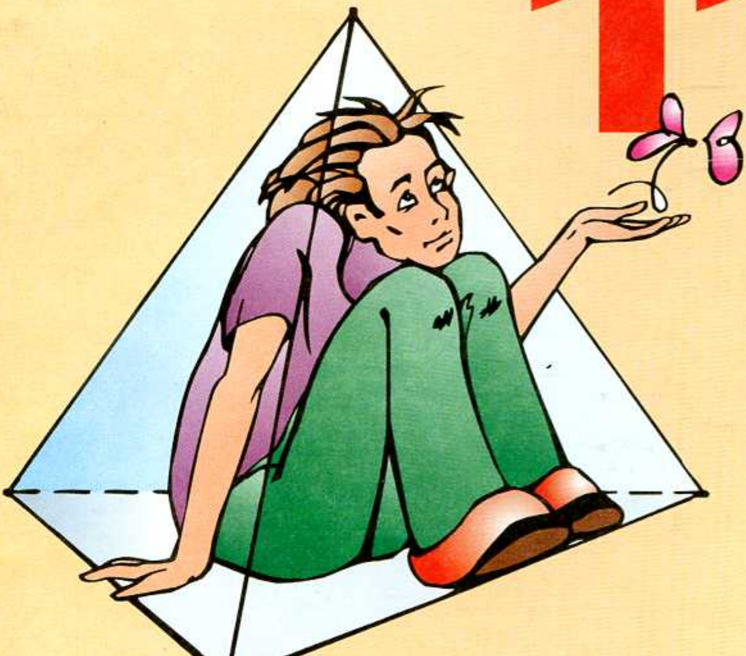
А.П. Ершова, В.В. Голобородько

ГЕОМЕТРИЯ

11



Самостоятельные и контрольные работы

ИЛЕКСА

А.П. Ершова, В.В. Голобородько

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 11 КЛАССА

6-е издание, исправленное

Рекомендовано
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для общеобразовательных
учебных учреждений

Москва
ИЛЕКСА
2013

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21-26+74.202
Е80

Рецензенты:

Ю.В. Гандель, доктор физико-математических наук, профессор Харьковского Национального университета им. В.Н. Каразина;

Е.Е. Харик, Заслуженный учитель Украины, преподаватель математики ФМЛ № 27 г. Харькова

Ершова А.П., Голобородько В.В.

Е80 Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 11 класса.— 6-е изд., испр.— М.: ИЛЕКСА, — 2013, — 208 с.

ISBN 978-5-89237-308-1

Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по всем важнейшим темам курса геометрии 11 класса.

Работы состоят из 6 вариантов трех уровней сложности.

Дидактические материалы предназначены для организации дифференцированной самостоятельной работы учащихся.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21-26+74.202

ISBN 978-5-89237-308-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные особенности предлагаемого сборника самостоятельных и контрольных работ:

1. Сборник содержит *полный набор самостоятельных и контрольных работ по всему курсу геометрии 11 класса*, как основному, так и углубленному.
   Контрольные работы рассчитаны на один урок, самостоятельные работы — на 35–45 минут, в зависимости от темы и уровня подготовки учащихся.

   Внимание! **Поскольку специфика оформления решений геометрических задач во многом зависит от требований учителя, советуем учителям в некоторых работах при необходимости сокращать предлагаемые варианты, ослаблять требования к оформлению решений или проводить работы за 1,5–2 урока.**

2. Сборник позволяет осуществить дифференцированный контроль знаний, так как задания распределены по трем уровням сложности А, Б и В. Уровень А соответствует обязательным программным требованиям, Б — среднему уровню сложности, задания уровня В предназначены для учеников, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах, школах, гимназиях и лицеях с углубленным изучением математики. Для каждого уровня приведено 2 расположенных рядом равноценных варианта (как они обычно записываются на доске), поэтому на уроке достаточно одной книги на парте.

3. В книгу включены *домашние самостоятельные работы*, содержащие творческие, нестандартные задачи по каждой изучаемой теме, а также задачи повышенной сложности. Эти задания

могут в полном объеме или частично предлагаться учащимся в качестве зачетных, а также использоваться как дополнительные задания для проведения контрольных работ. По усмотрению учителя выполнение нескольких или даже одного такого задания может оцениваться отличной оценкой.

Ответы к контрольным и домашним самостоятельным работам приводятся в конце книги.

4. Тематика и содержание работ охватывают требования учебников «Геометрия – 10–11» Л. С. Атанасяна и др. и «Геометрия» А. В. Погорелова. Задачи в наборах к каждому из учебников не повторяются, поэтому по каждой теме в книге приведено два варианта работ. Для удобства пользования книгой приводится таблица тематического распределения работ.

Наш адрес в Интернете: www.ilexa.ru

Работы по учебнику Л. С. Атанасяна и др.

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

СА-1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И КООРДИНАТЫ ТОЧЕК

Вариант А1	Вариант А2
1 Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты	
$A(3;0;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;3;0)$, $B_1(0;0;-3)$.	$A(0;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A_1(0;0;2)$.
а) Найдите координаты вершин	
A_1 и D_1.	D_1 и C_1.
б) Разложите по координатным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	
вектор $\overrightarrow{A_1C}$.	вектор $\overrightarrow{B_1D}$.
2 Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ равны. Найдите координаты	
точки A, если $\vec{a}\{-1; 2; 4\}$, $B(2;0;5)$.	точки B, если $\vec{a}\{2; -3; 1\}$, $A(1;4;0)$.
3 Даны векторы	
$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$.	$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b}\{2;6;-4\}$.

Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если

$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{a}$.

4

Найдите значения m и n, при которых векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если

$\vec{a}\{1; -2; m\}$, $\vec{b}\{n; 6; 3\}$.

$\vec{a}\{2; m; 1\}$, $\vec{b}\{4; -2; n\}$.

Сравните длины и направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты

$A(3; -1; 1)$, $B(-1; -1; 1)$, $C(-1; 3; 1)$, $C_1(-1; 3; 5)$.

$A(3; 1; -1)$, $B(-1; 1; -1)$, $D(3; 5; -1)$, $A_1(3; 1; 3)$.

а) Найдите координаты вершин

B_1 и D_1.

B_1 и C_1.

б) Разложите по координатным векторам

вектор $\overrightarrow{A_1C}$.

вектор $\overrightarrow{BD_1}$.

2

Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(1; 1; 4)$. Найдите координаты точки D, если

векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ равны.

3

Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{b}\{-2; 0; 4\}$.

Найдите значения m и n, при которых

векторы $3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ и $\vec{c}\{8;m;n\}$ коллинеарны.

векторы $2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m;8;n\}$ коллинеарны.

4

Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, и определите, какая из них лежит между двумя другими, если

$A(6;-1;0)$, $B(0;3;-2)$, $C(3;1;-1)$.

$A(0;0;-1)$, $B(5;-3;1)$, $C(-5;3;-3)$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Правильный тетраэдр $DABC$ размещен в прямоугольной системе координат так, что центр грани ABC совпадает с началом координат, а вершина D имеет координаты $(0;0;2\sqrt{6})$.

а) Найдите координаты вершин треугольника ABC, если они лежат в плоскости Oxy, причем

одна из них лежит на оси абсцисс.

одна из них лежит на оси ординат.

б) Разложите по координатным векторам вектор $\overrightarrow{DA}$.

2

Даны точки $A(2;-1;0)$, $B(-3;2;1)$, $C(1;1;4)$. Найдите координаты точки D, если

$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AD}$.

3

Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$ и $\vec{b}\{3; -1; -2\}$. Найдите значения m и n, при которых

векторы $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m + n; -3; m - n\}$ коллинеарны.

векторы $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}\{m + n; m - n; 2\}$ коллинеарны.

4

Определите, лежат ли в одной плоскости точки

$A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; -1)$, $C(0; 2; 2)$, $D(2; 0; 0)$.

$A(1; 0; -1)$, $B(-2; -1; 0)$, $C(0; -2; -1)$, $D(1; 5; 0)$.

СА-2. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Даны точки

$A(5; -2; 1)$ и $B(-3; 4; 7)$.

$A(-2; 3; 4)$ и $B(4; -1; 6)$.

а) Найдите координаты середины отрезка AB.

б) Найдите координаты точки C, если

точка A — середина отрезка CB.

точка B — середина отрезка AC.

в) Найдите расстояние

от точки A до плоскости Oxy.

от точки B до плоскости Oyz.

2

Даны векторы $\vec{a}\{2;-6;3\}$ и $\vec{b}\{-1;2;-2\}$.
Найдите:

а) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
б) $|\vec{a}+\vec{b}|$.

а) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$;
б) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

3

Даны точки

$A(2;1;-8)$, $B(1;-5;0)$,
$C(8;1;-4)$.

$A(-1;5;3)$, $B(-3;7;-5)$,
$C(3;1;-5)$.

а) Докажите, что треугольник *ABC* — равнобедренный.

б) Найдите длину средней линии треугольника, соединяющей середины боковых сторон.

4

Докажите, что четырехугольник *ABCD* — параллелограмм, если

$A(1;2;-3)$, $B(0;1;1)$,
$C(3;-2;-1)$, $D(4;-1;-5)$.

$A(2;1;2)$, $B(1;0;6)$,
$C(-2;1;4)$, $D(-1;2;0)$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Даны точки

$A(4;-1;3)$ и $B(0;5;-3)$.

$A(3;-2;5)$ и $B(-1;4;3)$.

а) Найдите координаты точки *C* — середины отрезка *AB*.

б) Найдите координаты точки *D*, если

отрезок *DB* делится точками *A* и *C* на три равные части.

отрезок *AD* делится точками *B* и *C* на три равные части.

в) Сравните расстояния

от точки A до оси ординат и от точки B до плоскости Oxz.

от точки B до оси абсцисс и от точки A до плоскости Oxy.

2

Дан вектор $\vec{a}\{-6;4;12\}$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, если

$|\vec{b}| = 7$, и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.

$|\vec{b}| = 28$, и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.

3

Даны точки

$A(-1;5;3)$, $B(7;-1;3)$, $C(3;-2;6)$.

$A(-1;5;3)$, $B(-1;-3;9)$, $C(3;-2;6)$.

а) Докажите, что треугольник *ABC* — прямоугольный.

