125. $m^{-\frac{3}{2}} : m^{-\frac{1}{2}}$ при $m = 2$.

126. $8 + 2 \cdot 27^{\frac{1}{3}} - 81^{\frac{1}{4}}.$

127. $2\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^3 - 10a^{\frac{3}{5}}$ при $a = 32$.

128. $3\left(m^{\frac{2}{11}}\right)^3 - 5m^{\frac{6}{11}}$.

129. $16^{3n} \cdot 8^{-2n}$ при $n = \frac{1}{3}$.

Вычислите (130 — 135):

130. $2 \cdot 125^{\frac{1}{3}} - 0{,}18^0$.

131. $9 \cdot 3^{-2} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$.

132. $(16 \cdot 10^{-5}) \cdot (0{,}2 \cdot 10^4)$.

133. $4 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}8 \cdot 10^{11}$.

134. $23 \cdot 10^{-5} + 7{,}7 \cdot 10^{-3}$.

135. $8{,}1 \cdot 10^{-2} + 19 \cdot 10^{-3}$.

136. Длина экватора Земли составляет 40 075 696 м. Выразите эту величину в тысячах километров. Результат округлите до десятых долей.

137. Диаметр Земли составляет $1{,}275 \cdot 10^7$ м. Выразите эту величину в тысячах километров.

138. При скоростном спуске горнолыжник развивает скорость до 30 м/с. Скорость спортивного автомобиля 324 км/ч. Во сколько раз скорость автомобиля больше скорости горнолыжника?

139. Площадь квартиры составляет 70 м^2. Выразите эту площадь в квадратных километрах.

140. Велосипедист двигался со скоростью 18 км/ч. Выразите эту скорость в метрах в секунду.

141. Население Австралии составляет $19{,}9 \cdot 10^6$ человек, а ее территория равна $7{,}7 \cdot 10^6$ км^2. Найдите среднее число жителей на 1 км^2.

Представьте в виде десятичной дроби (142—144):

142. $\frac{3{,}6 \cdot 10^{-3}}{12}$. **143.** $7{,}298 \cdot 10^{-2}$. **144.** $0{,}006 \cdot 10^{2}$.

Вычислите. Результат представьте в виде десятичной дроби (145; 146):

145. $\frac{8}{5^2} - 3 \cdot 0{,}04$. **146.** $20 - 0{,}012 \cdot 10^{2} + 3 \cdot 10^{-2}$.

Запомните!

При умножении (делении) двух одночленов коэффициенты перемножаются (делятся), а показатели степеней одинаковых оснований складываются (вычитаются).

Например:

1) $0{,}2m^3n \cdot (-0{,}5)m^{1{,}5} = -0{,}1m^{4{,}5}n$.

2) $0{,}8a^2bc : 0{,}4a^{-\frac{1}{2}}b^{-3} = 2a^{2{,}5}b^4c$.

Вычислите (147—149):

147. $\frac{8m^3n^5 \cdot (-0{,}2)m^{\frac{1}{2}}}{32mn^3}$.

148. $\frac{3a(a+b) - 3ab}{-5a^{-2}}$.

149. $\frac{8m^2b - 2m(4mb + b^3)}{-0{,}2b}$.

Запомните!

Подобные члены отличаются только коэффициентами.

Чтобы сложить подобные члены, нужно сложить их коэффициенты и к результату приписать буквенную часть.

Например: $2a^2m - 5a^2m + 8a^2m = 5a^2m$.

Складываются только подобные члены.

Привести подобные члены — это значит выполнить сложение.

Вычитание рассматривается как сложение чисел с разными знаками.

Упростите выражения (150–156):

150. $2a - 2(a - 2{,}6)$.

151. $8n^3 - (7 - 8n + 8n^3)$.

152. $b(17x - 3) - (5b + 3bx)$.

153. $(2a + 5) \cdot (2a - 5) - 4a^2$.

154. $(8a^3 - 4ab) : 0{,}2a - 5a \cdot 8a$.

155. $(8{,}1 \cdot 10^{-3}) : (3 \cdot 10^{-6})$.

156. $(3{,}5 \cdot 10^{-6}) : (5 \cdot 10^{-4})$.

157. Земля движется вокруг Солнца по орбите, близкой к круговой, со средней скоростью 29,765 км/с. Выразите эту величину в километрах в час.

158. Луна светит отраженным от Земли светом. Скорость света в вакууме равна $3 \cdot 10^8$ м/с. Расстояние от Земли до Луны равно $3{,}844 \cdot 10^5$ км. За сколько секунд после отражения от Земли свет доходит до Луны?

159. Один километр равен 0,62 мили. Диаметр Земли равен $1{,}275 \cdot 10^7$ м. Чему примерно равен диаметр Земли в милях?

160. Радиус Солнца равен $6{,}96 \cdot 10^8$ м, а радиус Земли $6{,}375 \cdot 10^6$ м. Во сколько раз радиус Земли меньше радиуса Солнца?

161. Население Китая составляет $1,3 \cdot 10^9$ человек, а Франции — $6,1 \cdot 10^7$ человек. Во сколько раз население Китая больше населения Франции?

162. Точность изготовления микросхем в современных лабораториях достигает $6,3 \cdot 10^{-9}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

163. Экваториальный радиус Земли 6378,16 км. Выразите эту величину в метрах.

164. Расстояние от Земли до Луны 384 400 км. Выразите эту величину в тысячах километров.

165. Один сантиметр равен 0,394 дюйма. Переведите величину $3,5 \cdot 10^{-4}$ м в дюймы.

166. Микроскоп позволяет различать детали величиной $1,15 \cdot 10^{-5}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

Найдите значение выражения (167–181):

167. $\dfrac{\left(3\sqrt{5}\right)^2}{15}$.

168. $\sqrt[4]{0,5} \cdot \sqrt[4]{0,125}$.

169. $\sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 2^6}$.

170. $0,3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{15} - 0,1$.

171. $8 \cdot 13^2 : 26^2 - (0,5)^{-2}$.

172. $42^2 : \left(14^2 \cdot 3\right) - \left(\dfrac{1}{21}\right)^{-1}$.

173. $2^6 \cdot 3^7 : 6^6 + (0,2)^{-1}$.

174. $3 \cdot 125^{\frac{1}{3}} - 0,8^0 + \sqrt[3]{-8 \cdot 27}$.

175. $4 \cdot 7^3 : 28^3 - 2 \cdot 8^{-1}$.

176. $(x - 8)^7 : (x^2 - 64)^6 \cdot (x + 8)^5$ при $x = 2$.

177. $\dfrac{2}{3} : \sqrt{\dfrac{1}{0,09}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{25}}\right)^{-1} - \dfrac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{3}$.

178. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7} - 2\sqrt{7} - (-5)^0$.

179. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{27} - 13^0 + (-2)^0$.

180. $2-\dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{49}}{\sqrt[6]{7}}+(-3)^0.$

181. $\dfrac{(x^2-9)^{10}}{(x+3)^8(x-3)^9},\quad x=2.$

Найдите значение выражения (182–186):

182. $8^{3m}\cdot 8^{-2m}:4^{-m}$ при $m=0{,}4.$

183. $3\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^3-12a^{\frac{2}{5}}$ при $a=32.$

184. $5b^0-2^b-(-3b)^0+8^{\frac{1}{3}}$ при $b=2.$

185. $-3m^0+5^{-2m}\cdot 25^{\frac{4m}{3}}$ при $m=-3.$

186. $(-4a)^0-16^{3a}\cdot 8^{-2a}$ при $a=\dfrac{2}{3}.$

Вычислите (187–189):

187. $\dfrac{3\sqrt{21}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}.$

188. $\dfrac{\sqrt{45}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}}.$

189. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}\cdot 2^{-2}}.$

Вычислите (190–204):

190. $\sqrt{7-\dfrac{6}{m}},$ если $m=-\dfrac{1}{3}.$

191. $0{,}3^7\cdot 0{,}5^6:0{,}15^7.$

192. $\dfrac{-6\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{\sqrt{324}}{2}}{3}.$

193. $\sqrt{13}\cdot\sqrt{1-\dfrac{6}{a}},$ если $a=-0{,}5.$

194. $\dfrac{3x}{x\sqrt{5x-1}}$, если $x = 0{,}25$.

195. $\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\cdot\sqrt{\dfrac{|2x-12|}{3}}$, если $x = -6$.

196. $\dfrac{\sqrt{125}\cdot(-9)}{\sqrt{5}\cdot 15^2}+0{,}6$.

197. $35^3:\left(-5\cdot 7^3\right)+\left(\dfrac{2}{9}\right)^0$.

198. $\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}+\sqrt{0{,}25}}{2{,}5}-\left(-\sqrt{5}\right)^0$.

199. $7-3\cdot 64^{\frac{1}{6}}-4\cdot 81^{\frac{1}{4}}+0{,}5^0$.

200. $5\cdot 32^{\frac{1}{5}}-0{,}4^0-10\cdot 16^{\frac{1}{4}}$.

201. $m^{\frac{3}{5}}:m^{-\frac{2}{5}}+\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^3-(-0{,}8)^0$, если $m = -0{,}5$.

202. $-0{,}4^4\cdot 0{,}3^5:0{,}12^5$.

203. $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}+2\cdot 64^{-\frac{2}{3}}\cdot 4+\left(9^0\right)^2$.

204. $0{,}2^5\cdot 0{,}3^4:0{,}06^4-1$.

§2. Формулы сокращенного умножения

$(m;\ n \in R)$

Квадрат суммы (разности) двух чисел:

$$\boxed{(m \pm n)^2 = m^2 \pm 2mn + n^2}$$

Куб суммы (разности) двух чисел:

$$\boxed{(m \pm n)^3 = m^3 \pm 3m^2n \pm 3mn^2 \pm n^3}$$

Разность квадратов двух чисел:

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$$

Запомните!

Сумма квадратов ($m^2 + n^2$) не разлагается на множестве действительных чисел.

$m^2 + n^2 = (m + ni)(m - ni)$, где i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

Сумма кубов двух чисел

$$m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2).$$

Разность кубов двух чисел

$$m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2).$$

Формулы сокращенного умножения справедливы для одночленов и многочленов.

Выполните действия (205–226):

205. $(m - 6)^2 - 3m(4m - 5) + 11m^2 - 30.$

206. $\left(\sqrt{a}-2\right)^2-\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{a}-4\right)-9a.$

207. $(3x + 2y)^2 - (3x - 2y)^2 - 26xy.$

208. $(a - 2)^3 - a(a - 3)^2 - a + 2.$

209. $(a^2 - 1)^3 + (a^2 + 1)^3 - 2a^6.$

210. $(m^2 - 3)^2 - (m^2 + 3)(m^2 - 3).$

211. $(m - 1)(m^2 + m + 1) - (m - 1)^3 - 3m^2.$

212. $a^3 - (a + 2)(a^2 - 2a + 4) + (2a - 1)^2 - 4a^2.$

213. $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)-\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2-2\sqrt{mn}.$

214. $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)\cdot(1-2a).$

215. $\left(\frac{1}{x^{-1}}-x^0\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}+1\right).$

216. $\left(m^3-n^3\right)\cdot(m-n)^{-1}-\frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^{-1}}.$

217. $\left(m^{\frac{1}{2}}-2\right)^2-\left(m^{\frac{1}{2}}+2\right)^2.$

Запомните!

$$m-n=\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)$$

$$a\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3=a^{1,5}=\left(a^{0,5}\right)^3$$

$$a\sqrt{a}\pm b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\left(a\mp\sqrt{ab}+b\right)$$

218. $\frac{a\sqrt{a}-8}{\sqrt{a}-2}-2\sqrt{a}-a.$

219. $\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}+2\sqrt{b}-b.$

220. $\frac{\sqrt{7}-3}{\sqrt{5}+2}:\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{7}+3}.$

221. $\frac{2x^2-72}{5-5x}\cdot\frac{10x-10}{6-x}.$

222. $\frac{a^2b-b^2a}{a^3-b^3}\cdot\left(a^2+ab+b^2\right).$

223. $\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{3m}\right)\cdot\frac{m^2}{12^{-1}}.$

224. $\left(\frac{1}{2m}-2m\right)\cdot\left(\frac{1+2m}{2m^2}\right)^{-1}.$

225. $(3b-4c)^2-(3b-2)(3b+2)+24bc-8c^2$.

226. $4^8\cdot 5^7:20^8-(-2)^0$.

§3. Преобразование алгебраических выражений

Выполните действия (227–241):

227. $\left(\dfrac{2\sqrt{m}+1}{2\sqrt{m}-1}-\dfrac{2\sqrt{m}-1}{2\sqrt{m}+1}\right):\dfrac{4\sqrt{m}}{20m-5}$.

228. $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1{,}9\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1{,}9+\sqrt{5}\right)^3}}{4}$.

229. $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}027}-\dfrac{11^{3,5}}{11^{1,5}}$.

230. $7^4\cdot 5^3:35^7-13^{2,6}:13^{1,6}$.

231. $3^5\cdot 2^6:6^4+17^{3,2}:17^{2,2}$.

232. $\sqrt[3]{-0{,}008\cdot 125}+\dfrac{3^{2,8}}{3^{0,8}}$.

233. $-\dfrac{5^{2,3}}{5^{1,3}}+\sqrt[3]{-0{,}125\cdot(0{,}2)^6}$.

234. $11^3\cdot 3^4:33^3-(-0{,}9)^0$.

235. $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a}{1-a}+1\right)\cdot(a+2)$.

236. $\left(\sqrt{\dfrac{8}{2x+31}}\right)\cdot(2x+31)$.

237. $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$.

238. $\dfrac{m\sqrt{m}-8}{\sqrt{m}-2}-2\sqrt{m}$.

239. $\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1+a+\sqrt{a}}-\left(2+\sqrt{a}\right)^2+3\sqrt{a}+3$.

240. $\left(\sqrt{\dfrac{6}{4x-54}}\right)\cdot(4x-54)-(4x)^0.$

241. $\left(\dfrac{2a+1}{3a-1}-\dfrac{3-a}{1-3a}\right)\cdot(1-3a).$

Найдите x (242–248):

242. $\sqrt{15-2x}=4.$ **243.** $\sqrt{x-9}=5.$

244. $\dfrac{\sqrt{2x-9}}{x+3}=0.$

245. $\dfrac{x^2-3x+2}{25}=0,$ укажите больший корень.

246. $\dfrac{\sqrt{9x+41}}{17}=2.$ **247.** $\dfrac{0{,}2x-125}{3x^2-x+8}=0.$

248. $\dfrac{9+0{,}3x}{\sqrt{x^2+5}}=0.$

249. Из формулы кинетической энергии $E=\dfrac{mv^2}{2}$ выразите массу m.

250. Из формулы скорости равномерного движения $v=\dfrac{S}{t}$ найдите время t.

Найдите значение выражения (251–253):

251. $\left(\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-m}{m^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot m$ при $m=9,\quad n=49.$

Запомните!

Во всех алгебраических выражениях радикалы четной степени арифметические (т. е. неотрицательные):

$$\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|}$$

Любое число или буквенное выражение можно представить в виде степени, применив формулу

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Если $a > 0$, то $a = (a^{\frac{1}{2}})^2 = (a^{\frac{1}{3}})^3 = (a^{\frac{1}{4}})^4 =$

$= (\sqrt{a})^2 = (\sqrt[3]{a})^3 = \ldots$

252. $\dfrac{m^3+8}{m^2-2m+4} - m^{\frac{1}{2}}$ при $m = 25$.

253. $\dfrac{a^3-27}{a^2+3a+9} - \dfrac{a^3+8}{a^2-2a+4}$.

Выполните действия (254–259):

254. $\dfrac{(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^2}{2}$.

255. $\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2(3-2\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2}-1)$.

256. $\left(a - \dfrac{a^2+y^2}{a+y}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{a-y}\right) : y$.

257. $3c - 2c(2c+1) + (2c-3)(2c+3) + 9$.

258. $2m-(m-2)+(m^2+2m+4)+m^3-2(m+3)$.

259. $\left(\dfrac{a^0}{1+m}+\dfrac{m}{1-m}-\dfrac{2m}{m^2-1}\right)\cdot(1-m)-m.$

Задания В3. Найдите *x* (260–263):

260. $\dfrac{5x+8}{1-3x}=x^0.$

261. $\dfrac{0{,}7x+2{,}9}{2x-1}=1.$

262. $\dfrac{0{,}7x+9{,}1}{x^2+1}=0.$

263. $\dfrac{0{,}5x+2{,}1}{x-3}=1.$

Вычислите (264–284):

264. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\sqrt{15}.$

265. $\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}{5-2\sqrt{6}}.$

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}{2-2\sqrt{6}+3}=\frac{(2-3)\cdot\left(2-2\sqrt{6}+3\right)}{2-2\sqrt{6}+3}=-1.$$

Ответ: -1 .

266. $\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^3}{7-2\sqrt{10}}.$

267. $\left(\dfrac{2b}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{2}{b-a}\right)\cdot(a-b)^2$ при $a=-0{,}2.$

268. $\dfrac{5-2a}{\sqrt{5}+\sqrt{2a}}-\sqrt{5}+\sqrt{2a}+4.$

269. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{6-2\sqrt{5}}.$

270. $\left(10\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{12}\right):\sqrt{3}.$

271. $\dfrac{0{,}5-2{,}1}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)}.$

272. $\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}-\dfrac{2}{x+1}\right)\cdot(1+x)-x.$

273. $\dfrac{2}{a+a^0}-\dfrac{a-9}{a^2-3a-4}+\dfrac{a^0}{4-a}.$

274. $\left(\dfrac{x-y}{4y}\cdot\dfrac{8y^2}{x^2-xy}-\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{x}{y}.$

275. $\left(2a+1-\dfrac{x^0}{1-2a}\right):\left(2a+\dfrac{4a^2}{1-2a}\right):x.$

276. $\left(\dfrac{m-9}{\sqrt{m}+3}+3-\sqrt{m}+\dfrac{2}{\sqrt{m}+4}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{m}+4}{2}.$

277. $\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+2\sqrt{2}\right)$

278. $\dfrac{6}{a-1}-\dfrac{10}{(a-1)^2}:\dfrac{10}{a^2-1}-\dfrac{2a+2}{a-1}.$

279. $\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right):\sqrt{15}.$

280. $\left(\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}\right):\sqrt{15}.$

281. $\left(2-\sqrt{3}\right)^2+2\left(\sqrt{3}+1\right)^2.$

282. $\dfrac{\left(5-\sqrt{2}\right)^2+10\sqrt{2}}{3^{-1}}.$

283. $\left(\sqrt{7}+2\right)\left(2-\sqrt{7}\right):2.$

284. $\left(\sqrt{2}-3\right)^2-8+6\sqrt{2}.$

§4. Модуль (абсолютная величина) числа. Определение модуля

$$\boxed{|a| = a, \text{ если } a \geq 0}$$

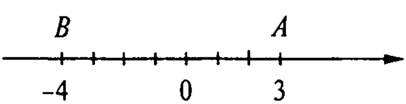
Модуль положительного числа и нуля – само число.

$$\boxed{|a| = -a, \text{ если } a < 0}$$

Модуль отрицательного числа – противоположное число.

Геометрический смысл модуля

Модуль числа – это расстояние на числовой прямой от нуля до точки, которая изображает число.



$|3| = OA$; $|-4| = OB$. Расстояние — число положительное; модуль любого числа, кроме нуля, — число положительное.

Основные свойства модуля

Для любых действительных значений a выполняются:

$\boxed{|a| \geq 0;}$ $\boxed{|a| = |-a|;}$

$\boxed{|ab| = |a| \cdot |b|;}$ $\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0;}$

$\boxed{|a^n| = |a|^n}$, $n \in Z,\ a^2 + n^2 \neq 0;$ $\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n - \text{четное число,} \\ a, & \text{если } n - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Запомните!

$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$; $\boxed{\sqrt[2n]{(a \pm b)^{2n}} = |a \pm b|}$; $n \in N;$

$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|}$.

Вычислите (281–288):

285. $(|-12{,}5| - |-0{,}5|) : |-2|$.

286. $\dfrac{|-5| \cdot (-8{,}6 + |-3{,}1|)}{|-3|}$.

287. $(|2 - 4| + a)^2 - (a - |3 - 6|)^2 - 10a$.

288. $\dfrac{-2 \cdot |-2{,}1| \cdot |-0{,}4|}{|-0{,}3|}$.

Найдите значение выражения (289–301):

289. $\dfrac{4\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Решение.

Согласно формуле $\sqrt{m^2}=|m|$ запишем

$$\frac{4\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{4\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

$\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, так как модуль отрицательного числа – противоположное число.

Данное выражение примет вид $\dfrac{4\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-4$.

Ответ: –4.

290. $\sqrt{\left(3\sqrt{3}-4\right)^2}-\sqrt{\left(3\sqrt{3}+4\right)^2}$.

291. $\sqrt{37-12\sqrt{7}}-2\left(3+\sqrt{7}\right)$.

Решение.

Представим подкоренное выражение $37-12\sqrt{7}$ в виде полного квадрата, т. е. $37-12\sqrt{7}=a^2-2ab+b^2$.

Пусть $2ab=12\sqrt{7}$, $a=3$, $b=2\sqrt{7}$, тогда

$a^2+b^2=3^2+\left(2\sqrt{7}\right)^2=9+28=37$.

Значит, $\sqrt{37-12\sqrt{7}}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{7}\right)^2}=\left|3-2\sqrt{7}\right|$.

Так как $2\sqrt{7}>3$, то $\left|3-2\sqrt{7}\right|=2\sqrt{7}-3$ (согласно определению модуля отрицательного числа).

Данное выражение имеет вид $2\sqrt{7}-3-6-2\sqrt{7}=-9$.

Ответ: -9.

292. $\sqrt{24\sqrt{3}-43}-\sqrt{43+24\sqrt{3}}$.

293. $28+3\sqrt{281-84\sqrt{5}}-7\sqrt{5}$.

294. $2|3-x|+|x+5|-|7-x|-2x$ при $x>8$.

295. $|x+2|-2|3-x|+|3x+1|-2x$ при $x>3$.

296. $|x-10|+2|x-5|+2x+|x+6|$ при $-2<x<5$.

297. $|x+9|+|x-1|+|x+10|+x$ при $x<-10$.

298. $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{7}-2{,}8\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2{,}8+\sqrt{7}\right)^3}}{25}$.

299. $\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{7}\right)^3}$.

300. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt[5]{\left(\sqrt{2}-7\right)^5}$.

301. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)\left(\sqrt[4]{5}+1\right)}-0{,}5\sqrt{5}$.

Глава 3
Алгебраические уравнения и системы уравнений

§1. Уравнения первой степени

1. Равенство с переменной величиной $f(x) = g(x)$, верное только при определенных значениях этой переменной, называется *уравнением* с одной переменной. Переменную величину в уравнениях называют неизвестной.
2. Число a называется *корнем уравнения*, если справедливо числовое равенство $f(a) = g(a)$.
3. Решить уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.
4. *Область допустимых значений* (ОДЗ) уравнения – множество всех значений неизвестного, при которых уравнение имеет смысл.
5. Уравнения называют *равносильными* (или эквивалентными), если совпадают множества их решений (все корни одного уравнения равны корням другого и наоборот).
6. Если к двум частям уравнения прибавить выражение, имеющее смысл во всей ОДЗ данного уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.
7. Любой член уравнения можно переносить из одной части в другую, изменив его знак.
8. Если две части уравнения умножить на отличное от нуля число (или на выражение, которое при всех допустимых значениях x имеет смысл и не обращается в ноль), то получится уравнение, равносильное данному.
9. Две части уравнения можно сокращать (разделить) на общий множитель, имеющий смысл и не обращающийся в ноль на множестве допустимых значений данного уравнения.

10. $ax + b = 0$, $a \neq 0$ — уравнение первой степени (линейное) с одним неизвестным. $x = -\frac{b}{a}$ — корень уравнения $ax + b = 0$.

Запомните!

При решении уравнений первой степени члены с неизвестным (переменной величиной) переносят в одну часть уравнения, известные члены — в другую.

Решение уравнений первой степени с одной переменной

302. Решите уравнение

$$\frac{10-2x}{x-7} - \frac{15+2x}{x-7} - 4 = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $x - 7 \neq 0$ (дробь существует, если ее знаменатель не равен нулю).

Умножим две части уравнения на $x - 7 \neq 0$.

$10 - 2x - 15 - 2x - 4x + 28 = 0.$

$x = 2{,}875.$

Ответ: $x = 2{,}875$.

Запомните!

Если уравнение содержит алгебраические дроби, то следует находить ОДЗ переменной величины (все знаменатели должны быть отличны от нуля).

Нахождение ОДЗ можно заменить проверкой результатов решения уравнения.

Решите уравнения (303–310):

303. $\frac{2}{3-x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x-3}.$

304. $-3\frac{1}{3}\cdot(0{,}3x-1)=3\frac{1}{6}-\frac{2}{3}x.$

305. $\frac{2x-5}{9}-\frac{5x-23}{12}=\frac{4x-13}{15}-1.$

306. $(x^2+2)((x+2)^2-x^2)=0.$

307. $(-5-x)((5-x)^2-x^2)=0.$

308. $\frac{x^{12}\cdot x^{-8}}{x^3}+5=7.$

309. $(3(x-1)-8x)(x^2+1)=0.$

310. $\frac{x^3\cdot x^{-1}}{x}-2x+5=8.$

Найдите k (311–314):

311. $\frac{3a+k}{k}-5=\frac{a}{k}.$

312. $a+bk=ak.$

313. $a-\frac{a+b}{k}=b-\frac{a-b}{k}.$

314. $\frac{5k+a}{k}-3=b.$

§2. Решение систем двух уравнений с двумя неизвестными

Пусть даны два уравнения с двумя неизвестными $f(x;\,y)=0$ и $h(x;\,y)=0$.

Решить систему — значит найти все общие решения двух уравнений или доказать, что их нет.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если любое решение одной системы является решением другой и наоборот. Если обе системы уравнений не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Метод подстановки

1) Из одного уравнения системы нужно выразить одно неизвестное через другое (например, x выразить через y).
2) Найденное выражение подставить в другое уравнение, получить одно уравнение с одним неизвестным y.
3) Найти y.
4) Найти x, используя выражение x через y, полученное в первом действии.

315.1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=5, \\ 3x+y=7. \end{cases}$$

Решение.

Выразим y через x из второго уравнения системы $y = 7 - 3x$, подставим в первое уравнение: $x + 3(7 - 3x) = 5$; $x = 2$.

$y = 7 - 6 = 1.$ $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

Ответ: (2; 1).

Метод алгебраического сложения

1) Сначала нужно уравнять модули коэффициентов при каком-нибудь неизвестном.
2) Сложить (или вычесть) почленно полученные уравнения и найти одно неизвестное.
3) Подставить найденное значение в одно из уравнений и найти второе неизвестное.

315.2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 5x+4y=6. \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} \quad + \begin{cases} 8x-12y=28, \\ 15x+12y=18. \end{cases}$$

Сложим почленно полученные уравнения. $23x = 46 \Rightarrow x = 2$. Найденное значение подставим в уравнение $2x - 3y = 7$.
$4 - 3y = 7 \Rightarrow y = -1$.
Ответ: (2; −1).

Решите системы уравнений (316–324):

316. $\begin{cases} 4x-5y=-2, \\ 3x+2y=-13. \end{cases}$ **317.** $\begin{cases} 4x+10y=30, \\ 4x+3y=-5. \end{cases}$

318. $\begin{cases} 5x+y=7, \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$ **319.** $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ -x+5y=-6. \end{cases}$

320. $\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x-2y+5=0 \end{cases}$ и найдите $x_0 + y_0$.

321. $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ и найдите сумму квадратов $x_0^2 + y_0^2$, где x_0 и y_0 — решение системы.

322. $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ и найдите $(x_0 + y_0)$, если x_0 и y_0 — решение системы.

323. $\begin{cases} 5x-2y=4, \\ 5y+x=17 \end{cases}$ и найдите $x_0^2 + y_0^2$.

324. $\begin{cases} 2x+5y=-7, \\ 3x-y=15 \end{cases}$ и найдите $x_0^2 - y_0^2$.

Решите уравнение (325–333):

325. $\dfrac{8x-6}{x^2}=0.$ **326.** $\dfrac{2x-8}{x-1}=0.$

327. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x+2}=\dfrac{6x-8}{x(x+2)}.$ **328.** $\dfrac{5x-9}{x-2}=3.$

329. $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{3}=2.$

330. $(2x-1)^2-(2x-3)(2x+3)=3.$

331. $\dfrac{4x-3}{2x-1}=\dfrac{5}{2}.$ **332.** $\sqrt{5x-1}=\dfrac{1}{2}.$

333. $\sqrt{\dfrac{-0{,}2}{2x+0{,}2}}=\dfrac{1}{2}.$

§3. Уравнение второй степени с одной переменной

Квадратное уравнение

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ называется *квадратным*.

a, b и c – действительные числа ($a\neq 0$), a и b – коэффициенты при неизвестных, c – свободный член.

Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение называется *неполным*, если $b=0$, или $c=0$, или $b=c=0$.

1) Если $b=0$, $a\neq 0$, уравнение имеет вид $ax^2+c=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2=-\dfrac{c}{a}$. Такое уравнение имеет решение на множестве действительных чисел, только если a и c имеют разные знаки:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad \left(-\frac{c}{a}>0\right).$$

Пример 1. $6x^2+2=0$; $6x^2\neq -2$ уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 2. $x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2.$

Ответ: -2; 2.

2) $c = 0 (a \neq 0)$, $ax^2 + bx = 0$; $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю (другие при этом не теряют смысла).

Значит, либо $x_1 = 0$ (и это первый корень неполного квадратного уравнения), либо $ax + b$, $x_2 = -\frac{b}{a}$ – это второй корень.

Пример 3. $2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 3$.
Ответ: 0; 3.

3) $b = 0$, $c = 0$ $(a \neq 0)$.
Уравнение имеет вид $ax^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$.

Формулы корней квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$, $a > 0$; a — первый коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

Корни квадратного уравнения равны дроби, в числителе которой второй коэффициент с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата второго коэффициента, минус учетверенное произведение первого коэффициента на свободный член; в знаменателе дроби удвоенный первый коэффициент.

Для более удобного применения формулы корней (и во избежание вычислительных ошибок) следует преобразовать квадратное уравнение так, чтобы коэффициент при x^2 был положительным числом и все коэффициенты целыми числами.

Пример 4. Решите уравнение $-0{,}2x^2 + \frac{1}{5}x + 1{,}2 = 0$.

Решение.

$a = -0{,}2$; $b = \frac{1}{5}$; $c = 1{,}2$.

Умножим две части уравнения на -5, получим
$x^2 - x - 6 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};\ x_1 = -2;\ x_2 = 3.$$

Ответ: -2; 3.

Если b — четное число, то корни квадратного уравнения лучше находить по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Применение этой формулы эффективно при достаточно больших коэффициентах.

Пример 5. Решите уравнение $x^2 - 124x + 480 = 0$.
Решение.

$$b = -124;\ \frac{b}{2} = -62.$$

$$x_{1,2} = 62 \pm \sqrt{3844 - 480} = 62 \pm 58 \Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = 120.$$

Ответ: 4; 120.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* и обозначается буквой D, т. е.

$$\boxed{b^2 - 4ac = D};\ \boxed{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = D_1.}$$

Если $D > 0$, уравнение имеет два различных действительных корня.

Если $D = 0$, уравнение имеет два равных действительных корня.

Если $D < 0$, уравнение действительных корней не имеет.

Пример 6. Решите уравнение $5x^2 - 2x + 32 = 0$.

Решение.

$D_1 = 1 - 160 < 0$, уравнение не имеет действительных корней.

Запомните!

Если сумма коэффициентов уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю, то один корень равен единице, а второй равен $\frac{c}{a}$:

$\boxed{a + b + c = 0}$ — $\boxed{x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{c}{a};}$

$\boxed{a - b + c = 0}$ — $\boxed{x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{c}{a}.}$

Пример 7. Решите уравнение $4x^2 + 5x - 9 = 0$.

Решение.

$a + b + c = 4 + 5 - 9 = 0$, $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{9}{4} = -2{,}25$.

Ответ: $-2{,}25$; 1.

Запомните!

Квадратный трехчлен можно разложить на множители по формуле

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, $a \neq 0$,

где $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Пример 8. Разложите на множители $-2x^2 + x + 10 = 0$.
Решение.
Найдем корни квадратного трехчлена.

$-2x^2 + x + 10 = 0$.
$2x^2 - x - 10 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$x_1 = -2$; $x_2 = 2{,}5$.

Согласно формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ запишем $-2x^2 + x + 10 = -2(x + 2)(x - 2{,}5) = (x + 2)(5 - 2x)$.

Ответ: $(x + 2)(5 - 2x)$.

Свойства корней квадратного уравнения

Теорема Виета $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Сумма корней квадратного уравнения равна второму коэффициенту с противоположным знаком, деленному на коэффициент при x^2.

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},} \quad a \neq 0.$$

Произведение корней квадратного уравнения равно свободному члену, деленному на коэффициент при x^2 ($a \neq 0$).

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.}$$

Решите уравнение. Если уравнение имеет больше одного корня, найдите сумму корней (334–350):

334. $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

335. $5x^2 - 8x - 4 = 0$.

336. $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

337. $x^2 - 3x + 2 = 0$.

338. $x^2 - 2x - 35 = 0$.

339. $x^2 - 64 = 0$.

340. $2x^2 - 3x = 0$.

341. $4x^4 - 5x^2 - 1 = 0$.

342. $\dfrac{x(1-x)}{1+x} = 5$.

343. $\dfrac{(2x-1)^2}{2} = x - 0{,}5$.

344. $(2x - 3)^2 = 8x$.

345. $4x^2 - 5x = 0$.

346. $(x^2+1)(x^2-2x)=0.$

347. $x-\frac{14}{x}+5=0.$

348. $\frac{x^2-9}{3x^2+2}=0.$

349. $\frac{2x^2}{5x+3}=1.$

350. $x+4=\frac{5}{2x-1}.$

351. Сколько действительных корней имеет квадратное уравнение?

1) $3x^2-2x+15=0;$

2) $2x^2+7x-8=0;$

3) $3x^2-6x-21=0;$

4) $4x^2-4x+1=0.$

Решите уравнение. Если уравнение имеет больше одного корня, найдите произведение корней (352–369):

352. $x^2+2\sqrt{3}x-6=0.$

353. $x^2-4\sqrt{5}x+4=0.$

354. $3x^2-9x=0.$

355. $x^4-5x^2+4=0.$

356. $x^6-7x^3-8=0.$

357. $x^2+6\sqrt{7}x+14=0.$

358. $x^2-9=0.$

359. $x^2+5x=0.$

360. $3+(t-2)(t^2+2t+4)=8(t-1)^2+t^3+2(7t-8).$

361. $(x-3)^2+(x-1)(x^2+x+1)-x^3+3-6x=0.$

362. 1) $(x-2)^2+(x+3)^2-9x-7=0.$

2) $\frac{x}{x-3}+\frac{x+1}{x+3}=-\frac{6x}{9-x^2}.$

Решение.

ОДЗ: $(x+3)(3-x)\neq 0;\ x\neq \pm 3.$

Изменим знаки перед дробью $\frac{6x}{9-x^2}$ и в ее знаменателе, перенесем дробь в левую часть уравнения.

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x+1}{x+3}-\frac{6x}{x^2-9}=0.$$

НОЗ $(x+3)(x-3) \neq 0$.

Умножим все члены уравнения на $x^2-9 \neq 0$.

$x(x+3)+(x+1)(x-3)-6x=0,$

$x^2+3x+x^2-2x-3-6x=0,$

$2x^2-5x-3=0.$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm 7}{4};$$

$x_1=-0{,}5$; $x_2=3 \notin$ ОДЗ.

Ответ: $-0{,}5$.

363. $(3x-1)(x+2)=20.$

364. $x+4=\frac{5}{x}.$

365. $\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}.$

366. $\frac{x^2-3x+2}{2-x}=0.$

367. $x+\frac{5}{x}+6=0.$

368. $\frac{2x-14}{x^2-6x-7}=1.$

369. $\frac{x^2-8x+7}{1-x}=0.$

§4. Решение уравнений, приводимых к квадратным

Уравнения, предлагаемые участникам ЕГЭ в данном разделе, могут встретиться при выполнении заданий С1 (как часть дроби или системы уравнений).

Метод введения новой переменной применяется и при решении логарифмических, показательных, тригонометрических уравнений. Необходимо каждый раз учитывать область допустимых значений новой переменной. В частности, радикал четной степени — число неотрицательное (об этом следует помнить при решении упражнений §4).

Решите уравнения. Если уравнение имеет больше одного корня, найдите произведение корней (370—374):

370. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} = 6.$

Решение.

Введем новую переменную $\sqrt[3]{x} = t,$ тогда $\sqrt[3]{x^2} = t^2.$

$t^2 - t - 6 = 0,$

$t_1 = -2;\ t_2 = 3,$

1) $\sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x_1 = -8;$

2) $\sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x_1 = 27.$

$x_1 \cdot x = -8 \cdot 27 =$

$= -216.$

Ответ: -216.

371. $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}} = \dfrac{7}{12}.$

Решение.

Нахождение ОДЗ заменим проверкой.

Пусть $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} = t > 0;$ тогда $\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}} = \dfrac{1}{t}.$

Уравнение примет вид $t - \dfrac{1}{t} = \dfrac{7}{12}.$

$12t^2 - 7t - 12t = 0 \Rightarrow t_1 = -\dfrac{3}{4} \notin (0; +\infty);\quad t_2 = \dfrac{4}{3}.$

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2x+2}{x+2} = \frac{16}{9} \Rightarrow x = 7.$$

Проверка показывает, что число 7 является корнем уравнения.

Ответ: 7.

372. 1) $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} = 3;$ 2) $2x^2 - 10x - 3\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 6 = 0.$

373. 1) $x^2 + \sqrt{x^2 + 1} = 11;$ 2) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$

374. $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7.$

Решение.

Найдем значения переменной x, при которых уравнение имеет смысл.

$x^2 - 3x + 5 \geq 0$, $D = -11 < 0$, значит, неравенство $x^2 - 3x + 5 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x, т. е. $x \in R$ (ОДЗ).

Введем новую переменную $\sqrt{x^2-3x+5}=m>0,$ тогда $x^2 - 3x + 5 = m^2$.

$x^2-3x+5-5+\sqrt{x^2-3x+5}-7=0.$

$m^2 + m - 12 = 0 \Rightarrow m_1 = -4 \notin (0; +\infty)$; $m_2 = 3$.

$x^2 - 3x + 5 = 9.$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4, x_1 \cdot x_2 = -4.$

Ответ: -4.

Решите уравнения (375–384):

375. 1) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31.$ 2) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22.$

376. $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4.$

377. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2.$

378. $\dfrac{3}{\sqrt{x+1}+1}+2\sqrt{x+1}=5.$

379. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2,$ укажите меньший корень.

380. $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2.$

381. $\dfrac{x-1}{1+x}=4-\dfrac{1-\sqrt{x}}{2}.$

382. $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-6}=18.$

383. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x-6=0,$ найдите сумму корней уравнения.

Решение.

ОДЗ: $x^2 - 4x + 10 \neq 0$. $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-10}$. $D < 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 10 > 0$ при всех $x \in R$, т. е. ОДЗ: $x \in R$.

Введем новую переменную: $x^2 - 4x + 10 = t$, $x^2 - 4x + 10 = t + 4$.

Уравнение примет вид $\dfrac{21}{t+4} - t = 0$. $t + 4 \neq 0$, $t \neq -4$.

$21 - t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t^2 + 4t - 21 = 0$.

$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5$; $t_1 = 3$, $t_2 = -7$.

1) $x^2 - 4x + 6 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_1 + x_2 = 4$.
2) $x^2 - 4x + 6 = -7 \Rightarrow x^2 - 4x + 15 = 0$; $D < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

Ответ: 4.

384. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 4{,}5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 5 = 0$, укажите меньший корень.

§5. Решение систем, содержащих квадратные уравнения

Решите систему уравнений (385–393):

385. $\begin{cases} x^2 + xy = 22, \\ y^2 + xy = 99. \end{cases}$

386. $\begin{cases} xy + 6x = 0, \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$

387. $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x^2 - y^2 = -5. \end{cases}$

388. $\begin{cases} (x - y)(x + 5) = 2, \\ x - y = 1. \end{cases}$

389. $\begin{cases} y - x = x^2, \\ y + 2x = 4. \end{cases}$

390. $\begin{cases} 3x^2 - xy = 0, \\ 5x - y - 3 = 0. \end{cases}$

391. $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

392. $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5. \end{cases}$

393. $\begin{cases} (x-2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x-2}{y-3} = 1. \end{cases}$

Найдите наибольшую сумму $x_0 + y_0$, где x_0 и y_0 — решение системы уравнений (394; 395):

394. $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

395. $\begin{cases} 2y^2 + xy = 6x^2, \\ \dfrac{x+2y-3}{3x-2y} = 5x + 2y + 1. \end{cases}$

§6. Решение систем уравнений методом введения новых переменных

Решите систему (396–406):

396. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{5}{x-y} = 2. \end{cases}$

Решение.
ОДЗ: $x \neq \pm y$.

Введем новые переменные. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = m$, $\dfrac{1}{x-y} = n$.

Тогда система уравнений примет вид $\begin{cases} m - 5n = 2, \\ 3m + 5n = 2. \end{cases}$

Сложим почленно уравнения. $4m = 4 \Rightarrow m = 1$. Подставим значение m в первое уравнение: $1 - 5n = 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{5}$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 1, \\ \dfrac{1}{x-y} = -\dfrac{1}{5}. \end{cases} \qquad + \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-5 \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} -2+y=1; \\ y=3. \end{array} \right.$$
$$2x=-4 \Rightarrow x=-2$$

Ответ: (–2; 3).

397. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

398. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y} = 9, \\ \dfrac{(x+y)\cdot x}{y} = 20. \end{cases}$

Решение.

Применим теорему Виета: $x + y = z_1$; $\frac{x}{y} = z_2$; $z_1 + z_2 = -b$; $z_1 \cdot z_2 = c$; значит, z_1 и z_2 являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 9z + 20 = 0$.

1) $z_1 = 4$; $z_2 = 5$. $\begin{cases} x+y=4, \quad x=5y, \quad 6y=4, \quad y_1=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{x}{y}=5, \qquad x=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=5, & x=4y, \\ \dfrac{x}{y}=4, & 5y=5 \Rightarrow y_2=1, \quad x_2=4. \end{cases}$

Ответ: (4; 1), $\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

399. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

400. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(x+y)\cdot x}{y}=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

401. $\begin{cases} x+y^2=7, \\ xy^2=12. \end{cases}$

402. $\begin{cases} x^2-y=23, \\ x^2y=50. \end{cases}$

403. $\begin{cases} (x^2-y^2)xy=180, \\ x^2-xy-y^2=-11. \end{cases}$

404. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} xy(x+y)=6, \\ xy+(x+y)=5. \end{cases}$$

Согласно теореме Виета примем обозначения:
$xy = z_1$; $(x + y) = z_2$; $z_1 \cdot z_2 = 6 = c$; $z_1 + z_2 = 5 = -b$;
$z^2 - 5z + 6 = 0 \Rightarrow z_1 = 2$; $z_2 = 3$.

1) $\begin{cases} xy=2, \\ x+y=3. \end{cases}$ $\begin{cases} x=3-y, \\ y(2-x)=2. \end{cases}$

$y^2 - 3y + 2 = 0.$

$y_1 = 1;\ y_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 1.$

2) $\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2 - x, \\ x(2 - x) = 2. \end{cases}$

$x^2 - 2x + 3 = 0$, $D < 0$, уравнение не имеет корней.

Ответ: (2; 1), (1; 2).

405. $\begin{cases} x - y = 16, \\ xy = -48. \end{cases}$

406. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

§7. Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком корня, называются *иррациональными*.

Иррациональные уравнения решаются только в области действительных чисел.

Запомните!

При решении иррациональных уравнений, содержащих радикалы четной степени, необходимо находить ОДЗ неизвестной величины, так как $\sqrt[2n]{M}$ существует только, если $M \geq 0$ (нахождение ОДЗ можно заменить проверкой).

Радикалы четной степени неотрицательны, т.е. $\sqrt[2n]{M} \geq 0$.

Для корней нечетной степени берутся их действительные значения.

Основной способ решения иррациональных уравнений — возведение обеих частей в соответствующую степень.

При решении некоторых уравнений удобно применять метод введения новой переменной (см. §4). При возведении в четную степень могут появиться посторонние корни, так как возможно нарушение равносильности уравнений. В этом случае необходима проверка (или дополнительная ОДЗ).

При возведении в нечетную степень равносильность уравнений сохраняется, поэтому проверка не обязательна.

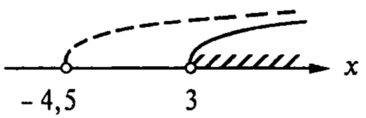
Решите уравнение, если уравнение имеет более одного корня, найдите их сумму (407–420):

407. $\sqrt{2x+9}-x=-3.$

Решение:

$\sqrt{2x+9}=x-3.$

ОДЗ: $\begin{cases}2x+9\geq 0,\\ x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -4{,}5,\\ x\geq 3.\end{cases}$



$\Rightarrow x\geq 3$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$2x+9=x^2-6x+9\Rightarrow x^2-8x=0\Rightarrow x(x-8)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=0\notin$ ОДЗ, $x_2=8.$

Ответ: 8.

408. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$

Решение.

Заменим проверкой нахождение ОДЗ.

Возведем две части уравнения в квадрат.

$1+x\sqrt{x^2+24}=x^2+2x+1.$

$x\sqrt{x^2+24}-\left(x^2+2x\right)=0.$

$x\left(\sqrt{x^2+24}-(x+2)\right)=0\Rightarrow x_1=0;$

$\sqrt{x^2+24}=x+2\quad(x+2\geq 0;\ x\geq -2).$

$x^2+24=x^2+4x+4\Rightarrow x=5.$

Проверка.

1) $x_1 = 0$ $\sqrt{1} = 1$, т. е. $x_1 = 0$ является корнем уравнения.

2) $x_2 = 5$ $\sqrt{1+5\sqrt{49}} = 5+1$, $\sqrt{36} = 6$, т. е. $x_2 = 5$ является корнем уравнения.

$x_1 + x_2 = 5$.

Ответ: 5.

409. $\sqrt{x+2} = 2+\sqrt{x+6}$.

410. 1) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8} = 6$. 2) $\sqrt{x+32}-2\sqrt[4]{x^2+32} = 3$.

411. 1) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2} = 7$; 2) $1+\sqrt{1+\sqrt{x^2-24}} = x$.

412. $\sqrt{x-\sqrt{3x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{3x-2}} = \sqrt{2x}$.

413. $\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt[3]{11-5x} = 3$.

414. $3\sqrt{x^2-5x+4}+10x = 2x^2+6$.

415. $\sqrt{x+\sqrt{5x-6}}+\sqrt{x-\sqrt{5x-6}} = \sqrt{2x}$.

416. $\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt[3]{11-5x} = 3$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в куб. В левой части применим формулы $(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ и $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$.

$$5x-2+3\sqrt[3]{(5x-2)^3(11-5x)}+3\sqrt[3]{(5x-2)(11-5x)^2}+11-5x = 27.$$

Приведем подобные члены и из кубических корней вынесем общий множитель.

$$9+3\sqrt[3]{(5x-2)(11-5x)}\left(\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt[3]{11-5x}\right) = 27.$$

В скобках получилось выражение, составляющее левую часть данного уравнения, равное трем. Сократим обе части последнего уравнения на 9.

$$1+\sqrt[3]{65x-22-25x^2}=3.$$

$$\sqrt[3]{-25x^2+65x-22}=2.$$

Возведем обе части уравнения в куб, приведем подобные члены, получим уравнение $25x^2 - 65x - 30 = 0$, сократим на 5. $5x^2 - 13x + 6 = 0$.

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{49}}{10}=\frac{13\pm 7}{10};$$

$x_1 = 0{,}6$; $x_2 = 2$.

Ответ: 2,6.

417. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$ **418.** $2\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{8x-7}=3.$

419. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+3}+3x-16.$

420. $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}.$

§8. Решение уравнений с применением теоремы Безу

Теорема Безу формулируется так:

Многочлен $a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m$ при делении на $(x - l)$ дает остаток $N = a_0l^m + a_1l^{m-1} + a_2l^{m-2} + \ldots + a_m$.

Это значит, в остатке может получиться только многочлен нулевой степени (относительно x). Если остаток равен нулю ($N = 0$), то l является корнем уравнения.

Найдите произведение корней уравнения (421–428):

421. $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$.

Решение.

Один из корней уравнения найдем среди делителей свободного члена, например, $x = -2$ (при подстановке числа -2 вместо x левая часть уравнения равна правой части).

Разделим многочлен $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$ на $(x + 2)$, т. е. на $(x - x_1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{} x^3+4x^2-11x-30 & x+2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2+2x-15 \\
\underline{} 2x^2-11x-30 & \\
\underline{2x^2+4x} & \\
\underline{} -15x-30 & \\
\underline{-15x-30} & \\
0 &
\end{array}
$$

Чтобы найти первый член частного, старший член многочлена делим на старший член делителя ($x^3 : x = x^2$), затем x^2 умножаем на $x + 2$, полученное произведение вычитаем из многочлена. Повторяем перечисленные действия до тех пор, пока результат вычитания будет равен нулю.

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x + 2)(x^2 + 2x - 15) = 0.$

Чтобы найти остальные корни данного уравнения, решим уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0.$

$x_1 = -5; x_2 = 3.$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -2 \cdot (-5) \cdot 3 = 30.$

Ответ: 30.

Комментарий. Кубические и иррациональные уравнения на ЕГЭ встречаются в заданиях С1, представляющих собой систему уравнений различных типов (например, иррациональное и тригонометрическое или алгебраическую дробь).

422. 1) $x^3 - 3x + 2 = 0;$ 2) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0.$

423. 1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0;$ 2) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0.$

424. 1) $6x^3 + 19x^2 + 2x - 3 = 0;$

2) $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0.$

425. $2x^3 + 11x^2 + 13x + 4 = 0.$

426. $(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) = 1680.$

Решение.

Уравнение имеет смысл при всех действительных значениях переменной x.

Сгруппируем попарно двучлены, подбирая пары таким образом, чтобы в произведении получились одинаковые коэффициенты при x.

$[(x - 3)(x - 6)] \cdot [(x - 4)(x - 5)] = 1680.$

$(x^2 - 9x + 18)(x^2 - 9x + 20) = 1680.$

Пусть $(x^2 - 9x) = t$, уравнение примет вид $(t + 18)(t + 20) = 1680$.

$t^2 + 38t + 360 - 1680 = 0$,

$t^2 + 38t + 1320 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = -19 \pm \sqrt{361+1320} = -19 \pm 41$.

$t_1 = -60$; $t_2 = 22$.

1) $x^2 - 9x + 60 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-240}}{2}.$$

$D < 0$, уравнение $x^2 - 9x + 60 = 0$ корней не имеет.

2) $x^2 - 9x - 22 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+88}}{2} = \frac{9 \pm 13}{2}.$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 11$,
$x_1 \cdot x_2 = -22$.

Ответ: -22.

427. $(x - 1)(x + 1)(x + 5)(x + 7) = 85$.

428. $(x - 1)(x - 2)(x + 9)(x + 10) = 126$.

§9. Решение уравнений, содержащих неизвестную величину под знаком модуля

Такие задания могут быть предложены в разделе С1 в качестве одного из уравнений системы или члена дроби.

Вспомните определение модуля и свойства (§4, с. 54).

I. Уравнение вида $|f(x)| = b$, где $b \in R$, решают следующим образом:

1) если $b < 0$, то уравнение $|f(x)| = b$ не имеет смысла, множество его решений — пустое множество, так как $|f(x)| \geq 0$;

2) если $b = 0$, то уравнение $|f(x)| = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$, так как модуль нуля равен 0;

3) если $b > 0$, то уравнение $|f(x)| = b$ равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = b, \\ -f(x) = b. \end{array}\right.$

Пример 1. Решите уравнение $|5x - 3| = 4$.

Решение.

Если $|m| = 4$, то либо $m = 4$, либо $-m = 4$ (согласно определению модуля). Значит, урвнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 5x-3=4, \\ -(5x-3)=4. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 5x=7, \\ -5x=1, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1{,}4, \\ x=-0{,}2. \end{array}\right.$$

Ответ: $-0{,}2$; $1{,}4$.

Пример 2. Решите уравнение $||4x - 7| + 5| = 8$.

Решение.

Выражение, стоящее под внешним знаком модуля, может принимать два значения:

$\lvert 4x - 7\rvert + 5 = 8.$ $\lvert 4x - 7\rvert = 3$		$\lvert 4x - 7\rvert = -13$ — уравнение не имеет смысла, так как модуль — неотрицательное число.
$4x - 7 = -3$ $4x = 4$ $x_1 = 1$	$4x - 7 = 3$ $4x = 10$ $x_2 = 2{,}5$	

Ответ: 1; 2,5.

Пример 3. Решите уравнение $7x^2 - 2|x| = 5$.

Решение.

1) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ (как модуль неотрицательного числа).

$7x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{7} \notin [0, \infty)$, следовательно, x_2 не является корнем исходного уравнения.

2) $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$. Уравнение имеет вид $7x^2 + 2x - 5 = 0$,

$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+35}}{7} = \frac{-1 \pm 6}{7},\ x_3 = -1,\ x_4 = \frac{5}{7} \notin (-\infty; 0)$, значит, x_4 не является корнем данного уравнения.

Ответ: -1; 1.

II. Уравнение вида $\boxed{|f(x)| = g(x)}$ равносильно совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример 4. Решите уравнение $|3x - 9| = 2x - 1$.
Решение.

$$\begin{cases} 3x - 9 = 2x - 1, \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 9 - 3x = 2x - 1, \\ 2x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8, \\ x > 0{,}5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2, \\ x > 0{,}5. \end{cases}$$

При $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$ выполняется неравенство $x > 0{,}5$.
Ответ: 2; 8.

III. Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ можно решать двумя способами.

Первый способ.

Так как $|f(x)| \geq 0$ и $|g(x)| \geq 0$, $|f(x)|^2 = f^2(x)$ и $|g(x)|^2 = = g^2(x)$, то данное уравнение равносильно уравнению $f^2(x) = g^2(x)$.

Пример 5. Решите уравнение $|3x - 2| = |x - 4|$.
Решение.

Уравнение равносильно уравнению $(3x - 2)^2 = (x - 4)^2$.

$(3x - 2)^2 - (x - 4)^2 = 0$. В левой части уравнения разность квадратов, разложим на множители и получим ноль в произведении.

$(4x - 6)(2x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1{,}5$.

Ответ: -1; 1,5.

Второй способ.

Уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

Пример 6. Решите уравнение $|2x - 1| = |3x + 5|$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1=3x+5, \\ 2x-1=-3x-5. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -x=6, \\ 5x=-4, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=-0{,}8. \end{array}\right.$$

Ответ: -6; $-0{,}8$.

IV. Уравнение вида $\boxed{|f(x)| + |g(x)| = b}$ (уравнение может содержать более двух модулей) решается на промежутках, на которые разбивают числовую прямую корни функций $f(x)$ и $g(x)$. На каждом из полученных промежутков данное уравнение заменяют равносильным ему уравнением (согласно определению модуля), не содержащим модулей. Решают полученное уравнение и выбирают из результата те числа, которые принадлежат рассматриваемому промежутку. В ответ записывают все решения.

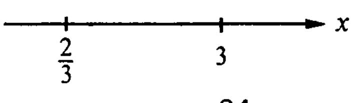
Пример 7. Решите уравнение $|3x - 2| - |x - 3| = 1$.

Решение.

Найдем корни функций, которые расположены под знаками модулей. Вспомним, что корень функции – это значение аргумента, при котором функция равна нулю.

$3x - 2 = 0$	$x - 3 = 0$
$x_1 = \frac{2}{3}$.	$x_2 = 3$.

Разбиваем числовую прямую на промежутки.



1) $x<\frac{2}{3} \Rightarrow |3x-2| = 2-3x$, так как $3x-2<0$ при $x<\frac{2}{3}$,

$|x-3| = 3-x$, так как $x-3<0$ при $x<\frac{2}{3}$.

Данное уравнение имеет вид $2-3x-(3-x)=1$, $x=-1$, так как $-1<\frac{2}{3}$, то $x_1=-1$ является корнем данного уравнения.

2) $\frac{2}{3} \le x < 3 \Rightarrow |3x-2| = 3x-2$, так как $3x-2 \ge 0$ при $x \ge \frac{2}{3}$,

$|x-3| = 3-x$, так как $x-3<0$ при $\frac{2}{3} \le x < 3$.

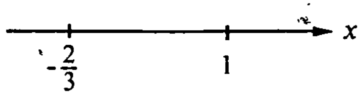
$3x-2-(3-x)=1$, $x_2=1{,}5$; $1{,}5 \in \left[\frac{2}{3};3\right)$.

3) $x \ge 3$. $|3x-2| = 3x-2$, так как $3x-2>0$ при $x \ge 3$,
$|x-3| = x-3$, так как $x-3 \ge 0$ при $x \ge 3$.
$3x-2-x+3=1 \Rightarrow x=0$, но $0 \notin [3;\infty)$, следовательно, $x=0$ не является корнем данного уравнения.
Ответ: -1; $1{,}5$.

Пример 8. Решите уравнение $|x-1|+|3x+2|=3$.
Решение.
Найдем корни функций, находящихся под знаками модулей.

$x-1=0$,	$3x+2=0$,
$x_1=1$.	$x_2=-\frac{2}{3}$.

Разбиваем числовую прямую на промежутки.



1) $x < -\frac{2}{3}$.

На этом промежутке $x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = 1 - x$ (модуль отрицательного числа — противоположное число).

$3x + 2 < 0 \Rightarrow |3x + 2| = -3x - 2$.

Уравнение имеет вид $1 - x - 3x - 2 = 3$, $x = -1$.

$-1 \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x_1 = -1$ является корнем данного уравнения.

2) $-\frac{2}{3} \le x < 1$.

$|x - 1| = 1 - x$ $(x - 1 < 0)$.

$|3x + 2| = 3x + 2$ (на рассматриваемом промежутке $3x + 2 \ge 0$).

$1 - x + 3x + 2 = 3 \Rightarrow x_2 = 0$; $0 \in \left[-\frac{2}{3}; 1\right) \Rightarrow x_2 = 0$ — корень уравнения.

3) $x \ge 1$. $|x - 1| = x - 1$, $|3x + 2| = 3x + 2$ (оба двучлена на рассматриваемом промежутке положительны).

$x - 1 + 3x + 2 = 3 \Rightarrow x = 0{,}5$, однако $0{,}5 \notin [1; +\infty)$.

Значит, число 0,5 не является корнем данного уравнения, т. е. на промежутке $[1; +\infty)$ уравнение не имеет корней.

Ответ: -1; 0.

Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, найдите их сумму (429–436):

429. $|x - 1| + |3x + 2| = 3$.

430. $|x - 4| + |x + 4| = 9$.

431. $|2x - 8| = 3x + 1$.

432. $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$.

433. $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$.

434. $|x| + x^3 = 0$.

435. $x^2 - 4|x| - 5 = 0$.

436. $|2x - 1| = |2x - 3|$.

Решите уравнение (437–450):

437. $|x^2 - 9| + |x - 2| = 5.$ **438.** $x^2 + 6\sqrt{x^2} = 16.$

439. $|x+1| \cdot \sqrt{x} = 1 + x.$ **440.** $|x - 1| - |x - 2| = 1.$

441. $x^2 - 3|x| + 2 = 0.$ **442.** $|x| = \sqrt{x+2}.$

443. $|3x + 5| = |2 - 3x|.$ **444.** $|4x - 6| + |2 - x| = 5.$

445. $x^2 - |x| - 6 = 0.$ **446.** $|4 - x| - |x + 1| = 5.$

447. $|2x - 1| + |x + 3| = 8.$

448. $-\dfrac{3}{|4-x|} = x,$ запишите целые корни.

449. $|4x - 5| = 5 - 2x.$ **450.** $3|x^2 + 4x + 2| = 5x + 16.$

§10. Решение уравнений с параметрами

Решить уравнение с параметром — значит для любого допустимого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения.

При решении уравнений с параметром необходимо область изменения параметра разбить на промежутки, для каждого из которых найти корни уравнения, выраженные через значения параметра. Ответ задачи состоит из перечня промежутков изменения параметра с указанием для каждого из них всех корней уравнения.

Решите уравнение (451–455):

451. $a^2x = a(x + 2) - 2.$

Решение.

Перенесем члены с неизвестным в левую часть уравнения, а известные — в правую, получаем уравнение, равносильное данному: $a(a - 1)x = 2(a - 1).$

1. Если $a \neq 0$, $a - 1 \neq 0$, $a \neq 1$, то имеем уравнение первой степени и $x = \dfrac{2}{a}$ — единственный корень.

2. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0x = -2$, значит, не имеет корней.
3. Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0x = 0$ и его корнем является любое действительное число.

Ответ: $\frac{2}{a}$ — при $a \neq 0$, $a \neq 1$;
нет корней при $a = 0$;
$x \in R$ при $a = 1$.

452. $(a + 1)x = a^2 - 1$.

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Если $a = -1$, то данное уравнение имеет вид $0x = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любое действительное число.
2. Если $a \neq -1$, уравнение имеет единственное решение $x = a - 1$.

Ответ: $x \in R$ при $a = -1$,
$a - 1$ при $a \neq -1$.

453. $(a - 1)x + 2 = a + 1$.

454. $(a^2 - 1)x + 1 + a^3 = 0$.

455. $ax + 2x + 3 = 1 - x$.

456. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a + 1)x^2 + 2(a + 1)x + a - 3 = 0$ имеет два различных корня.

457. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равен удвоенному второму корню.

458. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 2(a + 1)x + a + 3 = 0$ имеет два различных корня.

459. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых один из корней уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - (a - 4) = 0$ удовлетворяет условию $|x| \leq 1$.

460. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$ имеет единственный корень.

461*. Найдите все значения a, при которых число 2 является корнем уравнения $|x + 2a| \cdot x + 1 - a = 0$.

462. Найдите все значения a, при которых число $x = -3$ является решением неравенства $4 - |x - 2a| < x^2$.

Решение.

Подставим число $x = -3$ в данное неравенство $4 - |-3 - 2a| < 9 \Rightarrow |-3 - 2a| > -5$.

Полученное неравенство выполняется при $a \in R$, так как модуль всегда число положительное или 0, т. е. больше -5.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

463. Решите уравнение $a^2x = a(x + 2) - 2$.

Решение.

Перенесем члены с неизвестным в левую часть.

$a^2x - ax = 2a - 2;$

$a(a - 1)x = 2(a - 1).$

1) Если $a \neq 0$, $a \neq 1$, то имеем уравнение первой степени, $x = \frac{2}{a}$ – единственный корень.
2) Если $a = 0$, то уравнение имеет вид $0x = -2$, значит, не имеет корней.
3) Если $a = 1$, $0x = 0$, $x \in R$.

Ответ: $a \neq 0$, $a \neq 1 \Rightarrow x = \frac{2}{a}$; $a = 0 \Rightarrow \varnothing$; $a = 1 \Rightarrow x \in R$.

Решите уравнение (464–471):

464. $\frac{m-1}{4mx+5} = 1.$

Решение.

1) $m = 1$, уравнение имеет вид $\frac{0}{4x+5} = 1$ и не имеет корней, так как дробь равна 0 (а не 1), если числитель равен 0.
2) $m \neq 1$. ОДЗ: $4mx + 5 \neq 0$. При $m = 0$ ОДЗ представляет собой множество всех действительных чисел, а при $m \neq 0$ ОДЗ – все числа, кроме $-\frac{5}{4m}$.

3) $m = 0 \Rightarrow \dfrac{-1}{0x+5} = 1$, нет корней.

4) $m \neq 0$, $m \neq 1 \Rightarrow m - 1 = 4mx + 5$, $x = \dfrac{m-6}{4m}$ – единственный корень. Чтобы проверить, принадлежит ли ОДЗ этот корень, подставим его в знаменатель данного уравнения $4m \cdot \dfrac{m-6}{4m} = m-6$. В рассматриваемом промежутке $m - 6 \neq 0 \Rightarrow x \in$ ОДЗ.

Ответ: $m = 0$ и $m = 1$ — нет корней,

$$m \neq 0,\ m \neq 1,\ x = \frac{m-6}{4m}.$$

465. $(a^2 - 9)x = a^2 + 2a - 3$.

Решение.

Уравнение имеет смысл при любых значениях параметра.

$a^2 + 2a - 3 = (a + 3)(a - 1)$.

$(a + 3)(a - 3)x = (a + 3)(a - 1)$.

1) Если $a = -3$, то уравнение имеет вид $0x = 0 \Rightarrow x \in R$, т. е. корнем уравнения является любое действительное число.
2) Если $a \neq -3$, то $(a - 3)x = a - 1$.

   а) При $a = 3$ $0x = 2 \Rightarrow$ — нет корней.

   б) При $a \neq 3$ $x = \dfrac{a-1}{a-3}$ — единственный корень.

Ответ: $a = -3$, $x \in R$; $a = 3$, $x \in \varnothing$;

$$a \neq -3 \text{ и } a \neq 3,\ x = \frac{a-1}{a-3}.$$

466. $\dfrac{x-4}{x+1} - \dfrac{1}{a(x+1)} = -\dfrac{2}{a}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -1$, $a \neq 0$.

Умножим обе части уравнения на $a(x + 1) \neq 0$.

$(a + 2) \cdot x = 4a - 1$.

1) Если $a = -2$, то $0x = -9 \Rightarrow x \in \varnothing$.

2) Если $a \neq -2$, то $x = \dfrac{4a-1}{a+2}$, но $x \neq -1$. Проверим, нет ли значений a, при которых $x = -1$.

$$\frac{4a-1}{a+2} = -1, \quad 4a-1 = -a-2 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}.$$

Ответ: $a \neq 0$; $a \neq -2$, $a \neq -0{,}2 \Rightarrow x = \dfrac{4a-1}{a+2}$.

$a \neq 0$, $a = -2$, $x \in \varnothing$.

467. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{a+1}{a}$.

468. $\dfrac{3ax-5}{(a-1)(x+3)} + \dfrac{3a-11}{a-1} = \dfrac{2x+7}{x+3}$.

469. $(a - 1)x + 2 = a + 1$.

470. $ax + 2x + 3 = 1 - x$.

471. $(t - 1)x^2 - 2x - t = 0$.

472. Сколько различных корней имеет уравнение $2x^2(x + 1) = kx$ в зависимости от значений параметра k?

Решение.

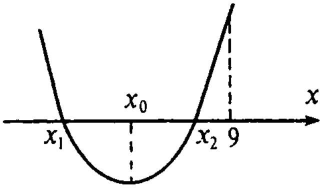
1) $x(2x^2 + 2x - k) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Один корень есть всегда, независимо от k.
2) $2x^2 + 2x - k = 0$, $D = 1 + 2k$.
   а) $D = 0$, т. е. $k = -0{,}5 \Rightarrow x_2 = x_3 = -0{,}5$.
   б) $D > 0$, т. е. $k > -0{,}5$, уравнение имеет два корня, но если $k = 0$, то корни равны 0 (рассмотрено в первом действии).
   в) $D < 0$, $k < -0{,}5$ — действительных корней нет.

Ответ: $k = -0{,}5$ $x_1 = 0$; $x_2 = x_3 = -0{,}5$ (два корня).
$k < -0{,}5$ — один корень ($x = 0$).
$k = 0$ — два корня.
$k \in (-0{,}5; 0) \cup (0; \infty)$ — три корня.

473. Сколько корней имеет уравнение $3x(x-1)^2 = kx$ в зависимости от значения параметра k?

474. Найдите все значения a, при которых больший корень уравнения $x^2-(14a-9)x+49a^2-63a+20=0$ меньше 9.

Решение.



Изобразим график функции $f(x) = x^2-(14a-9)x+$ $+49a^2-63a+20$.

$f'(x) = 2x-(14a-9)=0.$

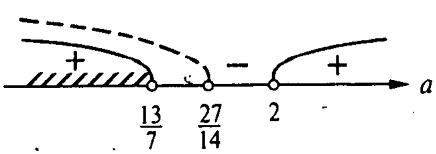
$x_0 = \dfrac{14a-9}{2}$ — уравнение оси симметрии параболы.

$$\begin{cases} f(9) > 0, \\ \dfrac{14a-9}{2} < 9, \\ D > 0 \text{ (так как уравнение по условию имеет 2 корня).} \end{cases}$$

$f(9) = 9^2-(14a-9)x+49a^2-63a+20>0,$

$$\begin{cases} 49a^2-189a+182>0, \\ a < \dfrac{27}{14}, \\ 196a^2-252a+81-196a^2+252a-80>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7a^2-27a+26>0, \\ a<\dfrac{27}{14}, \\ 1>0. \end{cases}$$

$a_{1,2} = \dfrac{27\pm1}{14}$; $a_1 = 2$; $a_2 = \dfrac{13}{7}$.



При $a < \frac{13}{7}$ больший корень данного уравнения меньше 9.

Ответ: $a < 1\frac{6}{7}$.

§11. Задания для подготовки к ЕГЭ

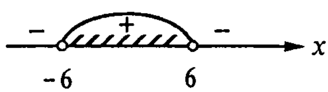
Решите уравнение. Если уравнение имеет больше одного корня, найдите сумму корней (475–479):

475. $2x^2 - \left(\frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{6-x}} + \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x}}\right)\cdot\sqrt{36-x^2} - 7x + 17 = 0.$

Решение.

ОДЗ: $36 - x^2 > 0$;

$x \in (-6; 6)$.



Упростим выражение

$$\left(\frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{6-x}} + \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x}}\right)\cdot\sqrt{36-x^2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6+x}\right)^2 + \left(\sqrt{6-x}\right)^2}{\sqrt{6-x}\cdot\sqrt{6+x}}\cdot\sqrt{36-x^2} = *$$

Согласно ОДЗ $36 - x^2 \neq 0$, можно сократить на $\sqrt{36-x^2}$.

$* = 6 + x + 6 - x = 12.$

Данное уравнение имеет вид

$2x^2 - 12 - 7x + 17 = 0$; $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

Сумма коэффициентов уравнения $2 - 7 + 5 = 0$, значит, $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

$x_1 + x_2 = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

476. $\left(\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}+\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}\right)\cdot\sqrt{4-x^2}-8x+5x^2-8=0.$

477. $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)=35.$

478. $\sqrt{2x^2+x-6}=-x.$

479. $\sqrt{2x^2+2x-8}+x=0.$

Найдите сумму целых корней уравнения (480–485):

480. $(x+2)(x-4)(x+5)(x-10)=220x^2.$

Решение.

Отметим, что $x=0$ не является корнем данного уравнения, т. е. $x\neq 0$.

Перемножим двучлены попарно. При подборе пар необходимо получить одинаковые свободные члены в многочленах, которые составят результат умножения.

$[(x+2)(x-10)][(x-4)(x+5)]=220x^2.$

$(x^2-8x-20)(x^2+x-20)=220x^2$, разделим каждый трехчлен левой части уравнения на x, следовательно, обе части – на x^2, учитывая, что $x\neq 0$.

$$\left(x-\frac{20}{x}-8\right)\left(x-\frac{20}{x}+1\right)=220.$$

Введем новую переменную $x-\dfrac{20}{x}=t$, получим уравнение $(t-8)(t+1)=220\Rightarrow t^2-7t-228=0\Rightarrow t_1=-12$; $t_2=19$.

1) $t_1=-12\Rightarrow x-\dfrac{20}{x}=-12\Rightarrow x^2+12x-20=0,$

$x=-6\pm\sqrt{36+20}$ — целых корней нет.

2) $t_2=19\Rightarrow x-\dfrac{20}{x}=19\Rightarrow x^2-19x-20=0\Rightarrow x_1=-1$; $x_2=20$.

$x_1+x_2=19.$

Ответ: 19.

481. $(x-2)(x+3)(6-x)(x+9)=24x^2$.

482. $(x-2)(x-6)(x+3)(x+4)+126x^2=0$.

483. $(x^2+2x-8)(x^2-5x-50)=270x^2$.

484. $(x-3)(x+6)(x^2-2x-8)=126x^2$.

485. $(x+6)(x+2)(12-x)(x-4)+160x^2=0$.

486. Найдите сумму корней уравнения

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=6.$$

Решение.

Преобразуем первое слагаемое, применив формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)^x}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^x}=\frac{(9-8)^x}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^x}=\frac{1}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^x}.$$

Введем новую переменную $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=t>0$.

Данное уравнение примет вид $\frac{1}{t}+t=6,\ t\neq 0$.

$t^2-6t+1=0;\ t_{1,2}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm 2\sqrt{2}$.

1) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=3-2\sqrt{2}\Rightarrow x_1=1$.

2) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=3+2\sqrt{2};\ \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^x\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}=\frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}=$

$=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-x}$;

$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=3+2\sqrt{2}\Rightarrow -x=1\Rightarrow x_2=-1$.

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют уравнению.

$x_1+x_2=0$.

Ответ: 0.

Найдите произведение корней уравнения (487–492):

487. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14.$

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x\cdot\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x}{\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x}+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14.$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x}+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14;\quad \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=t>0.$$

$$\frac{1}{t}+t=14\ \Rightarrow t^2-14t+1=0;\quad t_{1,2}=7\pm\sqrt{49-1}=7\pm\sqrt{48}.$$

1) $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=7-\sqrt{48}\Rightarrow\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{\frac{x}{2}}=7-\sqrt{48}\Rightarrow x_1=2.$

2) $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=7+\sqrt{48};\quad \dfrac{\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x\cdot\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x}{\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x}=$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x}=\left(7+\sqrt{48}\right)^{-\frac{x}{2}};$$

$$\left(7+\sqrt{48}\right)^{-\frac{x}{2}}=7+\sqrt{48}\Rightarrow-\frac{x}{2}=1\Rightarrow x_2=-2.$$

$x_1\cdot x_2=2\cdot(-2)=-4.$

Ответ: -4.

488. $(x^2+2x-7)^2+2\cdot(x^2+2x-7)-7=x.$

489. $x^3 - x^2 - \dfrac{8}{x^3 - x^2} = 2.$

Решение.

ОДЗ: $x^3 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2(x - 1) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq 1$.

Введем новую переменную:

$x^3 - x^2 = t \neq 0$.

$t - \dfrac{8}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = -2$; $t_2 = 4$.

1) $x^3 - x^2 = -2 \Rightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0$, $x_1 = -1$ (подставили в уравнение один из делителей свободного члена).

$(x^3 - x^2 + 2) : (x + 1) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow$ данное уравнение равносильно уравнению $(x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0 \Rightarrow$ либо $(x + 1) = 0$, либо $x^2 - 2x + 2 = 0$, но $D_1 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 > > 0 \ \forall \ x \in R$.

Получили один корень $x_1 = -1$.

2) $x^3 - x^2 = 4 \Rightarrow x^3 - x^2 - 4 = 0$, $x_2 = 2 \Rightarrow x^3 - x^2 = 4 = (x - - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$.

$x^2 + x + 2 > 0 \ \forall \ x \in R$, так как $D < 0$.

3) $x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot 2 = -2$.

Ответ: -2.

490. $\sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}} - 3\sqrt{\dfrac{x + 1}{x^2 - 2x - 3}} = -2.$

491. $6\sqrt{2x + 1} - \dfrac{5}{\sqrt{2x + 1}} + 13 = 0.$

492. $\sqrt{4x + 17} - 3 = |x + 2|.$

Решение.

ОДЗ: $4x + 17 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{17}{4}$.

1) $x + 2 \geq 0$; $x \geq -2 \Rightarrow |x + 2| = x + 2$, так как модуль неотрицательного числа – само число.

Данное уравнение примет вид $\sqrt{4x + 17} - 3 = x + 2$,

$\sqrt{4x + 17} = x + 5$, $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

Получим квадратное уравнение

$x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \notin [-2; \infty);$

$x_2 = -2.$

2) $x + 2 < 0;\ x < -2 \Rightarrow |x + 2| = -x - 2$, как модуль отрицательного числа.

$\sqrt{4x+17} = -x-2+3 \Rightarrow \sqrt{4x+17} = 1-x,\ 1 - x \geq 0,\ x < 1.$

$4x + 17 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 8 \notin (-\infty; -2);$

$x_2 = -2$, не удовлетворяет второму условию ($x < -2$).

Однако в первой части решения этот корень был получен.

Ответ: -2.

Решите уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, найдите их сумму (493–508):

493. $\sqrt{4x+13} = |x+1| - 9.$

494. $\sqrt{3y+19} = |y-5| - 2.$

495. $|y+1| = 2 + \sqrt{3y+37}.$

496. $(x^2 - 5x)^2 - 3(x - 2)(x - 3) + 8 = 0.$

497. $(x^2 - 6x + 10)^2 - 4(x - 3)^2 - 1 = 0.$

498. $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42.$

499. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1.$

500. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4.$

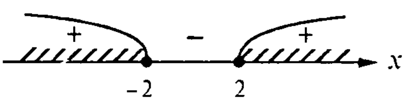
501. $\sqrt{2x^2 + 2x - 8} + x = 0.$

502. $x\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4} = 0.$

Решение.

ОДЗ: $x^2 - 4 \geq 0.$

$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty).$



Вынесем общий множитель за скобки: $\sqrt{x^2 - 4}(x + 1) = 0.$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю (другие при этом не теряют смысла).

$x^2 - 4 = 0$ | $x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2$ | $x_3 = -1 \notin$ ОДЗ.

$x_1 + x_2 = 0.$

Ответ: 0.

503. $\sqrt{x^2 + 11} = 6.$

504. $\sqrt[4]{15x + 31} + 5\sqrt[8]{15x + 31} - 14 = 0.$

505. $\sqrt[3]{12x - 5} + 8\sqrt[6]{12x - 5} - 9 = 0.$

506. $\left(x^2 - 16\right)^4 \cdot \sqrt{-4x - 5} = 0.$

507. $(5x^2 - 7x + 3)(5x^2 + x + 3) = 20x^2.$

Решение.

Отметим, что $x \neq 0$, так как $x = 0$ не является корнем уравнения.

Разделим две части уравнения на x^2.

$$\left(5x + \frac{3}{x} - 7\right)\left(5x + \frac{3}{x} + 1\right) = 20.$$

Пусть $5x + \frac{3}{x} = t \Rightarrow (t - 7)(t + 1) = 20 \Rightarrow t^2 - 6t - 27 = 0 \Rightarrow t_1 = -3;\ t_2 = 9.$

1) $t_1 = -3;\ 5x + \frac{3}{x} = -3 \Rightarrow 5x^2 + 3x + 3 = 0.\ D = 9 - 60 < 0,$ уравнение действительных корней не имеет.

2) $5x + \frac{3}{x} = 9 \Rightarrow 5x^2 - 9x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10};$

$$x_1 + x_2 = \frac{9 + \sqrt{21} + 9 - \sqrt{21}}{10} = 1{,}8.$$

Ответ: 1,8.

508. $\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45} = 5x^2 - x^3 + 9x - 45.$

Решение.

Нахождение ОДЗ заменим проверкой.

$$\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45} = -\left(x^3 - 5x^2 - 9x + 45\right).$$

$\sqrt{x^3-5x^2-9x+45}=t>0.$

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2-9x+45 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} \quad\quad\quad\quad & x^2-2x-15 \\ -2x^2-9x+45 & \\ \underline{-2x^2+6x} \quad\quad & \\ -15x+45 & \\ \underline{-15x+45} & \\ 0 & \end{array}$$

$t=-t^2 \Rightarrow t+t^2=0;\ t(1+t)=0 \Rightarrow t_1=0;$
$t_2=-1 \notin (0;\ \infty),\ t>0.$
$x^3-5x^2-9x+45=0,\ x_1=3.$
$x^3-5x^2-9x+45=(x-3)(x^2-2x-15),$
$x^2-2x-15=0 \Rightarrow x_2=-3;\ x_3=5.$

Проверка показывает, что числа –3; 3 и 5 являются корнями данного уравнения.

$x_1+x_2+x_3=3-3+5=5.$

Ответ: 5.

Решите уравнение, если оно имеет более одного корня, найдите сумму корней (509–514):

509. $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2.$

510. $(y+2)\sqrt{4y-3}=3y^2\sqrt{4y-3}.$

511. $4\sqrt{x-3}-x^2\left(\sqrt{x-3}\right)=0.$ **512.** $x^2\sqrt{10x-3}=x\sqrt{10x-3}.$

513. $x^2\sqrt{4x+1}+x\sqrt{4x+1}=0.$ **514.** $8\sqrt{16-x^2}-x\sqrt{16-x^2}=0.$

Найдите произведение корней уравнения (515–517):

515. $5x^2\sqrt{4x-1}-(3x+2)\sqrt{4x-1}=0.$

516. $x^2\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}-9\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}=0.$ **517.** $4\cdot\sqrt{\dfrac{5-y}{y}}-y^2\cdot\sqrt{\dfrac{5-y}{y}}=0.$

Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, то найдите сумму всех корней (518; 519):

518. $\sqrt{10x+25}+\sqrt[4]{10x+25}=30.$

519. $2\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}-\left(x^2-6x+9\right)^{\frac{1}{3}}=2.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-2+2\sqrt{x-3}>0, \\ x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3. \end{cases}$$

Так как нахождение более точной ОДЗ требует достаточно длительного решения, заменим проверкой.

Выражение $x-2+2\sqrt{x-3}$ представим в виде полного квадрата.

$x-2+2\sqrt{x-3}=a^2+2ab+b^2.$

$2\sqrt{x-3}=2ab \Rightarrow a=1; \quad b=\sqrt{x-3}.$

$a^2+b^2=1+x-3=x-2.$

Значит, $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{x-3}\right)^2}=\left|1+\sqrt{x-3}\right|=$

$=1+\sqrt{x-3}$ (под знаком модуля — сумма положительного и неотрицательного чисел).

Уравнение имеет вид $2\left(1+\sqrt{x-3}\right)-(x-3)^{\frac{2}{3}}=2.$

$$2+2(x-3)^{\frac{1}{2}}-(x-3)^{\frac{2}{3}}=2 \Rightarrow 2(x-3)^{\frac{1}{2}}=(x-3)^{\frac{2}{3}}.$$

Возведем две части уравнения в шестую степень, получим $64(x-3)^3-(x-3)^4=0 \Rightarrow (x-3)^3(64-x+3)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=3;\ x_2=67$. Проверка показывает, что числа 3 и 67 являются корнями данного уравнения.

$x_1+x_2=3+67=70.$

Ответ: 70.

Решите задачу (520—523), не применяя производную функции.

520. Две прямые $y=-4x$ и $y=6x+5$ касаются параболы $y=x^2+bx+c$. Найдите значения b и c.

521. Прямая, параллельная прямой $y = -6x$, касается параболы $y = x^2$. Найдите координаты точки касания.

522. Прямая, перпендикулярная прямой $y = x$, касается параболы $y = x^2 + x$. Найдите координаты точки касания.

523. Прямая, параллельная прямой $y = -4x$, касается параболы $y = x^2$. Найдите координаты точки касания.

§12. Применение уравнений к решению задач (B12)

Задачи на совместную работу и производительность труда

Запомните!

Производительность труда — это количество продукции (или часть работы), произведенной в единицу времени (за час, неделю, месяц, год и т. д.).

Производительность труда и время, затраченное на работу, — обратные величины.

524. Двум рабочим поручили изготовить 800 деталей. Первый изготовил 320 деталей и затратил в 6 раз меньше времени, чем второй на изготовление остальных деталей. На сколько деталей меньше первый рабочий должен был отдать второму (добавив их себе), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили работу за одинаковое время?

Решение.

Пусть на m деталей меньше I рабочий должен отдать второму.

Рабочие	Количество деталей	Производительность	Время	Новое количество	Время на новое количество
I	320	a	$\frac{320}{a}$	$320 + m$	$\frac{320+m}{a}$
II	480	b	$\frac{480}{b}$	$480 - m$	$\frac{480-m}{b}$

$$\begin{cases} \dfrac{320 \cdot 6}{a} = \dfrac{480}{b}, \\ \dfrac{320+m}{a} = \dfrac{480-m}{b}. \end{cases}$$

Из первого уравнения $a = 4b$.

Подставим это выражение во второе уравнение.

$$\frac{320+m}{4b} = \frac{480-m}{b}.$$

Умножим две части уравнения на $4b$.

$320 + m = 1920 - 4m$; $5m = 1600$, $m = 320$.

Ответ: 320.

525. Три токаря, работая одновременно, могут выполнить заказ за 5 ч. Если они будут работать раздельно, то первый выполнит работу в 2 раза быстрее, чем второй, но на 5 ч медленнее, чем третий. За сколько часов совместной работы выполнят заказ два первых токаря?

Решение.

Объем работы принимаем за 1.

Токарь	Время на всю работу, ч	Часть работы за 1 ч
I	x	$\frac{1}{x}$
II	$2x$	$\frac{1}{2x}$
III	$x-5$	$\frac{1}{x-5}$
I + II + III	5	$\frac{1}{5}$

Следует найти $1 : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\right) = 1 : \frac{3}{2x} = \frac{2x}{3}$, так как производительность труда и время, затраченное на всю работу, — взаимно обратные величины.

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{5} \Rightarrow 2x^2 - 35x + 75 = 0,\ x_1 = 2{,}5,\ x_1 \text{ не удов-}$$

летворяет принятому обозначению, так как $x - 5 = -2{,}5$.

$$x_2 = 15 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 10\ (\text{ч}).$$

Ответ: 10.

526. Одна бригада может выполнить ремонт на 5 дней быстрее, чем вторая, но на 4 дня дольше, чем третья. Работая вместе, первая и вторая выполнят ремонт за то же время, что одна третья. За сколько дней выполнят ремонт три бригады, работая вместе?

527. Три трактора могут вспахать поле за 1 ч 20 мин. Первый один может вспахать это поле в 2 раза быстрее, чем третий. За сколько часов вспашут поле первый и второй трактора?

528. Работая отдельно, первый оператор печатает рукопись на компьютере на 16 ч быстрее, чем второй, но на 2 ч дольше, чем третий. Работая вместе, первый и второй операторы выполнят работу за то же время, что и третий. За сколько часов будет напечатана рукопись при совместной работе трех операторов?

529. Одна бригада может выполнить ремонт здания на 15 дней быстрее, чем вторая, но на 5 дней дольше, чем третья. Третья бригада может выполнить ремонт за столько же дней, сколько будут трудиться первая и вторая бригады вместе. За сколько дней выполнят ремонт три бригады, работая совместно?

530. Две бригады, работая одновременно, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок первая бригада, работая самостоятельно, если их производительность относится как 3 : 2?

531. Заказ на доставку овощей распределили между двумя фермерами. Первый получил 40% заказа и справился с работой в 6 раз быстрее, чем второй с оставшейся частью. Сколько процентов от общего заказа надо было выдать первому фермеру, чтобы оба фермера, работая с той же производительностью, выполнили работу за одинаковое время?

532. Студент рассчитал, что если будет набирать на компьютере на 2 листа больше, чем он запланировал ранее, то закончит работу на 2 дня раньше намеченного срока, а если будет печатать на 60% больше запланированной дневной нормы, то закончит на 4 дня раньше срока и напечатает еще 8 листов реферата. За сколько дней студент планировал напечатать дипломную работу?

533. Пароход начали загружать 4 крана одинаковой мощности. После того как они проработали 2 ч, к ним присоединились еще два крана меньшей мощности, и погрузка была закончена через 3 ч после этого. Если бы все краны начали работать одновременно, то пароход был бы загружен за 4,5 ч. За сколько часов мог бы выполнить всю работу один кран большей мощности?

534. Две сеялки, работая вместе, за 1 день могут засеять 10 га земли. Первая, работая отдельно, 60 га засеет на 5 дней дольше, чем вторая. За сколько дней вторая сеялка обработает 90 га земли?

535. Выпускник вуза рассчитал, что если он будет набирать на компьютере на 2 листа в день больше установленной для себя нормы, то напечатает дипломную работу на 3 дня раньше срока; если же он будет набирать по 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов в дипломной работе?

Решение.

Пусть дипломную работу нужно сдать через y дней и студент планировал печатать x страниц в день, тогда запланированная работа содержит xy страниц.

Варианты	За 1 день	Время на всю работу, дней	Количество страниц (всего)
I	$(x + 2)$ с	$y - 3$	$(x + 2)(y - 3)$с
II	$(x + 4)$ с	$y - 5$	$(x + 4)(y - 5)$ с

$$\begin{cases}(x+2)(y-3)=xy, \\ (x+4)(y-5)=xy;\end{cases} \quad \begin{cases}xy+2y-3x-6=xy, \\ xy+4y-5x-20=xy;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y-3x=6, \\ 4y-5x=20;\end{cases} \left|\begin{matrix}-2 \\ \\ \end{matrix}\right|$$

$$+\begin{cases}-4y+6x=-12, \\ 4y-5x=20;\end{cases}$$

$$x = 8.$$

Из первого уравнения найдем $y=\dfrac{6+3x}{2}$;

$y=\dfrac{6+24}{2}=15.$

В дипломной работе было 15 · 8 = 120 (листов).

Ответ: 120.

536.1. Два токаря, работая вместе могут выполнить заказ за 4 дня. Производительность первого в два раза больше, чем у второго. Вместе они проработали один день, потом некотрое время работал только второй токарь, а заканчивал один первый. Сколько дней в общей сложности проработал над заказом первый токарь, если работа была выполнена за 7 дней?

536.2. Первая труба пропускает на 3 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если бассейн объемом 832 л она заполняет на 6 мин раньше, чем первая труба заполняет бассейн объемом 928 л?

537.1. Партию деталей можно изготовить на трех станках разной производительности. Первый станок весь заказ может выполнить на 8 ч быстрее, чем второй станок, но на 1 ч дольше, чем третий. Работая вместе, первый и второй станки выполнят этот заказ за то же время, что и третий станок. За сколько часов можно изготовить всю партию деталей, если будут работать три станка?

537.2. Первая труба пропускает на 1 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 930 л она заполняет на 1 мин раньше, чем первая труба?

538.1. Используя совместно три машины разной грузоподъемности, можно вывезти всю продукцию со склада за 4 дня. Первая машина может выполнить эту работу в 2 раза быстрее, чем вторая, но затрачивает на 4 дня больше, чем третья машина. За сколько дней, работая вместе, вывезут всю продукцию со склада второй и третий автомобили?

538.2. Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй, и 621 деталь изготовляет на 4 ч раньше, чем второй изготовляет 675 таких же деталей. Сколько деталей в час изготовляет первый рабочий?

539. Двое рабочих, из которых второй начал работать на 1,5 дня позже первого, выполнили заказ за 7 дней, считая с момента выхода первого на работу. На выполнение заказа одному первому рабочему требуется на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно может выполнить этот заказ?

540. Две машины, работая вместе, могут разгрузить вагон за 12 ч. Грузоподъемность первой и второй относятся как 1 : 3. Водители машин договорились работать поочередно. Сколько времени должна проработать первая машина, чтобы вагон был разгружен за 20 ч?

541. Производительность труда мастера в два раза выше, чем у практиканта. Работая вместе, они могут выполнить заказ за 4 ч. Вместе они проработали один час, потом работал один практикант, а заканчивал работу мастер. Сколько часов в общей сложности проработал мастер, если вся работа была выполнена за 7 ч?

Решение.

Работники	Производительность	Время работы отдельно, ч	Часть работы
Мастер	$2x$	a	$2ax$
Практикант	x	$6 - a$	$(6 - a)x$

При совместной работе за 1 ч выполняется $\frac{1}{4}$ часть заказа, т. е. $2x+x=\frac{1}{4}$.

$3x=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}+\frac{6-a}{12}+\frac{2a}{12}=1$
$x=\frac{1}{12}$	$3+6-a+2a=12$
$3x+(6-a)x+2ax=1$	$a=3$

Мастер работал 3 ч и 1 ч вместе с практикантом.
Ответ: 4.

542. Два плотника, работая вместе, могут выполнить задание за 36 ч. Производительности труда первого и второго плотников относятся как 3 : 4. Плотники договорились работать поочередно. Какую часть этого задания должен выполнить второй плотник, чтобы все задание было выполнено за 69,3 ч?

543. Первой бригаде было поручено выполнить малярные работы в 40% квартир строящегося дома, и она справилась с работой в 6 раз быстрее, чем вторая бригада, с отделкой остальных квартир. Сколько процентов квартир следовало отдать второй бригаде, чтобы малярные работы закончились одновременно?

Решение.
Объем работ принимаем за 1.

Бригады	Объем работ	Производительность	Время	Предполагаемый объем работ, %	Предполагаемое время
I	0,4	a	$\frac{0,4}{a}$	$100-m$	$\frac{100-m}{100a}$
II	0,6	b	$\frac{0,6}{b}$	m	$\frac{m}{100b}$

$\frac{0,4}{a} < \frac{0,6}{b}$ в 6 раз $\Rightarrow \frac{0,4 \cdot 6}{a} = \frac{0,6}{b} \Rightarrow a = 4b.$

$\frac{100-m}{a} = \frac{m}{b}$; $= \frac{100-m}{4b} = \frac{m}{b}$; $100 = 5m$; $m = 20\%$.

Ответ: 20.

544. Два фермера, работая вместе, могут вспахать поле за 25 ч. Производительности труда первого и второго фермеров относятся как 2 : 5. Фермеры планируют работать поочередно. Сколько времени должен проработать второй фермер, чтобы это поле было вспахано за 45,5 ч?

545. Одна машинистка напечатала 60% рукописи и выполнила свою часть работы в 2,5 раза быстрее, чем вторая. Сколько процентов рукописи должна была взять первая машинистка, чтобы, работая с прежней производительностью, они одновременно закончили работу?

546. Первому токарю отдали для изготовления 60% общего количества заказанных деталей. Он выполнил работу в 2 раза быстрее, чем второй. Сколько процентов заказа надо было отдать второму токарю, чтобы они выполнили работу за одинаковое время?

547. Второй мастер выполняет норму на 1 ч быстрее, чем первый. Если бы производительность первого мастера была на 25% меньше, а второго – на 40% больше, то, работая вместе, они выполнили бы норму за 2 ч. За сколько часов выполняет норму второй мастер?

Решение.

Примем норму за единицу.

<table>
<tr><th>Мастер</th><th>Производительность</th><th>Время на норму</th><th>Изменение производительности</th><th>Время на норму</th></tr>
<tr><td>I</td><td>a</td><td>$\frac{1}{a}$</td><td>$0,75a$</td><td rowspan="2">$\frac{1}{0,75a+1,4b}$</td></tr>
<tr><td>II</td><td>b</td><td>$\frac{1}{b}$ – ?</td><td>$1,4b$</td></tr>
</table>

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ на 1 ч $\Rightarrow$ $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow a = \frac{b}{b+1}$.

$\frac{1}{0{,}75a + 1{,}4b} = 2$ $\Rightarrow$ $1{,}5a + 2{,}8b = 1$. Умножим две части уравнения на 10 и подставим значение $a = \frac{b}{b+1}$, получим $\frac{15b}{b+1} + 28b = 10$.

$28b^2 + 33b - 10 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{-33-47}{56} < 0$, не удовлетворяет принятому обозначению.

$b_2 = \frac{-33+47}{56} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$ | $b = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{b} = 4$.

Ответ: 4.

548. На одном из двух станков партию деталей обрабатывают на 3 дня дольше, чем на другом. За сколько дней можно обработать эту партию деталей каждым станком в отдельности, если при совместной работе этих станков втрое большая партия деталей была обработана за 20 дней?

549. Два завода взялись выполнить заказ за 12 дней. Через 2 дня первый завод был закрыт, заканчивал работу второй, производительность которого составляет $\frac{2}{3}$ производительности первого завода. Через сколько дней после закрытия первого завода был выполнен заказ?

Задачи на движение

550. За 200 км до станции назначения поезд был задержан на 1 ч. Затем машинист увеличил скорость поезда на 10 км/ч, и поезд прибыл на станцию по расписанию. С какой скоростью поезд ехал до остановки?

Решение.

Движение	Скорость, км/ч	Время на 200 км, ч
До остановки	x	$\frac{200}{x}$
После остановки	$x+10$	$\frac{200}{x+10}$

На оставшиеся до станции 200 км поезд затратил на 1 ч меньше времени, чем по расписанию.

$\frac{200}{x}-\frac{200}{x+10}=1$. НОЗ: $x(x+10)\neq 0$.

$200x+2000-200x=x^2+10x$.

$x^2+10x-2000=0$.

$x=-5\pm\sqrt{25+2000}=-5\pm 45;$

$x_1=-5$ – не удовлетворяет принятому обозначению.

$x_2=40$.

Ответ: 40.

551. Турист проплыл по реке на лодке 90 км, затем прошел пешком 10 км, затратив на пеший путь на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько часов он шел пешком?

Решение.

Движение	t, ч	S, км	v, км/ч
По реке	$x+4$	90	$\frac{90}{x+4}$
Пешком	x	10	$\frac{10}{x}$

$\frac{90x}{x+4}=\frac{10\cdot(x+4)}{x}$, НОЗ: $x(x+4)\neq 0$.

$9x^2=(x+4)^2$.

$8x^2 - 8x - 16 = 0.$
$x^2 - x - 2 = 0.$
$x_1 = -1$ – не соответствует принятому обозначению.
$x_2 = 2.$
Ответ: 2.

552. Из пункта M в пункт N одновременно выехали два мотоциклиста. Первый проехал половину пути со скоростью на 17 км/ч меньшей скорости второго, а вторую половину пути — со скоростью 102 км/ч. Второй ехал с постоянной скоростью, и в N они прибыли одновременно. Найдите скорость второго мотоциклиста, если известно, что она больше 58 км/ч.

553. Турист, добираясь из пункта A в пункт B, 75% всего пути проехал на велосипеде, оставшуюся часть прошел пешком, причем на пеший переход затратил времени в 3 раза больше. Обратный путь турист проделал по другому маршруту такой же длины, причем одинаковое время шел пешком и ехал на велосипеде. Сколько процентов пути турист прошел пешком, возвращаясь в пункт A? (Скорости движения пешком и на велосипеде считать постоянными.)

Решение.
Пусть расстояние от A до B — x км.

Путь	Расстояние		Скорость		Время	
	пешком	на велосипеде	пешком	на велосипеде	пешком	на велосипеде
От A до B	$0{,}25x$	$0{,}75x$	a	b	$\frac{0{,}25x}{a}$	$\frac{0{,}75x}{b}$
От B до A	m	$x-m$	a	b	$\frac{m}{a}$	$\frac{x-m}{b}$

Нужно найти $\frac{m}{x}\cdot 100\%$ — процентное отношение чисел m и x.

При движении от A до B на пеший путь затрачено времени в 3 раза больше.

$$\frac{3\cdot 0{,}75x}{b}=\frac{0{,}25x}{a}\Rightarrow b=9a.$$

На обратном пути одинаковое время затрачено на путь пешком и на велосипеде.

$$\frac{m}{a}=\frac{x-m}{b}\Rightarrow\frac{m}{a}=\frac{x-m}{9a}\Rightarrow 9m=x-m\quad(:x).\quad\frac{9m}{x}=1-\frac{m}{x}.$$

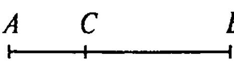
$$\frac{10m}{x}=1;\quad\frac{m}{x}=0{,}1.\ 0{,}1\cdot 100\% = 10\%.$$

Ответ: 10.

554. Из города A в город B, расстояние между которыми равно 48 км, прошел с постоянной скоростью пешеход. Через 3 дня он отправился обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 ч и затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от A до B. Найдите скорость пешехода на пути от A до B.

555.1. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми равно 40 км, и встречаются через два часа после выезда. Затем они продолжают путь, велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B. Найдите скорость пешехода, полагая, что она все время оставалась неизменной.

Решение.



C — пункт встречи.

Участники движения	Скорость, км/ч	Время до встречи, ч	Расстояние: до встречи, км	Расстояние: после встречи, км	Время после встречи, ч	Сближаются за 1 ч
Пешеход	x	2	$2x$ (AC)	$40-2x$ (CB)	$\frac{40-2x}{x}$	$(x+y)$ км/ч
Велосипедист	y	2	$2y=40-2x$ (CB)	$2x$ (CA)	$\frac{2x}{y}$	

$$\begin{cases} 2(x+y)=40, \\ \dfrac{40-2x}{x}-\dfrac{2x}{y}=7{,}5. \end{cases}$$

1) Из первого уравнения системы находим $x + y = 20$; $y = 20 - x$.

2) $\dfrac{40-2x}{x}-\dfrac{2x}{y}=7{,}5 \Rightarrow 7{,}5x^2-230x+800=0.$

$x_1 = 4$; $x_2 = \dfrac{80}{3}$ — не удовлетворяет принятому обозначению.

Ответ: 4.

555.2. Из пунктов *А* и *Б*, расстояние между которыми равно 60 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Средняя скорость велосипедиста, выехавшего из *Б*, была вдвое больше скорости другого. После встречи каждый из них вернулся обратно, увеличив скорость на 2 км/ч. В пункт *Б* велосипедист прибыл на 5 мин позже, чем другой в *А*. Найдите первоначальную скорость велосипедиста, выехавшего из *Б*.

Решение.

Велосипедисты	Скорость до встречи, км/ч	Расстояние до встречи, км	Скорость после встречи, км/ч	Время после встречи, ч
I из *А*	x	20	$x+2$	$\dfrac{20}{x+2}$
II из *Б*	$2x$	40	$2x+2$	$\dfrac{40}{2x+2}=\dfrac{20}{x+1}$

Так как скорости велосипедистов относятся как 1 : 2, а скорость и расстояние — прямо пропорциональные величины, то растояния, пройденные велосипедистами до встречи относятся как 1 : 2, т. е. первый проехал $\frac{60}{3} = 20$ (км), второй $\frac{60 \cdot 2}{3} = 40$ (км).

5 мин = $\frac{1}{12}$ ч.

$\frac{20}{x+1} - \frac{20}{x+2} = \frac{1}{12}$. НОЗ. $12(x + 1)(x + 2)$, $x \neq -1$; $x \neq -2$.

Уравнение примет вид $x^2 + 3x - 238 = 0$, $x_1 = -17$ — не удовлетворяет принятому обозначению.

$x_1 = 14$. Значит, скорость второго велосипедиста равна 28 км/ч.

Ответ: 28.

556. Два парохода одновременно вышли из порта, один направился на север, другой — на восток. Через два часа расстояние между ними было равно 60 км. Найдите скорость каждого парохода, если скорость одного из них на 6 км больше скорости другого.

Решение.

Направления на север и на восток взаимно перпендикулярны, значит, порт и точки, в которых оказались пароходы, можно считать вершинами прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 60 км (расстояние между двумя точками измеряется по прямой линии). Пусть скорость одного парохода x км/ч, другого — $(x + 6)$ км/ч. Применив теорему Пифагора, запишем

$(2x)^2 + [2(x + 6)]^2 = 60^2$,

$4x^2 + 4(x^2 + 12x + 36) - 3600 = 0$, сократим на 4, приведем подобные члены, получим квадратное уравнение

$x^2 + 6x - 432 = 0$; $x_1 = -24$ (не удовлетворяет, так как скорость не может быть отрицательным числом); $x_2 = 18$, скорость второго 24.

Ответ: 18; 24.

557. Мотоциклист и велосипедист совершили двухчасовую прогулку в лес и обратно. Мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из них, если мотоциклист проехал на 40 км больше?

Решение.

Участники движения	Расстояние, км	Время, ч	Скорость, км/ч	Время на 1 км, мин
Велосипедист	$x-40$	2	$\frac{x-40}{2}$	$\frac{120}{x-40}$
Мотоциклист	x	2	$\frac{x}{2}$	$\frac{120}{x}$

$\frac{120}{x} > \frac{120}{x-40}$ на 4 мин.

$\frac{120}{x} - \frac{120}{x-40} = 4$. Умножим обе части уравнения на $x(x - 40) \neq 0$ (освободимся от общего знаменателя), приведем подобные члены и получим уравнение $x^2 - 40x - 1200 = 0$,

$x = 20 \pm \sqrt{400+1200} = 20 \pm 40.$

Отрицательный корень не удовлетворяет принятому обозначению x (расстояние).

$x = 60$ км, $x - 20 = 40$ (км).

Ответ: 20; 60.

Запомните!

Если скорость автомобиля (или другого средства передвижения) равна a км/ч, то каждый километр автомобиль проезжает за $\frac{1}{a}$ ч или за $\frac{60}{a}$ мин. Например: если скорость велосипедиста равна 30 км/ч, то каждый километр он проезжает за $\frac{60}{30} = 2$ (мин).

558. Турист ехал на автомобиле $\frac{5}{8}$ всего пути, а остальную часть на катере, скорость которого на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Найдите скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста равен 160 км.

Запомните!

При движении двух автомашин (или других средств передвижения) навстречу друг другу их скорости складываются, т. е. находится расстояние, на которое два участника движения сближаются за каждый час.

Если два автомобиля (или два других участника движения) догоняют друг друга (движутся в одном направлении), то из большей скорости вычитают меньшую скорость, т. е. находят, на какое расстояние один из участников движения догоняет другого за каждый час.

559. Велосипедист и пешеход отправляются одновременно навстречу друг другу из городов *А* и *Б*, расстояние между которыми равно 40 км, и встречаются через 2 ч после выезда. Затем они продолжают путь, велосипедист прибывает в *А* на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в *Б*. Найдите скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что они все время оставались неизменными.

Решение.

Участники движения	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время, ч	Сближаются за 1 ч, км	Сближаются за 2 ч, км
Пешеход	x	40	$\frac{40}{x}$	$(x+y)$	$2(x+y)$
Велосипедист	y	40	$\frac{40}{y}$		

$\frac{40}{x} > \frac{40}{y}$ на 7 ч 30 мин.

$$\begin{cases} 2(x+y)=40, \\ \frac{40}{x}-\frac{40}{y}=\frac{15}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y=20-x, \\ 80y-80x=15xy. \end{cases}$$

Подставим $y = 20 - x$ во второе уравнение, приведем подобные члены и получим квадратное уравнение $3x^2 - 92x + 320 = 0$; $x_1 = 4$; $x_2 = 40$.

x_2 не удовлетворяет принятому обозначению, так как скорость пешехода не может быть равна 40 км/ч.

Итак, скорость пешехода равна 4 км/ч, а велосипедиста $y = 20 - x = 16$ км/ч.

Ответ: 4; 16.

560.1. Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 300 км. Поезд, вышедший из пункта A, может пройти это расстояние за 5 ч, другой — за 7,5 ч. Сколько времени пройдет до встречи поездов?

560.2. Велосипедист выехал из города M в город N, расстояние между которыми равно 140 км. На следующий день он отправился обратно в город N, увеличив скорость на 4 км/ч. По дороге он сделал остановку на 4 ч и в результате на обратный путь затратил столько же времени, сколько на путь из M в N. Найдите скорость велосипедиста на обратном пути.

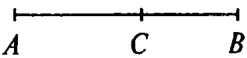
561.1. Из двух городов навстречу друг другу одновременно вышли скорый поезд и электричка. Скорость скорого в 2 раза больше скорости электрички, и до встречи он прошел на 240 км больше. Поезда встретились через 6 ч. Найдите расстояние между городами.

561.2. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй — первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 17 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 102 км/ч, в результате прибыл в *B* одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если она больше 60 км/ч.

562. Из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми равно 300 км, выходит поезд со скоростью 50 км/ч. Через три часа в том же направлении выезжает автомобиль, скорость которого равна 150 км/ч. На каком расстоянии от пункта *B* будет находиться поезд, когда автомобиль прибудет в пункт *B*?

Решение.

В пункте *C* автомобиль догонит поезд.



Участники движения	Скорость, км/ч	Время на отрезке AC, ч	Расстояние AC, км
Поезд	50	$x+3$	$50(x+3)$
Автомобиль	150	x	$150x$

$150x = 50(x + 3) \Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow$ Расстояние AC равно $150 \cdot 1{,}5 = 225$ (км). Автомобилю до пункта *B* осталось проехать $300 - 225 = 75$ (км), он проедет 75 км за $\frac{75}{150} = 0{,}5$ ч. Поезд за 0,5 ч пройдет 25 км, до пункта *B* ему останется $75 - 25 = 50$ (км).

Ответ: 50.

563. Из двух городов, расстояние между которыми равно 360 км, выезжают навстречу друг другу два велосипедиста. Они могут встретиться на середине пути, если второй выйдет на 1,5 ч раньше первого. Если же они выйдут одновременно, то через 5 ч расстояние между ними будет равно 90 км. Найдите скорости каждого велосипедиста.

Решение.

360 – 90 = 270 (км) два велосипедиста проедут за 5 ч, т. е. за 1 ч они сближаются на 270 : 5 = 54 (км). Другими словами, 54 – это сумма скоростей.

Велосипедисты	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время на половину пути, ч
I	$54-x$	180	$\frac{180}{54-x}$
II	x	180	$\frac{180}{x}$

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{54-x}=1{,}5 \quad (:1{,}5), \quad \frac{120}{x}-\frac{120}{54-x}=1, \; x(54-x)\neq 0.$$

$$x^2-294x+6480=0 \Rightarrow x=147\pm\sqrt{21\,609-6480}=$$
$= 147 \pm 123$.

$x_1 = 147 + 123 = 270$ — не удовлетворяет принятому обозначению.

$x_2 = 147 - 123 = 24$ — скорость второго велосипедиста; $54 - 24 = 30$ — скорость первого.

Ответ: 30; 24.

564.1. Два автомобиля выехали из городов *A* и *B* навстречу друг другу. Через час они встретились и продолжали путь с теми же скоростями. Первый прибыл в *B* на 27 мин позже, чем второй в *A*. Определите среднюю скорость каждого автомобиля, если расстояние между городами равно 90 км.

564.2. Два лыжника одновременно отправились в 60-километровый пробег. Первый идет со скоростью на 8 км/ч большей, чем второй, и приходит к финишу на 15 мин раньше. Найдите скорость лыжника, пришедшего к финишу вторым.

565. Из пункта *A* в пункт *D* (рис. 1–3) ведут три дороги. Через пункт *B* едет грузовик со средней скоростью 44 км/ч, через пункт *C* — автобус (48 км/ч). По третьей дороге (без промежуточных пунктов) движется легковой автомобиль (68 км/ч). Какой автомобиль добрался до пункта D позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в пути.

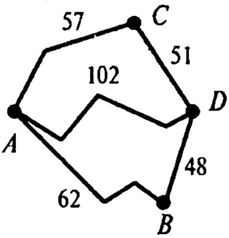


Рис. 1

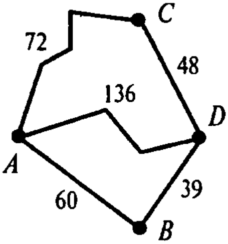


Рис. 2

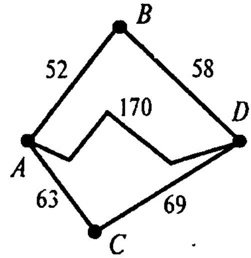


Рис. 3

566.1. Поезд был задержан в пути на 6 мин и ликвидировал опоздание на перегоне в 20 км, пройдя его со скоростью на 10 км/ч большей той, которая полагалась по расписанию. Определите скорость поезда по расписанию на этом перегоне.

566.2. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. За час мотоциклист проезжает на 30 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, он прибыл в B на 1,5 ч позже мотоциклиста.

567. На середине пути между станциями A и B поезд был задержан на 10 мин. Чтобы прибыть в B по расписанию, машинисту пришлось увеличить скорость поезда на 6 км/ч. Найдите скорость поезда, предусмотренную расписанием, если расстояние между станциями A и B равно 60 км.

568. Расстояние от A до B по железной дороге равно 88 км, а по реке – 108 км. Поезд из A выходит на 1 ч позже теплохода и прибывает в B на 15 мин раньше. Найдите среднюю скорость поезда, если она на 40 км/ч больше средней скорости теплохода.

569. Длина автобусного маршрута 16 км. В часы «пик» автобус переходит на режим экспресса и продолжительность поездки от начала до конца маршрута сокращается на 4 мин, а средняя скорость автобуса увеличивается на 8 км/ч. С какой скоростью идет автобус в режиме экспресса?

570. Скорость одного пешехода на 1 км/ч больше скорости другого, и путь в 20 км он проходит на 1 ч быстрее. Найдите скорость первого пешехода.

Решение.

Пешеходы	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время, ч
II	x	20	$\frac{20}{x}$
I	$x+1$	20	$\frac{20}{x+1}$

$$\frac{20}{x} > \frac{20}{x+1} \text{ на 1 ч} \Rightarrow \frac{20}{x} - \frac{20}{x+1} = 1.$$

Умножим обе части уравнения на $x(x + 1) \neq 0$, $(x \neq 0$, $x \neq -1)$, приведем подобные члены и получим квадратное уравнение $x^2 + x - 20 = 0$, корни которого $x_1 = -5$ (не удовлетворяет принятому обозначению; x — скорость пешехода); $x_2 = 4 \Rightarrow x + 1 = 5$.

Ответ: 5.

Запомните!

При решении задач на движение плавучих средств по реке следует учитывать следующее.

Собственная скорость плавучего средства — это скорость в стоячей (неподвижной) воде.

Скорость движения по течению реки — это сумма собственной скорости и скорости течения реки.

Скорость движения против течения реки — это разность между собственной скоростью и скоростью течения реки.

571. От пристани отправился плот. Через 5 ч 20 мин вслед за ним с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Скорость лодки на 12 км/ч больше скорости плота. Найдите скорость плота.

Решение.

Участники движения	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время, ч
Плот	x	20	$\frac{20}{x}$
Лодка	$12+x$	20	$\frac{20}{12+x}$

Плот пробыл в пути на $5\frac{1}{3}$ ч больше, чем моторная лодка.

$\frac{20}{x}-\frac{20}{12+x}=5\frac{1}{3}$. $16x^2+192x-720=0$ (:16).

$x^2+12x-45=0 \Rightarrow x_1=-15$ – не удовлетворяет принятому обозначению; $x_2=3$.

Ответ: 3.

572. Сначала катер шел 10 км по течению реки, а затем вдвое большее расстояние по озеру, в которое впадает река. Весь рейс продолжался 1 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 7 км/ч.

573. Моторная лодка, обладающая скоростью 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пристанями, равное 60 км, по реке туда и обратно, не останавливаясь, за 6 ч 15 мин. Определите скорость течения реки.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость течения реки.

Движение	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время, ч
По течению	$20+x$	60	$\frac{60}{20+x}$
Против течения	$20-x$	60	$\frac{60}{20-x}$

На весь путь затрачено $6\frac{1}{4}$ ч.

$$\frac{60}{20+x}+\frac{60}{20-x}=\frac{25}{4} \quad (:5).$$

$\frac{12}{20+x}+\frac{12}{20-x}=\frac{5}{4}$. НОЗ $4(400-x^2)\neq 0$.

$960-48x+960+48x=2000-5x^2 \Rightarrow 5x^2=80$; $x^2=16$.

$x_1=-4$ — не удовлетворяет принятому обозначению; $x_2=4$.

Ответ: 4.

574. Расстояние между пристанями A и B равно 180 км. Катер от A до B плыл 10 ч и обратно 15 ч. Найдите скорость течения реки.

575.1. Расстояние между пристанями A и B 240 км. Шхуна по течению реки проходит этот путь на 5 ч быстрее, чем против течения, скорость шхуны, двигающейся против течения, составляет $\frac{2}{3}$ скорости при движении по течению. Найдите собственную скорость шхуны.

575.2. Моторная лодка прошла от пункта A 160 км и вернулась в пункт A. Собственная скорость лодки 13 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч. На сколько меньше времени лодка затратила на путь по течению, чем против течения реки?

576. Скорость моторной лодки на 12 км/ч больше скорости течения реки, расстояние 204 км она по течению реки проходит на 7 ч быстрее, чем против течения. Найдите скорость течения реки.

Решение.

Пусть скорость течения реки x км/ч, тогда собственная скорость лодки $(12+x)$ км/ч.

Движение	Скорость, км/ч	Расстояние, км	Время, ч
По течению	$12+2x$	204	$\frac{204}{12+2x}$
Против течения	12	204	$\frac{204}{12}$

$$\frac{204}{12} > \frac{204}{12+2x} \text{ на 7 ч}$$

$$17 - \frac{102}{6+x} = 7$$

$$\frac{102}{6+x} = 10$$

$$10x = 42$$

$$x = 4{,}2$$

Ответ: 4,2.

577.1. Самоходная баржа проходит расстояние между двумя пристанями, равное 360 км, по течению реки за 4 ч, а против течения – за 6 ч. Найдите скорость баржи в стоячей воде.

577.2. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч, а через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Пароход пришел в город на 1,5 ч раньше лодки. Каково расстояние от пристани до города?

578.1. Расстояние между двумя пристанями по реке равно 80 км. Пароход проходит этот путь туда и обратно за 8 ч 20 мин. Определите скорость парохода в стоячей воде, считая скорость течения реки равной 4 км/ч.

578.2. В 8 ч катер вышел от пристани *A* к пристани *B*, расстояние между которыми равно 30 км. Пробыв в пункте *B* 2 ч 30 мин, катер отправился обратно и вернулся в *A* в 16 ч. Собственная скорость катера равна 11 км/ч. Определите (в км/ч) скорость течения реки.

579.1. Спортсмен на лодке по течению реки проплыл 28 км и сразу вернулся назад, затратив на весь путь 7 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость движения лодки в стоячей воде.

579.2. Лодка в 6 ч вышла из пункта *A* в пункт *B*, расположенный в 30 км от *A*. Пробыв в пункте *B* 2 ч, лодка отправилась в обратный путь и вернулась в пункт *A* в 24 ч. Скорость течения реки 1 км/ч. Найдите (в км/ч) собственную скорость лодки.

580.1. От пристани A одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от A, простоял там 18 ч и отправился к пристани A. В тот момент, когда он находился на расстоянии 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 ч позднее первого и имеющий ту же собственную скорость, что и первый, нагнал плот, успевший проплыть к этому времени 144 км. Определите скорость пароходов в стоячей воде.

580.2. Моторная лодка проплыла до пункта B 560 км, пробыв там 8 ч, вернулась в пункт отправления. Скорость лодки в неподвижной воде равна 24 км/ч, в пункт отправления она вернулась через 56 ч после отплытия из него. Найдите скорость течения реки.

581.1. Лодка в 7 ч вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в B 45 мин, лодка вернулась обратно и прибыла в A в 13 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

581.2. Байдарка прошла по течению реки 72 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 ч больше, чем на путь по течению. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите (в км/ч) скорость байдарки в неподвижной воде.

582.1. Теплоход проходит от пункта A 560 км и после стоянки возвращается в пункт A. Собственная скорость теплохода равна 24 км/ч, скорость течения реки 4 км/ч, в пункт A теплоход вернулся через 56 ч после отплытия из него. Сколько времени длилась стоянка?

582.2. Самоходная баржа прошла от пункта M 195 км и вернулась в пункт M. Собственная скорость баржи равна 14 км/ч, скорость течения реки 1 км/ч. На сколько больше времени баржа затратила на путь против течения, чем по течению реки?

Задачи на нахождение чисел

В таких задачах необходимо найти число (или числа), о цифрах которого предлагается некоторая информация.

Запомните!

Любое целое число можно записать в виде суммы произведений разрядных единиц на величину разряда.

Например:

1) $324 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4$;

2) $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, где c – цифра единиц, b – цифра десятков, a – цифра сотен.

583.1. Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из искомых чисел. Найдите эти числа.

Решение.

Пусть a – меньшее число, b – большее число, т. е. $a < b$.

Среднее пропорциональное $\sqrt{ab} = a + 12$; среднее арифметическое $\frac{a+b}{2} = b - 24$, т. е. $a + b = 2b - 48 \Rightarrow a = b - 48$. Подставим это выражение в первое уравнение и найдем число b. $\sqrt{b(b-48)} = b - 48 + 12$.

$b^2 - 48b = (b - 36)^2 \Rightarrow b^2 - 48b = b^2 - 72b + 1296 \Rightarrow b = 54$; $a = b - 48 = 54 - 48 = 6$.

Ответ: 6 и 54.

583.2. Найдите двузначное число, если его цифра единиц на 2 больше цифры десятков, и произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Решение.

Пусть a — цифра десятков, тогда $(a + 2)$ – цифра единиц. Искомое число $10a + a + 2 = 11a + 2$, сумма цифр $a + a + 2 = 2a + 2$.

$(11a + 2)(2a + 2) = 144 \Rightarrow 11a^2 + 13a - 70 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{-13 \pm 57}{22}$ — отрицательный корень не удовлетворяет принятому обозначению.

$a = 2$; $b = 4$, искомое число 24.

Ответ: 24.

584. Сумма квадратов двух чисел, одно из которых на 3 больше другого, равна 89. Найдите эти числа.

585. Сумма квадратов трех последовательных нечетных чисел равна 155. Найдите эти числа.

586. Сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 29 больше утроенного меньшего числа. Найдите эти числа.

Запомните!

Среднее арифметическое нескольких чисел (величин) равно сумме этих чисел, деленной на количество чисел (величин).

$\text{ср.ар.} = \dfrac{a_1 + a_2 ... a_n}{n}$, где a_1; a_2; ... a_n — данные числа или величины; n — их количество.

Пример. Среднее арифметическое чисел 20, 12 и 40 равно $\dfrac{20+12+40}{3} = 24$.

Среднее геометрическое (среднее пропорциональное) нескольких чисел (величин) — это $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, где n – количество чисел: a_1; a_2; ..., a_n – данные числа (величины).

Например: среднее геометрическое чисел 4 и 64 равно $\sqrt{4 \cdot 64} = 16$.

587. Если к четырехзначному приписать слева цифру 4, или справа цифру 3, то первое из полученных чисел будет в три раза больше второго. Найдите данное четырехзначное число.

Решение.

Пусть a — цифра разряда тысяч; b — цифра сотен, c — цифра десятков; d — цифра единиц, тогда искомое четырехзначное число можно записать в виде $1000a + 100b + 10c + d$. Припишем слева цифру 4, т. е. число будет пятизначным и 4 — цифра разряда 10 000. Припишем справа цифру 3, тогда a станет цифрой разряда 10 000, 3 — цифра единиц.

Получим уравнение

$4 \cdot 10\,000 + a \cdot 100 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 3(a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + 10 \cdot d + 3)$.

Приведем подобные члены.

$29\,000a + 29\,00b + 290c + 29d = 39\,991$. Сократим на 29.

$1000a + 100b + 10c + d = 1379$.

В левой части записано искомое число при помощи разрядных единиц, т. е. искомое число 1379.

Ответ: 1379.

588. Найдите три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему как $0{,}5 : \frac{9}{20}$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

Решение.

Пусть a и b – второе и третье числа, тогда первое число $0{,}8a$ и $\frac{a}{b} = \frac{0{,}5}{0{,}45}$ $\left(\frac{9}{20} = 0{,}45\right)$; $0{,}8a + b = a + 70$.

Из первого уравнения получим $9a = 10b \Rightarrow b = 0{,}9a$.

Значит, $0{,}8a + 0{,}9a = a + 70 \Rightarrow 0{,}7a = 70 \Rightarrow a = 100$.

Первое число $0{,}8a = 80$; третье – $0{,}9a = 90$.

Ответ: 80; 100; 90.

589. Найдите сумму трех чисел, если третье относится к первому как 18,48 : 15,4 и составляет 40% второго, а сумма первого и второго равна 400.

590. Числители трех дробей пропорциональны числам 1; 2; 5, а знаменатели пропорциональны числам 1; 3; 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найдите эти дроби.

591. Найдите три числа, если первое из них составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно $\frac{14}{11}$. Разность между третьим и вторым на 40 меньше числа, составляющего 12,5% суммы первого и второго искомых чисел.

592. Цифры трехзначного числа относятся как 2 : 3 : 1. Если цифру сотен уменьшить в 2 раза, цифру десятков — в 3 раза, а цифру единиц увеличить в 2 раза, то сумма цифр полученного числа будет равна 12. Найдите первоначальное число.

593. Двузначное число втрое больше суммы его цифр. Если из этого числа вычесть произведение его цифр, то получится 13. Найдите это двузначное число.

594. Разложите число 17 на два слагаемых так, чтобы их произведение было равно 16. Найдите результат деления большего слагаемого на меньшее.

595. Найдите двузначное число, если цифра единиц искомого числа на 2 больше цифры десятков, а сумма цифр равна 16.

596. Сумма трех чисел равна 21. Второе число составляет 32% первого, а третье — $\frac{1}{4}$ второго числа. Найдите большее из этих трех чисел.

597. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 11 дают в остатке 5.

Решение.

Первое такое число равно 16. (При делении 16 на 11 будет 1 и 5 в остатке), последнее двузначное равно $8 \cdot 11 + 5 =$

$= 93$. Значит, следует найти сумму членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 16$, $a_8 = 93$. $S_8 = \frac{16+93}{2} \cdot 8 = 436$.

Ответ: 436.

598. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 5.

599. Найдите двузначное число, сумма цифр которого равна 12. Если к этому числу прибавить 24, то получится число в 1,5 раза больше искомого.

600. Произведение суммы цифр двузначного числа на разность этих цифр равно 55. Найдите это число (или сумму таких двузначных чисел, если их несколько).

601. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найдите это двузначное число.

Решение.

Пусть a — цифра десятков, b — цифра единиц искомого двузначного числа $\Rightarrow$ $10a + b$ – это число.

Получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 10a+b=4(a+b)+3, \\ 10a+b=3ab+5. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $b = 2a - 1$, подставим во второе уравнение.

$10a + 2a - 1 = 3a(2a - 1) + 5 \Rightarrow 6a^2 - 15a + 6 = 0$, сократим на 3.

$2a^2 - 5a + 2 = 0$. $a_1 = \frac{1}{2}$ – не удовлетворяет принятому обозначению (a – цифра).

$a = 2 \Rightarrow b = 2a - 1 = 3$. Искомое число 23.

Ответ: 23.

602. При делении двузначного числа на сумму его цифр получается 5 и в остатке 4. Найдите это двузначное число, если сумма его цифр равна 17.

603. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если же из суммы квадратов цифр этого числа вычесть произведение этих цифр, то получится первоначальное число. Найдите это двузначное число.

604. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи этого числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найдите это трехзначное число.

Решение.

Пусть a – цифра сотен, b – цифра десятков, тогда трехзначное число запишется так:

$100a + 10b + 2$; прибавим к нему 18, получим $100a + 10b + 20$.

Перенесем согласно условию задачи цифру 2 в начало записи числа, она будет являться цифрой сотен, и новое число $200 + 10a + b$ на 18 больше первоначального, т.е.

$200 + 10a + b = 100a + 10b + 20 \Rightarrow 90a + 9b = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10a + b = 20 \Rightarrow a = \dfrac{20-b}{10} = 2 - \dfrac{b}{10}$, но a и b – цифры, значит, $\dfrac{b}{10}$ – дробь, тогда a тоже дробное число, что противоречит принятым обозначениям.

Следовательно, $b = 0$, $a = 2$. Искомое число 202.

Ответ: 202.

605. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится 3 и в остатке 2. Если разделить это число на произведение его цифр, то получится число 2 и в остатке 2. Найдите это двузначное число.

606. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это двузначное число.

607. Сумма квадратов цифр двузначного числа на 1 больше утроенного произведения этих цифр. После деления этого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. Найдите это двузначное число.

Задачи, содержащие геометрические и физические величины (B4; B9; B10)

608. Из прямоугольного жестяного листа с периметром 96 см изготовлена открытая сверху коробка. По углам листа вырезано по квадрату со стороной, равной 4 см, и стороны этих квадратов спаяны. Каких размеров был взят лист, если объем полученной коробки равен 768 см^3?

Решение.

Пусть длина листа x см, ширина – y см (рис. 4; 5).

Рис. 4

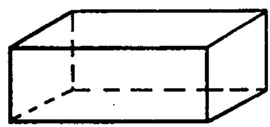


Рис. 5

Тогда длина коробки $(x - 8)$, ширина $(y - 8)$, высота 4 см.

Объем коробки: $(x - 8)(y - 8) \cdot 4 = 768 \Rightarrow (x - 8)(y - 8) = 192$.

Периметр прямоугольника $2(x + y) = 96 \Rightarrow x + y = 48 \Rightarrow x = 48 - y$. Подставим в первое уравнение $(40 - y)(y - 8) = 192 \Rightarrow y^2 - 48y + 152 = 0 \Rightarrow y_1 = 32, y_2 = 16 \Rightarrow x_1 = 16, x_2 = 32$.

Ответ: 32; 16.

609. Участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если площадь участка равна 1200 м^2.

610. Два соседа по даче начали одновременно вскапывать свои огороды, площади которых равны 28 м^2 и 360 м^2. Второй ежедневно вскапывал на 10 м^2 больше, чем первый, но первый закончил копать на полдня раньше, чем второй. Какую площадь вскапывал ежедневно каждый из них?

611. Участок прямоугольной формы, ширина которого 30 м, длина 40 м, нужно огородить металлической сеткой.

Ширина деревянных ворот равна 3 м (рис. 6). Ширина рулона сетки равна 2 м, цена 1 м² равна 60 р. Вычислите стоимость сетки, необходимой для ограждения.

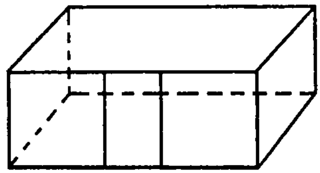


Рис. 6

Решение.

1-й способ.

Необходимо найти, сколько квадратных метров составляет забор, т. е. найти площадь боковой поверхности призмы.

1) $S_б = P_{осн.} \cdot H = 2 \cdot (40 + 30) \cdot 2 = 280$ (м²).
2) $S_{ворот} = 3 \cdot 2 = 6$ (м²).
3) $280 - 6 = 274$ (м²).
4) $274 \cdot 60 = 16\,440$ (р.)

Один погонный метр сетки имеет площадь 2 м² и стоит 120 р. Значит, приобрести нужно количество метров сетки, равное периметру участка баз ворот.

1) $2\,(30 + 40) - 3 = 137$ (м).
2) $137 \cdot 120 = 16\,440$ (р.).

Второй способ решения более рационален.

Ответ: 16 440.

612.1. Для оклейки стен ванной комнаты (рис. 7) решили приобрести керамическую плитку (причем плитка покупается с запасом в 10% оклеиваемой площади). Ширина деревянной двери равна 0,8 м, высота — 2 м. Цена плитки 500 р. за 1 м². Стены решено оклеить полностью, от пола до потолка. Сколько денег будет потрачено на приобретение плитки?

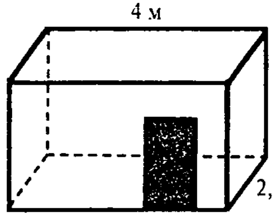


Рис. 7

612.2. Сколько рулонов обоев необходимо приобрести для оклейки стен комнаты, ширина которой равна 4,2 м, длина 4,8 м, высота 2,5 м. В одном рулоне 8 м² обоев.

Ширина двери 0,8 м, высота – 2 м (рис. 8). В комнате имеются одно окно, длина которого 2,8 м, высота 1,5 м, и дверь. Обои следует покупать с излишком в 10% оклеиваемой площади в связи со сложным рисунком.

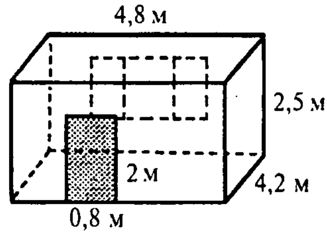


Рис. 8

Решение.

Площадь стен равна площади боковой поверхности призмы с вычетом площадей двери и окна.

1) $2(4{,}2 + 4{,}8) \cdot 2{,}5 - 0{,}8 \cdot 2 - 2{,}8 \cdot 1{,}5 = 45 - 1{,}6 - 4{,}2 =$ $= 39{,}2$ (м²).
2) $39{,}2 \cdot 1{,}1 = 43{,}12$ (оклеиваемая площадь с избытком в 10%).
3) $43{,}12 : 8 = 5{,}39$ (рулона).

Так как рулоны продаются только целые, следует купить 6 рулонов.

Ответ: 6.

613.1. Зависимость температуры T от времени t (в минутах) для нагревательного элемента прибора задается формулой $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где $T_0 = 1600$ К (градусов Кельвина); $a = -5$ К/мин²; $b = 105$ К/мин. При температуре свыше 1870 К прибор выходит из строя. Определите, через какое наибольшее время (в минутах) после начала работы следует отключить прибор.

613.2. Коэффициент полезного действия двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника. При каком минимальном значении T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 40%, если $T_2 = 300$?

614.1. Сколько банок краски необходимо приобрести для окрашивания стен кладовки, размеры которой изображены на рис. 9? В кладовке имеется деревянная дверь (не окрашивается), высота которой 2 м, ширина 0,75 м.

В одной банке 4 кг краски, на 1 дм^2 расходуется 0,02 кг краски. Стены решено окрасить на 0,8 высоты.

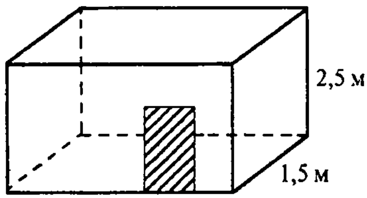


Рис. 9

614.2. В боковой стенке бака, имеющего форму цилиндра, около дна закреплен кран. При вытекании воды из бака высота столба меняется по закону $H(t) = 1{,}8 - 0{,}96t + + 0{,}128t^2$. В течение какого времени (в минутах) вода будет вытекать из бака?

615. Для спортплощадки отвели участок прямоугольной формы с диагональю, равной 185 м. При выполнении строительных работ длину каждой стороны уменьшили на 4 м, площадь прямоугольника оказалась уменьшенной на 1012 м^2. Какова длина построенной площадки?

616. Длину кирпича увеличили на 60%, ширину — на 50%, а высоту уменьшили на 60%. Увеличится или уменьшится объем кирпича и на сколько процентов?

617. Для шлифовки мелких костяных изделий изготовляется из полукотельного железа барабан, имеющий форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания в 200 мм и длиной 800 мм. При работе барабан загружается на 45% объема. Сколько квадратных метров листового железа пойдет на изготовление пяти барабанов?

618. К новогоднему балу в зале школы решили повесить крутящийся шар диаметром 1,2 м, отражающий световые блики. На 1 м^2 оклеиваемой поверхности требуется 50 г светоотталкивающей смеси. Сколько упаковок нужно купить, если в одной упаковке такой смеси 150 г?

619. Верхняя часть башни имеет форму конуса, радиус основания которого равен $\frac{14}{\pi}$ м, образующая 12 м. Боковую поверхность конуса решено покрыть бронзовой краской, на 1 дм^2 расходуется 0,03 кг краски. Сколько банок краски надо купить для этой работы, если в одной банке 11 кг краски (рис. 10)?

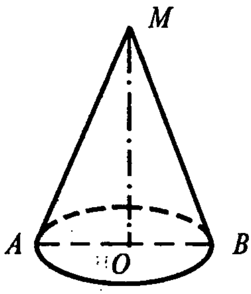


Рис. 10

Решение.

1) Площадь боковой поверхности конуса равна

$$\pi \cdot AO \cdot AM = \pi \cdot \frac{14}{\pi} \cdot 12 = 168\ (\text{м}^2).$$

2) На 1 дм^2 расходуется 0,03 кг краски, значит, на 1 м^2 – 3 кг $\Rightarrow$ 168 · 3 = 504 (кг).

3) 504 : 11 $\approx$ 45,8 (банок). Но банки продают целыми, поэтому надо купить 46 банок.

Ответ: 46.

620. Панно прямоугольной формы покрывают мозаикой, ширина панно 2,8 м, длина 3,8 м. Сколько мешков клея надо купить для выполнения этой работы, если расход клея составляет 5 кг на один квадратный метр и в одном мешке 20 кг клея?

621. Резервуар для воды состоит из полушара радиуса 360 см и цилиндра с таким же радиусом основания. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы в полностью наполненный резервуар помещалось 200 м^3 воды?

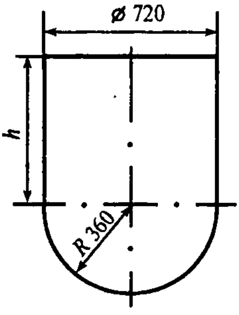


Рис. 11

622. КПД двигателя вычисляется формулой $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каких значениях T_1 (температура нагревателя) и T_2, равном 300 (температура холодильника), КПД будет больше 70%?

623. Сколько литров воды вмещает основание фонтана, имеющее форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если глубина равна 1,5 м, сторона нижнего квадрата 0,8 м, а верхнего — 1,2 м?

624. Гранитный постамент имеет форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды высотой 3,6 м. Сторона нижнего квадрата 2,8 м, верхнего — 2 м. Найдите вес постамента (удельный вес гранита 2,5).

Решение.

$V = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right)$, где h — высота, a и b — стороны оснований усеченной пирамиды.

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}6(7{,}84 + 5{,}6 + 4) = 20{,}928$ $\Rightarrow$ вес постамента равен 20,928 · 2,5 = 52,32 (т).

Ответ: 52,32.

625. В процессе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, m_0 (мг) — начальная масса, t (мин) — время, прошедшее от начала, T (мин) — период полураспада. Через сколько минут масса изотопа будет равна 24,5 мг, если $T = 3$, $m_0 = 196$?

Глава 4
Алгебраические неравенства и системы неравенств

Выражения вида $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$ называются неравенствами.

Неравенства вида $f(x) \geq g(x)$ являются **нестрогими** неравенствами; $f(x) < g(x)$ — **строгие** неравенства.

При решении любого неравенства необходимо путем равносильных преобразований привести его к более простому. Все преобразования неравенств проводятся с учетом свойств числовых неравенств.

§1. Свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$, то $a - b > 0$; если $a < b$, то $a - b < 0$.
2. Если $a > b$, то $b < a$.
3. $\boxed{\begin{matrix} a > b, \\ b > c \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{a > c}$ $\qquad$ $\boxed{\begin{matrix} a < b, \\ b < c \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{a < c}$
4. К двум частям неравенства можно прибавить (или из них вычесть) равные числа или выражения:
   $a > b \Leftrightarrow a \pm c > b \pm c$.
5. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать:

$$\boxed{\begin{matrix} a > b, \\ c > d \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{a + c > b + d}$$

Запомните!

Два неравенства одинакового смысла нельзя почленно вычитать друг из друга, так как в результате можно получить как верное, так и неверное неравенство.

6. Из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, оставляя знак первого неравенства.

$$\boxed{\begin{matrix} a > b, \\ c < d \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{a - c > b - d}$$

7. Если две части неравенства умножить или разделить на положительное число, то смысл (знак) неравенства не изменится.

Если две части неравенства умножить или разделить на отрицательное число, то смысл неравенства изменится на противоположный.

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{a > b} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\boxed{m > 0} \arrow[d, dash] & & \boxed{k < 0} \arrow[d, dash] \\
\boxed{\begin{matrix} am > bm \\ \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m} \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} ak < bk \\ \dfrac{a}{k} < \dfrac{b}{k} \end{matrix}}
\end{tikzcd}$$

8. Если $a > b$, то $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

9. Если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$, $n \in N$.

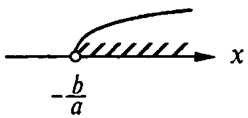
§2. Линейные неравенства

Неравенства вида $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) называются *линейными неравенствами*.

$$ax + b > 0$$

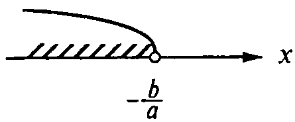
1. Если $a > 0$

$$x > -\frac{b}{a}$$



2. Если $a < 0$

$$x < -\frac{b}{a}$$



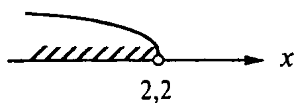
3. Если $a = 0$, тогда неравенство принимает вид $0 \cdot x > -b$. Если $b > 0 \Rightarrow -b < 0$, тогда получим 0 больше отрицательного числа, т. е. $x \in R$.
   Если $b < 0 \Rightarrow -b > 0$, получим 0 больше положительного числа. Неравенство не имеет решения.

Решите неравенство (626–630):

626. $(x - 5)^2 - (x + 2)(x - 2) > 7$.

Решение.

$x^2 - 10x + 25 - x^2 + 4 > 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow -10x > -22 \Rightarrow x < 2{,}2$,
т. е. $x \in (-\infty; 2{,}2)$.



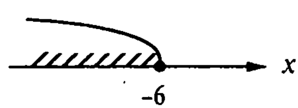
Ответ: $(-\infty; 2{,}2)$.

627. $3{,}5(x+1) \leq 4x - \frac{2x-1}{2}$.

Решение.

Умножим обе части неравенства на 2.

$7x + 7 \leq 8x - 2x + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leq -6$, $x \in (-\infty; -6]$.



Ответ: $x \in (-\infty; -6]$.

628. 1) $\frac{5-2x}{9} \geq \frac{x+2}{15} - \frac{7x-1}{5}$.

2) $(1 - 3x)^2 > 3x + 9x^2 - 8$.

629. 1) $(3 - 2x)(3 + 2x) \le 10 - 4x^2 + 5x$.

2) $\dfrac{x+1}{4} - \dfrac{4x+1}{5} \le \dfrac{7-3x}{10}$.

630. $(4x - 7)(x + 3) > (2x - 5)(5 + 2x)$.

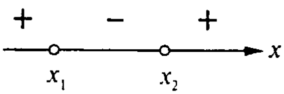
§3. Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \ne 0)$ (или < 0; ≥ 0, ≤ 0) называются *квадратными*.

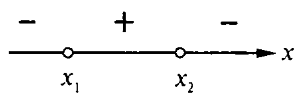
При решении квадратных неравенств используется свойство знакопостоянства квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c > 0,\ a \ne 0:$$

$a > 0,\ D > 0$



$a < 0,\ D > 0$



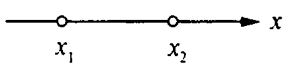
План решения квадратного неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (или } < 0),\ a \ne 0$$

I. *Дискриминант положительный*

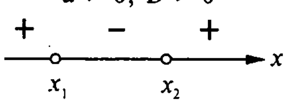
$D > 0$, трехчлен имеет два различных корня.

1. Найдите корни квадратного трехчлена, т. е. решите уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \ne 0$. Нанесите числа x_1 и x_2 на числовую ось.

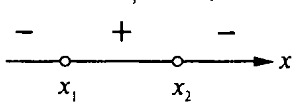


2. Поставьте знаки квадратного трехчлена в полученных интервалах соответственно знаку коэффициента при x^2.

$a > 0,\ D > 0$



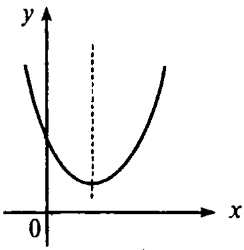
$a < 0,\ D > 0$



3. Выберите интервалы со знаком «плюс», если дано неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, и со знаком «минус», если

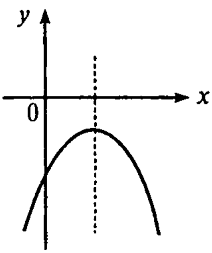
решается неравенство $ax^2 + bx + c < 0$. Если данное неравенство нестрогое, то x_1 и x_2 принадлежат выбранным интервалам.

II. *Дискриминант отрицательный* ($D < 0$), квадратный трехчлен не имеет корней, парабола не пересекает ось абсцисс.



$a > 0$, $D < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$, $x \in R$ $ax^2 + bx + c < 0$, нет решений (рис. 12)

Рис. 12

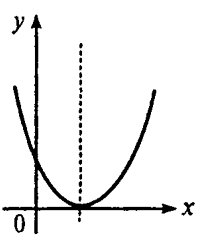


$a < 0$, $D < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$, нет решений; $ax^2 + bx + c < 0$, $x \in R$ (рис. 13)

Рис. 13

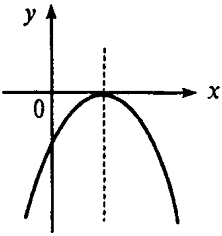
III. *Дискриминант равен нулю* ($D = 0$).

Квадратный трехчлен имеет два равных корня, парабола касается оси абсцисс.



$a > 0$, $D = 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$, $x \in R$ (рис. 14)

Рис. 14



$a < 0,$ $D = 0$	—	$ax^2 + bx + c \le 0,\ x \in R$ (рис. 15)

Рис. 15

Запомните!

Нельзя умножать и делить две части неравенства на ноль или выражение, равное нулю.

Нельзя умножать или делить (сокращать) неравенства на выражение, содержащее переменную величину, так как не известен знак этого выражения (и не известно, меняется или нет смысл неравенства).

Решите неравенство (631–639):

631. $(4 - 3x)(3x + 4) \ge (2 + 9x)(x + 8)$.

Решение.

Раскроем скобки и перенесем все члены неравенства в левую часть.

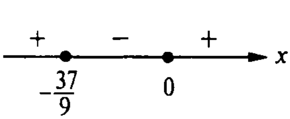
$16 - 9x^2 - (74x + 9x^2 + 16) \ge 0.$

Приведем подобные члены $-18x^2 - 74x \ge 0 : (-2);$

$9x^2 + 37x \le 0$. Найдем корни квадратного трехчлена

$$9x^2 + 37x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{37}{9}.$$

Нанесем корни на числовую прямую



$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{37}{9}; 0\right].$$

Ответ: $\left[-\frac{37}{9}; 0\right]$.

632. $8x^2 + 11x + 4 \le 0$.

Решение.

Найдем корни квадратного трехчлена $8x^2 + 11x + 4 = 0$. $D = -7 < 0$, значит, трехчлен не имеет действительных корней, коэффициент при x^2 положительный. Парабола находится в верхней полуплоскости (рис. 16), т. е. нет таких значений x, при которых данный квадратный трехчлен равен нулю или принимает отрицательные значения, т. е. $x \in \varnothing$.

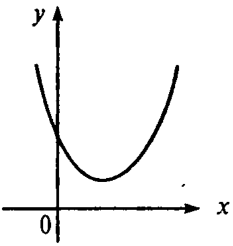


Рис. 16

Ответ: $\varnothing$.

633. $5x^2 + 6x + 2 > 0$.

Решение.

$5x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow D_1 = -1 < 0$, нет действительных корней. Коэффициент при x положительный, значит, $5x^2 + 6x + 2$ принимает только положительные значения, т. е. $x \in R$.

Ответ: $x \in R$.

634. $x^2 + 7x - 30 < 0$.

635. $(x - 1)^2 \le x^2 + 2x - 3$.

636. $4x(x + 3) - 9 \le 3x(x + 4)$.

637. $5x(x + 4) - 16 \ge 4x(x + 5)$.

638. $\dfrac{x+3}{9} > \dfrac{3x-1}{15}$.

639. $x^2 + 7x - 30 \ge 0$.

640. Найдите сумму целых отрицательных решений неравенства $\dfrac{3x^2 + x - 9}{x} \ge -5$.

Решите неравенство (641–649):

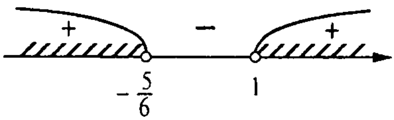
641. $\dfrac{-2}{6x^2-x-5}<0.$

Решение.

Так как дробь отрицательная, если ее числитель и знаменатель имеют разные знаки, значит,

$6x^2-x-5>0$. $6x^2-x-5=0 \Rightarrow (a+b+c=0)$.

$x_1=1$; $x_2=-\dfrac{5}{6}$.



$\Rightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{6}\right)\cup(1;\infty).$

642. $\dfrac{x^2-10x+16}{8}\le 0.$

643. $\dfrac{5x^2-6x+2}{-5}>0.$

Решение.

Дробь положительна, если ее числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки.

Знаменатель данной дроби отрицательный, следовательно, $5x^2-6x+2<0$.

$5x^2-6x+2=0 \Rightarrow D_1=9-10=-1<0$, так как коэффициент при x^2 положителен, трехчлен $5x^2-6x+2$ принимает только положительные значения.

Ответ: $\varnothing$.

644. $\dfrac{-20}{x^2-8x-9}>0.$

645. $\dfrac{4+x}{x+2}<3.$

646. $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}.$

647. $\dfrac{15}{4+3x-x^2}>1.$

648. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0.$

649. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}.$

§4. Решение неравенств методом интервалов

Неравенства вида

$$\frac{(x-a)(b-x)}{c+x} \geq 0 \text{ или } (x-a)(m-x)(x+b) < 0,$$

т. е. представляющие собой произведение или отношение двучленов, решаются методом интервалов. Многочлен в левой части неравенства обозначим $P_n(x)$. Решаем неравенства $P_n(x) > 0$ или $P_n(x) < 0$.

Запомните!

Квадратный трехчлен можно разложить на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена, $a \neq 0$; $D \geq 0$.

План решения неравенств методом интервалов

1. Найти область допустимых значений многочлена $P_n(x)$ (ОДЗ можно не записывать, но необходимо учесть при выполнении пункта 2).
2. Найти все корни уравнения $P_n(x) = 0$. На числовую прямую нанести все найденные корни, точки, в которых $P_n(x)$ не имеет смысла, наносятся «пустыми» кружочками. Числовая прямая отмеченными точками разбивается на интервалы.
3. Найти знаки многочлена $P_n(x)$ на каждом интервале. Если нет корней, которые повторяются четное число раз, то знаки $P_n(x)$ на интервалах чередуются.
4. Записать в ответ интервалы со знаком «плюс», если дано неравенство $P_n(x) > 0$, и со знаком «минус», если решается неравенство $P_n(x) < 0$.

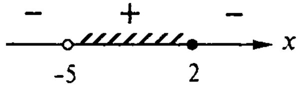
Решите неравенства (650–659):

650. $\frac{2-x}{x+5} \geq 0.$

Решение.

Найдем корни двучленов:

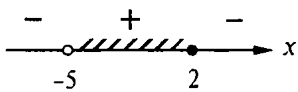
$2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x + 5 = 0 \Rightarrow x_2 = -5$.



$P_n(0) > 0$, значит, значение дроби, стоящей в левой части неравенства, при $-5 < x \le 2$ положительно, т. е. на промежутке $(-5; 2]$ дробь имеет знак плюс (или равна нулю).

Выбираем интервал со знаком плюс $\Rightarrow x \in (-5; 2]$.

Комментарий. Знаки в интервалах можно определить из неравенства $(2 - x)(x + 5) \ge 0$. Это квадратный трехчлен с отрицательным коэффициентом при x^2, поэтому знаки в интервалах:



Ответ: $(-5; 2]$.

651. $\dfrac{8x}{7x+28} \le 0.$

652. $\dfrac{4-x}{x-5} > \dfrac{1}{1-x}.$

Решение.

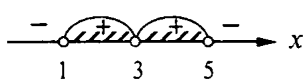
ОДЗ: $x \ne 5$; $x \ne 1$.

Приведем неравенство к виду $P_n(x) > 0$.

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0.$$

Запишем корни двучленов на числовой прямой $P_n(0) < 0$.

Обратите внимание, корень 3 повторяется дважды, поэтому при переходе через точку $x = 3$ знак многочлена не изменяется. Выбираем интервалы со знаком плюс.



Ответ: $(1; 3) \cup (3; 5)$.

653. $\dfrac{13}{x+1} > \dfrac{1}{2}.$

654. $\dfrac{x}{x^2-1} \ge 0.$

655. $\dfrac{x+6}{x^2}>1.$

656. $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1.$

657. $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0.$

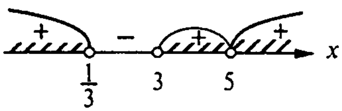
Решение.

ОДЗ: $x^2-10x+25\neq 0$ (учтем в процессе решения).

Найдем корни числителя и знаменателя:

$3x^2-10x+3=0.$	$x^2-10x+25=0.$
$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\dfrac{5\pm4}{3}.$	$(x-5)^2=0.$
$x_1=\dfrac{1}{3};\quad x_2=3.$	$x_1=x_2=5.$

Нанесем корни на числовую прямую.



$P_n(0)=\dfrac{3}{25}>0.$

Корень 5 повторяется дважды, поэтому знак на интервалах $(3;5)$ и $(5;+\infty)$ одинаковый.

Выбираем интервалы со знаком «плюс», т. е. решаем неравенство $P_n(x)>0$, $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(3;5)\cup(5;+\infty)$.

Комментарий. Данное неравенство можно рассматривать в виде $\dfrac{3x^2-10x+3}{(x-5)^2}>0$, $\begin{cases}3x^2-10x+3>0,\\ x\neq 5.\end{cases}$

658. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1.$

659. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}.$

Найдите количество целых решений (660–662):

660. $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-6x+20}<0.$

661. $\dfrac{-3x^2+2x-13}{x^2-7x+10}>0.$

662. $\dfrac{-x^2+10x-21}{-5x^2+4x-3}<0.$

§5. Иррациональные неравенства

Неравенства, содержащие неизвестную величину под знаком радикала, называются *иррациональными неравенствами*.

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \text{ и } \sqrt[n]{f(x)} < g(x).$$

> **Запомните!**
>
> Если $m \in N$, то $2m + 1$ – нечетное число.
>
> Неравенство вида $\sqrt[2m+1]{f(x)} < g(x)$ равносильно неравенству $f(x) < g^{2m+1}(x)$. Также равносильны неравенства $\sqrt[2m+1]{f(x)} > g(x)$ и $f(x) > g^{2m+1}(x)$. Поэтому иррациональные неравенства при нечетном показателе корня затруднений не вызывают.

Рассмотрим решение иррациональных неравенств с четным показателем корня, в частности при $n = 2$, т. е. неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

I. Неравенства вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Следует помнить, что корень четной степени можно извлечь только из неотрицательного числа, т. е. $f(x) \geq 0$, тогда левая часть неравенства существует и неотрицательна (согласно определению арифметического корня). Поэтому при $g(x)<0$ данное неравенство не имеет решения.

> Неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильны системе
>
> неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ равносильны системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x). \end{cases}$

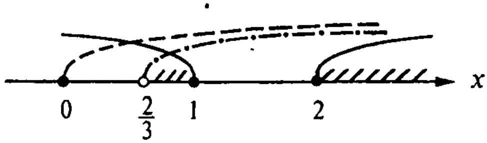
663. Решите неравенство: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < x$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ x^2 - 3x + 2 < x^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x-2) \ge 0, \\ x \ge 0, \\ x > \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Применим графический метод решения системы неравенств.



Общее решение трех неравенств системы:

$$\left(\frac{2}{3}; 1\right] \cup [2; +\infty).$$

II. Неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильны совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Неравенства $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильны совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

Решите неравенство (664–673):

664. $\sqrt{x^2 - 5x} > x - 4.$

665. $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x.$

666. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3.$

667. $\sqrt{\dfrac{3+2x}{4-x}} > -\sqrt{3}$ и найдите наименьшее отрицательное решение.

668. $\sqrt{x-1} < 3 - x.$

669. $\sqrt{x^2 + 3x - 18} > 2x + 3.$

670. $\sqrt{x-2} > 4 - x$ и найдите наименьшее решение.

671. $\dfrac{1}{\sqrt{x+18}} > \dfrac{1}{2-x}.$

672. $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2 - x - 1} > 0.$

Решение.

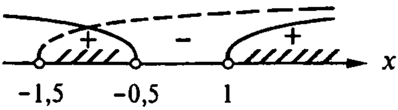
Числитель дроби — число положительное согласно определению арифметического корня (не равен 0, так как дробь не равна нулю).

Дробь положительна, если числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, значит, решение сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 3 + 2x > 0, \\ 2x^2 - x - 1 > 0. \end{cases}$$

$2x^2 - x - 1 > 0.$

$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1.$



Ответ: $(-1{,}5;\ -0{,}5)\cup(1;\ +8)$.

673. $\dfrac{3x^2-10x+3}{\sqrt{4-x^2}+5}>0$ и найдите количество целых решений.

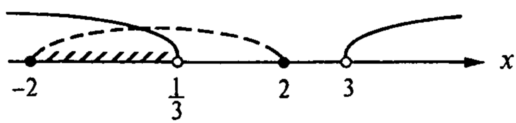
Решение.

Знаменатель дроби — число положительное при $x \in R$, следовательно, решение сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases}3x^2-10x+3>0,\\4-x^2\ge 0.\end{cases}$$

$3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3};\ x_2 = 3.$

Решим систему неравенств графически:



Решением системы является интервал $\left[-2;\dfrac{1}{3}\right)$, который содержит целые числа –2; –1; 0, т. е. 3 целых решения.

Ответ: 3.

Решите неравенство (674–679):

674. $\sqrt{2x^2+x}>1+2x.$

675. $\sqrt{x+3}<\sqrt{6-2x}.$

676. $\sqrt{x+5}<1-x.$

677. 1) $\sqrt{x+2}>\sqrt{8-x^2}.$

2) $x^6 - 9x^3 + 8 > 0.$

678. $\sqrt{5x^2-6x+1}>2x-1.$

679. $\dfrac{1}{x^2-5x+6} \le \dfrac{1}{2}$ и найдите наименьшее целое положительное число.

§6. Системы и совокупности неравенств. Двойные неравенства

Системой неравенств с одной переменной называются два (или более) неравенства, для которых необходимо найти множество значений переменной, удовлетворяющее *всем неравенствам* данной системы.

Неравенства, входящие в систему, объединяют фигурной скобкой.

При решении системы решают каждое неравенство, затем находят пересечение найденных множеств решений.

В настоящем пособии мы уже встречались с графическим методом решения систем, который, на наш взгляд, наиболее рационален.

> **Запомните!**
>
> Система неравенств с одной переменной может иметь либо конечное, либо бесконечное множество решений.
>
> Если хотя бы одно из неравенств, входящих в систему, не имеет решений, то и вся система не имеет решений, так как пересечение непустого и пустого множеств – это пустое множество.

Совокупностью неравенств с одной переменной называются два (или более) неравенства, для которых необходимо найти множество значений переменной, удовлетворяющее *хотя бы одному неравенству* данной совокупности.

Неравенства, входящие в совокупность, объединяют квадратной скобкой. Их также можно записывать в одну строчку через запятую (или точку с запятой).

При решении совокупности решают каждое неравенство, затем находят *объединение* найденных множеств решений.

Запомните!

Совокупность неравенств имеет непустое множество решений, если хотя бы одно из неравенств, входящих в ее состав, имеет непустое множество решений.

680. Решите систему неравенств.

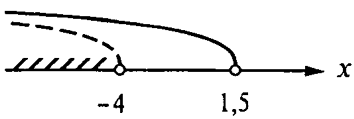
$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \dfrac{x+4}{2x-3} < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \dfrac{11}{2(2x-3)} < 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства системы следует $2x - 3 < 0$, значит, в первом неравенстве $x + 4 < 0$, так как дробь отрицательная. Решение сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-3<0, \\ x+4<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1{,}5, \\ x<-4. \end{cases}$$



т. е. $x \in (-\infty; -4)$.

Ответ: $(-\infty; -4)$.

Найдите натуральные значения x в решении системы неравенств (681; 682):

681. $\begin{cases} x-1<4, \\ \dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-5}{x}<\dfrac{2x}{3-x}. \end{cases}$ **682.** $\begin{cases} \dfrac{x+8}{x+2}>2, \\ (x+1)^2<1+x^2. \end{cases}$

683. Решите неравенство $5x - 20 < x^2 \le 8x$.

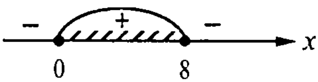
Решение.

Представим тройное неравенство в виде системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 > 5x - 20, \\ 8x \ge x^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 5x + 20 > 0, \\ 8x - x^2 \ge 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 2$ отрицательный, значит, $x^2 - 5x + 20 > 0 \ \forall \ x \in R$.

Решение сводится к решению неравенства $8x - x^2 \ge 0$, корни $x_1 = 0$; $x_2 = 8$.



$\Rightarrow x \in [0; 8]$.

Ответ: $[0; 8]$.

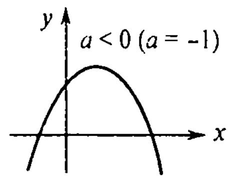


Рис. 17

Решите систему неравенств (684–687):

684. $\begin{cases} 3x - 9 > 0, \\ x^2 - 3x > -12. \end{cases}$

685. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+2} > 0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2} < 1. \end{cases}$

686. $\begin{cases} x^2 - 5x + 8 > 0, \\ x^2 - 5x \le -4. \end{cases}$

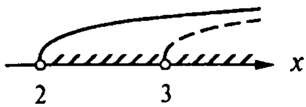
687. $\begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0, \\ x^2 - 5x < -6. \end{cases}$

Решите совокупность неравенств (688–689):

688. $\left[\begin{array}{l} 5 - x < 2x - 1, \\ 6x - 7 > 5 + 2x. \end{array}\right.$

Решение.

$5 - x < 2x - 1$,		$6x - 7 > 5 + 2x$,
$3x > 6$,	и	$4x > 12$,
$x > 2$.		$x > 3$.



Объединением найденных множеств $x > 2$ и $x > 3$ является множество $x > 2$, так как совокупность двух множеств — это все элементы первого и все элементы второго множества.

Ответ: $(2; +\infty)$.

689. $\left[\begin{array}{l}2x^2-5x+7<0,\\(x-1)^2-(x-2)^2>3.\end{array}\right.$

Решение.

$2x^2 - 5x + 7 = 0.$
$D = 25 - 56 < 0,$

нет действительных корней, т. е. $2x^2 - 5x + 7 > 0 \ \forall\ x \in R$.

$(x - 1)^2 - (x - 2)^2 > 3.$
$x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 > 3,$
$2x > 6,$
$x > 3.$

Значит, решением неравенства $2x^2 - 5x + 7 < 0$ является пустое множество, т. е. $x \in \varnothing$.

Совокупность множеств: $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$.

690. Решите неравенство $1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\le 2.$

691. Найдите целое решение системы неравенств

$$\begin{cases}x^2+6x+5<0,\\x^2+4x+3>0.\end{cases}$$

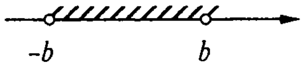
§7. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля (С1, С3)

Неравенства с модулем решаются аналогично уравнениям, содержащим переменную под знаком модуля.

Для выполнения заданий §7 необходимо хорошо знать определение модуля (с. 54).

Запомните!

1) $a, b \in R$, если $\boxed{|a| < b,\ b > 0}$, то $a \in (-b;\ b)$,



т.е. имеем систему неравенств: $\begin{cases} a < b, \\ a > -b. \end{cases}$

2) Если $\boxed{|a| < b,\ b < 0}$, то неравенство решений не имеет (не существует такого числа, модуль которого меньше отрицательного числа).

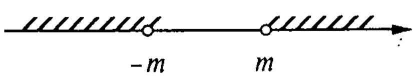
3) $|a| \le b,\ b > 0 \Rightarrow a \in [-b;\ b]$.

Например: $|x-2| < 3 \Rightarrow \begin{cases} x-2 < 3, \\ x-2 > -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > -1; \end{cases}$

т. е. $x \in (-1;\ 5)$.

Запомните!

1) $a, m \in R$, если $\boxed{|a| > m,\ m > 0}$, то
$a \in (-\infty;\ -m) \cup (m;\ +\infty)$;
имеем совокупность неравенств: $a < -m$; $a > m$.



2) Если $m < 0$, то решением неравенства $|a| > m$ является любое действительное число, т. е. $a \in R$.

3) $|a| \ge m,\ m > 0$, то $a \in (-\infty;\ -m] \cup [m;\ \infty)$.

Например: $|x+5| > 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+5 < -7, \\ x+5 > 7; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < -12, \\ x > 2. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -12) \cup (2;\ \infty)$.

Пример 1. Решите неравенство $|x^2 - 5x| < 6$.

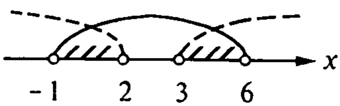
Решение.

Числа, модули которых меньше шести, находятся на промежутке $(-6;\ 6)$. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x < 6, \\ x^2 - 5x > -6 \quad (\text{или} - x^2 + 5x < 6) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0. \end{cases}$$

Найдем корни трехчленов и применим графический срособ решения квадратных неравенств.

$x^2 - 5x - 6 = 0$,	$x^2 - 5x + 6 = 0$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 6$.	$x_1 = 2$, $x_2 = 3$.



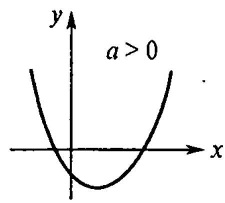


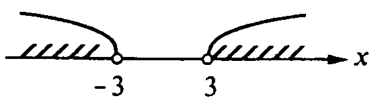
Рис. 18

Ответ: $x \in (-1;\ 2) \cup (3;\ 6)$.

Пример 2. Решите неравенство $|2 - 5x| > 3$.

Решение.

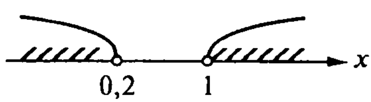
Числа, модули которых больше числа 3, на числовой прямой расположены в двух интервалах:



$(-\infty;\ -3) \cup (3;\ \infty)$.

Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2 - 5x > 3, \\ 2 - 5x < -3; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x < -0{,}2, \\ x > 1. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty;\ -0{,}2) \cup (1;\ \infty)$.

Запомните!

Неравенства вида $|f(x)| \le g(x)$ решаются согласно определению модуля. В некоторых случаях имеет смысл перейти к системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Пример 3. Решите неравенство $|x^2 - 2x - 3| \le 3x - 3$.

Решение.

Запишем систему неравенств, равносильную данному неравенству.

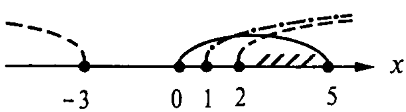
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 3x - 3, \\ x^2 - 2x - 3 \ge 3 - 3x, \\ 3x - 3 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x \le 0, \\ x^2 + x - 6 \ge 0, \\ x \ge 1. \end{cases}$$

Найдем корни квадратных трехчленов и решим систему графически.

1) $x^2 - 5x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

2) $x^2 + x - 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Пересечением трех полученных множеств является промежуток $[2; 5]$.



Ответ: $x \in [2; 5]$.

Пример 4. Решите неравенство $|x^2 - 2x| \le x - 2$.

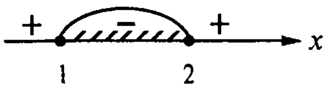
Решение.

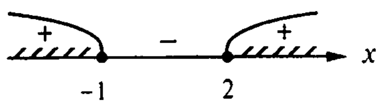
$$\begin{cases} x^2 - 2x \le x - 2, \\ x^2 - 2x \ge 2 - x, \\ x - 2 \ge 0; \end{cases}$$ — система неравенств, равносильная данному неравенству.

$$\begin{cases} x^2-3x+2\le 0, \\ x^2-x-2\ge 0, \\ x\ge 2. \end{cases}$$

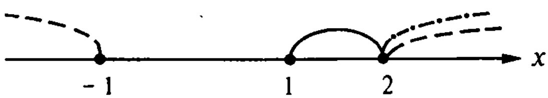
Найдем корни квадратных трехчленов и решим систему графически.

$x^2 - 3x + 2 \le 0,$	$x^2 - x - 2 \ge 0,$
$x^2 - 3x + 2 = 0,$	$x^2 - x - 2 = 0,$
$x_1 = 1,\ x_2 = 2.$	$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$





Найдем пересечение полученных множеств.



$x = 2$ — единственная общая точка трех множеств.
Ответ: 2.

Запомните!

Неравенств вида $|f(x)| \ge g(x)$ решают, переходя к совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x), \\ f(x)\le -g(x). \end{array}\right.$$

Пример 5. Решите неравенство $|x^2 - 1| > x + 1.$
Решение.

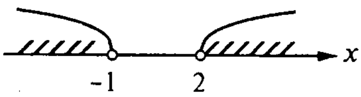
Неравенство имеет смысл при всех действительных значениях x.

Запишем совокупность неравенств, равносильную данному неравенству.

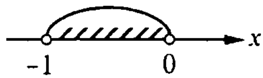
$$\left[\begin{array}{l} x^2-1>x+1, \\ x^2-1<-x-1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2-x-2>0, \\ x^2+x<0. \end{array}\right.$$

Решаем графически.

$x^2 - x - 2 > 0,$
$x^2 - x - 2 = 0,$
$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$



$x^2 + x < 0,$
$x^2 + x = 0,$
$x(x + 1) = 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = -2.$



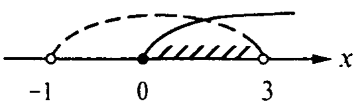
Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $x^2 - 2|x| < 3$.
Решение.
ОДЗ: $x \in R$.
Согласно определению модуля $|x| = x$, если $x \geq 0$, $|x| = -x$, если $x < 0$.

1) Пусть $x \geq 0$, тогда неравенство примет вид

$x^2 - 2x < 3,$
$x^2 - 2x - 3 = 0,$
$x_1 = -1,\ x_2 = 3.$

$$\begin{cases} x^2-2x-3<0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in [0;\ 3)$.

Запомните!

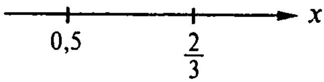
Если неравенство содержит несколько модулей, его решают, разбивая числовую прямую на промежутки при помощи корней функций, находящихся под знаками модулей. Каждый раз необходимо проверять, принадлежит ли полученный корень выбранному промежутку. В результате объединяют все корни.

Пример 7. Решите неравенство $|3x - 2| - |2x - 1| > 5$.

Решение.

Найдем корни двучленов, находящихся под знаками модулей.

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3};\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0{,}5.$$



Корни разбивают числовую прямую на 3 интервала.

1) $x < 0{,}5$.

Согласно определению модуля $|3x - 2| = 2 - 3x$, так как $3x - 2 < 0$ на рассматриваемом интервале;

$|2x - 1| = 1 - 2x$, так как $2x - 1 < 0$.

Неравенство имеет вид $2 - 3x - (1 - 2x) > 5 \Rightarrow -x > 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow x < -4$.

$\begin{cases} x < 0{,}5, \\ x < -4 \end{cases} \Rightarrow x < -4$ — решение данного неравенства на промежутке $(-\infty;\ 0{,}5)$.

2) $0{,}5 \le x < \dfrac{2}{3}$.

$3x - 2 < 0 \Rightarrow |3x - 2| = 2 - 3x$;

$2x - 1 > 0 \Rightarrow |2x - 1| = 2x - 1$.

Данное неравенство имеет вид $2 - 3x - (2x - 1) > 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x < -0{,}4$, не соответствует выбранному промежутку, значит, на промежутке $\left[0{,}5;\ \dfrac{2}{3}\right)$ неравенство решений не имеет, т. е. $x \in \varnothing$.

3) $x \ge \dfrac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 - (2x - 1) > 5 \Rightarrow x > 6$.

Совокупность полученных множеств решений:

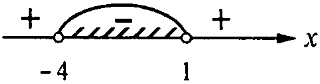
$x \in (-\infty;\ -4) \cup (6;\ +\infty)$.

Ответ: $x < -4$; $x > 6$.

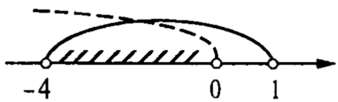
Пример 8. Решите неравенство $x^2 - 3|x| < 4$.

Решение.

1) $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ (модуль отрицательного числа – противоположное число).
Данное неравенство имеет вид $x^2 + 3x - 4 < 0$.
$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 1$.

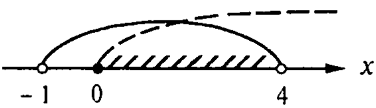


$\Rightarrow$ нужно найти пересечение множеств $x < 0$ и $-4 < x < 1$,



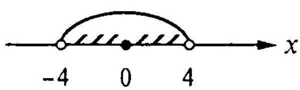
т. е. $x \in (-4;\ 0)$.

2) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ (согласно определению модуля).
Данное неравенство имеет вид $x^2 - 3x < 4$; $x^2 - 3x - 4 < 0$.
$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$.



$x \in [0;\ 4)$.

Совокупность результатов:



Ответ: $(-4;\ 4)$.

Решите неравенство (692–700):

692. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$.

693. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$.

694. $2|x^2 - 1| > x + 1$ и найдите наименьшее целое положительное решение.

695. $|x + 1| > 2|x + 2|$.

696. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right| < 3$.

697. $|2x + 1| \geq |2x - 2|$.

698.1. $x^6 - 9x^3 + 8 < 0$.

698.2. $|x - 3| > -1$.

698.3. $|5 - 8x| \leq 11$.

699.1. $\left|\dfrac{2x+3}{3x-2}\right| > 1.$ **699.2.** $x^2 - |5x+6| > 0.$

700.1. $|x-1| + |x+1| < 4.$ **700.2.** $|x| < -x^2 + x + 6.$

Решите неравенство (701.1–703):

701.1. $|x+2| > 9$ и найдите наименьшее целое положительное решение.

701.2. $|x-2| < 3$, в ответе укажите наименьшее целое решение.

702.2. $|x^2 - 2x| \le x - 1$, укажите наименьшее целое решение.

702.2. $\dfrac{x^2}{3-x} \le 0.$ **703.** $\big||2x^2 - x| - 3\big| \le 2x^2 + x + 5.$

Решите систему неравенств (704.1–704.3):

704.1. $\begin{cases} |x| \le -x, \\ |x+2| > 1. \end{cases}$ **704.2.** $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x+1| \le 1. \end{cases}$ **704.3.** $\begin{cases} |x| > x, \\ 2x - 1 > 3. \end{cases}$

Решите неравенство (705.1–705.3):

705.1. $|x^2 - 7x + 12| \le 6.$

705.2. $|x^2 - 3x - 3| > 6.$

705.3. $|2x^2 - x - 1| \ge 5.$

§8. Неравенства с параметрами

706*. При каком наибольшем целом значении a неравенство $ax^2 - 2x + a < 0$ выполняется для любого действительного значения x?

Решение.

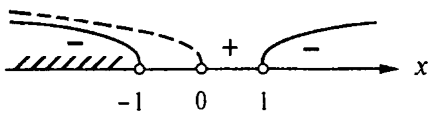
Для того чтобы квадратный трехчлен принимал только отрицательные значения, необходимо выполнение двух условий $\begin{cases} a < 0, \\ 1 - a^2 < 0. \end{cases}$

$ax^2 - 2x = a = 0 \Rightarrow D_1 = 1 - a^2.$

Решаем систему неравенств $\begin{cases} a < 0, \\ 1 - a^2 < 0. \end{cases}$

$1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1.$

Решаем графически:



Пересечением множеств является промежуток $(-\infty; -1)$. Наибольшее целое число -2.