б) Найдите длину медианы треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

4

Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма *ABCD*, если

$A(2;4;-4)$, $B(1;1;-3)$, $C(-2;0;5)$.

$B(-7;6;7)$, $C(4;-2;-3)$, $D(-3;8;-5)$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны точки

$A(-3;2;4)$ и $B(5;0;-2)$.

$A(1;2;-5)$ и $B(-3;4;1)$.

а) Найдите координаты точек C и D, если точки A и B делят отрезок CD в отношении 1:2:1.

б) Определите, какая из осей координат наиболее удалена от точки A.

❷

Векторы $\overrightarrow{AB}\{4;-4;2\}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, если

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = 3.$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = 12.$

Сколько решений имеет задача?

❸

Даны точки $A(2;5;8)$ и $B(6;1;0)$.

а) На оси ординат найдите точку C, равноудаленную от точек A и B.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

❸

Даны точки $A(1;6;0)$ и $B(5;2;8)$.

а) На оси абсцисс найдите точку C, равноудаленную от точек A и B.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

❹

Вершины параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты

$A(-3;8;-5)$, $C(-7;6;7)$, $D(4;-2;-3)$, $A_1(1;2;0)$.

$A(2;-3;1)$, $B(-1;0;4)$, $D(7;-2;2)$, $D_1(3;4;6)$.

Найдите координаты остальных вершин.

СА-3. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Вариант А1

1

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$;

б) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{D_1D}$;

в) $\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{C_1D}$.

2

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = 30°$;

б) $\vec{a}\{2;-3;1\}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.

3

Найдите углы между вектором

$\vec{c}\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right\}$

и координатными векторами.

4

Даны векторы

$\vec{a}\{4;1;-2\}$ и $\vec{b}\{3;m;2\}$.

Определите значения m, при которых угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является

а) острым;

б) прямым;

в) тупым.

Вариант А2

1

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AD}$;

б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$;

в) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AD_1}$.

2

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = 45°$;

б) $\vec{a}\{-4;1;3\}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

3

Найдите углы между вектором

$\vec{c}\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

и координатными векторами.

4

Даны векторы

$\vec{a}\{1;4;-3\}$ и $\vec{b}\{m;-1;-2\}$.

Определите значения m, при которых угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является

а) острым;

б) прямым;

в) тупым.

Вариант Б1

1

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{C_1D}$;
б) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{D_1D}$;
в) $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{DA}$.

2

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите:

а) $|\vec{a}+\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=120°$;
б) $\vec{a}(\vec{a}-\vec{b})$, если $\vec{a}\{2;-1;-2\}$, $\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

3

Найдите координатный вектор, образующий с вектором

$\vec{c}\{-\sqrt{3};0;1\}$ наибольший угол.

4

Даны векторы $\vec{a}\{-2;3;1\}$ и $\vec{b}\{1;4;-3\}$. Определите, при каких значения k угол между векторами

$\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{b}$

а) острый;
б) прямой;
в) тупой.

Вариант Б2

1

а) $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$;
б) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{A_1A}$;
в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.

2

а) $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=150°$;
б) $\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})$, если $\vec{a}\{-2;3;6\}$, $\vec{b}=6\vec{j}-8\vec{k}$.

3

$\vec{c}\{\sqrt{2};-\sqrt{2};0\}$ наименьший угол.

4

$\vec{a}$ и $\vec{a}-k\vec{b}$

Вариант В1

1

Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a. Точка O — центр грани ABC. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BO}$;

в) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{OC}$.

2

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите:

а) $\vec{a}\vec{b}$ если $|\vec{a}+2\vec{b}|=4$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=2$;

б) $(\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$, если $\vec{a}\{2;-2;1\}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{k}$.

3

Известно, что вектор $\vec{c}$ образует с координатными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно углы

45° и 120°.

Найдите угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{k}$. Сколько решений имеет задача?

4

Вершины треугольника ABC имеют координаты

$A(m;-3;2)$, $B(9;-1;3)$, $C(12;-5;-1)$.

Определите значения m, при которых

угол C треугольника — тупой.

Вариант В2

1

а) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$;

б) $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{CO}$;

в) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{OA}$.

2

а) $\vec{a}\vec{b}$, если $|3\vec{a}+\vec{b}|=3$, $|3\vec{a}-\vec{b}|=6$;

б) $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$, если $\vec{a}\{1;-3;2\}$, $\vec{b}=-2\vec{j}+4\vec{k}$.

3

60° и 135°.

4

$A(m;-3;2)$, $B(8;-7;-2)$, $C(12;-5;-1)$.

угол B треугольника — острый.

СА-4. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. ВВЕДЕНИЕ КООРДИНАТ В СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Вариант А1

Вариант А2

1

Найдите угол между прямыми AB и CD, если

А1: $A(1;1;2)$, $B(0;1;1)$, $C(2;-2;2)$, $D(2;-3;1)$.

А2: $A(3;-1;3)$, $B(3;-2;2)$, $C(2;2;3)$, $D(1;2;2)$.

2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Используя метод координат, найдите угол между прямыми

А1: AC и BD_1.

А2: BD и AC_1.

3

Используя скалярное умножение векторов, докажите

А1: теорему о трех перпендикулярах.

А2: теорему, обратную теореме о трех перпендикулярах.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вершины правильной треугольной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC имеют координаты $A(0;0;1)$, $B(3\sqrt{3};3;1)$, $C(0;6;1)$, $D(\sqrt{3};3;7)$.

Докажите, что

Б1: высота пирамиды равна стороне ее основания.

Б2: боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные $60°$.

❷

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Используя метод координат, найдите угол между прямыми

AB_1 и A_1D.

DA_1 и D_1C.

❸

Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и ABC_1 лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют прямые углы при вершине B. Используя метод координат (точка B — начало координат), докажите, что $\angle CAC_1 = 60°$.

❸

Равносторонние треугольники ABC и AB_1C лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Используя метод координат (точка A — начало координат), докажите, что косинус угла между прямыми AB и B_1C равен $\frac{1}{4}$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Вершины тетраэдра $ABCD$ имеют координаты $A(3;-1;0)$, $B(0;-7;3)$, $C(-2;1;-1)$, $D(3;2;6)$.

Докажите, что прямая AB перпендикулярна к плоскости ADC.

Докажите, что прямая AD перпендикулярна к плоскости ABC.

❷

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Точка O — центр грани $ABCD$.
Используя метод координат, найдите угол между прямыми

BO и A_1D.

AO и CD_1.

❸

В пространстве выбраны четыре произвольных точки *A*, *B*, *C*, *D*. Докажите, что

произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ есть постоянная величина, и найдите ее значение.

произведение $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ есть постоянная величина, и найдите ее значение.

СА-5. ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Дана точка

А1: $A(-2;3;4)$.

А2: $A(3;-1;-2)$.

Назовите координаты точки, симметричной точке *A* относительно

а) начала координат;

А1:
б) оси абсцисс;
в) плоскости Oxz.

А2:
б) оси ординат;
в) плоскости Oyz.

❷

При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка $A(2;1;-4)$ перешла

А1: в точку $B(4;4;-10)$.

А2: в точку $B(0;2;-2)$.

Найдите $|\vec{p}|$.

❸

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, симметричную данному кубу

А1: относительно прямой C_1D_1.

А2: относительно плоскости C_1CD.

4

Дан отрезок AB, один из концов которого — точка A — лежит в плоскости α. При симметрии относительно α точка B перешла в точку B_1. Докажите, что проекция отрезка AB на плоскость α является биссектрисой треугольника B_1AB.

4

Отрезок AB пересекается с прямой a в точке B. При симметрии относительно прямой a точка A перешла в точку A_1. Докажите, что биссектриса угла A_1BA лежит на прямой a.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Даны точки $A(1;-4;2)$ и $B(-3;2;4)$. Назовите координаты точки, симметричной

Б1:

а) точке A относительно точки B;
б) точке B относительно оси аппликат;
в) точке A относительно плоскости, параллельной Oxy и проходящей через точку $(0;0;3)$.

Б2:

а) точке B относительно точки A;
б) точке A относительно оси абсцисс;
в) точке B относительно плоскости, параллельной Oxz и проходящей через точку $(0;3;0)$.

2

При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка $A(2;3;-1)$

Б1: перешла в точку $A_1(-1;4;0)$. Найдите координаты точки B_1, в которую при таком переносе перейдет точка $B(4;2;-1)$.

Б2: перешла в точку $A_1(0;4;2)$. Найдите координаты точки B, которая при таком переносе перейдет в точку $B_1(4;2;-1)$.

3

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте фигуру, симметричную данному кубу

Б1: относительно середины ребра CC_1.

Б2: относительно прямой C_1D.

4

Докажите, что прямая, проходящая через середины двух противоположных ребер правильного тетраэдра, является его осью симметрии. Сколько осей симметрии имеет правильный тетраэдр?

4

Докажите, что плоскость, проходящая через ребро правильного тетраэдра и середину противоположного ребра, является плоскостью симметрии правильного тетраэдра. Сколько плоскостей симметрии имеет правильный тетраэдр?

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны точки $A(3;-2;5)$ и $B(-1;4;3)$. Точка O — начало координат. Назовите координаты точки, симметричной

В1:

а) точке A относительно середины отрезка OB;
б) середине отрезка AB относительно оси ординат;
в) точке B относительно плоскости, проходящей через ось аппликат и прямую $x=y$ плоскости Oxy.

В2:

а) точке B относительно середины отрезка OA;
б) середине отрезка AB относительно оси аппликат;
в) точке A относительно плоскости, проходящей через ось абсцисс и прямую $y=z$ плоскости Oyz.

2

При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$

В1:

точка $A(2;-3;4)$ переходит в точку A_1, а точка $B(-6;1;4)$ — в точку B_1, симметричную A_1 относительно начала координат.

В2:

точка A переходит в точку $A_1(-2;3;5)$, а точка B, симметричная точке A относительно начала координат, — в точку $B_1(4;3;-1)$.

Найдите $|\vec{p}|$.

Вариант 1

❸

Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ подвергли преобразованию симметрии относительно плоскости B_1BC. Укажите вектор параллельного переноса, при котором куб перейдет в ту же фигуру, что и при симметрии.

❹

Определите, при каком взаимном расположении прямой a и плоскости α плоскость α отображается при симметрии относительно прямой a:

а) на себя;

б) на перпендикулярную плоскость.

Вариант 2

❸

Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ подвергли преобразованию симметрии относительно прямой C_1D_1. Укажите вектор параллельного переноса, при котором фигура, полученная при симметрии, перейдет в данный куб.

❹

Определите, при каком взаимном расположении прямой a и плоскости α прямая a отображается при симметрии относительно плоскости α:

а) на себя;

б) на перпендикулярную прямую.

Ответ обоснуйте.

СА-6*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ (домашняя самостоятельная работа)

❶

Определите, в каких пределах при изменении x может изменяться угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

Вариант 1

$\vec{a}(x;1;0)$, $\vec{b}(0;x;1)$.

Вариант 2

$\vec{a}(1;0;x)$, $\vec{b}(0;x;1)$.

2

Точка K — середина ребра AC правильного тетраэдра $ABCD$. Найдите угол между прямыми AB и KD.

2

Найдите угол между скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра.

3

Найдите единичный направляющий вектор биссектрисы угла между векторами

$\vec{a}(-2;3;6)$ и $\vec{b}(2;1;-2)$.

$\vec{a}(-3;0;4)$ и $\vec{b}(-1;2;2)$.

4

Единичные векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} =$ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Найдите $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}$.

4

Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=\sqrt{2}$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} =$ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Найдите $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}$.

5

На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построен параллелограмм. Докажите, что его площадь можно вычислить по формуле

$$S=\sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-(\vec{a}\vec{b})^2}.$$

5

Докажите, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

6

Составьте уравнение плоскости:
а) проходящей через точки

$A(2;1;9)$, $B(-2;0;4)$, $C(0;-4;2)$;

$A(-2;1;3)$, $B(1;3;4)$, $C(0;5;1)$;

б) проходящей через точку

$A(-2;1;3)$,

$A(1;-4;2)$,

если точка A — основание перпендикуляра, проведенного

к данной плоскости из начала координат.

7

Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями

$5x - 3y - 2z + 1 = 0$ и $3x + 2y - 5z - 4 = 0$.

$-3x - 2y + 5z + 4 = 0$ и $2x - 5y + 3z - 3 = 0$.

8

Дана плоскость

$2x - y - 3z + 4 = 0$.

$x + 2y + z - 5 = 0$.

Запишите уравнение плоскости, которая проходит через начало координат

а) параллельно данной плоскости;

б) перпендикулярно к данной плоскости и к плоскостям $x = -y$ и $x = z$.

КА-1. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вариант А1 | **Вариант А2**

1

Даны точки

$A(2;-4;1)$ и $B(-2;0;3)$.

$A(-3;1;2)$ и $B(1;-1;-2)$.

а) Найдите координаты середины отрезка AB.

б) Найдите координаты и длину вектора

$\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{AB}$.

в) Найдите координаты точки C, если

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

❷

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем

$\vec{a} = 6\vec{i} - 8\vec{k}$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = 60°$.

$\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = 45°$.

Найдите:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
б) $|\vec{a} + \vec{b}|$;
в) значение m, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}\{4; 1; m\}$ перпендикулярны.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
б) $|\vec{a} - \vec{b}|$;
в) значение m, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}\{2; m; 8\}$ перпендикулярны.

❸

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка O — центр грани $ABCD$. Используя метод координат, найдите:

а) угол между прямыми A_1D и B_1O;
б) расстояние от точки B до середины отрезка A_1D.

а) угол между прямыми A_1O и D_1C;
б) расстояние от точки D до середины отрезка A_1C_1.

❹

Дан правильный тетраэдр $DABC$ с ребром a.

При симметрии относительно плоскости ABC точка D перешла в точку D_1. Найдите DD_1.

При симметрии относительно точки D плоскость ABC перешла в плоскость $A_1B_1C_1$. Найдите расстояние между этими плоскостями.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вершины треугольника ABC имеют координаты

Б1: $A(-2;0;1)$, $B(-1;2;3)$, $C(8;-4;9)$.

Б2: $A(-1;2;3)$, $B(1;0;4)$, $C(3;-2;1)$.

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BM}$, если BM — медиана треугольника ABC.

б) Найдите длину средней линии треугольника, параллельной стороне AB.

в) Найдите координаты точки D, если

Б1: $ABCD$ — параллелограмм.

Б2: $ADBC$ — параллелограмм.

2

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем

Б1: $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}\hat{\ }\vec{b} = 120°$.

Б2: $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a}\hat{\ }\vec{b} = 135°$.

Найдите:

а) координаты вектора $\vec{a}$, если

Б1: вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{c}\{-2;1;2\}$;

Б2: вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{c}\{4;-12;6\}$;

б) длину вектора

Б1: $\vec{a} + 2\vec{b}$;

Б2: $\vec{a} - 3\vec{b}$;

в) площадь параллелограмма с диагоналями $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a. Используя векторы, найдите:

Б1:

а) угол между прямыми AB и A_1C;

б) расстояние между серединами отрезков BC и AC_1.

Б2:

а) угол между прямыми A_1B и AC;

б) расстояние между серединами отрезков AB и B_1C.

4

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a.

При симметрии относительно плоскости CC_1D точка B_1 перешла в точку B_2. Найдите AB_2.

При симметрии относительно прямой B_1D_1 точка D перешла в точку D_2. Найдите BD_2.

Вариант В1

Вариант В2

1

Середины сторон треугольника ABC имеют координаты

В1: $M(3;-2;5)$, $N(3,5;-1;6)$, $K(-1,5;1;2)$.

В2: $M(3;-2;-4)$, $N(-6;4;-10)$, $K(-7;2;-12)$.

а) Найдите координаты вершин треугольника ABC.

б) Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

2

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем

В1: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a}\,\hat{}\,(\vec{a}+\vec{b}) = 30°$.

В2: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a}\,\hat{}\,(\vec{a}-\vec{b}) = 60°$.

Найдите:

а) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) длину вектора

В1: $2\vec{a} - 3\vec{b}$;

В2: $3\vec{a} + 2\vec{b}$;

в) координаты единичного вектора $\vec{c}$, перпендикулярного к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

В1: $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{0;1;-1\}$.

В2: $\vec{a}\{1;1;0\}$, $\vec{b}\{1;0;1\}$.

3

В пирамиде *DABC* ребра *DA*, *DB* и *DC* взаимно перпендикулярны и равны *a*.

Используя векторы, найдите

угол между плоскостями *DAB* и *ABC*.

угол между прямой *DA* и плоскостью *ABC*.

4

Ребро правильного тетраэдра *DABC* равно *a*.

При симметрии относительно плоскости *DBC* точка *O* — центр треугольника *ABC* — перешла в точку O_1. Найдите OO_1.

При симметрии относительно плоскости *DAB* точка *C* перешла в точку C_1. Найдите CC_1.

ЦИЛИНДР, КОНУС И ШАР

СА-7. ЦИЛИНДР. ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРА

Вариант А1

1

Радиус цилиндра равен 10 см. Сечение, параллельное оси цилиндра и удаленное от нее на 8 см, имеет форму квадрата. Найдите площадь сечения.

2

Диагональ осевого сечения цилиндра равна $8\sqrt{2}$ дм и образует с плоскостью основания цилиндра угол 45°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

3

Прямоугольник вращается вокруг одной из своих сторон, равной 5 см. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 100π см². Найдите площадь прямоугольника.

Вариант А2

1

Высота цилиндра равна 16 см. На расстоянии 6 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси цилиндра и имеющее форму квадрата. Найдите радиус цилиндра.

2

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 дм и составляет с образующей угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3

Прямоугольник, одна из сторон которого равна 5 см, вращается вокруг неизвестной стороны. Найдите площадь прямоугольника, если площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 60π см².

Вариант Б1

1

Хорда нижнего основания цилиндра отсекает от окружности основания дугу в 120°. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой данной хорды, равен $4\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

2

Параллельно оси цилиндра, на расстоянии d от нее, проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Диагональ полученного сечения составляет с образующей цилиндра угол β. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

3

Отношение площади боковой поверхности цилиндра и суммы площадей его оснований равно 0,6. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если площадь осевого сечения равна 30 дм^2.

Вариант Б2

1

Хорда нижнего основания цилиндра удалена от центра нижнего основания на $2\sqrt{3}$ см и отсекает от окружности основания дугу в 60°. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с одним из концов данной хорды, образует с осью цилиндра угол 45°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

2

Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Диагональ полученного сечения равна l и образует с плоскостью основания цилиндра угол β. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

3

Отношение площади основания цилиндра к площади его боковой поверхности равно 0,6. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если площадь его полной поверхности равна 132π дм^2.

Вариант В1

1

Площадь осевого сечения цилиндра равна $18\sqrt{3}$ см^2. Отрезок,

Вариант В2

1

Периметр осевого сечения цилиндра равен 36 см. Диагональ соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, образует с осью цилиндра угол 30°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

❷

Параллельно оси цилиндра проведено сечение площадью Q, отсекающее от окружности основания дугу α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

❸

Дан прямоугольник с периметром 18 см. Он является разверткой боковых поверхностей для двух цилиндров, площади оснований которых относятся как 1:4. Найдите площадь прямоугольника.

осевого сечения составляет с образующей цилиндра угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

❷

Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь сечения, параллельного оси цилиндра и отсекающего от окружности основания дугу α.

❸

Дан прямоугольник площадью 48 см^2. Он является осевым сечением для двух цилиндров, площади оснований которых относятся как 9 : 16. Найдите периметр прямоугольника.

СА-8. КОНУС. ПОВЕРХНОСТЬ КОНУСА. УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Вариант А1

❶

Высота конуса равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь осевого сечения конуса, если оно является правильным треугольником.

Вариант А2

❶

Высота конуса равна 3 см. Найдите площадь осевого сечения конуса, если оно является прямоугольным треугольником.

❷

Хорда основания конуса равна его образующей и равна l. Найдите площадь полной поверхности конуса, если данная хорда стягивает дугу в $90°$.

❸

Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см. Найдите площадь осевого сечения и боковой поверхности конуса.

❷

Радиус основания конуса равен R. Концы хорды основания, стягивающей дугу в $120°$, являются концами двух взаимно перпендикулярных образующих. Найдите площадь полной поверхности конуса.