Ответ: -2.

При каких значениях параметра m неравенство выполняется для всех действительных значений x (707–709)?

707*. $-6 < \dfrac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4.$

Решение.

Представим данное неравенство в виде системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} > -6, \\ \dfrac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x^2 + mx - 4 + 6x^2 - 6x + 6}{x^2 - x + 1} > 0, \\ \dfrac{2x^2 + mx - 4 - 4x^2 + 4x - 4}{x^2 - x + 1} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{8x^2+(m-6)x+2}{x^2-x+1} > 0, \\ \dfrac{-2x^2+(m+4)x-8}{x^2-x+1} < 0. \end{cases}$$

Трехчлен $x^2 - x + 1$ не имеет действительных корней, так как его дискриминант отрицательный, значит, $x^2 - x + 1 > 0 \ \forall \ x \in R$.

Система примет вид

$$\begin{cases} 8x^2+(m-6)x+2 > 0, \\ 2x^2-(m+4)x+8 > 0. \end{cases}$$

Отметим, что коэффициенты при x^2 положительны у обоих неравенств.

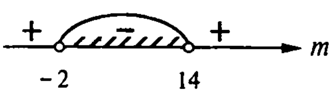
Оба неравенства должны выполняться при всех действительных значениях x, следовательно, дискриминанты должны быть отрицательными:

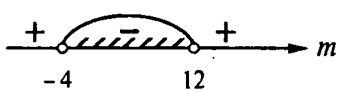
$$\begin{cases} (m-6)^2-64 < 0, \\ (m+4)^2-64 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} m^2-12m-28 < 0, \\ m^2-8m-48 < 0. \end{cases}$$

Найдем корни трехчленов и нанесем их на числовую прямую.

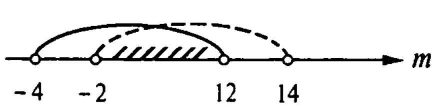
$m^2 - 12m - 28 = 0$,
$m_1 = -2$; $m_2 = 14$.

$m^2 - 8m - 48 = 0$,
$m_1 = -4$; $m_2 = 12$.





Найдем пересечение полученных множеств решений.



При $m \in (-2;\ 12)$ данное неравенство выполняется при всех действительных значениях x.

Ответ: $(-2;\ 12)$.

708*. $x^2 - mx > \frac{2}{m}$.

709*. $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$.

710*. Найдите все значения параметра n, при которых каждое решение неравенства $x^2 - 4(n + 1)x + 4n^2 + 8n + 3 < 0$ (1) является решением неравенства $x^2 + 2(2n + 1)x + 2n - 3 < 0$ (2).

§9. Задания для подготовки к ЕГЭ

Решите неравенство (711–714):

711. $x + 2 < \frac{1}{x+4}$.

712. $\sqrt{2x^2 + x} > 1 + 2x$.

713. $\sqrt{x+3} < \sqrt{6-2x}$.

714. $\frac{5x-15}{(x+6)(x-8)} > 0$.

Найдите количество целочисленных решений неравенства (715–717):

715. $\frac{x^2 - x - 12}{1 + \sqrt{x^2 - 4}} < 0$.

716. $\frac{x^2 - 10x + 25}{(x-5)(x-7)} \geq -1$, принадлежащих отрезку $[4;\ 9]$.

717. $\frac{(x-1)^2(x+3)}{3-x} > 0$.

718. Найдите сумму целых решений неравенства $x^2 - |x| - 12 < 0$.

Решите уравнения и неравенства (719–723):

719. $3|x+1| \geq x+5$. **720.** $|x-3| = 2x-5$.

721. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}=2$ и найдите его наибольшее решение.

722. $|2-5x| + |x+1| \geq x+3$.

723. $\dfrac{10x^2-29x+12}{\sqrt{4-x^2}+2}<0$.

Найдите наибольшее целое решение неравенства (724–731):

724. $(x-2)^2+3>(x+5)^2$. **725.** $3{,}5(x+1)<4x-\dfrac{2x-1}{2}$.

726. $(x^4-1)(2-5x)>0$. **727.** $\dfrac{2x^2-2x-4}{x(4-x)}>0$.

728. $\dfrac{(2x-3)(6+3x)}{7-4x}\geq 0$. **729.** $\dfrac{4}{1+x}+\dfrac{2}{1-x}>1$.

730. $\sqrt{3x-4}>\sqrt{8-x}$. **731.** $\sqrt{16x^2-8x+1}<3$.

Найдите значения x, при которых неравенство не имеет решений (732*–736*):

732. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$. **733.** $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{3}{4}<\dfrac{1}{x}-0{,}5$.

734. $\dfrac{m^2x+1}{2}-\dfrac{m^2x+3}{3}<\dfrac{m+9x}{6}$ (при каком m нет решений).

735. $-9<x^4-10x^2<56$. **736.** $\dfrac{3+\sqrt{x^2-49}}{x^2+3x-54}>0$.

Найдите сумму целых решений неравенства (737*–740*):

737. $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{5}$. **738.** $\dfrac{5+\sqrt{25-x^2}}{x^2-2x-24}<0$.

739. $\sqrt{3x-x^2}<4-x.$

740. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0.$

Найдите сумму целых отрицательных решений неравенства (741*–743*):

741. $\dfrac{3x^2+x-9}{x}\geq -5.$

742. $\sqrt{x^2-x-12}<x.$

743. $|2x-3|<5.$

Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства (744*–749*):

744. $x^4-6x^3+11x^2-6x\geq 0.$

745. $\dfrac{7x-1-6x^2}{x-2}\geq 0.$

746. $\dfrac{x^2-5x+4}{(x^2+2)(x+2)}\leq 0.$

747. $\sqrt{5x-15}\geq -4.$

748. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1.$

749. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

Решите неравенство (750*–753*):

750. $|x-6|>|x^2-5x+9|.$

751. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}\leq\dfrac{1}{2}.$

752. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2.$

753. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3.$

Найдите значение выражения (754–759):

754. $\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-6)^2}$, если $0{,}5\leq x\leq 4{,}9.$

755. $\sqrt[4]{(x^2-4x+4)^2}+\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}$, если $x=\sqrt{7}.$

756. $\sqrt[6]{(x^2-6x+9)^3}+\sqrt[6]{(x^2-8x+16)^3}$, если $x=\sqrt{10}.$

757. $\dfrac{|-2{,}4|\cdot|-0{,}2|\cdot|35|}{|12|\cdot|-2{,}5|}.$

758. $|x-3|+|2x-2|$, если $x = 1{,}2$.

759. $\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ при $x = 9{,}02$.

760*. При каких значениях a уравнение $(a^2-9)x = a^2 + 2a - 3$ имеет только одно решение?

761*. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$ не имеет действительных корней?

762*.1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

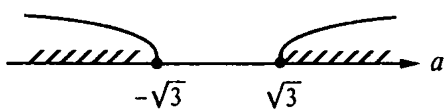
762.2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ справедливо для любых $x \in [1;\,2]$.

Найдите количество целых отрицательных значений параметра a, больших -10, при которых уравнение имеет 2 различных действительных корня.

763*. $x^2+2ax\sqrt{a^2-3}+4=0$.

Решение.

$a^2-3\ge 0 \Rightarrow a^2\ge 3 \Rightarrow |a|\ge\sqrt{3}$,



$a\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

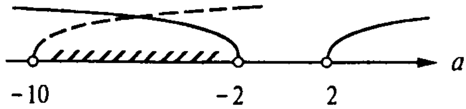
Квадратное уравнение имеет 2 разных корня, если дискриминант положительный, т. е. $D > 0$.

$D_1=\left(a\sqrt{a^2-3}\right)^2-4=a^2\left(a^2-3\right)-4>0.$ $a^4-3a^2-4>0$.

Пусть $a^2 = t > 0$, тогда $D = t^2 - 3t - 4 > 0$.

Решим графически.

$t^2-3t-4=0 \Rightarrow t_1=-1\notin(0;\infty)$, $t_2=4\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$.



Условию задачи удовлетворяют значения $a \in (-10;\ 2)$, которые содержат 7 целых отрицательных чисел.

Ответ: 7.

Запомните!

Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ были меньше, чем число M, необходимо и достаточно выполнение следующих условий (рис. 19, 20).

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$

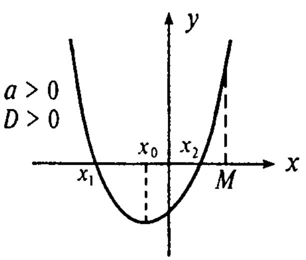


Рис. 19

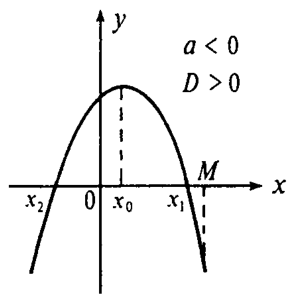


Рис. 20

Здесь $D = b^2 - 4ac$.

Если оба корня квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ больше числа N (рис. 21, 22), то выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} > N, \\ f(N) > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > N, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

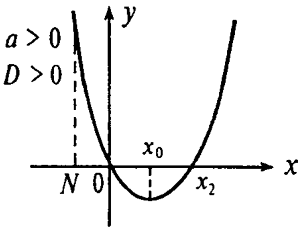


Рис. 21

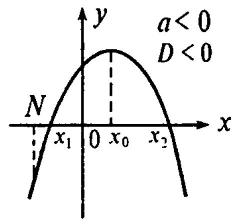


Рис. 22

Запомните!

Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число M, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

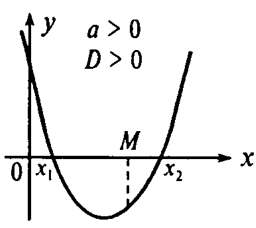


Рис. 23

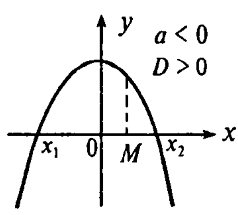


Рис. 24

764*.1. При каком значении a уравнение $(a + 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0$ не имеет корней.

764*.2. При каких действительных целых значениях k оба корня уравнения (в том числе и кратных) $(1 + k)x^2 - 3kx + 4k = 0$ больше числа 1?

Запомните!

Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена находились в интервале $(N;\ M)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ N < x_0 < M, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ N < x_0 < M, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

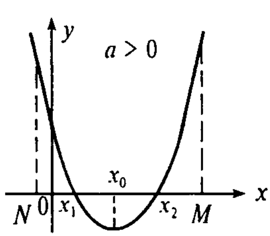


Рис. 25

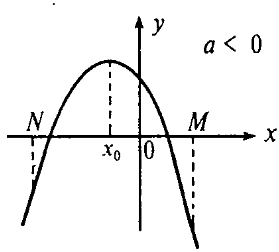


Рис. 26

Запомните!

$$\boxed{x_2 > x_1;\ M < x_2 < N}$$

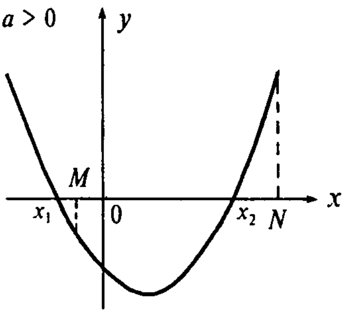


Рис. 27

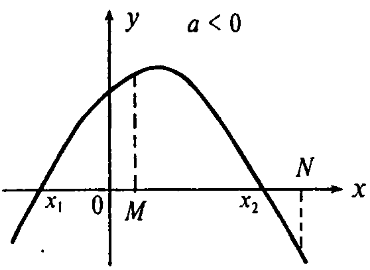


Рис. 28

$D > 0$

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0; \end{cases}$$

или

$D > 0$

$$\begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

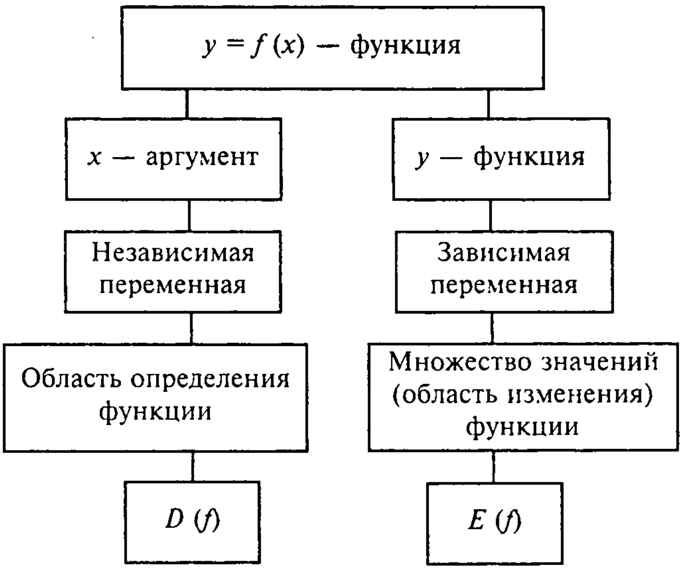
При решении подобных задач основными являются: направление ветвей параболы, знаки значений $f(M)$ и $f(N)$, расположение вершины параболы. Все остальное записывается соответственно графику.

765*.1. Найдите все целые значения параметра a, при которых оба корня уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше 0,5.

765*.2. Найдите количество целых значений параметра a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $(a - 2)x^2 - 2(a + 2)x + 4a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < 2$; $x_2 > 3$.

Глава 5
Функции и графики

Функция – это зависимость между двумя переменными величинами. Одна переменная (x) может принимать произвольные значения в некоторой области, а другая переменная (y) изменяется по определенному закону в зависимости от первой.



§1. Общие свойства функций

1. Область определения функции $D(f)$ — это множество значений аргумента, при которых функция существует (имеет смысл, определена).

   Например, функция $y = \frac{3}{x-5}$ существует, если $x - 5 \neq 0$, $x \neq 5$. $D(f)$: $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

2. $E(f)$, область изменения функции $y = f(x)$ – это множество всех значений, которые принимает функция.

Напомним, какие множества значений имеют основные элементарные функции.

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

$$E\left(\sqrt[2n]{x}\right) = [0; +\infty), \ n \in Z;$$

$$E\left(\sqrt[2n+1]{x}\right) = R, \ n \in Z;$$

$E(a^x) = (0; +\infty);$

$E(\log_a x) = R;$

$E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1];$

$$E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$E(\arccos x) = [0; \pi];$

$E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R;$

$$E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).$

3. Нули (корни) функции – это значения аргумента, при которых функция равна нулю.

x_0 — ноль функции	—	$f(x_0) = 0$

Запомните!

На графике функции $y = f(x)$ нули – это точки пересечения графика с осью абсцисс.

Функция может не иметь нулей, график такой функции не пересекает ось абсцисс.

Функция может иметь бесчисленное множество нулей. Например: $y = \sin x$; $y = \cos x$.

4.

Монотонность функций

Возрастающая функция	Убывающая функция
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow y_2 > y_1$ $(x_2, x_1) \in D(f)$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow y_2 < y_1$ $(x_2, x_1) \in D(f)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$

5.

Четность функции

$x \in D(f)$; $-x \in D(f)$

Четная функция	Нечетная функция	Функция не является ни четной, ни нечетной
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$
График функции симметричен относительно оси ординат	График функции симметричен относительно начала координат	

Область определения – множество, симметричное относительно начала координат, т.е. функция имеет парные корни (например, если $x_1 = -3$ – корень функции, то $x_2 = 3$ тоже корень функции)

Запомните!

Если нечетная функция $y = f(x)$ определена в точке $x = 0$, то $f(0) = 0$, т. е. график функции проходит через начало координат.

Сумма и разность нечетных функций есть функция нечетная, произведение и частное двух нечетных функций — четная функция.

Например:

а) нечетная функция $y = x^3$ определена в точке $x = 0$ и ее график проходит через начало координат (рис. 29);

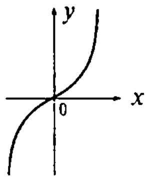


Рис. 29

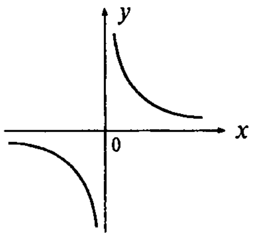


Рис. 30

б) $y = \frac{1}{x}$ не существует при $x = 0$ и график функции $y = \frac{1}{x}$ не проходит через начало координат (рис. 30);

в) четная функция $y = x^2 + 2$ существует при $x = 0$, но график функции не проходит через начало координат (рис. 31).

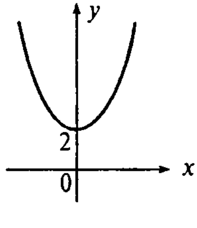


Рис. 31

Запомните!

Сумма, разность, произведение и частное четных функций есть четная функция.

Если функция $y = f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $-x$ из области определения функции оказалось, что $f(x) \neq f(-x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

6. Периодичность функций.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x и $(x \pm T)$ из области определения функции выполняется равенство $f(x) = f(x \pm T)$.

Число T называется периодом функции $y = f(x)$, число вида $n \cdot T$, где n — любое целое число, также является периодом этой функции. Значит, период можно прибавить (или вычесть) к аргументу целое число раз.

7. Если функция $y = f(x)$ принимает положительные значения, то ее график находится выше оси абсцисс. Справедливо и обратное утверждение.

Например, $f(x) > 0$ при $x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; +\infty)$ (рис. 35).

$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3)$ (рис. 32).

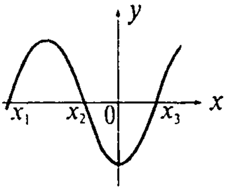


Рис. 32

Если функция $y = f(x)$ принимает отрицательные значения, то график находится ниже оси абсцисс. Справедливо и обратное утверждение.

Это свойство функций применяется при решении неравенств графическим способом.

766.1. На рисунке 33 показано изменение биржевой стоимости акций. 3 апреля бизнесмен приобрел 12 акций, 7 из них он продал 9 апреля, остальные — 12 апреля. Каков убыток?

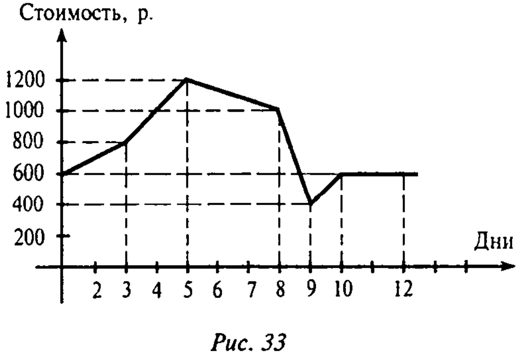


Рис. 33

766.2. В первую неделю июня бизнесмен приобрел 16 акций, а продал их на второй неделе. Какую максимальную прибыль мог получить бизнесмен (рис. 34)?

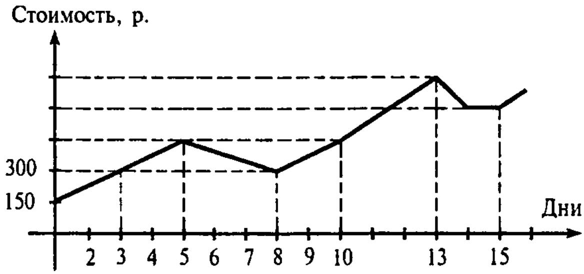


Рис. 34

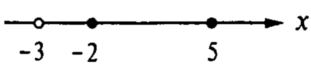
767.1. Решите неравенство $\dfrac{(x+2)(5-x)}{x+3} \geq 0.$

Решение.

Задание можно сформулировать так:
найдите значения аргумента x, при которых функция

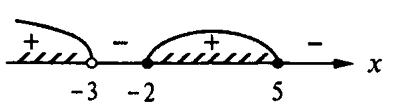
$f(x) = \dfrac{(x+2)(5-x)}{x+3}$ принимает положительные значения.

Найдем корни числителя и знаменателя
$x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 5$.



Найдем знаки функции на всех интервалах.

Например, $f(0) = \dfrac{2 \cdot 5}{3} > 0$



Выберем интервалы со знаком плюс.
$x \in (-\infty; -3) \cup [-2; 5]$.

767.2. На рисунке 35 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-7; 7]$.

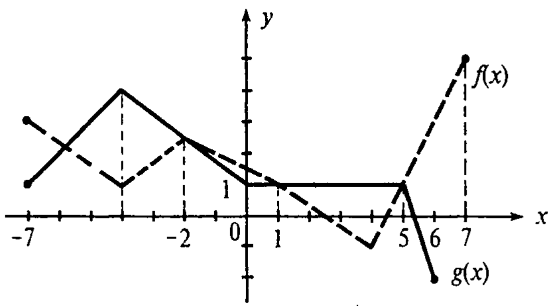


Рис. 35

Укажите значения x, для которых выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$.

768.1. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом $T = 5$. На промежутке $(-1; 4)$ она задается формулой $f(x) = 3 + 2x - 2x^2$. Найдите значение выражения $3f(-25) + 2f(13)$.

768.2. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом $T = 4$. На промежутке $(-1; 4]$ она задается формулой $f(x) = 3 - |2 - x|$. Найдите значение выражения $2f(20) - 3f(-17)$.

769. Четная периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. $T = 6$ и $f(-1) = 5$, $f(16) = 3$.

Найдите значение выражения $\dfrac{f(4) - 5f(-10)}{3f(-7)}$.

Решение.

1) $f(4) = f(4 + 12) = 3$.
2) $f(-10) = f(-10 + 6) = f(-4) = f(4) = 3$ (так как функция четная, т. е. $f(-4) = f(4)$).
3) $f(7) = f(7 - 6) = f(1) = f(-1) = 5$. $f(-7) = f(7) = 5$.

4) $\dfrac{f(4)-5f(-10)}{3f(-7)}=\dfrac{3-5\cdot 3}{3\cdot 5}=-0{,}8.$

Ответ: $-0{,}8$.

770. Нечетная периодическая функция $y = f(x)$, $x \in R$, имеет период $T = 7$ и $f(3) = 8$; $f(0) = 2$. Найдите значения выражения $2f(-18) - f(-21)\cdot f(16)$.

771. Укажите номер графика (рис. 36—39), на котором изображен график функции, принимающей на промежутке $(-3;\ 3)$ только отрицательные значения.

1)

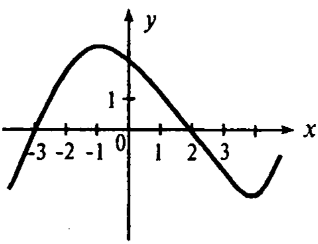


Рис. 36

2)

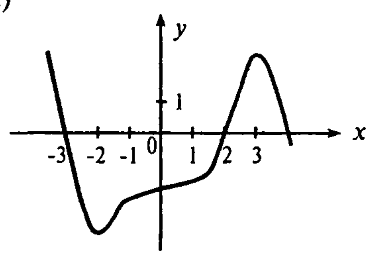


Рис. 37

3)

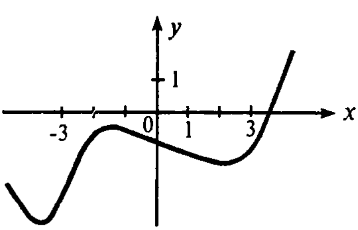


Рис. 38

4)

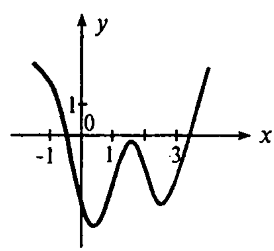


Рис. 39

772. На рисунке 40 изображен график функции $y = f(x)$. Какому из следующих промежутков принадлежит корень уравнения $f(x) = -3$?

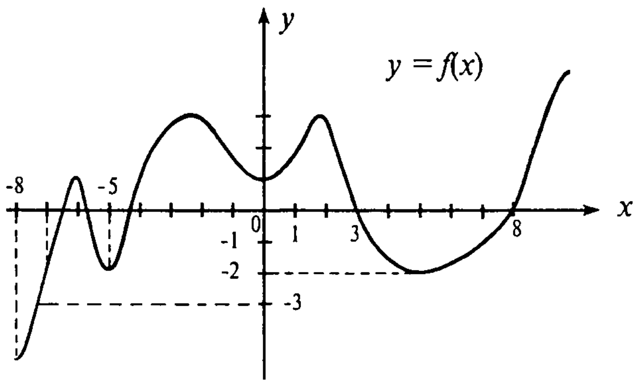


Рис. 40

1) $(-1;\ 3)$; 2) $(0;\ 4)$; 3) $(-8;\ -5)$; 4) $(-5;\ -1)$

773. На рисунке 41 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $(-8;\ 9)$. Определите суммарную длину промежутков, на которых функция убывает.

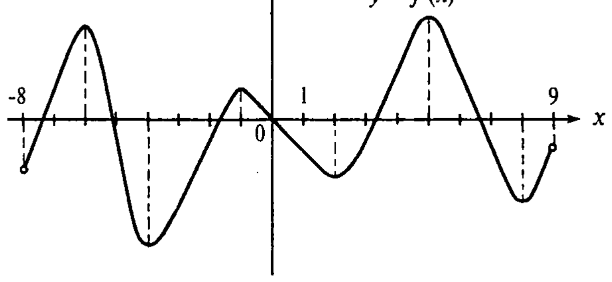


Рис. 41

774. На рисунке 42 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-9; 7)$. Найдите количество интервалов возрастания функции.

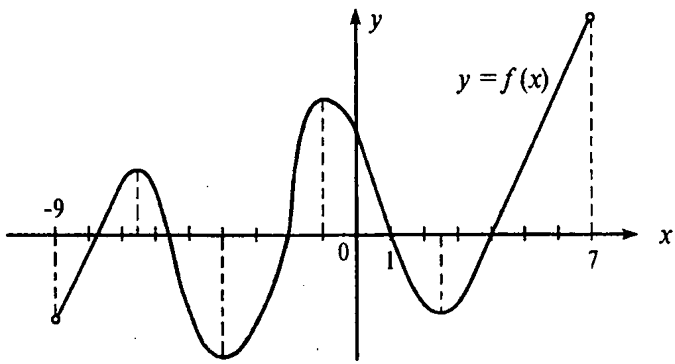


Рис. 42

775. Найдите значение функции $y = \dfrac{3f(x) - f(-x)}{2g(x) - g(-x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y = f(x)$ — четная, функция $y = g(x)$ — нечетная, $f(x_0) = -3$, $g(x_0) = 2$.

776. Найдите значение функции $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 2f(-x) + g(-x)$ в точке x_0, если $y = f(x)$ — четная функция, $y = g(x)$ — нечетная, $f(x_0) = 3$, $g(x_0) = -2$.

777. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На рисунке 43 изображен график этой функции при $-3 \le x \le 2$. Найдите значение выражения $\dfrac{f(-18) \cdot f(17)}{f(-21)}$. Сколько нулей имеет функция на интервале $[-3; 2]$?

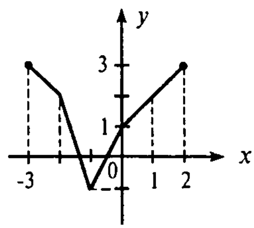


Рис. 43

778. $y = f(x)$ – нечетная периодическая функция, $x \in R$, с периодом $T = 4$. На интервале $(0; 5)$ она совпадает с функцией $g(x) = x^2 - x - 6$. Найдите количество корней уравнения $f(x) = 0$ на интервале $[-6; 5)$.

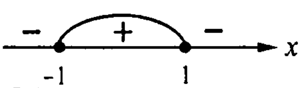
779. Найдите область определения функции $y = \dfrac{3+\sqrt{1-x^2}}{10x^2+3x-1}$.

Решение.

Дробь существует, если знаменатель не равен нулю. Корень четной степени имеет смысл, если подкоренное выражение не отрицательно. Областью определения данной функции является решение системы $\begin{cases} 10x^2+3x-1 \neq 0, \\ 1-x^2 \geq 0. \end{cases}$

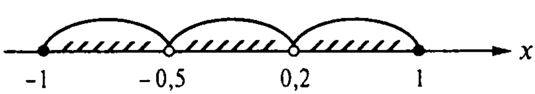
$10x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 0{,}2.$

$1 - x^2 \geq 0;$



$x \in [-1;\ 1].$

Объединим результаты



Ответ: $x \in [-1;\ 0{,}5) \cup (0{,}5;\ 0{,}2) \cup (0{,}2;\ 1]$.

780. Укажите график нечетной функции (рис. 44–47).

1)

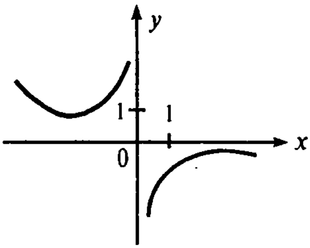


Рис. 44

2)

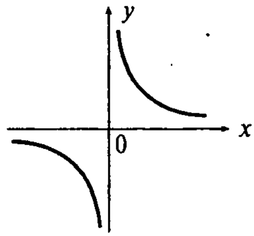


Рис. 45

3)

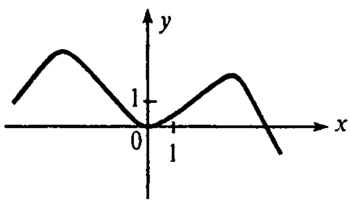


Рис. 46

4)

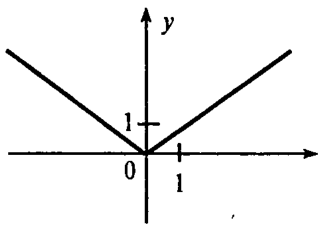


Рис. 47

781. Укажите график четной функции (рис. 48–51).

1)

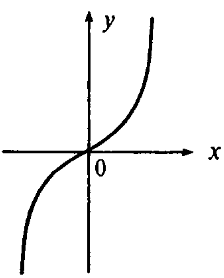


Рис. 48

2)

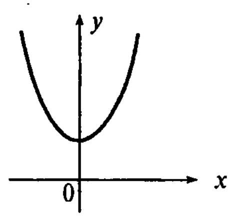
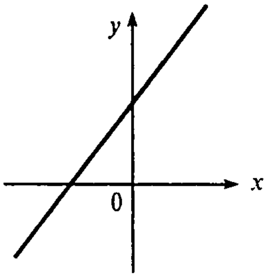


Рис. 49

3)



4)

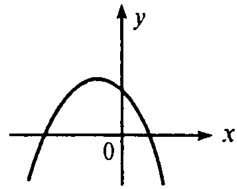


Рис. 50 *Рис. 51*

782. Укажите множество значений функции $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 52.

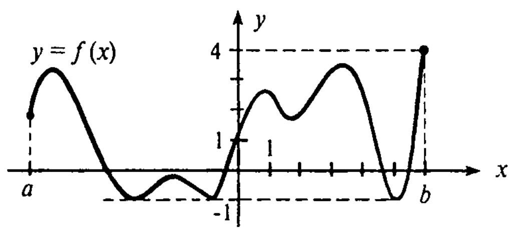
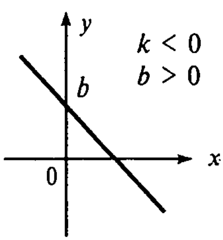


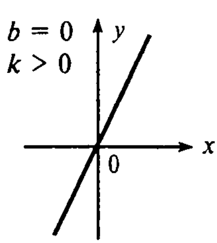
Рис. 52

§2. График линейной функции

Функция вида $y = kx + b$, где k и b — действительные числа, называется линейной.

График линейной функции — прямая линия, расположение которой зависит от значений k и b (рис. 53—58).





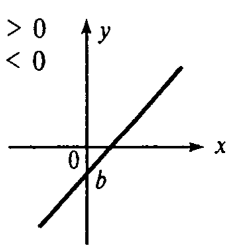


Рис. 53 *Рис. 54* *Рис. 55*

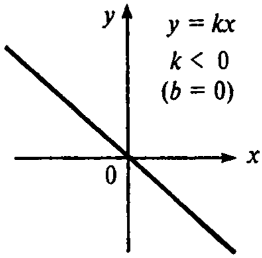


Рис. 56

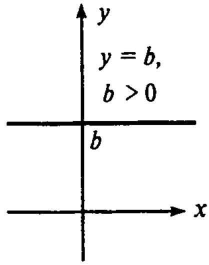


Рис. 57

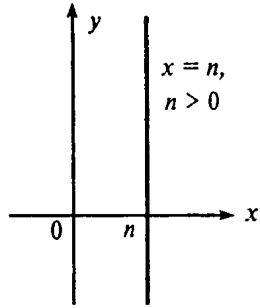


Рис. 58

В уравнении прямой линии $y = kx + b$ число k называется *угловым коэффициентом* прямой.

Если $b = 0$, то $y = kx$ – уравнение прямой *пропорциональной зависимости*.

В этом случае k называют и коэффициентом пропорциональности.

Все параллельные друг другу прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты.

Запомните!

Условие параллельности двух прямых:

$$\boxed{k_1 = k_2}$$

Уравнение прямой, параллельной оси абсцисс: $y = b$ ($k = 0$).

Уравнение прямой, параллельной оси ординат: $x = m$.

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 \cdot k_2 + 1 = 0 \text{ или } \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

783. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;\ 1)$ параллельно $y = 5x + 2$.

Решение.

Уравнение прямой линии $y = kx + b$. Так как она параллельна прямой $y = 5x + b$, то $k = 5$. Координаты точки M

удовлетворяют уравнению $y = 5x + b$, так как точка M находится на этой прямой, значит, $1 = 5 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 11$.

$y = 5x + 11$ – искомое уравнение прямой.

784. Составьте уравнение прямых, параллельных осям координат и проходящих через точку M (5; 3) (рис. 59).

Решение.

Уравнение прямой, параллельной оси абсцисс, — $y = 3$; уравнение прямой, параллельной оси ординат, — $y = 5$.

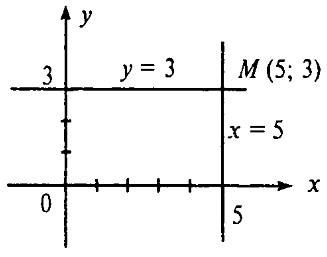


Рис. 59

785. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 1)$ параллельно прямой $y = 3x - 4$.

786. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 3)$ перпендикулярно прямой $y = -0{,}4x + 0{,}2$.

787. Составьте уравнение прямых, проходящих через точку $B(-2; -4)$ перпендикулярно осям координат.

§3. Обратная пропорциональная зависимость

$y = \dfrac{k}{x}$, $x \neq 0$ — уравнение обратной пропорциональной зависимости; график – *гипербола*, которая имеет две ветви (рис. 60; 61)):

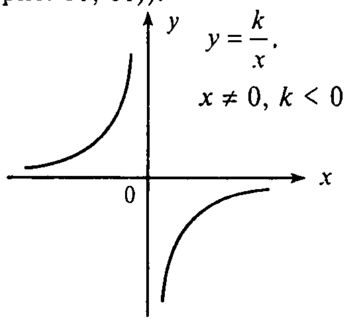


Рис. 60

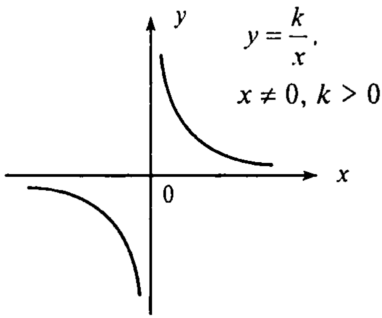


Рис. 61

Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$, $x \neq 0$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
2. Множество значений: $y \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
3. Нулей функция не имеет, график не пересекает ось абсцисс.
4. $y = \dfrac{k}{x}$ — нечетная функция, ее график симметричен относительно начала координат.
5. При $k > 0$ функция $y = \dfrac{k}{x}$ убывает, при $k < 0$ — возрастает на всей области определения.

§4. Квадратичная функция

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$ называется *квадратичной*.
График квадратичной функции — *парабола*.
При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх (рис. 62; 63).
При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз (рис. 64, 65).
Расположение параболы также зависит от дискриминанта D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$; $D = b^2 - 4ac$.

$a > 0$, $D > 0$

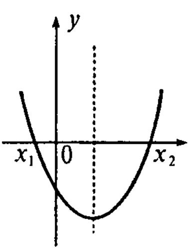


Рис. 62

$a > 0$, $D < 0$

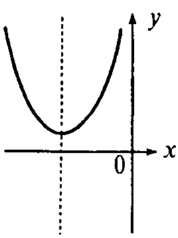


Рис. 63

$a < 0$, $D > 0$

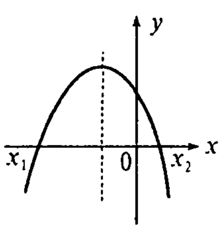


Рис. 64

$a < 0$, $D < 0$

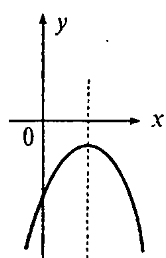


Рис. 65

Если $D > 0$, функция имеет два корня, график пересекает ось абсцисс в двух точках (рис. 47, *1, 3*).

$D = 0$ — парабола касается оси абсцисс, функция имеет один корень.

$D < 0$ — функция корней не имеет, парабола не пересекает ось абсцисс (рис. 47, *2, 4*).

788. Прямая, параллельная прямой $y = 8\,x$, касается параболы $y = x^2 + 1$. Найдите координаты точки касания.

Решение.

Пусть $M(x_0; y_0)$ – точка касания. Уравнение касательной имеет вид $y = -8x + b$; $k = -8$, так как касательная параллельна прямой $y = -8x$ ($k_1 = k_2$). Чтобы найти общие точки параболы и касательной, нужно решить уравнение $-8x + b = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 8x - b + 1 = 0$.

Так как общая точка только одна, дискриминант этого уравнения равен нулю.

$D_1 = 16 + b - 1 = b + 15 = 0 \Rightarrow b = -15 \Rightarrow y = -8x - 15$ – уравнение касательной. Найдем координаты точки касания $x^2 + 1 = -8x - 15 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = -4$; $y = 17$.

Ответ: $M\,(-4;\ 17)$.

Комментарий. С применением геометрического смысла производной функции задача решается более рационально.

789. Две прямые $y = -2x + 5$ и $y = 6x + 2$ касаются параболы $y = x^2 + bx + c$. Найдите значения b и c.

Решение.

Прямые и параболы имеют общие точки, значит, можем записать систему уравнений

$$\begin{cases} -2x+5=x^2+bx+c, \\ 6x+2=x^2+bx+c, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(b+2)x+(c-5)=0, \\ x^2+(b-6)x+(c-2)=0. \end{cases}$$

Дискриминанты обоих уравнений равны 0, так как имеется только по одной общей точке.

$$\begin{cases} (b+2)^2-4(c-5)=0, \\ (b-6)^2-4(c-2)=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+4b+4-4c+20=0, \\ b^2-12b+36-4c+8=0. \end{cases}$$

Вычтем почленно из первого второе уравнение системы. $16b - 20 = 0 \Rightarrow b = 1{,}25$. Подставим значение $b = 1{,}25$ в первое уравнение системы и найдем $c = 7{,}640625$.

790. Найдите значения переменной x, при которых функция

$y = \sqrt{-x^2 + 11x - 30}$ имеет смысл.

791. Прямая, перпендикулярная $y = 2x$, касается параболы $y = x^2 + x$. Найдите координаты точки касания.

§5. Степенная функция

Степенная функция с целым положительным показателем — функция вида $y = x^n$, $n \in N$.

При $n = 1$ $y = x$. Графиком этой функции является прямая — биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 66).

При $n = 2$ получаем функцию $y = x^2$, график — парабола (рис. 67).

При $n = 3$ получаем функцию $y = x^3$. График функции $y = x^3$ называется кубической параболой (рис. 68).

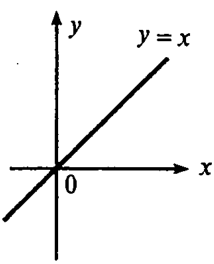


Рис. 66

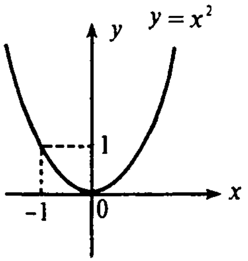


Рис. 67

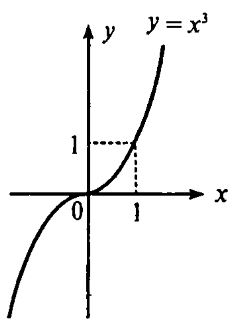


Рис. 68

Вообще, график функции $y = x^n$, $n \in N$, $n \neq 1$, при четном показателе выглядит так же, как график функции $y = x^2$, а при нечетном $n > 3$ — как график функции $y = x^3$.

Если $n = -1$, то имеем гиперболу $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ (рис. 69).

График функции $y = x^{-2}$ изображен на рис. 70.

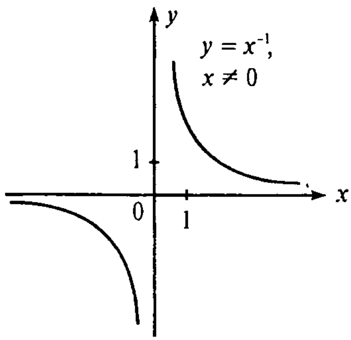


Рис. 69

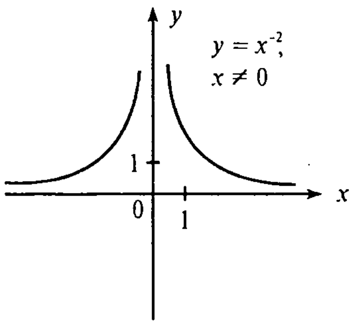


Рис. 70

График степенной функции $y = x^n$ с целым отрицательным показателем при нечетном $n < 0$ выглядит так же, как график $y = x^{-1}$, при четном $n < 0$ выглядит так же, как график функции $y = x^{-2}$. График степенной функции $y = x^{\frac{1}{n}}$ $(\sqrt[n]{x})$, если n – четное натуральное число, $n \geq 2$, выглядит так же, как график функции $\sqrt{x}$ (рис. 71), и функция имеет такие же свойства.

График функции $\sqrt[n]{x}$ при n нечетном натуральном, $n \geq 3$, выглядит как график функции $\sqrt[3]{x}$ (рис. 72).

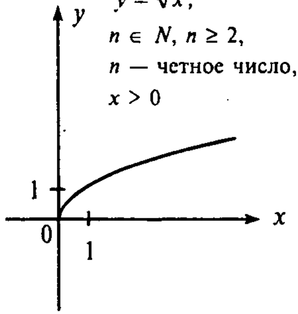


Рис. 71

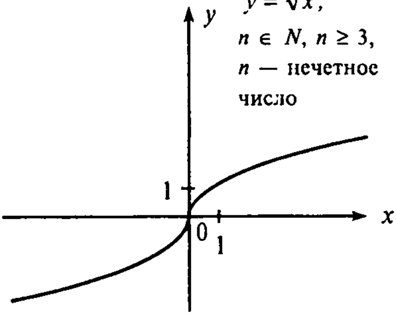


Рис. 72

§6. Показательная функция

Функция вида $y = a^x$, $a > 1$, $a \neq 1$, называется *показательной* (рис. 73; 74).

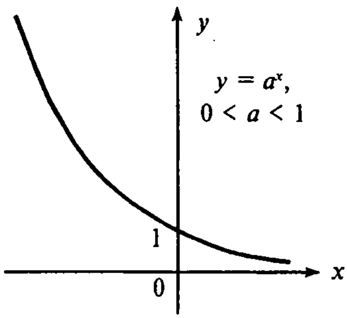


Рис. 73

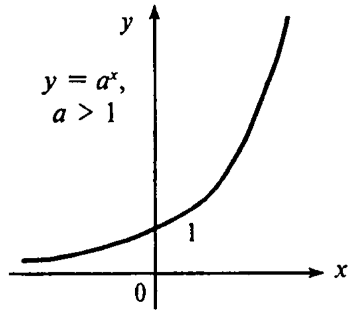


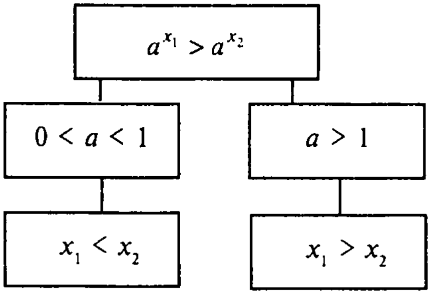
Рис. 74

Свойства показательной функции

1. Область определения функции вида $y = a^x$, $a > 0$ – множество действительных чисел.
2. Область значений – множество положительных чисел: $a^x > 0$ при $a > 0$ для $x \in R$.
3. Нулей функция $y = a^x$ не имеет, график не пересекает ось абсцисс.
4. Функция $y = a^x$, $a > 0$, не является ни четной, ни нечетной.
5. $y = a^x$, $a > 0$ — непериодическая функция.
6. Монотонность.

$0 < a < 1$	$a > 1$
$y = a^x$ убывает на множестве действительных чисел (рис. 73)	$y = a^x$ возрастает при $x \in R$ (рис. 74)

Это свойство показательной функции используется при решении неравенств.



§7. Логарифмическая функция

Определение. $\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M$, $a > 0$; $a \neq 1$, $M > 0$.

Логарифм положительного числа M по положительному основанию a – это показатель степени b, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число M.

Функция $y = \log_a x$, обратная показательной, называется логарифмической (рис. 75; 76).

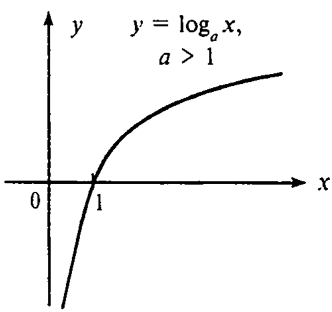


Рис. 75

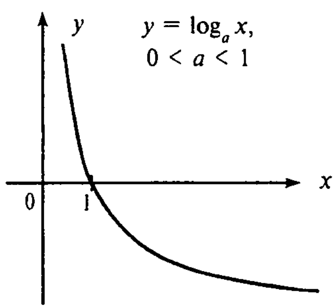


Рис. 76

Запомните!

Графики обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого координатного угла).

Свойства логарифмической функции

1. Область определения функции $y = \log_a x$ — множество положительных чисел.

> **Запомните!**
>
> Отрицательные числа и ноль логарифмов не имеют (согласно определению основание логарифма — положительное число).
>
> Это необходимо учитывать при решении логарифмических уравнений и неравенств (т. е. находить ОДЗ переменной или выполнять проверку).

2. Область значений функции $y = \log_a x$ – множество действительных чисел.
3. Функция имеет один ноль $x_0 = 1$, так как $\log_a 1 = 0$. График логарифмической функции при любом положительном основании проходит через точку $M(1; 0)$.
4. Функция $y = \log_a x$, $a > 0$ – непериодическая, не является ни четной, ни нечетной.
5. Монотонность.

$a > 1$	$0 < a < 1$
функция возрастает, т. е. большему числу соответствует больший логарифм (рис. 75).	функция убывает, т. е. большему числу соответствует меньший логарифм (рис. 76).

Это свойство логарифмической функции применяется при решении неравенств.

$$\log_a M > \log_a N$$

$a > 1$: $\begin{cases} M > N, \\ N > 0 \end{cases}$

$0 < a < 1$: $\begin{cases} M < N, \\ M > 0 \end{cases}$

6. Интервалы постоянного знака функции.

$a > 1$ (рис. 75)	$0 < a < 1$ (рис. 76)
Положительные числа, меньшие единицы, имеют отрицательные логарифмы: $\log_a x < 0$, если $x \in (0; 1)$. Числа, большие единицы, имеют положительные логарифмы: $\log_a x > 0$, если $x > 1$ $(a > 1)$.	Положительные числа, меньшие единицы, имеют положительные логарифмы: $\log_a x > 0$, если $x \in (0; 1)$. Числа, большие единицы, имеют отрицательные логарифмы: $\log_a x < 0$, если $x > 1$ $(0 < a < 1)$.

§8. Тригонометрические функции

I. $y = \sin x$.

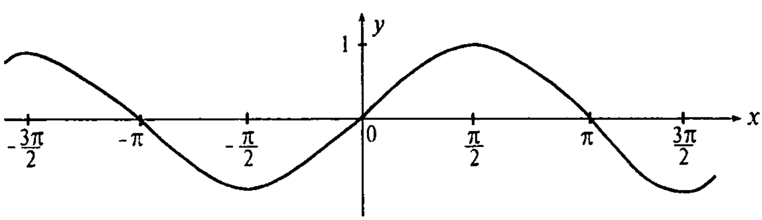


Рис. 77

1. Область определения функции $y = \sin x$ – множество R (рис. 77).
2. Множество значений: $y \in [-1; 1]$ (рис. 77).

$$y_{max} = 1 \quad \text{при } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$y_{min} = -1 \quad \text{при } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

3. Нули: $\boxed{\sin x = 0, \text{ если } x = \pi n, n \in Z.}$

4. $y = \sin x$ – периодическая функция $T_{\sin x} = 2\pi$.

5. $y = \sin x$ – нечетная функция: $\sin(-x) = -\sin x$.
   График симметричен относительно начала координат.
6. Монотонность:

$y = \sin x$ возрастает, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

$y = \sin x$ убывает, если $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Гармонические колебания

II. $y = A \sin x$.

Построим график функции $y = 2 \sin x$ (рис. 78).

1) $\sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 0$, если $x_0 = \pi n$, $n \in Z$, т. е. коэффициент A не изменяет нулей функции.
2) $\sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x = 2$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.
3) $\sin x = -1 \Rightarrow 2 \sin x = -2$, если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Изменилась только амплитуда A (наибольшее и наименьшее значения функции).

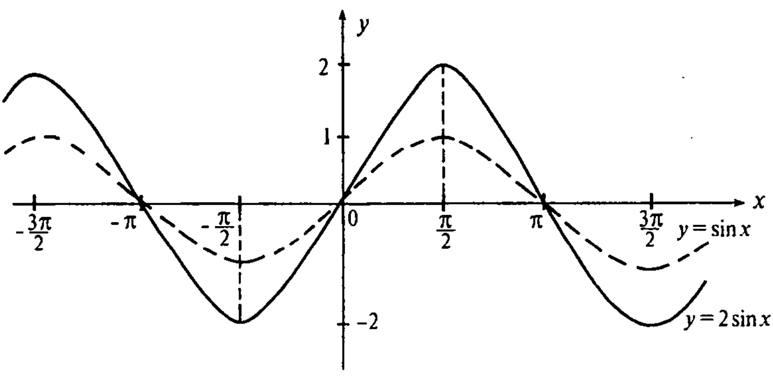


Рис. 78

Запомните!

График функции $y = A\sin x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$, сохранив нули функции и изменив наименьшее и наибольшее значения функции.

Множеством значений функции $y = A\sin x$ является интервал $[-A; A]$. Аналогично для $y = A\cos x$.

III. $y = \sin \omega x$.

Построим график функции $y = \sin 2x$ (рис. 79).

1) $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n,\ x_0 = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z,$ т. е. изменился период функции $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (период функции $y = \sin x$ делим на коэффициент при x).

2) $\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x_{max} = \dfrac{\pi}{4} + \pi n.$

3) $x_{min} = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n.$

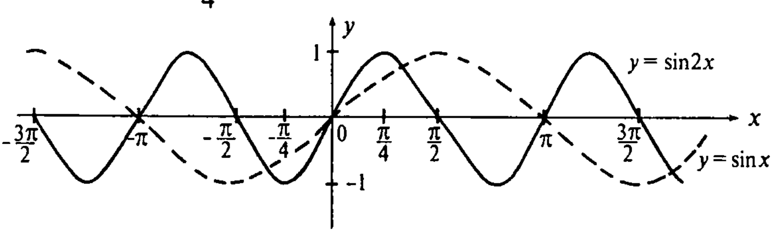


Рис. 79

Запомните!

При построении графика вида $y = \sin \omega x$ ($y = \cos \omega x$) изменяется период функции $y = \sin x$; $T_{\sin \omega x} = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Если $\omega > 1$, происходит «сжатие» графика, если $0 < \omega < 1$ — «растяжение» графика $y = \sin x$ ($y = \cos x$).

IV. $y = \sin(x + \varphi)$.

1) $\sin(x + \varphi) = 0 \Rightarrow x + \varphi = \pi n$; $x = -\varphi + \pi n$, $n \in Z$ (рис. 80).

2) $\sin(x \pm \varphi) = 1 \Rightarrow x \pm \varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \mp\varphi \pm 2\pi n, n \in Z$.

Построим график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

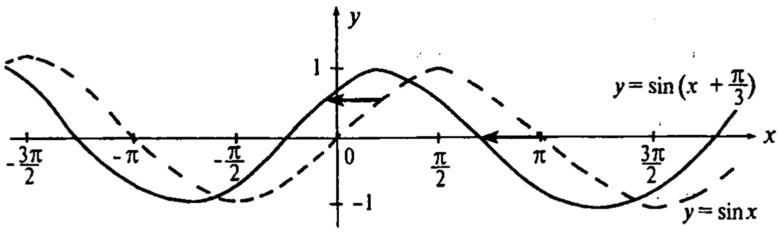


Рис. 80

Запомните !

При построении графика функции $y = \sin(x + \varphi)$ ($y = \cos(x + \varphi)$) все точки графика $y = \sin x$ ($y = \cos x$) сдвигаются по оси абсцисс на $|\varphi|$. Если $\varphi > 0$, то сдвиг влево, если $\varphi < 0$, то сдвиг вправо.

V. $y = \cos x$.

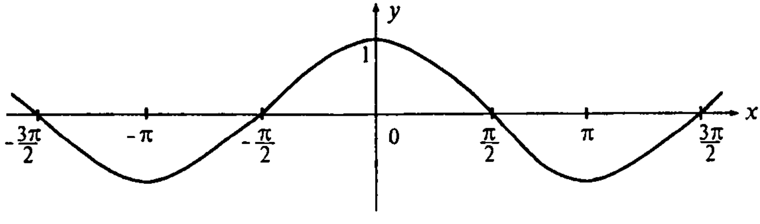


Рис. 81

1. Область определения $y = \cos x$: $x \in R$ (рис. 81).
2. Множество значений $y \in [-1; 1]$.

3. Нули функции: $\boxed{\cos x = 0, \text{ если } x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.}$

4. $y = \cos x$ – четная функция, $\cos(-x) = \cos x$. График симметричен относительно оси ординат.
5. $y = \cos x$ – периодическая функция. $T_{\cos x} = 2\pi$.
6. $y = \cos x$ возрастает, если $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$; $y = \cos x$ убывает, если $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

VI. $\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x}$.

$y = \operatorname{tg} x$ – неограниченная функция.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, следовательно, если $\cos x = 0$, то функция $y = \operatorname{tg} x$ не существует, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, $y = \operatorname{tg} x$ не имеет смысла.

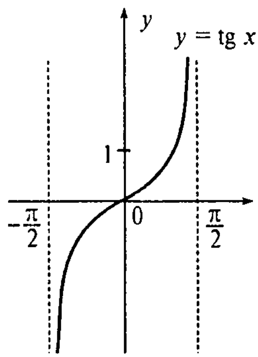


Рис. 82

1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ (рис. 82).
2. Множество значений: $y \in R$.
3. Нули функции: $x_0 = \pi n$, $n \in Z$.
4. $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная функция $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
5. $y = \operatorname{tg} x$ – периодическая функция $T_{\operatorname{tg} x} = \pi$.
6. $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на всей области определения.

VII. $\boldsymbol{y = \operatorname{ctg} x}$.

1. Область определения функции $y = \operatorname{ctg} x$: $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$ (рис. 83).
2. Множество значений: $y \in R$.
3. Нули функции: $x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
4. $y = \operatorname{ctg} x$ – периодическая функция $T_{\operatorname{ctg} x} = \pi$.

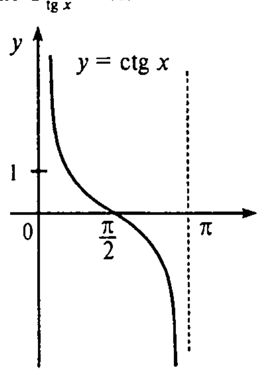


Рис. 83

5. $y = \operatorname{ctg} x$ – нечетная функция $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.
6. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на всей области определения.

§ 9. Преобразования графиков

I. При изменении знака перед функцией точки графика симметрично отображаются относительно оси абсцисс (рис. 84).

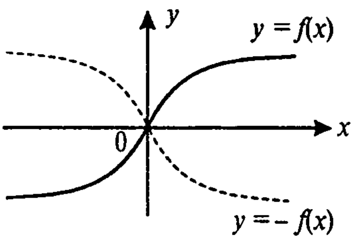


Рис. 84

II. При изменении знака перед аргументом все точки графика функции симметрично отображаются относительно оси ординат (рис. 85).

III. Для построения графика $y = f(x) + b$ надо все точки графика $y = f(x)$ переместить параллельно оси Oy на $|b|$ единиц вверх, если $b > 0$ (рис. 86), и вниз, если $b < 0$ (рис. 87).

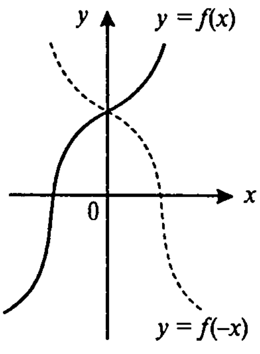


Рис. 85

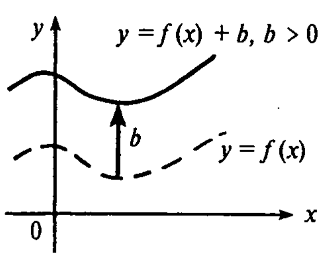


Рис. 86

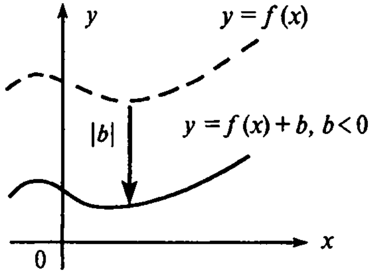


Рис. 87

IV. Для построения графика $y = f(x + a)$ надо все точки графика $y = f(x)$ переместить параллельно оси Ox на $|a|$ единиц влево, если $a > 0$ (рис. 88), и вправо, если $a < 0$ (рис. 89).

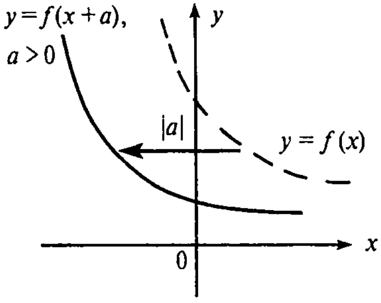


Рис. 88

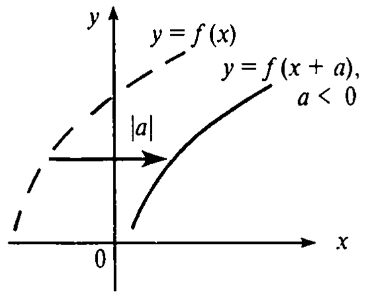


Рис. 89

V. Построение графиков функций, содержащих модуль.

а) Построение графика $y = |f(x)|$. Все точки графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси Ox и на ней, принадлежат и графику функции $y = |f(x)|$. Для всех точек графика функции $y = f(x)$, расположенных ниже оси Ox, строим симметричные относительно оси Ox и получаем точки графика $y = |f(x)|$, соответствующие тем же абсциссам (рис. 90).

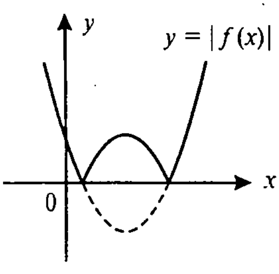


Рис. 90

б) Для построения графика функции $y = f(|x|)$ нужно сохранить без изменения часть графика функции $y = f(x)$, расположенную в правой полуплоскости, затем зеркально отразить ее относительно оси Oy и убрать все точки графика функции $y = f(x)$, расположенные в левой полуплоскости (рис. 91).

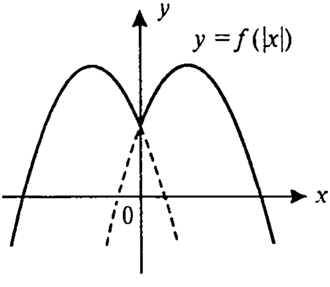


Рис. 91

§10. Задания для подготовки к ЕГЭ (В8)

792. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 5. На интервале $[-4; 1)$ она задается формулой $f(x) = -x^2 - 3x + 1$. Найдите значения выражения $3f(-23) - 4f(23)$.

793. На рисунке 92 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 6)$. Найдите суммарную длину интервалов, на которых функция $y = f(x)$ возрастает.

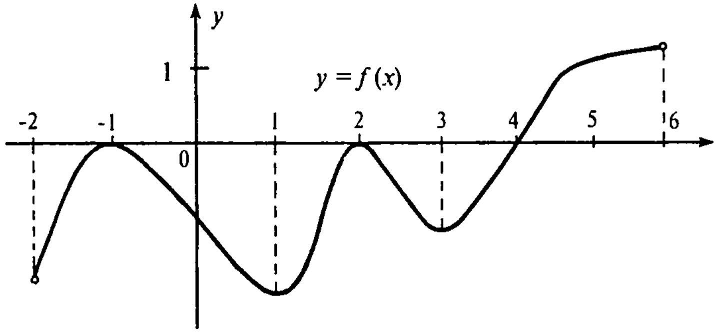


Рис. 92

Найдите все значения x, для каждого из которых соответствующая ему точка графика функции находится ниже оси абсцисс (794–799):

794. $y = \dfrac{x-4}{3-x}$.

795. $y = 9 - x^2$.

796. $y = \dfrac{x^2-7x+6}{x^2+1}$.

797. $y = \dfrac{x^2+3}{4x^2-12x+5}$.

798. $y = \dfrac{1}{x} - 1$.

799. $y = \dfrac{1}{2-x} + \dfrac{5}{2+x} - 1$.

Найдите все значения x, для каждого из которых соответствующая ему точка графика функции находится выше оси абсцисс (800–802):

800. $y = \dfrac{6x-18}{(x-8)(x+6)}$.

801. $y = \dfrac{15}{4+3x-x^2} - 1$.

802. $y=\frac{x-2}{3}+\frac{2x+1}{5}-1.$

Найдите множество значений функции (803–805):

803. $y=\frac{1}{x^2+2x+3}.$ **804.** $y=\sqrt{3x+41}-\sqrt{3x-8}.$

805. $y=\frac{1}{x^2+4x+5}.$

Найдите все значения x, для каждого из которых соответствующая ему точка графика функции y_1 лежит выше соответствующей ему точки графика y_2 (806–810):

806. $y_1=\frac{1}{3x-2-x^2}$; $y_2=\frac{3}{7x-4-3x^2}.$

807. $y_1=\frac{4}{x+5}$; $y_2=\frac{1}{5}.$

808. $y_1 = 11x - (3x+4)$; $y_2 = 9x - 7.$

809.1. $y_1 = 5$; $y_2 = x^2.$

809.2. $y_1 = 4x^2 + 9$; $y_2 = 12x.$

810.1. $y_1=x^3-\sqrt{1+x}$; $y_2=x-\sqrt{1+x}.$

810.2. $y_1=\sqrt{2x+14}$; $y_2=x+3.$

Найдите все значения x, для каждого из которых соответствующая ему точка графика y_1 лежит не выше соответствующей ему точки графика функции y_2 (811–813):

811.1. $y_1=\sqrt{x^2-x-12}$; $y_2=x.$

811.2 $y_1=\sqrt{3x-x^2}$; $y_2=4-x.$

812.1. $y_1 = 5x - 2(x-4)$; $y_2 = 9x + 23.$

812.2. $y_1=\sqrt{x^2-3x+2}$; $y_2=x.$

813.1. $y_1=(x-2)\sqrt{x^2+3}$; $y_2=x^2-4.$

813.2. $y_1=\sqrt{2x+7}$; $y_2=x+2.$

Найдите область определения функции (814–816):

814. $y=\dfrac{\sqrt{7+4x-3x^2}}{x^2-4}$.

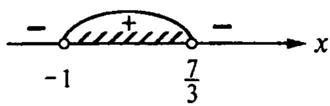
Решение.

Корень четной степени существует, если подкоренное выражение неотрицательно, а знаменатель дроби не может быть равен нулю.

Значит, областью определения данной функции является решение системы $\begin{cases}7+4x-3x^2\ge 0,\\ x-4\ne 0.\end{cases}$

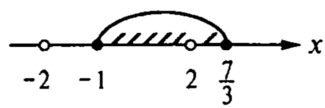
1) Решим графическим способом неравенство $7+4x-3x^2\ge 0$.
$3x^2-4x-7=0 \Rightarrow x_1=-1;$

$x_2=\dfrac{7}{3}$.



2) $x^2-4\ne 0 \Rightarrow x\ne \pm 2$.

3) Объединим два результата:



Ответ: $x\in[-1;2)\cup\left(2;\dfrac{7}{3}\right]$.

815.1. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+3x-10}}{x+6}$.

815.2. $y=\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}$.

816.1. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

816.2. $y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$.

817. Четная периодическая функция $y=f(x)$, $x\in R$, имеет период $T=5$. На интервале $(-4;\ 0)$ она задается формулой $f(x)=x^2-x-12$. Найдите количество нулей уравнения $f(x)=0$, принадлежащих интервалу $[-4;\ 7)$.

818.1. Функция $y=f(x)$ определена на интервале $(-7;\ 6)$. Найдите количество целых решений неравенства $0<f(x)\le 3$ (рис. 93).

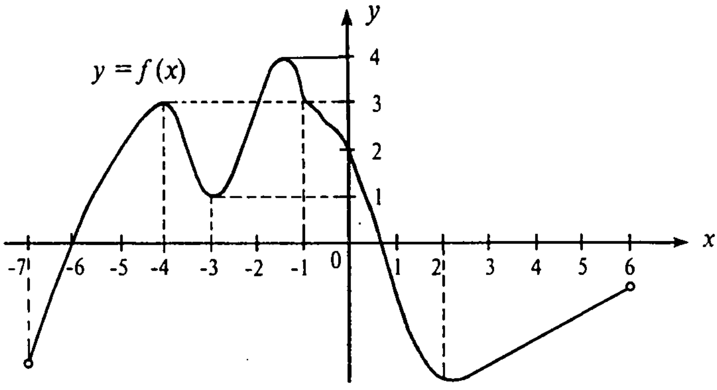


Рис. 93

818.2. На рисунке 94 изображен график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-4; 6]$. Укажите значения x, для которых выполняется неравенство $f(x) \geq x$.

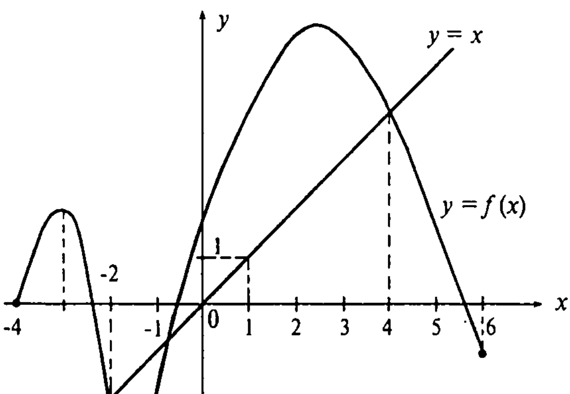


Рис. 94

819*. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|3|x| - 1 + a| = 2$ имеет ровно 3 корня (если значений a более одного, то в ответе запишите их сумму).

Глава 6
Показательные уравнения и неравенства

§1. Решение показательных уравнений

Рассмотрим различные способы решения уравнений, содержащих показательную функцию. При решении таких уравнений необходимо повторить правила действий со степенями и свойства показательной функции (§1 с. 35; §6 с. 195).

Запомните!

Если показательное уравнение не содержит сложения степеней, то его решают, приводя левую и правую части уравнения к одинаковым основаниям.

$$\boxed{\begin{matrix} a^m = a^n \\ a \neq 1 \end{matrix}} \text{ — } \boxed{m = n}$$

Если степени равны, основания равны и отличны от единицы, то равны и показатели степеней.

Решите уравнение (828–842; В3):

820.1. $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{2x}$.

820.2. $(0{,}5)^{x^2} = 64^x$.

821.1. $0{,}125^x = 8$.

821.2. $\left(\frac{1}{25}\right)^x = 0{,}008$.

822.1. $4^{x^2} = 256$.

822.1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{6x+10-x^2} = \frac{8}{27}$.

823.1. $4^{x-16} = \dfrac{1}{64}$.

823.2. $0{,}5^{4x-11} = 128$.

824.1. $0{,}2^{5x-12} = 625$.

824.2. $0{,}5^{4x-9} = 32$.

825.1. $2^{x(x+2)-6{,}5} = 4\sqrt{2}\cdot 4^{x}$.

825.2. $\left(\dfrac{49}{16}\right)^{x^2-5{,}5x} = \left(\dfrac{4}{7}\right)^{9}$.

825.3. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x} = 8^{x}$.

Решение.

Разделим две части неравенства на $8^x > 0$.

Применим формулу $a^m : b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m}$.

$$\left(\frac{1}{7}:8\right)^{x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{56}\right)^{x} = \left(\frac{1}{56}\right)^{0} \Rightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

826.1. $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\dfrac{6}{5}\right)^{2+x}$.

826.2. $0{,}8^{x-2} = (1{,}25)^{-4}$.

827.1. $(4{,}5)^{6x} = \left(\dfrac{4}{81}\right)^{15}$.

827.2. $3^{x^2-13{,}5} = 9\sqrt{3}$.

828.1. $\left(\dfrac{11}{5}\right)^{19x^2-3} = \left(\dfrac{5}{11}\right)^{3x^2-19}$.

828.2. $9^{-4x}\cdot 3^{-6} = 9^{\frac{3}{2}}\cdot\left(9\sqrt{3}\right)^{-}$

829.1. $12^{x-2} = 3^{3x}\cdot 2^{6x}$.

829.2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} = 5^{x}$.

830.1. $27 = 3^{x-\sqrt{3x-5}}$.

830.2. $0{,}11^{5x-3} = 0{,}0121$.

Запомните!

Показательные уравнения вида

$ma^{2kx} + na^{kx} + c = 0$; $\quad ma^{kx} + na^{-kx} + c = 0$;

$ma^{x+b} + na^{x-k} = c$,

где $a \in R^+$, m, n, $c \in R$, решаются методом введения новой переменной:

$$a^{kx} = t > 0 \ (a^x = t > 0).$$

После введения новой переменной уравнение представляет собой либо квадратное, либо уравнение первой степени.

Находят t, затем x.

Уравнение вида $ma^{x+b} + na^{x-k} = c$ можно также решать, вынося за скобки общий множитель (выносим a в меньшей степени).

Решите уравнения (831–839):

831. $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675.$

Решение.

$3^{2x-3} - 3^{2x-2} + 3^{2x} = 675.$

Применили формулу $(a^m)^n = a^{mn}$.

Вынесем за скобки 3^{2x-3}. При этом каждый член левой части уравнения разделим на вынесенный множитель, применяя формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$.

$3^{2x-3}(1 - 3 + 27) = 675.$

Разделим обе части уравнения на 25.

$3^{2x-3} = 27 \Rightarrow 3^{2x-3} = 3^3 \Rightarrow 2x - 3 = 3$, $x = 3$.

Ответ: 3.

832. $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0.$

833. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24.$

Решение.

Применив формулы $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ и $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$,

запишем данное уравнение в виде $5 \cdot 5^{x^2} - \dfrac{5}{x^2} = 24.$

Введем новую переменную $5^{x^2} = t > 0$.

Уравнение примет вид $5t - \frac{5}{t} = 24$.

Умножим обе части уравнения на t ($t > 0$).
$5t^2 - 24t - 5 = 0 \Rightarrow t_1 = -0{,}2 \notin (0; +\infty),\ t_2 = 5$.

$5^{x^2} = 5 \Rightarrow x^2 = 1;\quad x = \pm 1$.

Ответ: ± 1.

834. $x^2 \cdot 4^x - 2^{2x-4} = 0$.

Запомните!

При решении показательных уравнений вида $a^{2x} + a^x b^x + c \cdot b^{2x} = 0$ две части уравнения делят на b^{2x} (или на a^{2x}): $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \left(\frac{a}{b}\right)^x + c = 0$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = t > 0 \Rightarrow t^2 + t + c = 0$, находят t, затем x.

835. $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$.

Решение.
$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 4^x \cdot 3^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0$ (: 4^{2x}).

$$64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 = 0.$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x - t > 0 \Rightarrow 64t^2 - 84t + 27 = 0;\quad t_1 = \frac{9}{16};\quad t_2 = \frac{3}{4}.$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow x_1 = 2;\quad \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = 1.$$

Ответ: 1; 2.

Запомните!

Некоторые показательные уравнения решаются приведением левой и правой частей к одинаковым показателям степени.

$$a^m = b^m \Leftrightarrow m = 0 \ (a \neq b \neq 0).$$

836. $3^{x^2-9} = \dfrac{7^{x^2}}{7^9}$

Решение.

$3^{x^2-9} = 7^{x^2-9} : \left(7^{x^2-9} \neq 0\right)$.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-9} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-9} = \left(\frac{3}{7}\right)^0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0; \quad x = \pm 3.$$

Ответ: $\pm$ 3.

837. $5^{2|1-2x|} = 5^{4-6x}$.

Решение.

$2|1-2x| = 2(2-3x) \Rightarrow |1-2x| = 2-3x$.

1) $\begin{cases} 1-2x = 2-3x, \\ 2-3x \geq 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1-2x = 3x-2, \\ 2-3x \geq 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, \\ x < \dfrac{2}{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}6, \\ x < \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 0{,}6.$

система 1 не имеет решений.

Ответ: 0,6.

838. $4^x \cdot 2 + 9^x \cdot 3 = 5 \cdot 6^x$.

839. $2^{2-x} = \dfrac{4^{\frac{x}{2}} - 1}{3}$.

Запомните!

Решением показательного уравнения $a^x = b$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$ является $x = \log_a b$ $(b > 0)$.

Более подробно логарифмирование двух частей уравнения будет рассмотрено в следующей главе настоящего пособия.

§2. Решение показательных неравенств

Запомните!

При решении показательных неравенств используют свойство монотонности показательной функции. Если основание больше единицы, показательная функция возрастает. Если положительное основание меньше единицы, показательная функция убывает.

$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$
$y = a^x$ убывает	$y = a^x$ возрастает

Решите неравенство (840–843):

840. $0{,}3^{4x^2-2x+2} \geq 0{,}09^{2x+3}$.

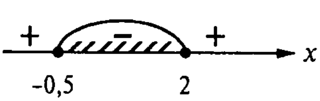
Решение.

$0{,}3^{4x^2-2x+2} \geq 0{,}3^{2(2x+3)}$.

При основании 0,3 показательная функция убывает, значит, $4x^2 - 2x + 2 \leq 4x + 6 \Rightarrow 4x^2 - 6x - 4 \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

Решим неравенство графически.

$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 2$



$\Rightarrow x \in [-0{,}5;\ 2]$

Ответ: $[-0{,}5;\ 2]$.

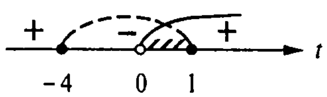
841. $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{49}\right)^{16-x}.$

842. $4^x + 3 \cdot 2^x - 4 \le 0.$

Решение.

Введем новую переменную $2^x = t > 0.$

$t^2 + 3t - 4 \le 0;\ t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow t_1 = -4;\ t_2 = 1.$



$\Rightarrow 0 < t \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^x \le 1, \\ 2^x > 0,\ x \in R. \end{cases}$

Решение системы сводится к решению первого неравенства $2^x \le 2^0 \Rightarrow x < 0.$

Ответ: $(-\infty;\ 0].$

843. $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 \ge 0$, укажите наибольшее целое отрицательное решение.

Найдите область определения функции (844; 845):

844. $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{9-2x} - \frac{1}{32}}.$ **845.** $y = y\sqrt{\frac{4}{(0{,}25)^{4-x} - 4}}.$

§3. Системы показательных уравнений и неравенств

Решите систему уравнений (846–852):

846. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25. \end{cases}$

Решение.

Введем новые переменные $3^x = m;\quad 2^{\frac{y}{2}} = n.$

$\begin{cases} m^2 - n^2 = 725, \\ m - n = 25; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+n)(m-n) = 725, \\ m - n = 25. \end{cases}$

Подставим в первое уравнение системы вместо $m - n$ число 25, сократим и получим $m + n = 29$.

$\begin{cases} m+n=29, \\ m-n=25. \end{cases}$ Сложим почленно и найдем $2m = 54 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 27$, $n = 29 - m = 2$.

$3^x = 27 \Rightarrow x = 3$; $2^{\frac{y}{2}} = 2 \Rightarrow y = 2$.

Ответ: (3; 2).

847. $\begin{cases} 8^x = 8y, \\ 2^{x+1} = y. \end{cases}$

848. $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 48, \\ 4^x \cdot 3^y = 36. \end{cases}$

849. $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}. \end{cases}$

850. $\begin{cases} x^y = y^{2x}, \\ x^3 = y^2 \ (x>0; y>0). \end{cases}$

851. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1. \end{cases}$

852. $\begin{cases} 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 5^y = 11, \\ 5 \cdot 4^x + 4 \cdot 5^y = 24. \end{cases}$

Решение.

Введем новые переменные: $4^x = m > 0$; $5^y = n > 0$.

$\begin{cases} 2m+3n=11, \\ 5m+4n=24. \end{cases} \left| \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \right.$ $\quad + \begin{cases} -8m-12n=-44, \\ 15m+12n=72. \end{cases}$

$7m = 28 \Rightarrow m = 4$.

$2m + 3n = 11 \Rightarrow n = \dfrac{11-2m}{3} = 1$.

$$\begin{cases} 4^x = 4, \\ 5^y = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: (1; 0).

Решите неравенство (853–857):

853.1. $3^{8x-4} > \dfrac{1}{81}$.

853.2. $2^{x-1,6} \geq \dfrac{1}{32}$.

854.1. $5^{2-2x} \leq \dfrac{1}{125}$.

854.2. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0,5x+1} > \left(\dfrac{1}{8}\right)^2$.

855.1. $2^{x^2-3} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$.

855.2. $\dfrac{2^{x^2}}{4^x} < 8$.

856. $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} \leq 56$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq 0$.

$3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} = \dfrac{3 \cdot 2^{\sqrt{x}}}{2} \quad \left(a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}\right)$.

Пусть $2^{\sqrt{x}} = m > 0$.

$5m - \dfrac{3m}{2} \leq 56 \Rightarrow m \leq 16$,

$2^{\sqrt{x}} \leq 2^4 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 4 \Rightarrow x \leq 16$, $x \geq 0$.

Ответ: [0; 16].

857. $\dfrac{2^x + 10}{4} \geq \dfrac{9}{2^{x-2}}$.

§4. Задания для подготовки к ЕГЭ (В7; С1)

Примеры по теме «Показательные уравнения и неравенства» могут встретиться в заданиях В3; В7 и С1.

Решите уравнение (858–875):

858.1. $2^x-4\left(\sqrt{2}\right)^x-32=0.$ **858.2.** $3^x+6\left(\sqrt{3}\right)^x-27=0.$

859. $9^{-4x}\cdot 3^{-6}=9^{\frac{3}{2}}\cdot\left(9\sqrt{3}\right)^{-2x}.$ **860.** $2^{x-2}+2^{2-x}=15.$

861. $2^{x^2-1}+2^{4-x^2}=9.$ **862.** $8\cdot 9^x+6^{x-1}=27\cdot 4^x.$

863. $9^{\sqrt{x^2-2x}-x}-7\cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1}=2.$

864. $x^2\cdot\sqrt{\dfrac{5-x}{x}}-4\cdot\sqrt{\dfrac{5-x}{x}}=0.$

865. $\left(3+\sqrt{8}\right)^x+\left(3-\sqrt{8}\right)^x=6.$

Решение.

Умножим и разделим первый член уравнения на сопряженный множитель.

$$\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^x\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)^x}{\left(3-\sqrt{8}\right)^x}+\left(3-\sqrt{8}\right)^x=6.$$

Введем новую переменную $\left(3-\sqrt{8}\right)^x=t>0.$

$$\frac{1}{t}+t=6\Rightarrow t^2-6t+1=0\Rightarrow t_1=3-\sqrt{8};\ t_2=3+\sqrt{8}.$$

1) $\left(3-\sqrt{8}\right)^x=3-\sqrt{8}\Rightarrow x_1=1;$

2) $\left(3-\sqrt{8}\right)^x=3+\sqrt{8}.$

$$\left(3-\sqrt{8}\right)^x=\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)}{3-\sqrt{8}};\quad \left(3-\sqrt{8}\right)^x=\frac{1}{3-\sqrt{8}}\Rightarrow x=-1.$$

Ответ: ± 1.

866. $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6.$

867.1. $8\cdot 2^{x-1}+7\cdot 2^x+48=0.$

867.2. $16^{x^2}=4^{|x+1|}.$

Решение.

$4^{2x^2}=4^{|x+1|}\Rightarrow |x+1|=2x^2.$

1) $x+1=2x^2,$
$2x^2-x-1=0,$
$x_1=-0{,}5;\ x_2=1.$

2) $x+1=-2x^2,$
$2x^2+x+1=0,$
$D<0\Rightarrow$ нет действительных корней.

Ответ: $-0{,}5;\ 1.$

868.1. $3^x\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x+6}=1.$

868.2. $32\cdot 4^{2x-3}=32^x.$

869. $81\cdot 3^{x-2}=9^{2x}.$

870. $\sqrt{5}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}}-0{,}04^{1-x}=0.$

871. $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x-1}}+2=0.$

872. $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}.$

873.1. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{25}.$

873.2. $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}.$

874. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84.$

Решение.

$$\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=\frac{\left(\sqrt[10]{3}\right)^x}{\left(\sqrt[10]{3}\right)^{10}}=\frac{\left(\sqrt[10]{3}\right)^x}{3}.$$

Введем новую переменную $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x=t>0;\quad \left(\sqrt[5]{3}\right)^x=t^2.$

Уравнение примет вид $t^2=\dfrac{t}{3}=84.$

$3t^2+t-252=0\Rightarrow t_1=-\dfrac{28}{3}\notin(0;\infty);$

$$t_2 = 9 \Rightarrow 3^{\frac{x}{10}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{10} = 2 \Rightarrow x = 20.$$

Ответ: 20.

875. $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0.$

Найдите количество целых решений неравенства (876–878):

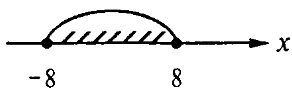
876. $\dfrac{9{,}3 + \sqrt{64 - x^2}}{64 - 8^x} > 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 64 - x^2 \geq 0, \\ 64 - 8^x \neq 0. \end{cases}$

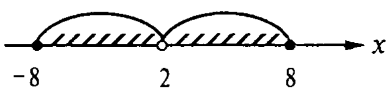
1) $64 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 64 \Rightarrow |x| \leq 8;$

2) $64 - 8^x \neq 0 \Rightarrow 8^x \neq 8^2 \Rightarrow x \neq 2.$



Объединим два промежутка,

т. е. $x \in [-8; 2) \cup (2; 8]$.



Числитель дроби представляет собой сумму положительного и неотрицательного чисел, следовательно, числитель имеет знак «плюс» при любом действительном значении x, значит, знаменатель тоже положительный.

$64 - 8^x > 0 \Rightarrow 8^x < 8^2.$

При основании, большем единицы, показательная функция возрастает, т. е. $x < 2$.

Учитывая ОДЗ, $x \in [-8; 2)$. Этот интервал включает 10 целых чисел.

Ответ: 10.

877. $\dfrac{2{,}3 + \sqrt{x^2 - 49}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{0{,}5x+1} - \left(\frac{1}{8}\right)^2} > 0.$

878. $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{5-2x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{1{,}8 + \sqrt{16 - x^2}} \leq 0.$

Решите неравенство (879–882):

879.1. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x}-81}{x^2+2x+5}<0.$

879.2. $x^{\frac{2x-1}{3-x}}>1.$

880. $\dfrac{0{,}75^{2x-3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\sqrt{x^2-4}+0{,}8}\geq 0.$

881. $7^{\frac{x-5}{2}}\geq 7\sqrt{2}.$

882. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x-5\cdot 36^x>0.$

Решите систему уравнений и найдите значение выражения $x_0\cdot y_0$, где x_0 и y_0 — решения системы (883–885):

883. $\begin{cases} x-y=1, \\ 64^x-56\cdot 8^y=8. \end{cases}$

884. $\begin{cases} y-x=1, \\ 4^y-7\cdot 2^x=2. \end{cases}$

885. $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 9^y+8\cdot 3^x=1. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения найдем x и подставим во второе уравнение.

$\begin{cases} x=y-1, \\ 9^y+8\cdot 3^x=1. \end{cases}$

Решим второе уравнение.

$3^{2y}+\frac{8}{3}\cdot 3^y=1 \quad (\cdot 3).$

$3\cdot 3^{2y}+8\cdot 3^y-3=0$, введем новую переменную $3^y=m>0$.

$3m^2+8m-3=0\Rightarrow m_1=-3\notin(0;+\infty);\ m_2=\frac{1}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^y=\frac{1}{3}\Rightarrow y_0=-1.$

$x_0=y-1=-1-1=-2;\ x_0y_0=-1\cdot(-2)=2.$

Ответ: 2.

Решите систему уравнений (886–888):

886. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \dfrac{(y+x)^2}{x} = 9. \end{cases}$

Решение.
ОДЗ: $x \neq 0$.

$\begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4, \\ (y+x)^2 = 9x. \end{cases}$

$y + 2x = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x$ подставим во второе уравнение.
$(4 - 2x + x)^2 = 9x \Rightarrow x^2 - 17x + 16 = 0$, $x_1 = 1$; $x_2 = 16$,
$y_1 = 2$, $y_2 = -28$.

Ответ: (1; 2); (16; –28).

887. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$

Решение.
ОДЗ: $x > 0$; $y > 0$.

$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$ $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$

Введем новые переменные $\sqrt{x} = m > 0$; $\sqrt{y} = n > 0$.

$\begin{cases} 2m - n = 4, \\ m \cdot n = 30. \end{cases}$ $\begin{cases} n = 2m - 4, \\ m(2m-4) = 30. \end{cases}$

$m^2 - 2m - 15 = 0 \Rightarrow m_1 = -3 \notin [0; \infty)$; $m_1 = 5$.

$n = 6$. $\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$; $\sqrt{n} = 6 \Rightarrow n = 36$.

Ответ: (25; 36).

888. $\begin{cases} 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 5^y = 11, \\ 5 \cdot 4^x + 4 \cdot 5^y = 24. \end{cases}$

Найдите область определения функции (889–895):

889. $y = 0{,}5^{\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x-1}}$.

890. $y = \sqrt[6]{0{,}04^{x^2} - 5^x}$.

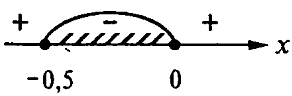
Решение.

Корень четной степени существует, если подкоренное выражение неотрицательно.

Значит, $0{,}04^{x^2} - 5^x \ge 0$; $\quad 0{,}04 = (0{,}2)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 5^{-2}$.

$5^{-2x^2} \ge 5^x \Rightarrow -2x^2 \ge x \Rightarrow x + 2x^2 \le 0$,

$-0{,}5 \le x \le 0$.



Ответ: $[-0{,}5;\ 0]$.