❸

Радиус большего основания, образующая и высота усеченного конуса равны 7 см, 5 см и 4 см соответственно. Найдите площадь осевого сечения и боковой поверхности конуса.

Вариант Б1

❶

Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен $120°$. Высота конуса равна $4\sqrt{2}$ см. Найдите площадь осевого сечения.

❷

Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу β. Расстояние от вершины конуса до хорды, стягивающей эту дугу, равно d. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Вариант Б2

❶

Разверткой боковой поверхности конуса является полукруг площадью 18π см^2. Найдите площадь осевого сечения конуса.

❷

Сечение конуса, проведенное через его вершину, пересекает боковую поверхность по образующим, угол между которыми равен β, а основание — по хорде, стягивающей дугу α и удаленной от центра основания на расстояние d. Найдите площадь полной поверхности конуса.

3

Диагональ осевого сечения усеченного конуса равна 40 см и перпендикулярна к образующей конуса, равной 30 см. Найдите площадь сечения и полной поверхности конуса.

3

Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 и 7 дм, а диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Найдите площадь осевого сечения и полной поверхности конуса.

Вариант В1

1

Осевое сечение конуса можно вписать в окружность основания. Найдите площадь осевого сечения, если его наибольшая медиана равна $4\sqrt{5}$ см.

2

Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает его основание по хорде, стягивающей угол α, а боковую поверхность — по двум образующим, угол между которыми равен β. Найдите площадь полной поверхности конуса, если полученное сечение имеет площадь S.

3

Радиусы оснований усеченного конуса равны 16 см и 25 см. Найдите площадь полной поверхности конуса, если в его осевое сечение можно вписать окружность.

Вариант В2

1

Найдите площадь осевого сечения конуса, если оно равновелико квадрату, построенному на радиусе основания, а наименьшая медиана сечения равна $4\sqrt{2}$ см.

2

Сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет площадь S и пересекает основание конуса по хорде, которая видна из вершины конуса под углом β. Найдите площадь полной поверхности конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

3

Диагональ осевого сечения усеченного конуса делится осью конуса на отрезки 10 см и 35 см. Образующая конуса равна 39 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

СА-9. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Вариант А1

❶

Равнобедренный треугольник с основанием 8 см и боковой стороной 5 см вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

❷

Прямоугольная трапеция с основаниями 5 см и 10 см и большей боковой стороной 13 см вращается вокруг большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант А2

❶

Равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $5\sqrt{2}$ см вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

❷

Равнобочная трапеция с основаниями 4 см и 10 см и высотой 4 см вращается вокруг большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант Б1

❶

Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α ($\alpha > 45°$) вращается вокруг боковой стороны. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

❷

Ромб с площадью 600 дм^2 и диагональю 30 дм вращается вокруг стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант Б2

❶

Равнобедренный треугольник с боковой стороной b и острым углом при вершине β вращается вокруг боковой стороны. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

❷

Ромб с площадью 300 дм^2 и высотой 12 дм вращается вокруг стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант В1

❶

Равнобедренный остроугольный треугольник с боковой стороной b и углом при основании α вращается вокруг прямой, проходящей через вершину угла при основании параллельно боковой стороне треугольника. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

❷

Прямоугольная трапеция с основаниями 30 см и 15 см и меньшей боковой стороной 20 см вращается вокруг большей боковой стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант В2

❶

Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

❷

Равнобочная трапеция с основаниями 6 см и 12 см и боковой стороной 5 см вращается вокруг боковой стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

СА-10. СФЕРА. УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Вариант А1	Вариант А2

❶

Сфера задана уравнением

Вариант А1	Вариант А2
$(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9.$	$x^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25.$

а) Назовите координаты центра и радиус сферы.

б) Определите, принадлежат ли данной сфере точки *A* и *B*, если

Вариант А1	Вариант А2
$A(1;3;-1)$, $B(4;0;2)$.	$A(4;-3;-1)$, $B(0;1;3)$.

2

Сфера с центром в точке

$O(0;1;-2)$ | $O(-1;0;2)$

проходит через точку

$A(-3;1;2)$. | $A(1;2;1)$.

а) Составьте уравнение сферы.

б) Найдите координаты точек

оси абсцисс, | оси ординат,

принадлежащих данной сфере.

3

Точки $A(1;2;-3)$ и $B(7;2;5)$ лежат на сфере радиуса 13. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB.

3

Точки $A(1;5;6)$ и $B(1;-1;-2)$ лежат на сфере, центр которой удален от середины отрезка AB на 12. Найдите радиус сферы.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Сфера задана уравнением

$x^2+y^2+z^2+2y-4z=4$. | $x^2+y^2+z^2-4x+6y=36$.

а) Найдите координаты центра и радиус сферы.

б) Найдите значение m**, при котором точки**

$A(0;m;2)$ и $B(1;1;m-2)$ | $A(m;-3;0)$ и $B(5;-1;m-1)$

принадлежат данной сфере.

2

Диаметр сферы — отрезок AB **с концами**

$A(2;-1;4)$ и $B(2;7;10)$.

$A(-2;3;1)$ и $B(6;9;1)$.

а) Составьте уравнение сферы.

б) Найдите кратчайшее расстояние от точки данной сферы

до плоскости Oxy.

до плоскости Oxz.

❸

Сфера задана уравнением

$$(x+3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25.$$

Найдите длину линии, по которой данная сфера пересекается

с плоскостью Oyz.

с плоскостью Oxz.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Сфера задана уравнением

$$2x^2+2y^2+2z^2-4x+8(y-z)=0.$$

$$3x^2+3y^2+3z^2-6y+12(x-z)=0.$$

а) Найдите координаты центра и радиус сферы.

б) Найдите длины отрезков осей координат, заключенных внутри сферы.

❷

Сфера с центром в точке

$O(2;3;-4)$ касается плоскости Oxz.

$O(4;-3;1)$ касается плоскости Oyz.

а) Составьте уравнение сферы.

б) Найдите кратчайшее расстояние от точки данной сферы до

оси абсцисс.

оси аппликат.

3

Найдите длину линии пересечения сфер

$x^2 + y^2 + z^2 = 100$ и
$x^2 + y^2 + z^2 - 38x - 16y - 8z + 152 = 0.$

$x^2 + y^2 + z^2 = 400$ и
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 12z - 176 = 0.$

СА-11. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СФЕРЫ И ПЛОСКОСТИ. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

Вариант А1

1

В шаре радиуса 13 см проведено сечение, площадь которого равна 25π см^2. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2

Вершины прямоугольника со сторонами 12 см и 16 см лежат на сфере. Найдите площадь сферы, если расстояние от ее центра до плоскости прямоугольника равно 24 см.

3

К сфере с площадью 64π см^2 проведена касательная плоскость. Кратчайшее расстояние от точки A, лежащей в этой плоскости, до данной сферы,

Вариант А2

1

Длина окружности сечения сферы радиуса 10 см равна 16π см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости сечения.

2

Все стороны квадрата, периметр которого равен 40 см, касаются сферы. Найдите площадь сферы, если расстояние от ее центра до плоскости квадрата равно 12 см.

3

К сфере с площадью 144π см^2 проведена касательная плоскость, на которой выбрана точка A. Расстояние от точки A до наиболее удаленной от равно 1 см. Найдите расстояние от точки A до точки касания сферы с плоскостью.

нее точки сферы равно 16 см. Найдите расстояние от точки A до точки касания сферы с плоскостью.

Вариант Б1

1

Диаметр шара равен 16 см. Через конец диаметра под углом 60° к нему проведено сечение шара. Найдите площадь сечения.

2

Все стороны прямоугольного треугольника с катетами 8 см и 15 см касаются сферы, центр которой удален от плоскости треугольника на 4 см. Найдите площадь сферы.

3

Грани двугранного угла, равного 60°, касаются сферы, площадь которой равна 400π см^2. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

Вариант Б2

1

Через точку сферы под углом 30° к диаметру, проходящему через эту точку, проведена плоскость, удаленная от центра сферы на $4\sqrt{3}$ см. Найдите длину окружности полученного сечения.

2

Вершины прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см лежат на сфере, центр которой удален от плоскости треугольника на 12 см. Найдите площадь сферы.

3

Грани двугранного угла, равного 120°, касаются сферы, площадь которой равна 64π см^2. Найдите расстояние между точками касания.

Вариант В1

1

В шаре с центром O радиуса R проведены перпендикулярные радиусы OA и OB. Найдите

Вариант В2

1

В шаре с центром O радиуса R проведены радиусы OA и OB, угол между которыми равен площадь сечения, проходящего через точки A и B под углом 45° к плоскости OAB.

❷

Общая хорда двух равных взаимно перпендикулярных сечений сферы равна 8 см, а расстояние между центрами сечений равно $3\sqrt{2}$ см. Найдите площадь сферы.

❸

Через точку S, лежащую вне сферы с площадью 64π см^2, проведены лучи SA, SB и SC, причем углы ASB, BSC и ASC равны. Плоскости этих углов касаются данной сферы в точках, расстояния между которыми равны 6 см. Найдите расстояние от точки S до центра сферы.

60°. Найдите площадь сечения, проходящего через точки A и B под углом 30° к плоскости AOB.

❷

Два взаимно перпендикулярных сечения сферы равноудалены от ее центра. При этом центр сферы находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от общей хорды этих сечений, равной 6 см. Найдите площадь сферы.

❸

Через точку S, лежащую вне сферы с площадью 64π см^2, проведены лучи SA, SB и SC, причем углы ASB, BSC и ASC равны. Плоскости этих углов касаются данной сферы в точках, удаленных от точки S на $4\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от точки S до центра сферы.

СА-12*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Квадрат $ABCD$ размещен в цилиндре так, что его стороны AD и BC являются хордами

Вариант 2

❶

Квадрат $ABCD$ размещен в цилиндре так, что его стороны AD и BC являются хордами оснований цилиндра. Найдите периметр осевого сечения цилиндра, если площадь квадрата равна 900 см^2, а площадь осевого сечения цилиндра — 252 см^2.

2

Через образующую цилиндра проведены два сечения, перпендикулярные к основанию. Площади сечений равны $12\sqrt{3}$ см^2 и 8 см^2, а угол между ними равен 150°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

3

Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности цилиндра между диаметрально противоположными точками разных оснований, если высота цилиндра равна H, а радиус — R.

4

Высота конуса равна H. Три его образующие взаимно перпендикулярны. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

оснований цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна 6 см, а ось удалена от хорд AD и BC на $6\sqrt{6}$ см.

2

Два сечения, параллельные оси цилиндра, имеют общую образующую и пересекаются под углом 30°. Площади сечений равны $10\sqrt{3}$ см^2 и 26 см^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

3

Точки A и B лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите геометрическое место точек поверхности цилиндра, сумма расстояний от которых до точек A и B является наименьшей.

4

В конусе с высотой H три образующие попарно пересекаются под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

5

Дан конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник. Через две образующие, угол между которыми равен α, проведено сечение конуса. Найдите угол между плоскостями данного сечения и осевого

сечения конуса, если они пересекают основание

по параллельным хордам.

по хордам, имеющим общий конец, если $\cos\alpha = 0,75$.

6

Найдите геометрическое место концов перпендикуляров, проведенных из данной точки A ко всем плоскостям, проходящим через данную точку B.

6

Найдите геометрическое место точек пространства, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

7

Радиус сферы равен 25 см. На какие части поверхность сферы делится сечением, площадь которого равна 96π см^2?

7

Сечение делит сферу на части, площади которых равны 12π см^2 и 24π см^2. Найдите площадь круга, ограниченного данным сечением.

8

Радиус шара равен 12 см. На каком расстоянии от центра шара должен находиться точечный источник света, чтобы он освещал треть поверхности шара?

8

Радиус сферы равен 15 см. Какую часть поверхности сферы освещает точечный источник света, удаленный от центра на 25 см?

КА-2. ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

Вариант А1

1

На расстоянии 8 см от центра шара проведено сечение, длина окружности которого равна 12π см. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант А2

1

Сечение шара площадью 16π см^2 находится на расстоянии 3 см от центра шара. Найдите площадь поверхности шара.

2

Высота цилиндра вдвое больше его радиуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 100π см^2.

а) Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

б) Найдите площадь сечения цилиндра, проведенного параллельно его оси на расстоянии 4 см от нее.

3

Прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и проведенной к ней высотой 12 см вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

2

Высота цилиндра на 2 см меньше его радиуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 160π см^2.

а) Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

б) Найдите площадь сечения цилиндра, проведенного параллельно его оси на расстоянии 6 см от нее.

3

Прямоугольный треугольник с катетами 30 см и 40 см вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

Вариант Б1

1

Вершины правильного треугольника *ABC* с периметром 18 см лежат на сфере. Найдите площадь сферы, если расстояние от ее центра до плоскости треугольника равно 2 см.

2

Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 60°. Площадь сечения, проведенного через

Вариант Б2

1

Все стороны правильного треугольника *ABC* с площадью $9\sqrt{3}$ см^2 касаются сферы. Найдите площадь сферы, если расстояние от ее центра до плоскости треугольника равно 1 см.

2

Сечение конуса, проходящее через его вершину, имеет площадь 16 см^2 и пересекает основание по хорде. Образующая две образующие, угол между которыми равен 30°, равна 16 см^2.

а) Найдите площадь осевого сечения конуса.

б) Найдите площадь полной поверхности конуса.

❸

Прямоугольная трапеция, боковые стороны которой равны 4 см и 5 см, а диагональ является биссектрисой острого угла, вращается вокруг меньшего основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

конуса пересекает эту хорду под углом 75°, а высоту конуса — под углом 30°.

а) Найдите площадь осевого сечения конуса.

б) Найдите площадь полной поверхности конуса.

❸

Равнобочная трапеция с основаниями 3 см и 13 см, диагональ которой является биссектрисой тупого угла, вращается вокруг меньшего основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

Вариант В1

❶

Вершина правильного D тетраэдра $DABC$ является центром сферы, на поверхности которой лежат точки A, B и C. Высота тетраэдра равна $2\sqrt{6}$ см. Найдите площадь сферы.

❷

Высота цилиндра равна 8 см, а площадь его полной поверхности равна 130π см^2.

а) Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Вариант В2

❶

В правильной треугольной пирамиде $DABC$ боковые ребра DA, DB и DC взаимно перпендикулярны. Вершина D является центром сферы, на поверхности которой лежат точки A, B и C. Найдите площадь сферы, если высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$ см.

❷

Высота цилиндра равна 5 см, а площадь его полной поверхности равна 132π см^2.

а) Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

б) Найдите площадь сечения цилиндра, проведенного параллельно его оси и отсекающего четверть окружности основания.

❸

Треугольник со сторонами 7 см, 15 см и 20 см вращается вокруг большей высоты. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

б) Найдите площадь сечения цилиндра, проведенного параллельно его оси и делящего боковую поверхность в отношении 1:5.

❸

Треугольник со сторонами 9 см, 10 см и 17 см вращается вокруг большей высоты. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

ОБЪЕМЫ ТЕЛ

СА-13. ОБЪЕМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ

Вариант А1

1

Площади двух граней прямоугольного параллелепипеда равны 10 см^2 и 40 см^2, а длина их общего бокового ребра — 5 см. Найдите объем параллелепипеда.

2

Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна 108 см^2. Диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания призмы под углом 45°. Найдите объем призмы.

3

Основание прямого параллелепипеда — ромб с периметром 20 см, диагонали которого относятся как 3 : 4. Объем параллелепипеда равен объему куба с ребром 6 см. Найдите высоту параллелепипеда.

Вариант А2

1

Диагонали двух граней прямоугольного параллелепипеда равны 10 см и 17 см, а общее боковое ребро этих граней равно 8 см. Найдите объем параллелепипеда.

2

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Площадь полной поверхности призмы равна 120 см^2. Найдите объем призмы.

3

Основание прямого параллелепипеда — ромб с периметром 16 см и тупым углом 150°. Высота параллелепипеда равна 8 см. Найдите ребро куба, равновеликого данному параллелепипеду.

Вариант Б1

1

Диагональ прямоугольного параллелепипеда превосходит

Вариант Б2

1

Наименьшее ребро прямоугольного параллелепипеда его измерения на 1 см, 9 см и 10 см. Найдите объем параллелепипеда.

меньше двух других его ребер и диагонали на 1 см, 4 см и 5 см соответственно. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Сечение правильной треугольной призмы, проходящее через сторону основания и противолежащую вершину другого основания, образует с плоскостью основания угол 30°. Высота призмы равна 3 см. Найдите объем призмы.

❷

Через середину бокового ребра и противолежащую сторону основания правильной треугольной призмы проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол 45°. Сторона основания призмы равна 6 см. Найдите объем призмы.

❸

Правильная треугольная и правильная четырехугольная призмы имеют равные высоты

и площади боковых поверхностей. Найдите отношение их объемов.

и объемы. Найдите отношение площадей их боковых поверхностей.

Вариант В1

❶

Площади двух граней прямоугольного параллелепипеда относятся как 2 : 5. Диагонали этих граней равны 10 см и 17 см. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Основание прямой призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник. Сечение

Вариант В2

❶

Площади двух боковых граней прямоугольного параллелепипеда равны 30 см^2 и 40 см^2, а диагональ его основания равна 10 см. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Основание прямой призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник. Через катет призмы, проведенное через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания, имеет площадь $8\sqrt{2}$ см^2 и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы.

❸

Основание прямого параллелепипеда — ромб. Объем параллелепипеда равен V, а площади диагональных сечений — P и Q. Найдите сторону ромба.

нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания проведено сечение площадью $8\sqrt{2}$ см^2, образующее с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы.

❸

Основание прямого параллелепипеда — ромб с углом α. Объем параллелепипеда равен V, а площадь боковой поверхности — S. Найдите высоту параллелепипеда.

СА-14. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

Вариант А1

❶

Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен 8 см и образует угол 60° с осью цилиндра. Найдите объем цилиндра.

❷

Параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее проведено сечение, пересекающее основание по хорде длиной 6 см. Диагональ сечения равна 10см. Найдите объем цилиндра.

Вариант А2

❶

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 16 см и наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 30°. Найдите объем цилиндра.

❷

Сечение, параллельное оси цилиндра и удаленное от нее на 8 см, имеет площадь 60 см^2. Высота цилиндра равна 5 см. Найдите объем цилиндра.

❸

Объем цилиндра равен 45π см^3, а площадь основания — 9π см^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

❸

Объем цилиндра равен 80π см^3, а высота равна 5 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Вариант Б1

❶

Прямоугольник, периметр которого равен 18 см, а площадь — 18 см^2, вращается вокруг большей стороны. Найдите объем цилиндра, полученного при вращении.

❷

Сечение, параллельное оси цилиндра, пересекает его основание по хорде длиной a, стягивающей угол α. Диагональ сечения образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем цилиндра.

❸

Объем цилиндра равен 45π см^3, а площадь его боковой поверхности равна 30π см^2. Найдите радиус цилиндра.

Вариант Б2

❶

Прямоугольник, стороны которого относятся как 5 : 12, а диагональ равна 13 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите объем цилиндра, полученного при вращении.

❷

На расстоянии m от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси и отсекающее от окружности основания дугу α. Диагональ сечения пересекается с образующей цилиндра под углом β. Найдите объем цилиндра.

❸

Осевое сечение цилиндра, объем которого равен 20π см^3, имеет площадь 20 см^2. Найдите высоту цилиндра.

Вариант В1

❶

Прямоугольник с периметром P и острым углом между диа-

Вариант В2

❶

Прямоугольник с площадью S и тупым углом между диагогоналями α вращается вокруг большей стороны. Найдите объем цилиндра, полученного при вращении.

❷

Отрезок с концами на окружностях оснований цилиндра равен $8\sqrt{2}$ см и образует с осью цилиндра угол 30°. Проекция данного отрезка на плоскость основания стягивает прямой угол. Найдите объем цилиндра.

❸

Объем цилиндра равен $27\sqrt{3}\pi$ см^3. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

налями α вращается вокруг меньшей стороны. Найдите объем цилиндра, полученного при вращении.

❷

Отрезок с концами на окружностях оснований цилиндра удален от оси цилиндра на 2 см и образует с ней угол 45°. Проекция данного отрезка на плоскость основания стягивает угол 120°. Найдите объем цилиндра.