891. $y = \sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^{5-10x} - \frac{1}{16}}$.

892. $y = \frac{21}{9 - \sqrt{x}}$.

893. $y = \sqrt{\frac{5}{(0{,}2)^{3-x} - 5}}$.

894. $y = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$.

895. $y = \frac{13}{\sqrt[4]{x-3} - 2}$.

896*. Решите неравенство $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4 - x^3}} > 0$.

897*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^{x^2+4x+2}+(a-16)\cdot 5^{x^2+6x+2} = (a^2 + 5a - 64) \cdot 5^{4x}$ имеет четыре корня.

898*. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^{1-2x-x^2}+(3-a)\cdot 2^{1-2x-x^2}+a-4=0$ имеет ровно два корня.

899*. Найдите все значения параметра a, для которых выражение $4^x - 2^x$ не равно выражению $a \cdot 2^x + 4$ при $x \in [2; 3]$.

900*. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $9^x - (7a - 1) \cdot 3^x + 12a^2 - a - 6 \le 0$ имеет единственный корень.

Решение.

Пусть $3^x = t > 0$, тогда неравенство примет вид $t^2 - (7a - 1) \cdot t + 12a^2 - a - 6 \le 0$.

Найдем дискриминант квадратного трехчлена, расположенного в левой части неравенства.

$D = (7a - 1)^2 - 4(12a^2 - a - 6) = a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2 = 0.$

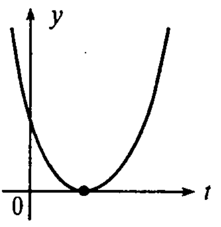


Рис. 95

Трехчлен имеет один корень только (рис. 95) при $D = 0 \Rightarrow a - 5 = 0,\ a = 5$.

Ответ: 5.

901*. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ и график функции $y=\dfrac{12\cdot 16^x+11}{2-13\cdot 16^x}$ не имеют общих точек.

Решите уравнение (902–907):

902. $3\cdot 5^x-69\left(\sqrt{5}\right)^x-150=0.$

903. $4\cdot 7^x-192\left(\sqrt{7}\right)^x-196=0.$

904. $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}-4=0.$

905. $16^{5-3x} = 0{,}0625^{2x-6}.$

906. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}}=1.$

907. $4^{-x+0{,}5} - 7 \cdot 2^{-x} = 4.$

Решите неравенство (908; 909):

908. $4^x - 3 \cdot 2^x < 4$. **909.** $9^x - 2 \cdot 3^x < 3$.

Решите уравнение. Если уравнение имеет больше одного корня, то найдите сумму корней (910–912):

910. $2^{\frac{3x-18}{x}} + 6 \cdot 2^{\frac{x-18}{x}} = 40$.

911. $8 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^{x+1} + 27 \cdot 4^x = 0$.

912. $(0{,}25)^{\sqrt{x+4}} = (0{,}25)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

913. Решите неравенство $\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9$ и укажите большее целое решение.

Найдите число целых корней неравенства (914; 915):

914. $\left(6^x + 6^{1-x} - 7\right)\left(x^2 - 4x + 3\right)\sqrt{4-x} \le 0$.

Решение.

ОДЗ: $4 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 4$.

Решим неравенство методом интервалов.

Найдем корни:

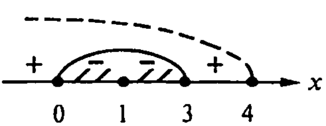
1) $6^x + 6^{1-x} - 7 = 0$; $6^x = t > 0 \Rightarrow t + \frac{6}{t} - 7 = 0$;

$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$; $t_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$;

2) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$; $x_2 = 3$;

3) $4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$.

Учтем, что $x = 1$ повторяется 2 раза, и найдем знаки на интервалах, которые имеет произведение, расположенное в левой части данного неравенства. Например, $f(2) < 0$.



Решением неравенства является интервал [0; 3], который содержит 4 целых числа.

Ответ: 4.

915. Найдите количество отрицательных целых значений параметра a, больших -7, при которых уравнение $(a - 1) \cdot 3^{2x} - (2a - 1) \cdot 3^x - 1 = 0$ имеет 2 различных действительных корня.

Глава 7
Логарифмические уравнения и неравенства

§1. Свойства логарифмов

$a > 0;\ a \neq 1;\ M > 0;\ N > 0.$

$\boxed{\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M}$ определение логарифма.

$\boxed{\log_a a = 1}$ $\boxed{\log_a 1 = 0}$

$\boxed{a^{\log_a M} = M}$ основное логарифмическое тождество.

Логарифм произведения: $\boxed{\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.}$

Логарифм частного: $\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.}$

Логарифм степени: $\boxed{\log_a M^k = k \log_a M.}$

Формула перехода от одного основания к другому: $\boxed{\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} (b > 0, b \neq 1).}$

Частные случаи:

$\boxed{\log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M.}$ $\boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, b > 0; b \neq 1.}$

Запомните!

1. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

2. $\log_a x^k = k \log_a |x|$, где k — четное число.

§2. Преобразование выражений, содержащих логарифмы

Вычислите (916–949):

916.1. $\log_6 583{,}2 - \log_6 2{,}7 - \log_2 16$.

916.2. $\log_5 125 - \log_{12} 16$.

917.1. $\log_5 3 \cdot \log_3 125$.

917.2. $\log_{12} 14{,}4 + \log_{12} 10$.

918. $\log_8 17 \cdot \log_{17} 64$.

919. $2 \cdot 11^{\log_{11} 6+1}$.

920.1. $\log_2 54{,}4 - \log_2 1{,}7$.

920.2. $7 \log_9 \left(x^2 - 4\right) - \log_9 \dfrac{(x+2)^7}{x-2}$, $x = 11$.

921. $4 \log_3 \sqrt[8]{3} + 6 \log_{12} \sqrt[5]{12}$.

922. $8 \cdot 16^{\log_2 3-1}$.

923. $\log_3 259{,}2 - \log_3 3{,}2 - \log_2 32$.

924. $\dfrac{\log_{27} 11}{\log_9 11} + \log_7 49$.

925. $\dfrac{\log_{0,5} 9}{\log_{32} 9} + \log_2 \dfrac{1}{16}$.

926. $\log_{16} 19 \cdot \log_{19} 8$.

927. $\log^2_{\frac{1}{5}} 125$.

929. $13 \log_7 \left(x^2 - 9\right) - \log_7 \dfrac{(x-3)^{13}}{x+3}$, $x = 46$.

928. $\log_3 16{,}2 + \log_3 5$.

930. $\log_7 1715 + \log_7 0{,}2$.

931. $\dfrac{95}{3^{\log_3 5}} - \dfrac{90}{36^{\log_6 2}}$.

932. $\log_{\frac{1}{13}}\sqrt{13}+2\log_{\frac{1}{15}}\sqrt[4]{15}$. **933.** $e^{\ln 7}-\dfrac{15}{49^{\log_7 2}}$.

934. $10^{\lg 3}-e^{\ln 8,2}$.

935.1. $\log_3\log_6\log_2 64$.

935.2. $\log_7 64\cdot\log_2 49+\log_5 \sin\dfrac{\pi}{2}$.

936. $\dfrac{4\log_2\sqrt[5]{27}}{\log_2 81}-\log_5 7\cdot\log_7 125$.

937. $24\log_2\sqrt[6]{2}+\dfrac{\log_{0,5} 9}{\log_{16} 9}+9\cdot 9^{\log_3 7+1}$.

938. $\log_{11}\log_3\log_4 64-\dfrac{24}{3^{\log_3 8}}$.

939. $\log_{2\sqrt{2}} 64+\log_{4\sqrt[3]{4}}\dfrac{1}{4}$.

Решение.

Приведем слагаемые к одинаковым основаниям.

$$2\sqrt{2}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}};$$

$$4\sqrt[3]{4}=2^2\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{2\frac{2}{3}}=2^{\frac{8}{3}}.$$

Данное выражение примет вид $\log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^6+\log_{2^{\frac{8}{3}}} 2^{-2}=$

$$=6\cdot\frac{2}{3}\log_2 2+\frac{3}{8}\cdot(-2)\log_2 2=4-0,75=3,25.$$

Ответ: 3,25.

940. $\log_{3\sqrt{3}}\dfrac{1}{27}-\log_{2,5}\left(\dfrac{8}{125}\right)^{-1}$.

941. $\log_{\frac{1}{4}} \cos 0{,}8\pi.$

Решение.

$\cos 0{,}8\pi$ – число отрицательное, значит, $\log_{\frac{1}{4}} \cos 0{,}8\pi$ не существует.

942.1. $3^{\frac{1}{2}\log_3 16+2}.$

Решение.

Применим формулы $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ и $k \log_a M = \log_a M^k$.

$3^{\frac{1}{2}\log_3 16} \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^{\log_3 \sqrt{16}} = 9 \cdot 4 = 36$ (согласно формуле $a^{\log_a M} = M$).

Ответ: 36.

942.2. $125\log_{11} \sqrt[5]{11} + 48\log_3 \sqrt[6]{3}.$

942.3. $\lg 250 - \lg 2{,}5 + \log_{0,5}^2 8.$

Запомните!

Если выражение, находящееся под знаком логарифма, представляет собой алгебраическую сумму, то эта сумма заключается в скобки.

Сумма (разность) не логарифмируется.

943.1. $\log_3^2 \frac{1}{9} - 36^{\frac{1}{\log_5 6}}.$

Решение.

$$\log_3^2 \frac{1}{9} = \left(\log_3 3^{-2}\right)^2 = (-2\log_3 3)^2 = 4.$$

$$36^{\frac{1}{\log_5 6}} = 6^{2\log_6 5}.$$

Согласно формуле $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, $\dfrac{1}{\log_5 6} = \log_6 5$.

Данное выражение имеет вид $4 - 6^{\log_6 25} = 4 - 25 = -21$.
Ответ: -21.

943.2. $\log_8 640 - \log_8 1{,}25 - \log_{0,2}^2 125$.

943.3. $\dfrac{\log_2 17}{\log_8 17} - 5\log_{10} \sqrt[5]{10}$.

944. $\log_{0,2}\sqrt{5} - 121^{-\frac{2}{\log_3 11}}$.

945. $\dfrac{\log_{\sqrt{3}} 27}{\log_{0,2} 625}$.

946.1. $\sqrt{49^{\frac{1}{\log_8 7}} + 25^{-\frac{1}{\log_6 5}}}$.

946.2. $3^{\log_3 11 + 2}$.

946.3. $7^{2\log_7 3} + \dfrac{\log_9 5}{\log_{81} 5}$.

947. $\dfrac{\log_{0,4} 6{,}25}{\log_{\sqrt{7}} 49}$.

Решение.

$6{,}25 = \dfrac{25}{4} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$. $\log_{\sqrt{7}} 49 = \log_{7^{\frac{1}{2}}} 7^2 = 2 \cdot 2\log_7 7 = 4$.

$$\frac{\log_{0,4} 6{,}25}{\log_{\sqrt{7}} 49} = \frac{\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{2}\right)^2}{4} = \frac{-2}{4} = -0{,}5.$$

Ответ: $-0{,}5$.

948. $3\dfrac{\log_2 81}{\log_2 \frac{1}{27}} - \log_2^2 \dfrac{1}{32}$.

949. $4\log_{\frac{1}{9}} 6 - \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 6\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{45}$.

Найдите значение выражения (950–964):

950. $\dfrac{\log_{27} 13}{\log_{81} 13} - \dfrac{2\log_8 11}{\log_{0,5} 11}$.

951. $\log_{b\sqrt[5]{a}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{a^2}\right)$, если $\log_a b = 0{,}2$.

Решение.

$$\log_a b = \frac{1}{5} \Rightarrow \log_b a = 5.$$

$$\log_{b\sqrt[5]{a}} b^{\frac{1}{2}} - \log_{b\sqrt[5]{a}} a^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_b b\sqrt[5]{a}} - 2\cdot\frac{1}{\log_a b\sqrt[5]{a}} =$$

$$= \frac{1}{2\left(\log_b b + \frac{1}{5}\log_b a\right)} - \frac{2}{\log_a b + \frac{1}{5}\log_a a} =$$

$$= \frac{1}{2(1+1)} - \frac{2}{0{,}2+0{,}2} = -4{,}75.$$

Ответ: $-4{,}75$.

952. $e \cdot e^{0{,}5\ln 36 - \ln 2 - 3}$.

953. $e^{8-2\ln\sqrt[4]{4}} : e^8$.

954. $10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}$.

955. $\log_{\frac{1}{3}\sqrt[5]{3}} \dfrac{1}{243} + \log_3^4 \dfrac{1}{9}$.

Решение.

1) $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt[5]{3} = 3^{-1}\cdot 3^{\frac{1}{5}} = 3^{-\frac{4}{5}}$.

Согласно формулам

$$\log_a M^k = k\log_a M \text{ и } \log_{a^n} M = \frac{1}{n}\log_a M$$

получим $\log_{3^{-\frac{4}{5}}} 3^{-5} = -5\left(-\frac{5}{4}\right)\log_3 3 = \frac{25}{4} = 6{,}25.$

2) $\log_3^4 \frac{1}{9} = \left(\log_3 3^{-2}\right)^4 = (-2)^4 = 16.$

3) $6{,}25 + 16 = 22{,}25.$

Ответ: 22,25.

956. $\frac{1}{7}\cdot 7^{\log_7 5} + \frac{3}{7}\cdot 5^{\log_5 3}.$ **957.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot 11^{\log_{11} 5} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2\log_{0,2} 4}.$

958. $3^{\frac{1}{2}\log_3 4} - 7^{-2\log_7 5} + \log^2_{\frac{1}{2}} 16.$

Решение.

$$3^{\log_3 2} - 7^{\log_7 \frac{1}{25}} + \left(-\log_2 2^4\right)^2 = 2 - 0{,}04 + 16 = 17{,}96.$$

959. $27^{\frac{1}{3\log_{16} 81}} - 0{,}8\left(1 + 9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}.$

Решение.

$$3^{\frac{3\cdot 1}{3\log_2 3}} - 0{,}8\cdot(1+64)^{\log_{65} 5} = 3^{\log_3 2} - 0{,}8\cdot 65^{\log_{65} 5} =$$
$$= 2 - 0{,}8\cdot 5 = 2 - 4 = -2.$$

§3. Решение логарифмических уравнений

Запомните!

Если логарифмическое уравнение содержит сумму, разность логарифмов, логарифм степени, то уравнение можно привести к виду
$\log_a M = \log_a N$, где $M > 0$; $N > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$.

$$\boxed{\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N}$$

Запомните!

Так как отрицательные числа и ноль не имеют логарифмов, при решении логарифмических уравнений необходимо выполнять проверку результатов или находить ОДЗ неизвестного.

Решите уравнение (960—1000):

960.1. $\ln x + \ln(x + 2) = \ln 3.$ **960.2.** $\log_{\frac{1}{6}}(12-2x) = -2.$

961.1. $\log_3(14 - x) = 2\log_3 5.$ **961.2.** $\log_3 x = \log_3 1{,}5 + \log_3 8.$

962.1. $\log_{0,1}\dfrac{2x+95}{2} = -2.$

962.2. $\log_3(x + 1) + \log_3 x = \log_3 6.$

963.1. $\lg(4x + 7) + \lg x = \lg 2.$

963.2. $\log_3(2x - 4) - \log_3 2 = 2.$

964.1. $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1.$ **964.2.** $\lg\sqrt{3^{x^2-8x}} = 0.$

965. $\log_{1-2x^2}(1-4x^4) - \dfrac{1}{\log_3(1-2x^2)} = 2.$

Решение.

ОДЗ учтем в процессе решения уравнения.

1) $\dfrac{1}{\log_3(1-2x^2)} = \log_{1-2x^2} 3$ (согласно формуле $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$);

2) $\log_{1-2x^2}(1-4x^4) = \log_{1-2x^2}(1-2x^2)(1+2x^2)$, далее по формуле $\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

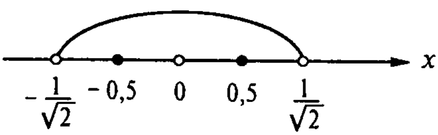
Данное уравнение примет вид

$$\log_{1-2x^2}(1-2x^2) + \log_{1-2x^2}(1+2x^2) - \log_{1-2x^2} 3 = 2.$$

Учитывая ОДЗ переменной, запишем систему:

$$\begin{cases} 1+\log_{1-2x^2}(1+2x^2)-\log_{1-2x^2}3=2, \\ 1-2x^2>0, \\ 1-2x^2\neq 1, \\ 1-4x^4>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-2x^2}\dfrac{1+2x^2}{3}=1, \\ |x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+2x^2}{3}=1-2x^2, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x\neq 0. \end{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7\right).$$



$\Rightarrow x = \pm 0{,}5.$

Ответ: $\pm 0{,}5$.

966. $\log_{11}(10x - 22) - \log_{11} 2 = \log_{11} 8.$

967. $\log_7(3x+5)+\sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)}=0.$

968. $\log_{\left(5-\frac{x}{2}\right)}(x-3)^2-\log_{\left(\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}\right)}(x-3)^2=0.$

969. $\log_2 3 - \log_2(2 - 3x) = 2 - \log_2(4 - 3x).$

970. $x + \lg(1 + 2^x) = x \lg 5 + \lg 6.$

Решение.

ОДЗ: $1 + 2^x > 0,\ x \in R.$

$x \cdot 1 = x \lg 10 = \lg 10^x.$

Далее применим формулы $\log_a M^k = k \log_a M$ и $\log_a M + \log_a N = \log_a (M \cdot N)$.

$\lg(10^x \cdot (1 + 2^x)) = \lg(6 \cdot 5^x) \Rightarrow 10^x \cdot (1 + 2^x) = 6 \cdot 5^x$ разделим на $5^x \neq 0$.

$2^x(1+2^x)=6$, пусть $2^x=t>0 \Rightarrow t(1+t) = 6 \Rightarrow t^2+t-$ $-6=0 \Rightarrow t_1=-3 \notin (0;\infty)$; $t_2=2 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$.

Ответ: 1.

971. $3^{2\log_3 x+2}=36$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

$a^{m+n}=a^{mn} \Rightarrow 3^{2log_3 x+2}=3^{\log_3 x^2}\cdot 3^2=9\cdot x^2$.

$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2 \notin$ ОДЗ; $x_2=2$.

Ответ: 2.

972. $5^{2\log_5 x+1}=x+4$.

973. $\log_9(3-x)+\sqrt[8]{\log_9(-4x+9)}=0$. Если уравнение имеет более одного корня, то запишите произведение всех его корней.

Запомните!

Уравнения вида $\log_a M=b$, где M, a и b – числа или многочлены ($M>0$; $a>0$, $a\neq 1$), можно решать, применяя определение логарифма:

$$\log_a M=b \Leftrightarrow a^b=M.$$

Решите уравнение (974–978):

974. $\log_3(3^x-6)=x-1$.

Решение.

Нахождение ОДЗ заменим проверкой результатов.

Согласно определению логарифма данное уравнение можно заменить эквивалентным уравнением $3^{x-1}=3^x-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3^x}{3}=3^x-6$.

Пусть $3^x=t>0$.

Тогда $\dfrac{t}{3}=t-6 \Rightarrow 3t-18=t \Rightarrow t=9 \Rightarrow 3^x=3^2 \Rightarrow x=2$.

Проверка: $\log_3(9-6)=2-1 \Rightarrow 1=1$.

Ответ: 2.

975. $\log_2(9-2^x)=3-x$.

976. $\log_{x-1}(x^2-5x+10)=2$.

977. $\log_3(3^x-8)=2-x$.

978. $\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1$.

Запомните!

Уравнение вида $m\log_a^2 x+n\log_a x+p=0$ $(x>0;$ $a>0;$ $a\neq 1)$ (или $\log_a x+\sqrt{\log_a x}=m$) решаются методом введения новой переменной $\log_a x=t$, получают квадратное уравнение $mt^2+nt+p=0$, находят t, потом x.

Решите уравнение (979–992):

979. $\log_{\frac{1}{3}} x-3\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}+2=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ \log_{\frac{1}{3}} x>0 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1$, т. е. $x\in(0;\ 1)$.

Введем новую переменную $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}=t>0$.

$t^2-3t+2=0 \Rightarrow t_1=1;\ t_2=2$.

1) $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}=1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x=1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$.

2) $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}=2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x=4 \Rightarrow x_2=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$.

Ответ: $\frac{1}{3};\frac{1}{81}$.

980. $\lg^2 x - \lg^6 x = 16.$

981. $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x.$

982. $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$, $\lg x \neq 5$, $x \neq 10^5$; $x \neq 10^{-1}$.

Пусть $\lg x = m$. Уравнение примет вид

$$\frac{1}{5-m} + \frac{2}{1+m} = 1 \quad (m \neq -1; m \neq 5).$$

$1 + m + 10 - 2m = 5 + 4m - m^2 \Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow m_1 = 2;\ m_2 = 3.$

1) $\lg x = 2 \Rightarrow x_1 = 10^2 = 100.$

2) $\lg x = 3 \Rightarrow x_2 = 10^3 = 1000.$

Ответ: 100; 1000.

983. $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$; $\log_4 x > 0 \Rightarrow x > 1$, $x \in (1; \infty)$.

$\log_2 \log_3 \log_4 x = \log_2 1 \Rightarrow \log_3 \log_4 x = 1 \Rightarrow \log_3 \log_4 x = \log_3 3 \Rightarrow \log_4 x = 3 \Rightarrow x = 64.$

Ответ: 64.

984. $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1.$

985. $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1.$

986. $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0.$

987. $\log_{0,25}^2 x + 3\log_{0,5} x + 5 = 0.$

988. $\log_x 2 + \log_2 x = 2,5.$

989. $\frac{1}{5-4\lg x} + \frac{4}{1+\lg x} = 3.$

990. $\log_3 \log_2 (x^2 - x) = 0.$

991. $\frac{\lg x}{1-\lg 2} = 2.$

992. $\frac{\lg(x+8)}{\lg(x-7) - \lg 2} = 2.$

Запомните!

Уравнения вида $a^x = b$ и $x^{\log_a M} = M$ $(M > 0;\ a > 0;$ $a \neq 1)$ решаются логарифмированием двух частей уравнения (по основанию a).

Решите уравнение (993–1001):

993. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1.$

Логарифмируем две части уравнения по основанию 10.

$\lg\left(x^{\lg^3 x - 5\lg x}\right) = \lg 10^{-4}.$ $\log_a M^k = k \log_a M.$

$(\lg^3 x - 5 \lg x) \lg x = -4 \Rightarrow \lg^4 x - 5 \lg^2 x + 4 = 0.$

Введем новую переменную.

$\lg^2 x = t > 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = 4.$

1) $\lg^2 x = 1 \Rightarrow \lg x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = 0{,}1;\ x_2 = 10;$

2) $\lg^2 x = 4 \Rightarrow \lg x = \pm 2 \Rightarrow x_3 = 0{,}01;\ x_4 = 100.$

Ответ: 0,01; 0,1; 10; 100.

994. $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x}.$

995. $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}.$

996. $x^{1 - \frac{1}{3}\lg x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{100}} = 0.$

997. $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1.$

Решение.

Нахождение ОДЗ заменим проверкой.

$$\log_2 \frac{4 \cdot 3^x - 6}{9^x - 6} = \log_2 2 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3^x - 6}{3^{2x} - 6} = 2.$$

Пусть $3^x = t > 0.$ $3^{2x} \neq 0.$

$4t - 6 = 2(t^2 - 6) \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -1 \notin (0;\ +\infty),$ $t_1 = 3.$

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1.$

Ответ: 1.

998. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$ **999.** $\log_9 (2 \cdot 18^x - 4^x) = 2x.$

1000. $\log_2 \log_5 5^{x+2} + \log_2 \log_2 4^{4-x} = 4$ и найдите сумму корней.

Решение.

$\log_2 (\log_5 5^{x+2} + \log_2 2^{2(4-x)} = 4 \Rightarrow \log_5 5^{x+2} \cdot \log_2 2^{2(4-x)} = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(x + 2)(4 - x) = 16 \Rightarrow 2x + 8 - x^2 = 8 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_1 + x_2 = 2.$

Ответ: 2.

1001. $\log_3 \log_7 7^{x-3} + \log_3 \log_5 125^{1-x} = 2.$

§4. Решение логарифмических неравенств

Решите неравенство (1002–1011):

1002. $\log_{11}(2x + 4) < 1.$

Запомните!

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве монотонности логарифмической функции, т. е.

$\log_a M > \log_a N$
$a > 0;\ a \neq 1$

$M > 0$
$N > 0$

$a > 1$

$\begin{cases} M > N, \\ N > 0; \end{cases}$

$0 < a < 1$

$\begin{cases} M < N, \\ M > 0. \end{cases}$

1003.1. $\log_{0,7}\left(\frac{x}{3}-12\right)<0.$

Решение.

$\log_{0,7}\left(\frac{x}{3}-12\right)<\log_{0,7}1.$

При основании 0,7 логарифмическая функция убывает,

следовательно, $\begin{cases}\frac{x}{3}-12>1,\\ \frac{x}{3}-12>0,\end{cases}$ решение системы сводится к решению неравенства $\frac{x}{3}-12>1 \Rightarrow x>39.$

Ответ: $(39;\ +\infty)$.

1003.2. $\log_7 x + \log_7(x+6) \le 1.$

1004. $\log_{0,2} x + \log_{0,2}(x+4) \le -1.$ **1005.** $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{7}(x-1)\right)>1.$

1006. $\log_{0,3}(x+4) < \log_{0,3}(5x-2).$

1007. $\lg(0{,}5x) < -2.$ **1008.** $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)\ge -2.$

1009. $\log_3(5x-6) < \log_3 2 + 3.$

1010. $\frac{1}{2}\ln 0{,}64+\ln x>\ln 5.$ **1011.** $\log_2(1-2x) > 0.$

Укажите промежуток, которому принадлежит меньший корень уравнения (1012–1014):

1012. $\log(1-x) = 4.$

1) (62; 64); 2) (–81; –79); 3) (79; 81); 4) (–12; –10).

1013. $2^{\log_4 9} = \log_2(x^2+2x)$.

1) (0; 4); 2) (–5; 0); 3) (–4; 4); 4) (1; 4).

1014. $\lg(x-0{,}5) = \lg\dfrac{1}{2x}$.

1) (1; 4); 2) (–2; 1); 3) [1;6); 4) (0; 1).

Найдите наибольшее значение функции (1015; 1016):

1015. $y = 5^{\log_3(9-x^2)} - 6$.

Решение.

Найдем множество значений данной функции.

При основании 5 показательная функция возрастает, следовательно, $y = 5^{\log_3(9-x^2)}$ примет наибольшее значение при наибольшем значении показателя степени.

Найдем наибольшее значение функции $f(x) = \log_3(9-x^2)$. $9 - x^2 \le 9$, логарифмическая функция при основании 3 возрастает $\Rightarrow \log_3(9-x^2) \le \log_3 9 \Rightarrow \log_3(9-x^2) \le 2$, значит, наибольшее значение $f(x) = \log_3(9-x^2)$ – это число 2.

$y_{\max} = 5^2 - 6 = 19$.

Ответ: 19.

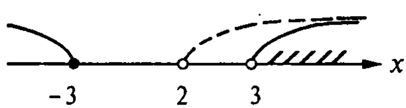
1016. 1) $f(x) = 3^{\log_2(8-x^2)} - 10$; 2) $f(x) = 3^{\log_2(4-x^2)} - 9$.

Найдите область определения функции (1017–1024):

1017. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\log_3(x-2)}$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2-9 \ge 0, \\ x-2 > 0, \\ x-2 \ne 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \ge 3, \\ x > 2, \\ x \ne 3. \end{cases}$$



$\Rightarrow x \in (3; \infty)$.

Ответ: (3; ∞).

1018. $y=\dfrac{\log_{0.3}(6x-3)}{x^2-4}$.

1019. $f(x)=\log_{0.2}(7x-x^2)$.

1020. $f(x)=\ln\dfrac{4-5x}{x-3}$.

1021. $f(x)=\lg\dfrac{x+1}{2x-1}$.

1022. $f(x)=\sqrt[6]{\log_9 x-2}$.

1023. $y=\sqrt[4]{-\log_4 x+1}$.

1024. $f(x)=\ln(x^2+x-2)$.

Найдите наименьшее целое значение функции (1025–1027):

1025. $f(x)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_2\left(4-x^2\right)}+3$.

1026. $y=\log_3(x^2+9)$.

1027. $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_2\left(125-x^2\right)}+7$.

Найдите множество значений функции (1028–1032):

1028. $y=\log_{\frac{1}{7}}(x+3)$.

1029. $f(x)=\log_7(x^2+7)$.

1030. $y=\log_{\frac{1}{11}}\left(x^2+11\right)$.

1031. $y=\log_{\frac{1}{8}}\left(2-x^2\right)$.

1032. $f(x)=\log_3(9-x^2)$.

§5. Системы показательных и логарифмических уравнений (С1)

Найдите значение выражения x_0+y_0, где x_0 и y_0 — решения системы (1033–1037):

1033. $\begin{cases}5\log_{\frac{1}{7}}x-3\log_7 y=-16,\\ 7\log_7 x+3\log_7 y=20.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$; $y > 0$.

$$+\begin{cases} -5\log_{\frac{1}{7}} x - 3\log_7 y = -16, \\ 7\log_7 x + 3\log_7 y = 20. \end{cases}$$

$2\log_7 x = 4 \quad \Rightarrow \quad \log_7 x = 2 \Rightarrow x = 49.$

Подставим $\log_7 x = 2$ в первое уравнение системы.

$-5\log_7 x - 3\log_7 y = -16$; $3\log_7 y = 6 \Rightarrow \log_7 y = 2 \Rightarrow y = 49.$

$x + y = 98.$

Ответ: 98.

1034. $\begin{cases} 7\log_3 x - 6\log_3 y = -25, \\ 5\log_{\frac{1}{3}} x + 6\log_3 y = 23. \end{cases}$

1035. $\begin{cases} 4^{-y} \cdot \log_2 x = 4, \\ \log_2 x + 2^{-2y} = 4 \end{cases}$ и найдите $|x_0 \cdot y_0|$.

1036. $\begin{cases} 8\log_5 x + 7\log_{0,2} y = -5, \\ 6\log_{0,2} x + 7\log_5 y = 9. \end{cases}$ **1037.** $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 1, \\ 5^y \cdot 0{,}2^{3x} = 0{,}04. \end{cases}$

Найдите наименьшее значение $x_0 \cdot y_0$ (1038–1040):

1038. $\begin{cases} 3^{2x} \cdot \log_2 y - 5 = 8\log_2 y, \\ 9^x - \log_2 y = 4. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y > 0$.

Из второго уравнения системы найдем $\log_2 y = 9^x - 4$, пусть $9^x = t > 0$. Подставим в первое уравнение.

$t(t - 4) - 5 = 8(t - 4) \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow t_1 = 3$; $t_2 = 9 \Rightarrow x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$.

$t_1 = 3 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = 9 \Rightarrow y_2 = 32.$

Наименьшее произведение $x_1 \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

1039. $\begin{cases} x - y = 8, \\ \log_3(2x - y) = 2. \end{cases}$

1040. $\begin{cases} (x-2y)^2 = 1, \\ 3^{x-y} - 26 \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} = 27. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим второе уравнение системы.

Пусть $3^{\frac{x-y}{2}} = t > 0$, тогда $3^{\frac{x-y}{2}} = t^2$.

$t^2 - 26t - 27 = 0 \Rightarrow t_1 = -1 \notin (0; +\infty)$; $t_2 = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{\frac{x-y}{2}} = 3^3 \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 3 \Rightarrow x - y = 6 \Rightarrow x = 6 + y.$

Получим систему уравнений $\begin{cases} (x-2y)^2 = 1, \\ x = 6 + y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (6 - y)^2 = 1 \Rightarrow y^2 - 12y + 35 = 0.$

$y_1 = 5$; $y_2 = 6.$

$x_1 = 6 + 5 = 11$; $y_2 = 6 + 6 = 12.$

$x_1 \cdot y_1 = 55$; $x_2 \cdot y_2 = 12 \cdot 6 = 72.$

Ответ: 55.

Найдите наименьшее значение $x_0 \cdot y_0$ (1041–1048):

1041. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 12, \\ |2y - x| = 10. \end{cases}$

1042. $\begin{cases} y(5^{2x-1} - 1) = 0, \\ 5^{2x} = y + 1. \end{cases}$

1043. $\begin{cases} 2^{3x}\cdot y+25=7\left(8^x-1\right) \\ y-8^x=-5. \end{cases}$

1044. $\begin{cases} 5^x\left(y-0{,}2\right)=-1, \\ 5^x-y=5. \end{cases}$

1045. $\begin{cases} y\left(2^{2x}+8\right)=20, \\ y-2^x=0. \end{cases}$

1046. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

1047. $\begin{cases} \lg x+\lg y=5, \\ \lg x-\lg y=3. \end{cases}$

1048. $\begin{cases} x-y=90, \\ \lg x+\lg y=3. \end{cases}$

§6. Задания для подготовки к ЕГЭ (B11; C1; C3)

Различные задания, в которых применяются свойства логарифмов, встречаются в первой и во второй частях экзаменационной работы.

Решите уравнение (1049–1051):

1049. $\log_{1-3x^2}\left(1-9x^4\right)-\dfrac{1}{\log_2\left(1-3x^2\right)}=2.$

1050. $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1.$

1051. $8\cdot 4^{\log_4 x}=3x+15.$

1052. Найдите наибольший корень уравнения $\log_4(x-7)^6-10=\log_4|x-7|$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq 7$.

1) $x-7>0,\ x>7\Rightarrow |x-7|=x-7;$

$6\log_4(x-7)-\log_4(x-7)=10\Rightarrow \log_4(x-7)=2\Rightarrow$ $\Rightarrow x-7=16\Rightarrow x_1=23.$

2) $x-7<0\Rightarrow |x-7|=7-x.$

$\log(7-x)=2\Rightarrow 7-x=16\Rightarrow x_2=-9.$

Наибольший корень 23.

Ответ: 23.

1053. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\log_2(x+1) - \log_2 5x = 1$.

1) $\left(0; \frac{2}{19}\right)$; 2) $(-\infty; 0{,}1]$; 3) $[0{,}5; +\infty)$; 4) $\left(\frac{2}{19}; \frac{13}{12}\right)$.

Найдите наибольший корень уравнения (1054–1060):

1054. $\log_3|x+2| + 9 = \log_3(x+2)^4$.

1055. $\log_3(x+4)^8 - \log_3|x+4| = \log_3(x+4)^6 + 4$.

1056. $7\log_5(x^2 - 8x + 16) - 26 = \log_5|x-4|$.

1057. $\lg(x-1)^6 = (x-5)\lg|x-1|$.

1058. $(x+5)^{\log_7(x+5)} = 7$. **1059.** $x^{\log_7 x - 3} = \frac{1}{49}$.

1060. $3^{x\log_3 11} \cdot 11^{x^2+3x} = 1$.

Решение.

$$3^{\log_3 11^x} \cdot 11^{x^2+3x} = 1 \Rightarrow 11^{x+x^2+3x} = 11^0 \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -4.$$

Ответ: 0.

Вычислите (1061–1065):

1061. $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right) + \dfrac{\log_5\left(32+10\sqrt{7}\right)}{2\log_{25}9} - \dfrac{1}{\log_4 9}$.

1062. $0{,}5 \cdot 5^{\frac{1}{\log_6 5}} - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 7^{\log_7 9}$.

1063. $\log_2\left(56\sqrt{2}\right) - \left(\log_2^2 7 + 1 - \log_2 49\right)^{0{,}5}$.

Решение.

$$\left(\log_2^2 7 - 2\log_2 7 + 1\right) = \left(\log_2 7 - 1\right)^2.$$

$$\log_2\left(7\cdot 8\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)-(\log_2 7-1)^{2\cdot 0,5}=$$

$$=\log_2 7+\log_2 2^{\frac{7}{2}}-\log_2 7+1=\frac{7}{2}+1=4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

1064. $\left(\log_6 9+\log_{36}16+3{,}9^{\log_{3,9}3}\right)^{\log_{25}49}$.

1065. $\log_6^2 5+\dfrac{\log_8 5}{\log_8 6}-\dfrac{\log_6 5}{\log_{30} 6}$.

Решение.

1) Применим формулы $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ и $\log_b a\cdot\log_a b=1$.

Приведем $\log_8 5$ к основанию 6: $\log_8 5=\dfrac{\log_6 5}{\log_6 8}$.

2) $\log_{30}6=\dfrac{1}{\log_6 30}=\dfrac{1}{\log_6 6+\log_6 5}=\dfrac{1}{1+\log_6 5}$.

3) $\log_6^2 5+\dfrac{\log_6 5}{\log_6 8\cdot\log_8 6}-\log_6 5:\dfrac{1}{1+\log_6 5}=$

$=\log_6^2 5+\log_6 5-\log_6 5(1+\log_6 5)=$

$=\log_6^2 5+\log_6 5-\log_6 5-\log_6^2 5=0.$

Другое возможное решение.

1) $\dfrac{\log_8 5}{\log_8 6}=\log_6 5.$

2) $\dfrac{\log_6 5}{\log_{30} 6}=\log_6 5\cdot\log_6 30=\log_6 5(1+\log_6 5)$.

3) $\log_6^2 5+\log_6 5-\log_6 5(1+\log_6 5)=$

$=\log_6^2 5+\log_6 5-\log_6 5-\log_6^2 5=0.$

Ответ: 0.

Решите неравенство (1066–1072):

1066. $\dfrac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\geq 1.$

1067. $9\log_{12}\left(x^2-13x+42\right)\leq 10+\log_{12}\dfrac{(x-7)^9}{x-6}.$

Решение.

Найдем значения переменной x, при которых неравенство имеет смысл.

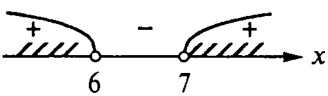
Отрицательные числа и ноль не имеют логарифмов.

$$\begin{cases} x^2-13x+42>0, \\ \dfrac{(x-7)^9}{x-6}. \end{cases}$$

Решим систему графически, применив метод интервалов.

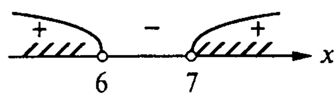
$x^2-13x+42>0,$

$x^2-13x+42=0,$
$x_1=6;\ x_2=7;$



$\dfrac{x-7}{x-6}>0,$

корни числителя и знаменателя $x_1=7;\ x_2=6.$



ОДЗ: $x\in(-\infty;\ 6)\cup(7;\ +\infty).$
$x^2-13x+42=0=(x-6)(x-7).$
Неравенство примет вид

$$9\log_{12}(x-6)(x-7)-\log_{12}\frac{(x-7)^9}{x-6}\leq 10.$$

Применим формулы ($M>0;\ N>0;\ a>0;\ a\neq 1$).

$$k\log_a M = \log_a M^k;\ \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N};\ (ab)^m = a^m b^m.$$

$$\log_{12}\frac{(x-6)^9(x-7)^9(x-6)}{(x-7)^9} \le 10.$$

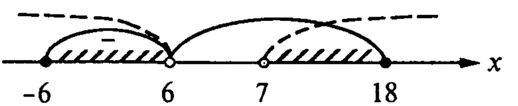
Согласно ОДЗ $x \ne 9$, поэтому дробь можно сократить на $x - 6 \ne 0$.

$\log_{12}(x-6)^{10} \le 10 \Rightarrow 10\log_{12}|x-6| \le 10$.

При основании 12 логарифмическая функция возрастает $\log_{12}|x-6| \le 1 \Rightarrow |x-6| \le 12$ $(1 = \log_{12} 12)$.

1) $x - 6 > 0,\ x > 6$,	2) $x - 6 < 0,\ x < 6$,
$\lvert x-6\rvert = x - 6$	$\lvert x-6\rvert = 6 - x$
$x - 6 \le 12$	(согласно определению
$6 < x \le 18$	модуля отрицательного числа)
	$6 - x \le 12$
	$-x \le 6$
	$x \ge -6$
	$-6 \le x < 6$

Объединим полученные результаты и ОДЗ.



Ответ: $x \in [-6;\ 6) \cup (7;\ 18]$.

1068.1. $\dfrac{\log_{5^{x-x}} 14}{\log_{5^{x-x}}(x^2-25)} \ge \dfrac{\log_2(x^2+9x+14)}{\log_2(x^2-25)}$.

1068.2. $0{,}1^{x^2+4x} < 10000$.

1069. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \le 2$.

1070.1. $\log_{2-x}(x+2)\log_{x+3}(3-x) \le 0$.

1070.2. $0{,}3^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243$.

1071.1. $5\log_8\left(x^2+3x+2\right)\le 6+\log_8\frac{(x+1)^5}{x+2}$.

1071.2. $4^{x+1}-16^x<2\log_4 8$.

1072.1. $\frac{\log_{5^{x-3}}(x+2)}{\log_{5^{x-3}}x^2}<1$.

1072.2. $\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3}\ge\frac{x}{4}$.

Найдите сумму корней уравнения (1073–1076):

1073. $\log_6\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8$.

Решение.

Так как $3^{x(15-x)}>0\ \forall\ x\in R$, ОДЗ: $x\in R$.

Перенесем второе слагаемое в правую часть.

$8-8\log_6 2=8(1-\log_6 2)=8(\log_6 6-\log_6 2)=8\log_6 3=$ $=\log_6 3^8$.

Данное уравнение примет вид

$$\log_6 3^{\frac{x(15-x)}{7}}=\log_6 3^8\Rightarrow 3^{\frac{15x-x^2}{7}}=3^8\Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2-15x+56=0\Rightarrow x_1=7;\ x_2=8.\ \ x_1+x_2=15$.

Ответ: 15.

1074. $\log_\pi\left(\sin^2\frac{\pi x}{1+x^2}\right)=0$.

1075. $\log_{(x+2)^2}\left(x^2-3x-10\right)\le 0{,}5$, найдите сумму целых положительных решений.

1076. $3^{\frac{2x+1}{2x-1}}-2\cdot 3^{\frac{2x}{2x-1}}-9=0$.

Решите систему уравнений (1077; 1078):

1077. $\begin{cases} x = 1 + 3\log_5 y, \\ y^2 = y \cdot 5^x + 20 \cdot 5^{2x}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y > 0$. Решим второе уравнение системы, оно является квадратным относительно y.

$y^2 - y \cdot 5^x - 20 \cdot 5^{2x} = 0.$

$$y = \frac{5^x \pm \sqrt{\left(5^x\right)^2 + 4 \cdot 20 \cdot 5^{2x}}}{2} = \frac{5^x \pm 9 \cdot 5^x}{2} \Rightarrow$$

$y_1 = -4 \cdot 5^x < 0 \notin$ ОДЗ.

$y_2 = 5 \cdot 5^x = 5^{x+1}.$

Подставим в первое уравнение системы.

$x = 1 + 3\log_5 5^{x+1} \Rightarrow x = 1 + 3(x + 1) \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 5^{-1} = 0{,}2.$

Ответ: $(-2;\ 0{,}2)$.

1078. $\begin{cases} x^2 = 4 + \log_2 y, \\ y = -y \cdot 2^{2x} + 20 \cdot 2^{2x}. \end{cases}$

Найдите множество значений функции (1079; 1080):

1079. $y = 2{,}5 + \log_{1,7} x.$

1080. $y = \ln(1 - x^2).$

Решение.

$1 - x^2 \le 1$. При основании $e \approx 2{,}7$ логарифмическая функция возрастает, значит, $\ln(1 - x^2) \le \ln 1, \Rightarrow \ln(1 - x^2) \le 0$, т. е. $y \le 0$.

Ответ: $(-\infty;\ 0]$.

Решите неравенство (1081–1086):

1081. $\log_x \dfrac{6-5x}{4x+5} > 1.$

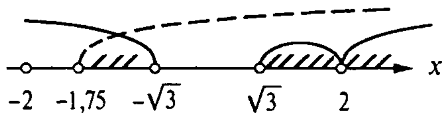
1082. $2 - 3^{\log_3(3x-4)} \ge 0.$

1083. $2^{-\frac{1}{2x}} \le \frac{1}{4}$.

1084. $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$.

Решение.

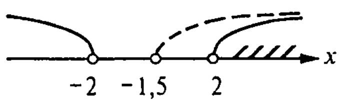
$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4x+7>0, \\ x^2-3>0, \\ x^2-3\ne 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1{,}75, \\ |x|>\sqrt{3}, \\ x\ne \pm 2. \end{cases}$$



$x \in \left(-1{,}75; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right) \cup \left(2; +\infty\right)$

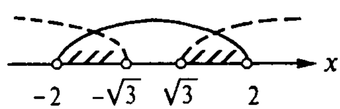
1) $x^2 - 3 > 1 \Rightarrow |x| > 2$. При основании, большем единицы, логарифмическая функция возрастает, значит,

$$\begin{cases} 4x+7>1, \\ |x|>2. \end{cases}$$



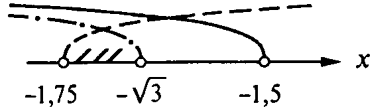
$$\begin{cases} x>-1{,}5, \\ |x|>2. \end{cases} \Rightarrow x > 2.$$

2) $0 < x^2 - 3 < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x|<2, \\ |x|>\sqrt{3}. \end{cases}$



При положительном основании, меньшем единицы, логарифмическая функция убывает, поэтому $0 < 4x + 7 < 1$.

$$\begin{cases} 4x+7<1, \\ 4x+7>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1{,}5, \\ x>-1{,}75. \end{cases}$$



$x \in \left(-1{,}75; \sqrt{3}\right)$.

3) Найдем совокупность множеств, полученных в первом и во втором действиях.

$x \in (-1{,}75;\ -\sqrt{3}) \cup (2;\ +\infty)$.

Ответ: $(-1{,}75;\ -\sqrt{3}) \cup (2;\ +\infty)$.

1085. $\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \le 0$.

1086. $\dfrac{2}{\log_3(x+1)} \le \dfrac{1}{\log_9(x+5)}$.

Решите систему уравнений и найдите наименьшее значение произведения $x_0 \cdot y_0$, где x_0 и y_0 — решения системы (1087–1094):

1087. $\begin{cases} x - y = 2, \\ 9^x - 18\cdot 3^y = 3. \end{cases}$

1088. $\begin{cases} 7\log_3 x - 4\log_3 y = 29, \\ 3\log_{\frac{1}{3}} x + 4\log_3 y = -17. \end{cases}$

1089. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_5 x - \log_5 y = 4. \end{cases}$

1090. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ x + y = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

1091. $\begin{cases} x + y = 6, \\ y^{x^2-7x+12} = 1. \end{cases}$

1092. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

1093. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5. \end{cases}$

1094. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \lg 2. \end{cases}$

Решите неравенство (1095–1097):

1095. $\log_3 \log_{\frac{9}{16}}\left(x^2 - 4x + 3\right) \le 0$.

1096. $x\log_2 x - \dfrac{4}{\log_x 2} < 0.$

Решение.

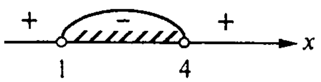
ОДЗ: $x > 0$; $x \neq 1$.

$x \log_2 x - 4\log_2 x < 0.$

$\log_2 x(x-4) < 0$. Решим неравенство методом интервалов. Найдем корни сомножителей.

$\log_2 x = 0 \Rightarrow x_1 = 1$; $x - 4 = 0 \Rightarrow 4$.

$f(2) = \log_2 2 \cdot (2-4) < 0.$



$x \in (1; 4)$.

Ответ: $(1; 4)$.

1097. 1) $5^{\log_2 \frac{2}{x+2}} < 1$; 2) $\left|\log_3 \sqrt{x}\right| < \left|\log_3 \dfrac{x}{9}\right|$;

3) $\left|\log_5 x\right| \geq \left|\log_{0,2} \dfrac{x}{25}\right|$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$\left|\log_5 x\right| \geq \left|\log_{5^{-1}} \frac{x}{25}\right| \Rightarrow \left|\log_5 x\right| \geq \left|-\log_5 x + 2\right|.$$

Пусть $\log_5 x = m$.

$|m| \geq |2 - m| \Rightarrow m^2 \geq (2-m)^2 \Rightarrow m \geq 1.$

$\log_5 x \geq 1 \Rightarrow x \geq 5.$

Ответ: $[5; \infty)$.

Вычислите (1098–1105):

1098. $3 \cdot 7^{\log_7 12} - 100^{\lg\sqrt{13}}$.

1099. $13^{\log_{\sqrt{13}}\sqrt{3+\sqrt{2}}} + 11^{\log_{121}(\sqrt{2}-3)^2}$.

Решение.

1) $13^{2\log_{13}\sqrt{3+\sqrt{2}}} = 13^{\log_{13}\left(3+\sqrt{2}\right)}$;

2) $11^{\frac{1}{2}\log_{11}\left(3-\sqrt{2}\right)^2} = \left(3-\sqrt{2}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}} = 3-\sqrt{2}$;

отметим: $\sqrt{\left(\sqrt{2}-3\right)^2} = \left|\sqrt{2}-3\right| = 3-\sqrt{2}$;

3) $3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=6.$

Ответ: 6.

1100. $\log_3 218{,}7-\log_3 2{,}7-\log_{0,2}^2 125.$

1101. $12\log_3\sqrt[6]{3}-10\log_{17}\sqrt[5]{17}-\log_{0,2}49\cdot\log_7 125.$

1102. $\log_7 32\cdot\log_4 343-9\log_a a.$

1103. $2\cdot 8^{\log_2 3+1}-\log_{0,5}^2 32.$

1104. $\log_2 7\cdot\log_7\sqrt[5]{3}\cdot\log_3 16.$

Решение.

$$\log_2 7\cdot\frac{1}{5}\log_7 3\cdot 4\log_3 2=\frac{4}{5}\frac{\log_3 7\cdot\log_7 3\cdot\log_3 2}{\log_3 2}=0{,}8.$$

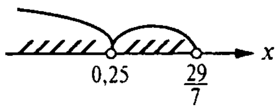
Ответ: 0,8.

1105. $\log_9\log_4 64-13^{\log_{13}5+1}.$

1106. Найдите все значения x, для каждого из которых соответствующая ему точка графика функции $y=\frac{\log_{0,5}(29-7x)}{1-4x}$ лежит выше соответствующей ему точки графика $y=-\frac{3}{1-4x}$.

Решение.

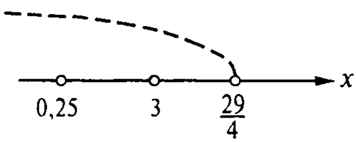
ОДЗ: $\begin{cases} 29-7x>0, \\ 1-4x\neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{29}{7}, \\ x\neq \dfrac{1}{4}. \end{cases}$



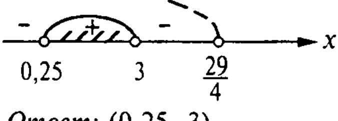
$$\frac{\log_{0.5}(29-7x)}{1-4x}>-\frac{3}{1-4x}\Rightarrow\frac{\log_{0.5}(29-7x)+3}{1-4x}>0. \qquad (1)$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдем корни функций, расположенных в числителе и знаменателе.

$\log_{0,5}(29-7x)+3=0,$	$1-4x=0,$
$29-7x=8,$	$x=0,25.$
$x=3.$	



Найдем знаки дроби, расположенной в левой части неравенства (1) на полученных интервалах. Например, при $x=1$. Чтобы выяснить знак числителя, воспользуемся свойством монотонности функции $y=\log_{0,5}x$; она убывает $\Rightarrow$ $\Rightarrow \log_{0,5}22<\log_{0,5}8\Rightarrow\log_{0,5}22<-3$, значит, числитель и знаменатель отрицательные, т. е. на интервале $(0,25; 3)$ дробь положительна.



$x\Rightarrow\in(0,25;\ 3).$

Ответ: $(0,25,\ 3)$.

1107. Найдите все значения x, для каждого из которых соответствующая ему точка графика функции $y=\dfrac{\log_{0,5}(34-5x)}{40+4x}$ лежит ниже соответствующей ему точки графика функции $y=-\dfrac{5}{40+4x}$.

1108. Найдите все значения $x > 1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = \log_2 x + 2\log_x 32 - 2$ и $b = 41 - \log_2^2 x^2$ больше 5.

Найдите сумму корней уравнения (1109–1111):

1109. $\log_2^2 \dfrac{x+23}{6x} + \log_2 \dfrac{x+23}{3x} = 7.$

1110. $\log_3^2\left(9x^2 + 18x + 9\right) + 4\log_9 \dfrac{9}{(x+1)^{10}} = 0.$

1111. $\log_9 x \cdot \lg(10x) = \log_9 100.$

Найдите нули функции (1112–1115):

1112. $y = \ln(x^2 - 5x + 7).$

1113. $y = \log_{x+2}(x^2 + x - 1).$

1114. $y = x(x^2 + 2x - 5) - e^{\ln 6}.$

1115. $y = x^2(x-2) + 12 - 11 \cdot 3^{\log_3 x}.$

Найдите абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс (1116–1121):

1116. $y = \log_{3-x}(x^2 - 4x + 5).$

1117. $y = 12 \cdot 3^{x-1} - 11 \cdot 3^x + 162 + 9\log_5 125.$

1118. $f(x) = 5 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^{x-1} + 24 + \ln 1.$

1119. $y = x^2 - 5x + 7^{\log_7 4}.$

1120. $y = 3^{2\log_3 x + 2} - 8x - 2^0.$

1121. $f(x) = 7^{2\log_7 x + 1} - 6x - \lg 10.$

1122*. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из интервала $(4;\ 8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a - 1)\log_2 x.$

Решение.

Пусть $\log_2 x = t$, $t \in (2;\ 3]$; $t^2 - (2a -$ $- 1)\ t - 8 = 0$.

Найдем значения a, при которых выражения имеют равные значения на интервале $(4;\ 8]$.

$D = (2a - 1)^2 + 32 > 0$, парабола пересекает ось Ot в двух точках (рис. 96).

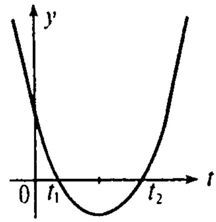


Рис. 96

$$\begin{cases} f(2) < 0, \\ f(3) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(2a-1) - 8 < 0, \\ 9 - 3(2a-1) - 8 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -0{,}5, \\ a < \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Значит, при $a \in (-\infty;\ 0{,}5] \cup \left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ уравнение не имеет корней на интервале $x \in (4;\ 8]$ (рис. 96).

Ответ: $(-\infty;\ 0{,}5] \cup \left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

1123*. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(3;\ 9]$ значение выражения $\log_3^2 x + 3\log_2 x$ не равно значению выражения $9 + a\log_3 x$.

1124*. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = (\log_2 x + 1)\cdot \log_2 \dfrac{x}{8}$ и $b = (\log_2 2x)(5 - \log_2 x)$ положительно.

1125*. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{0,5}(ax^2 - (a + 1)x + 6) = \log_{0,5}(3x^2 - (a + 1)x +$ $+ 2a)$ имеет более двух решений.

Решение.

$ax^2 - (a + 1)x + 6 = 3x^2 - (a + 1)x + 2a \Rightarrow (a - 3)x^2 +$ $+ 6 - 2a = 0$;

$(a - 3)\ (x^2 - 2) = 0$. Если $a = 3$, то $0 \cdot (x^2 - 2) = 0$, т. е. уравнение имеет бесконечное множество решений.

Если $a = 3$, то уравнение имеет смысл, так как $ax^2 -$ $- (a + 1)x + 6 > 0\ \forall\ x \in R$, так как уравнение $3x^2 - 4x + 6 =$ $= 0$ имеет $D < 0$.

Ответ: $a = 3$.

1126*. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $a\log_4^2 x-(2a+3)\log_4 x+6\le 0$ имеет единственное решение.

1127*. При каких значениях параметра a уравнение $\ln(e^x + 3e^{-x}) = a$ имеет только два корня?

1128*. Найдите все значения параметра a, при которых только одно из чисел $x = 6$ или $x = 7$ является решением неравенства $(x^2 - 13x + 42)\log_3(10 + a^2(x - 6) - 7a(x - 6)^2) \le 0$.

Решение.

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - 13x + 42$; его корни $x_1 = 6$; $x_2 = 7 \Rightarrow x^2 - 13x + 42 = (x - 6)(x - 7)$.

$(x - 6)(x - 7)\log_3(10 + a^2(x - 6) - 7a(x - 6)^2) \le 0$.

1) $x = 6 \Rightarrow 0 \cdot \log_3 10 \le 0$, т. е. $x = 6$ – решение неравенства;

2) $x = 7 \Rightarrow 0 \cdot \log_3(10 + a^2 - 7a) \le 0$ (1).

Рассмотрим знаки трехчлена $10 + a^2 - 7a$.

$a^2 - 7a + 10 = 0$.

$a_1 = 2$, $a_2 = 5$.

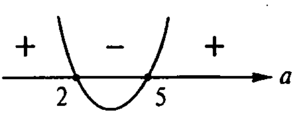


Рис. 97

Значит, при $a \in [2; 5]$ неравенство (1) не имеет решений, так как логарифм отрицательного числа и нуля не существует, т. е. число 7 не является решением неравенства.

Ответ: $a \in [2; 5]$.

1129*. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2\log(x + 3) = \log(ax + 8)$ имеет единственный корень.

1130*. При каких значениях параметра a уравнение $2\lg(x - 5) = \lg(ax - 11)$ имеет только два корня?

1131*. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y=\dfrac{\log_{23}^2(5x+11)}{2x-7}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{24}{7-2x}$.

Глава 8
Тригонометрия

§1. Определения тригонометрических функций

Радианное измерение углов

Радиан — это центральный угол окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'', \ \pi = 180^\circ.$$

$$1^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}, \ \pi = 3{,}14.$$

Углы в градусах	φ°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\varphi^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Определения тригонометрических функций острого угла

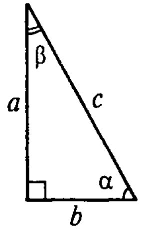


Рис. 98

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

Синус острого угла — это отношение противолежащего катета к гипотенузе (рис. 98).

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

Косинус острого угла — это отношение прилежащего катета к гипотенузе (рис. 98).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Тангенс острого угла – это отношение противолежащего катета к прилежащему катету (рис. 98).

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Котангенс острого угла – это отношение прилежащего катета к противолежащему катету (рис. 98).

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Котангенс – величина, обратная тангенсу.

Определения тригонометрических функций произвольного угла

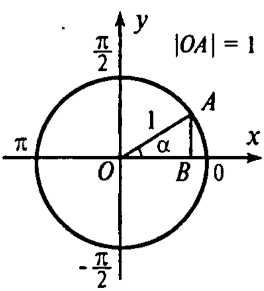


Рис. 99

Синус угла – это ордината точки единичной окружности:

$\sin\ \alpha = y_A$ ($\sin\ \alpha = AB$) (рис. 99).

Косинус угла – это абсцисса точки единичной окружности:

$\cos\ \alpha = x_A$ ($\cos\ \alpha = OB$) (рис. 99).

Тангенс угла – это отношение ординаты точки единичной окружности к абсциссе этой точки:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

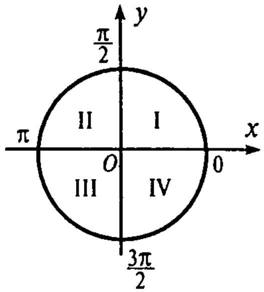
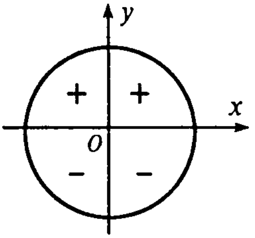
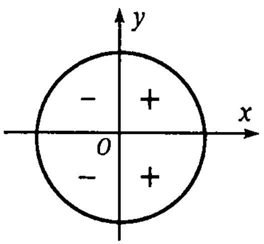


Рис. 100



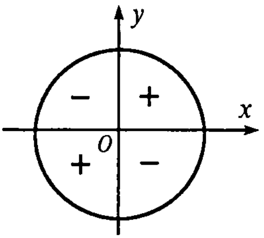
sin α

Рис. 101



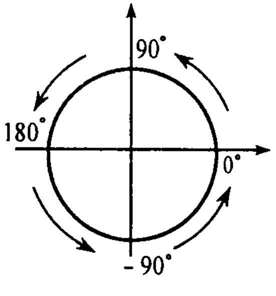
cos α

Рис. 102



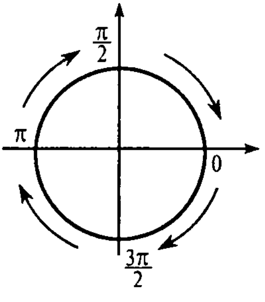
tg α; ctg α

Рис. 103



положительное направление измерения углов

Рис. 104



отрицательное направление измерения углов

Рис. 105

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Угол (arc) / Функция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

1132. Определите знаки тригонометрических функций:

$$\sin 200°;\quad \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{3};\quad \sin\frac{4\pi}{3};\quad \cos\frac{11\pi}{6};\quad \mathrm{tg}\,120°;$$

$$\cos 310°;\quad \cos\frac{7\pi}{6};\quad \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6};\quad \sin 240°;\quad \mathrm{ctg}\,330°.$$

Вычислите (1133–1137):

1133. $\sin 30° + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 30° - \mathrm{ctg}^2\,30°.$

1134. $\sin(-60°) + \cos 30° - \sin 90° + \mathrm{ctg}\,90°.$

1135. $\sin\frac{7\pi}{2} + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 7\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right).$

1136. $\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$

1137. $\mathrm{tg}\,0° - \cos 0° + \mathrm{tg}^2(-60°) + 3\,\mathrm{ctg}^2(-60°).$

§2. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют функцию любого угла привести к функции острого угла.

1. Знак в правой части формулы пишем тот, который имеет данная функция в данной четверти.

2. Если формула содержит $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$, то при переходе к функции острого угла изменяется название функций на кофункцию, α считает острым углом. Если формула содержит $(\pi \pm \alpha)$, то название функции не изменяется.

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ → Название функции изменяется

$\pi \pm \alpha$ → Название функции не изменяется

Примеры:

1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+5\alpha\right)=-\cos 5\alpha,$

в подобных случаях угол 5α считается острым (рис. 106).

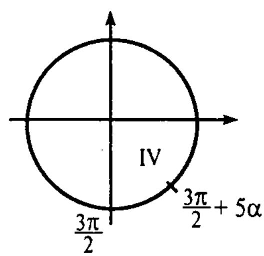


Рис. 106

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-5\alpha\right)=-\sin 5\alpha$

(рис. 107).

Частный случай формул приведения – тригонометрические функции дополнительных углов.

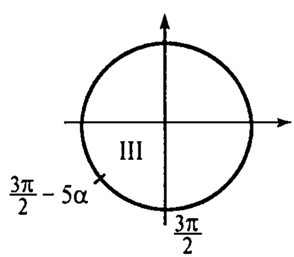


Рис. 107

Запомните!

Углы, сумма которых равна 90°, называются дополнительными.

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$; $\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$; $\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha)$; $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$; $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Углы могут дополнять друг друга до 180°.

В этом случае формулы приведения удобнее не запоминать, а применять их согласно общему правилу (пункты 1; 2).

§3. Основные тригонометрические тождества

Эти формулы выражают зависимость между тригонометрическими функциями одного угла (аргумента).

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};} \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};}$$

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};} \qquad \boxed{1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.}$$

Запомните!

При сдаче ЕГЭ запрещается пользоваться калькуляторами, таблицами и прочими справочными материалами, поэтому постарайтесь выучить правила применения формул приведения, периоды и знаки по четвертям тригонометрических функций, а также все другие правила и формулы. Наилучший способ запоминания – записывать формулы в процессе решения каждой задачи.

Вычислите (1138–1142):

1138. $\sin 870^\circ + \sqrt{3}\cos 210^\circ + \sin 450^\circ$.

Решение.

1) $\sin 870^\circ = \sin(870^\circ - 720^\circ) = \sin 150^\circ$ (так как период функции $y = \sin x$ равен 360°).

Далее применим формулу приведения $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 0{,}5$ (остался знак плюс, так как угол 150° находится во второй четверти, синус там положительный; название функции изменилось, так как формула содержит $(90^\circ + \alpha)$.

2) $\sqrt{3}\cos 210^\circ = \sqrt{3}\cos(180^\circ + 30^\circ) = -\sqrt{3}\cos 30^\circ = -\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= -1{,}5$.

3) $\sin 450^\circ = \sin(360^\circ + 90^\circ) = \sin 90^\circ = 1$.

4) $0{,}5 - 1{,}5 + 1 = 0$.

Ответ: 0.

1139. $3\,\mathrm{tg}^2 570^\circ - \sin(-210^\circ) - \sqrt{3}\cos 210^\circ - \mathrm{ctg}(-225^\circ)$.

1140. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(1{,}5\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(1{,}5\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}\left(3\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1141. $\mathrm{ctg}\ 225^\circ + \cos 360^\circ - \cos 180^\circ - \sin 150^\circ$.

1142. $\sin(-30^\circ) + \cos 240^\circ + \cos 180^\circ$.

Упростите выражение (1143–1153):

1143. $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{1-\sin^2\alpha}$.

1144. $(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2+(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2-2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

1145. $\dfrac{(1-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha-2}{1-\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha$.

1146. $\sin x\left(\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

1147. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

1148. $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\left(\sin\dfrac{\pi}{2}-\cos^2\alpha\right)}$.

1149. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

1150. $\dfrac{\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\alpha\right)^2-1}{1-\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

1151. $4\sin\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(\cos 0-\sin^2\alpha)$.

1152. $2\cos\alpha\cdot(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)$.

1153. $\sin\left(\dfrac{9\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(3{,}5\pi+\alpha)$.

1154. Найдите sin α; cos α; tg α, если ctg α = 3, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение.

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{3}$.

2) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{9}{10}$.

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

3) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sin α < 0. $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

1155. Найдите cos α; tg α, ctg α, если sin α = 0,6; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1156. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите значения остальных тригонометрических функций угла α.

§4. Периоды тригонометрических функций

Запомните!

$T = 2\pi$ – период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.
$T = \pi$ – период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.
Функции вида $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ имеют период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (2π делим на коэффициент при x).

Функции вида $y = A\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ имеют период $T = \frac{\pi}{\omega}$.

Более подробно эта информация представлена в главе 5, §8 настоящего пособия.

1157. Найдите период функции:

1) $y = 3\cos 2x;$ 2) $y=\sin\frac{x}{2};$

3) $y = 2\sin(x-1);$ 4) $y=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{3}\right);$

5) $y=\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right);$ 6) $y=3\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$

1158. Определите знак произведения:

1) $\sin 200^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 100^\circ;$
2) $\cos 230^\circ \cdot \sin 180^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ;$
3) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{11\pi}{6}\cdot\sin 1{,}2\pi;$
4) $\cos 1{,}6\pi \cdot \operatorname{tg}\pi \cdot \sin 0{,}6\pi;$
5) $2\sin 0{,}8\pi \cdot \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\cdot \operatorname{tg} 0{,}2\pi;$
6) $-2\sin \quad \cdot \cos 0{,}8\pi \cdot \operatorname{tg} 2{,}3\pi.$

§5. Формулы двойного, половинного и тройного аргументов

Формулы суммы и разности двух аргументов

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y;$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y;$

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}.$$

Формулы двойного и половинного аргументов

Каждая из формул этой группы является одновременно формулой двойного и формулой половинного аргументов.

Например: $\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha$ (т. е. $8\alpha : 2 = 4\alpha$).

$$2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} = \sin\frac{2\alpha}{3} \quad \left(\frac{\alpha}{3}\cdot 2 = \frac{2\alpha}{3}\right).$$

По такому принципу применяются все формулы этой группы.

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;}$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1;}$$

$$\boxed{1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2};} \qquad \boxed{1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2};}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x};} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.}$$

Формулы понижения степени функции:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};} \qquad \boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.}$$

Выражение синуса, косинуса, тангенса угла через тангенс половинного угла

Эти формулы являются универсальными тригонометрическими подстановками.

$$\boxed{\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},} \quad x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},} \quad x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.}$$

Формулы тройного аргумента

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Упростите выражение (1159–1170):

1159. $\dfrac{\sin 4\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$.

1160. $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

1161. $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(1{,}5\pi-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

1162. $\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{8}-\sin^2\dfrac{\alpha}{8}\right)\cdot\sin\dfrac{\alpha}{4}$.

1163. $\left[\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\left(\dfrac{\cos 0}{\sin\alpha}\right)^{-1}\right]\cdot\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Решение.

$$\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \cos\alpha.$$

Ответ: $\cos\alpha$.

1164. $\dfrac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$.

1165. $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

1166. $\dfrac{4\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

1167. $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

1168. $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{4}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{4}}$.

1169. $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\cos 2\alpha$.

1170. $\dfrac{8\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\sin 2\alpha}$.

Решение.

$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ (согласно формуле приведения).
Данная дробь примет вид

$$\frac{-8\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin^2\alpha}=\frac{-4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{-4\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-4.$$

Ответ: -4.

Найдите значение выражения (1171–1177):

1171. $\dfrac{6\sin^2\dfrac{\pi}{14}}{\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{14}\cdot\sin\dfrac{\pi}{7}}$.

Решение.

Согласно формуле приведения

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{14}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{14}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}=\frac{-\sin\dfrac{\pi}{14}}{\cos\dfrac{\pi}{4}}.$$

Данное выражение примет вид

$$\frac{-6\sin^2\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}}{\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-3\cdot 2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}}{\sin\frac{\pi}{7}}=*$$

В числителе дроби имеем синус двойного угла

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha\ \left(\frac{\pi}{14}\cdot 2=\frac{\pi}{7}\right)$.

$$*=\frac{-3\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=-3.$$

Ответ: -3.

1172.1. $\dfrac{10\cos^2\frac{\pi}{10}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{7\pi}{10}}$.

1172.2. $\dfrac{7\sin 84^\circ}{\sin 42^\circ\cdot\sin 48^\circ}$.

1173. $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{18}\cdot\cos\frac{11\pi}{18}}{10\cos^2\frac{\pi}{18}}$.

Решение.

1) $\cos\frac{11\pi}{18}=\cos\left(\frac{9\pi}{18}+\frac{2\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)=-\sin\frac{\pi}{9}$.

2) $\operatorname{ctg}\frac{17\pi}{18}=\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{\pi}{18}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}$.

3) Данное выражение примет вид $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{\pi}{9}}{10\cos^2\frac{\pi}{18}}=$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{\pi}{9}}{10\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos^2\frac{\pi}{18}} = \frac{\sin\frac{\pi}{9}}{5\cdot 2\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{\pi}{18}} = \frac{\sin\frac{\pi}{9}}{5\sin\frac{\pi}{9}} = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

П р и м е ч а н и е. Пример можно решать, переведя величины углов в градусную меру: $\frac{\pi}{18} = 10^\circ$.

1174. $\cos\alpha\cdot\cos(3\pi+\alpha)$, если $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

1175. $6\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha - 5$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1176. $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{7{,}5}}{11}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

1177. $11\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\cos(1{,}5\pi+\alpha)$, если $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{2}{11}}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Упростите выражение:

1178. $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Решение.

Применим формулы:

$1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$; $\sin\varphi = \cos(90^\circ-\varphi)$; $\cos\varphi = \sin(90^\circ-\varphi)$; $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$.

$$\frac{1+\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Вычислите (1179–1183):

1179.1. $\dfrac{5\sin 56^\circ}{\cos 28^\circ \cdot \cos 62^\circ}$. **1179.2.** $\dfrac{\cos 54^\circ\left(\sin^2 18^\circ - \cos^2 18^\circ\right)}{\sin 72^\circ}$.

1180.1. $\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{9}}{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{9}}$. **1180.2.** $\dfrac{\operatorname{tg} 35^\circ\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos 70^\circ\right)}{2\sin 70^\circ}$.

1181.1. $\dfrac{14\sin 84^\circ}{\sin 42^\circ \cdot \sin 48^\circ}$. **1181.2.** $\dfrac{\cos 0^\circ - \cos 80^\circ}{\sin 90^\circ + \cos 80^\circ}\cdot \operatorname{tg}^2 50^\circ$.

1182.1. $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{15}-\cos^2\frac{\pi}{15}}{2\sin\frac{11\pi}{30}}$. **1182.2.** $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}+\cos 26^\circ}{8\sin^2 77^\circ}$.

1183. $\dfrac{2\cos^2\alpha+\sin\frac{3\pi}{2}}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

Решение.

В числителе дроби $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

В знаменателе дроби $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, так как

$\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ — дополнительные углы,

$$\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha.$$

Числитель и знаменатель дроби равны $\cos 2\alpha$, значит, дробь равна единице.

Ответ: 1.

Найдите значение выражения (1184–1186):

1184. $\operatorname{tg} 28^\circ \cdot \operatorname{tg} 62^\circ - \cos^2 60^\circ$.

1185. $2\sin^2 30^\circ - \operatorname{ctg} 29^\circ \cdot \operatorname{ctg} 61^\circ$.

1186. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \sin^2 36^\circ}{1 + \cos^2 72^\circ}$.

§6. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение и обратная операция

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\boxed{\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)];}$$

$$\boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)];}$$

$$\boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)].}$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = \cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2};$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(45^\circ - x\right);$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(45^\circ - x\right);$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin\left(x \pm y\right)}{\cos x \cos y};$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin\left(y \pm x\right)}{\sin x \sin y};$$

$$a\sin x + b\cos y = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\left(x+\varphi\right), \text{ где } a^2 + b^2 \neq 0;$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$a\sin x + b\cos y = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\left(x-\alpha\right), \text{ где } a^2 + b^2 \neq 0;$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Найдите значение выражения (1187–1189):

1187. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\sin 3\alpha}\cdot\sin\dfrac{25\pi}{6}$, если $\sin(1{,}5\pi + \alpha) = 0{,}6$.

1188. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\cos\dfrac{13\pi}{3}$, если $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=0{,}7.$

1189. $\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 6\alpha}{\sin(3{,}5\pi+4\alpha)}$, если $\cos\alpha = 0{,}3.$

Упростите выражение (1190–1194):

1190. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$

Решение.

$$\frac{\sin(90^\circ-\alpha)+\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

1191. $\dfrac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha\cdot\cos 6\alpha}{\cos 4\alpha\cdot\sin(30^\circ-\alpha)}.$

1192. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right).$

Решение.

Преобразуем сумму двух последних членов в произведение $\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=2\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=-2\cdot\dfrac{1}{2}\sin\alpha=$ $=-\sin\alpha.$

$\sin\alpha-\sin\alpha=0.$

1193. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha).$

1194. $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}.$

§7. Определения и свойства обратных тригонометрических функций

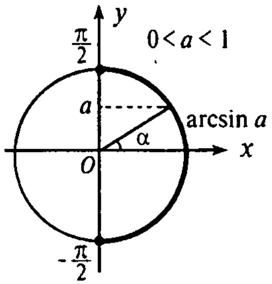


Рис. 108

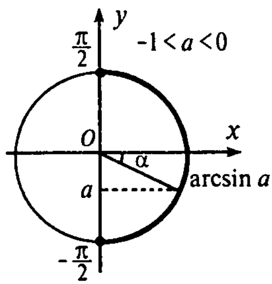


Рис. 109

1. arcsin a – это угол α, синус которого равен a, этот угол расположен в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 108, 109).

$$\boxed{\begin{gathered}\arcsin a = \alpha;\\ \sin\alpha = a,\ |a| \le 1;\\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].\end{gathered}}$$

Например:

$\arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ$, так как $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ (взаимно обратные функции).

$|x| \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$D(\arcsin x) = [-1; 1]$;

$E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1; 1]$.

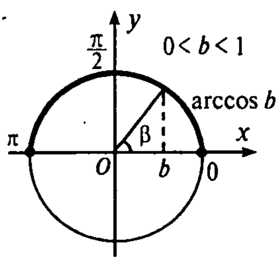


Рис. 110

2. arccos b – это угол, косинус которого равен b, этот угол расположен в интервале $[0; \pi]$ (рис. 110, 111).

$$\boxed{\begin{gathered}\arccos b = \beta;\\ \cos\beta = b,\ |b| \le 1;\\ \beta \in [0; \pi]\end{gathered}}$$

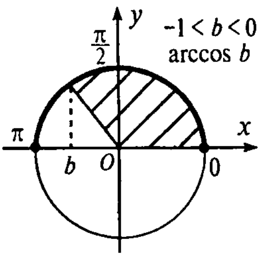


Рис. 111

Например:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30°, \text{так как } \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$, $|x| \le 1$,
$0 \le y \le \pi$.
$D(\arccos x) = [-1;\ 1]$;
$E(\arccos x) = [0;\ \pi]$;
$\cos(\arccos x) = x$, если $x \in [-1;\ 1]$;
$\text{arcos}\,(-x) = \pi - \arccos x$.

3. $\text{arctg}\, m = \alpha$, $m \in R$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

arctg m – это угол, тангенс которого равен m, этот угол расположен в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 112).

$$\boxed{\begin{gathered}\text{arctg}\, m = \alpha;\\ \text{tg}\,\alpha = m,\ m \in R;\\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\end{gathered}}$$

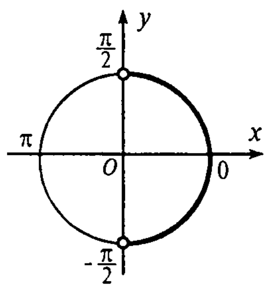


Рис. 112

Например:

$$\text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

$y = \text{arctg}\, x \Leftrightarrow x = \text{tg}\, y$; $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (рис. 112).

$D(\text{arctg}\, x) = R$;

$E(\text{arctg}\, x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}\, x$; $\text{tg}(\text{arctg}\, x) = x$.

4. arcctg $n = \beta$, ctg $\beta = n$, $n \in R$, $\beta \in (0; \pi)$.

arcctg n – это угол, котангенс которого равен n, этот угол расположен в интервале $(0; \pi)$ (рис. 113).

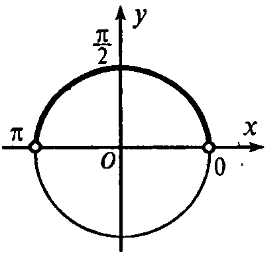


Рис. 113

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{arcctg} n = \beta;\\ \operatorname{ctg} \beta = n,\ n \in R;\\ \beta \in (0; \pi)\end{gathered}}$$

Например: $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.

$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y,\ 0 < y < \pi$.
$D(\operatorname{arcctg} x) = R$;
$E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$;
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

Вычислите (1195–1203):

1195. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\frac{1}{2}$.

1196. $-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1197. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\arcsin\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-1)$.

1198. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(-2))$.

Решение.
$\operatorname{arctg}(-2) = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2$.
Требуется найти $\operatorname{tg} 2\alpha$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

1199. $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)\cdot \operatorname{tg}30^\circ$. **1200.** $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

1201.1. $\arccos 0 + \arcsin 1$.

Решение.

1) $\arccos 0 = \beta \Rightarrow \cos\beta = 0;\ \beta \in [0;\pi] \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$.

2) $\arcsin 1 = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = 1, \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

3) $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

Ответ: π.

1201.2. $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 0 + 2\arcsin 0$.

1201.3. $3\arccos 1 - \operatorname{arctg} 0 + 2\arccos 0$.

§8. Решение тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений следует получить одинаковые углы и по возможности одинаковые функции у всех членов уравнения.

Простейшие тригонометрические уравнения

1. $\boxed{\sin x = a,\ |a| \le 1.}$

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$,

если $-1 < a < 0$ $x = (-1)^{n+1}\arcsin|a| + \pi n,\ n \in Z$.

Частные случаи.

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z$.

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2. $\boxed{\cos x = b,\ |b| \le 1.}$

$x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in Z,$
если $-1 < b < 0 \Rightarrow x = \pm(\pi - \arccos|b|) + 2\pi n,\ n \in Z.$

Частные случаи.

$\cos x = 0 \Rightarrow\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos x = 1 \Rightarrow\ x = 2\pi n,\ n \in Z.$
$\cos x = -1 \Rightarrow x = n(2\pi + 1),\ n \in Z.$

3. $\boxed{\operatorname{tg} x = m,\ m \in R,}$ $x = \operatorname{arctg} m + \pi n,\ n \in Z.$

4. $\boxed{\operatorname{ctg} x = k,\ k \in R,}$ $x = \operatorname{arcctg} k + \pi n,\ n \in Z.$

Методы решения тригонометрических уравнений

В левой части уравнения получить произведение путем различных тождественных преобразований, в правой — ноль. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

$$\boxed{a \cdot b = 0}$$

$$\boxed{a = 0} \qquad \boxed{b = 0}$$

Данное уравнение распадается на два (или более, если сомножителей было более двух) уравнения. В результате записывают совокупность всех полученных решений.

Решите уравнение (1202–1204):

1202.1. $\sin 2x - \cos x = 0.$

1202.2. $5 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0.$

1203.1. $6 \cos^2 x - 5 \cos x - 1 = 0.$

1203.2. $\sin^2 x + 4 \sin x - 5 = 0.$

1204. $\sin x + \cos\frac{x}{2} = 0.$

Решение.

Получим одинаковые углы у всех членов уравнения:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0.$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + 1\right) = 0.$$

$\cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$	$\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n;$	$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n;$
$x_1 = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$	$x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $\pi + 2\pi n;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$

2. *Введение новой переменной.*

Этим способом решаются уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$, или $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ (или относительно $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$).

Вводим новую переменную $\sin x = t$, $|t| \le 1$ (или $\cos x = t$, $|t| \le 1$ и т. д.). Находим t, потом x.

1205. Решите уравнение $\sin x + \cos 2x = 0$.

Применим формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

$\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0$, пусть $\sin x = t$, $|t| \le 1$.

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_n = -\frac{1}{2}.$$

1) $\sin x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2) $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

3. *Однородные тригонометрические уравнения.*

I степени

$a \sin x + b \cos = 0$ (: $\cos x \neq 0$).

$a \operatorname{tg} x + b = 0.$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right| + \pi n, \quad n \in Z.$$

II степени

$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + d \cos^2 x = c$ (: $\cos^2 x \neq 0$).

$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + d = c\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)$,

вводим новую переменную $\operatorname{tg} x = m$, получим квадратное уравнение, находим m, потом x.

Запомните!

Только однородные тригонометрические уравнения можно делить на $\sin x$ или $\cos x$ (синус и косинус одного угла не могут быть одновременно равны нулю).

1206. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin 2x = 3 \cos^2 x$.

Решение.

$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ (: $\cos^2 x \neq 0$).

$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = m$,

$m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow m_1 = -3$; $m_2 = 1$.

1) $\operatorname{tg} x = -3 \Rightarrow -\operatorname{arcctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$.

2) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $-\operatorname{arcctg} 3 + \pi n$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$

Решите уравнение (1207–1216):

1207.1. $2 \sin x + \sqrt{3} = 0.$

1207.2. $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0.$

1208.1. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1208.2. $\sin \frac{\pi(4x+8)}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, найдите наибольший отрицательный корень.

1208.3. $\cos\frac{\pi(2x+4)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, найдите наименьший положительный корень и умножьте его на 6.

1209. $2\cos^2 x = \sin^2 x - 1$.

1210.1. $3\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

1210.2. $\sin^3 x + \sin x = 0$.

1211.1. $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

1211.2. $\cos^2 x + 9\cos x - 10 = 0$.

1212. $2\cos x + 1 = 0$.

Решение.

$$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

1213. $\sin\frac{5\pi}{2}+2\cos x-\sin^2 x=0$.

1214. $\sin^2 x=\frac{3}{4}$.

Решение.

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z.$

2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x_2=(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z.$

Объединив два решения, получим $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

1215*. $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|.$

Решение.

1) $\cos x \ge 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right].$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=\cos x.$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x\right]=0.$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0.$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=0.$$

$-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0,\quad x_1=\pi n,$ так как

$x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\quad x_1=2\pi n,\quad n\in Z.$

2) $\cos x<0,\quad x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right).$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x+\cos x=0,$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=0.$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \Rightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0,$ так как

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ $\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ — дополнительные углы.

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n.$ Так как

$x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),\quad x_2=\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=2\pi n,\quad x_2=\frac{5\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1216. $\log_{\sin x}\left(\sqrt{3}\cos x+2\sin x\right)=1$ (C1).

Решение.

ОДЗ: $\sin x>0 \Rightarrow x\in(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$; $\sin x\neq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in Z.$

Учитывая, что $\log_a a=1 \Rightarrow 1=\log_{\sin x}\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos x+2\sin x=\sin x.$

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=0\quad(:\cos x\neq 0)$ — это однородное уравнение первой степени.

$\operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0,\quad \operatorname{tg}x=-\sqrt{3}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad n\in Z.$

По ОДЗ $x\in(2\pi n;\ \pi+2\pi n)\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$

Найдите все значения x, при каждом из которых данные выражения принимают одинаковые значения (1217; 1218):

1217. $\dfrac{\sqrt{3}\cos^4\frac{x}{4}-\sqrt{3}\sin^4\frac{x}{4}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ и $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$

1218. $\dfrac{2}{\sin 2x}$ и $4\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg} x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C1).

Решение.

$$\frac{2}{\sin 2x}=4\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg} x-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}\cdot n,\ \ n\in Z.$$

$$\frac{2}{2\sin x\cdot\cos x}=4\sin^2 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sqrt{3}}{3}(\cdot 2\sin x\cos x\neq 0).$$

$$2=8\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 2x-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x-2=0.$$

Пусть $\sin 2x=t$, $|t|\leq 1$.

$$2t^2-\frac{\sqrt{3}}{3}t-2=0\Rightarrow t_1=-\frac{\sqrt{3}}{2};\quad t_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}>1.$$

$$\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}n,\quad n\in Z.$

Найдите наименьший корень уравнения на промежутке (1219; 1220.1):

1219. $\operatorname{tg}(\pi x)\cos(3\pi x)+\sin(3\pi x)=\sin(4\pi x)$, $x\in(1;3)$.

Решение.

ОДЗ: $\cos\pi x\neq 0\Rightarrow\ \pi x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\quad x\neq\dfrac{1}{2}+n.$

Пусть $\pi x=\alpha$, тогда уравнение примет вид

$\operatorname{tg} \alpha \cos 3\alpha + \sin 3\alpha = \sin 4\alpha.$

$\dfrac{\sin\alpha\cos 3\alpha + \cos\alpha\sin 3\alpha}{\cos\alpha} = \sin 4\alpha,\ \cos\alpha \neq 0$ (согласно ОДЗ).

$\sin 4\alpha - \sin 4\alpha \cdot \cos\alpha = 0.$

$\sin 4\alpha(1 - \cos\alpha) = 0.$

$\sin 4\alpha = 0,$

т. е. $\sin 4\pi x = 0.$

$4\pi x = \pi n.$

$x_1 = \dfrac{n}{4},\quad n \in Z.$

$1 - \cos \pi x = 0,$

$\cos \pi x = 1.$

$\pi x = 2\pi n,$

$x_2 = 2n,\ n \in Z.$

Найдем корни, принадлежащие промежутку (1; 3).

1) $x_2 = 2$ при $n = 1$, больше корней $x_2 \in (1; 3)$ нет.

2) При $n \geq 4$ корней $x_1 \in (1; 3)$ нет.

$n = 5,\ x_1 = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ — это меньший корень данного уравнения на промежутке (1; 3).

Ответ: 1,25.