❸

Объем цилиндра равен $18\sqrt{3}\pi$ см^3. Диагональ осевого сечения цилиндра образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

СА-15. ОБЪЕМ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ

Вариант А1

❶

Основание призмы — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Боковое ребро призмы равно гипотенузе основания и образует с плос-

Вариант А2

❶

Основание призмы — равнобедренный треугольник с основанием 10 см и боковой стороной 13 см. Боковое ребро призмы равно большей вы костью основания угол 30°. Найдите объем призмы.

❷

Сечение наклонного параллелепипеда, перпендикулярное к боковому ребру, является ромбом со стороной 4 дм и острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно большей диагонали ромба.

соте основания и составляет с высотой призмы угол 60°. Найдите объем призмы.

❷

Боковое ребро наклонного параллелепипеда равно 8 см. Сечение параллелепипеда, перпендикулярное к боковому ребру, является ромбом с тупым углом 120°, меньшая диагональ которого равна боковому ребру. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант Б1

❶

Основание наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной 8 см. Две его боковые грани также являются квадратами, а две другие грани — ромбы с острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.

❷

В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны. Их общее боковое ребро удалено от двух других боковых ребер на 5 дм и 12 дм. Найдите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 240 дм^2.

Вариант Б2

❶

Все ребра наклонного параллелепипеда равны 8 см. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом 60°. Найдите объем параллелепипеда, если его основание — квадрат.

❷

В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны. Вершины основания, принадлежащие третьей грани, удалены от противолежащего бокового ребра на 8 дм и 15 дм. Найдите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 240 дм^2.

Вариант Б1

1

Основание наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной a. Боковое ребро, равное b, образует с двумя смежными сторонами основания углы, равные $60°$. Найдите объем параллелепипеда.

2

Две боковые грани наклонной треугольной призмы имеют площади 18 см^2 и 30 см^2 и пересекаются под углом $120°$. Боковое ребро призмы равно 6 см. Найдите объем призмы.

Вариант Б2

1

Все грани наклонного параллелепипеда — ромбы со стороной a и острым углом $60°$. Найдите объем параллелепипеда.

2

Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно 5 см. Две боковые грани, угол между которыми равен $60°$, имеют площади 25 см^2 и 40 см^2. Найдите объем призмы.

СА-16. ОБЪЕМ ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

Вариант А1

1

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Боковое ребро образует с высотой пирамиды угол α. Найдите объем пирамиды.

2

В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Отрезок, соединяющий сере-

Вариант А2

1

Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Двугранный угол при основании пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды.

2

Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна d. Боковое ребро пирамиды наклонено к плосдину высоты пирамиды с серединой апофемы, равен m. Найдите объем пирамиды.

❸

Одно из оснований усеченной пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 5 см. Периметр второго основания равен 32 см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 4 см.

кости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

❸

Одно из оснований усеченной пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Периметр второго основания равен 12 см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 6 см.

Вариант Б1

❶

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Расстояние от середины высоты пирамиды до бокового ребра равно a. Найдите объем пирамиды.

❷

Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды, если площадь ее основания равна S.

❸

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 12 см и 6 см, а острый угол боковой грани равен 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант Б2

❶

Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой апофемы, равен m. Найдите объем пирамиды.

❷

Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна S. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро образует с плоскостью основания угол α.

❸

Площади оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 36 см^2 и 144 см^2, а острый угол боковой грани равен 60°. Найдите объем пирамиды.

Вариант В1

1

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Точка высоты пирамиды находится на расстоянии a от концов апофемы. Найдите объем пирамиды.

2

В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна l, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды.

3

Основания усеченной пирамиды — правильные треугольники со сторонами 12 см и 24 см. Одна боковая грань пирамиды перпендикулярна к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

Вариант В2

1

Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α. Точка высоты, равноудаленная от концов бокового ребра, находится на расстоянии b от вершины основания. Найдите объем пирамиды.

2

Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды, если ее боковое ребро равно b.

3

Основания усеченной пирамиды — правильные треугольники со сторонами 6 см и 12 см. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

СА-17. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ–2

Вариант А1

1

Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см

Вариант А2

1

Основание пирамиды — ромб со стороной 10 см и высотой и 8 см. Найдите объем пирамиды, если все ее боковые ребра равны 13 см.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Боковая грань, содержащая гипотенузу треугольника, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Найдите объем пирамиды.

6 см. Найдите объем пирамиды, если все двугранные углы при ее основании равны 45°.

❷

Основание пирамиды — правильный треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом β. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

Вариант Б1

❶

Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. Найдите объем пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны к плоскости основания, а третья наклонена к ней под углом β. Высота пирамиды равна H. Найдите объем пирамиды.

Вариант Б2

❶

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные 45°. Найдите объем пирамиды.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Боковая грань пирамиды, содержащая основание треугольника, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Найдите объем пирамиды.

Вариант В1

1

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при вершине α и радиусом описанной окружности R. Высота пирамиды лежит внутри пирамиды и образует с каждой из боковых граней углы, равные β. Найдите объем пирамиды.

2

Основание пирамиды — ромб с острым углом α. Две смежные боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β. Точка высоты пирамиды, удаленная от вершины пирамиды на b, равноудалена от основания и наклонных боковых граней. Найдите объем пирамиды.

Вариант В2

1

Основание пирамиды — треугольник с углами α и β. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные γ. Найдите объем пирамиды, если расстояние от основания ее высоты до бокового ребра равно l.

2

Основание пирамиды — прямоугольная трапеция с тупым углом α и меньшей диагональю d. Две боковые грани, содержащие стороны данного угла, перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом β. Найдите объем пирамиды.

СА-18. ОБЪЕМ КОНУСА. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Вариант А1

1

Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник с высотой $3\sqrt{3}$ см. Найдите объем конуса.

Вариант А2

1

Осевое сечение конуса — равнобедренный прямоугольный треугольник с высотой 3 см. Найдите объем конуса.

❷

Объем конуса равен 100π см^3, а площадь его основания равна 25π см^2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

❸

Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 8 см, а длины его высоты и образующей относятся как 4:5. Найдите объем конуса.

❷

Объем конуса равен 96π см^3, а его высота равна 8 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

❸

Периметр осевого сечения усеченного конуса равен 34 см. Найдите объем конуса, если его образующая равна 5 см, а радиусы оснований относятся как 1:2.

Вариант Б1

❶

Найдите объем конуса, если хорда его основания, равная $6\sqrt{2}$ см, отсекает четверть окружности основания, а угол между образующей и плоскостью основания равен 45°.

❷

Объем конуса равен 27π см^3. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен 120°.

❸

Площади оснований усеченного конуса относятся как 1:4. Найдите объем конуса, если его высота и диагональ осевого сечения равны 5 см и 13 см соответственно.

Вариант Б2

❶

Найдите объем конуса, если хорду, равную $6\sqrt{2}$ см, видно из вершины конуса под углом 90°, а угол при вершине осевого сечения равен 120°.

❷

Объем конуса равен 100π см^3. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его осевое сечение имеет площадь 60 см^2.

❸

Высота и диагональ осевого сечения усеченного конуса относятся как 5:13. Найдите объем конуса, если площади его оснований равны 16π см^2 и 64π см^2.

Вариант В1

1

Угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°. Найдите объем конуса, если наибольшее сечение, проходящее через его вершину, имеет площадь 18 см^2.

2

Развертка боковой поверхности конуса — полукруг. Найдите его площадь, если объем конуса равен $9\sqrt{3}\pi$ см^3.

3

Осевое сечение усеченного конуса можно вписать в окружность большего основания. Найдите объем конуса, если его образующая равна l и наклонена к плоскости большего основания под углом α.

Вариант В2

1

Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 30°. Найдите объем конуса, если площадь наибольшего сечения, проходящего через его вершину, равна 72 см^2.

2

Развертка боковой поверхности конуса — сектор с центральным углом 90°. Объем конуса равен $9\sqrt{15}\pi$ см^3. Найдите площадь осевого сечения.

3

Диагональ осевого сечения усеченного конуса равна d и наклонена к плоскости большего основания под углом α. Найдите объем конуса, если его осевое сечение можно вписать в окружность большего основания.

СА-19. ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

Вариант А1

1

Объем шара равен 36π см^3. Найдите площадь сферы, ограничивающей данный шар.

Вариант А2

1

Площадь поверхности шара равна 144π см^2. Найдите объем данного шара.

❷

В шаре радиуса 15 см проведено сечение, площадь которого равна 81π см^2. Найдите объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого плоскостью сечения.

❸

Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота соответствующего сегмента составляет шестую часть диаметра шара.

❷

На расстоянии 9 см от центра шара проведено сечение, длина окружности которого равна 24π см. Найдите объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого плоскостью сечения.

❸

Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота конуса, образующего сектор, составляет треть диаметра шара.

Вариант Б1

❶

Внешний диаметр полого шара равен 18 см, а толщина стенок — 3 см. Найдите объем материала, из которого сделан шар.

❷

Сечение, перпендикулярное к диаметру шара, делит этот диаметр в отношении 1 : 3. Найдите объем меньшего шарового сегмента, отсекаемого от шара, если площадь поверхности шара равна 144π см^2.

❸

Радиус шара равен R, а угол между радиусами в осевом сечении шарового сектора равен 120°. Найдите объем сектора.

Вариант Б2

❶

Внутренний диаметр полого шара равен 12 см, а толщина стенок — 3 см. Найдите объем материала, из которого сделан шар.

❷

Сечение, перпендикулярное к радиусу шара, делит этот радиус пополам. Площадь поверхности шара равна 144π см^2. Найдите объем большего шарового сегмента, отсекаемого от шара.

❸

Круговой сектор радиуса R с центральным углом 60° вращается вокруг одного из радиусов, образующих этот угол. Найдите объем тела вращения.

Вариант В1

1

Сечение делит поверхность сферы на части, площади которых равны 20π см^2 и 80π см^2. Найдите объемы этих частей.

2

Шар радиуса 10 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия равен 12 см. Найдите объем оставшейся части шара.

Вариант В2

1

Сечение делит объем шара на части с объемами $\frac{52}{3}\pi$ см^3 и $\frac{448}{3}\pi$ см^3. Найдите площади поверхностей этих частей.