1220.1. $\cos(9\pi x) - \operatorname{tg}(\pi x) \cdot \sin(9\pi x) = \cos(10\pi x),\ n \in (0; 2].$

1220.2. Решите уравнение $5\sin^2 x + 1{,}5\sin 2x = 4.$

§9. Задания для подготовки к ЕГЭ (С1)

Решите уравнение (1221–1224):

1221. $\dfrac{2\sin^2 x - \left(4 - \sqrt{3}\right)\sin x - 2\sqrt{3}}{\sqrt{-7\cos x}} = 0.$

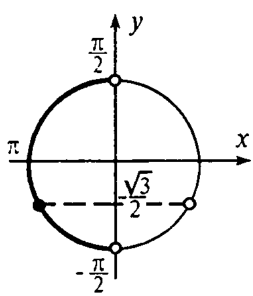


Рис. 114

Решение.

1) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - \left(4 - \sqrt{3}\right)\sin x - 2\sqrt{3}, \\ -\cos x > 0. \end{cases}$$

Из неравенства следует $\cos x < 0$, значит, x находится в левой полуплоскости единичной окружности, причем $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ (ОДЗ).

2) $2\sin^2 x - \left(4-\sqrt{3}\right)\sin x - 2\sqrt{3}$.

Введем новую переменную $\sin x = t$, $t \in (-1;\ 1)$.

$2t^2 - \left(4-\sqrt{3}\right)t - 2\sqrt{3} = 0$.

$$t = \frac{4-\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2 + 16\sqrt{3}}}{4} = \frac{4-\sqrt{3} \pm \left(4+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

$$t_1 = \frac{4-\sqrt{3}+4+\sqrt{3}}{4} = 2 \notin (-1; 1);$$

$$t_2 = \frac{4-\sqrt{3}-4-\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ — этому значению синуса соответствуют две точки единичной окружности (рис. 114).

$x_1 = -\frac{\pi}{3} \notin$ ОДЗ; $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in Z$.

1222.1. $\sqrt{\sin x \cdot \cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 2x} + 1\right) = 0$.

1222.2. $|4^x - 2| = 4^{x+1} - 3$.

1223.1. $\dfrac{6\sin^2 x + 7\sin x - 5}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1} = 0$.

1223.2. $\sqrt{12\cos x}\left(\sin^2 x - |\sin x| - 2\right) = 0$.

Решение.

1) Найдем значения переменной x, при которых уравнение имеет смысл.
$\cos x \geq 0 \Rightarrow x$ находится в правой полуплоскости единичной окружности (ОДЗ).

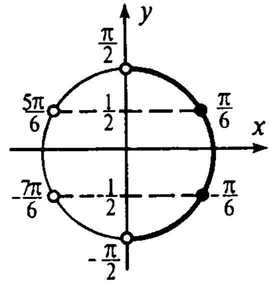


Рис. 115

2) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

3) $2\sin^2 x - 5|\sin x| - 3 = 0.$
$\sin x = t, \quad t \in (-1; 1).$
а) $2t^2 - 5t - 3 = 0$, пусть $1 \geq t \geq 0$, тогда $|t| = t.$

$2t^2 - 5t - 3 = 0, \; t_1 = -\frac{1}{2}; \quad t_2 = 3 \notin [-1; 1].$

б) $-1 \leq t \leq 0, \; |t| = -t$ (согласно определению модуля отрицательного числа).
Уравнение имеет вид $2t^2 + 5t - 3 = 0.$

$t_1 = -3 \notin [-1; 1], \quad t_2 = \frac{1}{2}.$

4) $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$. Найденным значениям синуса соответствуют четыре точки единичной окружности (рис. 115):

$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} \notin$ ОДЗ; $\quad x_3 = -\frac{\pi}{6}; \quad x_4 = \frac{7\pi}{6} \notin$ ОДЗ.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad n \in Z.$

1224. $(4\sin^2 x + 12\sin x + 5) \cdot \sqrt{-11\cos x} = 0.$

Найдите значение выражения (1225–1230):

1225. $$\frac{2\cos^2 \frac{\pi}{10}}{\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{10} \sin\frac{\pi}{5}}.$$

Решение.

Согласно формуле приведения

$$\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{10}=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{10}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}=\frac{\cos\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}.$$

Данное выражение примет вид

$$\frac{2\cos^2\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{2\cos\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{5}}=*$$ В числителе дроби

имеем синус двойного угла $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

$$\frac{\pi}{10}\cdot 2=\frac{\pi}{5}.$$

$$*=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=1.$$

Ответ: 1.

1226. $15\operatorname{ctg}x\cdot\sin(\pi-x)$, если $\cos x=0{,}8$.

1227. $\dfrac{6\cos^2\frac{\pi}{11}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{11}\cdot\sin\frac{13\pi}{11}}.$

1228. $\dfrac{13\cos^2 10^\circ}{\operatorname{ctg}170^\circ\sin 20^\circ}.$

1229. $\log_3\left(4\sin\frac{\pi}{12}\right)+\log_3\cos\frac{\pi}{6}+\log_3\left(2\sin\frac{5\pi}{12}\right).$

Решение.

Сумму логарифмов заменяем логарифмом произведения, учитывая, что все слагаемые — логарифмы с одинаковыми основаниями. Для простоты вычислений радианную меру углов переведем в градусную: $\frac{\pi}{12}=15^\circ$; $\frac{5\pi}{12}=75^\circ$; $\sin 570^\circ=\cos 15^\circ$.

Данное выражение примет вид:

$$\log_3(4\sin 15^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot 2\cos 15^\circ) = \log_3(4\sin 30^\circ \cos 30^\circ) =$$

$$= \log_3(2\sin 60^\circ) = \log_3\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

1230. $\log_2\left(\cos\frac{\pi}{16} - \sin\frac{\pi}{6}\right) + \log_2 \sin\frac{\pi}{8} + \log_2\left(\cos\frac{\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{16}\right)$.

Решение.

$$\left(\cos\frac{\pi}{16} - \sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{16}\right) = \cos^2\frac{\pi}{16} - \sin^2\frac{\pi}{16} =$$

$$= \cos\frac{2\pi}{16} = \cos\frac{\pi}{8}.$$

Сумму логарифмов с одинаковыми основаниями заменяем логарифмом произведения, получим

$$\log_2\left(\left(\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\right)\cdot\frac{2}{2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \log_2\left(2^{-2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 2^{-1{,}5} = -1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.

Решите систему уравнений (1231–1237, С1):

1231. $\begin{cases} 81^{\operatorname{tg} x} - 8\cdot 9^{\operatorname{tg} x} = 9, \\ \sqrt{y-2} - 6\cos x = 0. \end{cases}$

1232. $\begin{cases} \sqrt{x^2+4x} = \sqrt{14-x}, \\ 2\sin y = x. \end{cases}$

1233. $\begin{cases} x^2 - 3x + \sqrt{x^2-3x+5} = 7, \\ \sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x^2 - 3x + 5 > 0 \ \forall x \in R$, так как $D < 0$.

Решим первое уравнение системы.

Введем новую переменную $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t > 0$, тогда $x^2 - 3x + 5 = t^2$. К двум частям уравнения прибавим 5.

$t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow t_1 = -4 \notin (0; \infty)$; $t_2 = 3$.

$x^2 - 3x + 5 = 9 \Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

Число 4 не удовлетворяет второму уравнению системы, так как $|\sin y| \le 1$.

Решим второе уравнение $\sqrt{2}\sin y = -1$, $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = -1$, $y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

1234.1. $\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$

1234.2. $\begin{cases} (0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$

1235.1. $\begin{cases} 2\log_4 x + 2\log_x 4 = 5, \\ \cos\frac{\pi}{2} + 2\cos y = x. \end{cases}$

1235.2. $\begin{cases} \sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1, \\ -3\cos y = x. \end{cases}$

1236. $\begin{cases} 2\sin^2 y + 3\sin y - 2 = 0, \\ \sqrt{x^2 - x} + 4\cos y = 0. \end{cases}$

1237.1. $\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} + 2\sin x = 0. \end{cases}$

1237.2. $\begin{cases} 3^x + 2\sin y = 0, \\ 4\cos^2 y - 4\cos y - 3 = 0. \end{cases}$

Найдите значение выражения (1238; 1239):

1238. $\log_4 \cos\frac{\pi}{8} + \log_4 \cos\frac{3\pi}{8} + \log_4 \cos\frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$\log_4\left(\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}\right) + \log_4\frac{1}{\sqrt{2}} = *$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}.$$

$$* = \log_4\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\log_2 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\log_2 2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1.$$

Ответ: -1.

1239. $4\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$, если $\sin\alpha = -0{,}3$.

Решите уравнение (1240–1250, С1):

1240. $(4\sin^2 x - 4\sin x - 3)\cdot\log_3(\cos x) = 0$.

1241. $\left(2\sin^2 x+7\sin x+3\right)\sqrt{2\cos x}=0.$

1242. $\left|\log_{\sqrt{3}}x-2\right|-\left|\log_3 x-2\right|=2.$

1243. $\dfrac{\sin 2x\,\mathrm{tg}\,x-1}{\sqrt{-5\cos x}}=0.$

1244. $3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\sin 2x.$

1245. $\dfrac{2\cos^2 x+\left(8-\sqrt{3}\right)\cos x-4\sqrt{3}}{\sqrt{-2\sin x}}=0.$

1246. $\sqrt{-7\cos x}\left(2\sin^2 x-\left(6-\sqrt{3}\right)\sin x-3\sqrt{3}\right)=0.$

1247. $\left(6\sin^2 x-11\sin x+4\right)\sqrt{-4\cos x}=0.$

1248. $\left(4\sin^2 x-4\sin x-3\right)\sqrt{-5\cos x}=0.$

1249. $\dfrac{\sin 2x+5\cos^2 x}{\cos x}=0.$

1250. $\left(3^{3\cos^2 x-10\cos x+3}-1\right)\sqrt{-5\sin x}=0.$

Найдите множество значений функции (1251–1254):

1251.1. $y=2\sin\dfrac{x}{2}-3.$ **1251.2.** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2.$

1252. $y=2\arcsin\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}.$

1253. $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1.$

Решение.

Множество значений функции $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ — интервал $[-1;\ 1]$, т. е. $-1\le\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1$.

Умножим все части тройного неравенства на 2:

$-2\le 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 2.$

Ко всем частям неравенства прибавим число 1.

$-1\le 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1\le 3 \Rightarrow x\in[-1;3]$

Ответ: $[-1;\ 3]$.

1254.1. $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-2.$ **1254.2.** $y=3\cos\dfrac{x}{3}+1.$

Решите уравнение (1255—1258, С1):

1255. $\log_3\cos x+\log_3(2\cos x+1)=1.$

1256. $\log_7\sin x+\log_7(6\sin x+1)=0.$

1257. $(3\cos^2 x-\sin^2 x+3\cos x)\sqrt{-\operatorname{tg} x}=0.$

1258. $\dfrac{2\cos^2 x+\sin x-1}{\sqrt{-2\cos x}}=0.$

Найдите множество значений функции (1259—1266):

1259. $y=2-\cos^2 6x.$

Решение.

$0\le\cos^2 6x\le 1$. Умножим тройное неравенство на число -1. Напомним, что при умножении на отрицательное число смысл неравенства изменяется (на противоположный).

$-1\le-\cos^2 6x\le 0$. Ко всем частям неравенства прибавим число 2, получим $1\le 2-\cos^2 6x\le 2$.

Ответ: $[1;\ 2]$.

1260. $y=3-2\sin^2\frac{x}{2}$.

1261. $y=\frac{\pi}{6}-3\operatorname{arcctg}2x$.

1262. $y=2\arccos\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$.

Решение.

Множеством значений функции $y=\arccos\frac{x}{2}$ является интервал $[0;\ \pi]$ $\Rightarrow$ $2\arccos\frac{x}{2}\in[0;2\pi]$, т. е. $0\le 2\arccos\frac{x}{2}\le 2\pi\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{6}\le 2\arccos\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\le\frac{13\pi}{6}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6};\frac{13\pi}{6}\right]$.

1263. $y=-3\operatorname{arctg}3x+\frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}3x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{3\pi}{2}<-3\operatorname{arctg}3x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{3}-3\operatorname{arctg}3x<\frac{11\pi}{6}.$$

Ответ: $\left(-\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right)$.

1264. $y=\frac{\pi}{4}-2\arccos\frac{x}{5}$.

1265. $y=-\pi+\operatorname{arctg}2x$.

1266. $y=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}x$.

Укажите наименьшее целое число, принадлежащее множеству значений функции (1267–1276):

1267. $y = 5\cos 7x + \sqrt{6}.$

1268. $y = 2 + \log_{\frac{1}{16}}\left(2 - x^2\right).$

1269. $y = \frac{1}{2}\sin 0{,}2x + 0{,}6.$

1270. $y = \operatorname{ctg}^2 3x + 7.$

1271. $y = 1 + (0{,}3)^x.$

1272. $y = -1{,}8 + \frac{\sin 3x}{5}.$

1273. $y = -0{,}9 + \log_5\left(x^2 + 5\right).$

1274. $y = 2\arccos\frac{x}{2}.$

1275. $y = \frac{\pi}{3} + 2\arcsin 5x.$

1276. $y = -\frac{\pi}{4} + 4\operatorname{arcctg} 5x.$

Найдите область определения функции (1277–1281):

1277. $y = \frac{5}{\cos\frac{x}{2}}.$

1278. $y = \frac{8x + 2}{1 - \sin x}.$

1279. $y = \frac{x - 8}{\operatorname{tg} x}.$

1280. $y = \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 2x.$

1281. $y = \operatorname{tg}^2 3x \cdot \cos^2 3x.$

Решите уравнение (1282–1288):

1282. $4\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x.$

Решение.

Применим формулу

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right).$$

Уравнение примет вид

$2\cos x \cdot 2\cos 3x - \cos 3x = 0.$

$\cos x + (\cos x + \cos 3x) = 0 \Rightarrow \cos x + 2\cos 2x \cdot \cos x = 0.$

$\cos x + (1 + 2\cos 2x) = 0.$

$\cos x = 0,$

$x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

$1 + 2\cos 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2},$

$2x = \pm\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$

$x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z.$

1283. $\log_8 (x + 2)^3 \cdot \log_{2x} 2 = 1.$

1284. $\sqrt{-2\sin 2x}\left(2\cos^2 x - 13\cos x - 7\right) = 0.$

1285. $3\left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x\right) + 4\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x\right) = 2\sin\dfrac{3\pi}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} \cdot n.$

Отметим, что $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2$, так как $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$.

$3(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 - 2) + 4(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = -2.$

Пусть $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$.

$3m^2 - 6 + 4m + 2 = 0 \Rightarrow 3m^2 + 4m - 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -2;$ $m_2 = \dfrac{2}{3}.$

1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2 \Rightarrow \dfrac{1 \cdot 2}{2\sin x \cdot \cos x} = -2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sin 2x} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2x = -1, 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$

2) $\dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x \neq \dfrac{3}{2}$, так как $|\sin 2x| \leq 1.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$

1286. $\dfrac{2\sin^2 x-9\sin x-5}{\sqrt{-3\cos x}}=0.$

1287. $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{1}{4}.$

Решение.

Применим формулу $m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$.

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=\Bigl(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}\Bigr)(\sin^4 x+$$

$$+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x)=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin^2 2x=1\Rightarrow \sin 2x=\pm 1.$$

1) $\sin 2x=-1.$

$2x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

$x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z.$

2) $\sin 2x=1.$

$2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

$x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z.$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z.$

1288. $1+\sin 2x=\cos x-\sin x$ и найдите количество корней, принадлежащих интервалу $[0;\ 4\pi]$.

Решение.

К двум частям уравнения прибавим 1.

$2=(\cos x-\sin x)+(1-2\sin x\cos x).$

$\begin{cases}(\cos x-\sin x)^2+(\cos x-\sin x)-2=0.\\ |t|\le 1.\end{cases}$

Пусть $\cos x-\sin x=t\Rightarrow t^2+t-2=0\Rightarrow t_1=-2\notin[-1;\ 1]$.

$t_2=1\Rightarrow \cos x-\sin x=1\ (:\sqrt{2})\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x=$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$
$x_2 = 2\pi n,\ n \in Z.$

Найдем корни, принадлежащие интервалу $[0; 4\pi]$.

1) $n = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{2} \notin [0; 4\pi];\ x_0 = 0 \in [0; 4\pi];$

2) $n = -1 \Rightarrow x_1 < 0 \notin [0; 4\pi];\ x_2 = -2\pi \notin [0; 4\pi];$

3) $n = 1 \Rightarrow x_1 = -2\pi \in [0; 4\pi];\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2} \in [0; 4\pi];$

4) $n = 2 \Rightarrow x_1 = 4\pi \in [0; 4\pi];\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 4\pi \in [0; 4\pi].$

Ответ: 5.

Найдите все значения x, при каждом из которых данные выражения принимают равные значения (1289–1291):

1289. $\operatorname{tg}^0 x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ и $2\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1290. $8\sin\frac{2x}{3}\sin\frac{x}{3} + 16$ и $16\cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{2x}{3}$.

Решение.

Для удобства записи введем обозначения

$\frac{x}{3} = \alpha \Rightarrow \frac{2x}{3} = 2\alpha.$

$8\sin 2\alpha \sin\alpha + 16 = 16\cos^2\alpha - \sin^2 2\alpha.$

Применим формулы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ и $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

$16\sin^2\alpha\cos\alpha + 16(1 - \cos^2\alpha) + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0.$

Вынесем за скобки общий множитель $4\sin^2\alpha$.

$4\sin^2\alpha(4\cos\alpha + 4 + \cos^2\alpha) = 0.$

1) $\sin\alpha = 0$, т. е. $\sin\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = \pi n \Rightarrow x_1 = 3\pi n,\ n \in Z.$

2) $\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 4 = 0$. Пусть $\cos x = t,\ |t| \le 1.$

$t^2 + 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t + 2)^2 = 0 \Rightarrow t = -2$, не удовлетворяет условию $|t| \le 1$.

Ответ: $3\pi n$, $n \in Z$.

1291. $\sin^2 x + 9$ и $9\cos^2\frac{x}{2} - 6\sin x\sin\frac{x}{2}$.

Решите систему уравнений (1292–1295):

1292. $\begin{cases} 3^{y+1} = 2\cos x, \\ 3^{-y} = 4\cos x + 1. \end{cases}$

1293. $\begin{cases} 3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x, \\ \sin y = x + 1. \end{cases}$

1294. $\begin{cases} 4^{y-2} - 17\cdot 2^{y-4} + 1 = 0, \\ \sin x = y + 1. \end{cases}$

1295. $\begin{cases} 2\log_3^2 y + \log_3 y = 1, \\ \sin x = y + \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

1296. Найдите область определения функции:

$$y = \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{1 - 2\sin^2 7x - \sin 3x}.$$

Решение.

$\operatorname{ctg} x$ существует, если $x \ne \pi n$.

$1 - 2\sin^2 7x - \sin 3x \ne 0$.

Применим формулу $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$.

Решим уравнение

$1 - (1 - \cos 14x) - \sin 3x = 0 \Rightarrow \cos 14x - \sin 3x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right) - \sin 3x = 0.$$

Применим формулу $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

Уравнение примет вид $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{11x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{17x}{2}\right) = 0$.

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{11x}{2}\right)=0.$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{17x}{2}\right)=0.$
$\frac{\pi}{4}-\frac{11x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n;$	$\frac{\pi}{4}-\frac{17x}{2}=\pi n;$
$x\neq-\frac{\pi}{22}-\frac{2\pi n}{11}.$	$x_2\neq\frac{\pi}{34}-\frac{2\pi n}{17}.$

Ответ: $x\neq\pi n;\ x\neq-\frac{\pi}{22}-\frac{2\pi n}{11};\ x\neq\frac{\pi}{34}-\frac{2\pi n}{17},\ n\in Z.$

Определите, какая из функций является четной (1297; 1298):

1297. 1) $y = 0{,}3^{2x}$, 2) $y = x^2 + x$,

3) $y = \lg x$, 4) $y = x^3 \sin x$.

1298. 1) $y = 3\cos x$, 2) $y = 3\sin x$,

3) $y = 2\cos(x + 3)$, 4) $y=\sin\frac{x}{3}$.

Определите, какая из функций является нечетной:

1299. 1) $y = \operatorname{tg}(x + 2)$, 2) $y = 2\operatorname{ctg} x$,

3) $y = \sin^2 x$, 4) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

5) $y = 3\sin x$, 6) $y = -\cos x$,

7) $y = -2\sin(x + 4)$, 8) $y = \log_2 x$.

1300.1. Для четной функции $f(x)$ и нечетной функции $g(x)$ на множестве действительных чисел выполняется равенство $f(x)+g(x)=2\sin^2 x+\sqrt{3}\cdot\sin x$. Найдите число корней уравнения $f(x) = g(x)$ при $x \in [-2; 3]$.

Решение.

Если сумма четной и нечетной функций равна $f(x)$, то уравнение четной функции находят по формуле

$\dfrac{f_1(x)+f_2(-x)}{2}$, т. е. в данном случае $f(x) = 2\sin^2 x$;

нечетную функцию – по формуле $\dfrac{f_1(x)-f_2(-x)}{2}$, значит, $g(x)=\sqrt{3}\sin x$.

Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет вид

$$2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x \Rightarrow \sin\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow$$

$\sin x = 0,$	$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$
$x_1 = \pi n,\ n \in Z.$	$x_2=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

Найдем число корней на промежутке $[-2; 3]$:

1) $n = 0$.

$x_1=0$; $x_2=\dfrac{\pi}{3}$, оба корня принадлежат промежутку $[-2; 3]$;

2) $n = 1$.

$x_1 = \pi \notin [-2; 3]$; $x_2=-\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{2\pi}{3}\in[-2;3]$;

3) $n = -1 \Rightarrow x_1 = -\pi \notin [-2; 3]$; $x_2=-\dfrac{\pi}{3}-\pi=-\dfrac{4\pi}{3}\notin[-2;3]$.

Ответ: 3.

Запомните!

Если функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x)$ – четная функция, $f_2(x)$ – нечетная функция, то функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ находят по формулам:

четная функция: $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$;

нечетная функция: $f_2(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

1300.2. Для нечетной функции $f(x)$ и четной $g(x)$ на множестве действительных чисел выполняется равенство $f(x) + g(x) = \sqrt{2}\cos x + 2\sin 2x$. Найдите число корней уравнения $f(x) = g(x)$ на промежутке $[-2; 3]$.

1301.1. Найдите значение выражения $\frac{6x_0}{\pi} + 2y_0$, если

$(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} y - 2\sin x = 2, \\ 3y - 2\sin x = 4, \end{cases}$

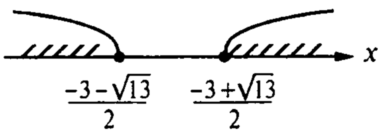
и $x_0 \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

1301.2. Найдите значение выражения $\sin y$:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sin y = x. \end{cases}$$

Решение.

Система имеет смысл, если: $x^2 + 3x - 1 \geq 0 \Rightarrow$



$$\Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right) \text{(ОДЗ)}.$$

Введем новую переменную

$\sqrt{x^2 + 3x - 1} = t,\ t > 0,$

тогда $x^2 + 3x - 1 = t^2$.

Первое уравнение системы примет вид

$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -2 \notin (0; \infty);\ t_2 = 3.$

$x^2 + 3x - 1 = 9 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = -5;\ x_2 = 2.$

Решим второе уравнение системы.

1) $2\sin y = 2 \Rightarrow \sin y = 1$.

2) $2\sin y = -5 \Rightarrow \sin y = -2{,}5 \notin [-1; 1]$.

Ответ: 1.

Решите уравнение (1302.1–1304):

1302.1. $\dfrac{\sin^2 x+\sin x-3\cos^2 x}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}}=0.$

1302.2. $\dfrac{\sin 2x-2\sin x-\cos x+1}{\sqrt{-2\operatorname{tg} x}}=0.$

1303.1. $\dfrac{0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}-64^{-1}}{\sqrt{x^2-4}}=0.$

1303.2. $\dfrac{\log_2(x^2+3)-\log_2(4x)}{\sqrt{x^2-1}}=0.$

1304. $\dfrac{-\sin\dfrac{x}{2}+\cos x-1}{\sqrt{-2\sin x}}=0.$

Найдите значение выражения cos *x* в системе уравнений (1305; 1306):

1305. $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}, \\ 2\cos x+8\sin y=3. \end{cases}$ **1306.** $\begin{cases} x+y=\dfrac{3\pi}{2}, \\ 8\sin x-2\cos y=7. \end{cases}$

1307. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1-2\sin^4\dfrac{y}{2}-2\cos^4\dfrac{y}{2}}+x^2-8\pi x+16\pi^2=0, \\ \pi<\log_2 3\cdot\log_3 2^{x+y}<2\pi. \end{cases}$$

Решение.

1) Преобразуем выражение $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha)^2+$ $+(\cos^2\alpha)^2+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+$

$+ \cos^2\alpha)^2 - \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$. Применим полученную формулу в решении данного примера.

2) Решим уравнение системы:

$$\sqrt{1-2\left(\sin^4\frac{y}{2}+\cos^4\frac{y}{2}\right)}+(x-4\pi)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{1-2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 y\right)}+(x-4\pi)^2=0\Rightarrow\sqrt{-\cos^2 y}=(x-4\pi)^2.$$

Корень четной степени имеет смысл лишь в том случае, если подкоренное выражение неотрицательно. Значит,

$\cos y = 0 \Rightarrow x - 4\pi = 0 \Rightarrow x = 4\pi$.

3) Решим неравенство, входящее в систему:

$$\pi<\frac{1}{\log_3 2}\cdot(x+y)\cdot\log_3 2<2\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y<2\pi,\\x+y>\pi;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\pi+y<2\pi,\\4\pi+y>\pi;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\in(-3\pi;-2\pi),\\\cos y=0;\end{cases}\Rightarrow y=-\frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: $\begin{cases}x=4\pi,\\y=-\dfrac{5\pi}{2}.\end{cases}$

1308. Найдите значение выражения $\sin x$, удовлетворяющее

системе $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2},\\8\sin x-3\cos y=4.\end{cases}$

Найдите все значения x, при каждом из которых выполняется неравенство (если таких значений x более одного, то в ответе запишите наименьшее значение) (1309–1311):

1309. $\left(\cos\frac{\pi x}{8}-\sin\frac{\pi x}{8}\right)^2\geq 6+4x+x^2.$

1310. $\left(\cos\frac{3\pi x}{4}-\sin\frac{3\pi x}{4}\right)^2 \ge 3-2x+x^2$.

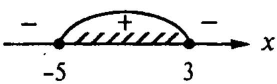
1311. $4\sin\frac{3\pi x}{10} \le -29+10x-x^2$.

1312. Найдите количество целых значений x, удовлетворяющих условиям $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}+\sqrt{3}>0$; $15-2x-x^2\ge 0$.

Решение.

ОДЗ: $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}$ имеет смысл, если $\cos\frac{\pi x}{6}\ne 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{6}\ne\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x\ne 3+6n$, $n\in Z$.

Отметим, что $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}+\sqrt{3}>0$ при всех x, кроме $x=3+6n$, $n\in Z$. $x^2+2x-15=0$.

$\begin{cases}15-2x-x^2\ge 0,\\ x\ne 3+6n,\ n\in Z.\end{cases}$  $\Rightarrow x\in[-5;\ 3]$.

Интервал содержит целые числа: -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3, т. е. 9 целых чисел. Исключаем числа вида $x=3+6n$, $n\in Z$, $n=-1\Rightarrow x_1=3-6=-3$ и $n=0\Rightarrow x_2=3$. Остается 7 целых чисел.

Ответ: 7.

Найдите количество целых решений неравенства (1313–1317):

1313. $(\cos x-2)(1-|3-x|)\le 0$.

1314. $\dfrac{x^2-2x-15}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}}\le 0$.

1315. $(2-\sin x)(2-|3-x|)\ge 0$.

1316. $\dfrac{x^2-4x-12}{-1-\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}\ge 0$.

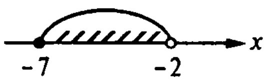
1317. $\left(|x+2|-5\right)\sin\dfrac{10\pi}{7} \ge 0.$

Решение.

$\sin\dfrac{10\pi}{7}$ — число отрицательное, значит, $|x+2|-5 \le 0$.

1) $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \Rightarrow |x + 2| = -x - 2.$
Неравенство примет вид $-x - 2 \le 5 \Rightarrow x \ge -7$.

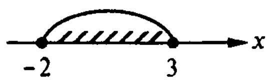
Получим систему неравенств $\begin{cases} x < -2, \\ x \ge -7. \end{cases}$



$x \in [-7; -2)$.

2) $x + 2 \ge 0 \Rightarrow x \ge -2$; значит, $|x + 2| = x + 2$;
неравенство примет вид $x + 2 - 5 \le 0 \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x \ge -2. \end{cases}$



$x \in [-2; 3]$.

3) Объединим два решения: $x \in [-7; 3]$.
Этот интервал содержит 11 целых чисел.
Ответ: 11.

Сколько корней имеет уравнение? (1318–1322):

1318. $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\sqrt{25-x^2=0}.$ **1319.** $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)\sqrt{16-x^2=0}.$

1320. $\left(\sin^2 x+1\right)\sqrt{36-x^2=0}.$ **1321.** $(\cos x-1)\sqrt{9-x^2=0}.$

1322. $(\sin 2x-1)\sqrt{49-x^2=0}.$

При каких значениях параметра *a* уравнение не имеет решений (1323–1326):

1323*. $\sin^4 x + \cos^2 x - a = 0.$

Решение.
$\sin^4 x + 1 - \sin^2 x - a = 0 \Rightarrow \sin^4 x - \sin^2 x + 1 - a = 0.$
$\sin^2 x = t,\ 0 \le t \le 1.$

$t^2 - t + 1 - a = 0$; $D = 1 - 4(1 - a) = 4a - 3 < 0 \Rightarrow a < 0{,}75$.

В данном уравнении выражение $\sin^4 x + \cos^2 x \le 1$, значит, при $a > 1$ уравнение не имеет решений, так как в левой части будет отрицательное число.

Ответ: $a \in (-\infty; 0{,}75) \cup (1; +\infty)$.

1324*. $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - a = 0$.

1325*. $3\cos^2 x - (3a + 10)\cos x + 10a = 0$.

Решение.

Разложим левую часть уравнения на множители, примем $\cos x = t$. $|t| \le 1$, $3t^2 - (3a + 10)t + 10a = 0 \Rightarrow D = (3a - 10)^2$.

$t_1 = \frac{10}{3}$; $t_2 = a \Rightarrow 3\cos^2 x - (3a + 10)\cos x + 10a = (3\cos x - - 10)(\cos x - a)$.

$(3\cos x - 10)(\cos x - a) = 0$.

1) $3\cos x - 10 \ne 0$, так как $\cos x \ne \frac{10}{3}$.

2) $\cos x - a = 0 \Rightarrow \cos x = a$, значит, уравнение не имеет решений, когда $|a| > 1$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

1326*. $2\cos^2 x - (2a + 9)\cos x + 9a = 0$.

1327*. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2\sin^2 5x + (2a^2 - 3)\sin x + 1 - a^2 = 0$ имеет только три корня на отрезке $\left[-\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{10}\right]$.

Решение.

Пусть $\sin 5x = t$, $|t| \le 1$, тогда уравнение примет вид $2t^2 + (2a^2 - 3)t + 1 - a^2 = 0$. $D = (2a^2 - 3)^2 - 8 + 8a^2 = (2a^2 - 1)^2$.

$t = \frac{3 - 2a^2 \pm (2a^2 - 1)}{4}$.

1) При $2a^2 - 1 = 0$, $a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}$ — один корень;

2) $(2a^2-1)\neq 0 \Rightarrow t_1=0{,}5;\ t_2=1-a^2,\ \left(a\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Тогда $\sin 5x=\frac{1}{2}$; $\quad 5x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$;

$x=(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z.$

По условию $x\in\left[-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{10}\right]\Rightarrow t\in\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$, так как $t=\sin 5x$.

На этом промежутке корень $x_1=\frac{\pi}{30}$, так как

$x=(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}.$

Два других корня получим из уравнения $\sin 5x=1-a^2$.
Рассмотрим графики функций $y=\sin t$ и $y=1-a^2$ (рис. 116).

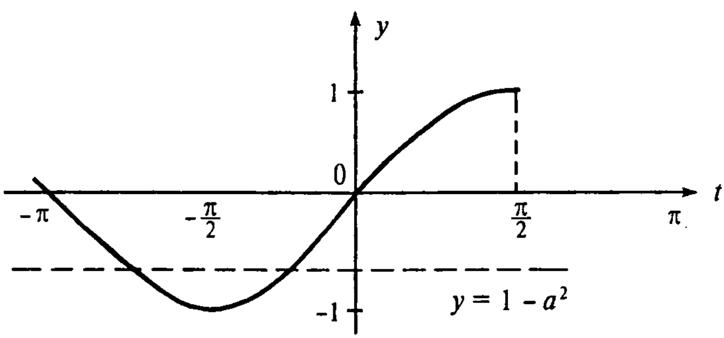
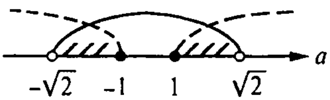


Рис. 116

Прямая $y=1-a^2$ должна пересечь график функции $y=\sin t$ в двух точках. На промежутке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ это возможно только, если $-1<1-a^2\leq 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-a^2 \le 0, \\ 1-a^2 > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \ge 1, \\ a^2 < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \ge 1, \\ |a| < \sqrt{2}. \end{cases}$$



Ответ: $a \in \left(-\sqrt{2}; -1\right] \cup \left[1; \sqrt{2}\right)$.

1328*. При каких значениях параметра a уравнение $2\sin^2 x + (a^2 + 5a + 2)\sin x = 0$ имеет только четыре корня на отрезке $[0; 2\pi]$?

1329*. При каких значениях параметра a уравнение

$2 + \cos x \cdot (3\cos x + a\sin x) = 0$ не имеет решений?

1330*. При каких значениях параметра a уравнение $20\sin^2 x + (a^2 + 13a + 20\sin x) = 0$ имеет только четыре корня на промежутке $[0; 2\pi]$?

Глава 9
Производная функция и ее применение

§1. Определение производной

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю и если этот предел существует, называется *производной* функции в точке (рис. 117).

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

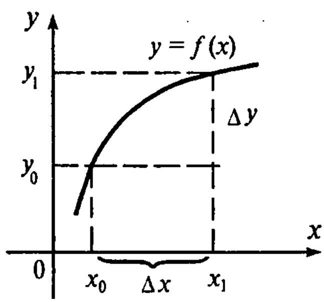


Рис. 117

Нахождение производной функции называется дифференцированием. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторого интервала, называется дифференцируемой на этом интервале.

§2. Вычисление производной

Основные правила дифференцирования

$(c\cdot u)'=c\cdot u'$ – постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$(u\pm v)'=u'\pm v'$ – производная суммы функций равна сумме производных этих функций.

Производная произведения двух функций вычисляется по формуле $(u\cdot v)'=u'v+v'u$.

Производная отношения двух функций вычисляется по формуле $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

Таблица производных основных элементарных и сложных функций

$c' = 0$, c – const;	$(cu)' = c \cdot u'$;
$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, α – const;
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;
$(\sin x)' = \cos x$;	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$;
$(\cos x)' = -\sin x$;	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$;
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;
$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$;
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
$(e^x)' = e^x$;	$(e^u)' = e^u \cdot u'$;
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Найдите производную функции (1331–1136):

1331. $y = 8x^3 + \sqrt{2x} - 5.$

1332. $f(x) = \dfrac{\sin^3 3x}{5}.$

Решение.

Вынесем постоянный множитель $\dfrac{1}{5}$ за знак производной.

Применим формулу $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$. Здесь $\alpha = 3$, $u = \sin 3x$; $u' = (3x)'\cos 3x = 3\cos 3x$.

$$f'(x) = 0{,}2 \cdot 3\underbrace{\sin^2 3x}_{u^{\alpha-1}} \cdot \underbrace{3\cos 3x}_{u'} = 1{,}8\sin^2 3x\cos 3x.$$

Ответ: $1{,}8\sin^2 3x \cdot \cos 3x$.

1333. $y = 2x^5 - 3x - 3\cos x + 5.$

1334. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - 0{,}5\sin 2x - 1.$

1335. $f(x) = -0{,}25x^4 - \ln x - \cos 2x + 7.$

1336. $y = \operatorname{tg} 3x - \cos 3x - 3x^3.$

Решите уравнение (1337–1343.2):

1337. $y = \dfrac{2x^2}{\cos x}$; $y' \cdot \cos^2 x - 2x^2 \sin x = 0.$

Решение.

Область определения функции $\cos x \neq 0$.

$$y' = \frac{4x\cos x - (\cos x)' \cdot 2x^2}{\cos^2 x} = \frac{4x\cos x + \sin x \cdot 2x^2}{\cos^2 x}.$$

Уравнение имеет вид $\dfrac{4x\cos x + \sin x \cdot 2x^2}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x - 2x^2 \sin x = 0 \Rightarrow 4x\cos x = 0$, $\cos x \neq 0 \Rightarrow x = 0$.

Ответ: 0.

1338. $y = e^{-3x} + \ln x - 0{,}2x^5$; $y' + 3e^{-3x} - \dfrac{1}{x} = -16.$

1339. $f(x) = \dfrac{\ln 3x}{x+9}$; $f'(x) \cdot (x + 9)^2 + \ln 3x = 4.$

1340. $y = e^{2x} \cdot (1 + x^2) + 3x^2$; $y' - 2e^{2x} \cdot (x^2 + x + 1) = 6.$

1341. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$; $f'(x) - 2x \ln x = x^2 - 2.$

Решение.

Область определения функции: $x > 0.$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x.$$

Уравнение имеет вид $2x \ln x + x - 2x \ln x = x^2 - 2.$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \notin$ области определения $f(x).$

$x_2 = 2.$

Ответ: 2.

1342. $y = \dfrac{1}{6}x^6 + e^x$, $y' - e^x = 32.$

1343.1. $y = 4x^{-2} - x$, $y' = 0.$

Решение.

$x \neq 0$. Воспользуемся формулой $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$,

$\alpha = -2 \Rightarrow \alpha - 1 = -3.$

$y' = 4 \cdot (-2)\, x^{-3} - 1;$

$y' = -8x^{-3} - 1$; уравнение: $\dfrac{-8}{x^3} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{8}{x^3} = -1 \;\; (x \neq 0).$

$x^3 = -8 \Rightarrow x = -2.$

Ответ: -2.

1343.2. $y = \dfrac{1}{3}x^{-3} + \dfrac{x}{16}$, $y' = 0.$

§3. Геометрический и механический смысл производной функции

Геометрический смысл производной

Запомните!

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс (рис. 118, 119).

В уравнении прямой линии $y = kx + b$ число k – угловой коэффициент.

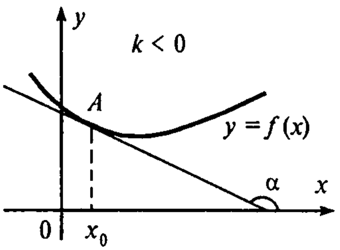


Рис. 118

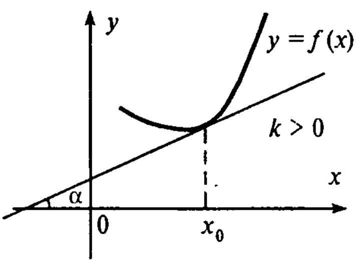


Рис. 119

$$\boxed{f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k}$$

§4. Задания для подготовки к ЕГЭ (В8)

Прямая $y_1 = ax + b$ параллельна касательной, проведенной к графику функции $y_2 = f(x)$. Найдите абсциссу точки касания.

1344.1. $y_1 = -4x + 11$; $y_2 = x^2 + 5x - 6$.

1344.2. $y_1 = -3x - 6$; $y_2 = x^2 + 5x - 4$.

1344.3. $y_1 = 4x + 13$; $y_2 = 4x^2 - 8x + 5$.

1344.4. $y_1 = -7x + 9$; $y_2 = 25x^2 + 23x + 5$.

Решение.

Угловые коэффициенты параллельных прямых равны. $k(y_1) = -7$, значит, угловой коэффициент касательной равен числу -7, т. е. $k = -7$.

Согласно геометрическому смыслу производной $k = f'(x_0)$. $f'(x_0) = 50x + 23 \Rightarrow 50x + 23 = -7 \Rightarrow x_0 = -0{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$.

1345. На рисунке 120 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной этой функции в точке x_0.

Решение.

Проведем $AC \parallel Ox$.

$f'(x_0) = \text{tg}\,\angle BAC$, так как касательная AB образует с положительным направлением оси Ox $\angle BAC$.

В $\triangle ABC$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{4} = 0{,}5,$$

значит, $f'(x_0) = 0{,}5$.

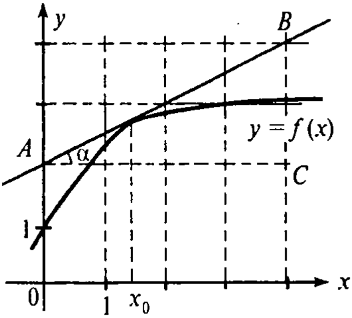


Рис. 120

Ответ: 0,5.

1346. Найдите значение производной в точке x_0 (рис. 121).

Решение.

$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha$ ($CB \parallel Ox$).

В $\triangle ABC$

$$\text{tg}\,\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}(180° - \angle ABC) =$
$= -\,\text{tg}\angle ABC = -0{,}6$.

Ответ: $-\,0{,}6$.

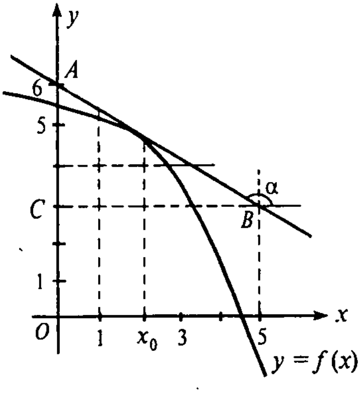


Рис. 121

Запомните!

Параллельные прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты.

Угловой коэффициент прямой линии, параллельной оси абсцисс, равен нулю, т.е. если $y = kx + b$ параллельна оси Ox, $k = 0$.

1347. На рисунке 122 изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите число точек, в которых касательная к графику этой функции имеет угловой коэффициент, равный 3 на промежутке $(-7; 8)$.

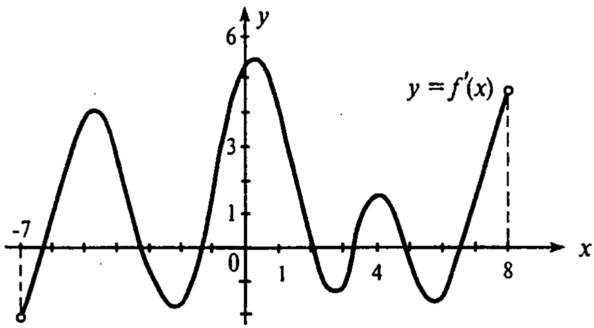


Рис. 122

Решение.

$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

Производная на промежутке $(-7; 8)$ принимает значение 3 в пяти точках, следовательно, касательных с угловым коэффициентом 3 к графику функции при $x \in (-7; 8)$ можно провести 5.

Ответ: 5.

1348. На рисунке 123 изображен график производной функции $y = f'(x)$. Укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси Ox.

Решение.

Угловой коэффициент прямой линии, параллельной оси Ox, равен нулю. Значит, $f'(x_0) = 0$, т. е. касательная параллельна оси Ox в точках, в которых график $y = f'(x)$ пересекает ось Ox.

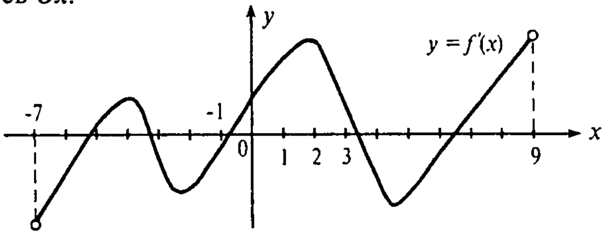


Рис. 123

Таких точек 5.
Ответ: 5.

На рисунках 124–129 изображены графики функций $y = f(x)$ и касательные к ним в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0 (1349–1354):

1349.

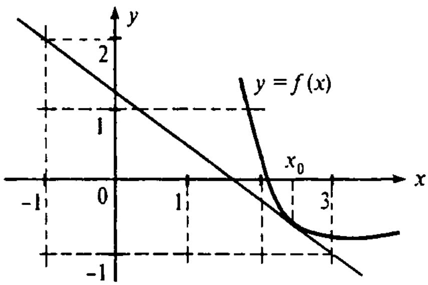


Рис. 124

1350.

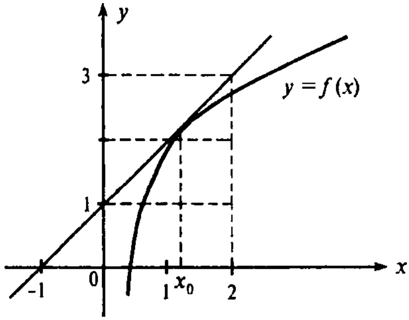


Рис. 125

1351.

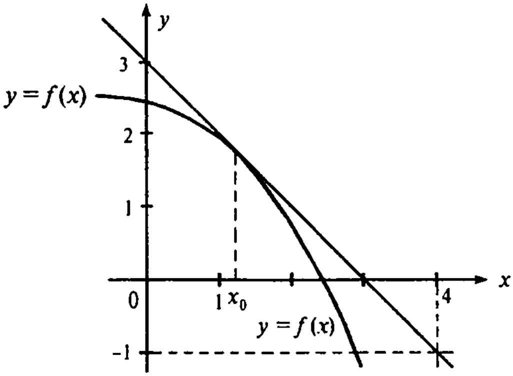


Рис. 126

1352.

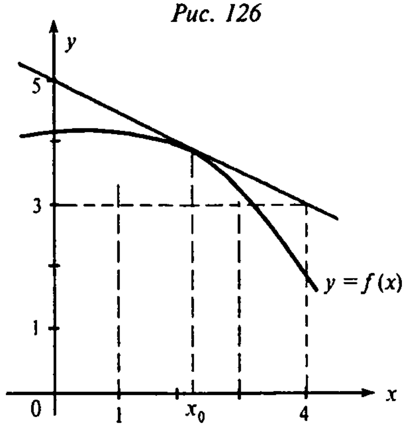


Рис. 127

1353.

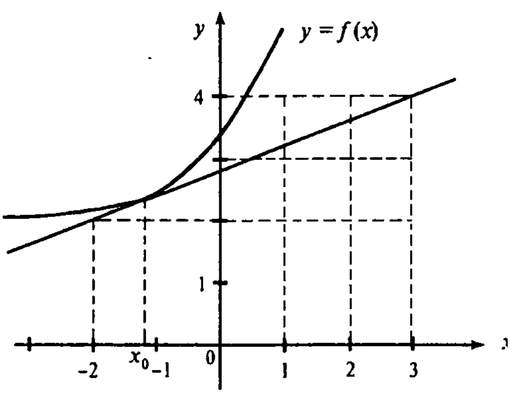


Рис. 128

1354.

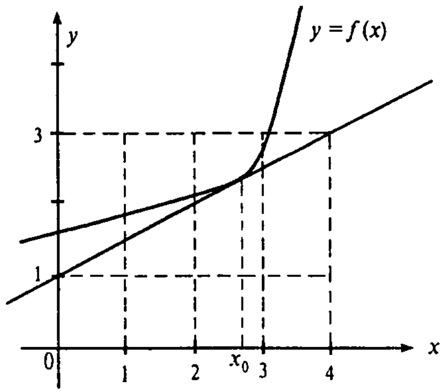


Рис. 129

1355. Найдите число точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс (рис. 130–132).

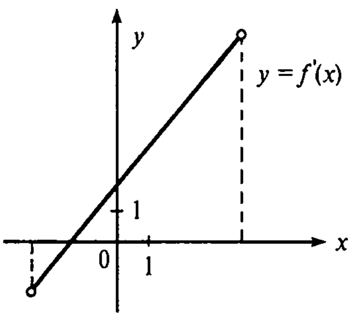


Рис. 130

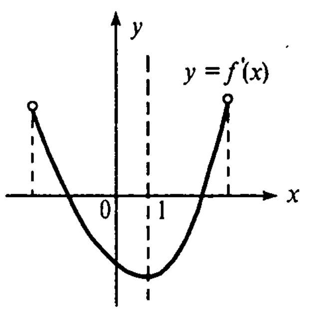


Рис. 131

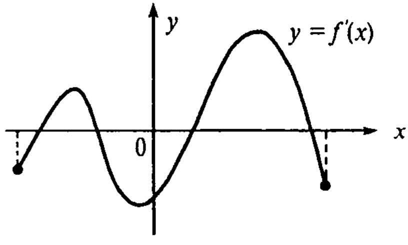


Рис. 132

1356. На рисунке 133 изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите число точек, в которых тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции, равен -2.

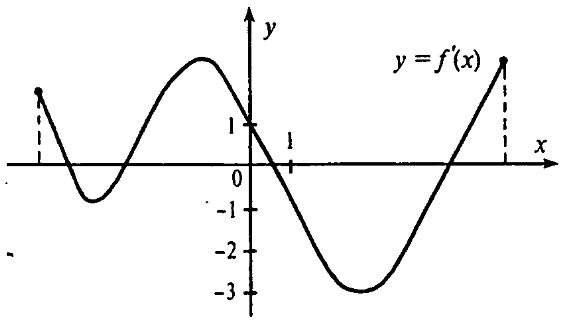


Рис. 133

1357. На рисунке 134 изображены участок графика функции $y = f(x)$ и касательная AB, проведенная в точке с абсциссой $x_0 = 0$. AB параллельна прямой, проходящей через точки с абсциссами $x = -5$ и $x = 4$. Найдите $f'(0)$.

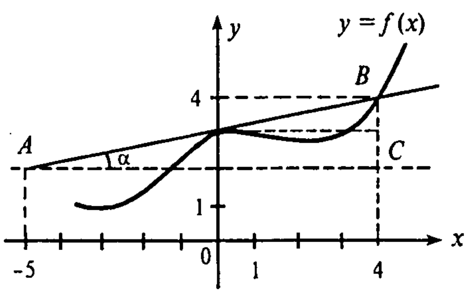


Рис. 134

Решение.

AB параллельна прямой, проходящей через точки с абсциссами -5 и 4; возьмем точки A с абсциссой -5 и B с абсциссой 4. В ΔACB $BC = 2$; $AC = 9$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{9} \Rightarrow f'(0) = \frac{2}{9}$.

Ответ: $\frac{2}{9}$.

1358. На рисунке 135 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

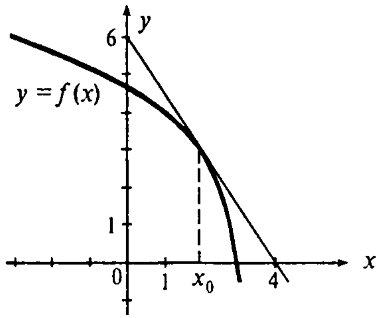


Рис. 135

1359. На рисунке 136 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику. Найдите значение производной этой функции в точке с абсциссой 3.

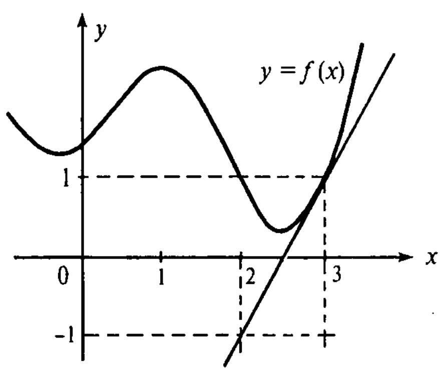


Рис. 136

Найдите ординату точки, расположенной на графике функции $y = f(x)$, в которой касательная к этому графику параллельна прямой $y = ax + b$.

1360.1. $f(x) = x^2 - 8x + 7$; $y = 2x + 4$.

1360.2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 15$; $y = -5x + 14$.

1360.3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 2$; $y = -2x + 8$.

1361. На рисунке 137 изображены график функции $y = f(x)$, $x \in (-4;\ 6)$ и касательная в точке с абсциссой $x_0 = 0$. MN параллельна прямой, проходящей через точки с абсциссами $x = -3$ и $x = 2$. Найдите $f'(0)$.

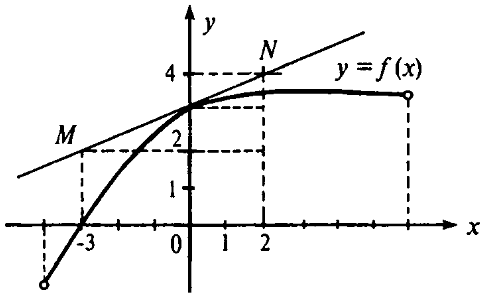


Рис. 137

1362. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке M (2; –3). Найдите $f'(2)$.

Решение.

$y = kx$ – уравнение прямой линии, проходящей через начало координат. $f'(2)$ – угловой коэффициент касательной, т. е. $f'(-2) = k$. Точка M находится на касательной, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению $y = kx$, т. е. $-3 = 2k \Rightarrow k = -1{,}5 \Rightarrow f'(-2) = -1{,}5$.

Ответ: –1,5.

1363. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке A (2; –6). Найдите значение $f'(2)$.

1364. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $C(-8;\ -4)$. Найдите значение $f'(-8)$.

1365. Прямая, проходящая через точку $C(0;\ 2)$, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $B(-4;\ 0)$. Найдите $f'(-4)$.

Решение.

$f'(x) = k$. $y = kx + b$ – уравнение прямой, не проходящей через начало координат.

$$\begin{cases} 2 = 0x + b, \\ 0 = -4k + b; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2, \\ 4k = 2; \end{cases} \Rightarrow k = 0{,}5 \Rightarrow f'(-4) = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

1366. Прямая, проходящая через точку $M\ (2;\ 3)$, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $N(-2;\ 4)$. Найдите $f'(-2)$.

1367. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f\ (x)$ в точке B с абсциссой 3. Найдите ординату точки B, если $f'(3) = 1{,}5$.

1368. На рисунке 138 изображены график функции $y = f\ (x)$, $x \in (-4;\ 6)$ и касательная, проведенная в точке графика, абсцисса которой равна 1. Найдите $f'(1)$.

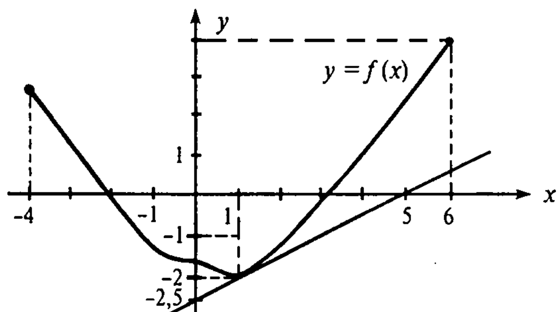


Рис. 138

В точке $A(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = f(x)$ проведена касательная к графику функции, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты точки A (1369; 1370):

1369. $y = \sqrt{x-6} - \dfrac{x}{4}$.

Решение.

Функция имеет смысл, если $x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$.

Касательная, проведенная к графику функции в точке A, параллельна оси абсцисс, значит, ее угловой коэффициент равен нулю, т. е. $k = 0$.

$$k = y'(x_0) = 0. \quad y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-6}} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-6}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-6} = 2 \Rightarrow x - 6 = 4 \Rightarrow x_0 = 10. \quad y_0 = \sqrt{10-6} - \frac{10}{4} = -0{,}5.$$

Ответ: $A(10; -0{,}5)$.

1370. $y = 2x^{-2} - 4x$.

Найдите абсциссы всех точек графика функции $y = f(x)$, касательные в которых параллельны прямой $y = kx$ или совпадают с ней (1371–1374):

1371. $y = \frac{x^3}{3} - 7^{\log_7(-x-3)}$, $y = 37x$.

1372. $y = \frac{x^3}{6 - 13^{\log_{13}(6-x)}}$, $y = 11x$.

1373. $y = 2x^2 + 3x - 5$, $y = -2x$.

1374. $y = 4x^3 + x^2 - 5x$, $y = 5x$.

1375. Прямая, проходящая через точку $B(-7; 7)$, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $M(2; -2)$. Найдите значение $f'(2)$.

1376. Найдите ординату точки, расположенной на графике функции $f(x) = x^2 - 7x + 6$, в которой касательная к этому графику параллельна прямой $y = 5x - 7$.

1377. Укажите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 7x - 4$ образует с осью абсцисс угол 45°.

1378. При каких значениях параметра a прямая $y = ax + 4$ касается графика функции $y = -\frac{10}{x}$?

Решение.

$y_1 = y_2$ – графики функций имеют общие точки.

$ax + 4 = -\frac{10}{x}$, $x \neq 0$. $ax^2 + 4x + 10 = 0$.

Уравнение имеет один корень, так как графики касаются, т. е. имеют только одну общую точку $D = 4 - 10a = 0 \Rightarrow \Rightarrow a = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

1379. Найдите координаты точек, расположенных на графике функции $y = x(x - 4)^3$, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

1380.1. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3?

1380.2. В каких точках касательная к графику функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°?

Решение.

Используя геометрический смысл производной:

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow f'(x) = 1$ ($\operatorname{tg} 45° = 1$).

$f'(x) = x^2 - 5x + 7$; $x^2 - 5x + 7 = 1$, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

$$y_1 = f(2) = \frac{8}{3} - 10 + 14 - 4 = \frac{8}{3} \Rightarrow A_1\left(2; \frac{8}{3}\right).$$

$y_2 = f(3) = 9 - 22{,}5 + 21 - 4 = 3{,}5 \Rightarrow A_2(3;\ 3{,}5)$.

1381.1. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью абсцисс угол 135°?

1381.2. Найдите величину угла, который касательная к графику функции $f(x)=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$, проведенная в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{3}$, образует с осью абсцисс.

1382.1. Найдите абсциссы точек, в которых касательные к графику функции $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$.

1382.2. Под каким углом график функции $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

Механический (физический) смысл производной функции (В8)

Выполняя задания этого раздела, участник ЕГЭ должен показать умение использовать приобретенные в процессе обучения математические знания при изучении других учебных дисциплин (физики), а также в повседневной деятельности, производить анализ повседневной ситуации, приводящей к решению уравнения или неравенства.

Запомните!

Производная функции в точке – это мгновенная скорость изменения функции.

$$\boxed{f'(x_0) = v_{мгнов.}}$$

$S = v \cdot t$ – уравнение пути прямолинейного движения.

$\boxed{S'(t) = v_{мгн.},}$ т. е. мгновенная скорость движения – это производная пути в момент времени.

Ускорение $\boxed{a = S''(t)}$, или $\boxed{a = v'_t}$

В задачах 1383.1–1384.3 указан закон прямолинейного движения $S(t)$, S в м, t в с.

1383.1. $S(t) = 2t^3 + 3t^2 + 2t$, найдите скорость движения (в м/с) в момент $t = 3$.

1383.2. $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 17t$. Через сколько секунд после начала движения скорость будет равна 15 м/с?

1384.1. $S(t) = \frac{4t+3}{t+1}$. Найдите скорость в момент $t = 4$.

1384.2. $S(t) = 4t + t^2$. Найдите расстояние, которое будет пройдено с того момента, когда скорость станет равна 8.

1384.3. $S(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0{,}3t^5$. В какой момент тело имеет наибольшую скорость? Найдите эту скорость.

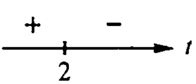
Решение.

$v = S'(t)$. $v = -2 + 48t - 1{,}5t^4$ – уравнение скорости движения тела.

Найдем максимум функции $y = v(t)$.

$v'(t) = 48 - 6t^3$; $v'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$.

Расставим знаки производной на числовой прямой, значит, 2 – точка максимума функции $y = v(t)$.



$v(2) = 70$ м/с.

Ответ: 2; 70.

Запомните!

$\boxed{h(t) = \frac{gt^2}{2}}$ — уравнение перемещения свободно падающего тела.

$v(t) = (h(t))' = gt$ – скорость свободного падения тела. $g \approx 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения.

1385.1. Тело падает с высоты 122,5 м. Определите перемещение (путь) тела за последнюю секунду падения.

Решение.

Вычислим, сколько времени длится падение.

$$\frac{gt^2}{2} = 122{,}5 \ (g \approx 9{,}8) \Rightarrow gt^2 = 245 \Rightarrow t^2 = 25;\ t = \pm 5.$$

Значение $t = -5$ не имеет смысла, т. е. падение длится 5 с. За 4 с тело пройдет $\frac{9{,}8 \cdot 16}{2} = 78{,}4$ (м), за последнюю секунду падения — 44,1 м.

Ответ: 44,1.

1385.2. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $h(t) = 9t - t^2$ (h — в метрах, t — в секундах). Найдите скорость тела в момент соприкосновения с землей (ускорение g считайте равным 10 м/с^2).

Решение.

Найдем скорость, с которой тело поднимается: $v = h'(t) = 9 - 2t$. В наивысшей точке скорость равна нулю (траектория движения в данной ситуации представляет собой параболу).

$9 - 2t = 0 \Rightarrow t = 4{,}5$.

Перед началом движения $t = 0$, $h(0) = 0$, поэтому время подъема равно времени спуска, т. е. свободное падение длилось 4,5 с.

Скорость свободного падения $v(t) = gt$.

$v = 10 \cdot 4{,}5 = 45$ (м/с).

Ответ: 45.

1386. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $h(t)$ (h — в метрах, t — в секундах). Найдите скорость тела в момент соприкосновения с землей ($g \approx 10$ м/с^2).

1) $h(t) = 1{,}4 + 6t - 5t^2$;
2) $h(t) = 12t - 5t^2$;
3) $h(t) = 1{,}8 + 6t - 4t^2$.

1387.1. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 24t$ (h – в м, t – в с). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 16 м.

1387.2. Лифт после включения движется по закону

$$S(t) = 2{,}5t^2 + 13t + 15,$$

где t – время в с, S – пройденный путь в м. Найдите скорость движения лифта (в м/с) в конце пятой секунды, считая с момента начала движения.

1388.1. Тело движется по прямой, расстояние S (в м) до точки А изменяется по закону $S(t) = 3t^2 - t + 5$ (t – время в с). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость будет равна 8 м/с?

1388.2. $S(t) = 5 + \frac{1}{6}t^4 - \frac{5}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость?

1389.1. Высота, на которой находится камень, брошенный с земли вертикально вверх, вычисляется по формуле $h(t) = 1 + 17t - 5t^2$. Сколько секунд камень будет находиться на высоте не менее 7 м?

1389.2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 - 3t$. Найдите скорость в момент $t = 5$.

§5. Уравнение касательной к графику функции

Запомните!

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1390. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0; y_0)$, $x_0 = 2$.

$f(x_0) = 1; f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x_0) = 2$.

Уравнение касательной имеет вид

$y = 1 + 2(x - 2)$; $y = 2x - 3$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ (1391–1394):

1391. $f(x) = x(\ln x - 1) = 0$ в точке с абсциссой $x_0 = e$.

Решение.

$f(x_0) = e(\ln e - 1) = 0$.

$f'(x_0) = \ln x - 1 + (\ln x - 1)' \cdot x = \ln x$.

$f'(x_0) = \ln e = 1$.

Уравнение касательной $y = x - e$.

1392. $y = \operatorname{tg} 3x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

1393. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3}$ в точке пересечения графика функции с осью абсцисс.

Решение.

Найдем точку пересечения графика функции с осью абсцисс, т. е. ноль функции.

$$\frac{x^3+1}{3} - 0 \Rightarrow x_0 - 1.$$

$$f(x_0) = 0;\ f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 + 1\right)' = x^2;$$

$f'(x_0) = 1$; $y = x + 1$.

1394. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $x_0 = 1$.

§6. Монотонность функции. Экстремумы функции

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими* (или стационарными).

x_0 — критическая точка

$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0)$ не существует

Если функция возрастает и дифференцируема на некотором промежутке, то на этом промежутке $f'(x) > 0$. Справедливо и обратное утверждение.

Если функция убывает и дифференцируема на некотором промежутке, то на этом промежутке $f'(x) < 0$. Отметим, что равенство нулю на указанных промежутках не может быть ненулевой длины.

Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется **точкой максимума**, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (рис. 139).

Условия существования максимума функции в точке x_0

1) $f'(x_0) = 0$.
2) При переходе через критическую точку x_0 функции $y = f(x)$ ее производная меняет знак с «плюса» на «минус». x_0 – точка максимума (рис. 119), $f(x_0)$ – максимум функции.

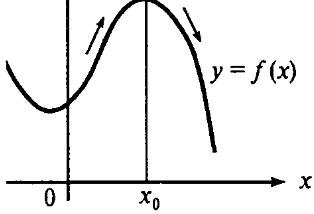


Рис. 139

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (рис. 120).

Условия существования минимума функции в точке x_0

1) $f'(x_0) = 0$.
2) При переходе через стационарную точку x_0 функции $y = f(x)$ ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс». x_0 — точка минимума (рис. 140), $f(x_0)$ — минимум функции.

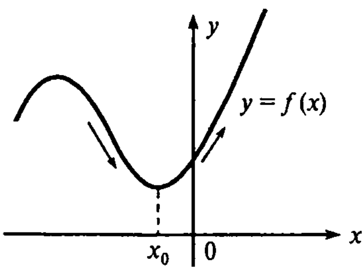


Рис. 140

Запомните!

Если касательная к графику функции $y = f(x)$ в точках $(x_0; f(x_0))$, где x_0 — точка экстремума (min или max), параллельна оси абсцисс, ее угловой коэффициент равен нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$ (рис. 141).

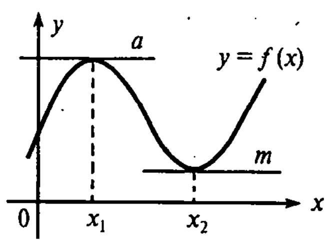


Рис. 141

$f'(x_1) = 0,\ a \parallel Ox$
$f'(x_2) = 0,\ m \parallel Ox$

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1) Найти производную $f'(x)$.
2) Найти критические точки: $f'(x) = 0$. Например, на рис. 142 это точки x_1; x_2; x_3.

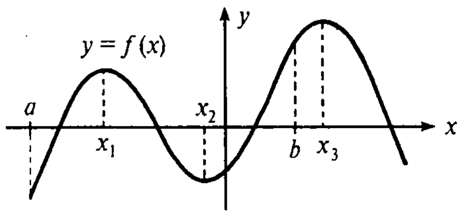


Рис. 142

3) Исключить критические точки, не принадлежащие промежутку $[a; b]$ (в данном примере $x_3 \notin [a; b]$).
4) Найти значения функции в критических точках и на концах промежутка и выбрать из них наибольшее и наименьшее значения. В данном примере найти $f(x_1)$; $f(x_2)$; $f(a)$; $f(b)$.

Наименьшее значение $f(x_2)$; наибольшее — $f(b)$.

§7. Задания для подготовки к ЕГЭ (B8; B11)

1395. На рисунке 143 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-7; 8)$. Укажите количество

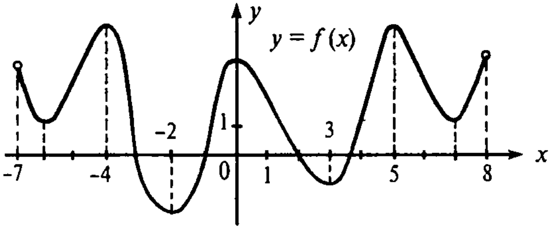


Рис. 143

интервалов, на которых производная функции $y = f(x)$ положительна.

Решение.

Производная функции положительна на интервалах, где функция возрастает.

Функция $y = f(x)$ (рис. 143) возрастает, если $x \in [-6; -4]$; $x \in [-2; 0]$; $x \in [3; 5]$; $x \in [7; 8)$, значит, интервалов, на которых производная положительна, четыре.

Ответ: 4.

1396. На рисунке 144 изображен график производной функции $y = f(x)$ при $x \in (-8; 8)$. Укажите суммарную длину интервалов, на которых функция $y = f(x)$ убывает.

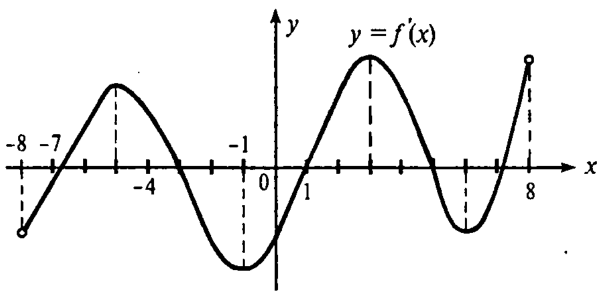


Рис. 144

Решение.

Функция убывает, если ее производная отрицательна.

$f'(x) < 0$ при $x \in (-8; -7)$; $x \in (-4; 1)$; $x \in (5; 7)$.

Суммарная длина этих интервалов составляет 8 единиц.

Ответ: 8.

1397. На рисунке 145 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 6)$. Определите количество точек минимума функции.

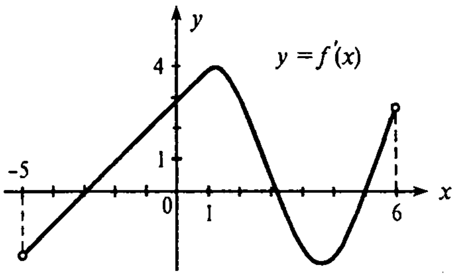


Рис. 145

1398. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7; 4)$. На рис. 146 изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$.

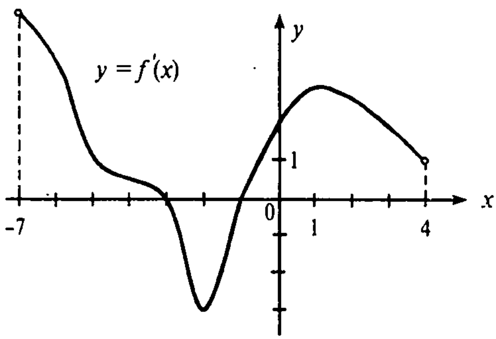


Рис. 146

1399. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-2; 6)$. На рис. 147 изображен график ее производной. Определите количество точек максимума функции.

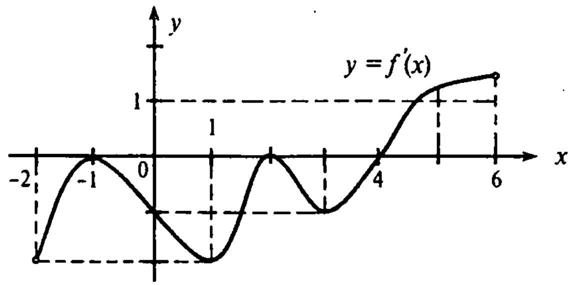


Рис. 147

Решение.

В точках максимума производная функции меняет знак с «плюса» на «минус». На рис. 147 таких точек нет.

Ответ: 0.

1400. На рисунке 148 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Определите суммарную длину интервалов убывания функции.

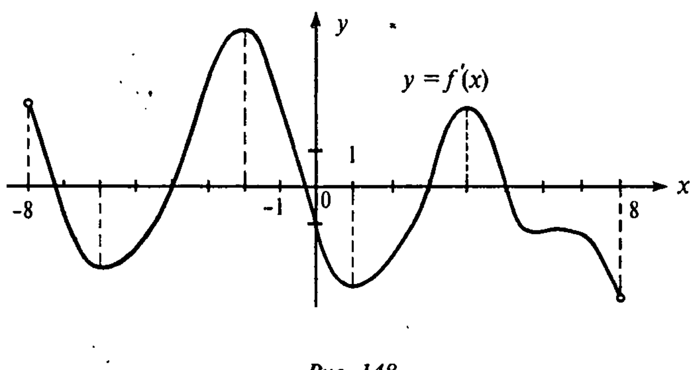


Рис. 148

1401. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 8)$. На рис. 149 изображен график ее производной. Укажите точки минимума функции $y = f(x)$.

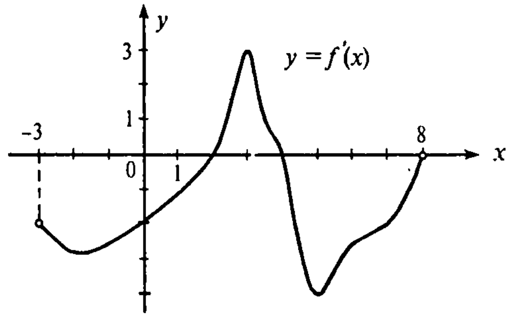


Рис. 149

1402. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-2; 6)$. На рис. 150 изображен график ее производной. Определите суммарную длину промежутков возрастания функции.

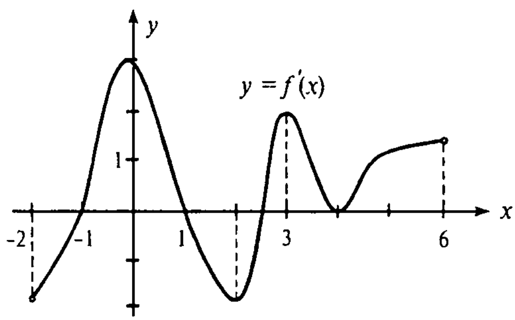


Рис. 150

1403. На рисунке 151 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[-7; 7]$. Найдите суммарную длину промежутков, на которых производная функции $y = f(x)$ отрицательна.

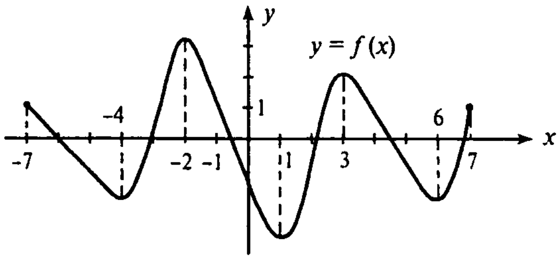


Рис. 151

1404. На рисунке 152 изображен график функции $y = f(x)$, $x \in (-10; 11)$.

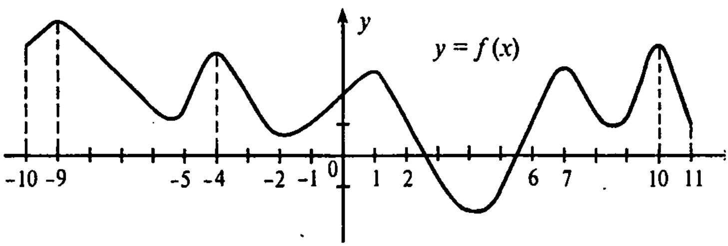


Рис. 152

Найдите:

1) количество точек из промежутка $[-5; 6]$, в которых $f'(x) = 0$;
2) количество точек из промежутка $[-6; 7]$, в которых касательная параллельна оси абсцисс;
3) количество точек интервала $[-9; 10]$, в которых производная функции меняет знак.

1405. Найдите экстремумы функции

$$f(x) = \frac{(x^2 - 6x)(x^2 - 12x + 36)}{2x - 12}.$$

Решение.

Функция имеет смысл, если $2x - 12 \neq 0$, $x \neq 6$ (ОДЗ).

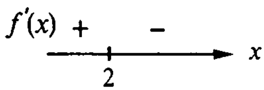
Преобразуем уравнение функции

$$f(x)=\frac{x(x-6)(x-6)^2}{2(x-6)}=\frac{1}{2}x\cdot(x-6)^2,\ (x\neq 6).$$

Для нахождения производной функции применим формулы: $(cx)'=c\cdot x'$; $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$; $(u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left((x-6)^2+x\cdot 2(x-6)\right);$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-6)(x-6+2x)=\frac{1}{2}(x-6)(3x-6).$$



$f'(x)=0$ при $x_1=6$; $x_2=2$, однако $x\neq 6$ (область определения функции).

В точке $x_1=2$ производная функции равна нулю и при переходе через точку 2 изменяет знак, следовательно, $x_1=2$ — точка экстремума функции $f(2)=16$.

Ответ: 16.

1406. Найдите точку минимума функций:

1. $f(x)=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$.
2. $f(x)=2x-\ln(x+2)+13$.
3. $f(x)=(x+8)^2e^{8-x}$.
4. $f(x)=(16-x)e^{16-x}$.

1407. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(a;\,b)$. На рис. 153 изображен график ее производной. Укажите

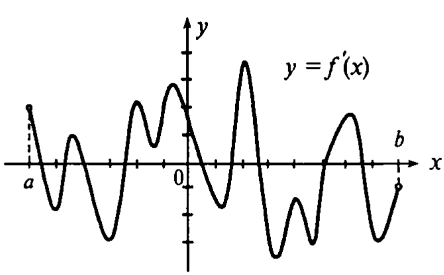


Рис. 153

число точек максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$.

1408. На рисунке 154 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-8; 7]$. Найдите максимальную длину промежутка, на котором функция возрастает.

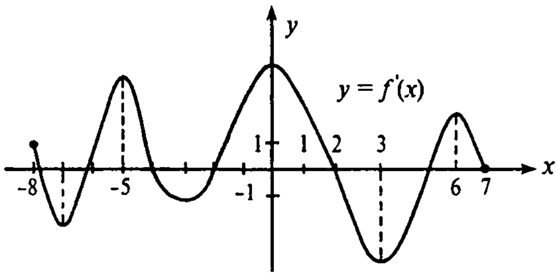


Рис. 154

1409. Найдите наибольшее значение функции

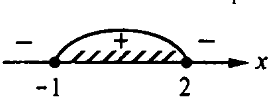
$$f(x) = (x+1)\left(\sqrt{2+x-x^2}\right)^2.$$

Решение.

Найдем значения переменной x, при которых функция имеет смысл.

Корень четной степени существует только, если подкоренное выражение неотрицательно, значит, $2 + x - x^2 \geq 0$.

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2 \Rightarrow$



$\Rightarrow x \in [-1; 2]$ (ОДЗ).

$f(x) = (x + 1)(2 + x - x^2)$. Для нахождения производной функции применим формулу $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

$f'(x) = (x + 1)'(2 + x - x^2) + (2 + x - x^2)'(x + 1) = 2 + x - -x^2 + (1 - 2x)(x + 1)$.

$f'(x) = -3x^2 + 3$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \in [-1; 2]$; $x_2 = 1 \in [-1; 2]$.

Найдем значения функции в критических точках и на концах интервала определенности.

$f(-1) = 0; f(1) = 4; f(2) = 0.$

Ответ: 4.

Найдите экстремумы функции (1410–1413):

1410. $y = \frac{x}{\ln x}.$

1411. $f(x) = x^2 - \ln(1 + 2x).$

1412. $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}.$

1413. $f(x) = -x^4 - 8x^2 + 9.$

1414. Найдите интервалы возрастания функции $f(x) = x + \frac{1}{x}.$

1415. Найдите наименьшее значение функции:

1. $f(x) = (x - 10)e^{x-9}$ на отрезке $[8; 10]$.
2. $f(x) = (x - 16)e^{x-15}$ на отрезке $[14; 16]$.
3. $f(x) = 14x - 13\sin x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$
4. $f(x) = 2x^2 - 6x + 2\ln x + 7$ на отрезке $\left[\frac{6}{7}; \frac{8}{7}\right].$

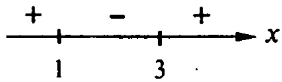
1416. Найдите наибольшее значение функции на отрезке

1. $y = 2\cos x + \sqrt{3}\,x - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$
2. $y = 2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}\,x - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} + 12, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$
3. $y = \ln(12x) - 12x + 2$ на отрезке $\left[\frac{1}{24}; \frac{5}{24}\right].$
4. $y = 12\lg x - 12x + 3\pi + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$

1417. Найдите наименьшее значение функции $y = |x^2 - 4x + 3| + 2x.$

Решение.

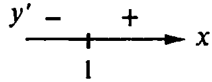
Функция имеет смысл для всех действительных чисел, т. е. ОДЗ: $x \in R$.



Определим интервалы постоянного знака трехчлена $x^2 - 4x + 3$.

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$.

1) $x \in (-\infty; 1] \cup [3; \infty) \Rightarrow |x^2 - 4x + 3| = x^2 - 4x + 3$ как модуль неотрицательного числа;



$y = x^2 - 4x + 3 + 2x$,

$y = x^2 - 2x + 3$.

$y' = 2x - 2$; $f'(x) = 0$ при $x = 1$. $2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$, значит, в критической точке с абсциссой 1 функция имеет минимум $f(x) = 2$.

2) $x \in (1; 3) \Rightarrow |x^2 - 4x + 3| = -x^2 + 4x - 3$, функция имеет вид $y = -x^2 + 6x - 3$; $y' = -2x + 6$; $f'(x) = 0$ при $x = 3$; $3 \notin (1; 3)$.

Значит, наименьшее значение функции равно 2.

Ответ: 2.

1418. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x + \frac{4}{(x+2)^2}$$

на отрезке, заданном неравенством $|x - 2{,}5| \le 2{,}5$.

Решение.

Функция определена, если $x \ne -2$.

Неравенство $|x - 2{,}5| \le 2{,}5$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} x - 2{,}5 \le 2{,}5, \\ x - 2{,}5 \ge -2{,}5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 5, \\ x \ge 0; \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 5]$.

Найдем производную функции

$$f'(x) = 1 - \frac{4 \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = 1 - \frac{8}{(x+2)^3} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{(x+2)^3}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x = 0$, $x_1 = 0$; $x^2 + 6x + 12 \ne 0$ $(D < 0)$.

Функция имеет одну критическую точку $x = 0$.

Найдем значения функции в критической точке и на концах интервала $f(0)=1;\ f(5)=5\frac{4}{49}$.

Ответ: 1.

1419. Найдите наибольшее значение функции на отрезке

1. $y = 24\operatorname{tg} x - 24x + 6\pi - 7,\ \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. $y = 8\operatorname{tg} x - 8x + 2\pi - 5,\ \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

3. $y = 3\cos x + 4x - 3,\ \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

4. $y = 2x^2 - 12x + 8\ln x - 7,\ \left[\frac{1}{13}; \frac{14}{13}\right]$.

1420. Найдите значение функции $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 \frac{x+3}{12x-x^3}-\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x+3}}$

в точке максимума.

Решение.

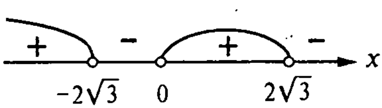
Найдем значения переменной x, при которых функция определена.

Для этого решим систему неравенств

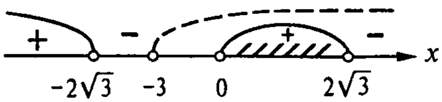
$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{12x-x^3}>0, \\ 12x-x^3 \neq 0; \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(12-x^2\right)>0, \\ x+3>0. \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Первое неравенство решим методом интервалов.

$x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3}$.



Объединим решения двух неравенств.



$\Rightarrow x \in (0; 2\sqrt{3})$ (ОДЗ).

Упростим уравнение данной функции

$$\left(3^{-1}\right)^{\log_3 \frac{x+3}{x(12-x^2)}+\log_3 \frac{1}{x+3}} = \left(3^{-1}\right)^{\log_3 \frac{x+3}{x(12-x^2)(x+3)}} = 3^{\log_3 (x(12-x^2))} =$$

$= x(12 - x^2)$, т. е. $f(x) = x(12 - x^2)$, $x \in (0; 2\sqrt{3})$.

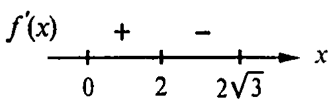
Найдем критические точки функции.

$f'(x) = x'(12 - x^2) + (12 - x^2)'x = 12 - x^2 - 2x^2 = 12 - 3x^2$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 3x^2 = 0$; $x_{1,2} = \pm 2$. $-2 \notin (0; 2\sqrt{3})$.

На области определения функции $f(x)$ имеет единственную критическую точку $x = 2$.

Исследуем знаки производной $f'(x) = 12 - 3x^2$ на интервале $(0; 2\sqrt{3})$.



Производная меняет знак с «плюса» на «минус» при переходе через точку $x = 2$, значит, $x = 2$ – точка максимума $f(2) = 16$.

Ответ: 16.

1421. Найдите наименьшее значение функции

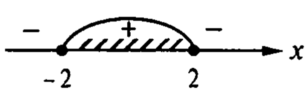
$$f(x) = 8x - 2\sin x + 6 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

1422. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \left|6 - \sqrt{20 - 5x^2}\right| + x^4 - 4x^3 + \sqrt{20 - 5x^2}.$$

Решение.

Область определения функции найдем, решив неравенство $20 - 5x^2 \geq 0$, $x \in [-2; 2]$.



При этих значениях x выполняется равенство $\sqrt{20 - 5x^2} \leq 4{,}8$, следовательно,

$$6-\sqrt{20-5x^2}>0 \Rightarrow \left|6-\sqrt{20-5x^2}\right|=6-\sqrt{20-5x^2}.$$

Уравнение функции примет вид
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6.$

Найдем критические точки функции
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3); f'(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3 \notin [-2; 2].$

Найдем значения функции в критической точке $x_1 = 0 \in [-2; 2]$ и на концах интервала.

$f(-2) = 54; f(0) = 6; f(-2) = -10 \Rightarrow$ наименьшее значение функции при $x \in [-2; 2]$ равно -10.

Ответ: -10.

1423. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\left|\sqrt{-x^2+6x-5}-3\right|+\sqrt{-x^2+6x-5}+x^3+6x^2.$$

1424. Найдите интервалы возрастания функции

$$f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x^2-x-1}}.$$

1425. Найдите точку максимума функции:

1. $y = (x + 9)\, e^{9-x}$.
2. $y = (2x^2 - 26x + 26)\, e^{x+26}$.
3. $y = (x^2 - 5x + 5)\, e^{6-x}$.
4. $y = (x + 18)\, e^{18-x}$.

Найдите количество целых чисел, принадлежащих промежутку убывания функции $y = f(x)$ (1426; 1427):

1426. $y = 4x^3 - 12x^2 - 15x$.

1427. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 13$.

Найдите количество целых чисел, в которых функция не имеет смысла (1428; 1429):

1428. $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-2x-8}}$.

1429. $y=\sqrt{x^2-2x-3}$.

1430*. При каких значениях параметра a функция $f(x) = 2x^3 - 3(a - 2)x^2 + 48ax + 6x - 3$ возрастает на множестве всех действительных чисел?

Решение.

Область определения функции: $x \in R$.

Функция возрастает, если ее производная положительна.

$f'(x) = 6x^2 - 6(a-2)x + 48a + 6$. Производная функции представляет собой квадратный трехчлен, который будет всегда положительный, если коэффициент при x^2 положителен, а дискриминант отрицательный, т. е. $D < 0$.

$D_1 = (3(a-2))^2 - 6(48a+6) < 0$.

$9(a-2)^2 - 6 \cdot 3(16a+2) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 32a - 4 < 0 \Rightarrow a(a-36) < 0$.

$+ \qquad - \qquad +$

$\xrightarrow{\quad \circ_{0} \qquad\qquad \circ_{36} \quad} a \qquad \Rightarrow a \in (0;\ 36)$.

Ответ: $(0;\ 36)$.

1431*. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y = e^{ax^3+3x^2+x}$ возрастает на всей области определения.

Найдите наименьшее значение функции (1432; 1433):

1432. $f(x) = (0{,}2x - 1)^5 \cdot (4x + 1)$ на промежутке $[5;\ +\infty)$.

1433. $y = 4\operatorname{tg} x - 4x + 8$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Найдите наибольшее значение функции (1434–1436):

1434. $y = 7x - 6\sin x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

1435. $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $x \in [1;\ 6]$.

1436. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$, $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1437*. При каких значениях параметра a функция $y = \operatorname{arctg}(3x^2 - ax + x + 11)$ имеет минимум в точке $x = 0{,}5$?

1438*. При каких значениях параметра a функция

$3^{-3ax+2x^2-2x+2}$ имеет минимум в точке $x = -1$?

1439*. В зависимости от параметра найдите число решений уравнения $x^4 - 2x^2 + 3 - a = 0$.

Решение.

ОДЗ параметра a – все действительные числа, ОДЗ переменной x – все действительные числа.

При $a = 0$ уравнение имеет вид $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$.

Левая часть уравнения представляет собой сумму положительных чисел: $(x^2 - 1)^2 + 2 > 0$ при любом x.

Следовательно, при $a = 0$ уравнение $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$ решений не имеет.

$a \neq 0$. Решаем задачу графически.

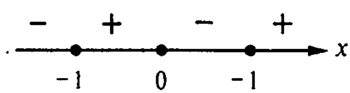
$x^4 - 2x^2 + 3 - a = 0 \Leftrightarrow a = x^4 - 2x^2 + 3 = 0$, построим эскиз графика функции $a = x^4 - 2x^2 + 3$.

$a' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1) = 0$,

нули функции:

$x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Исследуем знак a' на полученных интервалах.



x	$-\infty; -1$	-1	$-1; 0$	0	$0; 1$	1	$1; +\infty$
a'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
a	↘	2	↗	3	↘	2	↗
		min		max		min	

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^4 - 2x^2 + 3\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2} = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^4} = 0, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) = 1.$$

Используя полученные данные, построим эскиз графика функции $a = x^4 - 2x^2 + 3$ (рис. 155).

Согласно графику запишем:

1) при $a = 2$ данное уравнение имеет два решения (рис. 155);
2) при $a \in (2;\ 3)$ – четыре решения;
3) при $a = 3$ – три решения;
4) при $a \in (3;\ +\infty)$ – два решения.

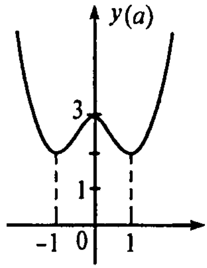


Рис. 155

1440. Запишите уравнения касательных к графику функции $y = 2x - x^2$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

Решение.

Найдем точки пересечения графика функции с осью абсцисс, т. е. $y = 0$. $2x - x^2 = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

1) $x_0 = 0$. $f(0) = 0$; $f'(x) = 2 - 2x$; $f'(x_0) = f'(0) = 2$.
   Уравнение касательной в точке $x_0 = 0$: $y = 2x$.
2) $x_0 = 2$. $f'(2) = 2 - 4 = -2$; $y = -2(x - 2)$, $y = -2x + 4$.

1441. Запишите уравнение касательных к графику функции $y = 3x^3 + 2x + 5$ в точках его пересечения с осью ординат.

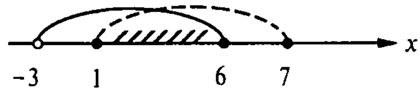
1442. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x + \dfrac{27}{x}$ на

множестве решений системы $\begin{cases} \dfrac{9}{x+3} \geq 1, \\ |x-4| \leq 3. \end{cases}$

Решение.

Решим систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{9}{x+3} \geq 1, \\ x-4 \leq 3, \\ x-4 \geq -3, \\ x+3 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3} \geq 0, \\ x \leq 7, \\ x \geq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Решим графически,
т. е. $x \in [1; 6]$.



Следовательно, нужно найти наименьшее значение функции $y = 3x + \frac{27}{x}$ на промежутке $[1; 6]$.

Область определения функции $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Найдем производную $y' = 3 - \frac{27}{x^2}$; $y' = \frac{3x^2 - 27}{x^2}$.

$D(y') = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Найдем критические точки: $y' = 0$.
$3x^2 - 27 = 0$. $x_1 = -3 \notin [1; 6]$; $x_2 = 3$.
Критическая точка $x = 0 \notin [1; 6]$.
$f(1) = 3 + 27 = 30$;

$f(3) = 9 + \frac{27}{3} = 18$ — наименьшее.

$f(6) = 18 + \frac{27}{6} = 22{,}5$.

Ответ: $f(3) = 18$.

1443. Найдите наибольшее значение функции

1) $y = \ln(x + 7)^6 - 6x$ на отрезке $[-6{,}5; 0]$.

2) $y = 2x - \operatorname{tg} x - 0{,}5\pi + 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

1444. Найдите точку минимума функции:

1. $y = (3x^2 - 42x + 42)\, e^{7-x}$.
2. $y = (2x^2 - 12x + 12)\, e^{5-x}$.
3. $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 11x - 3$.
4. $y = -\frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 3$.

Глава 10
Интеграл

§1. Первообразная функции. Правила нахождения первообразных

Запомните!

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y = f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную величину (c).

Например, функция $F(x)=\dfrac{x^6}{6}+7$ является первообразной для функции $f(x) = x^5$, так как $F'(x)=\left(\dfrac{x^6}{6}+7\right)'=x^5$.

Таблица первообразных основных элементарных функций

$F'(a) = ax = c.$

$F\left(x^{\alpha}\right)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad (\alpha \neq -1).$ $\qquad F\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln|x|+c.$

$F(\sin x) = -\cos x + c.$ $\qquad F(\cos x) = \sin x + c.$

$$F\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\operatorname{tg} x+c.$$

$$F\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\operatorname{ctg} x+c.$$

$$F\left(a^x\right)=\frac{a^x}{\ln a}+c.$$

$$F(e^x) = e^x + c.$$

$$F\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\operatorname{arctg} x+c.$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\arcsin x+c.$$

Правила нахождения первообразных

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные соответственно для функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке, т. е. $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, a, b, k – постоянные, $k \neq 0$.

1) $F(x) + G(x)$ — первообразная суммы функций $f(x) + g(x)$.
2) $aF(x)$ — первообразная функции $af(x)$.
3) $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная функции $f(kx + b)$.

Найдите первообразные для функции $f(x)$ (1445.1–1447):

1445.1. $f(x) = e^x + \sin x$.

1445.2. $f(x) = 2x^4 + 3\cos x$.

1446. $f(x) = a^x + \cos x$.

1447. $f(x)=\frac{1}{x}+e^x-\cos x$.

§2. Интеграл. Правила вычисления интегралов

Запомните!

Множество всех первообразных функций $f(x)$ на некотором промежутке называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

$\int f(x)dx = F(x) + c$, $(F(x)+c)' = f(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ – *определенный интеграл.*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Это формула Ньютона – Лейбница.

Правила вычисления интегралов

1) Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Запомните!

Таблица некоторых интегралов

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \ \alpha \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c\ \ (a - \text{const},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,\ \ x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,\ \ \sin x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,\ \ \cos x \neq 0$$

Вычислите (1448–1452):

1448. $\int\limits_0^3 \left(6x^2 - 4x + 3\right)dx = \left(6\,\frac{x^3}{3} - 4\,\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_0^3 =$

$= \left(2x^3 - 2x^2 + 3x\right)\Big|_0^3 = 54 - 18 + 9 - 45.$

1449. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin^4 x - \cos^4 x\right)dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)dx =$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin\pi) = 0.$$

1450. $\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx.$ **1451.** $\int_{-2}^{1}\left(4x^3 - \frac{1}{x} + e^x\right)dx.$

1452. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + \cos x)dx.$

§3. Применение интеграла для вычисления площадей плоских фигур

Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, а снизу – прямой $y = 0$ (осью абсцисс), *называется криволинейной трапецией* (рис. 156, 157).

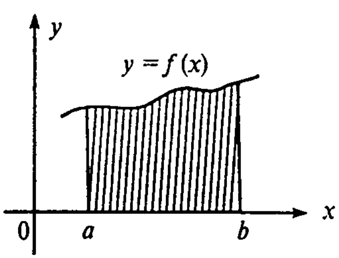


Рис. 156

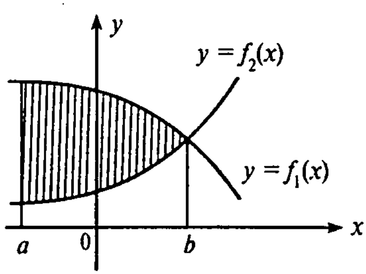


Рис. 157

Запомните!

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формулам

$S = \int_a^b f(x)dx$ (рис. 158). $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$ (рис. 159).

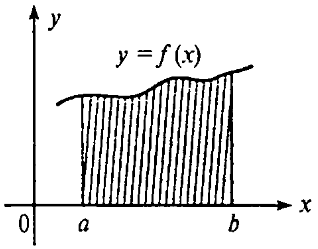


Рис. 158

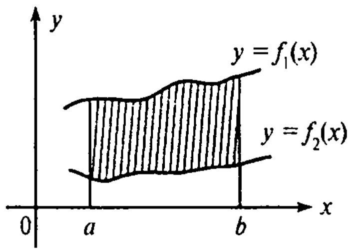


Рис. 159

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (1453–1462):

1453. $y = -x^2 + 4$; $y = 0$.

Решение.

Построим график функции $y = -x^2 + 4$.

$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$;

$x_2 = 2$ – нули функции.

$y(0) = 4$.

Получили фигуру, симметричную относительно оси ординат (рис. 160).

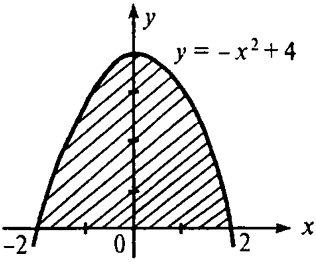


Рис. 160

$$S = 2\int_0^2 \left(-x^2 + 4\right)dx = 2\left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(-\frac{8}{3} + 8\right) = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

1454. $y = 5 - 4x - x^2$; $y = 1 - x$.

Решение.

Построим графики данных функций (рис. 161):

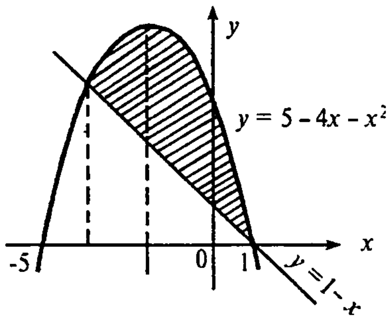


Рис. 161

1) $y = 5 - 4x - x^2$.
$x^2 + 4x - 5 = 0$.
$x_1 = -5$; $x_2 = 1$.
$y(0) = 5$.

2) $y = 1 - x$.
$x = 0 \Rightarrow y = 1$.
$y = 0 \Rightarrow x = 1$.

Найдем точки пересечения графиков:

$5 - 4x - x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4$; $x_2 = 1$.

$$S = \int_{-4}^{1} \left(5 - 4x - x^2 - 1 + x\right)dx = \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = 20\frac{5}{6}.$$

Ответ: $20\frac{5}{6}$.

1455. $y = \sin x$, при $|x| \le \pi$. **1456.** $y = x + 3$, $y = x^2 + 1$.

1457. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. **1458.** $xy = 4$; $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$.

1459. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$. **1460.** $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

1461. $y = \sqrt{x+1}$, $y = \frac{3}{8}x$, $y = 0$. **1462.** $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

Глава 11
Прогрессии

§1. Арифметическая прогрессия

$$\boxed{a_n = a_1 + d(n-1),\ n \in N}$$ — формула любого члена прогрессии.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n,}$$

где d — разность прогрессии, n — номер члена или количество членов прогрессии, a_1 — первый член прогрессии, S_n – сумма n первых членов прогрессии.

Характеристическое свойство конечной арифметической прогрессии

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}}$$

Каждый член арифметической прогрессии, кроме первого и последнего, является средним арифметическим между предыдущим и последующим членами.

1463. Найдите сумму всех четных положительных двузначных чисел, кратных числу 3.

Решение.

Искомые числа представляют собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 12$; $d = 6$; $a_n = 96$. Найдем число членов АП, применив формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$. $96 = 12 + 6(n-1) \Rightarrow n = 15$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{15} = \frac{12 + 96}{2} \cdot 15 = 810.$$

Ответ: 810.

1464. Найдите сумму всех двузначных положительных чисел, кратных 5.

1465. Найдите сумму всех натуральных чисел, меньших 100 и кратных 7.

1466. Градусные меры углов прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите тангенс меньшего угла треугольника.

1467. Градусные меры углов треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите тангенс меньшего угла треугольника, если величина его большего угла равна 75°.

1468. Первый член арифметической прогрессии равен 111, а разность равна –6. Какое наименьшее число последовательных членов этой прогрессии, начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была отрицательной?

Решение.

Найдем n, при которых $S_n < 0$,

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n < 0, \quad \frac{222 - 6n + 6}{2} \cdot n < 0,$$

$(114 - 3n)n < 0$.

Так как n – натуральное число, то $114 - 3n < 0$, $n > 38$, $n = 39$.

Ответ: 39.

1469. Второй член арифметической прогрессии составляет 107% первого. Сколько процентов первого члена составляет десятый член этой прогрессии?

1470. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой сумма третьего и седьмого членов равна 22, а разность между восьмым и вторым равна 12.

1471. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превышающих 100, которые не делятся на 4.

1472. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превышающих 125, которые не делятся на 5.

1473. Найдите сумму четырех последовательных отрицательных нечетных чисел, зная, что сумма их квадратов больше суммы квадратов заключенных между ними четных чисел на 48.

Решение.

Пусть первое нечетное число a, тогда следующие нечетные числа $(a + 2)$; $(a + 4)$; $(a + 6)$. Четные числа, заключенные между ними: $(a + 1)$; $(a + 3)$; $(a + 5)$.

$a^2 + (a + 2)^2 + (a + 4)^2 + (a + 6)^2 - (a + 1)^2 - (a + 3)^2 - - (a + 5)^2 = 48.$

Сгруппируем двучлены и получим разность квадратов в каждой группе двучленов.

$a^2 + [(a + 2)^2 - (a + 1)^2] + [(a + 4)^2 - (a + 3)^2] + [(a + + 6)^2 - (a + 5)^2] - 48 = 0.$ $a^2 + (2a + 3) + (2a + 7) + (2a + + 11) - 48 = 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 27 = 0 \Rightarrow a_1 = -9$; $a_2 = 3$ – не удовлетворяет условию задачи.

Итак, искомая сумма $(-9) + (-7) + (-5) + (-3) = -24$.

Ответ: -24.

1474. Среднее арифметическое третьего и четвертого членов арифметической прогрессии равно 12,5, а произведение второго и пятого – 136. Найдите сумму первого и второго членов.

1475. Найдите седьмой член арифметической прогрессии, если $a_3 + a_{11} = 20$.

1476. При каких значениях x числа $1 + x$, $x^2 + 4$, $2x + 9$, $9x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

1477. При каких значениях k числа $2k - 2$; $k^2 + 1$; $4k$; $3k^2 - - 1$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

1478. Сумма первых восьмидесяти трех членов арифметической прогрессии равна 5623. Найдите сумму первых восьмидесяти трех членов такой прогрессии, каждый член которой на 2 больше соответствующего члена данной прогрессии.

Решение.

Обозначим сумму и члены получившейся прогрессии соответственно S_{83}^1 и a_n^1. Тогда $a_n^1 = a_n + 2$.

$$S_{83}^1 = a_n^1 + a_2^1 + \ldots + a_{83}^1 = a_1 + 2 + a_2 + 2 + \ldots + a_{83} + 2 =$$

$$= 2 \cdot 83 + \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{83}}_{S_{83}} = 166 + S_{83} = 166 + 5623 = 5789.$$

Ответ: 5789.

1479. Градусные меры углов составляют арифметическую прогрессию, у которой $\alpha_1 = 10°$, $\alpha_2 = 15°$. Найдите $\sin \alpha_{44}$.

Решение.

$d = \alpha_2 - \alpha_1$, $d = 5°$.

По формуле общего члена арифметической прогрессии $\alpha_{44} = \alpha_1 + 43d$, $\alpha_{44} = 10° + 43 \cdot 5°$; $\alpha_{44} = 225°$; $\sin 225° =$ $= \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1480. Первый член арифметической прогрессии равен -100, а разность прогрессии 8. Какое наименьшее число последовательных членов этой прогрессии надо взять, чтобы их сумма, начиная с первого, была положительной?

§2. Геометрическая прогрессия

$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ n \in N}$ — формула общего члена прогрессии.

$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ — характеристическое свойство геометрической прогрессии: каждый член, начиная со второго, является средним геометрическим между предыдущим и последующим членами.

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}\ (q \neq 1)$$ — сумма первых n членов прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{q-1},\ |q| < 1$$ — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

1481. При каких значениях t числа $t+1$, $4t$, $16t-12$ составляют геометрическую последовательность?

Решение.

Если три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии, то выполняется равенство $(4t)^2 =$
$= (t+1)(16t-12)$.

Решим данное уравнение.

$16t^2 = 16t^2 - 12t + 16t - 12$; $4t = 12$, $t = 3$.

Значит, при $t = 3$ числа $t+1$, $4t$, $16t-12$ составляют геометрическую прогрессию.

Это числа: 4, 12, 36.

Ответ: $t = 3$.

1482. Найдите значение p, при котором числа $p-1$, $2p$, $5p+3$ составляют геометрическую прогрессию.

1483. Найдите значение t, при котором числа $t-1$; $2t$; $4t+6$ составляют геометрическую прогрессию.

1484. Найдите значение t, при котором числа $t-2$, $3t$, $9t+30$ составляют геометрическую прогрессию.

1485. При каких значениях x числа $2x$, $5-x$, $7+x$, $20-4x$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?

1486. При каких значениях k числа $2k-1$, $2k+1$, $9k$, $k+26$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?

1487. При каких положительных значениях k числа $2k-2$, $2k+2$, $9k$, $13{,}5k^2$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?

Решение.

Знаменатель геометрической прогрессии можно получить, разделив любой член на предыдущий, значит,

$\frac{2k+2}{2k-2}=\frac{9k}{2k+2} \Rightarrow 7k^2 - 13k - 2 = 0$, $k_1 < 0$, не удовлетворяет условию задачи. $k_2 = 2$.

Проверим, является ли четвертое число членом этой прогрессии. Третий член равен 18, четвертый $13{,}5 \cdot 4 = 54$

(легко убедиться, что $q = 3 : \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 2} = 3$).

Ответ: 2.

1488. Второй член геометрической прогрессии составляет 110% от ее первого члена. Сколько процентов составляет ее шестой член от четвертого?

Решение.

1) b_2 составляет 110% от $b_1 \Rightarrow b_2 = 1{,}1b_1 \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = 1{,}1$, т. е. $q = 1{,}1$.

2) $\left.\begin{matrix} b_6 = b_1 \cdot q^5 \\ b_4 = b_1 \cdot q^3 \end{matrix}\right| \Rightarrow \frac{b_6}{b_4} = \frac{b_1 \cdot 1{,}1^5}{b_1 \cdot 1{,}1^3} = 1{,}1^2 = 1{,}21;$

$\frac{b_6}{b_4} = 121\%.$

Ответ: 121.

1489. Второй член геометрической прогрессии составляет 20% от ее первого члена. Сколько процентов составляет пятый ее член от третьего?

1490. Найдите сумму членов геометрической прогрессии $\frac{1}{16}; \frac{1}{8}; \ldots$ с третьего по шестой включительно.

Решение.

Найдем знаменатель прогрессии $q = \frac{b_2}{b_1} = 2.$ Сумму членов с третьего по шестой найдем по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$

Прогрессия, сумму членов которой требуется найти, имеет вид b_3, b_4, b_5, b_6, количество членов — 4, т. е. $n = 4$.

$$S_4 = \frac{b_3\left(q^4-1\right)}{q-1} = \frac{1\cdot\left(2^4-1\right)}{4\cdot 1} = 3{,}75.$$

Ответ: 3,75.

1491. Найдите первый член геометрической прогрессии, у которой сумма второго и четвертого членов равна 30, а разность между седьмым и третьим равна 180.

Решение.

$$\begin{cases} b_2 + b_4 = 30, \\ b_7 - b_3 = 180. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q + b_1 \cdot q^3 = 30, \\ b_1 q^6 - b_1 q^2 = 180. \end{cases}$$

Разделим почленно первое уравнение на второе.

$$\frac{b_1 q\left(1+q^2\right)}{b_1 q^2\left(q^4-1\right)} = \frac{1}{6}. \quad \frac{1+q^2}{q\left(q^2+1\right)\left(q^2-1\right)} = \frac{1}{6} \Rightarrow q\left(q^2-1\right) = 6.$$

$q^3 - q - 6 = 0$. $q_1 = 2$, разделим $q^3 - q - 6$ на $(q - 2)$, получим $(q - 2)(q^2 - 2q + 3) = 0$, $q^2 - 2q + 3 \neq 0$, так как $D < 0$.

Подставим $q = 2b$ в первое уравнение системы.

$2b_1 + 8b_1 = 30 \Rightarrow 10b_1 = 30 \Rightarrow b_1 = 3$.

Ответ: 3.

1492. Между числами 4 и 324 вставьте три средних геометрических.

Решение.

Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим между предыдущим и последующим. Значит, в последовательности всего 5 членов, $b_1 = 4$, $b_5 = 324$. Нужно найти b_2, b_3, b_4, для чего необходимо найти знаменатель прогрессии.

$b_5 = b_1 \cdot q^4 \Rightarrow 324 = 4 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = 3$ (-3 не удовлетворяет, так как все члены прогрессии положительные).

$b_2 = 4 \cdot 3 = 12$; $b_3 = 12 \cdot 3 = 36$; $b_4 = 36 \cdot 3 = 108$.

Ответ: 12; 36; 108.

1493. Между числами 1 и 64 вставьте два средних геометрических.

1494. Найдите второе число из четырех чисел, образующих геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна –49, а сумма средних равна 14.

1495. Найдите первый член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 3, а сумма шести первых членов равна 1820.

1496. Второй и третий члены арифметической прогрессии равны соответственно 14 и 16. Найдите первый член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен разности арифметической прогрессии и суммы трех первых членов обеих прогрессий равны.

1497.1. Три числа, сумма которых равна 93, составляют геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать как первый, второй и седьмой члены арифметической прогрессии. Найдите сумму этих чисел.

1497.2. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к первому числу прибавить 1, ко второму –4, к третьему 19, то получится геометрическая прогрессия. Найдите третье число.

Решение.

$b_1 = a_1 + 1$; $b_2 = a_2 + 4$; $b_3 = a_3 + 19$.

$a_1 + a_2 + a_3 = 15$.

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 3a_2 = 15 \Rightarrow a_2 = 5$, $a_1 = 5 - d$, $a_3 = 5 + d$.

$b_1 = 6 - d$; $b_2 = 9$; $b_3 = 24 + d$.

$b_2^2 = b_1 \cdot b_3 \Rightarrow 81 = (6 - d)(24 + d) \Rightarrow d^2 + 18d - 63 = 0 \Rightarrow \Rightarrow d_1 = -21$; $d_2 = 3$.

1) $a_1 = 5 - d = 26 \Rightarrow a_3 = 26 - 42 = -16$;

2) $a_1 = 5 - d = 2 \Rightarrow a_3 = 2 + 6 = 8$.

Ответ: –16, 8.

1497.3. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1; 6 и 3, то получится арифметическая прогрессия. Найдите наибольший знаменатель геометрической прогрессии.

Глава 12. Планиметрия

§1. Треугольники

Соотношения между сторонами треугольника (неравенство треугольника)

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, т. е.

$a < b + c$; $b < a + c$; $c < a + b$

(рис. 162).

Соотношение между углами треугольника: сумма внутренних углов треугольника равна 180°, т. е.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (рис. 162).

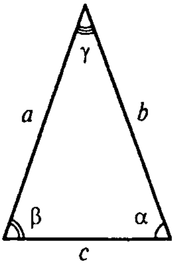


Рис. 162

Соотношения между сторонами и углами треугольника:

1) против равных сторон треугольника лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны.
2) Против большей стороны треугольника лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

Признаки равенства треугольников

1) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
2) Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Замечательные отрезки в треугольнике и их свойства

1) Биссектриса угла треугольника является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон этого угла. *АД* – биссектриса (рис. 163).

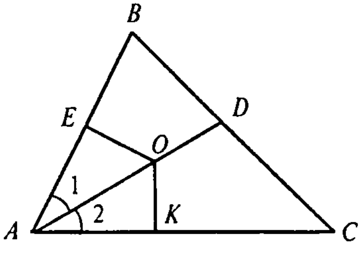


Рис. 163

$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow OE = OK$
$(OE \perp AB;\ OK \perp AC)$.

2) Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные сторонам треугольника, которые прилежат к этим отрезкам.

$$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ или } \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \text{ (рис. 163).}$$

3) Биссектрисы трех углов треугольника пересекаются в одной точке.

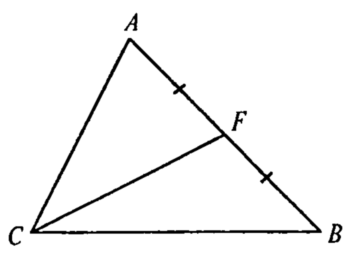


Рис. 164

4) Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны (рис. 164).
$AF = FB \Rightarrow CF$ — медиана.

5) Медиана треугольника делит его на два треугольника, площади которых равны

$$S_{\Delta CAF} = S_{\Delta CFB} \text{ (рис. 164).}$$

Запомните!

Все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

$CO : OM = 2 : 1$;
$AO : ON = 2 : 1$;
$BO : OK = 2 : 1$ (рис. 165).

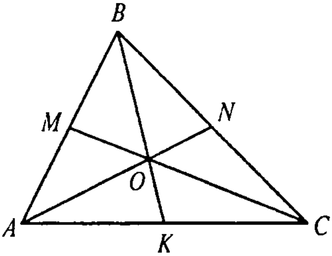


Рис. 165

Медиана треугольника $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$,

где a, b, c — стороны треугольника, m_b — медиана к стороне b.

6) Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение.

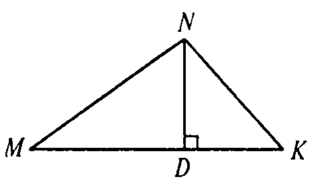


Рис. 166

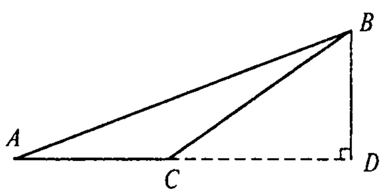


Рис. 167

$ND \perp MK \Rightarrow ND$ — высота ΔMNK (рис. 166).

$BD \perp AC \Rightarrow BD$ — высота ΔABC (рис. 167).

7) Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

$$h_b = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

8) Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

В ΔABC $AM = MB$; $BN = NC \Rightarrow MN$ – средняя линия ΔABC (рис. 168).

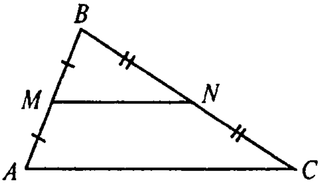


Рис. 168

9) Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине

$$MN \parallel AC;\ MN = \frac{1}{2} AC \quad \text{(рис. 168).}$$

Запомните!

Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника.

Центр описанной около треугольника окружности находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через середины его сторон.

Пропорциональные отрезки. Теорема Фалеса

Если две произвольные непараллельные прямые пересечены рядом параллельных прямых, то отрезки, отсекаемые на непараллельных прямых, пропорциональны.

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_4A_5}{B_4B_5} \quad \text{(рис. 169).}$$

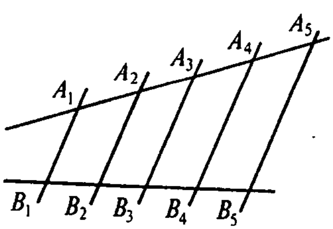


Рис. 169

Отрезки параллельных прямых, заключенных между сторонами угла, пропорциональны отрезкам, отсекаемым этими прямыми на сторонах угла, считая от его вершины.

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=\frac{OA_2}{OA_1}=\frac{OB_2}{OB_1} \text{ (рис. 170).}$$

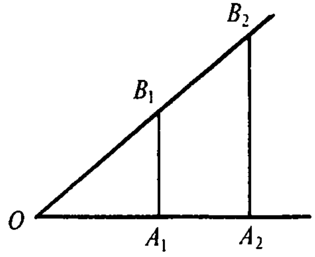


Рис. 170

Признаки подобия треугольников

1) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
2) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
3) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны.

Запомните!

Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных линейных элементов (сторон, высот, медиан, биссектрис, периметров, радиусов вписанных и описанных окружностей).

Запомните!

Формулы для вычисления площадей треугольников

Площадь правильного треугольника $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a – сторона правильного треугольника.

$S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h$ (рис. 171). $S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha$ (рис. 172).

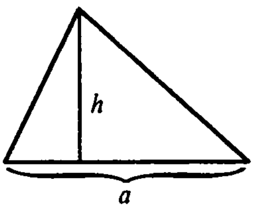


Рис. 171

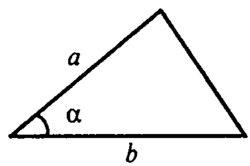


Рис. 172

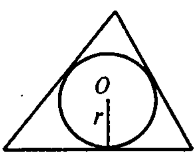


Рис. 173

$S_\Delta = pr$ (рис. 173), r — радиус вписанной в треугольник окружности, $p = \frac{a+b+c}{2}$, a, b, c — стороны треугольника.

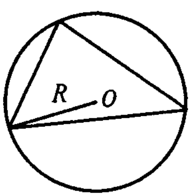


Рис. 174

$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$ (рис. 174), R — радиус описанной около треугольника окружности.

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона.

$S_\Delta = \frac{1}{2}AB \cdot AC$ (рис. 175). Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

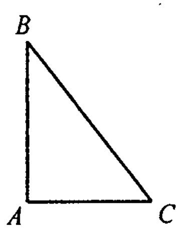


Рис. 175

Равнобедренный треугольник

Если две стороны треугольника равны, то такой треугольник называется равнобедренным (рис. 176).

Равные стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием треугольника.

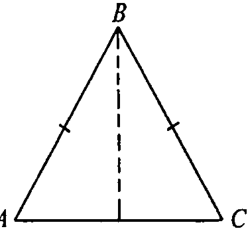


Рис. 176

Свойства равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике:

1) углы при основании равны;
2) медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой;
3) высоты, проведенные к боковым сторонам, равны;
4) медианы, проведенные к боковым сторонам, равны;
5) биссектрисы углов при основании равны.

Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике:

1) все углы равны 60°;
2) медиана, высота и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают; все медианы, высоты и биссектрисы равны;
4) все медианы, высоты и биссектрисы пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной и описанной окружностей.

Запомните!

В равностороннем треугольнике:

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

a – сторона треугольника;

$h = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $BN = MC = AK$;

$OM = ON = OK = r$; $BO = OC = AO = R$ (рис. 177).

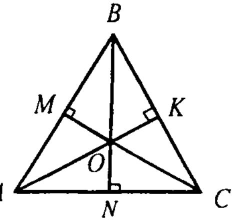


Рис. 177

Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике:

1) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора), т. е. $c^2 = a^2 + b^2$, где c — гипотенуза, a и b — катеты;
2) центр описанной окружности находится на середине гипотенузы, радиус описанной окружности равен половине гипотенузы (и равен медиане, проведенной из вершины прямого угла);
3) сумма величин острых углов равна 90°;
4) длина катета, лежащего против угла 30°, равна половине гипотенузы;
5) квадрат высоты, опущенной из вершины прямого угла, равен произведению отрезков гипотенузы, на которые ее делит основание высоты: $CD^2 = AD \cdot DB$ (рис. 178);
6) квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу: $AC^2 = AB \cdot AD$; $CB^2 = AB \cdot BD$ (рис. 178).

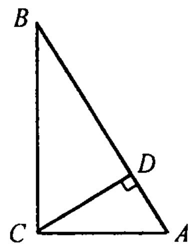


Рис. 178

Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Следующие соотношения обосновываются определениями тригонометрических функций и используются при нахождении элементов прямоугольного треугольника. В значительном большинстве задач по планиметрии и стереометрии применяются эти правила (В4; В9; С2; С4).

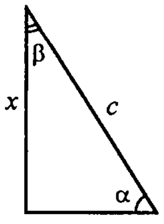


Рис. 179

Запомните!

Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего этому катету угла.

$x = c \sin \alpha$
$x = c \cos \beta$

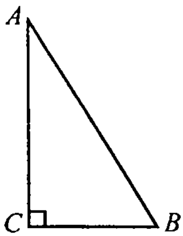


Рис. 180

Пример 1. В Δ ABC $\angle C = 90°$, $AB = 6$, $\sin \angle A = 0{,}8$. Найдите длину AC.

Решение.

1) $AC = AB \cos A$.

2) $\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$ (знак «плюс», так как угол A — острый)

$\cos A = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6.$

3) $AC = 6 \cdot 0{,}6 = 3{,}6$.

Ответ: 3,6.

Запомните!

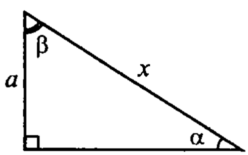


Рис. 181

Гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего или на косинус прилежащего этому катету угла.

$$x = \frac{a}{\sin\alpha}; \quad x = \frac{a}{\cos\beta}.$$

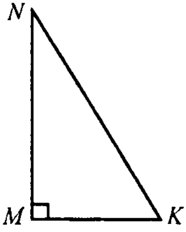


Рис. 182

Пример 2. В Δ MNK $\angle M = 90°$, $MK = 6$, $\sin \angle N = 0{,}4$. Найдите длину MN (рис. 182).

Решение.

$$MN = \frac{MK}{\sin\angle N} = 6 : \frac{2}{5} = 15.$$

Ответ: 15.

Пример 3. В Δ DEF $\angle E = 90°$, $EF = 8$, $\sin \angle F = 0{,}6$. Найдите длину DF (рис. 183).

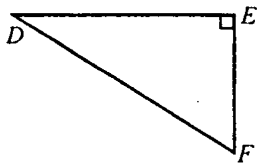


Рис. 183

Решение.

1) $DF = \dfrac{EF}{\cos\angle F}$.

2) $\cos\angle F = \sqrt{1-\sin^2 F} = 0{,}8$.

3) $DF = \dfrac{8}{0{,}8} = 10$.

Ответ: 10.

Запомните!

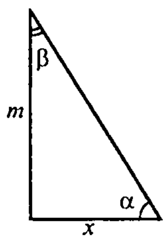


Рис. 184

Катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего искомому катету угла.

$x = m \operatorname{tg} \beta$ (угол β — противолежащий искомому катету x)

$x = m \operatorname{ctg} \alpha$

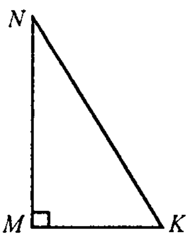


Рис. 185

Пример 4. В $\Delta\, MNK$ Р $M = 90°$, $MN = 9$, $\operatorname{tg}\angle K = 3$. Найдите длину MK (рис. 185).

Решение.

1) $MK = MN \cdot \operatorname{ctg}\angle K$ (угол K — прилежащий искомому катету MK).

2) $\operatorname{ctg} K = \dfrac{1}{\operatorname{tg} K} = \dfrac{1}{3}$.

3) $MK = 9 \cdot \dfrac{1}{3} = 3$.

Ответ: 3.

Соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника

Следующие теоремы позволяют по известным сторонам и углам любого треугольника находить все его неизвестные элементы.

Запомните!

Теорема синусов. В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла есть величина, постоянная для данного треугольника, равная диаметру описанной окружности.

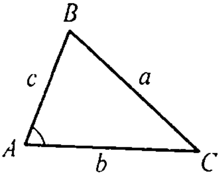


Рис. 186

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (рис. 186).}$$

Теорема косинусов. Квадрат стороны любого треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A \text{ (рис. 186).}$$

Основные задачи на решение косоугольных треугольников

Задача 1. Даны три стороны треугольника. Найти его углы.

Решение. По теореме косинусов находим два угла треугольника. Третий угол находим, вычитая сумму двух из 180°. Эта задача имеет решение, если большая из сторон меньше суммы двух других. Единственность решения следует из третьего признака равенства треугольников.

Задача 2. Даны сторона и два угла треугольника. Найти третий угол и две стороны.

Решение. Третий угол находят вычитанием суммы двух известных углов из 180°. По теореме синусов вычисляют две неизвестные стороны. Задача всегда имеет решение, и притом единственное, если сумма двух данных углов меньше 180°. Единственность решения следует из второго признака равенства треугольников.

Задача 3. Даны две стороны, например a, b, и угол γ, противолежащий третьей стороне. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение. По теореме косинусов находим сторону c. По теореме косинусов находим один из неизвестных углов, например α. Затем: $\beta = 180° - \alpha - \gamma$. Задача всегда имеет решение, и притом единственное, единственность решения следует из первого признака равенства треугольников.

Задача 4. Даны две стороны, например a и b, и угол, противолежащий одной из них, например a. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение. По теореме синусов находим $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$. По значению $\sin\beta$ находим углы β_1 и β_2. Данному значению синуса на отрезке от 0° до 180° соответствуют два угла, так как $\sin\beta_1 = \sin(180° - \beta_2)$.

Выбираем из них один или оба, учитывая, что против большей из сторон a и b лежит больший угол. Зная углы α и β, находим $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, а затем сторону c по теореме синусов.

Эта задача может не иметь решения, либо иметь одно или два решения, в зависимости от соотношения величин сторон a и b, а также a, b и $\sin\alpha$.

Предложенные методы решения задач не являются единственными.

§2. Задания B4. Подготовка к выполнению заданий B9, C2

Запомните!

Решение задач по геометрии желательно начинать «с конца», т. е. сначала написать формулу (или выражение), которая дает прямой ответ на вопрос, поставленный в задаче. Тогда будет видно, какие элементы необходимо найти в процессе решения, и нетрудно составить план решения задачи.

1498.1. В треугольнике ABC угол C равен 118°, AD – биссектриса угла A, $\angle CAD = 12°$. Найдите величину угла B.

1498.2. В равнобедренном треугольнике (MK – основание), $MN = 12$, $\cos M = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите длину высоты, проведенной к основанию треугольника.

1498.3. В равнобедренном треугольнике DEF основание DF равно 18, косинус угла F равен $\frac{4\sqrt{14}}{15}$. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне треугольника.

1499.1. В треугольнике ABC угол A равен 82°, BD – биссектриса угла B, угол $ABD = 16°$. Найдите величину угла C.

1499.2. В $\Delta\, DEF$ $\angle\, D = 90°$, $DF = 6\sqrt{15}$; $\cos F = \frac{7}{8}$. Найдите длину высоты, проведенной к гипотенузе треугольника.

1499.3. В $\Delta\, ABC$ угол C равен 90°, косинус угла B равен $\frac{5}{13}$, $AC = 12$. Найдите длину гипотенузы.

1500.1. В $\Delta\, ABC$ угол A равен 60°, $AB = 6$, $AC = 4$. Найдите $\sqrt{7}\, BC$.

1500.2. Биссектриссы, проведенные к боковым сторонам AB и AC равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите величины углов треугольника, если $\angle BOC = 140°$.

1501. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AF и высота AH. Найдите величины углов треугольника AHF, если $\angle B = 112°$.

1502.1. В $\Delta\, ABC$ $AB = \sqrt{6}$; $AC = \sqrt{2}$, $\angle A = 30°$. Найдите длину стороны BC.

1502.2. В $\Delta\, CDE$ $\angle C = 60°$, $\angle E = 45°$, $CD = 3\sqrt{6}$. Найдите длину стороны DE.

1503. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, равна $10\sqrt{3}$. Один из острых углов треугольника равен $30°$. Найдите площадь треугольника.

Дано: $ML = 10\sqrt{3}$; $\angle N = 30°$.
Найти: $S_{\Delta MNK}$ (рис. 187).

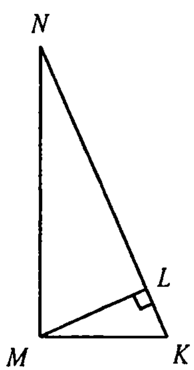


Рис. 187

Решение.

1) $S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2} ML \cdot NK.$

2) В ΔMNL $MN = 20\sqrt{3}$ (ML лежит против угла $30°$).

3) В ΔMNK $NK = \dfrac{MN}{\cos 30°} = \dfrac{20\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 40.$

4) $S = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 40 = 200\sqrt{3}.$

Ответ: $200\sqrt{3}$.

1504. Используя данные, указанные на рис. 188—194, найдите x:

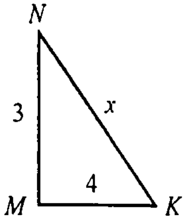


Рис. 188

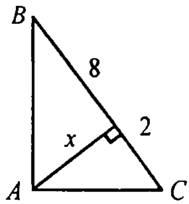


Рис. 189

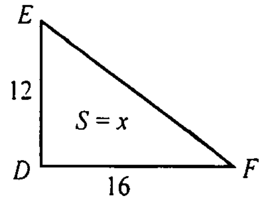


Рис. 190

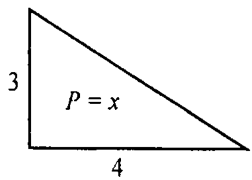


Рис. 191

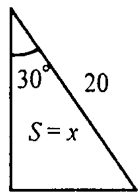


Рис. 192

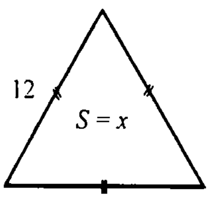


Рис. 193

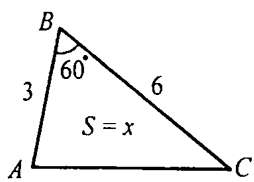


Рис. 194

1505.1. В $\Delta\ MNK$ угол N равен 45°, угол K — 30°, $MN = 5\sqrt{2}$. Найдите длину стороны MK.

1505.2. В $\Delta\ ABC$ $AC = BC$, $AB = 16$, $\cos A = 0{,}8$. Найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне треугольника.

1506.1. Два угла треугольника относятся как 5 : 7, величина третьего угла на 58° меньше первого. Найдите величину третьего угла треугольника.

1506.2. В ΔABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$, $\angle C = 135°$. Найдите длину высоты, проведенной на сторону BC.

1507.1. Средняя линия треугольника на 3,6 меньше основания треугольника. Найдите сумму средней линии и основания треугольника.

1507.2. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 16$, $AC = 10$. Найдите синус угла A.

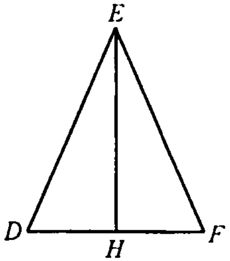


Рис. 195

1508.1. В ΔDEF $DE = EF$, $DF = 8$, $\sin\angle D = \frac{15}{17}$. Найдите длину высоты, проведенной к основанию треугольника.

Решение.

1) В ΔDEH $EH = DH \cdot \operatorname{tg} D$ (угол D — противолежащий катету EH, который нужно найти).

2) Применим формулу

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2 D = \frac{289}{225} - 1 = \frac{64}{225}.$$

$$\operatorname{ctg} D = \frac{8}{15} \Rightarrow \operatorname{tg} D = \frac{15}{8}.$$

3) $EH = \frac{4\cdot 15}{8} = 7{,}5.$

Другое возможное решение.

1) В ΔDEH $DE = \frac{DH}{\cos D}$. $\cos D = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}.$

2) $DE = \frac{4\cdot 17}{8} = \frac{17}{2}.$

3) $EH = \sqrt{DE^2 - DH^2} = \sqrt{\frac{289}{4} - 16} = \frac{15}{2}.$

Ответ: 7,5.

1508.2. В Δ MNK $MN = NK$, $MK = 6\sqrt{5}$, $\sin \angle M = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Найдите длину высоты, проведенной к основанию треугольника.

§3. Подготовка к выполнению заданий С4

1509. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Точки K, L, N принадлежат, соответственно, сторонам AB, BC и AC. $KL \parallel AA_1$; $KN \parallel BB_1$; $AK : AB = 1 : 4$. Найдите площадь треугольника KLN, если площадь ΔABC равна 16.

1510. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 3, а высота, проведенная к основанию, равна 8.

Дано: $OK = 3$ – радиус вписанной окружности.
$BД = 8$ (рис. 196).
Найти: $P_{\Delta ABC}$.
Решение:
$P_{\Delta ABC} = 2AB + AC$.
Пусть $ДC = x$, тогда $KC = x$ ($\Delta OДC = \Delta OKC$ по катету и гипотенузе).
$OB = BД - OД = 5$.

В ΔOBK $BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = 4$.

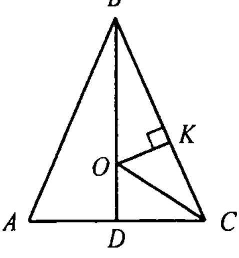


Рис. 196

$P_{\Delta ABC} = 4x + 8$; $\frac{P}{2} = 2x + 4$.
$S_{\Delta ABC} = (2x + 4) \cdot 3$;
$S_{\Delta ABC} = BD \cdot CD = 8x \Rightarrow 8x = 6x + 12 \Rightarrow x = 6$;
$P_{\Delta ABC} = 4x + 8 = 32$.

Ответ: 32.

Комментарий. x можно найти в ΔDBC по теореме Пифагора $64 + x^2 = (4 + x)^2 \Rightarrow x = 6$.

1511. В равнобедренном треугольнике, периметр которого равен 12, высота, проведенная к основанию, равна 3. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

1512. Точки D и E — основания высот треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. $\dfrac{DE}{AC} = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите величину стороны AC.

1513. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 60°. Высота, опущенная на основание, равна 12. Найдите длину радиуса описанного круга.

1514. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, его площадь – 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AK, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь ΔBOK.

Дано: В ΔABC $AB = BC = 15$; $AK \perp BC$; $BE \perp AC$.

Найти: $S_{\Delta BOK}$ (рис. 197).

Решение.

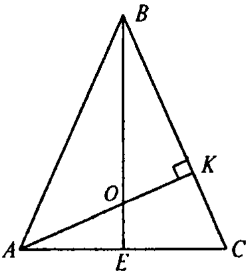


Рис. 197

1) $S_{\Delta BOK} = \dfrac{1}{2} OK \cdot BK$ (ΔBOK прямоугольный).

2) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AK \cdot BC \Rightarrow 67{,}5 = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot AK \Rightarrow AK = 9.$

3) В ΔABK $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{225-81} = 12.$

4) В ΔABK BO – биссектриса $\angle ABK \Rightarrow \dfrac{AO}{OK} = \dfrac{AB}{BK} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AO+OK}{OK} = \frac{AB+BK}{BK} \Rightarrow \frac{9}{OK} = \frac{27}{12} \Rightarrow \frac{1}{OK} = \frac{3}{12} \Rightarrow OK = 4.$$

$$S_{\Delta BOK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24.$$

Ответ: 24.

1515. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, боковая сторона $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты $CД$ и AK, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника COK.

1516. Точка N лежит на стороне AB треугольника ABM. Найдите площадь ΔANM, если $AN = 4$; $BN = 12$; $\angle A = 30°$, $\angle AMN = \angle ABM$.

1517. Длина медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, равна $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$. Периметр треугольника равен $\frac{24}{\sqrt{\pi}}$. Найдите площадь вписанного в треугольник круга.

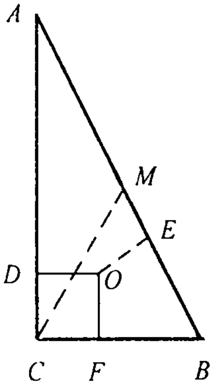


Рис. 198

Дано: $AB + AC + BC = \frac{24}{\sqrt{\pi}}$;

$AM = MB$; $CM = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

Найти: S вписанного круга (рис. 198).

Решение.

1) Пусть x – радиус вписанного круга.
$S = \pi \cdot x^2$ $(OД = OE = OF = x)$.
2) $AB = 2$ см (M – центр описанной около треугольника окружности) $\Rightarrow$ $AB = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.
3) $AД = AE$; $FB = BE \Rightarrow P = 2AE + 2BE + 2x \Rightarrow \frac{24}{\sqrt{\pi}} = $
$= 2 \cdot (AE + BE) + 2x \Rightarrow \frac{24}{\sqrt{\pi}} = \frac{20}{\sqrt{\pi}} + 2x \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

4) $S = \pi \cdot \frac{4}{\pi} = 4.$

Ответ: 4.

1518. На стороне MK ΔMKN отмечена точка A так, что $AM = 3$, $AK = 13$, $\angle AMN = \angle MKN$. Найдите площадь ΔANK, если $\angle M = 60°$.

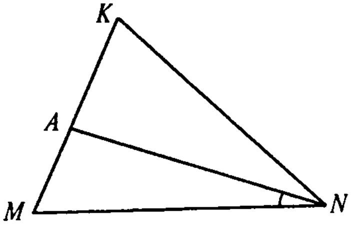


Рис. 199

Дано: $AM = 3$, $AK = 13$,
$\angle AMN = \angle MKN$,
$\angle M = 60°$ (рис. 199).
Найти: $S_{\Delta ANK}$

1) $S_{\Delta ANK} = S_{\Delta MKN} - S_{\Delta AMN} =$

$= \frac{1}{2} MN \cdot AK \sin 60° -$

$- \frac{1}{2} MN \cdot AN \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} MN(16-3) = \frac{13\sqrt{3}}{4} MN.$

2) $\Delta AMN \sim \Delta MKN$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{MN}{AK} \Rightarrow$

$\Rightarrow MN^2 = 3 \cdot 16 \Rightarrow MN = 4\sqrt{3}.$

3) $S_{\Delta ANK} = \frac{13\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 39.$

Ответ: 39.

1519. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

1520. Найдите длину меньшей из сторон AB и AC треугольника ABC, если $BC = 8$, а длины высот, проведенных к AC и BC, равны соответственно 6,4 и 4.

1521. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная на боковую сторону, равна 5. Найдите длины боковых сторон.

1522. На стороне $ДК$ треугольника $ДЕК$ отмечена точка C так, что $ДC = 6$, $CK = 12$, $\angle CEД = \angle EKД$. Найдите площадь $\Delta ДЕК$, если $\angle Д = 60°$.

1523. Около равнобедренного треугольника, основание которого равно 28, описана окружность радиуса 25. Найдите расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника.

1524. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20. Найдите площадь треугольника и радиус вписанной полуокружности.

1525. Площадь прямоугольного треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найдите длину его высоты, проведенной к гипотенузе, если эта высота делит прямой угол в отношении 1 : 2.

§4. Многоугольники

Параллелограмм

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны равны;
2) противоположные углы равны;
3) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;
4) диагонали точкой пересечения делятся пополам;
5) углы, прилежащие к одной стороне, в сумме составляют 180°;
6) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон параллелограмма, т. е. $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ (рис. 200).

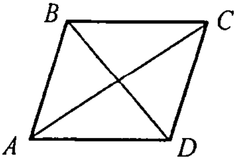


Рис. 200

Запомните!

Формулы для вычисления площади параллелограмма.

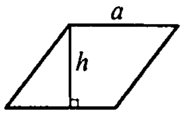


Рис. 201

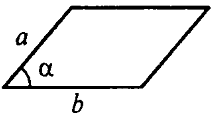


Рис. 202

$S = a \cdot h$ (рис. 201).

$S = ab \cdot \sin\alpha$ (рис. 202).

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\angle AOB,$

где $d_1 = AC$, $d_2 = BD$ (рис. 203).

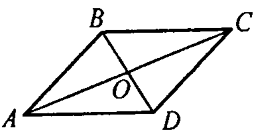


Рис. 203

Виды параллелограмма

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, кроме того, он имеет свойства, присущие только ромбу:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны, $AC \perp BD$ (рис. 204);
2) диагонали делят внутренние углы ромба пополам, т. е. диагонали являются биссектрисами углов ромба, $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 204);
3) $\boxed{S_p = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2}$, $d_1 = AC$, $d_2 = BD$.

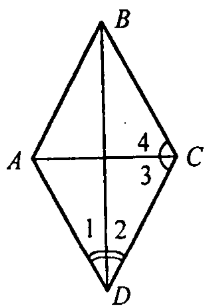


Рис. 204

Запомните!

В параллелограмм можно вписать окружность только, если он ромб (квадрат).

Прямоугольник

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы равны 90°. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма, кроме того, у него есть свойства, присущие только прямоугольнику:

1) диагонали прямоугольника равны, $AC = BD$ (рис. 205);
2) $S = a \cdot b$ (рис. 205).

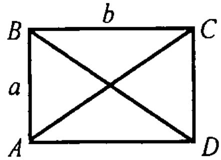


Рис. 205

Запомните!

Около параллелограмма можно описать окружность только, если он прямоугольник (квадрат).

Квадрат – это параллелограмм, у которого все стороны равны и все внутренние углы равны. Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Формулы для вычисления площади квадрата:

$$S = a^2;\ S = \frac{1}{2}d^2,$$

$d = AC$ (рис. 206).

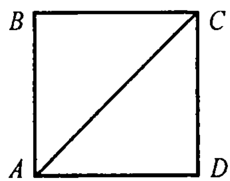


Рис. 206

Трапеция

Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется трапецией. Параллельные стороны трапеции называются основаниями, непараллельные – боковыми сторонами.

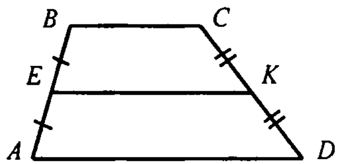


Рис. 207

Сумма внутренних углов трапеции равна 360°.

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон:

$BE = AE$; $CK = KD \Rightarrow EK$ – средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 207).

Запомните!

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований и параллельна основаниям:

$$EK = \frac{АД + BC}{2};$$

$EK \parallel BC$; $EK \parallel AD$;

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h; \; h = BM;$$

$$S = EK \cdot BM$$

(EK – средняя линия трапеции, рис. 208).

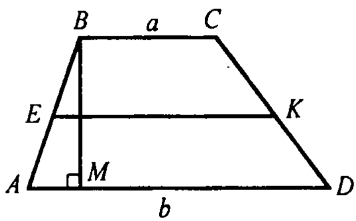


Рис. 208

Если боковые стороны трапеции равны, то она называется *равнобедренной*.

У равнобедренной трапеции:

1) углы при основании равны;
2) диагонали равны;
3) прямая, проведенная через точку пересечения диагоналей перпендикулярно основаниям, является осью симметрии этой трапеции.

Запомните!

Около трапеции можно описать окружность только в том случае, если она равнобедренная.

Если один из углов трапеции равен 90°, то трапецию называют прямоугольной.

Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется *выпуклым*, если все его точки находятся по одну сторону от каждой из прямых, проходящих через любую сторону этого многоугольника.

Запомните!

Сумма величин внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна $180° \cdot (n - 2)$. Сумма величин внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность лишь в том случае, если суммы длин его противоположных сторон равны.

Около четырехугольника можно описать окружность лишь в том случае, если суммы противоположных углов равны 180°.

Многоугольник с равными сторонами и углами называется *правильным*. Внутри правильного многоугольника имеется точка O, равноотстоящая от всех его вершин ($AO = OB = OC =$ и т. д.) и от всех его сторон. Точка O — центр правильного многоугольника (центр вписанной и описанной окружностей). Расстояния от центра пра-

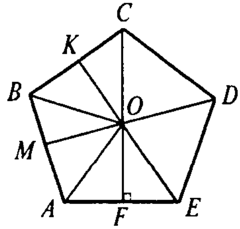


Рис. 209

вильного многоугольника до его сторон называются апофемами $OF = h$, OF — апофема (рис. 209).

$OF = OM = OK$.

Запомните!

Площадь правильного многоугольника равна произведению полупериметра на апофему:

$S = p \cdot h$, h — апофема, $h = OF$ (рис. 209), p — полупериметр, $p = \frac{a \cdot n}{2}$, где a – сторона правильного многоугольника, n — число сторон.

§5. Задания для подготовки к ЕГЭ (В4)

1526. Найдите площади геометрических фигур, указанные на рис. 210–219.

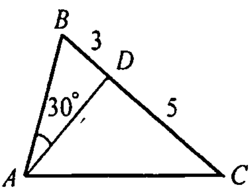


Рис. 210

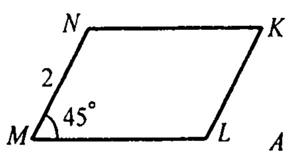


Рис. 211

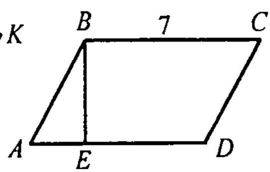


Рис. 212

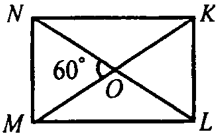


Рис. 213

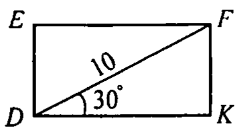


Рис. 214

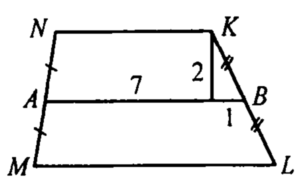


Рис. 215

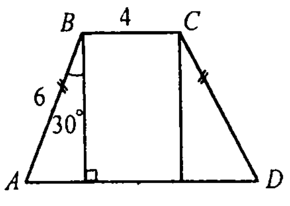


Рис. 216

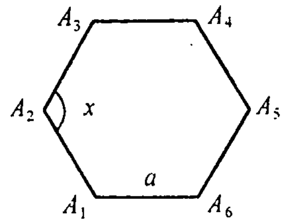


Рис. 217

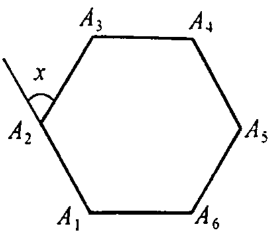


Рис. 218

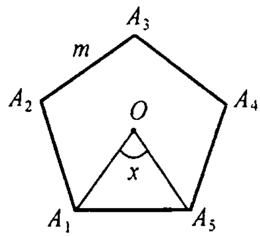


Рис. 219

1526.1. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 220) $BH = 5$, $AB = 8$. Найдите синус угла D.

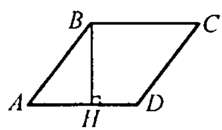


Рис. 220

1526.2. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 220) $\sin \angle A = 0{,}6$. Найдите косинус угла D.

1526.3. В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AB = CD = 5$, $BC = 12$, $AD = 18$. Найдите синус острого угла трапеции (рис. 221).

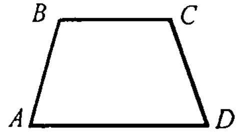


Рис. 221

1527.1. В параллелограмме $MNKL$ (рис. 222) MD – биссектриса $\angle LMN$. $\angle LMD = 20°$. Найдите градусную меру тупого угла параллелограмма.

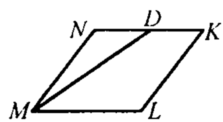


Рис. 222

1527.2. В равнобедренной трапеции *ABCD* (*BC* || *AD*), большее основание равно 16, боковая сторона – 5, синус острого угла равен 0,6. Найдите длину меньшего основания.

1527.3. Площадь ромба равна 24, одна из диагоналей – 6. Найдите длину стороны ромба.

§6. Подготовка к выполнению заданий С4

1528. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

1529. Площадь параллелограмма *ABCD* равна $24\sqrt{3}$, $CD = 8\sqrt{2}$, угол *BDC* равен 60°. Найдите $\sqrt{2}AD$.

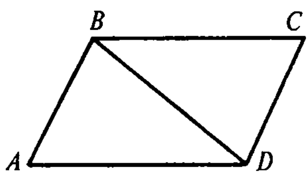


Рис. 223

Решение.

Найдем длину диагонали *BD* (рис. 223).

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CD \sin 60^0$, $S_{\Delta BCD} = 12\sqrt{3}$ (диагональ делит его на два равных треугольника).

$$12\sqrt{3} = \frac{1}{2} BD \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = 3\sqrt{2}.$$

Согласно теореме косинусов в Δ *BCD*

$$BC^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow BC^2 = 98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = 7\sqrt{2}.$$

$\sqrt{2}AD = 14.$

Ответ: 14.

1530. Длины боковых сторон трапеции, в которую можно вписать окружность, равны 6 и 10. Средняя линия делит трапецию на части, площади которых относятся как 5 : 11. Найдите длину большего основания трапеции.

Дано: $BC \parallel BD$, $AB = 6$;
$CD = 10$; $AM = BM$; $CN = ND$,

$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}} = \frac{5}{11}$ (рис. 224).

Найти: AD.

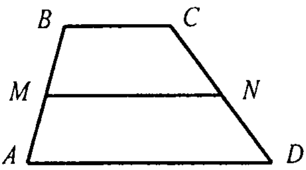


Рис. 224

Решение.

Так как в данную трапецию можно вписать окружность,
$AB + CD = BC + AD \Rightarrow$
$\Rightarrow BC + AD = 16 \Rightarrow MN = 8.$

Трапеции $MBCN$ и $AMND$ имеют одинаковые высоты (MN – средняя линия трапеции), пусть высоты равны h.

$$\frac{\frac{BC+MN}{2}\cdot h}{\frac{MN+AD}{2}\cdot h} = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{BC+8}{AD+8} = \frac{5}{11}. \quad BC = 16 - AD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{24-AD}{AD+8} = \frac{5}{11} \Rightarrow 16\,AD = 224 \Rightarrow AD = 14.$$

Ответ: 14.

1531. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 15. Найдите длину средней линии трапеции, если косинус острого угла при ее основании равен 0,8.

1532. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A, равного 120°, пересекает основание BC в точке E. В ΔABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M, а стороны BE – в точке N. Найдите высоту трапеции, если $MN = 8\sqrt{3}$.

1533. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A, равного 120°, пересекает основание BC в точке E. В ΔABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M, а стороны BE – в точке P. Найдите высоту трапеции, если $MP = 9\sqrt{3}$. (рис. 225).

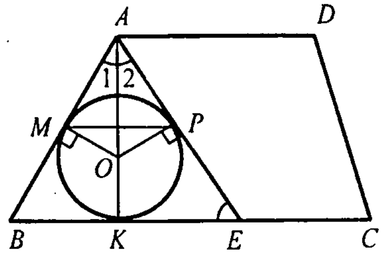


Рис. 225

1534. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A точка $M \in AB$, причем $\frac{AM}{MB} = 3$ и DM пересекает BC в точке E. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади ΔABE.

Решение.

1) Параллелограмм $ABCD$ и ΔABE имеют равные высоты, пусть H – высота.

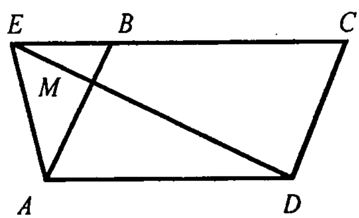


Рис. 226

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{H \cdot BC}{\frac{1}{2} H \cdot BE} = \frac{2BC}{BE} \text{ (рис. 226).}$$

2) $\Delta MBE \sim \Delta CDE$ ($BM \parallel CD$); $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{1} \Rightarrow AB = AM + BM = 4 \Rightarrow \frac{CD}{MB} = \frac{CE}{BE}$; $\frac{4}{1} = \frac{BC + BE}{BE} \Rightarrow BC + BE = 4BE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} = 3 \Rightarrow \frac{2BC}{BE} = 6.$$

Ответ: 6.

1535. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В ΔABC вписана окружность с центром M. Найдите величину угла AMC.

1536. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее средняя линия равна 6, а тангенс угла между диагональю и основанием равен 1,5.

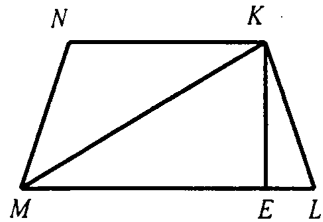


Рис. 227

Дано: $\frac{NK + ML}{2} = 6;$

$\text{tg}\,\angle KML = 1{,}5.$

Найти: S_{MNKL} (рис. 227).

Решение.

1) $S = \frac{NK + ML}{2} \cdot KE = 6KE.$

2) $ME = ML - \frac{ML - NK}{2} = \frac{ML}{2} + \frac{NK}{2} = 6.$

3) В ΔMKE $KE = ME \cdot \text{tg}\,\angle KME = 6 \cdot 1{,}5 = 9.$

4) $S = 6 \cdot 9 = 54.$

Ответ: 54.

1537. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна $3\sqrt{10}$, а средняя линия равна 3.

1538. В параллелограмме $ABCD$ $BC = 6\sqrt[4]{3}$, $\angle B$ = 60°, биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, $AM : MB = 2 : 1$. Найдите площадь $ABCD$ (рис. 228).

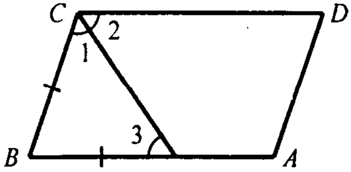


Рис. 228

1539. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диаметр которой $AD = 4\sqrt{2}$. Сумма внутренних углов четырехугольника, прилежащих к стороне AD, равна $\frac{3\pi}{4}$. Найдите длину стороны BC.

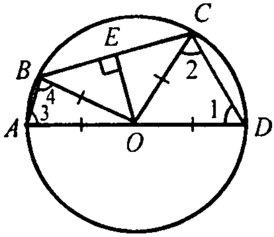


Рис. 229

Решение.

1) Треугольники COD и ABO равнобедренные (рис. 229), значит, углы при основании равны.
$2\angle 1 + \angle COD + 2\angle 3 + \angle AOB = 360° \Rightarrow 2(\angle 1 + \angle 3) + \angle COD + \angle AOB = 360° \Rightarrow \angle COD + \angle AOB = 360° - 2 \cdot 135° = 90^0 \Rightarrow \angle BOC = 90°, \angle BOE = 45°$.

2) В ΔBEO $\angle E = 90°$ ($BO = OC$).

$BE = BO \sin 45° = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \Rightarrow BC = 4.$

Ответ: 4.

1540. Диагональ равнобедренной трапеции $ABCD$ равна $2\sqrt{5}$, а средняя линия равна 2. Найдите площадь трапеции.

1541. В ромбе $MNKL$ угол M острый, причем $\sin \angle M = 0{,}8$. Высота NE, проведенная к стороне ML, пересекает диагональ MK в точке A. Найдите NA, если площадь ромба равна 80.

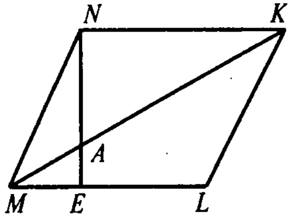


Рис. 230

Дано: $\sin \angle M = 0{,}8$;
$S_{MNKL} = 80$ (рис. 230).
Найти: NA.

Решение.

1) $S = MN^2 \cdot \sin \angle M \Rightarrow 80 = MN^2 \cdot 0{,}8 = MN = 10$.

2) В ΔMNE ME – биссектриса угла $NME \Rightarrow \frac{NA}{MN} = \frac{AE}{ME}$ (свойство биссектрисы угла треугольника).

3) В ΔMNE $ME = MN \sin \angle M = 10 \cdot 0{,}8 = 8$; $\cos \angle M =$
$= \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6.$ $ME = 10 \cdot 0{,}6 = 6.$

4) $\dfrac{NA}{10} = \dfrac{8-NA}{6} \Rightarrow 3NA = 40-5NA \Rightarrow NA = 5.$

Ответ: 5.

1542. Площадь ромба $ABCD$ равна 21,6, косинус угла A равен 0,8. Высота BK, проведенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке O. Найдите BO.

1543. Сторона ромба $ABCD$ равна 26, косинус угла A равен $\frac{12}{13}$. Высота BE, проведенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке O. Найдите длину OE.

1544. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание $AД$ в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$; $BE = 4\sqrt{5}$.

1545. В окружность вписана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна высоте. Длины оснований трапеции относятся как 5 : 12, высота равна 17. Найдите радиус окружности.

1546. Через точки M и N, лежащие на сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ так, что $AM = \frac{2}{3}AB$; $AN = \frac{1}{3}AD$, проведена прямая. Найдите отношение площади параллелограмма к площади получившегося прямоугольника.

1547. Периметр параллелограмма равен 90, острый угол — 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найдите стороны параллелограмма.

1548. Около круга радиуса 5 описана прямоугольная трапеция, меньшая сторона которой в полтора раза больше этого радиуса. Найдите площадь трапеции (рис. 231).

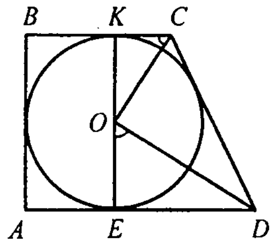


Рис. 231

1549. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K, а прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника CDP. Если $DK = 18$, $PK = 24$, $AD = 15$.

1550. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.

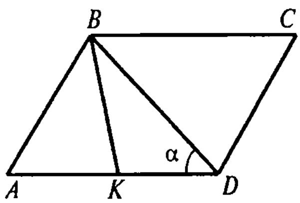


Рис. 232

Решение.

1) $P = 2(AB + AD) = 2(AB + 10)$ (рис. 232).
2) Применим теорему косинусов в ΔKBD.
$KB^2 = KD^2 + BD^2 - 2\ KD \cdot BD \cdot \cos\alpha$;
$15 = 25 + 64 - 80 \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}925$.
3) В ΔABD $AB = \sqrt{64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 0{,}925} = 4$.
4) $P = 2(4 + 10) = 28$.

Ответ: 28.

1551. Площадь параллелограмма $MNKL$ равна 16, угол MKL равен 45°, $KL = 8\sqrt{2}$. Найдите длину высоты параллелограмма, проведенной из вершины K на сторону ML.

1552. Площадь параллелограмма $DEFK$ равна $8\sqrt{3}$, диагональ DF — $2\sqrt{3}$, угол KDF равен 30°. Найдите длину стороны FK.

1553. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K, а прямую BC в точке E. Найдите периметр треугольника CDE, если $AK = 12$; $BK = 9$, $EK = 15$.

1554. На стороне угла ABC, равного 30°, взята точка D; $AD = 2$, $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D, касающейся прямой BC.

1555. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M, а прямую AB в точке K. Найдите периметр треугольника BCK, если $DM = 12$, $CM = 15$, $AM = 16$.

1556. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке K. $AM = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABMK$ (рис. 233).

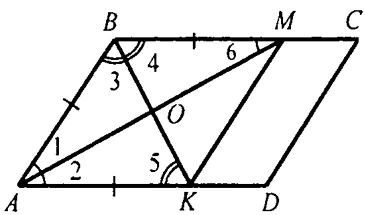


Рис. 233

1557. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точки K, L, N принадлежат, соответственно, сторонам AB, BC, AD, причем $AK : AB = 3 : 4$. Четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям трапеции. Найдите отношение площади $KLMN$ к площади трапеции $ABCD$.

1558. В квадрате $ABCD$ точка F — середина стороны CD. Из вершины A на отрезок BF проведен перпендикуляр AK. Найдите длину отрезка DK, если сторона квадрата равна 10.

1559. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, у которого угол C равен 30°, сторона AB равна 2, а диагональ BD — 7.

1560. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает основание BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O, касающаяся стороны AB в точке M, а стороны BE — в точке N. Найдите высоту трапеции, если $\angle MOB = 60°$, а радиус вписанной окружности равен 5.

1561. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны. Найдите длину средней линии, если высота трапеции равна 2, а боковая сторона — 4.

1562. Перпендикуляр p, опущенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15. Разность длин сторон параллелограмма равна 7. Найдите периметр параллелограмма.

1563. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 18, а высота трапеции в 2 раза меньше ее боковой стороны. Найдите длину радиуса вписанного круга.

1564. Периметр ромба равен 2, длины его диагоналей относятся как 3 : 4. Найдите площадь ромба.

1565. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, если ее большее основание равно $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$, а угол при меньшем основании равен 120°.

1566. В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ сторона равна $8\sqrt{3}$. Отрезок BC соединяет середины сторон A_3A_4 и A_5A_6. Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны A_1A_2 с серединой отрезка BC.

Решение.

1) DE найдем в ΔDCE, $\angle E = 90°$ (так как $DC = DB$; $BE = CE$). DC – средняя линия трапеции $A_1A_2A_5A_6$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow DC = \frac{16\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ (рис. 234).}$$

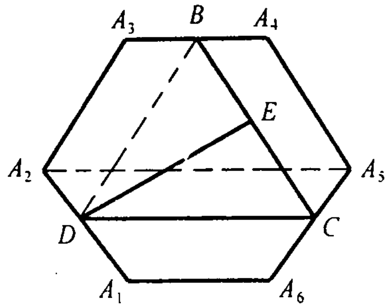


Рис. 234

2) $\angle A_6 = \dfrac{180^\circ \cdot 4}{6} = 120^\circ \Rightarrow \angle A_6CD = 60^\circ$ (односторонние при $A_1A_6 \parallel CD$ и секущей A_6C).
Аналогично, $\angle A_5CB = 60^\circ \Rightarrow \angle DCE = 60^\circ$.
3) В ΔCDE $DE = CD \sin 60^\circ = 18$.
Ответ: 18.

§7. Задания С4

Участнику ЕГЭ следует проявлять умение выполнить действия с геометрическими фигурами, находить и рассматривать все возможные случаи расположения геометрических фигур.

1567.1. Диаметр окружности, вписанной в треугольник MNK, площадь которого равна 132, в 3 раза меньше высоты, проведенной из вершины M, $NK = 11$. Найдите длину стороны MN.

1567.2. Из точки, отстоящей от центра круга на расстояние m, проведены касательные к кругу. Расстояние между точками касания равно a. Определите радиус круга.

Решение.

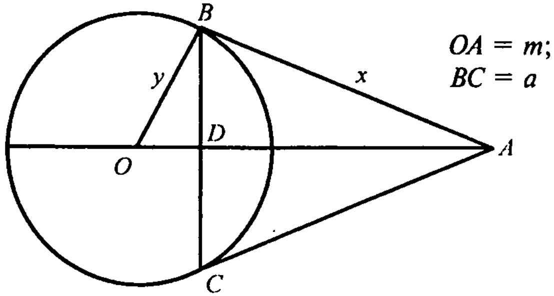


Рис. 235

Радиус OB найдем из $\Delta\ OAB$ (рис. 235). $OB \perp AB$ (радиус, проведенный в точку касания); $BD = \dfrac{a}{2}$.

Для удобства вычислений обозначим $OB = y$, $AB = x$. Выразим площадь $\Delta\ OAB$.

1) $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}xy$;

2) $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}OA \cdot BD = \dfrac{1}{4}am \quad \left(BD = \dfrac{1}{2}a\right)$. $2xy = am$.

Согласно теореме Пифагора $x^2 + y^2 = m^2$. Сложим и вычтем почленно эти два уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} 2xy + x^2 + y^2 = am + m^2; \\ x^2 + y^2 - 2xy = m^2 - am \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = \sqrt{m^2 + am}; \\ x - y = \sqrt{m^2 - am}. \end{array}$$

На рисунке окружность можно провести с центром в точке A, тогда OB и OC – касательные, т.е. x тоже может являться радиусом, получим два результата.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{m^2 + am} + \sqrt{m^2 - am}\right)$

или $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{m^2 + am} - \sqrt{m^2 - am}\right)$.

1568.1. Высоты $\Delta\ ABC$ пересекаются в точке O. Отрезок CO равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите $\angle\ ACB$.

1568.2. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2 : 1. В каком соотношении, считая от вершины, противоположной основанию, она делит боковые стороны?

1569.1. Внутри прямого угла дана точка M, расстояние от которой до стороны угла равно 4 и 8. Через точку M проведена прямая, которая образует со сторонами угла треугольник площадью, равной 100. Найдите меньший катет треугольника.

1569.2. В трапеции основания равны 24 и 10, а радиус описанной окружности равен 13. Найдите высоту трапеции.

1570.1. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10, площадь — 48. Найдите высоту трапеции.

1570.2. Найдите величины острых углов прямоугольного треугольника, если отношение радиусов вписанной в этот треугольник окружности и описанной около него равно $\sqrt{3}+1$.

1571. В треугольник с периметром, равным 20, вписана окружность. Параллельно основанию к окружности проведена касательная, отрезок которой, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найдите длину основания треугольника.

§8. Окружность и круг

Окружность – геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром окружности.

Круг состоит из окружности и ее внутренних точек.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной*.

Касательная, секущая, хорда

1) Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

   $OB \perp AB$ (рис. 236).

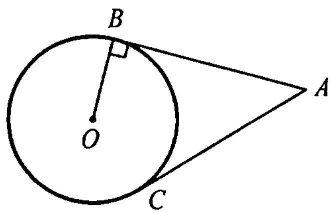


Рис. 236

2) Если из внешней точки проведены к окружности касательные, то отрезки касательных равны между собой (рис. 236):

   $$AB = AC.$$

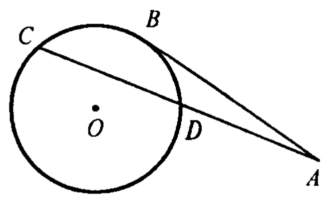


Рис. 237

3) Если через внешнюю точку проведены к окружности касательная и секущая, то произведение наибольшего отрезка секущей на его внешнюю часть равно квадрату касательной (рис. 237):

   $$AC \cdot AD = AB^2.$$

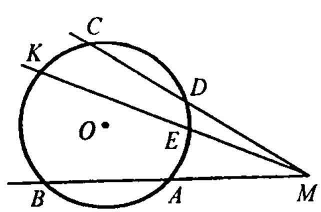


Рис. 238

4) Для всех секущих, проведенных из внешней точки к окружности, произведение наибольшего отрезка каждой секущей на его внешнюю часть есть ве-

личина постоянная для данной окружности.

$$MC \cdot MD = MK \cdot ME =$$
$$= MB \cdot MA \text{ (рис. 238).}$$

Хорда – это отрезок, соединяющий две точки окружности.

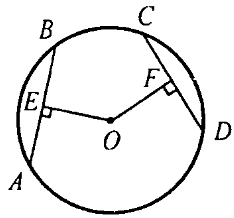


Рис. 239

Свойства хорд

1) равные хорды окружности равноудалены от ее центра, т. е. если $AB = CD$, то $OE = OF$ (рис. 239):
$$OE \perp AB;\ OF \perp CD;$$
2) равноудаленные от центра хорды равны: $OE = OF \Rightarrow AB = CD$ (рис. 239);
3) самая большая хорда окружности проходит через центр и называется *диаметром*.

Длина диаметра равна двум радиусам: $CD = 2\ OC$ (рис. 240);

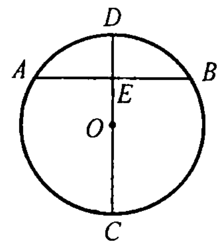


Рис. 240

4) диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам: если $CD \perp AB$, то $AE \perp BE$ (рис. 240);
5) для двух хорд EF и KT справедливо равенство
$$KP \cdot PT = EP \cdot PF \text{ (рис. 241).}$$

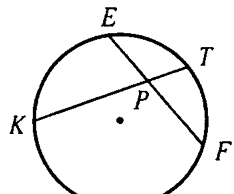


Рис. 241

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности, называется *сектором*.

Часть круга, ограниченная хордой и дугой, называется *сегментом* (рис. 242).

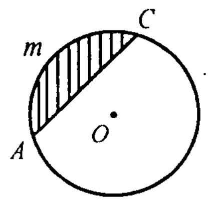


Рис. 242

Площадь круга и его частей

Запомните!

$C = 2\pi R$ — длина окружности,

R — радиус окружности;

$S = \pi R^2$ — площадь круга.

Площадь кругового сектора ($AOBm$):

$S_\alpha = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360^0}$, α — дуга в градусах.

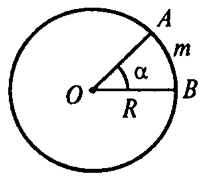


Рис. 243

Площадь кругового сегмента находится как разность площадей сектора $AOBm$ и ΔAOB.

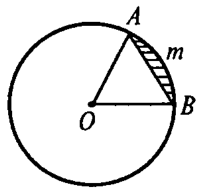


Рис. 244

Углы, связанные с окружностью

1) Угол с вершиной на окружности (вписанный угол) измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cup AC$ (рис. 245).

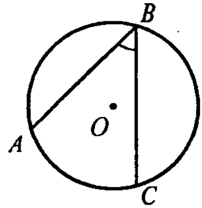


Рис. 245

2) Угол с вершиной на окружности, опирающийся на диаметр, прямой (рис. 246):

$$\angle ABC = 90°.$$

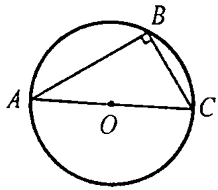


Рис. 246

3) Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 247):

$$\angle AOC = \cup AC.$$

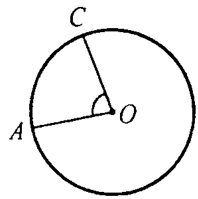


Рис. 247

4) Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями (рис. 248):

$$\angle BMD = \angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD);$$

$$\angle CMB = \angle AMD = \frac{1}{2}(\cup CB + \cup AD).$$

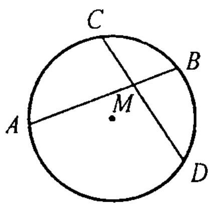


Рис. 248

5) Угол с вершиной вне круга, образованный двумя секущими, измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами (рис. 249):

$$\angle ACE = \frac{1}{2}(\cup AE - \cup BD).$$

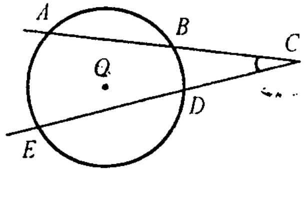


Рис. 249

6) Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами:

$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BC$ (рис. 250);

$\angle MNK = \frac{1}{2} \cup NmK$ (рис. 250, *а*).

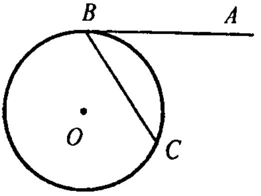


Рис. 250

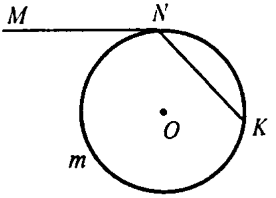


Рис. 250, а

Задания В4

1572. Используя данные, указанные на рис. 251–256, найдите x:

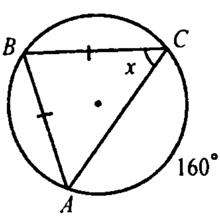


Рис. 251

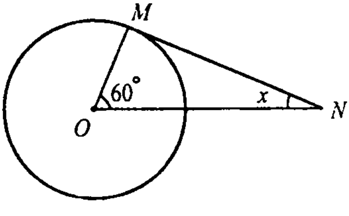


Рис. 252

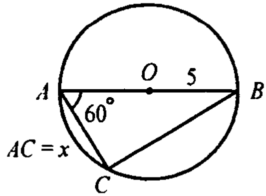


Рис. 253

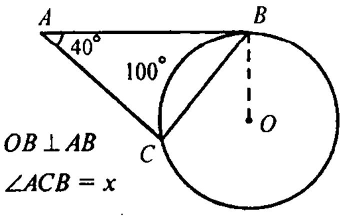


Рис. 254

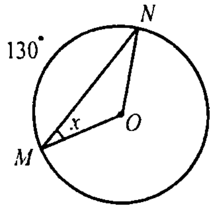
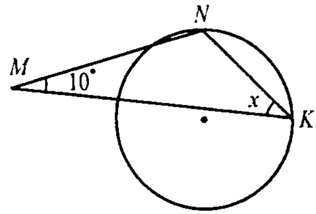


Рис. 255



$\smile MNK = 300°$

Рис. 256

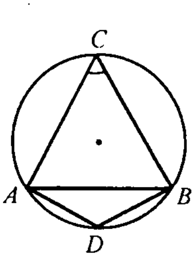
1573. Радиус окружности равен 10, точка A удалена от центра на 15. Найдите наименьшее и наибольшее расстояние от центра A до окружности.

1574. Точка B удалена от центра окружности на 3 см, радиус равен 10 см. Найдите наименьшее и наибольшее расстояние от точки B до окружности.

1575. Через точку A проведены две касательные к окружности, центр которой находится в точке O, радиус равен 4,5. Найдите угол между касательными, если $OA = 9$.

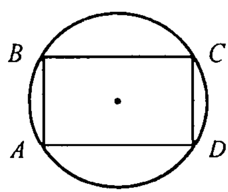
1576. Из точки, лежащей на окружности, проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу. Найдите угол между этими хордами.

1577. Используя данные, указанные на рис. 257–265, найдите x:



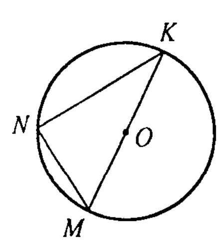
$\angle ADB = x$

Рис. 257



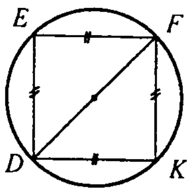
$AS = 6 \quad S_{кр.} = x$

Рис. 258



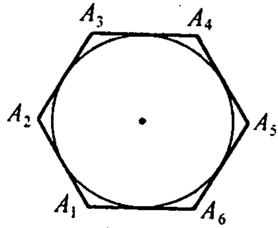
$KM = 10 \quad C = x$

Рис. 259



$DE = 6 \quad S_{кр.} = x$

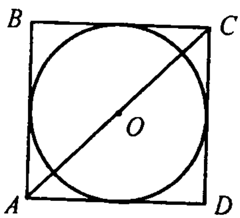
Рис. 260



$A_1A_3 = 6$

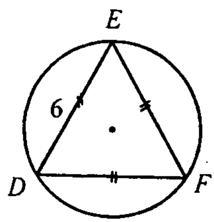
$S_{кр.} = x$

Рис. 261



$AC = 10 \quad S_{кр.} = x$

Рис. 262



$C = x$

Рис. 263

$OE = 4$

$S_{\Delta ABC} = x$

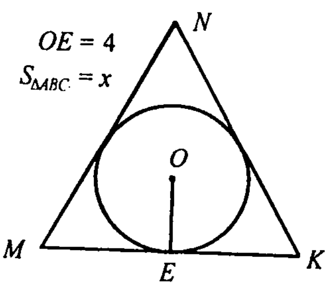


Рис. 264

$S_{ABCD} = x$

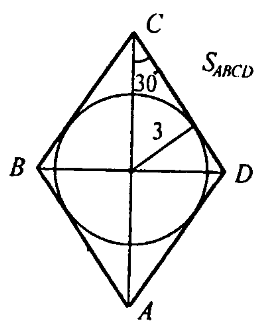


Рис. 265

1578. $AB = 3\sqrt{3}$; $\cup$ AC = 60°. Найдите длину радиуса окружности (рис. 265).

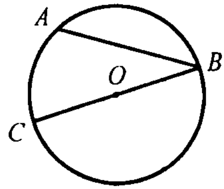


Рис. 266

1579. Диаметр AB окружности равен $5\sqrt{3}$. Найдите длину хорды MB, если дуга AM равна 60°.

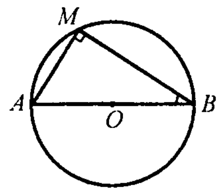


Рис. 267

Решение.

$\Delta\, AMB$ – прямоугольный ($\angle\, M = 90°$, так как это вписанный угол, опирающийся на диаметр)

$\angle\, B = 30°$ (вписанный угол, опирающийся на дугу AM, равную 60°).