2

Радиус конуса равен 12 см, а высота — 9 см. Шар касается боковой поверхности конуса, а основание конуса является сечением шара. Найдите объем шарового сегмента, заключенного внутри конуса.

3

Радиусы оснований шарового слоя равны 3 см и 4 см, а радиус шара — 5 см. Найдите объем слоя, если его основания расположены

В1: по одну сторону от центра шара.

В2: по разные стороны от центра шара.

СА-20. ОБЪЕМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Вариант А1

1

Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим острым углом α вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения.

Вариант А2

1

Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения.

❷
Прямоугольная трапеция с большим основанием 8 см и боковыми сторонами 3 см и 5 см вращается вокруг большего основания. Найдите объем тела вращения.

❷
Равнобочная трапеция с основаниями 4 см и 10 см и боковой стороной 5 см вращается вокруг большего основания. Найдите объем тела вращения.

Вариант Б1

❶
Параллелограмм со сторонами 5 см и 6 см и острым углом 30° вращается вокруг меньшей стороны. Найдите объем тела вращения.

❷
Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найдите объем тела вращения.

Вариант Б2

❶
Ромб с диагоналями 30 см и 40 см вращается вокруг стороны. Найдите объем тела вращения.

❷
Прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α вращается вокруг прямой, параллельной гипотенузе и проходящей через вершину прямого угла. Найдите объем тела вращения.

Вариант В1

❶
Равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании α вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через вершину угла α перпендикулярно к основанию треугольника. Найдите объем тела вращения.

Вариант В2

❶
Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине β вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через вершину угла при основании перпендикулярно к боковой стороне. Найдите объем тела вращения.

❷

Параллелограмм со сторонами 6 и 10 см вращается вокруг диагонали, перпендикулярной к меньшей стороне. Найдите объем тела вращения.

❷

Параллелограмм с диагональю 8 см, перпендикулярной к стороне длиной 6 см, вращается вокруг данной диагонали. Найдите объем тела вращения.

СА-21*. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ (домашняя самостоятельная работа)

❶

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Найдите объем призмы, если прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны.

❷

Расстояние от центра симметрии прямого параллелепипеда до его основания равно 5 см, а до боковых граней — 3 см и 4 см. Периметр основания равен 56 см. Найдите объем параллелепипеда.

❸

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Периметры боковых граней пирамиды равны 32 см, 34 см и 36 см, а боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.

❶

Высота правильной треугольной призмы равна H. Найдите объем призмы, если диагонали боковых граней, не исходящие из одной вершины, перпендикулярны.

❷

Расстояние от центра симметрии прямого параллелепипеда до его основания и боковых граней равны 5 см, 2 см и 1,5 см соответственно. Найдите объем параллелепипеда, если острый угол основания равен 30°.

❸

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с радиусом вписанной окружности 4 см. Площади двух меньших боковых граней равны 30 см^2 и 40 см^2, а двугранные углы при основании пирамиды равны. Найдите объем пирамиды.

4

Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Найдите объем пирамиды, если отношение площади боковой поверхности к площади основания равно k.

5

В правильной четырехугольной пирамиде с объемом V и площадью боковой поверхности S найдите расстояние от вершины основания до боковой грани, не содержащей эту вершину.

6

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части равного объема. Найдите отношение боковых поверхностей этих частей.

7

Два равносторонних цилиндра (осевые сечения — квадраты со стороной a) расположены так, что ось одного цилиндра является образующей другого. Найдите объем общей части данных цилиндров.

8

В шар вписаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. Докажите, что $V_ц = \sqrt{V_ш \cdot V_к}$.

4

В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания a отношение площади боковой поверхности к площади основания равно k. Найдите объем пирамиды.

5

На высоте SO правильного тетраэдра $SABC$ выбрана точка D так, что объем тетраэдра $DABC$ равен половине объема $SABC$. Найдите плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$.

6

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части, площади боковых поверхностей которых равны. Найдите отношение объемов этих частей.

7

Два равносторонних конуса (осевые сечения — правильные треугольники со стороной a) расположена так, что вершина одного конуса является центром основания другого. Найдите объем общей части данных конусов.

8

Около шара описаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. Докажите, что $V_ц = \sqrt{V_ш \cdot V_к}$.

КА-3. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

Вариант А1

1

На расстоянии 12 см от центра шара проведено сечение, радиус которого равен 9 см. Найдите объем шара и площадь его поверхности.

2

В правильной треугольной пирамиде апофема равна l и образует с высотой пирамиды угол α. Найдите объем пирамиды.

3

Равнобедренный треугольник с основанием 8 см и периметром 18 см вращается вокруг прямой, параллельной основанию и проходящей через вершину наибольшего угла треугольника. Найдите объем тела вращения.

Вариант А2

1

Через точку, лежащую на сфере, проведено сечение радиуса 3 см под углом $60°$ к радиусу сферы, проведенному в данную точку. Найдите площадь сферы и объем шара.

2

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно l и образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем пирамиды.

3

Прямоугольный треугольник с катетом 8 см и площадью 24 см^2 вращается вокруг прямой, параллельной катету и проходящей через вершину большего острого угла треугольника. Найдите объем тела вращения.

Вариант Б1

1

На расстоянии $2\sqrt{7}$ см от центра шара проведено сечение. Хорда этого сечения, равная 4 см, стягивает угол $90°$. Найдите объем шара и площадь его поверхности.

Вариант Б2

1

На расстоянии 4 см от центра шара проведено сечение. Хорда, удаленная от центра этого сечения на $\sqrt{5}$ см, стягивает угол $120°$. Найдите объем шара и площадь его поверхности.

2

Основание пирамиды — ромб с острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

3

Прямоугольная трапеция с основанием 5 см и боковыми сторонами 24 см и 25 см вращается вокруг меньшего основания. Найдите объем тела вращения.

2

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

3

Равнобочная трапеция с большим основанием 25 см, боковой стороной 15 см и диагональю 20 см вращается вокруг меньшего основания. Найдите объем тела вращения.

Вариант В1

1

В шаре проведены две взаимно перпендикулярные хорды $AB = 6$ см и $AC = 8$ см. Найдите площадь поверхности и объем шара, если прямая BC удалена от центра шара на $\sqrt{11}$ см.

2

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите объем пирамиды, если расстояние от основания ее высоты до боковой грани равно m.

Вариант В2

1

В шаре с центром O проведены две взаимно перпендикулярные хорды $AB = 6$ см и $AC = 6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь поверхности объем шара, если $\angle OBC = 30°$.

2

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Высота пирамиды лежит внутри пирамиды и образует со всеми боковыми гранями углы, равные β. Найдите объем пирамиды.

❸

Треугольник со сторонами 9 см, 10 см и 17 см вращается вокруг меньшей стороны. Найдите объем тела вращения.

❸

Треугольник со сторонами 7 см, 15 см и 20 см вращается вокруг меньшей стороны. Найдите объем тела вращения.

СА-22. ЦИЛИНДР И КОНУС, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО МНОГОГРАННИКА

Вариант А1

❶

Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а его диагональное сечение — квадрат. Найдите объем цилиндра, описанного около параллелепипеда.

❷

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около пирамиды.

Вариант А2

❶

Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна 18 см^2. Диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.

❷

Высота правильной треугольной пирамиды равна H и образует с боковым ребром пирамиды угол α. Найдите объем конуса, описанного около пирамиды.

Вариант Б1

❶

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с периметром 24 см и площадью

Вариант Б2

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием 4 см и углом

24 см^2. Наибольшая боковая грань призмы — квадрат. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, описанного около призмы.

❷

В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Расстояние от середины высоты пирамиды до ее апофемы равно d. Найдите объем конуса, описанного около пирамиды.

при вершине 30°. Найдите объем цилиндра, описанного около призмы, если его осевое сечение — квадрат.

❷

Перпендикуляр, проведенный из центра основания к боковому ребру правильной четырехугольной пирамиды, равен m и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности конуса, описанного около пирамиды.

Вариант В1

❶

Основание прямой призмы— треугольник со стороной c и прилежащими к ней углами α и β. Диагональ боковой грани, содержащей данную сторону, наклонена к плоскости основания под углом γ. Найдите объем цилиндра, описанного около призмы.

❷

Все боковые ребра треугольной пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные α. Точка высоты пирамиды, находящаяся на расстоянии a от вершины пирами-

Вариант В2

❶

Основание прямой призмы — треугольник с углами α и β. Диагональ боковой грани, содержащей сторону основания, для которой данные углы являются прилежащими, равна l и образует угол γ с боковым ребром. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, описанного около призмы.

❷

Все боковые ребра треугольной пирамиды равны. Точка высоты пирамиды, удаленная от плоскости основания на расстояние b, равноудалена от концов бокового ребра. Отрезок, ды, равноудалена от бокового ребра и плоскости основания. Найдите площадь полной поверхности конуса, описанного около пирамиды.

соединяющий эту точку с вершиной основания, образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем конуса, описанного около пирамиды.

СА-23. ЦИЛИНДР И КОНУС, ВПИСАННЫЕ В МНОГОГРАННИК

Вариант А1

1

Цилиндр, объем которого равен $54\pi\,см^3$, вписан в куб. Найдите объем куба.

2

Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α, а боковое ребро равно l. Найдите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в пирамиду.

Вариант А2

1

Цилиндр с площадью боковой поверхности $24\pi\,см^2$ вписан в правильную четырехугольную призму. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2

Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Высота пирамиды равна H. Найдите объем конуса, вписанного в пирамиду.

Вариант Б1

1

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при

Вариант Б2

1

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом основании α. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем цилиндра, вписанного в призму.

❷

Основание пирамиды — ромб с острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. В пирамиду вписан конус, высота которого равна H. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

при основании α. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с боковым ребром угол β. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, вписанного в призму.

❷

Основание пирамиды — ромб с тупым углом α. В пирамиду вписан конус, образующая которого равна l и составляет с высотой угол β. Найдите объем пирамиды.

Вариант В1

❶

Основание прямой призмы — равнобочная трапеция, диагональ которой равна d и образует с большим основанием угол α. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, вписанного в призму.

❷

Конус, осевое сечение которого имеет площадь Q, вписан в треугольную пирамиду, периметр основания которой равен P. Найдите объем пирамиды.