В $\Delta\, AMB$ $MB = AB \cos 30° = 5\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

1580. Используя данные, указанные на рис. 268—275, найдите x:

1.

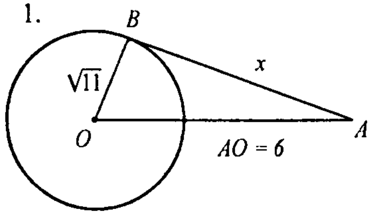


Рис. 268

2.

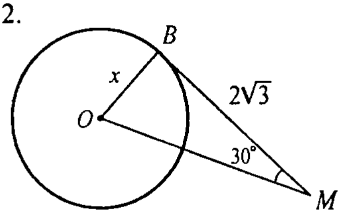


Рис. 269

3.

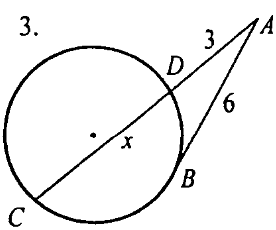


Рис. 270

4.

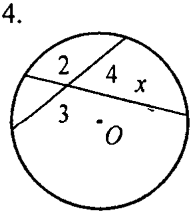


Рис. 271

5.

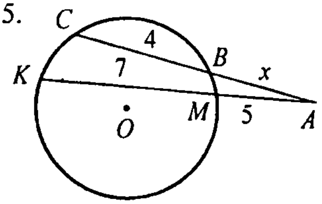


Рис. 272

6.

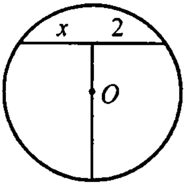


Рис. 273

7.

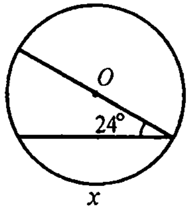


Рис. 274

8.

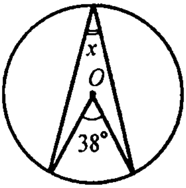


Рис. 275

1581. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

1582. Используя данные, указанные на рис. 276–285, найдите x:

1.

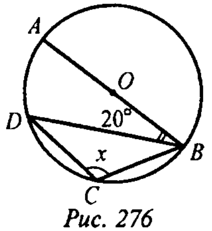


Рис. 276

2.

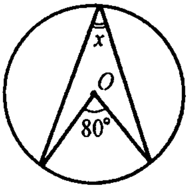


Рис. 277

3.

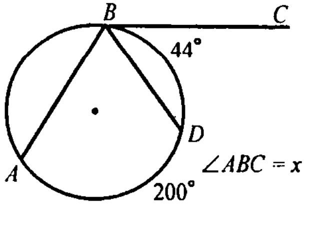


Рис. 278

4.

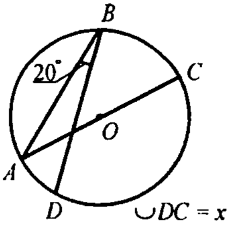


Рис. 279

5.

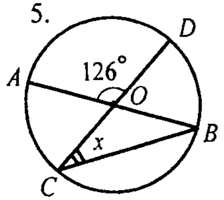


Рис. 280

6.

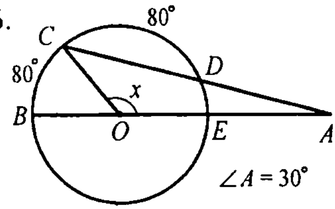


Рис. 281

7.

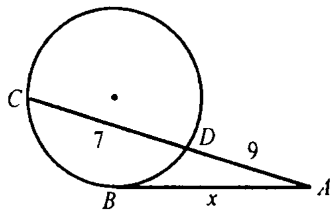


Рис. 282

8.

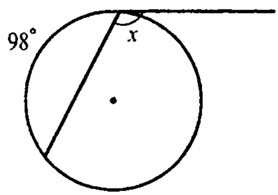


Рис. 283

9.

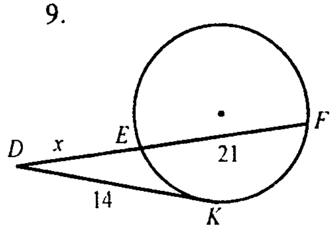


Рис. 284

10.

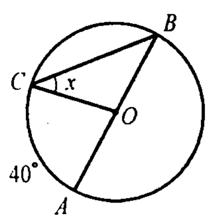


Рис. 285

1583. Найдите длину радиуса окружности, если $\cos \angle A = 0{,}2$, $AB = 4$ (рис. 286).

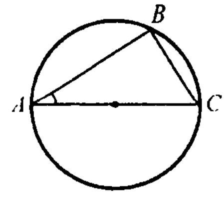


Рис. 286

1584. Радиус окружности равен 12, $\cos \angle A = 0{,}6$. Найдите длину BC (рис. 287).

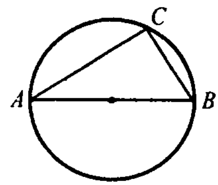


Рис. 287

1585. Радиус окружности равен 7, хорда MN равна $7\sqrt{3}$. Найдите градусную меру вписанного острого угла, опирающегося на хорду AB.

1586. Радиус окружности равен 3, хорда MN равна $3\sqrt{2}$. Найдите величину вписанного тупого угла, опирающегося на хорду MN.

Задачи для подготовки к выполнению заданий С4

1587. Из точки, лежащей на окружности, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними (рис. 288).

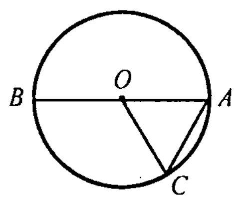


Рис. 288

Решение.

В ΔAOC все стороны равны радиусу окружности, следовательно, все его углы равны 60°, т. е. $\angle OAC = 60°$.

Ответ: 60°.

1588. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Найдите величину угла AOC, если $\angle ABC = 126°$.

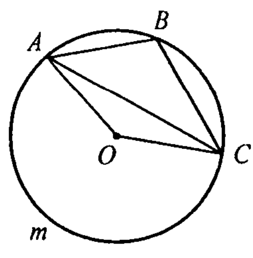


Рис. 289

Решение.

1) $\angle AOC$ как центральный угол равен дуге ABC (рис. 289);

2) $\angle ABC = \frac{1}{2} AmC$ (вписанный угол) $\Rightarrow \cup AmC = 252°$;

3) $\cup ABC = 360° - \cup AmC = 108°$.

Ответ: 108°.

1589. Сторона ромба равна 16, острый угол равен 60°. Найдите площадь вписанного круга.

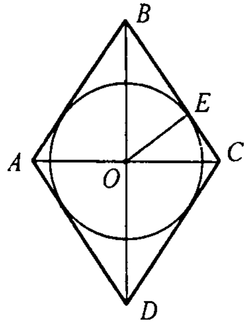


Рис. 290

Дано: $AB = 16$;
$\angle ABC = 60°$ (рис. 290).
Найти: $S_{кр}$.
Решение.

1) $S_{кр.} = \pi \cdot OE^2$.
2) В ΔBOC $\angle OBC = 30°$ (диагонали ромба делят углы пополам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow OC = \frac{1}{2} BC = 8$.

3) $OE \perp BC$ (радиус, проведенный в точку касания), в ΔOEC

$\angle OCE = 90° - 30° = 60°$; $OE = OC \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3}$.

4) $S_{кр.} = \pi \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$ (кв. ед.).

Ответ: 48.

1590. Из точки окружности, радиус которой равен 34, проведен перпендикуляр к радиусу, в точке пересечения радиус разделен на отрезки, длины которых относятся как 8 : 9, считая от центра окружности. Найдите длину перпендикуляра.

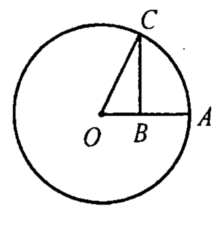


Рис. 291

Дано: $OC = 34$, $CB \perp OA$,
$OB : BA = 8 : 9$ (рис. 291).
Найти: CB.
Решение.

1) Пусть x – общая мера, тогда $OB = 8x$, $BA = 9x$, $17x = 34$, $x = 2$, $OB = 8x = 16$.

2) В ΔOBC $BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{1156 - 256} = 30.$

Ответ: 30.

1591. В четырехугольник, две противоположные стороны которого равны 2 и 4, вписана окружность радиуса 1,2. Найдите площадь этого четырехугольника.

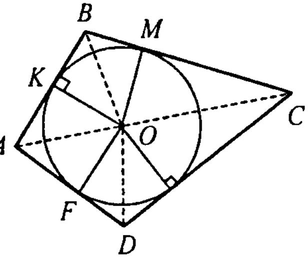


Рис. 292

Решение.

Проведем радиусы в точки касания, площадь четырехугольника найдем как сумму площадей полученных прямоугольных треугольников (рис. 292):

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ODF} + 2S_{\Delta CDE} + 2S_{\Delta MOB} + 2S_{\Delta AOK} =$
$= 1{,}2 \cdot DE + 1{,}2 \cdot CE + 1{,}2 \cdot KB + 1{,}2 \cdot AK =$
$= 1{,}2(DE + EC) + 1{,}2(KB + AK) = 1{,}2(CD + AB) = 7{,}2.$

Ответ: 7,2.

Запомните!

При решении задач часто используется метод площадей: площадь фигуры находят через известные элементы и ту же площадь выражают с помощью неизвестного элемента. Эти два выражения приравнивают, решают полученное уравнение и находят неизвестный элемент.

1592. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания со вписанной окружностью в отношении 8 : 5, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите длину основания треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

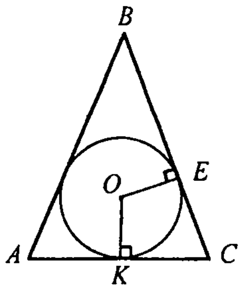


Рис. 293

Решение.

1) Пусть x – общая мера, тогда в ΔABC $BE = 8x$ (рис. 293), $EC = 5x$, $KC = 5x$ (отрезки касательных, проведенных из одной точки), $AC = 10x$, так как треугольник равнобедренный, $AC = 2KC$.

2) Полупериметр $p=\frac{1}{2}(10x+2\cdot 13x)=18x$, найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{18x(18x-10x)(18x-13x)^2}=$

$=\sqrt{18x\cdot 8x\cdot 5x\cdot 5x}=60x^2.$

3) Выразим площадь по формуле $S = p\cdot r$;
$60x^2 = 18x\cdot 10$; $x = 3$; $AC = 30$.
Ответ: 30.

1593. В окружности проведены хорды $AB = \sqrt{3}$ и $AC = 2\sqrt{3}$.

Хорда AD – биссектриса угла BAC. Найдите длину хорды AD, если отношение дуг BAC и BDC равно 2 : 1.

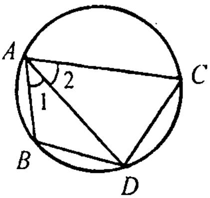


Рис. 294

Решение.

1) $\cup BAC : \cup BDC = 2 : 1$;
$\cup BAC + \cup BDC = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow \cup BDC = 120°$ $(360° : 3 = 120°)$ (рис. 294).

2) $\angle 1 = \angle 2$, так как AD – биссектриса $\angle BAC \Rightarrow \cup CD = \cup BD \Rightarrow BD = DC$ (равные дуги стягивают равные хорды). $\cup BDC = 120° \Rightarrow \cup BD = \cup DC = 60° \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = 30°$ (вписанные углы равны $\frac{1}{2}\cup DC$).

3) Согласно теореме косинусов:
В ΔACD $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD\cdot AC\cdot\cos 30°$.
В ΔABD $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos 30°$, так как $CD = BD$, получим уравнение $AD^2 + 12 - 2AD\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = AD^2 + 3 - 2\cdot AD\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3AD = 9$; $AD = 3$.

Ответ: 3.

1594. Четырехугольник $MNKE$ вписан в окружность. Лучи NM и KE пересекаются в точке L, а лучи NK и ME — в точке F. Найдите угол MNK, если $\angle KFE = 27°$, $\angle MLE = 33°$.

Решение.

1) Пусть $\angle MNK = \alpha$ (рис. 295).

Тогда $\angle MEK + \alpha = 180°$ (противолежащие углы вписанного четырехугольника).

$\alpha = 180° - \angle MEK \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = \angle NEK$ ($\angle MEK + \angle NEK - 180°$, как смежные углы).

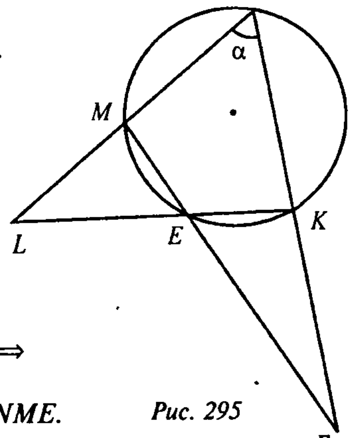


Рис. 295

2) $\angle NME$ внешний для $\Delta MEL \Rightarrow$
$\Rightarrow 33° + \alpha = \angle NME$.
$27° + \alpha = \angle NKM = 180° - \angle NME$.
Сложим полученные равенства.
$60° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$.
Ответ: 60.

1595. Остроугольный равнобедренный треугольник BCD с основанием CD, равным 16, вписан в окружность, радиус которой равен 10. Найдите площадь треугольника BOC (O – центр окружности).

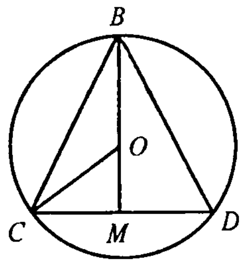


Рис. 296

Решение.

1) $S_{\Delta COB} = \frac{1}{2} CO^2 \sin \angle COB = 50 \cdot \sin \angle COB$ (рис. 296).

2) В ΔCOB $\sin \angle COM = \frac{CM}{CO} = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

3) $\sin \angle COB = \sin(180° - \angle COM) = \sin \angle COM = 0{,}8$.

4) $S = 50 \cdot 0{,}8 = 40$.
Ответ: 40.

1596.1. Основание равнобедренного треугольника равно 16, а высота, проведенная к основанию, равна 6. Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей.

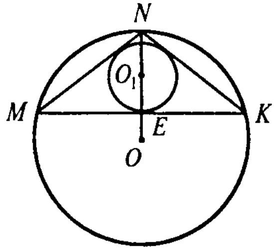


Рис. 297

Решение.

1) $OO_1 = ON - NE + O_1E = R - NE + r$ (рис. 297).

2) $r = \dfrac{S}{P}$, $P = \dfrac{2MN + MK}{2} = MN + 8$.

$S = ME \cdot NE = 48$.

В ΔMNE $MN = \sqrt{NE^2 + ME^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \Rightarrow p = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{48}{18} = \dfrac{8}{3}$.

3) $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{25}{3}$.

4) $OO_1 = \dfrac{25}{3} - 6 + \dfrac{8}{3} = 11 - 6 = 5$.

Ответ: 5.

1596.2. Из точки M к окружности, радиус которой равен 4, проведены касательная, касающаяся окружности в точке C, и секущая, проходящая через центр O окружности и пересекающая ее в точках A и B так, что $MA = AO$. Точка N — середина дуги AC. Найдите площадь треугольника MON.

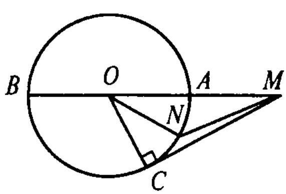


Рис. 298

Решение.

1) $S_{\Delta ONM} = \dfrac{1}{2} ON \cdot OM \cdot \sin\angle AON = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin\angle AON = 16 \sin\angle AON$ (рис. 298).

2) В ΔOCM $\angle C = 90°$ ($OC \perp CM$ — радиус, проведенный в точку касания).

$$\cos\angle CON = \frac{OC}{OM} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CON = 60°.$$

3) $\cup AN = \cup NC$ (по условию N — середина дуги AC) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AON = \angle NOC \Rightarrow \angle AON = 30°$.

4) $S_{\Delta ONK} = 16 \cdot \sin 30° = 8$.
Ответ: 8.

1597. Из точки M к окружности, радиус которой равен 6, проведены касательная (C — точка касания) и секущая, проходящая через центр O окружности и пересекающая ее в точках A и B так, что $MA < MB$ и $MO = 6\sqrt{2}$. Точка N делит дугу AC в отношении $AN : NC = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника CON.

1598. В окружности проведены хорды $AB = 1$ и $AC = 2$. Угол $BAC = 2\arccos\frac{1}{4}$. Хорда AD — биссектриса угла BAC. Найдите длину хорды AD.

1599. В окружности хорды $MN = 2$ и $ME = 4$, угол $NME = 2\arcsin\frac{3}{5}$. Найдите длину хорды MK — биссектрисы угла NME.

Глава 13
Стереометрия

Запомните!

При решении стереометрических задач большое значение имеет удачный выбор плоскости, в которой находятся искомые элементы.

При отыскании искомой величины следует найти треугольники (желательно прямоугольные), элементами которых эта величина (сторона, угол и т.д.) является; выбрать треугольник, где имеются известные элементы, и применить определения тригонометрических функций острого угла или теорему синусов (косинусов).

Иногда имеет смысл «выносить» такие треугольники, т. е. в дополнение к основному рисунку начертить «вынесенный» треугольник в натуральную величину (относительно прямого угла).

§1. Пирамида. Призма

1600. Найдите углы, которые боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания (рис. 299–301).

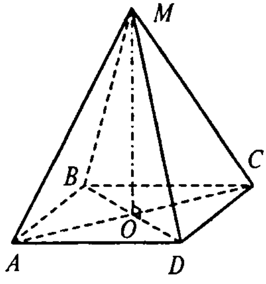


Рис. 299

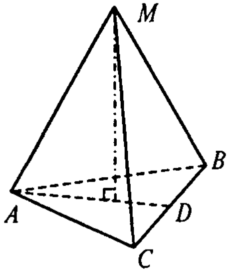


Рис. 300

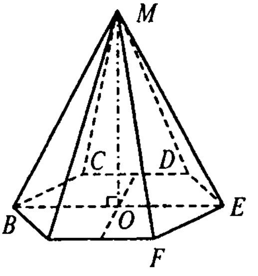


Рис. 301

Запомните!

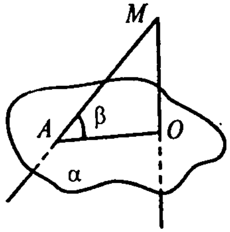


Рис. 302

Угол между прямой (наклонной) и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

$MO \perp$ пл. $\alpha \Rightarrow \angle MAO$ — это угол между MA и плоскостью α (AO — проекция AM на плоскость α) (рис. 302).

1601. Найдите углы, которые боковые ребра пирамиды образуют со сторонами основания (рис. 303–305).

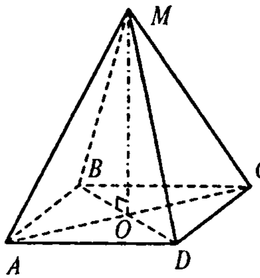


Рис. 303

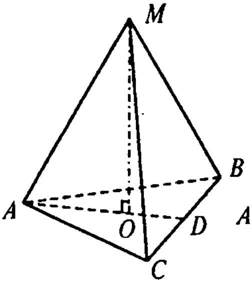


Рис. 304

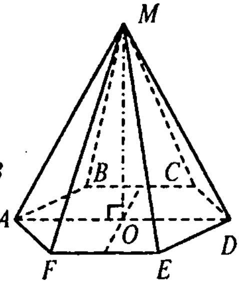


Рис. 305

Запомните!

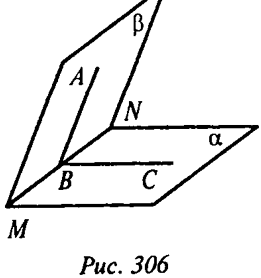


Рис. 306

Двугранный угол – это угол между двумя пересекающимися плоскостями.

Двугранные углы измеряются линейными углами. Чтобы найти линейный угол, нужно из точки, принадлежащей линии пересечения, провести перпендикуляры к линии пересечения в двух плоскостях.

MN — линия пересечения плоскостей α и β. $AB \perp MN$; $BC \perp MN \Rightarrow \angle ABC$ — угол между плоскостями α и β (рис. 306).

1602. Найдите углы, которые боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания (двугранные углы при основании) (рис. 307–309).

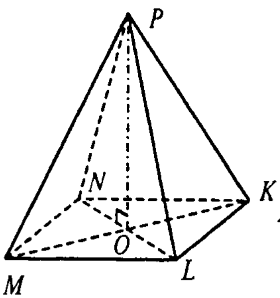


Рис. 307

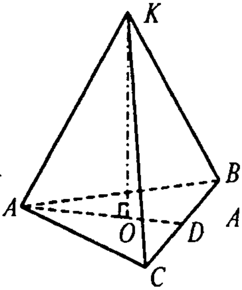


Рис. 308

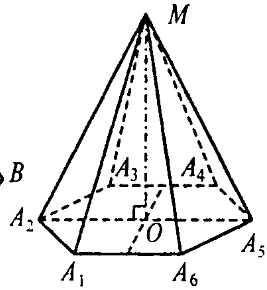


Рис. 309

Запомните!
Плоский угол при вершине пирамиды – это угол, расположенный в плоскости боковой грани между боковыми ребрами, т. е. $\angle CMB$. Если пирамида правильная, то $\angle CMB = \angle AMB = \angle AMC$. Высота боковой грани пирамиды называется апофемой, т. е. если $MD \perp BC \Rightarrow MD$ — апофема (рис. 310).

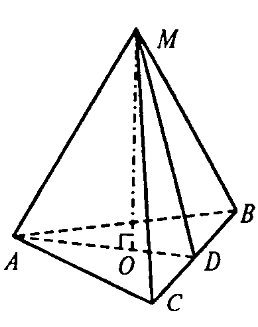


Рис. 310

Запомните!

Если все боковые ребра пирамиды равны или одинаково наклонены к плоскости основания, то высота пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности.

$AM = CM = BM \Leftrightarrow AO = BO = CO \Leftrightarrow \angle MAO = \angle MCO = \angle MBO$ (рис. 311).

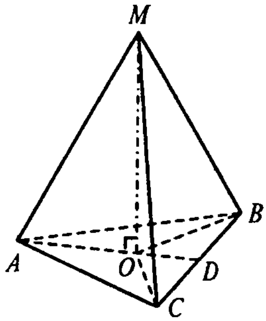


Рис. 311

Запомните!

Если вершина пирамиды одинаково удалена от сторон основания или все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности или через центр одной из вневписанных окружностей основания.

$MD = MD_1 = MD_2$;

$OD = OD_1 = OD_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle MDO = \angle MD_1O = \angle MD_2O$ (рис. 312).

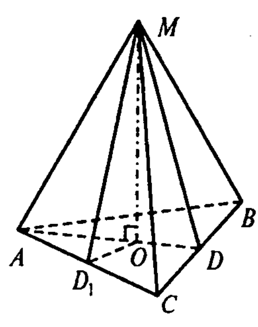


Рис. 312

Запомните!

Параллелепипед — это призма, у которой все грани — параллелограммы.

(Основания призмы — параллелограммы) (рис. 313).

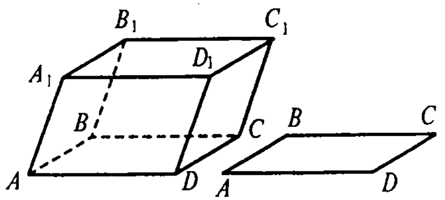


Рис. 313

В прямом параллелепипеде основания — параллелограммы, а боковые грани — прямоугольники, т. е. боковые грани и ребра перпендикулярны основаниям призмы (рис. 313, *а*).

В прямоугольном параллелепипеде все грани — прямоугольники (рис. 314).

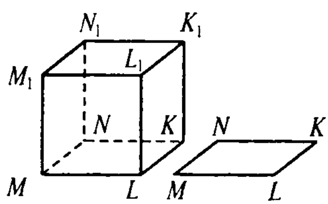


Рис. 313, а

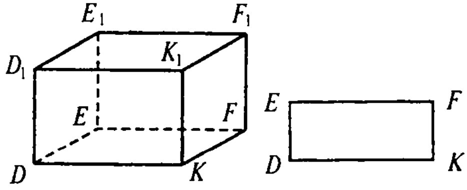


Рис. 314

1603. На рисунке 315 изображен прямоугольный параллелепипед. Ответьте на вопросы.

1) Пересекаются ли прямые DB_1 и D_1C? BB_1 и D_1C? AD и D_1D?
2) Можно ли провести плоскость через прямые AD и B_1C_1? через DC и DB_1? через BC и AA_1?

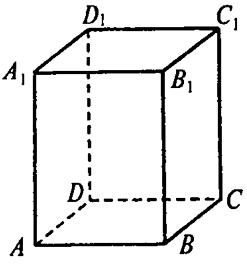


Рис. 315

1604. Проведите плоскость, проходящую через концы трех ребер куба, выходящих из одной вершины. Ребро куба равно 3. Вычислите площадь сечения.

Запомните!

Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной:
$BC \perp OA \Rightarrow BC \perp MA$ (рис. 316).

Справедливо и обратное утверждение: если наклонная перпендикулярна прямой, принадлежащей плоскости α, то и проекция наклонной на плоскость α перпендикулярна этой прямой:
$MA \perp BC \Rightarrow OA \perp BC$ (рис. 316).

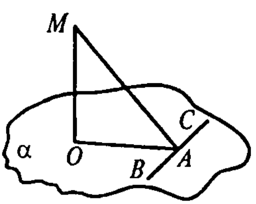


Рис. 316

§2. Цилиндр. Конус. Шар

Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, одна его сторона равна длине окружности основания цилиндра, другая – высоте цилиндра.

$V_{цил} = \pi R^2 H$ ($R = OD$; $H = CD$) (рис. 317).

$S_{бок.цил} = 2\pi RH$.

$S_{полн.цил} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

Если цилиндр прямой (боковая поверхность перпендикулярна основанию), то AB является образующей цилиндра и высотой.

Конус образуется вращением треугольника AOM вокруг одной из его сторон. Если $\Delta\, AOM$ прямоугольный, получается прямой круговой конус, $R = AO$ – радиус основания конуса, $H = MO$ – высота, $L = AM$ – образующая конуса (рис. 318).

$$V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,\ S_{б.кон} = \pi RL,\ S_{полн.} = S_{осн.} + S_{бок.}$$

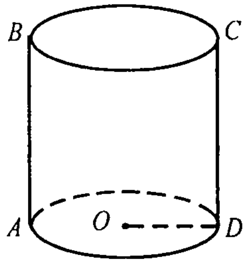


Рис. 317

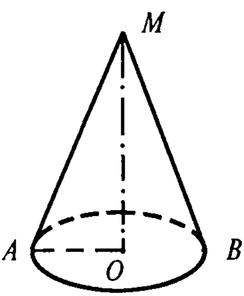


Рис. 318

Запомните!

В конусе (пирамиде) площади сечений, параллельных основанию, относятся как квадраты их расстояний до вершины конуса (пирамиды).

Всякое сечение шара плоскостью — круг. $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$ ($R = AO$). Площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$.

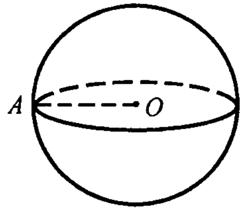


Рис. 319

§3. Скрещивающиеся прямые

Запомните!

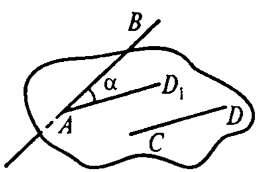


Рис. 320

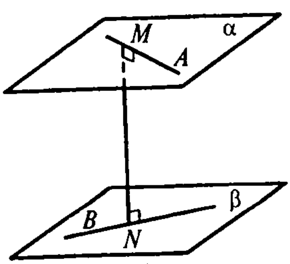


Рис. 321

Угол между скрещивающимися прямыми.

Скрещивающиеся прямые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, например прямые AB и CD.

Чтобы найти угол между AB и CD, нужно провести $AD_1 \parallel CD$, α — угол между AB и CD (рис. 320).

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые (рис. 321). MN — расстояние между MA и NB, $MN \perp MA$ и $MN \perp NB$.

§4. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Запомните!

Прямая называется перпендикуляром к плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости (рис. 322):

$$\left.\begin{aligned} MO \perp OA \\ MO \perp OB \end{aligned}\right| \Rightarrow MO \perp \text{пл.}\,\alpha.$$

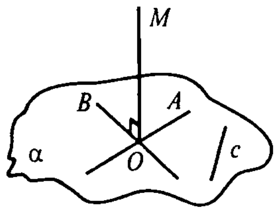


Рис. 322

Перпендикуляр к плоскости перпендикулярен любой прямой, лежащей в этой плоскости.

$MO \perp$ пл. $\alpha \Rightarrow MO \perp c$ (рис. 322).

Запомните!

При решении задач по стереометрии желательно дополнительно к основному чертежу изображать основание пирамиды (призмы, цилиндра и т. д.) в горизонтальной плоскости, тогда нахождение элементов основания, представляющее собой задачу по планиметрии, выполняется в треугольниках, имеющих натуральную величину (относительно углов).

1605. В правильной треугольной призме перпендикуляр, опущенный из вершины основания на противоположную сторону другого основания, равен 7 и наклонен к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем и площадь боковой поверхности призмы (рис. 323; 324).

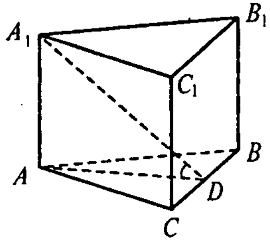


Рис. 323

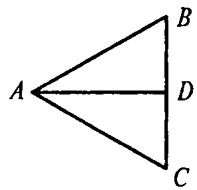


Рис. 324

1606. В правильной треугольной пирамиде угол между боковым ребром и стороной основания равен 60°, а сторона основания пирамиды равна 10. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

1607. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 20 и образует с высотой угол 30°. Найдите объем пирамиды.

1608. Одно из боковых ребер пирамиды, основание которой — квадрат, перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если ее наибольшее боковое ребро равно 12 и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

1609. Основание пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной $2\sqrt{3}$, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

Дано: $AO = BO = OC = OD$;

$\angle MOC = 45°$; $AC = 2\sqrt{3}$;

$\angle AOM = 60°$ (рис. 325).

Найти: $V_{пир}$.

Решение.

1) $V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{ABCД} \cdot MO;$

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC^2 \sin 60^0 =$

$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (рис. 326);

3) в ΔMOC $\angle OCM = 45° \Rightarrow MO$

$= OC$, т. е. $MO = \sqrt{3}$;

4) $V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$

Ответ: 3.

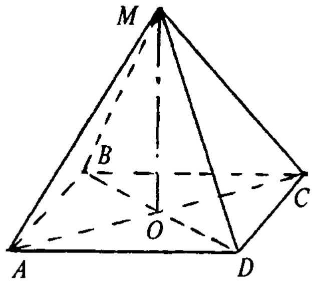


Рис. 325

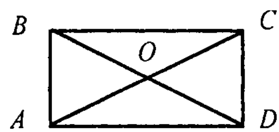


Рис. 326

Запомните!

Объем треугольной пирамиды можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot d \sin\alpha$, a и b — скрещивающиеся ребра пирамиды, d — расстояние между этими ребрами, α — угол между ними.

Запомните!

Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом α, то $S_{бок} = \frac{S_{осн.}}{\cos\alpha}$, где $S_{бок.}$ – площадь боковой поверхности, $\alpha = \angle MDO$ (рис. 327).

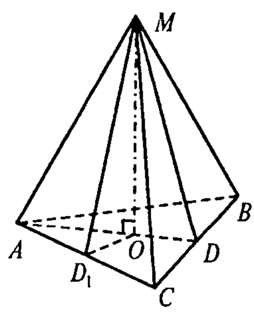


Рис. 327

1610. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 2,5, и основанием — $2\sqrt{3}$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

1611. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите длину высоты пирамиды.

Решение.

1) Так как двугранные углы при основании равны, точка O – центр вписанной в основание окружности.

2) $OD \perp BC \Rightarrow MD \perp BC$ (теорема о трех перпендикулярах) $\Rightarrow \angle ODM = 60°$ (рис. 328).

3) В ΔMOD $MO = OD \operatorname{tg} 60° = OD\sqrt{3}$.

4) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (кв. ед.).

$S_{\Delta} = p \cdot r$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot OD$

(рис. 328).

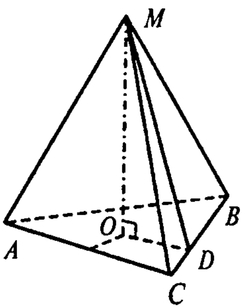


Рис. 328

5) В ΔABC $AB = \sqrt{36 + 84} = 10$ (рис. 329).

$\frac{1}{2}(10 + 6 + 8) \cdot OD = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow OD = \frac{24}{12} = 2.$

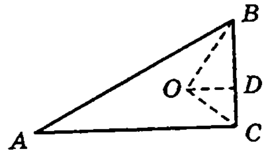


Рис. 329

6) $MO = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

1612. Основание пирамиды – прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы 30° и 45°. Высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

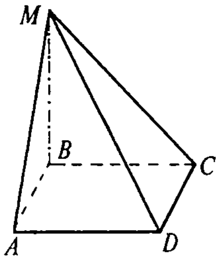


Рис. 330

Дано: $MB \perp$ пл. $ABCD$; $MB = 2\sqrt{3}$; $\angle MAB = 30°$; $\angle MCB = 45°$.

Найти: $V_{пир.}$ (рис. 330).

Решение.

1) $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MB = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot 2\sqrt{3}$.

2) $S_{ABCD} = AB \cdot BC$ (рис. 331).

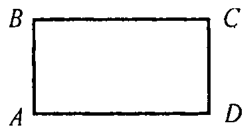


Рис. 331

3) В ΔAMB $AB = MB \cdot \text{ctg } 30° =$ $= 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

4) В ΔBCM $BC = MB \cdot \text{tg } 45° = 2\sqrt{3}$.

5) $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$.

Ответ: 24.

1613. В основании пирамиды квадрат. Из двух противолежащих друг другу боковых ребер одно перпендикулярно плоскости основания, другое наклонено к ней под углом 60° и имеет длину $5\sqrt{3}$. Определите длину высоты пирамиды.

1614. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, основание которого равно 12, а боковая сторона — 10. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. Найдите длину высоты пирамиды.

1615. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами, равными 6 и 8, каждое боковое ребро равно 13. Найдите объем пирамиды.

1616. Основание пирамиды — треугольник, у которого одна сторона равна 40, а две другие — 25. Высота пирамиды проходит через вершину угла, образованного равными сторонами основания, и равна 8. Определите площадь боковой поверхности пирамиды.

§5. Комбинации геометрических тел

Задачи на комбинации геометрических тел в экзаменационной работе обычно встречаются в заданиях В9 и С2.

Запомните!

Если шар описан около пирамиды, призмы, конуса и т. д., решение сводится к нахождению элементов треугольника AOE. $AO = OB = R_{ш.}$; $OE \perp AB$; $AE = BE$ (рис. 332–335).

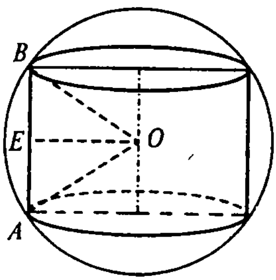


Рис. 332

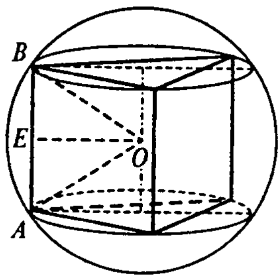


Рис. 333

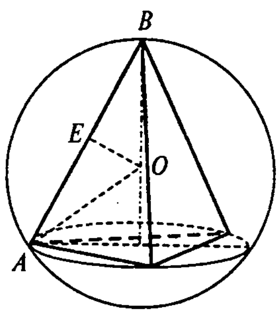


Рис. 334

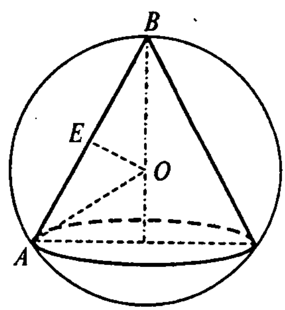


Рис. 335

К о м м е н т а р и й. При изображении комбинаций тел шар можно не изображать, достаточно указать центр и радиус шара.

1617. В шар вписан конус, радиус основания равен $5\sqrt{3}$, образующая $10\sqrt{3}$. Найдите объем шара (рис. 336).

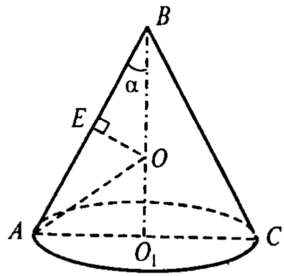


Рис. 336

1618. Высота правильной четырехугольной призмы равна 2, сторона основания – 4. Найдите длину радиуса описанного шара.

1619. Высота правильной шестиугольной призмы равна 8. Диагональ боковой грани – 13. Найдите длину радиуса описанного шара.

1620. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 2, сторона основания – 3. Найдите длину диаметра описанного шара.

1621. Сторона правильной четырехугольной пирамиды равна 4, высота пирамиды – 4. Найдите длину радиуса описанного шара.

1622. В треугольной пирамиде все боковые ребра равны 9, ее высота – 5. Найдите длину радиуса описанного шара.

Дано: $AO = OM = R$;
O – центр описанного шара,
$AM = BM = CM = 9$.
$MO_1 = 5$ (рис. 337).
Найти: AO.

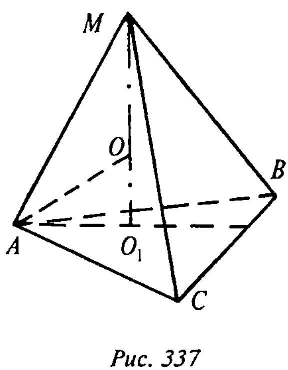


Рис. 337

Решение.

Так как все боковые ребра пирамиды равны, O_1 – центр описанной около ΔABC окружности.

1) В ΔAMO_1 $AO_1^2 = AM^2 - MO_1^2 = 56$ (согласно теореме Пифагора).

2) В ΔAOO_1 $AO^2 = OO_1^2 + AO_1^2$; $OO_1 = MO_1 - MO = 5 - AO \Rightarrow$
$\Rightarrow AO^2 = (5 - AO)^2 + 56 \Rightarrow AO = 8{,}1$.
Ответ: 8,1.

1623. Основание пирамиды – правильный треугольник, сторона которого равна 3. Одно из боковых ребер пирамиды равно 2 и перпендикулярно основанию. Найдите длину радиуса описанного шара.

§6. Задания B9. Подготовка к выполнению заданий C2

Для выполнения заданий этого раздела необходимо хорошо знать формулы объемов и поверхностей геометрических тел (призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара), ориентироваться в закономерностях комбинаций геометрических тел.

При решении следующих задач воспользуйтесь информацией, предлагаемой на стр. 511–513.

1624. Объем правильной треугольной пирамиды равен 20. Высоту пирамиды увеличили в 3 раза, сторону основания уменьшили в 2 раза. Найдите объем новой пирамиды.

Решение.

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = 20; \quad a_2 = \frac{a}{2}; \quad H_2 = 3H.$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot 3H.$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot 3H = \left(\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{12}\cdot H\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{20\cdot 3}{4} = 15.$$

Ответ: 15.

1625. Боковая поверхность конуса равна 30. Радиус основания конуса уменьшили в 2 раза, образующую увеличили в 3 раза. Найдите поверхность нового конуса.

1626. Шар вписан в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна 6, угол при основании равен 60°. Найдите объем шара и разделите на число $\frac{\pi}{3}$.

1627. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, радиус которой равен 3.

1628. Найдите объем цилиндра, описанного около прямой призмы, основание которой — прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, высота призмы равна $\frac{10}{\pi}$.

1629. Используя данные рис. 338, найдите объем многогранника.

1630. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около цилиндра, радиус основания которого и высота равны 5.

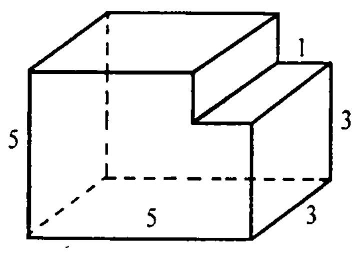


Рис. 338

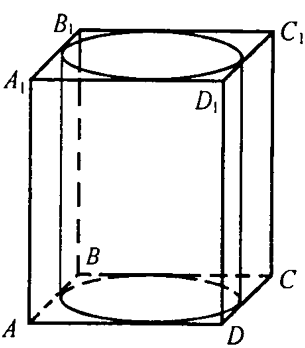


Рис. 339

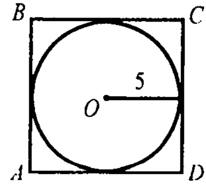


Рис. 340

Решение.

$V = AD \cdot AB \cdot AA_1$.

Высота цилиндра и параллелепипеда равны, т. е. $AA_1 = 5$.

Основание цилиндра (круг) вписано в основание параллелепипеда, значит, основание параллелепипеда – квадрат, т.е. $AB = AD = 10$.

$V = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500$.

Ответ: 500.

1631.1. Цилиндр описан около прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны 3 и 4, высота – $\frac{6}{\pi}$. Найдите объем цилиндра.

1631.2. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, с катетами 3 и 5, боковое ребро равно $\frac{8}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

1632.1. Найдите объем цилиндра, вписанного в прямую призму, основание которой – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 и высотой, равной $\frac{4}{\pi}$.

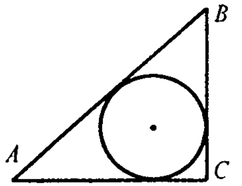


Рис. 341

Решение.

$V_ц = \pi r^2 H$.

Высоты цилиндра и призмы равны, т. е. $H_ц = \frac{4}{\pi}$.

Чтобы найти r, применим метод площадей.

1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$, $S_{ABC} = 24$.

2) $S_{ABC} = p \cdot r$, р – полупериметр $\Delta\, ABC$, r – радиус вписанной окружности.

$$AB = \sqrt{36+64} = 10, \quad p = \frac{10+6+8}{2} = 12.$$

$24 = 12 \cdot r \Rightarrow r = 2.$

$$V_ц = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 4}{\pi} = 16.$$

Ответ: 16.

1632.2. Основание прямой призмы – квадрат со стороной, равной 4. Боковое ребро $\frac{6}{\pi}\cdot$ Найдите объем вписанного цилиндра.

1632.3. Основание прямой призмы – квадрат со стороной, равной 3, высота $\frac{7}{\pi}\cdot$ Найдите объем вписанного цилиндра.

1633. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите:

1. Объем цилиндра, если объем конуса равен 15.
2. Объем конуса, если объем цилиндра равен 60.

Запомните!

Если в шар вписан конус, то справедливы соотношения:

$l = 2R \sin \alpha;$
$l^2 = 2RH$ (рис. 342),

где R – радиус шара ($R = BO = AO$),
l – длина образующей конуса ($l = AB$),
H – высота конуса ($H = BO_1$),
α – угол между образующей конуса и плоскостью основания ($\alpha = \angle BAO_1$).

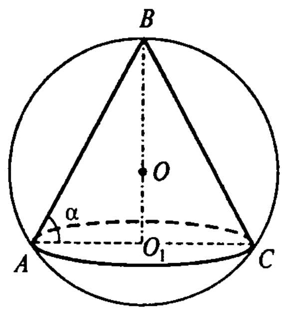


Рис. 342

Такие же соотношения справедливы для вписанной в шар правильной пирамиды.

Запомните!

$l = 2R \sin \alpha;$
$l^2 = 2RH$ (рис. 343), где
l – длины боковых ребер, т. е. $l = AB = BC = BD,$
R – радиус шара ($R = AO = OB$),
H – высота правильной пирамиды ($H = BO_1$).

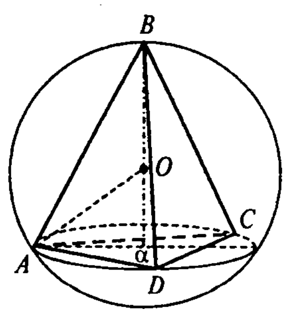


Рис. 343

Запомните!

$r_{ш.} = OO_1 = OE$; $\angle 1 = \angle 2$, т. е. OD – биссектриса угла O_1DE.

Если шар вписан в пирамиду, цилиндр, конус и т. д., то решение сводится к нахождению элементов треугольника OO_1D (рис. 344–346).

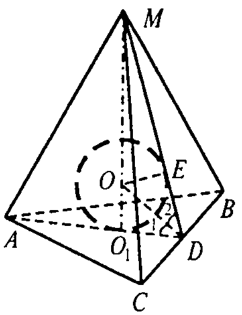


Рис. 344

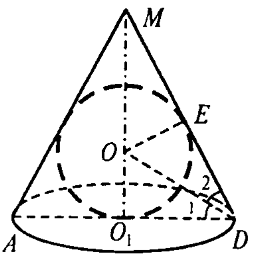


Рис. 345

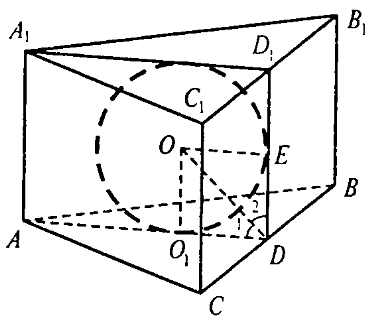


Рис. 346

§7. Задания С2

Для решения задач повышенного уровня по стереометрии участники ЕГЭ должны уметь находить углы между скрещивающимися прямыми, площади плоских фигур, объемы геометрических тел, расстояния от точки до прямой и плоскости и т.д.

Иногда удобно воспользоваться методом координат. Если учащиеся достаточно внимательно изучили теорию и практику выполнения заданий B4 и B9, это значительно облегчит работу при выполнении заданий С2.

1634.1. Найдите длину радиуса шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, высота которой равна 9 и образует с плоскостью боковой грани угол 30°.

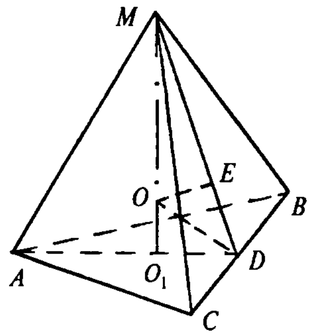


Рис. 347

Решение.

1) Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией, значит, $\angle O_1MD = 30°$ (MD — проекция O_1M на плоскость CMD) $\Rightarrow \angle O_1MD = 60°$ (рис. 347). $OO_1 = OE$ – радиус вписанного шара.

2) В ΔO_1MD $O_1D =$

$$= MO_1 \cdot \text{ctg}\, 60° = 9\frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}.$$

3) В ΔOO_1D $OO_1 = O_1D\ \text{tg}\ 30° = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3.$

Ответ: 3.

1634.2. Высота конуса равна 8, образующая — 10. Найдите радиус вписанного шара.

1635.1. В конус, образующая которого равна 10, а радиус основания — 4, вписан шар. Найдите длину линии, по которой поверхность шара касается боковой поверхности конуса.

1635.2. Вокруг шара, радиус которого равен $2\sqrt{3}$, описана правильная треугольная призма. Найдите объем призмы.

1636. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите величину угла (в градусах) между двумя апофемами пирамиды (рис. 348–350).

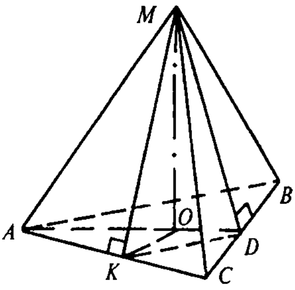


Рис. 348

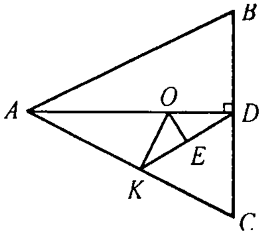


Рис. 349

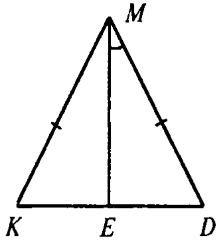


Рис. 350

1637.1. Точки B и D лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла между прямой BD и плоскостью основания цилиндра равен 0,3, $BD = 15$, объем цилиндра равен 450π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

1637.2. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой MK к плоскости основания цилиндра равен 0,6, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Дано: $MK = 10$,
$\sin \angle MKE = 0{,}6$ (рис. 351).
$V_{\text{цил.}} = 150\pi$.
Найти: S_{KABC}
Решение.

1) $S_{KABC} = AK \cdot KC$ ($KC = ME$).
2) В ΔKME
$ME = MK \cdot \sin \angle MKE = 6$.
3) $V_{\text{цил.}} = S_{\text{осн.}} \cdot ME$;
$S_{\text{осн}}. = OK^2\pi$ (рис. 352) $\Rightarrow$
$\Rightarrow 150\pi = \pi \cdot OK^2 \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow OK = 5 \Rightarrow KC = 10$.
4) $S_{KABC} = 6 \cdot 10 = 60$.

Ответ: 60.

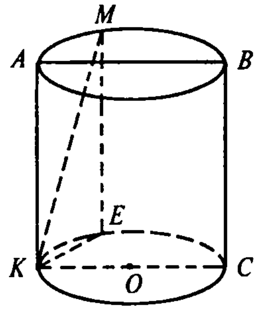


Рис. 351

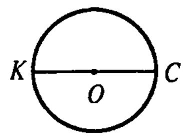


Рис. 352

1638. Угол между образующими CA и CB конуса равен $60°$, высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

1639. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, площадь которого равна 15, $AB = 7$. Боковое ребро призмы равно 18. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью ABC_1.

1640. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4, угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $60°$. Найдите расстояние от вершины основания до плоскости противолежащей ему боковой грани.

Дано: $LO = 4$;
$\angle OEL = 60°$ (рис. 353).
Найти: MB.

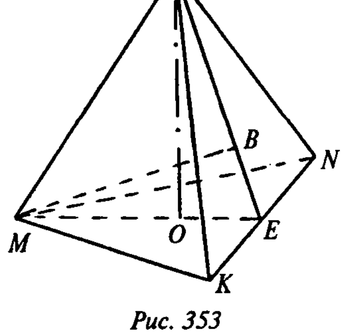


Рис. 353

Решение.

1) В ΔMBE $MB = ME \cdot \cos \angle OEL = \dfrac{ME\sqrt{3}}{2}$.

2) В ΔLOE $OE = OL \cdot \text{ctg } 60° = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

3) $ME = 3OE$, так как ΔMNK правильный, значит, $4\sqrt{3}$.

4) $MB = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$.

Ответ: 6.

1641. Угол между высотой и боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды равен 45°. Найдите величину плоского угла (в градусах) при вершине пирамиды.

1642. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, в котором $BC = 4$, $\sin \angle C = 0{,}125$. Боковое ребро призмы равно 5,5. Найдите тангенс угла между плоскостями AB_1C и ABC.

1643. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{2}$, а ее высота равна диагонали основания. В пирамиде проведено сечение параллельно ее высоте и двум противоположным сторонам основания. Найдите периметр сечения, если известно, что в него можно вписать окружность.

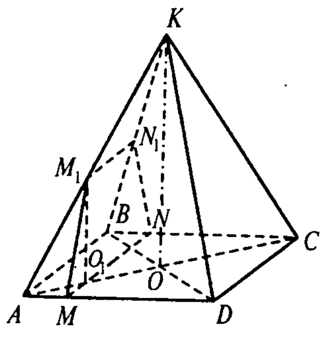


Рис. 354

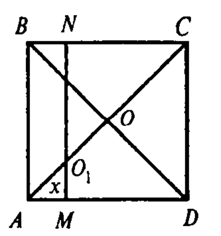


Рис. 355

Решение.

Сечение представляет собой равнобедренную трапецию (так как $M_1N_1 \parallel MN$ и пирамида правильная), в которой $M_1N_1 + MN = 2MM_1$, так как в сечение можно вписать окружность.

1) $P_{сеч.} = 2(M_1N_1 + MN) = 4MM_1$.
Рассмотрим рис. 354.

$MN = AB = \sqrt{2}$.

2) Пусть $MO_1 = x$, тогда

$M_1N_1 = \sqrt{2} - 2x$;

$2MM_1 = M_1N_1 + MN =$
$= \sqrt{2} - 2x + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow MM_1 = \sqrt{2} - x \Rightarrow P_{сеч.} = 4\left(\sqrt{2} - x\right)$.

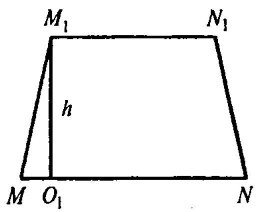


Рис. 356

3) В ΔMM_1O $h = \sqrt{MM_1^2 - MO_1^2}$ (рис. 356),

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{2} - x\right)^2 - x^2} = \sqrt{2\left(1 - x\sqrt{2}\right)}.$$

4) $KO = AC = 2$; $AO = 1$, в ΔAO_1M $AO_1 = x\sqrt{2}$ (рис. 355).

5) $\Delta KOA \sim \Delta AM_1O_1$ ($M_1O_1 \parallel KO$) (рис. 354).

$$\frac{KO}{h} = \frac{AO}{AO_1} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2\left(1 - x\sqrt{2}\right)}} = \frac{1}{x\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2 - 2x\sqrt{2}} = 2x\sqrt{2};$$

$2 - 2x\sqrt{2} = 8x^2 \Rightarrow 4x^2 + x\sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow x_1$ (не удовлетворяет условию $x = MO_1$);

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

6) $P = 4\left(\sqrt{2} - x\right) = 4\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

1644. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 18, основание призмы – треугольник ABC, площадь которого равна 12, $AB = 5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания пирамиды.

Дано: $S_{\Delta ABC} = 12$, $AB = 5$,
$CC_1 = 18$ (рис. 357).
Найти: $\operatorname{tg} \angle CDC_1$.

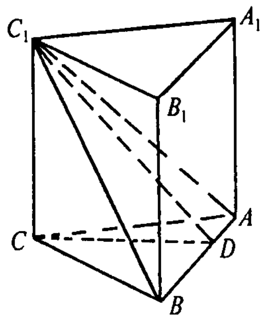


Рис. 357

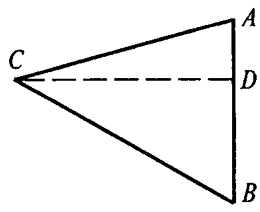


Рис. 358

Решение.

1) В ΔC_1CD $\operatorname{tg}\angle CDC_1 = \dfrac{CC_1}{CD} = \dfrac{18}{CD}$.

2) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD \Rightarrow 24 = 5CD \Rightarrow CD = \dfrac{24}{5}$ (рис. 358).

3) $\operatorname{tg}\angle CDC_1 = 18 : \dfrac{24}{5} = 3{,}75$.

Ответ: 3,75.

1645. Точки M и N расположены на окружностях верхнего и нижнего основания цилиндра, радиус основания которого равен 2, а высота – 3. Длина отрезка MN равна 4. Через отрезок MN проведена плоскость, параллельная образующей цилиндра. Найдите расстояние от оси цилиндра до этой плоскости.

1646. Боковая грань правильной треугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 30° и имеет площадь, равную 96. Найдите длину высоты пирамиды.

Дано: $\angle OEL = 30°$;
$S_{\Delta KLN} = 96$ (рис. 359).
Найти: LO.

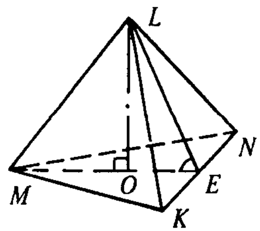


Рис. 359

Решение.

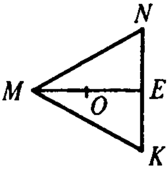


Рис. 360

1) В ΔOLE $OL = \frac{1}{2}EL$ (катет против угла 30°); $OE = \frac{LE\sqrt{3}}{2}$.

2) $S_{\Delta OLN} = 96 \Rightarrow KE \cdot LE \Rightarrow KE = \frac{96}{LE}$.

3). В ΔMEK $OE = KE \cdot \text{tg}\, 60° \Rightarrow OE = \frac{KE}{\sqrt{3}}$.

4) $\frac{LE\sqrt{3}}{2} = \frac{KE}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3LE = 2KE \Rightarrow 3LE = \frac{2 \cdot 96}{LE} \Rightarrow LE^2 = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow LE = 8 \Rightarrow OL = 4.$

Ответ: 4.

1647. Через вершину нижнего основания правильной треугольной призмы и ребро верхнего основания проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью нижнего основания. Площадь сечения равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности призмы.

1648. Концы отрезка BP лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BP равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BP и плоскостью цилиндра равен 45°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и P.

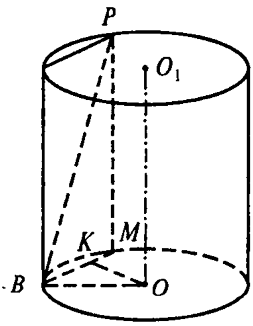


Рис. 361

Дано: $BO = 25$, $BP = 14\sqrt{2}$, $\angle MBP = 45°$ (рис. 361).
Найти: KO.

Решение.

1) OK найдем в ΔBOK по теореме Пифагора, найдем для этого BK (рис. 362).

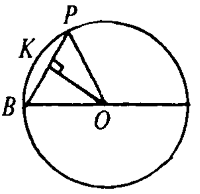


Рис. 362

2) В ΔBMP $BM = MP \cdot \cos 45° =$

$= 14\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14.$

3) В ΔOBP $BO = OP$, $OK \perp BP \Rightarrow BK = KP \Rightarrow BK = 7$.

4) В ΔBOK $OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = 24$.

Ответ: 24.

1649. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Все двугранные углы при основании равны 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

1650. Диаметр и хорда AB основания конуса равны 34 и 16, а тангенс угла наклона образующей к плоскости основания равен 3. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения, проходящего через вершину конуса и хорду AB.

1651. Концы отрезка AB лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между AB и плоскостью основания цилиндра равен 45°. $AB = 8\sqrt{2}$. KC — диаметр нижнего основания. Найдите расстояние между образующей цилиндра CC_1 и прямой AB, если объем цилиндра равен 200π.

1652. Диаметр и хорда MN конуса равны 20 и 16, а тангенс угла наклона образующей к плоскости основания равен 1,8. Найдите тангенс угла между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения, проходящего через вершину конуса и хорду MN.

1653. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы составляет с боковым ребром призмы 45°. Найдите косинус угла между пересекающимися диагоналями смежных боковых граней призмы.

Дано: $\angle CB_1B = 45°$ (рис. 363).
Найти: $\cos \angle A_1CB_1$.

Решение.

1) $\cos \angle A_1CB_1$ найдем в ΔA_1B_1C по теореме косинусов.
2) Пусть $AB = a$, тогда в ΔCB_1B

$$CB_1 = a : \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

3) В ΔA_1CB_1 $A_1C = B_1C$ (диагонали равных боковых граней).

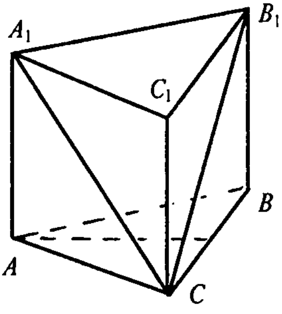


Рис. 363

$$A_1B_1^2 = A_1C^2 + B_1C^2 - 2 \cdot A_1C \cdot B_1C \cdot \cos \angle A_1CB_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 4a^2 - 4a^2 \cos \alpha \Rightarrow 4 \cos \alpha = 3 \Rightarrow \cos \alpha = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

1654. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите косинус угла между скрещивающимися диагоналями смежных боковых граней призмы.

1655. Радиус основания цилиндра равен 9, высота – 34. В окружность основания вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC = 2\sqrt{17}$ и $BA = BC$. Отрезки AA_1 и BB_1 – образующие цилиндра. Найдите тангенс угла между плоскостями ACA_1 и AB_1C.

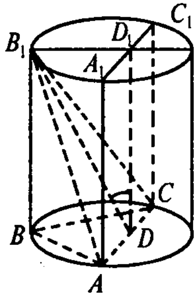


Рис. 364

Дано: $BO = 9$, $BB_1 = 34$, $AC = 2\sqrt{17}$; $AB = BC$ (рис. 364, 365).
Найти: $\angle B_1DC_1$.

Решение.

1) В ΔB_1D_1D $\operatorname{tg} \angle B_1DD_1 = \dfrac{B_1D_1}{DD_1} = \dfrac{BD}{34}.$

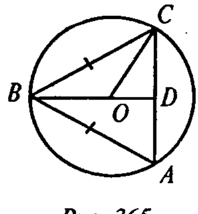


Рис. 365

2) В ΔOCD $OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} =$

$= \sqrt{81-17} = 8 \Rightarrow BD = 9 + 8 = 17.$

3) $\operatorname{tg} \angle B_1DD_1 = \frac{17}{34} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle B_1DD_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$

Ответ: arctg 0,5.

1656. Через образующую цилиндра проведены два сечения, одно осевое, а второе параллельно оси цилиндра. Площади сечений 26 и 13. Найдите градусную меру угла между плоскостями сечений.

1657. Через точку окружности основания цилиндра проведены два сечения: одно через ось цилиндра, второе параллельно оси. Угол между плоскостями сечений равен 30°. Найдите площадь осевого сечения, если площадь второго сечения равна $4\sqrt{3}$.

1658. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 13, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$.

1659. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны $\sqrt{2}$ и образуют угол 120°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро равно $\sqrt{110}$.

1660. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$ проведено сечение через сторону AB под углом 30° к плоскости основания, $AB = 4$. Плоскость MDE перпендикулярна плоскости сечения. Найдите площадь сечения.

1661. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10. Боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

1662. Угол между двумя несмежными гранями правильной четырехугольной пирамиды равен 90°. Площадь боковой поверхности — $100\sqrt{2}$. Найдите сторону основания пирамиды.

Дано: $\angle MNK = 90°$;

$S_б = 100\sqrt{2}$ (рис. 366).

Найти: AD.

Решение.

1) $S_б = 2\ AD \cdot NK$ или

$100\sqrt{2} = 2MK \cdot NK \Rightarrow$

$\Rightarrow MK \cdot NK = = 50\sqrt{2}$.

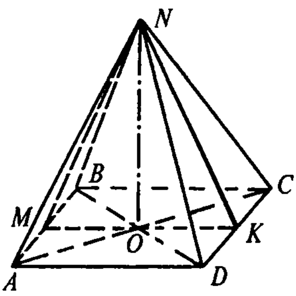


Рис. 366

2) В ΔNOK $NK = \dfrac{OK \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot OK \Rightarrow 2OK \cdot \sqrt{2} \cdot OK = 50\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow OK^2 = 25$; $OK = 5 \Rightarrow MK = 10$.

Ответ: 10.

1663. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны. Найдите расстояние между стороной основания и противолежащей боковой гранью пирамиды.

1664. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите величину угла между двумя несмежными боковыми гранями пирамиды.

1665. В правильную треугольную призму можно вписать шар таким образом, что он будет касаться всех граней призмы. Найдите угол между диагональю боковой грани и плоскостью основания.

1666. Основание пирамиды $MABC$ – прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза BC которого равна 65, а катет AB – 39. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости основания и равно 13. Найдите высоту пирамиды $MABC$, опущенную из вершины A.

Дано: $BC = 65$, $AB = 39$,

$AM = 13$ (рис. 367).

Найти: AE.

Решение.

1) Объясним, почему AE является высотой пирамиды.

AD – проекция AE на плоскость ABC, $AD \perp BC$ (по построению) (рис. 368) $\Rightarrow AE \perp BC$ согласно теореме о трех перпендикулярах (рис. 368).

$AE \perp MD$ (по построению), значит, отрезок AE перпендикулярен двум пересекающимся прямым MD и BC, принадлежащим плоскости $\Delta MDC \Rightarrow AE \perp$ пл. ΔMBC.

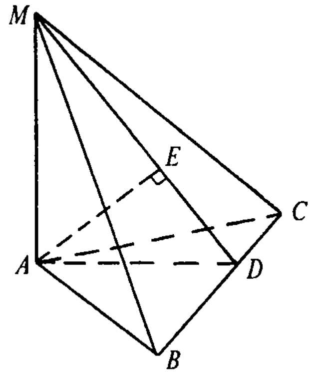


Рис. 367

2) AE найдем как высоту прямоугольного ΔAMD. Для этого нужно найти AD.

3) В ΔABC катет BC найдем по теореме Пифагора

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 52$

(рис. 368).

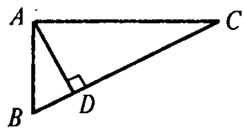


Рис. 368

$\sin \angle C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{39}{65} = 0{,}6.$

4) В ΔABC $AD = AC \cdot \sin \angle C = 52 \cdot 0{,}6 = 31{,}2$.

5) Аналогично в ΔAMD (рис. 367) найдем $MD = 13 \cdot 2{,}6$;

$$\sin \angle M = \frac{AD}{MD} = \frac{31{,}2}{13 \cdot 2{,}6} = \frac{12}{13} \Rightarrow A = AM \cdot \sin\angle M = \frac{13 \cdot 12}{13} = 12.$$

Ответ: 12.

Комментарий: Если стереометрическая задача на ЕГЭ предложена в разделе B10, в бланке ответов записывается только результат.

Мы предлагаем полное объяснение для лучшего понимания учащимися, это не является образцом оформления задания B10, но является образцом оформления заданий C2 и C4, в которых требуется развернутый ответ.

1667. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4+2\sqrt{3}$. Боковая грань образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

1668. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а боковое ребро — $\sqrt{6}$. Найдите объем пирамиды.

1669. В основании конуса проведена хорда, через эту хорду и вершину конуса M проведена плоскость так, что угол при вершине M образовавшегося в сечении треугольника равен 60°. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости полученного треугольника, если высота конуса равна 2, а образующая — $\frac{8}{3}$.

1670. Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $2\sqrt{6}$. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Найдите косинус угла между прямыми A_1C и BD_1, если $AD = \sqrt{3}$.

1671. Радиус основания цилиндра равен 5, а высота равна 6. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Известно, что $BC = 6\sqrt{2}$. Найдите синус угла между прямыми A_1C и BD.

1672. Концы отрезка MK лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой MK и плоскостью основания цилиндра равен 30°, $MK = 8$, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

1673. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 4\sqrt{3}$; $\angle BCD = 120°$. Высота призмы равна 12. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью A_1BC.

1674. Радиус основания цилиндра равен 4, высота — 3. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра. Найдите синус угла между прямыми AC_1 и BD, если $BC = 4\sqrt{3}$.

1675. Отрезки MN и KL – диаметры одного из оснований цилиндра, MM_1 – его образующая. Найдите синус угла между прямыми M_1K и NL, если радиус основания цилиндра равен 3,5, высота – 6, $NK = \sqrt{21}$.

1676. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 10$, $BC = 12$. Боковое ребро равно 5,5. Точка K делит это ребро в отношении $AK : KA_1 = 8 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями BCK и $A_1B_1C_1$.

1677. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1 (рис. 369).

Решение.

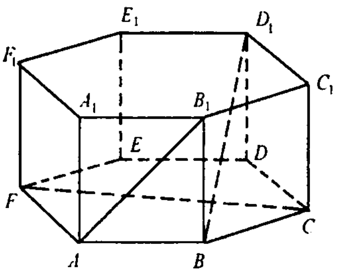


Рис. 369

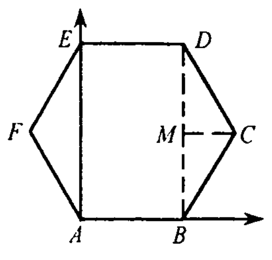


Рис. 369, а

Используем формулу косинуса угла между векторами

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Разместим нижнее основание в системе координат с началом координат в точке A (рис. 369, a). Вычислим координаты точек и векторов $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$

$A(0;\ 0;\ 0)$ $\quad$ $B(1;\ 0;\ 0)$

$B_1(1;\ 0;\ 1)$ $\quad$ $D_1(1;\ \sqrt{3};\ 1)$

$\overrightarrow{AB_1}\{1; 0; 1\}$ $\quad$ $\overrightarrow{BD_1}\left\{0; \sqrt{3}; 1\right\}$

Ординату точки D_1 вычислим в $\Delta\ DMC$

$$DM = DC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_D = BD = \sqrt{3}.$$

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot\sqrt{3} + 1\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

1678. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1.

1679. В кубе $A...D_1$ найдите величину угла между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

1680. В правильной треугольной призме $A...C_1$ все ребра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

1681. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра равны 3. Найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1 (рис. 370).

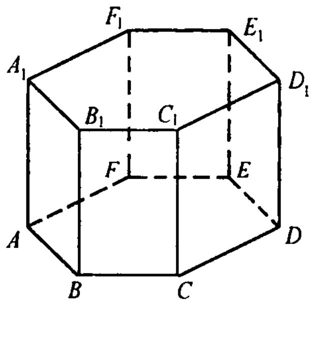


Рис. 370

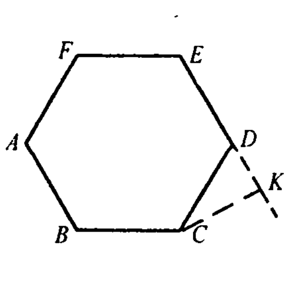


Рис. 370, а

Решение.

1) Проведем $CK \perp DE$ (рис. 369).

$DE \parallel E_1D_1$, $CK \perp DE \Rightarrow CK \perp E_1D_1$

2) $K_1 \in E_1D_1$, KC проекция CK_1, согласно теореме о трех перпендикулярах $CK_1 \perp E_1D_1$ (так как проекция CK_1 перпендикулярна прямой E_1D_1) и CK_1 — искомое расстояние от точки C до E_1D_1.

3) В $\Delta\, CDK$ $CK = CD \sin \angle CDK$ (рис. 370, *а*).

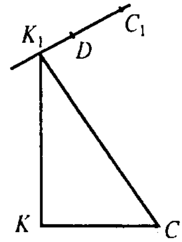


Рис. 371

$$\angle CDE = 120^\circ \left(\frac{180(6-2)}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CDK = 60^\circ \text{ (смежные углы) } CK = 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

4) В $\Delta\, KK_1C$ $CK_1 = \sqrt{KK_1^2 + KC^2}$ (согласно теореме Пифагора) (рис. 371).

$$CK_1 = \sqrt{9 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{36+27}}{2} = \frac{\sqrt{63}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{63}}{2}$.

1682. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра равны 2. Найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.

1683. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ сторона основания равна 3, боковое ребро — 8. Найдите расстояние от точки B до прямой D_1C_1.

1684. В правильной четырехугольной пирамиде все ребра равны 1. Найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью MAD (M — вершина пирамиды).

Глава 14
Учебно-тренировочные тесты для подготовки к ЕГЭ

Экзаменационная работа состоит из двух частей. В первой части 14 заданий базового уровня (B1–B14), при получении правильного результата каждое задание оценивается одним первичным баллом. Решение не проверяется.

В части 2 (C1–C6) требуется полное обоснование всех этапов выполнения работы. C1 и C2 оцениваются 2 баллами, C3 и C4 — 3 баллами, C5 и C6 — 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение работы — 32.

Верное решение шести заданий соответствует минимальному уровню подготовки по математике.

Вариант 1

Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланке ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

Единицы измерений писать не нужно.

B1. Фен после повышения цены на 16% стоит 3480 р. Сколько стоил фен до повышения цены?

B2. Вычислите $\dfrac{3\sin 68^\circ}{\cos 34^\circ \cos 56^\circ}$.

B3. Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-3} = 243.$$

B4. MN – диаметр окружности, $MN = 8$, $\cos M = 0{,}8$. Найдите радиус окружности (рис. 372).

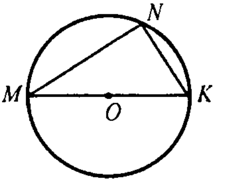


Рис. 372

B5. Строительная фирма планирует купить на одной из трех баз 700 м^2 керамогранита. Цены и условия доставки приведены в таблице (рис. 373). Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

База	Стоимость керамогранита (р. за 1 м^2)	Стоимость доставки (р.)	Дополнительные условия доставки
1	370	1900	При приобретении товара на сумму более 250 000 р. скидка 5%
2	360	2000	При заказе товара на сумму свыше 250 000 р. доставка бесплатная
3	350	2100	

Рис. 373

B6. Найдите площадь пятиугольника, координаты вершин которого равны $A(1; 1)$; $B(3; 7)$; $C(12; 7)$; $D(8; 5)$; $E(8; 1)$.

B7. Найдите значение выражения $\log_3 360 + \log_3 \dfrac{1}{40} - \log^2_{\frac{1}{2}} 4.$

B8. Прямая, параллельная прямой $y = -4x + 11$, касается графика функции $y = x^2 + 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

B9. Объем конуса равен 16 м^3. У второго конуса высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго конуса (в м^3).

B10. Получена партия одежды: 40 комплектов мужской, 16 — женской и 24 — детской. Найдите вероятность того, что случайно взятая одежда не окажется женской.

B11. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

B12. Две бригады, работая вместе, могут выполнить асфальтирование шоссе за 12 дней. За сколько дней выполнит эту работу вторая бригада, если она за 3 дня выполняет такую же часть работы, какую первая — за 2 дня?

B13. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки M этой прямой изменяется по закону $S(t) = 3t^2 - 12t + 7$ (t – время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 72 м/с?

B14. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 13, сторона основания — $5\sqrt{2}$. Найдите длину высоты пирамиды.

Часть 2

В бланке ответов № 2 запишите сначала номер задания, а затем полное обоснование решения и ответ.

C1. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x + \sin x}{\operatorname{tg} x} = 0.$

C2. Высота правильной треугольной призмы $MNKM_1N_1K_1$ равна 1, диагональ боковой грани $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью M_1NK и плоскостью основания.

С3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 3|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4. \end{cases}$

С4. Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5x - \big|3x - |x + a|\big| = 10|x - 2|$ имеет хотя бы один корень.

С6. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n!$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Вариант 2

Часть 1

В1. Лесной участок содержит 6500 м^3 древесины. Сколько будет древесины на этом участке через 2 года, если ежегодный прирост леса составляет в среднем 2%?

В2. В $\Delta\, MNK$ угол K равен 100°, ME – биссектриса $\angle\, KMN$, $\angle\, KME = 14°$. Найдите градусную меру $\angle\, MNK$.

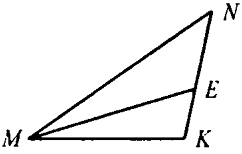


Рис. 374

В3. Вычислите $\dfrac{\sin\dfrac{7\pi}{18}}{\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{36}\left(1 - \cos\dfrac{7\pi}{18}\right)}$.

В4. Через точку A проведены две касательные к окружности, радиус которой равен 4,5, $OA = 9$. Найдите угол между касательными.

В5. Строительная фирма планирует приобрести 8 т цемента (1 мешок – 50 кг). Используя данные таблицы (рис. 375), вычислите, приобретение цемента на какой из трех баз стройматериалов будет наиболее выгодным.

База	Стоимость 1 мешка цемента (р.)	Доставка (р.)	Дополнительные условия
1	220	2000	При приобретении 8 т цемента (и больше) – скидка на 8% стоимости покупки
2	215	2100	При приобретении 8 т (и больше) доставка бесплатно
3	210	2200	

Рис. 375

В6. Вычислите площадь четырехугольника, координаты вершин которого равны $A(-2\,;\,7)$; $B(8;\,7)$; $C(6;\,1)$; $D(1;\,1)$.

В7. Найдите значение выражения $5^{\log_5 0{,}6-1}-9^{0{,}5+\log_9 2}$.

В8. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=4$ проходит через точки $A\ (-2;\,-2)$ и $B\ (0;\,1)$. Найдите $f'(4)$.

В9. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$; $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

В10. В ящике находятся пуговицы различных цветов: 50 белых, 20 красных, 10 синих. Какова вероятность того, что взятая наугад пуговица не окажется красного цвета?

В11. Найдите наибольшее значение функции $y=3x-3\operatorname{tg}x-8$ на отрезке $\left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

В12. Город D расположен по шоссе между городами A и C. Из A в сторону C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним в том же направлении из B выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если его скорость на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами A и B равно 112 км?

B13. Высота, на которой находится камень, брошенный с поверхности земли вертикально вверх, изменяется по закону $h(t) = 1 + 13t - 5t^2$ (t, с; h, м). Сколько секунд камень будет находиться на высоте, большей 7 м?

B14. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $12\sqrt{3}$, высота — 16. Найдите длину бокового ребра.

Часть 2

C1. Решите уравнение $2\sin^2 x = 3\cos x$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

C2. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна $\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°.

C3. Решите неравенство

$$\log_3\left(\left(2^{-x^2}-3\right)\left(2^{-x^2+9}-2^0\right)\right)+\log_3\frac{2^{-x^2}-3}{2^{-x^2+9}-1}>\log_3\left(2^{5-x^2}-2\right)^2.$$

C4. Точка O – центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса OM взята точка A, через нее проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом, если $\angle OAK = 60°$.

C5. Найдите все такие значения a, что наименьшее значение функции $|x^2 - (1 + a)x + a| + (a - 1)|x + 1|$ меньше 2.

C6. В двенадцатиэтажном доме на первом этаже в лифт садится 9 человек. Они выйдут группами по 2, 3 и 4 человека на разных этажах. Сколькими способами они могут это сделать, если на втором этаже лифт не останавливается?

Вариант 3

Часть 1

B1. Сколько денег нужно внести в банк, который платит 10% годовых, чтобы через 3 года на счету была сумма, равная 66 550 р.?

B2. Найдите площадь кольца, ограниченного концентрическими окружностями, радиусы которых равны $\frac{43}{\sqrt{\pi}}$ и $\frac{29}{\sqrt{\pi}}$.

B3. Решите уравнение

$$\left(\sin^2 x-3\right)\left(4^{x-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}\right)=0.$$

B4. Используя данные рис. 376, найдите величину $\angle AOC$ (в градусах).

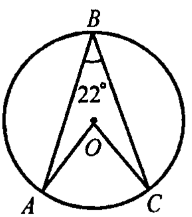


Рис. 376

B5. Поставщик газа может заключить контракт на транзит газа до покупателя через один из трех газопроводов. Используя данные таблицы, вычислите, сколько долларов придется заплатить за самый выгодный транзит $1{,}5 \cdot 10^6$ м^3 газа (рис. 377).

Газопровод	Длина газопровода, км	Транспортировка 1000 м^3 на 10 км, доллар
1	380	9
2	410	8,5
3	320	10

Рис. 377

В6. Найдите площадь пятиугольника, координаты верш ін которого равны $A(0; 1)$; $B(-3; 9)$; $C(8; 9)$; $D(5; 5)$; $E(9; 1)$.

В7. Найдите значения выражения $\log_{0,5}^2 8 - 13^{\log_{13} 8+1}$.

В8. На рисунке 378 отмечены гочки x_1, x_2, ... x_7. В скольких их этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

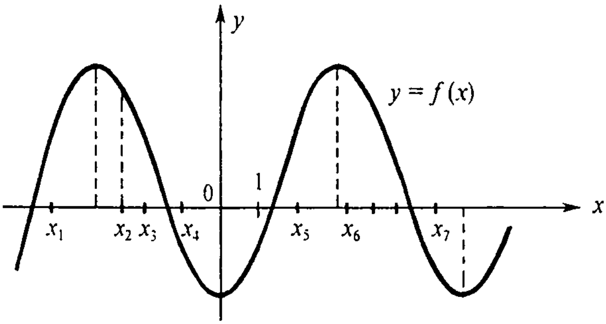


Рис. 378

В9. Объем правильной треугольной призмы равен 90. Найдите объем правильной треугольной призмы, ребро основания которой в 4 раза меньше ребра основания данной призмы, а высота в 3 раза меньше.

В10. Для предприятия зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. р.) задается формулой $q = 150 - 15p$. Найдите максимальную цену (в тыс. р.), при которой выручка за месяц $r = qp$ составит не менее 375 тыс. р.

В11. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\cos x - \frac{21}{\pi}x + 9 \text{ на отрезке } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right].$$

B12. Две третьих части времени, затраченного на весь путь, автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, а оставшееся время – 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

B13. При открытии нового магазина среди первых 40 покупателей разыгрываются подарки: 8 кофемолок и 4 фена. Какова вероятность остаться без подарка?

B14. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $5\sqrt{3}$, боковое ребро — 13. Найдите длину высоты пирамиды.

Часть 2

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-6}=18, \\ -2\sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$

C2. Основание пирамиды $DABC$ – равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$. Ребро AD, равное $2\sqrt{5}$, перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD.

C3. Решите неравенство $\sqrt{25-x^2}\left(2x^2+x+1\right)\geq 0$.

C4. Из точки, отстоящей от центра круга на 8 см, проведены касательные к кругу. Расстояние между точками касания равно 4,5 см. Найдите длину радиуса круга.

C5. Найдите наибольшее натуральное значение параметра c, при котором решение неравенства $\left|\,|2x+4|-7\,\right|-13\leq$ $\leq 2c^2$ удовлетворяет условию $x\in[-37;\,35]$.

C6. Написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных чисел равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных чисел равно -8.

а) Сколько чисел написано?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Вариант 4

Часть 1

B1. Теплоход рассчитан на 1200 пассажиров и 35 членов команды. Спасательная шлюпка может вместить 45 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе?

B2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{x+2} = 27$.

B3. Решите уравнение $\log_7 x + \log_7 (x + 6) = 1$. Если уравнение имеет два корня, найдите их сумму.

B4. Радиус окружности равен 4. Найдите (в градусах) величину вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $4\sqrt{3}$.

B5. Используя данные таблицы (рис. 379), вычислите, сколько денег придется заплатить за самый дешевый фундамент для дачного домика.

Фундамент	Количество материала	Цены, р.
Каменный	10 т камня	1 т – 2100
	9 мешков цемента	1 мешок – 200
Бетонный	13 т щебня	1 т – 63
	37 мешков цемента	1 мешок – 200
Из пеноблоков	5 м^3 пеноблоков	1 м^3 – 2500

Рис. 379

B6. Вычислите площадь треугольника, координаты вершин которого равны (–3; 0); (2; 0); (7; 6).

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{0,2} 125}{\log_{\sqrt{3}} 9} - 17^{\log_{17} 3+1}$.

B8. Вычислите $\dfrac{\sin^2 \dfrac{2\pi}{15} - \cos^2 \dfrac{2\pi}{15}}{\sin \dfrac{7\pi}{30}}$.

B9. Шар объемом 2,4 вписан в цилиндр. Найдите объем цилиндра.

B10. Высота над землей камня, подброшенного вверх, вычисляется по формуле $h(t) = 19t - 5t^2$, где t — время в секундах, h — высота в метрах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 12 м?

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 7x + 1) \cdot e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$.

B12. Каждый из трех рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 12 ч. Через 2 ч после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, а еще через 2 ч — третий, и работу они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?

B13. На экзамене по математике студенту предлагается 30 билетов, в шести из них встречается вопрос по теме «Интеграл». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном билете не будет вопроса об интеграле.

B14. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{2}$, боковое ребро — 5. Найдите длину высоты пирамиды.

Часть 2

C1. Решите уравнение $|4^x - 2| = 4^{x-1} - 3$.

C2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

C3. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

C4. Дана окружность и точка M. Точки A и B лежат на окружности, причем A – ближайшая к M точка окружности, а B – наиболее удаленная от M точка окружности. Найдите радиус окружности, если $MA = 10$, $MB = 3$.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x - \big|3x - |x + a|\big| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

C6. При каком значении a область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 6x + a} + \sqrt{x - 4}$ состоит из одной точки?

Вариант 5

Часть 1

B1. Билет в музей стоит 180 р. Учащимся школ во время экскурсии скидка составляет 60%. Сколько билетов для школьников можно купить на 1100 р.?

B2. На рисунке 380 изображен график изменения стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели июня. В первую неделю июня бизнесмен купил 16 акций и продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить?

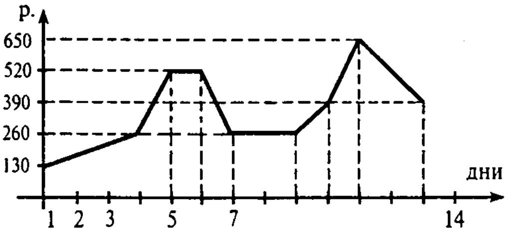


Рис. 380

B3. Решите уравнение $(x^2 + 2)(16^{x+0.5} - 15 \cdot 4^x - 4) = 0$.

B4. EF – диаметр окружности, $DE = 12$, $\cos E = 0{,}6$. Найдите длину DF (рис. 381).

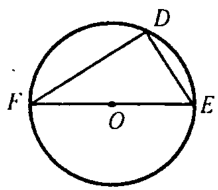


Рис. 381

B5. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. Используя данные таблицы (рис. 382), вычислите, какое наименьшее время потребуется на поездку от дома до дачи.

Вид транспорта	Время на дорогу от дома до остановки	Время в пути	Время на дорогу пешком от конечной остановки до дачи
Электричка	15 мин	1 ч 20 мин	20 мин
Автобус	10 мин	1 ч 40 мин	15 мин
Маршрутное такси	20 мин	1 ч 10 мин	25 мин

Рис. 382

B6. Найдите площадь фигуры, координаты вершин которой равны (1; 0); (3; 6); (9; 6); (11; 0).

B7. Найдите значение выражения $6^{\log_6 12-1} - \log^2_{\frac{1}{7}} 49$.

B8. На рисунке 383 отмечены точки x_1, x_2, ... x_9. Укажите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна?

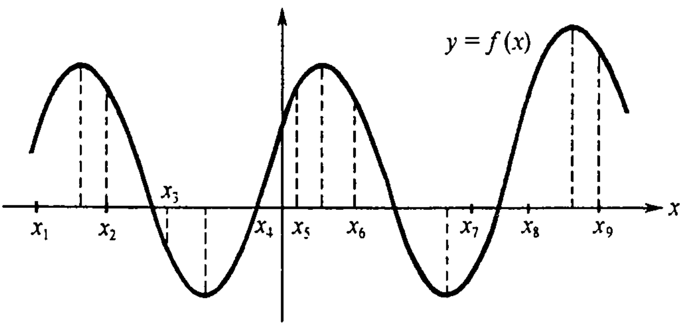


Рис. 383

B9. Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 112. Найдите $\frac{1}{\pi} \cdot V_{цил}$.

B10. Камень брошен вертикально вверх. Высота, на которой он находится, вычисляется по формуле $h(t) = -5t^2 + 18t$ (где t — время в секундах, h — высота в метрах). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 м.

B11. Найдите точку минимума функции $y = (x + 9)\, e^{6-x}$.

B12. Из пункта A в пункт B вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка, при этом скорость лодки на 2 км/ч больше скорости байдарки. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Последнюю

$\frac{1}{7}$ часть пути моторная лодка шла с выключенным мотором. Найдите скорость байдарки в стоячей воде, если в пункт B байдарка и моторная лодка прибыли одновременно.

B13. Монета бросается дважды. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз выпадет орел.

B14. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $3\sqrt{3}$, высота пирамиды — 4. Найдите длину бокового ребра.

Часть 2

C1. Решите уравнение $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$. Найдите корни принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

C2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AB и плоскостью SAD.

C3. Решите неравенство $\frac{\log_2(2x^2 - 13x + 20) - 1}{\log_3(x+7)} \leq 0.$

C4. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В этот треугольник вписана окружность с центром O_1. Найдите величину угла AO_1C.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$ лежит на интервале $(-3; 3)$.

C6. Участнику лотереи предлагается 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад выбраны 2 билета. Какова вероятность того, что:

а) оба выбранных билета выигрышные;
б) только один билет выигрышный;
в) выигрышного билета не оказалось?

Вариант 6

Часть 1

В1. Чайный сервиз рослее повышения цены на 22% стоит 10 980 р. Сколько стоил сервиз до повышения цены?

В2. $\log_{\frac{1}{7}}(x-4)+\log_{\frac{1}{7}}x \le \log_{\frac{1}{7}}21$, найдите наименьшее целое решение неравенства.

В3. Решите уравнение
$(-x^2 - 2)(128 - 2^{3x-0,2}) = 0.$

В4. $\angle AOB = 48^\circ$. Найдите градусную меру $\angle ACB$ (рис. 384).

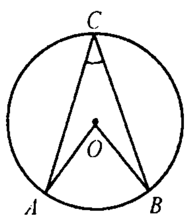


Рис. 384

В5. Художественная студия приобретает 400 кг гипса. Используя данные таблицы (рис. 385), вычислите наименьшую стоимость покупки с доставкой.

Поставщик	Цена 1 кг гипса (р.)	Стоимость доставки (р.)	Дополнительные условия
1	130	2200	При приобретении товара на сумму, превышающую 51 000 р., – скидка на товар 8%
2	120	2250	
3	125	2100	При приобретении товара на сумму 50 000 р. и выше доставка бесплатная

Рис. 385

B6. Вычислите площадь четырехугольника, координаты вершин которого равны (1 ; 2); (3; 8); (9; 8); (7; 2).

B7. Найдите значения выражения

$$\log_2 400+\log_2 \frac{1}{25}-3^{\log_3 11+1}.$$

B8. Найдите максимальную длину промежутка, на котором производная функции $y=f(x)$ положительна (рис. 386).

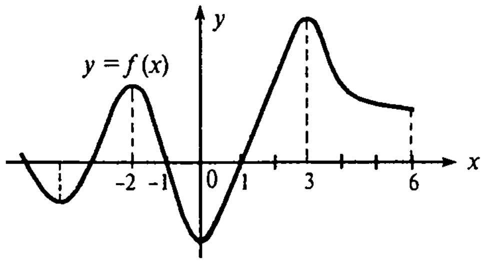


Рис. 386

B9. Если каждое ребро куба увеличить на 3, то площадь его поверхности увеличится на 90. Найдите длину ребра куба.

B10. Температура обогревательного элемента задается выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$. $T_0 = 1600°$ K, $a = -5$ К/мин^2; $b = 105$ К/мин. При температуре свыше 1870° К прибор может выйти из строя. Через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор?

B11. Найдите точку минимума функции $y = (25 - x)\,e^{25-x}$.

B12. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 24 км, вышел плот. Одновременно навстречу ему из B вышел катер, собственная скорость которого в 5 раз больше скорости плота. После встречи катер вернулся обратно. Какое расстояние проплыл плот до того момента, когда катер вернулся в пункт B?

B13. Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,65, а второго — 0,6. Найдите вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах двух стрелков.

B14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $5\sqrt{2}$, высота — 12. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Часть 2

C1. Решите уравнение $6\cos^2 x - 5\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$. Найдите корни принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

C2. Ребра AD и BC пирамиды $DABC$ равны 24 и 10. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 13. Найдите величину угла между прямыми AD и BC.

C3. Решите неравенство $\log_{|x-2|}(4 + 7x - 2x^2) \le 2$.

C4. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AD. Найдите величину угла MBC.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 + 4x + |x^2 - 1{,}5x - 1| - a$ принимает только неотрицательные значения.

C6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

Вариант 7

Часть 1

B1. В городе 600 тыс. жителей. Сколько в нем будет жителей через 2 года, если ежегодный прирост населения составляет 3%?

B2. Найдите сумму корней уравнения $\log_9 x + \log_9 (x - 8) = 1$.

B3. Найдите корни уравнения $(x^2+2)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} - 81\right) = 0$.

B4. Радиус окружности равен 3. Найдите градусную меру острого вписанного угла, опирающегося на хорду AB, равную $3\sqrt{3}$.

B5. Покупатель намерен приобрести 30 м^3 кирпичных блоков. Цены и условия доставки трех поставщиков приведены в таблице. Сколько денег нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пеноблоков (р. за 1 м^3)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
1	2700	2100	При приобретении товара свыше 720 000 р. – скидка 5 % на стоимость товара
2	2800	2000	При заказе товара более чем на 750 000 р. – доставка бесплатная
3	2600	2200	

Рис. 387

B6. Найдите площадь фигуры, координаты вершин которой равны $A(-2;\ 1)$; $B(0;\ 8)$; $C(9;\ 8)$; $D(6;\ 5)$; $E(11;\ 1)$.

B7. Найдите значение выражения $7^{\log_7 5+1} - \log_{0,2} 8 \cdot \log_4 125$.

B8. Тело движется прямолинейно. Расстояние вычисляется по формуле $S(t) = 4t^2 - 9t + 2$. Вычислите, в какой момент времени скорость движения будет равна 11 м/с.

B9. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, высота — 2.

B10. Масса радиоактивного вещества уменьшается по закону $m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}$. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени m_0 = 280 мкг изотопа железа-59, период полураспада которого T = 45 суток. В течение скольких суток содержание этого изотопа в веществе будет превосходить 17,5 мкг?

B11. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 10x + 4\ln x + 10$ на отрезке $\left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11}\right]$.

B12. Мотоциклист отправился из пункта *А* в пункт *Б*, расстояние между которыми 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда остановился на 10 мин. После остановки он увеличил скорость на 6 км/ч и на путь из *Б* в *А* затратил столько же времени, сколько на путь от *А* до *Б*. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.

B13. В классе 20 учащихся, 5 из них не выучили домашнее задание по географии. Какова вероятность того, что два первых ученика, вызванные наугад, будут не готовы к ответу?

B14. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

Часть 2

C1. Решите уравнение $6\sin^2 x - 11\sin x + 4 = 0$ и найдите корни при $x \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

C2. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая – 28. Плоскость пересекает его основания по хордам, равным 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

C3. Решите неравенство $\log_2 \frac{3x-2}{x-1} + 3\log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1$.

C4. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 36$, $CD = 34$ и верхним основанием $BC = 10$ $\cos \angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых общее решение неравенств $y + 2x \geq a$ и $y - x \geq 2a$ являются решениями неравенства $2y - x > a - 3$.

C6. Найдите все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих условию: $5mn$ делится без остатка на $(m^2 + 4n^2 + 18)$.

Вариант 8

Часть 1

B1. Стоимость оборудования мастерской равна 500 000 р. Через год стоимость этого оборудования будет равна 456 250 р. Найдите процент ежегодной амортизации оборудования.

B2. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{8}} x + \log_{\frac{1}{8}}(x-7) = -1$. Если уравнение имеет более одного корня, найдите их сумму.

B3. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{19}{3x-54}} = \dfrac{1}{9}$.

B4. В ΔMNK $\angle M = 90°$ (рис. 388). $\sin \angle K = \dfrac{12}{13}$; $MN = 2{,}4$. Найдите KM.

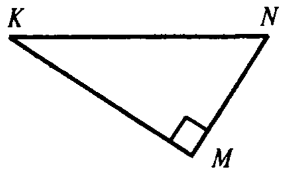


Рис. 388

B5. Строительная фирма планирует купить 270 м³ пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей будет стоить самая дешевая покупка с доставкой (рис. 389)?

Поставщик	Стоимость кирпичных блоков (р. за 1 м³)	Стоимость доставки (р.)	Дополнительные условия
1	2150	1900	При приобретении товара на сумму более 64 000 руб. скидка на товар 5%
2	2100	2000	При приобретении товара на сумму более 625 тыс. р. доставка – 50%
3	2000	2100	

Рис. 389

B6. Найдите площадь треугольника, изображенного на рис. 390, размер клетки 1 см · 1 см.

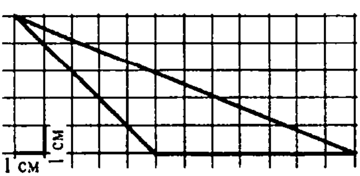


Рис. 390

B7. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{\sqrt{2}} 16}{\log_{0,2} 25} + 21^{\log_{21} 3+1}$.

B8. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-5; 9]$. На рис. 391 изображен график ее производной. Найдите длину наибольшего промежутка убывания функции $y = f(x)$.

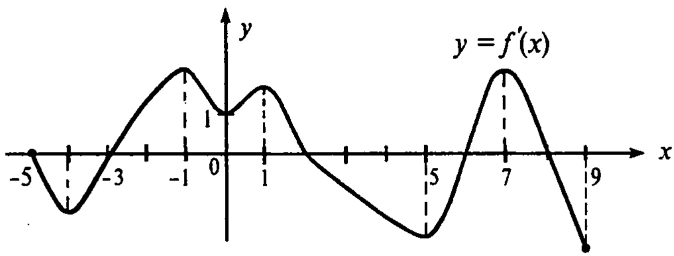


Рис. 391

B9. В правильную четырехугольную призму, объем которой равен 14,4, вписан конус так, что его основание вписано в нижнее основание призмы, а вершина конуса находится в центре верхнего основания призмы. Найдите величину объема конуса, деленную на π.

B10. Высоту над землей подброшенного вверх мяча можно вычислять по формуле $h(t) = 2 + 12t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более 6 м?

B11. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 4x - 4\,\mathrm{tg}\,x + \pi - 9$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

B12. К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего концентрация раствора изменилась на 10%. Сколько воды содержит первый раствор?

B13. В одной из трех театральных касс вероятность наличия билетов за час до начала спектакля равна 0,7, в другой — 0,3, в третьей кассе — 0,5. Какова вероятность того, что за час до начала спектакля имеется возможность купить билет хотя бы в одной кассе?

B14. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $12\sqrt{3}$, боковое ребро — 20. Найдите длину высоты пирамиды.

Часть 2

C1. Решите уравнение $\sin 2x - 2\sin x - \cos x + 1 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 0]$.

C2. В правильной шестиугольной пирамиде $SA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ боковые ребра равны 2, стороны основания — 1. Найдите косинус угла между прямой A_1A_3 и плоскостью SA_1A_6.

C3. Решите ситему неравенств $\begin{cases} 4^x \le 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3\left(x^2 - x - 2\right) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$

C4. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10, а площадь – 48. Найдите высоту трапеции.

C5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{3a^2 - x^2} \ge |x + a|$ имеет единственное решение.

C6. У натурального числа n ровно 6 натуральных делителей, сумма которых равна 3500. Найдите n.

Вариант 9

Часть 1

B1. Магазин покупает по оптовой цене стулья по 800 р., реализует их с наценкой 65%. Какое наибольшее количество стульев можно купить на 7000 р.?

B2. Вычислите $\log_8 172{,}8 - \log_8 2{,}7 + \log_{0{,}2} 625$.

B3. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_6 x + \log_6 (x - 1) < 1$.

B4. Используя данные рис. 392, найдите градусную меру угла MOD.

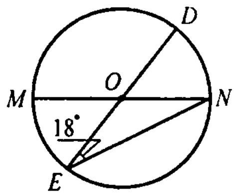


Рис. 392

B5. Найдите наибольшее отрицательное целое решение неравенства $0{,}3^{x^2+x} \geq 0{,}09$.

B6. Вычислите площадь треугольника, координаты вершин которого равны (–2; 1); (1; 6); (4; 1).

B7. Вычислите $\dfrac{3\sin\dfrac{7\pi}{15}}{\sin\dfrac{7\pi}{30}\sin\dfrac{4\pi}{15}}$.

B8. Тело движется по закону $x(t) = t^3 - 2{,}5t^2 - 2t$ (x – расстояние в метрах, t – время в секундах). Найдите скорость в момент времени $t = 3$.

B9. Цилиндр описан около прямой призмы, основание которой прямоугольный треугольник с катетами 3 и 9, боковое ребро $\dfrac{2}{\pi}$. Найдите объем цилиндра.

B10. КПД двигателя определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$$

(η – КПД, T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника). При каком минимальном значении T_1 КПД будет не меньше 70%, если T_2 =300?

B11. Найдите точку минимума функции
$y = (3x^2 - 51x + 51)\, e^{5-x}$.

B12. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 28 км, навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через час. Затем они продолжили путь с той же скоростью. Второй прибыл в A на 35 мин раньше, чем первый в B. Найдите скорость первого велосипедиста.

B13. В наборе 7 красных фломастеров, 8 синих и 5 зеленых. Какова вероятность того, что случайно выбранный фломастер не окажется синим?

B14. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $24\sqrt{3}$, апофема — 20. Найдите длину высоты пирамиды.

Часть 2

C1. Решите уравнение $\sqrt{\sin x \cdot \cos x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x} + 1\right) = 0.$

C2. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 3, боковое ребро – 4. Найдите угол между AC и BC_1.

C3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}\left(5^{1+\log_{15}x} - \dfrac{1}{3^{1+\log_{15}x}}\right) \geq -1 + \log_{15}x, \\ x^2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$

C4. Диаметр окружности, вписанной в треугольник ABC, площадь которого равна 132, в три раза меньше высоты, проведенной из вершины A, сторона $BC = 11$. Найдите длину стороны AB.

C5. Найдите все значения a, при которых уравнение $49^x - (8a - 1) \cdot 7^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$ имеет только один корень.

C6. В экзаменационных билетах 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов второго — 15, из 30 вопросов третьего — 10. Определите вероятность правильного ответа студента по выбранному билету.

Вариант 10

B1. На распродаже стул продается со скидкой 35% и стоит 520 р. Сколько стоит стул без скидки?

B2. Решите уравнение $0{,}04^{4x+2} = 125$.

B3. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}\left(2x - \frac{5}{3}\right) \geq 1.$$

B4. Используя данные рис. 393, найдите градусную меру угла CDB.

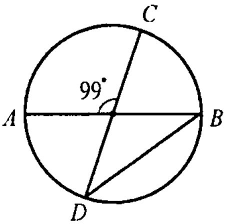


Рис. 393

B5. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $7^{x^2} \cdot 7^x > 49$.

B6. Найдите площадь трапеции, координаты вершин которой равны (2; 2); (3; 6); (8; 6); (12; 2).

B7. Вычислите $\dfrac{5\sin\dfrac{14\pi}{45}}{\cos\dfrac{7\pi}{45}\cos\dfrac{31\pi}{90}}$.

B8. Материальная точка движется по закону $x(t) = 3t^3 - 2t^2 + 2t$ (x — расстояние в метрах, t — время в секундах). Найдите скорость в момент времени $t = 2$.

B9. Цилиндр описан около шара, объем которого равен 36 см^3. Найдите объем цилиндра (в см^3).

B10. В боковой стенке цилиндрического бака закреплен кран. Высота столба воды при вытекании меняется по закону $h(t) = 7{,}2 - 1{,}92t + 0{,}128t^2$ (t — время в минутах). В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\ln(x + 6) - 6x + 6$ на $[-5{,}5; 0]$.

B12. Первые 360 км автомобиль проехал со скоростью 90 км/ч, следующие 240 км со скоростью 60 км/ч, затем — 150 км со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

B13. В коробке 8 белых, 5 красных и 7 зеленых шаров. Найдите вероятность того, что вынутый наугад шар будет цветным (не белым).

B14. Высота конуса равна 8, радиус основания — 6. Найдите длину образующей.

Часть 2

C1. Решите уравнение $6 \sin^2 x + 7 \sin x - 5 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; \pi]$.

C2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно $2\sqrt{11}$, сторона основания — 4. Найдите величину двугранного угла, который плоскость, проходящая через сторону основания и середины противоположных ребер, образует с основанием пирамиды.

C3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|\sin x|} < 1, \\ \dfrac{1}{2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|\sin x|} \end{cases}$.

C4. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10, а площадь — 48. Найдите высоту трапеции.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2 \lg (x - 5) = \lg (ax - 11)$ имеет только два корня.

C6. На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого — 30 деталей, со второго — 20 деталей и с третьего — 40. Установлено, что 2%, 4% и 5% продукции этих предприятий (соответственно) имеют дефекты. Найдите вероятность того, что взятая наугад деталь будет с дефектом.

Ответы на задания части 1

Номер варианта	Номер задания													
	B1	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*	*B6*	*B7*	*B8*	*B9*	*B10*	*B11*	*B12*	*B13*	*B14*
1	3000	6	0,5	5	247 100	40	–2	–4,5	12	0,8	0	30	14	12
2	6762,6	52	1	60	34 384	45	–5,88	1,5	–0,8	0,75	–8	4	1,4	20
3	50 000	1008	3	44	48 000	66	–95	2	1,875	15 000	21	80	0,7	12
4	28	–2,75	1	60	15 000	15	–51,75	–1	3,6	2,2	9	6	0,8	3
5	15	240	1	16	115	51	–2	4	28	2,4	–9	7	0,75	5
6	9000	5	2,4	24	50 000	36	–29	3	1	18	26	8	0,86	13
7	636,54	9	–1	60	62 100	63,5	39,5	2,5	36	180	3	48	0,05	96
8	8,75	8	531	1	694 650	17,5	59	4	1,2	1,6	–5	160	0,895	16
9	5	–2	2	144	–2	15	6	10	45	1000	2	12	0,6	16
10	800	–0,875	1	40,5	–3	30	10	30	54	7,5	36	93,75	0,6	10

Ответы на задания части 2

Номер варианта	Номер задания		
	C1, $n \in Z$	C2	C3
1	$\pm 2\pi/3+2\pi n$	$30°$	$(2;\ 1)$
2	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\quad \frac{7\pi}{3}$	$2{,}25\sqrt{3}$	$\lvert x\rvert > \sqrt{\log_2 6{,}6}$
3	$x=2;\ y=(-1)^{n+1}\pi/4+\pi n,$	2	$(-1;\ 1)$
4	0	0,25	$(-\sqrt{2};-1);\quad (1;\sqrt{2})$
5	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad -\frac{2\pi}{3};\quad -\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-7;\ 6)\cup[2;\ 2{,}5]\cup(4;\ 4{,}5]$
6	$\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}+2\pi n;\quad \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n;\quad \frac{\pi}{4}$	$90°$	$(-0{,}5;\ 0]\cup[1;\ 4)$
7	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad \frac{\pi}{6};\quad -\frac{7\pi}{6};\quad -\frac{11\pi}{6}$	2 или 14	$1-\sqrt{2}<x<\frac{2}{3};\quad 1<x<1+\sqrt{2}$
8	$2\pi n;\quad (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad 0;\quad -2\pi;\quad -\frac{11\pi}{6}$	$0{,}2\sqrt{5}$	$(2;\ \log_2 11]$
9	$\frac{3\pi}{8}+\pi n;$	$\arccos 0{,}3\sqrt{5}$	$\left(\frac{1}{15};\frac{2}{3}\right]$
10	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad -\frac{7\pi}{6};\quad -\frac{11\pi}{6}$	$45°$	$\pi n-\frac{\pi}{6}<x<\pi n;\quad \pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z$

Окончание таблицы

Ответы на задания части 2

Номер варианта	Номер задания		
	C4	C5	C6
1	21 или 9	$-18 \le a \le 14$	$n = 2$; $k = 5$
2	$2 \pm \frac{4}{3}\sqrt{2}$	$a < 2$	720
3	$5+\sqrt{7}$ или $5-\sqrt{7}$	5	а) 44; б) отрицательных; в) 17
4	3,5 или 6,5	$-24 < a < 18$	-8
5	165° или 105°	$(-5; 1)$	а) $\frac{1}{35}$; б) $\frac{12}{35}$; в) $\frac{22}{35}$
6	30° или 150°	$a < -\frac{57}{32}$	$m = 150$; $n = 30$ или $m = 650$; $n = 26$
7	36 или $8\sqrt{19}$	$a > 1{,}125$	$m = 6$, $n = 3$; $m = 9$, $n = 3$
8	8 или 6	$a = 0$	1996
9	30 или 25	$a \in [-0{,}25; 0{,}5]$	0,125
10	8 или 6	$a \in (2; 2{,}2)$	0,0378

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Алгебра и начала анализа

Средняя арифметическая и средняя геометрическая величины

Если a_1, a_2, ... a_n — числа или величины, то

1. $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ — средняя арифметическая величина.

2. $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ – средняя геометрическая величина.

3. $x^2 = ab$ или $x = \sqrt{ab}$, x — средняя пропорциональная величина.

Решение квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $b^2 - 4ac = D$ — дискриминант.

Если $D \geq 0$, два действительных корня

$\left(D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Если $D < 0$, действительных корней нет.
Если b — четное число, то

$$x_{1,2} = \frac{\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}; \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = D_1;$$

если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),\ a \neq 0.$

Теорема Виета

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Решение иррациональных уравнений

$\sqrt{f(x)} = g(x)$. Область определения задается неравенством $f(x) \geq 0$.

$\boxed{\sqrt{f(x)} = g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Иррациональные неравенства

$\boxed{\sqrt{f(x)} < g(x)}$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$

$\boxed{\sqrt{f(x)} > g(x)}$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Степени и корни

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{f(x)^2} = |f(x)|, \ a \in R; \ n, m \in N$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \qquad (a^m)^n = a^{nm}; \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$a^m a^n = a^{m+n}; \qquad a^n a^n = (ab)^n; \qquad \sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \ (b \neq 0); \qquad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, \ b \neq 0;$$

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0); \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \neq 0); \qquad \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n - \text{четное число,} \\ a, & \text{если } n - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

$a^m > a^n$

$0 < a < 1$ — $m < n$

$a > 1$ — $m > n$

Таблица квадратов чисел

$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$
$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$
$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$
$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$
$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$
$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$
$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$
$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$
$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$
$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$

Формулы сокращенного умножения

$(m \pm n)^2 = m^2 \pm 2mn + n^2.$
$(m \pm n)^3 = m^3 \pm 3m^2n + 3mn^2 \pm n^3.$
$m^2 - n^2 = (m - n)(m + n).$
$m^2 + n^2$ не разлагается на множестве R.
$m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2).$
$m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2.)$

Модуль (абсолютная величина) числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ — расстояние на числовой прямой от нуля до точки a.

$|x - a|$ — расстояние на числовой прямой между точками x и a.

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$|x^n| = |x|^n,\ n \in Z,\ x \neq 0,\ n > 0.$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\quad y \neq 0.$$

$$\sqrt{|x \pm a|^2} = |x \pm a|;$$

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Арифметическая прогрессия

$\boxed{a_{n+1} = a_n + d,\ n \in Z}$ — определение.

$\boxed{a_n = a_1 + d(n - 1)}$;

$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\quad n > 1}$;

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q,\ n \in N}$, $b \neq 0,\ q \neq 0.$

$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$;

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},\quad q \neq 1.$$

$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},\quad n > 1}$;

$$S = \frac{b_1}{q - 1},\quad |q| < 1.$$

Логарифмы

$M > 0;\ N > 0;\ a > 0,\ a \neq 1.$

$\boxed{\log_a M = b \Leftrightarrow a^b = M}$ — определение.

$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$

$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$

$\log_a M^k = k \log_a M.$

$\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b.$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ b \neq 1,\ b > 0;$

$\log_a M > \log_a N$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\begin{cases} M < N, \\ M > 0. \end{cases}$	$\begin{cases} M > N, \\ N > 0; \end{cases}$

$\log_a x^n = n \log_a |x|$, n — четное число.

$\log_a b = \dfrac{\log_m b}{\log_m a},\ b > 0;\ m > 0,\ m \neq 1.$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a},\quad b > 0,\quad b \neq 1,\ c > 0.$

Знаки выражения $\log_a b$ $(b > 1)$ совпадают со знаками произведения $(b - 1)(a - 1)$.

Тригонометрия

Знаки тригонометрических функций

sin α

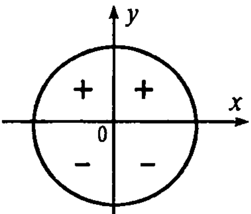


Рис. 394

cos α

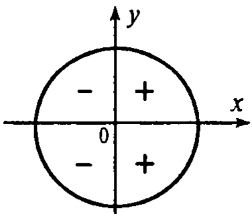


Рис. 395

tg α; ctg α

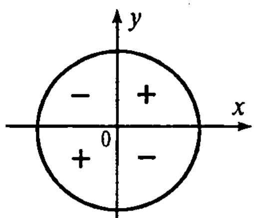


Рис. 396

Значения тригонометрических функций

Угол α (arc) / Функция	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы двойного и половинного аргументов

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\quad$ $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Выражение синуса и косинуса угла через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Переход от суммы функций к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta};$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \quad a^2+b^2 \neq 0$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Переход от произведения функций к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Простейшие тригонометрические уравнения

n – любое целое число ($n \in Z$).

$\boxed{\sin x = a}$, $|a| \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$,

если $-1 < a < 0 \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \arcsin |a| + \pi n$.

Частные случаи: $\boxed{\sin x = 0} \Leftrightarrow \boxed{x = \pi n}$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$\boxed{\cos x = b}$, $|b| \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos b + 2\pi n$,

если $-1 < b < 0 \Leftrightarrow x = \pm(\pi - \arccos|b|) + 2\pi n$.

Частные случаи: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$,

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n = \pi(2n+1)$

$$\boxed{\cos x = 0} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

$\boxed{\operatorname{tg} x = m}$, $m \in R \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} m + \pi n.$

$\boxed{\operatorname{ctg} x = k}$, $k \in R \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} k + \pi n.$

Производная функции

$x' = 1,\quad (cu)' = c \cdot u',\quad c' = 0,\ c - \text{const};$
$(u \pm v)' = u' \pm v',\quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u,$

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1};\quad \left(u^\alpha\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u';\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2};$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\qquad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

$(\sin x)' = \cos x;\qquad (\sin u)' = u' \cdot \cos u;$
$(\cos x)' = \sin x;\qquad (\cos u)' = -u' \cdot \sin u;$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};\qquad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};\qquad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\qquad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$(e^x)' = e^x;\qquad (e^u)' = e^u \cdot u';$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a;\qquad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};\qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};\qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

Уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

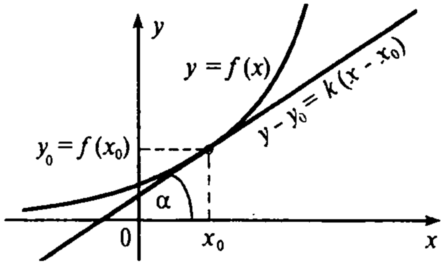


Рис. 397

Условие параллельности двух прямых

$y = k_1x + b$ и $y = k_2x + b$ $\boxed{k_1 = k_2}$

Условие перпендикулярности двух прямых

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Геометрический смысл производной функции

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 397).

Физический смысл производной

$$\boxed{f'(x_0) = v_{мгнов.}}$$

Экстремум функции

x_0 – критическая точка	$x_0 \in D(f)$ $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует

Условия существования экстремума

1) $f'(x_0) = 0$;
2) при переходе через x_0 $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс $\Rightarrow x_0$ – точка минимума;

$\boxed{f(x_0) - \min.}$

1) $f'(x_0) = 0$;
2) при переходе через x_0 $f'(x_0)$ меняет знак с плюса на минус $\Rightarrow$ $\Rightarrow x_0$ – точка максимума;

$\boxed{f(x_0) - \max.}$

Интервалы монотонности функции

$f'(x) > 0,\ x \in [a;\ b] \Leftrightarrow f(x)$ возрастает на $[a;\ b]$.
$f'(x) < 0,\ x \in [m;\ n] \Leftrightarrow f(x)$ убывает на $[m;\ n]$.

Первообразная функции

$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

$F(x^\alpha) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ \ (\alpha \neq -1)$.

$F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln|x| + c$.

$F(\sin x) = -\cos x + c$.

$F(\cos x) = \sin x + c$.

$F\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{tg} x + c$.

$F\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\operatorname{ctg} x + c$.

$F(a^x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$.

$F(e^x) = e^x + c$.

Площадь криволинейной трапеции

$S = F(b) - F(a)$ или

$S = \int_a^b f(x)dx$ (рис. 398).

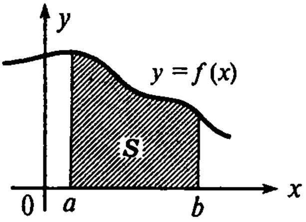


Рис. 398

Планиметрия

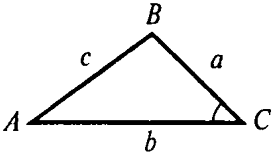


Рис. 399

Треугольник

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности:

$b - c < a < b + c$ (рис. 399).

Сумма углов в треугольнике

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Средней линией называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Теорема синусов

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (рис. 399), где R — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (рис. 399).

Площадь треугольника

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}ah$ (рис. 400).

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ (рис. 401).

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}pr$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$,

r — радиус вписанной окружности.

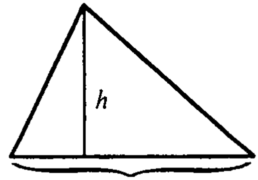


Рис. 400

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

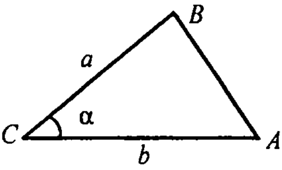


Рис. 401

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R},$$

R — радиус описанной окружности.

Центр вписанной и описанной окружностей

Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

Центр описанной около треугольника окружности находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника.

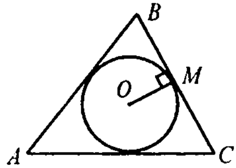


Рис. 402

$2CM = BC + AC - AB$ (рис. 402).

Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора:

$c^2 = a^2 + b^2$;

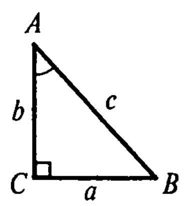


Рис. 403

$\sin A = \dfrac{a}{c}$; $\cos A = \dfrac{b}{c}$; (рис. 403).

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

$\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$ (рис. 403).

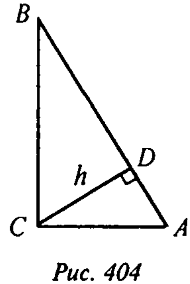


Рис. 404

$CD^2 = AD \cdot DB$ (рис. 404).

$BC^2 = AB \cdot BD$.

$AC^2 = AB \cdot AD$.

$$x = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$x = \frac{b}{\cos\alpha}$$ (рис. 405)

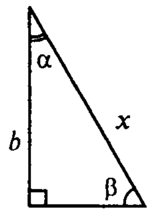


Рис. 405

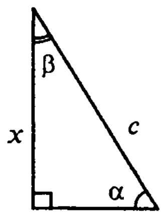


Рис. 406

$x = c \cdot \sin\alpha$
$x = c \cdot \cos\beta$
(рис. 406)

$x = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$
$x = a \cdot \operatorname{ctg}\beta$
(рис. 407)

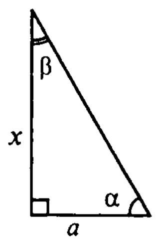


Рис. 407

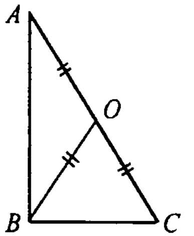


Рис. 408

$AO = OC = BO = R$
(рис. 408)

Равносторонний треугольник

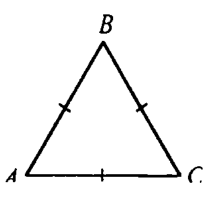


Рис. 409

$AB = AC = BC$ (рис. 409)

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

где a – сторона треугольника.

Площадь параллелограмма

$S = AD \cdot BE$ (рис. 410). $S = ab \cdot \sin\alpha$ (рис. 411).

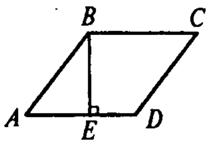


Рис. 410

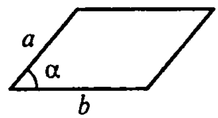


Рис. 411

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\beta$ (рис. 412).

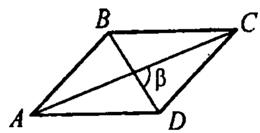


Рис. 412

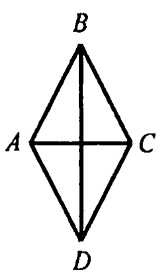


Рис. 413

Ромб

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (рис. 413).

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Площадь трапеции

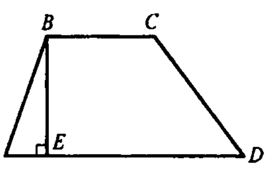


Рис. 414

$$S_{трап.} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE$$

(рис. 414).

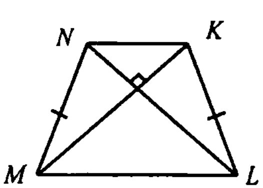


Рис. 415

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты.

$S_{MNKL} = h^2$ (рис. 415),

если $MN = KL$, $MK \perp NL$.

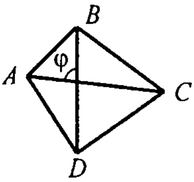


Рис. 416

Выпуклый четырехугольник

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi .$$

$d_1 = AC$; $d_2 = BD$ (рис. 416).

Описанные и вписанные четырехугольники

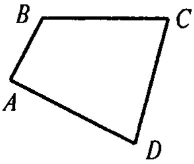


Рис. 417

1) Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность в том и только в том случае, если суммы его противоположных углов равны 180°, т. е.

$\angle B + \angle D = 180°$.

$\angle A + \angle C = 180°$ (рис. 417).

а) Из параллелограммов только около прямоугольника и квадрата можно описать окружность.

б) Только около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

2) В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность только в том случае, если суммы длин его противоположных сторон равны, т. е.

$AB + CD = AD + BC$ (рис. 417).

В частности, в параллелограмм можно вписать окружность, если он ромб.

Многогранники

Произвольная призма (рис. 418)

$S_{бок.} = P_{сеч.} \cdot l$, где $P_{сеч.}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — боковое ребро призмы.

$V = S_{ABC} \cdot H = S_{сеч.} \cdot l$.

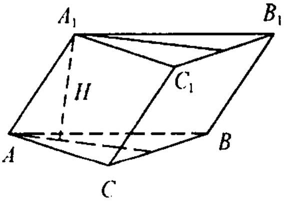


Рис. 418

Прямая призма (рис. 419)

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot AA_1$
(P — периметр).

$S_{полн.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$

$V = S_{осн.} \cdot AA_1$.

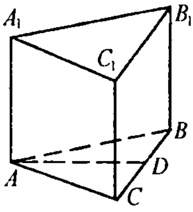


Рис. 419

Правильная пирамида (рис.420)

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot ME$$

(ME — апофема).

$S_{полн.} = S_{осн.} + S_{бок.}$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot MO.$$

MO — высота пирамиды.

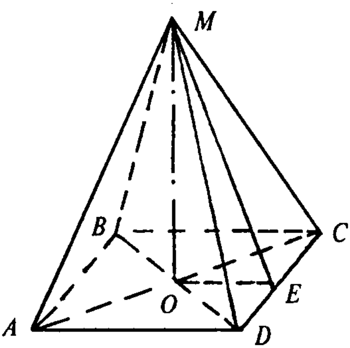


Рис. 420

Правильная усеченная пирамида (рис.421)

$$V = \frac{1}{3} H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right),$$

S_1 и S_2 — площади оснований.
H — высота пирамиды.

$$S_{бок.} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h,$$

h — апофема,
P_1 и P_2 — периметры оснований.

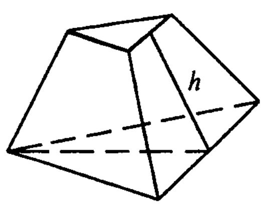


Рис. 421

Правильный тетраэдр (рис. 422)

Все ребра равны a.

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$; $S_{полн.} = a^2\sqrt{3}$; $h = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

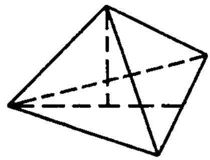


Рис. 422

$R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$, R — радиус описанной сферы.

$r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$, r — радиус вписанной сферы.

Цилиндр (прямой круговой) (рис. 423)

$V = \pi R^2 h$;

$S_{бок.} = 2\pi Rh$;

$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$.

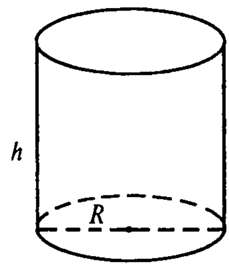


Рис. 423

Конус (прямой круговой) (рис. 424)

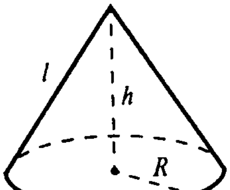


Рис. 424

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$;

$S_{бок.} = \pi Rl$.

Усеченный конус (рис. 425)

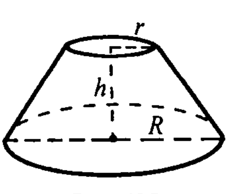


Рис. 425

$V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$,

$S_{бок.} = \pi L(R + r)$.

Шар (рис. 426)

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$;

$S=4\pi R^2$ — поверхность сферы.

Рис. 426

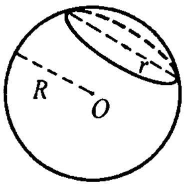


Рис. 427

Сечение шара плоскостью — это всегда круг, радиус которого не больше радиуса шара (рис. 427).

$r \le R$.

Координаты и векторы

Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Длина вектора $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Угол между ненулевыми векторами

$\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости

$$m=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

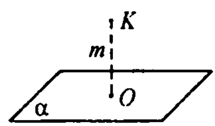


Рис. 428

m — расстояние от точки $K(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cr+D=0$ (рис. 428).

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$, т.е. координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны.

Ответы к сборнику задач

5. 1) 1,11; 2) 34,5; 3) 1; 4) 16,8.

6. 2) $13\frac{1}{9}$; 3) $9\frac{1}{22}$.

7. 1) $17\frac{6}{7}$; 2) $6\frac{1}{3}$; 4) 14,55; 5) $39\frac{1}{3}$.

8. 1) 1,2; 2) 0,2; 5) 33; 6) 15.

9. 2) 4; 3) 3,25 4) 2,5.

10. 1) –1,6; 2) 1,2; 3) 9; 4) 4.

11. 1) 15; 3) 29; 5) 11; 6) 22.

12. 2) 11; 4) 1,25.

13. 2) $\frac{x}{b}$; 3) $\frac{a(t-1)}{t+1}$; 4) $\frac{m}{3a^2}$.

14. 1) $\frac{25-at^2}{2t}$.

19. 128. **20.** 34 000. **21.** 320.
22. 16. **23.** 20. **24.** 3,8.
25. 243,6. **26.** 113. **27.** 17,9.
28. 504 000. **29.** 7. **30.** 40,8.
31. 29,2. **32.** 2400. **33.1.** 15.
33.2. 6000. **34.** 26 640. **35.1.** 5 .
35.2. 2200. **38.** 440. **39.** 4480.
40. 4. **41.** 70. **45.** 10.
46. 25. **47.** 200. **48.** 38,8.
49. 500. **52.** 4. **53.** 9.
54. 20. **56.** 210. **57.** 30.
59. 24. **60.** 160. **62.** 74.
65. 8100. **67.** 179. **68.** 120.
69. 18. **70.** 286. **71.** 18.
73. 2. **74.** 6. **76.** 50; 450.
77. 0,25. **78.** 400; 100. **79.** 1,5.

80. 40.
81. 15
83. $13\frac{1}{3}$.
84. 60; 80.
85. 3; 19,5; 2,5.
86. 720.
87. 10.
89. 30.
91. 20.
92. 22.
94. 300.
95. 10.
96. 30.
98. $-7x^8$.
99. $1{,}85x^2$.
100. $-60a^3$.
101. −14.
103. 169.
104. 1.
105. 1.
108. $\frac{3}{20}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{17}$.
109. 0,375.
110. 0,26.
111. 0,9.
112. $\frac{2}{9}$.
113. 0,375.
114. $2\frac{2}{2}$.
115. $\frac{5}{3}$.
116. $\frac{10}{3}$.
117. 0,3; $\frac{10}{11}$; $\sqrt{0{,}9}$; $2\sqrt{3}$.
119. $\frac{1}{3}$; $\sqrt{3}$; $\frac{20}{3}$; $3\sqrt{5}$.
120. $\frac{5}{8}$; $\frac{30}{7}$; $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$.
124. −5.
125. 0,5.
126. 11.
127. −64.
129. 4.
130. 9. **131.** 1.
132. 0,32.
133. 320.
136. 40,1 тыс. км.
137. 12,75 тыс. км.
138. 3.
139. $7 \cdot 10^{-5}$.
140. 5.
141. 2,6.
145. 0,2.
146. 18,83.
148. $-0{,}6a^4$.
149. $10b^2m$.
151. $8n - 7$.
153. −25.
155. 2700.
157. 107154.
158. 1,28.
159. 7 905 миль.
160. ≈109,2.
161. ≈21.
163. 6 378 160.
165. 0,01379.
167. 3.
168. 0,5.
169. −12.
170. 8,9.
171. −2.
172. −18.
173. 8.
174. 8.
175. −0,1875.
176. −0,6.
177. −5.
178. 1.
179. 18.
181. −25.
182. 4.
183. −72.
184. 2.
185. 22.
186. −15.
187. 3.

188. 1,5. **189.** 12. **190.** 5.
191. 2. **192.** 2. **193.** 13.
194. 6. **195.** 2. **196.** 0,4.
197. –24. **198.** 0. **199.** –10.
200. –11. **201.** –2. **202.** –2,5.
203. 11,5. **204.** –0,8. **205.** $3m + 6$.
206. $4 - 9a$. **207.** $-2xy$. **208.** $2a - 6$.
209. $6a^2$. **210.** $9 - 6m$. **211.** $-3m$.
212. $-4a - 7$. **213.** $-2n$. **214.** $1 - a$.
215. $x + 1$. **216.** mn. **217.** $-4\sqrt{m}$.
218. 4. **219.** 1. **220.** –2.
221. $4(x + 6)$. **222.** ab. **223.** m.
225. $8c^2$. **226.** –0,8. **227.** 10.
228. 0,95. **229.** –118,9. **230.** –12,8.
231. 21. **232.** 8. **233.** –5,02.
234. 2. **235.** 1. **236.** 8.
237. $2ab$. **238.** $m + 4$. **239.** $-a$.
240. 5. **241.** $-(a + 4)$. **242.** –0,5.
243. 34. **244.** –4,5. **245.** 2.
246. 3. **247.** 625. **248.** –30.
249. $\frac{2E}{v^2}$. **250.** $\frac{S}{v}$. **251.** –54.
252. 22. **253.** –5. **254.** 1.
255. –1. **256.** 1. **258.** 2.
259. 1. **260.** –0,875. **261.** 3.
262. –13. **263.** 10,2. **264.** 3,5.
266. 3. **267.** 0,4. **268.** 4.
269. 4. **270.** 30. **271.** 0,32.
272. 1. **273.** 0. **274.** 1.
275. –2. **277.** –1. **278.** –3.
279. –2. **280.** 2. **281.** 15.
282. 81. **283.** –1,5. **284.** 3. **285.** 6.
286. 4,5. **287.** 13. **288.** –5,6.
290. –8. **292.** –8. **293.** 22.
294. 6. **295.** 9. **296.** 26.
297. 2. **298.** 0,224. **299.** 2.
300. –4. **301.** 1,5. **303.** 11.

304. 0,5.
305. 7.
306. –1.
307. 2,5.
308. 2.
309. –0,6.
310. –3.
311. 0,5a.
312. –4.
313. $\frac{a}{b-2}, b \neq a.$
313. $\frac{2b}{a-b}, a \neq b.$
314. $\frac{a}{b-2}, b \neq a.$
316. (–3; –2).
317. (–5; –5).
318. (1; 2)
319. (1; –1).
320. 1,6.
321. 2. **322.** 1.
323. 1.
324. 7.
325. 0,75.
326. 4.
327. –10.
328. 1,5.
329. 20,5.
330. 1,75.
331. –0,5.
332. 0,25.
333. –0,5.
334. 2,5.
335. 1,6.
336. 3,5.
337. 3.
338. 2.
339. 0.
340. 1,5.
341. 0.
342. –5.
343. 1,25.
344. 5.
345. 1,25.
346. 2.
347. –5.
348. 0.
349. 2,5.
350. –2,5.
351.1. ∅.
351.2. 2.
351.3. 2.
351.4. 1.
352. –6.
353. 4.
354. 0.
355. 4.
356. –2.
357. 14.
358. ±3.
359. 0; –5.
360. –0,5; 0,75.
361. 1; 11.
363. $-\frac{11}{3}; 2.$
364. –5; 1.
365. 4.
366. 1.
367. –5; 1.
368. 1.
369. 7.
372.1. –3,375.
372.2. 0.
373.1. –8.
373.2. 0,25.
375.1. ±5.
375.2. ±4.
376. –1,5; 0,5.
377. 1.
378. 3.
379. 8.
380. 3.
381. 81.
382. –5; 2.
385. (2; 9); (–2; –9).
387. $(2;3);\left(\frac{22}{3};-\frac{23}{3}\right).$
388. (–3; –4).
389. (1; 2) (–4; 12).
390. (0; 3) (0,375; 1,125).
391. (3; 1); (–2; –4).
392. (2; 3); (3;2).
393. (3; 4); (1; 2).
394. 3. **395.** 1.
397. (2; 3); (3; 2).
399. (1; 3) (–4; 10,5).
400. (–1; 2) (–0,25; –0,25).

401. $(4;\sqrt{3});(4;-\sqrt{3});(3;2);(3;-2)$. **402.** (5; –2); (–5; –2).

405. (12; –4) (4; –12). **406.** (± 3; ± 2); (± 2; ± 3).

409. 7. **410.1.** 2. **410.2.** 0.

411.1. 6. **411.2.** 7. **412.** 3.

413. 2,6. **414.** 5. **415.** 5.

418. 119. **419.** 3. **420.** –5.

422.1. –2. **422.2.** –3. **423.1.** –6.

423.2. 2. **424.1.** 0,5. **424.2.** –1.

425. –2. **427.** 12. **428.** 54.

429. –1. **430.** 0. **431.** 1,4.

432. –1. **433.** –1. **434.** –1.

435. 0. **436.** 1. **437.** –3; 2.

438. ±2. **439.** 1. **440.** $x \geq 2$.

441. ±1; ±2. **442.** –3; 2. **443.** –0,5.

445. ±3. **446.** $x \leq -1$. **447.** $-\frac{10}{3}; 2$.

448. 1; 3. **449.** 0. **450.** $-\frac{1}{3}; 1$.

453. 1, $a \neq 1$; $a = 1 \Rightarrow x \in R$.

454. $a \neq \pm 1 \Rightarrow \frac{a^2 - a + 1}{1 - a}$; $a = 1 \Rightarrow$ нет корней, $a = -1$, $x \in R$.

455. $a \neq -3 \Rightarrow \frac{-2}{a+3}$; $a \neq -3 \Rightarrow$ нет корней. **456.** $a > -1$.

457. –1,5; 6. **458.** $a < 0$; $0 < a < 1$. **459.** $[2+\sqrt{3}; 2+\sqrt{5}]$

460. (1; 4); (–1; –4); (–4; –1). **461.** $a \in R$.

467. При $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, $x_1 = a + 1$ и $x_2 = \frac{2a}{a+1}$;
при $a = -1$, $x = 0$; при $a = 1$, $x = 2$.

468. При $a \neq -0{,}4$ $a \neq 1$, $a \neq 2{,}25$, $x = \frac{31 - 2a}{4a - 9}$;
при $a = -0{,}4$; 1; 2,25 $\varnothing$.

469. При $a \neq 1$ $x = 1$; при $a = 1$ $x \in R$.

470. При $a \neq -3$ $x = \frac{-2}{a+3}$; $a = -3$ $\varnothing$.

471. При $t \neq 1$, $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{t+1}{t-1}$.

473. $k > 0$, $k \neq 3$ три; $k = 0$ два; $k = 3$ два; $k < 0$ один.

476. –0,4.	**477.** 3.	**478.** –3.
479. –4.	**481.** –3.	**482.** –3.
483. 21.	**484.** 13.	**485.** –10.
488. 27.	**490.** 4.	**491.** $-\frac{4}{9}$.
493. 9.	**494.** 15.	**495.** 2.
496. 10.	**497.** 9.	**498.** 0.
499. 9.	**500.** 5.	**501.** –4.
503. 0.	**504.**15.	**505.** 0,5.
506. –5,25.	**509.** –1.	**510.** 0,75.
511. 5.	**512.** 2.	**517.** 10.
520. $b = 2$; $c = 9$.	**522.** $A(-1; 1)$.	**523.** $M(-2; 4)$.
526. 3.	**527.** 2.	**528.** 3.
533. 24.	**536.1.** 4.	**536.2.** 32.
537.1. 1,5.	**527.2.** 31.	**538.1.** 6.
538.2. 29.	**539.** 11; 14.	**540.** 6.
542. 0,7.	**544.** 28.	**545.** 62,5.
546. 25.	**548.** 15 дн.; 12 дн.	**549.** 25.
552. 68.	**554.** 6.	
558. 100; 80 или 80; 60.		**560.1.** 3.
560.2. 14.	**561.1.** 720.	**561.2.** 68.
564.1. 40; 50.	**564.2.** 40.	**565.1.** 2,5.
565.2. 2,5.	**565.3.** 3.	**566.1.** 40.
566.2. 20.	**567.** 30.	**568.** 58.
569. 48.	**572.** 28.	**574.** 3.
575.1. 20.	**575.2.** 6.	**577.1.** 15.
577.2. 60.	**578.1.** 20.	**578.2.** 1.
579.1. 0.	**579.2.** 4.	**580.1.** 15.
580.2. 4.	**581.1.** 7.	**581.2.** 9.
582.1. 8.	**582.2.** 2.	
584. 5; 8; или 5; –8.	**585.** 5; 7; 9.	**586.** 4; 5.

589. 520.

590. $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{20}{49}$.

591. 280, 200, 220.

592. 693.

593. 27.

594. 16.

595. 79.

596. 15.

598. 702.

599. 48.

600. 121.

602. 89.

603. 37.

604. 202.

605. 26.

606. 32.

607. 83.

609. 140.

610. 80; 90.

612. 17 820.

613.1. 18.

613.2. 500.

614.1. 8.

614.2. 30.

616. увеличится на 4%.

617. 5,84.

618. 2.

620. 3.

621. 2,5.

622. 1000.

623. 1520.

625. 9.

628. 1) $x \ge -0{,}2$; 2) $x < 1$.

629. 1) $x \ge -0{,}2$; 2) $x \ge -2{,}6$.

630. $x > -0{,}8$.

634. $-10 < x < 3$.

635. $x \ge 1$.

636. $[-3; 3]$.

637. $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$.

638. $x < 4{,}5$.

639. $x \le -10$; $x \ge 3$.

640. -6.

642. $[2; 8]$.

644. $(-1; 9)$.

645. $(-\infty; 2) \cup (-1; \infty)$.

646. $(1; 3) \cup (3; 5)$.

647. $(-1; 4)$.

648. $(-1; 2) \cup (2; 3)$.

649. $(-4{,}5; -2) \cup (3; +\infty)$.

650. $(-4; 0]$.

652. $\left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right)$.

653. $(-1; 25)$.

654. $(-1; 0] \cup (1; +\infty)$.

655. $(-2; 0) \cup (0; 3)$.

656. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

658. $(-\infty; -2) \cup (-1; 0]$.

659. $(-4{,}5; -2) \cup (3; +\infty)$.

660. 3.

661. 2.

662. 3.

664. $(-\infty; 0] \cup \left(\frac{16}{3}; +\infty\right)$.

665. $[0; 2]$.

666. $(-\infty; 0] \cup (4{,}5; +\infty)$.

667. $-1{,}5$.

668. $[1; 2)$.

669. $(-\infty; -6]$.

670. 2.

671. $(-18; -2) \cup (2; +\infty)$.

676. $[-5; -1)$.

677. 1) $\left(2; 2\sqrt{2}\right]$; 2) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

678. $(-\infty; -0,2] \cup (2; +\infty)$.

679. 1.

681. 2.

682. 2 и 3.

684. $(3; \infty)$.

686. $[1; 4]$.

687. $(2; 3)$.

690. $[1; 6]$.

691. -4.

692. $[1,5; 2)$.

693. $\left(-1; \sqrt[3]{4}\right)$.

694. 2.

695. $\left(-3; -\frac{5}{3}\right)$.

696. $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

697. $[0,25; +\infty)$.

698.1. $(1; 2)$.

698.2. $x \in R$.

698.3. $[0,75; 2]$.

699.1. $\left(-0,2; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 5\right)$.

699.2. $(-\infty; -3) \cup (-2; -1)$.

700.1. $(-2; 2)$.

700.2. $\left(1-\sqrt{7}; \sqrt{6}\right)$.

701.1. 8.

701.2. 0.

702.1. 1.

702.2. $x = 0$; $x > 3$.

703. $[-4; +\infty]$.

704.1. $(-\infty; -3) \cup (-1; 0)$.

704.2. $(-2; 0]$.

704.3. $\varnothing$.

705.1. $x < -2$; $1 < x < 2$; $x > 5$.

708. $(-2; 0)$.

709. $(-7; 1)$.

710. $\left[-\frac{7}{6}; -0,5\right]$.

711. $\left(-\infty; -3-\sqrt{2}\right) \cup \left(-4; -3+\sqrt{2}\right)$.

712. $\varnothing$.

714. $(-6; 3) \cup (8; +\infty)$.

715. 3.

716. 3.

717. 4.

718. 0.

719. 1.

720. 16.

721. 2,5.

722. $x \le 1,5$.

723. $(0,5; 2]$.

724. -2.

725. -5.

726. 1.

727. 3.

728. -2.

729. 0.

730. 8.

731. 0.

732. (0; 4,5].

733. $\left(-\infty; 1\right] \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

734. $m = -3$.

735. $\left(-\infty; -\sqrt{14}\right] \cup [-3; -1] \cup \left[\sqrt{14}; +\infty\right)$.

736. $(-\infty; 6] \cup (7; +\infty)$.

737. 10.

738. 9.

739. 6.

740. 1.

741. –6.

742. 0.

743. –1.

744. 1.

745. 1.

746. 1.

747. 3.

748. 1.

749. 4.

750. (1; 3).

751. $(-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; \infty)$.

752. [1,5; 2).

753. $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

754. 9.

755. 1.

756. 1.

757. 0,56.

758. 2,2.

759. 1.

760. $a \neq \pm 3$.

761. (–8; 0).**764.1.** $a > -\frac{2}{3}$.

764.2. –2.

766.1. 3800.

766.2. 4800.

767.2. $[-6; -2] \cup [1; 5]$.

768.1. –9.

768.2. –4.

770. 12.

771. 3.

772. 3.

773. 8.

774. 3.

775. –1.

776. –5,5.

778. 5.

782. [–1; 4].

785. $y = 3x - 5$.

786. $y = 2{,}5x + 5{,}5$.

790. $5 \le x \le 6$.

791. $M(-0{,}75; -0{,}1875)$.

792. –9.

793. 5.

794. $(-\infty; 3)$.

795. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

796. 91; 6.

797. (0,5; 2,5).

798. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

799. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

800. $(-6; 3) \cup (8; +\infty)$.

801. (–1; 4).

802. $(-\infty; -2{,}8)$.

803. (0; 0,5].

804. (0; 7].

805. (0; 1].

806. $\left(-\infty;1\right)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)$.

807. (−3; 17).

808. (−∞; 3).

809.1. $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

809.2. (1; 5).

810.1. (−1; 0) ∪ (1; ∞).

810.2. [−7; 1).

811.1. [4; ∞).

811.2. [0; 3].

812.1. (−∞; 2,5).

813.1. (−∞; −0,25] ∪ [2; ∞).

813.2. [1; +∞).

815.1. (−∞; −6)∪(−6; −5)∪ [2; ∞).

815.2. (0,75; 4).

816.1. (−∞; −1) ∪ [4; ∞).

816.2. (−∞; 0) ∪ [2; 3].

818.1. 5.

818.2. [−4; −2]∪[−1; 4].

819. −1.

820.1. 0; 2.

820.2. −6; 0.

821.1. −1.

821.2. −1,5.

822.1. ±2.

822.2. −1; 7.

823.1. 13.

823.2. 1.

824.1. 1,6.

824.2. 1.

825.1. ±3.

825.2. 1; 4,5.

826.1. 3.

826.2. 2.

827.1. −5.

827.2. ±4.

828.1. ±1.

828.2. 3.

829.1. −1.

829.2. 0.

830.1. 2; 7.

830.2. 1.

832. ±1.

834. ±4.

838. −1; 0.

839. 2.

841. (−8; 4).

843. −1.

844. [2; +∞).

845. (5; +∞).

848. (1; 2).

849. $\left(\frac{3}{14};\frac{1}{14}\right)$.

850. (1; 1); (9; 27).

851. (3; 2).

853.1. (0; +∞).

853.2. [−3,4; +∞).

854.1. [2,5; +∞).

824.2. (−∞; 4).

855.1. [−3; 1].

855.2. (−1; 3).

857.1. [3; +∞).

858.1. 6.

858.2. 2.

859. −3.

860. 2.

861. ±1; ± 2.

862. 1.

863. −0,25.

864. 2; 5.
866. ±2.
867.1. 4.
868.1. 2.
868.2. –1.
869. 2.
870. 0,25; 1.
872. –3.
873.1. 2,25.
873.2. ±0,5.
845. 3; 3 $\log_6 2$.
877. 11.
878. 8.
879.1. (–12; +∞).
879.2. (0; 0,5) ∪ (1; 3).
880. [–2; 0,5].
881. [8; +∞).
882. (–∞; 0) ∪ (0,5; +∞).
883. 0.
884. 2.
888. (1; 0).
889. [–2; 1) ∪ (1; 2].
891. [0,1; +∞).
892. (0; 81) ∪ (81; +∞).
893. [4; +∞).
894. [1,5; +∞).
895. [3; 19) ∪ (19; +∞).
897. (–3; 0) ∪ (2,4; 3).
898. (–∞; 4] ∪ {5} ∪ (8; +∞).
902. 4.
903. 4.
904. 256.
905. –1.
908. (–∞; 2).
909. (–∞; 1).
910. –18.
911. 3.
912. –2.
913. –2.
915. 6.
916.1. –1.
916.2. –1.
917.1. 3.
917.2. 2.
918. 2.
919. 132.
920.1. 5.
920.2. 8.
921. 1,7.
922. 40,5.
923. –1.
924. 3,5.
925. –9.
926. 0,75
927. 9.
928. 4.
929. 28.
930. 3.
931. –3,5.
932. –1.
933. 3.25.
934. –5,2.
935.1. 0.
935.2. 12.
936. –2,8.
937. 567.
938. –3.
940. –5.
944. –81,5.
945. –1,5.
946.1. 10.
946.2. 99.
946.3. 11.
948. –29.
949. –4.
950. 2.
952. 1.
953. 1.
954. 22,5.
956. 2.
957. 29.
960.1. 1.
960.2. –12.
960.1. –11.
961.2. 7.
962.1. 52,5.
962.2. 2.
963.1. 0,25.
963.2. 11.
964.1. 1; 4.
964.2. 0; 8.
966. 3,8.
967. –1,5.
968. $4; \frac{32}{7}$.
972. 1.
973. 2.
975. 0; 3.
976. 3.

977. 2.
978. -1; 0.
980. 10^{-2}; 10^8.
981. 0,0001; 10.
984. 3; 81.
985. ± 3.
986. -1; 5.
987. 4; 1024.
988. 4; $\sqrt{2}$.
989. 10; $\sqrt{10}$.
990. -1; 2.
991. 25.
992. 17.
994. 10^{-5}; 10^3.
995. 2; 64.
996. $10^{-\frac{1}{2}}$; 100.
998. $\frac{1}{6}$; 6.
999. 0.
1000. 2.
1001. -2; 0.
1002. (2; 3,5).
1003.2. (0; 1].
1004. (0; 1].
1005. (1; 2).
1006. (0,4; 1,5).
1007. (0; 0,02).
1008. (0,5; 5].
1009. (1,2; 9,6).
1010. $(6{,}25; +\infty)$.
1012. 2.
1013. 2.
1014. 3.
1016. 1) 17; 2) 0.
1018. $(0{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$.
1019. 2.
1020. (0,8; 3).
1022. $[81; \infty)$.
1023. (0; 4].
1025. 4.
1026. 2.
1027. 8.
1028. $(-\infty; +\infty)$.
1029. $[1; +\infty)$.
1030. $(-\infty; 1]$.
1031. $\left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$.
1032. $(-\infty; 2]$.
1034. 9.
1035. 2.
1036. 150.
1037. $\frac{10}{11}$.
1039. -7.
1041. -12.
1042. 2.
1043. 3.
1044. 4,8.
1045. -3.
1046. 25.
1049. $\pm\frac{1}{3}$.
1050. 1.
1051. 1,2.
1053. 4.
1054. 25.
1055. 77.
1056. 29.
1057. 11.
1058. 2.
1059. 49.
1061. -2.
1062. 0.
1063. 4,5.
1064. 7.
1066. $\left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.
1068.1. $[-9; -7) \cup (5; \sqrt{26})$.
1068.2. $x < -2$; $x > -2$.
1069. $(-0{,}5; 0] \cup [1; 4)$.
1070.1. $(-2; 1] \cup (1; 2)$.
1070.2. $(-\infty; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

1071.1. $[-10; -2) \cup (-1; 6]$. **1072.2.** $x < -3$; $0 \le x < 1$, $x = 3$.
1074. 0. **1075.** 10.
1076. 1. **1078.** $(-2; 1)$; $(3; 32)$.
1081. $(0,5; 1)$. **1082.** $\left(\frac{4}{3}; 2\right]$.
1083. $(0; 0,25]$. **1086.** $(-1; 0)$.
1087. -1. **1088.** 3.
1089. 40. **1090.** 1.
1091. -7. **1092.** 1.
1093. 64. **1094.** -200. **1097.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $\left(0; 3^{\frac{4}{3}}\right) \cup (81; \infty)$.
1098. 23.
1100. -9. **1101.** 6.
1102. $-1,5$. **1103.** 119.
1105. $-64,5$. **1108.** $1 < x < 8$; $x > 32$.
1109. -91. **1110.** 10.
1111. 10,01. **1112.** 2; 3.
1113. 1. **1114.** -3; -1; 2.
1115. 1; 4. **1116.** Нет.
1117. 3. **1118.** 3.
1119. 1; 4. **1120.** 1.
1121. 1. **1124.** $(0; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$.
1123. $(-\infty; 5] \cup (0,5; +\infty)$. **1126.** 1,5.
1127. $(\ln 2\sqrt{3}; \infty)$. **1129.** $\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right) \cup \{4; 8\}$.
1130. $(2; 2,2)$. **1133.** -2.
1134. 1. **1136.** -2.
1137. 3. **1139.** 3.
1140. 0. **1141.** 0,5.
1142. $-0,5$. **1143.** $2\ \mathrm{tg}\,\alpha$.
1144. 2. **1145.** -2.
1146. 1. **1147.** 0.
1148. $\mathrm{ctg}^2\,\alpha$. **1149.** 2.
1150. $-2\ \mathrm{tg}\,\alpha$. **1151.** $4 \sin \alpha$.
1152. $-2\ \mathrm{ctg}\,\alpha$. **1153.** 0.

1155. $\cos\alpha = -0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

1156. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$.

1157. 1) π; 2) 4π; 3) 2π; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{\pi}{3}$.

1158. 1) плюс; 2) 0; 3) минус; 4) 0;
5) минус; 6) плюс.

1159. $-2\sin 2\alpha$. **1160.** $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **1161.** 0,5.

1162. $0{,}5\sin\frac{\alpha}{2}$. **1164.** $\operatorname{tg}^2\alpha$. **1165.** $2\sin\alpha$.

1166. $\sin^2 2\alpha$. **1167.** $-2\operatorname{ctg}2\alpha$.

1168. $4\sin\frac{\alpha}{2}$. **1169.** –0,5. **1172.1.** –2.

1172.2. 14. **1074.** –7. **1175.** –6.

1176. –11. **1177.** 2. **1179.1.** 10.

1179.2. –0,5. **1180.1.** 0,5. **1180.2.** 0,5.

1181.1. 28. **1181.2.** 1. **1182.1.** –0,5.

1182.2. 0,25. **1184.** 0,25. **1185.** –0,5.

1186. 0,5. **1187.** –0,6. **1188.** 0,7.

1189. 1,64. **1191.** $-4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$. **1193.** $\sin 2\alpha$.

1194. $\operatorname{tg}3\alpha$. **1195.** –60°. **1197.** 15°.

1199. $\frac{1}{3}$. **1200.** $-\frac{\pi}{2}$. **1201.2.** 135.

1201.3. 90. **1202.1.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

1202.2. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{5}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

1203.1. $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{6}\right)+2\pi n$; $\pi n,\ n\in Z$.

1203.2. $\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in Z.$ **1207.1.** $(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

1207.2. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \quad \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$

1208.1. $\frac{\pi}{2}\cdot n, \quad n\in Z.$ **1208.2.** $-0{,}5.$

1208.3. 1. **1209.** $\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z.$

1210.1. $\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n\in Z.$ **1210.2.** πn, $n \in Z$.

1211.1. $-\frac{\pi}{2}+4\pi n, \quad n\in Z.$ **1211.2.** $2\pi n$, $n \in Z$.

1213. $\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z.$ **1217.** $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

1220.1. 0,05.

1220.2. $-\operatorname{arctg} 4+\pi n; \quad \frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

1222.1. $\frac{3\pi}{8}+\pi n, \quad n\in Z.$ **1222.2.** 0.

1223.1. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \quad n\in Z.$

1224. $\frac{\pi}{2}+\pi n; \quad \frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$ **1226.** 12.

1227. $-3.$ **1228.** $-6{,}5.$

1231. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; 20\right) n\in Z.$

1232. $x = 2;\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in Z.$

1234.1. $x = 2;\ y=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in Z.$

1235.1. $x = 2$; $y = 2\pi n$, $n \in Z$.

1235.2. $x = 3$; $y = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

1236. $x_1=-3;\ y=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z;\ x_2=4;\ y=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

1237.1. $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z;\ y=3.$

1237.2. $x=0{,}5;\ y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1239. 1,18.

1240. $2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1241. $\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1242. $9; \frac{1}{9}.$

1243. $\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1244. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

1245. $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1246. $\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1247. $\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{5\pi}{6.}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1248. $\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1249. $-\operatorname{arctg} 2{,}5+2\pi n,\ n\in Z.$

1250. $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\quad \pi n, n\in Z.$

1251.1. $[-5;\ 1].$

1251.2. $[-1;\ 3].$

1252. $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right].$

1254.1. $[-3;\ -1].$

1254.2. $[2;\ 4].$

1255. $2\pi n,\ n\in Z.$

1256. $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z.$ **1258.** $\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z.$

1260. $[1;\ 3]$. **1261.** $\left(-\frac{17\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$.

1264. $\left[-\frac{7\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. **1265.** $\left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)$.

1266. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **1267.** -2.

1268. 1. **1269.** 0.

1270. 7. **1271.** 2.

1272. -2. **1273.** 1.

1274. 1. **1275.** -2.

1276. 0. **1277.** $x\neq \pi+2\pi n,\ n\in Z.$

1278. $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$ **1279.** $x\neq\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$

1280. $x\neq\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$ **1281.** $x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z.$

1283. 2. **1284.** $\frac{\pi}{2}\cdot n;-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

1286. $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$ **1289.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z.$

1291. $2\pi n,\ n\in Z.$

1292. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\ \ y=-1.$

1293. $x=0;\ \ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

1294. $y=-0{,}5;\ \ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

1295. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;\ \ y=\frac{1}{3}.$

1297. 4.
1298. 1.
1299. 2.
1300. 4.
1301.1. 1.
1302.1. $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z$.
1302.2. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$.
1303.1. 4.
1303.2. 3.
1304. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.
1305. 0,3.
1306. –0,7.
1308. 0,8.
1313. 3.
1314. 7.
1315. 5.
1316. 7.
1318. 5.
1319. 4.
1320. 2.
1321. 3.
1322. 6.
1324. $(-\infty; -0{,}25)$.
1326. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
1328. $\{-5; -4; -1; 0\}$.
1329. $\left(-2\sqrt{10}; 2\sqrt{10}\right)$.
1330. $\{-13; -8; -5; 0\}$.
1331. $24x^2 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$.
1333. $10x^4 + \sin x - 3$.
1334. $2x^3 - \cos 2x$.
1336. $\frac{3}{\cos^2 3x} + 3\sin 3x - 9x^2$.
1337. 0.
1338. 2.
1339. 3.
1340. 2.
1342. 2.
1344.1. –4,5.
1344.2. –4.
1344.3. 1,5.
1349. –0,75.
1350. 1.
1351. –1.
1352. –0,5.
1353. 0,4.
1354. 0,5.
1355. **1)** 1; **2)** 2; **3)** 4.
1356. 2.
1358. –1,5.
1359. 2.
1360.1. –8.
1360.2. 19.
1360.3. 2.
1361. 0,4.
1363. –3.
1364. 0,5.
1366. –0,25.
1367. 4,5.
1368. 0,5.
1370. $A(-1; 6)$.
1371. –6.
1372. 5,5.
1373. –1,25.

1374. $-1{,}25$; 1. **1376.** 0. **1377.** 2; 3.
1379. $A(4;\ 0)$; $B(1;\ -27)$.

1380.1. $A\ (1;0)$; $B\left(-\frac{1}{3};-\frac{44}{27}\right)$.

1381.1. $A_1\,(4;\ 3)$; $A_2\,(0;\ -1)$.

1381.2. $\frac{3\pi}{4}$. **1382.1.** -2; 3. **1382.2.** $\frac{\pi}{3}$.
1383.1. 74. **1383.2.** 4. **1384.1.** 0,04.
1384.2. 12. **1386.1.** 8. **1386.2.** 12.
1386.3. 6. **1387.1.** 3,2. **1387.2.** 38.
1388.1. 1,5. **1388.2.** 2. **1389.** 2,6.
1392. $y = 3x - \pi$. **1394.** $y = xe^{-1}$. **1397.** 2.
1398. -3. **1400.** 9. **1401.** 2.
1402. 5. **1403.** 9.
1404. **1)** 4; **2)** 5; **3)** 7. **1406.1.** -1.
1406.2. -1. **1406.3.** -8. **1406.4.** 17.
1407. 5. **1408.** 4. **1410.** e.
1411. $0{,}25 - \ln 2$. **1412.** -4; 4. **1413.** 9.
1414. $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. **1415.1.** -1.
1415.2. 15. **1415.3.** 6. **1415.4.** 3.
1416.1. 1. **1416.2.** 15. **1416.3.** 1.
1416.4. 15. **1419.1.** 17. **1419.2.** 3.
1419.3. -2. **1419.4.** -18. **1421.** 6.
1423. 10. **1425.1.** 1. **1425.2.** 0.
1425.3. 5. **1425.4.** -17. **1426.** 3.
1427. 2. **1428.** 7. **1429.** 3.
1431. $a > 0$. **1432.** 0. **1433.** 8.
1434. 8. **1435.** 2,125. **1437.** 4.
1438. -2. **1443.1.** 36. **1443.2.** 8.
1444.1. 2. **1444.2.** 3. **1444.3.** 2,75.
1444.1. $-1{,}8$. **1445.1.** $e^x - \cos x + c$.

1445.2. $0{,}4\,x^5 + 3\sin x + c$. **1446.** $\frac{a^x}{\ln a} + \sin x + c$.

1450. $\frac{32}{3}$. **1458.** $8\ln 2$. **1459.** 1.

1460. $\frac{8}{3}$. **1461.** 6. **1462.** 12.

1464. 945. **1465.** 735. **1466.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1467. 1. **1469.** 163.

1470. $a_1 = 3$; $d = 2$. **1471.** 3750. **1474.** 13.

1475. 10. **1476.** 2. **1477.** 2.

1480. 27. **1482.** –1. **1483.** 3.

1484. 5. **1485.** 1. **1486.** 1.

1487. 2. **1489.** 4. **1493.** 4; 16.

1494. –14. **1495.** 5. **1497.1.** 93.

1497.2. 3. **1498.1.** 38. **1498.2.** 9.

1498.3. 1,2. **1499.1.** 66. **1499.2.** 11,25.

1499.3. 13. **1500.1** 14.

1500.2. 40; 40; 100. **1501.** 90; 39; 51. **1502.1.** 2.

1502.2. 9. **1505.1.** 10.

1505.2. 9,6. **1506.1.** 72. **1506.2.** 2.

1507.1 10,8. **1507.2** 0,6. **1508.2.** 7,5.

1509. 2,25. **1511.** 1,125. **1513.** 8.

1515. 32. **1516.** 8. **1518.** 39.

1519. $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$; $\frac{2a}{\sqrt{3}+1}$ или $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$; $\frac{2a}{\sqrt{3}-1}$. **1520.** 5.

1521. 6. **1523.** 15. **1524.** 294.

1525. $\sqrt{3}$. **1526.1.** 0,625. **1526.2.** –0,8.

1527.1. 140. **1527.2.** 8. **1527.3.** 5.

1528. 39 или 9. **1531.** 5. **1532.** 24.

1533. 27. **1534.** 6. **1535.** 165°или 105.

1538. 162. **1540.** 8. **1542.** 2.

1543. 4,8. **1544.** 40. **1545.** 13.

1546. 9. **1547.** 1,5. **1548.** 112,5.

1549. 112. **1551.** 1,6. **1552.** 4.

1553. 77. **1554.** 1 или 7. **1555.** 91.

1556. 30. **1557.** 0,375. **1558.** 10.

1559. $5\sqrt{3}$. **1560.** 15. **1561.** $3\sqrt{3}$.

1562. 54. **1563.** 1,5. **1564.** 0,24.

1565. 3. **1567.1.** 25 или 30.

1568.1. 60° или 120°. **1568.2.** $(\sqrt{6}+2):1$ или $(\sqrt{3}+1):2$.

1569.1. 10 или 5. **1569.2.** 7 или 17. **1570.1.** 6 или 8.

1570.2. 30° или 60°. **1571.1.** 4 или 6. **1571.2.**

1573. 5; 25. **1574.** 7; .3. **1575.** 60.

1576. 120. **1578.** 3. **1580.1.** 5.

1580.2. 2. **1580.3.** 9. **1580.4.** 6.

1580.5. 6. **1580.6.** 2. **1580.7.** 19.

1580.8. 132. **1581.** 2. **1582.1.** 100.

1582.2. 40. **1582.3.** 122. **1582.4.** 140.

1582.5. 27. **1582.6.** 100. **1582.7.** 12.

1582.8. 131. **1582.9.** 35. **1582.10.** 20.

1583. 10. **1585.** 60. **1586.** 90.

1589. 48. **1597.** 9. **1598.** 6.

1599. 3,75. **1605.** 73,5. **1606.** $75\sqrt{3}$.

1607. 750. **1608.** $36\sqrt{3}$. **1610.** 3,125.

1613. 7,5. **1614.** 3. **1615.** 192.

1616. 540. **1618.** 3. **1619.** 11.

1620. 4. **1621.** 3. **1623.** 2.

1625. 45. **1626.** 4. **1627.** 216.

1628. 62,5. **1629.** 51. **1630.2.** 864.

1631.1. 75. **1631.2.** 68. **1632.2.** 24.

1632.3. 31,5. **1633.1.** 45. **1633.2.** 20.

1634.2. 3. **1635.1.** 4,8. **1635.2.** 732.

1636. 60. **1637.1.** 90. **1638.** 45.

1639. 4,2. **1641.** 60. **1642.** 11.

1645. 1,5. **1647.** 32. **1649.** 72.

1650. 3,4. **1651.** 6. **1654.** 0,625.

1656. 60. **1657.** 8. **1658.** 144.

1663. 4. **1664.** 90. **1665.** 30.

1667. 1. **1668.** 2,25. **1669.** 1.

1670. 0,2. **1671.** 0,75. **1672.** 28.

1674. 0,6. **1675.** 0,75. **1676.** 0,5.

1678. 90°. **1679.** 30°. **1680.** 0,25.

1682. $\sqrt{6}$. **1683.** $\frac{\sqrt{283}}{2}$. **1684.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Литература

Айвазян Д.Ф. Математика. 10–11 классы. — Волгоград: Учитель. 2009.

Антонов Н.П., Выгодский М.Я. и др. Сборник задач по элементарной математике. — М.: ТАНА, 2005.

Барыбин К.С. Геометрия. — М.: Просвещение, 1971.

Высоцкий И.Р. и др. Математика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.

Датченко А.В. и др. Элементарная математика: практикум. — М.: ТАНА, 2005.

Демонстрационный вариант КИМ по математике ЕГЭ 2012 года.

Киселев А.П. Геометрия. — М.: Дрофа, 1995.

Корешкова Т.А. и др. Математика. ЕГЭ-2010. — М.: Эксмо, 2010.

Костина Н.А., Датченко А.В. Практикум по элементарной математике. — Ростов н/Д: РИНХ, 2006.

Моденов П.С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. — М.: Высшая школа, 1960.

Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Математика. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

Павлов Н.В. и др. Курс подготовки для поступающих в вузы. — Ростов н/Д: Ред.-изд. центр РГСУ, 2007.

Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. — М.: Просвещение. 1966.

Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. М.И. Сканави. — М.: Оникс 21 век, 2005.

Открытый банк заданий ЕГЭ по математике (Электронный курс). — www.mathege.ru.

Кодификатор элементов содержания для составления по математике контрольных измерительных материалов для проведения в 2012 году единого государственного экзамена.

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2012 году единого государственного экзамена по математике.

Оглавление

Предисловие **3**

Условные обозначения **4**

Глава 1. Арифметика **5**

§1. Арифметические действия с дробями 5
Основное свойство дроби 6
Смешанное число 8
Сложение, вычитание, умножение и деление дробей 9
§2. Пропорция 12
Основное свойство пропорции 12
Производные пропорции 13
§3. Проценты 15
Типы задач на проценты 15
§4. Задания для подготовки к ЕГЭ (B1, B12) 18

Глава 2. Алгебраические выражения **35**

§1. Степени и корни 35
Правила действий со степенями 35
Правила действий с радикалами 36
Таблица квадратов чисел 36
§2. Формулы сокращенного умножения 46
§3. Преобразование алгебраических выражений 49
§4. Модуль (абсолютная величина) числа. Определение модуля 54
Геометрический смысл модуля 54
Основные свойства модуля 55

Глава 3. Алгебраические уравнения и системы уравнений **58**

§1. Уравнения первой степени 58
Решение уравнений первой степени с одной переменной 59
§2. Решение систем двух уравнений с двумя неизвестными 60
Метод подстановки 61
Метод алгебраического сложения 61
§3. Уравнение второй степени с одной переменной 63
Квадратное уравнение 63
Неполные квадратные уравнения 63
Формулы корней квадратного уравнения 64
Свойства корней квадратного уравнения 67
§4. Решение уравнений, приводимых к квадратным 69
§5. Решение систем, содержащих квадратные уравнения 72

§6. Решение систем уравнений методом введения новых переменных 73
§7. Иррациональные уравнения 76
§8. Решение уравнений с применением теоремы Безу 79
§9. Решение уравнений, содержащих неизвестную величину под знаком модуля 81
§10. Решение уравнений с параметрами 87
§11. Задания для подготовки к ЕГЭ 93
§12. Применение уравнений к решению задач (B12) 102
Задачи на совместную работу и производительность труда 102
Задачи на движение 110
Задачи на нахождение чисел 127
Задачи, содержащие геометрические и физические величины (B4; B9; B10) 133

Глава 4. Алгебраические неравенства и системы неравенств 139
§1. Свойства числовых неравенств 139
§2. Линейные неравенства 141
§3. Квадратные неравенства 142
§4. Решение неравенств методом интервалов 147
§5. Иррациональные неравенства 150
§6. Системы и совокупности неравенств. Двойные неравенства . 154
§7. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля (C1, C3) 157
§8. Неравенства с параметрами 165
§9. Задания для подготовки к ЕГЭ 168

Глава 5. Функции и графики 176
§1. Общие свойства функций 176
§2. График линейной функции 188
§3. Обратная пропорциональная зависимость 190
§4. Квадратичная функция 191
§5. Степенная функция 193
§6. Показательная функция 195
§7. Логарифмическая функция 196
§8. Тригонометрические функции 198
§ 9. Преобразования графиков 203
§10. Задания для подготовки к ЕГЭ (B8) 205

Глава 6. Показательные уравнения и неравенства.. 209
§1. Решение показательных уравнений 209
§2. Решение показательных неравенств 214

§3. Системы показательных уравнений и неравенств 215
§4. Задания для подготовки к ЕГЭ (B7; C1) 218

Глава 7. Логарифмические уравнения и неравенства 226
§1. Свойства логарифмов 226
§2. Преобразование выражений, содержащих логарифмы 227
§3. Решение логарифмических уравнений 232
§4. Решение логарифмических неравенств 239
§5. Системы показательных и логарифмических уравнений (C1) 242
§6. Задания для подготовки к ЕГЭ (B11; C1; C3) 245

Глава 8. Тригонометрия 260
§1. Определения тригонометрических функций 260
Радианное измерение углов 260
Определение тригонометрических функций острого угла 260
Определения тригонометрических функций произвольного угла 261
Знаки тригонометрических функций по четвертям 262
Значения тригонометрических функций некоторых углов 263
§2. Формулы приведения 264
§3. Основные тригонометрические тождества 265
§4. Периоды тригонометрических функций 268
§5. Формулы двойного, половинного и тройного аргументов 269
§6. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение и обратная операция 276
§7. Определения и свойства обратных тригонометрических функций 279
§8. Решение тригонометрических уравнений 282
Простейшие тригонометрические уравнения 282
Методы решения тригонометрических уравнений 283
§9. Задания для подготовки к ЕГЭ (C1) 290

Глава 9. Производная функция и ее применение 315
§1. Определение производной 315
§2. Вычисление производной 315
Основные правила дифференцирования 315
Таблица производных основных элементарных и сложных функций 316
§3. Геометрический и механический смысл производной функции 319
§4. Задания для подготовки к ЕГЭ (B8) 319
§5. Уравнение касательной к графику функции 334

§6. Монотонность функции. Экстремумы функции 336
Условия существования максимума функции
в точке x_0 336
Условия существования минимума функции в точке x_0 337
Нахождение наибольшего и наименьшего значения
функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ 338
§7. Задания для подготовки к ЕГЭ (В8; В11) 338

Глава 10. Интеграл 355
§1. Первообразная функции. Правила нахождения
первообразных 355
Таблица первообразных основных элементарных функций ... 355
§2. Интеграл. Правила вычисления интегралов 357
Таблица некоторых интегралов 358
§3. Применение интеграла для вычисления площадей
плоских фигур 359

Глава 11. Прогрессии 362
§1. Арифметическая прогрессия 362
Характеристическое свойство конечной арифметической
прогрессии 362
§2. Геометрическая прогрессия 365

Глава 12. Планиметрия 370
§1. Треугольники 370
*Соотношения между сторонами треугольника (неравенство
треугольника)* *370*
Признаки равенства треугольников *370*
Замечательные отрезки в треугольнике и их свойства *371*
Пропорциональные отрезки. Теорема Фалеса *373*
Признаки подобия треугольников *374*
Формулы для вычисления площадей треугольников *375*
Равнобедренный треугольник *376*
Равносторонний треугольник *376*
Прямоугольный треугольник *377*
*Соотношение между сторонами и углами
прямоугольного треугольника* *377*
*Соотношения между сторонами и углами
произвольного треугольника* *380*
Основные задачи на решение косоугольных треугольников *380*
§2. Задания В4. Подготовка к выполнению заданий В9, С2 382
§3. Подготовка к выполнению заданий С4 386
§4. Многоугольники 390
Параллелограмм 390

Виды параллелограмма 391
Трапеция 393
Выпуклый многоугольник 394
§5. Задания для подготовки к ЕГЭ (В4) 395
§6. Подготовка к выполнению заданий С4 397
§7. Задания С4 406
§8. Окружность и круг 409
Касательная, секущая, хорда 409
Площадь круга и его частей 411
Углы, связанные с окружностью 411
Задания В4 413
Задачи для подготовки к выполнению заданий С4 419

Глава 13. Стереометрия 426
§1. Пирамида. Призма 426
Теорема о трех перпендикулярах 431
§2. Цилиндр. Конус. Шар 431
§3. Скрещивающиеся прямые 433
§4. Условие перпендикулярности прямой и плоскости 434
§5. Комбинации геометрических тел 439
§6. Задания В9. Подготовка к выполнению заданий С2 441
§7. Задания С2 447

Глава 14. Учебно-тренировочные тесты для подготовки к ЕГЭ 463
Вариант 1 463
Вариант 2 466
Вариант 3 469
Вариант 4 472
Вариант 5 474
Вариант 6 478
Вариант 7 481
Вариант 8 483
Вариант 9 487
Вариант 10 489
Ответы на задания части 1 492
Ответы на задания части 2 493

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ 495
Алгебра и начала анализа 495
Средняя арифметическая и средняя геометрическая величины 495
Решение квадратного уравнения 495
Разложение квадратного трехчлена на множители 496

Теорема Виета ... 496
Решение иррациональных уравнений ... 496
Иррациональные неравенства ... 496
Степени и корни ... 497
Таблица квадратов чисел ... 497
Формулы сокращенного умножения ... 498
Модуль (абсолютная величина) числа ... 498
Арифметическая и геометрическая прогрессии ... 498
Логарифмы ... 499
Тригонометрия ... 499
Знаки тригонометрических функций ... 499
Значения тригонометрических функций ... 500
Основные тригонометрические тождества ... 500
Формулы сложения ... 500
Формулы двойного и половинного аргументов ... 500
Выражение синуса и косинуса угла
через тангенс половинного угла ... 501
Формулы понижения степени ... 501
Переход от суммы функций к произведению ... 501
Переход от произведения функций к сумме ... 502
Простейшие тригонометрические уравнения ... 502
Производная функции ... 503
Уравнение касательной ... 504
Условие параллельности двух прямых ... 504
Условие перпендикулярности двух прямых ... 504
Геометрический смысл производной функции ... 504
Физический смысл производной ... 504
Условия существования экстремума ... 505
Интервалы монотонности функции ... 505
Первообразная функции ... 505
Площадь криволинейной трапеции ... 505
Планиметрия ... 506
Треугольник ... 506
Сумма углов в треугольнике ... 506
Теорема синусов ... 506
Теорема косинусов ... 506
Центр вписанной и описанной окружности ... 507
Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора ... 507
Равносторонний треугольник ... 508
Площадь параллелограмма ... 509
Ромб ... 509
Площадь трапеции ... 509
Выпуклый четырехугольник ... 510

Описанные и вписанные четырехугольники 510
Многогранники 510
Произвольная призма 510
Прямая призма 511
Правильная пирамида 511
Правильная усеченная пирамида 511
Правильный тетраэдр 512
Цилиндр (прямой, круговой) 512
Конус (прямой, круговой) 512
Усеченный конус 512
Шар 513
Координаты и векторы 513

Ответы к сборнику задач 514
Литература 535

Абитуриент

Манова Альбина Николаевна

Математика экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ

Учебное пособие

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Подписано в печать 21.09.2011.
Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2.
Гарнитура «NewtonC». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 28,56.
Тираж 2500 экз. Заказ № 545.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57

Качество печати соответствует качеству
предоставленных заказчиком диапозитивов