Вариант В2

❶

Основание прямой призмы — прямоугольная трапеция, в которой большая диагональ образует с меньшей боковой стороной угол α. Большая диагональ призмы равна d и образует с боковым ребром угол β. Найдите объем цилиндра, вписанного в призму.

❷

Конус вписан в треугольную пирамиду с периметром основания P и объемом V. Найдите площадь осевого сечения конуса.

СА-24. ЦИЛИНДР И КОНУС, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО ШАРА

Вариант А1

1

Около шара, объем которого равен 36π см^3, описан цилиндр. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

2

В конус, радиус основания которого равен R, а угол при вершине осевого сечения равен α, вписан шар. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант А2

1

Около сферы, площадь которой равна 100π см^2, описан цилиндр. Найдите объем цилиндра.

2

В конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α, вписан шар. Найдите объем шара.

Вариант Б1

1

В цилиндр, объем которого равен 16π см^3, вписан шар. Найдите объем шара.

2

Около шара радиуса R описан конус. Найдите площадь полной поверхности конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен α.

Вариант Б2

1

Найдите площадь сферы, около которой описан цилиндр с площадью боковой поверхности 36π см^2.

2

В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписан шар радиуса R. Найдите объем конуса.

Вариант В1

1

В цилиндр вписан шар. Расстояние между точками

Вариант В2

1

В цилиндр вписан шар, центр которого удален от точек ок касания шара с боковой поверхностью и основанием цилиндра равно $2\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

❷

Около шара описан конус. Точки окружности его основания удалены от поверхности шара на расстояние d. Найдите объем шара, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α.

ружности основания цилиндра на $4\sqrt{2}$ см. Найдите объем цилиндра.

❷

Около шара описан конус, вершина которого удалена от поверхности шара на расстояние m. Найдите площадь поверхности шара, если угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

СА-25. ЦИЛИНДР И КОНУС, ВПИСАННЫЕ В ШАР

Вариант А1

❶

Около цилиндра описан шар. Отрезок, соединяющий центр шара с точкой окружности основания цилиндра, равен 8 см и образует с осью цилиндра угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

❷

Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник с высотой h. Найдите объем шара, описанного около конуса.

Вариант А2

❶

В шар радиуса $2\sqrt{3}$ см вписан цилиндр. Диагональ осевого сечения этого цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем цилиндра.

❷

Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с гипотенузой c. Найдите площадь сферы, описанной около конуса.

Вариант Б1

1

Около цилиндра описан шар и в него вписан шар. Найдите отношение объемов шаров.

2

В шар вписан конус с радиусом основания R. Найдите площадь поверхности шара, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α.

Вариант Б2

1

Около цилиндра описана сфера и в него вписана сфера. Найдите отношение площадей сфер.

2

В шар радиуса R вписан конус. Найдите объем конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен α.

Вариант В1

1

В шар радиуса 6 см вписан цилиндр. Найдите объем цилиндра, если плоскости его оснований делят поверхность шара на три равные по площади части.

2

Найдите объем шара, описанного около конуса, если расстояние от центра шара до центра основания конуса равно a, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Сколько решений имеет задача?

Вариант В2

1

Около цилиндра описан шар. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если плоскости его оснований делят поверхность шара на части, площади которых равны 36π см^2, 72π см^2 и 36π см^2.

2

Найдите объем шара, описанного около конуса, если расстояние от центра основания конуса до центра шара равно d, а угол наклона образующей конуса к плоскости основания равен α. Сколько решений имеет задача?

СА-26. ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО МНОГОГРАННИКА

Вариант А1

1

Шар радиуса 5 см описан около правильной треугольной призмы, высота которой равна 8 см. Найдите объем призмы.

2

В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно стороне основания. Найдите площадь сферы, описанной около пирамиды, если диагональ основания пирамиды равна d.

Вариант А2

1

Шар радиуса 4 см описан около правильной треугольной призмы со стороной основания 6 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2

В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно диагонали основания. Найдите объем шара, описанного около пирамиды, если сторона основания пирамиды равна a.

Вариант Б1

1

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6 см, 8 см и $2\sqrt{11}$ см. Найдите объем шара, описанного около параллелепипеда.

2

Около правильной треугольной пирамиды описан шар радиуса R. Боковое ребро пирамиды составляет с высотой угол β. Найдите объем пирамиды.

Вариант Б2

1

Около правильной четырехугольной призмы с объемом 256 см^3 и высотой 4 см описана сфера. Найдите площадь сферы.

2

В правильной треугольной пирамиде расстояние от центра описанного шара до бокового ребра равно l. Найдите объем пирамиды, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α.

Вариант В1

1

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Радиус описанного шара, проведенный к вершине призмы, составляет с плоскостью основания призмы угол β. Найдите объем призмы.

2

Найдите площадь сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, если отрезок, соединяющий основание высоты с серединой бокового ребра, равен m и составляет с высотой угол α.

Вариант В2

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α. Радиус описанного шара, проведенный к вершине призмы, образует с боковым ребром призмы угол β. Найдите объем призмы.

2

Найдите объем шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, если перпендикуляр, проведенный из вершины основания к противолежащему боковому ребру, равен d и составляет с плоскостью основания угол β.

СА-27. ШАР, ВПИСАННЫЙ В МНОГОГРАННИК

Вариант А1

1

Шар радиуса R вписан в прямоугольный параллелепипед. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2

Двугранный угол при основании правильной треугольной

Вариант А2

1

Шар радиуса R вписан в правильную четырехугольную призму. Найдите объем призмы.

2

В правильную треугольную пирамиду с апофемой l и двупирамиды со стороной основания a равен α. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

гранным углом при основании α вписана сфера. Найдите площадь сферы.

Вариант Б1

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и высотой 12 см. Найдите площадь сферы, вписанной в призму.

2

В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса R. Найдите объем пирамиды, если ее боковая грань образует с высотой угол β.

Вариант Б2

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 15 см, проекция которого на гипотенузу равна 9 см. Найдите объем шара, вписанного в призму.

2

Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если в нее вписан шар радиуса R.

Вариант В1

1

Основание прямой призмы — прямоугольная трапеция с основаниями 4 см и 12 см. Найдите объем шара, вписанного в данную призму.

2

В пирамиду, объем которой равен V, вписан шар радиуса R. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант В2

1

Основание прямой призмы — равнобочная трапеция с основаниями 2 см и 18 см. Найдите площадь сферы, вписанной в данную призму.

2

В пирамиду, полная поверхность которой имеет площадь S, вписан шар радиуса R. Найдите объем пирамиды.

КА-4. ГОДОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант А1

1

Хорда нижнего основания цилиндра, равная $4\sqrt{14}$ см, удалена от центра нижнего основания на 5 см, а от центра верхнего основания — на 13 см. Найдите объем цилиндра.

2

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно 6, а плоский угол при вершине равен 90°. Найдите:

а) $\left|\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}\right|$;

б) $\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BA}$;

в) площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант А2

1

Концы хорды нижнего основания цилиндра удалены от центра верхнего основания на 15 см, а сама хорда удалена от центров верхнего и нижнего оснований на 13 см и 5 см соответственно. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с высотой SO боковое ребро равно $6\sqrt{2}$ и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите:

а) $\left|\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{AO}\right|$;

б) $\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BD}$;

в) объем пирамиды.

3

Сфера радиуса 3 имеет центр

Вариант А1	Вариант А2
в точке $O(4;-2;1)$.	в точке $O(-2;5;3)$.

Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно

плоскости Oxy. Найдите объем шара, ограниченного данной сферой.

плоскости Oxz. Найдите площадь данной сферы.

Вариант Б1

1

Хорда основания конуса, стягивающая центральный угол $120°$, равна $6\sqrt{3}$ см и удалена от вершины конуса на 5 см. Найдите объем конуса.

2

Основание пирамиды $SABCD$ — ромб $ABCD$, в котором $\angle A = 60°$, $AB = 4$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны $60°$. Отрезок SO — высота пирамиды. Найдите:

а) $\left|\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}\right|$;

б) $\overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{SO})$;

в) площадь боковой поверхности пирамиды.

3

Сфера с центром в точке $O(2;1;-2)$ проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно оси абсцисс. Найдите объем шара, ограниченного полученной сферой.

Вариант Б2

1

Хорда основания конуса, равная $4\sqrt{2}$ см, видна из вершины конуса под углом $90°$ и удалена от центра основания на $\sqrt{7}$ см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2

Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, в котором $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$, $AB = 4$. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные $45°$. Отрезок SO — высота пирамиды. Найдите:

а) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{SO}\right|$;

б) $\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{SO})$;

в) объем пирамиды.

3

Сфера с центром в точке $O(-1;-2;2)$ проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно оси аппликат. Найдите площадь полученной сферы.

Вариант В1

❶

Объем конуса равен 9π см^3. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом $45°$.

❷

Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, в котором $AB = AC$, $\angle A = \alpha$. Боковые грани SAB и SAC перпендикулярны к плоскости основания, а грань SBC наклонена к ней под углом β и удалена от точки A на расстояние d.

а) Пусть D — середина BC. Разложите вектор $\overrightarrow{SD}$ по векторам $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

б) Найдите объем пирамиды.

❸

Точки $A(2;-3;1)$ и $B(-2;1;5)$ — концы диаметра сферы. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно плоскости $z = 1$. Найдите площадь сферы.

Вариант В2

❶

Площадь боковой поверхности конуса равна 18π см^2. Найдите объем конуса, если угол между его образующей и высотой равен $30°$.

❷

Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, в котором $\angle B = \angle C = \alpha$. Боковая грань SBC перпендикулярна к плоскости основания, а грани SAB и SAC наклонены к ней под углом β и удалены от точки O — основания высоты пирамиды — на расстояние d.

а) Разложите вектор $\overrightarrow{SO}$ по векторам $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

❸

Точки $A(4;-1;2)$ и $B(2;3;6)$ — концы диаметра сферы. Составьте уравнение сферы, в которую перейдет данная сфера при симметрии относительно плоскости $x = 2$. Найдите объем шара, ограниченного сферой.

Работы по учебнику А. В. Погорелова

МНОГОГРАННИКИ

СП-1. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ТРЕХГРАННЫЙ И МНОГОГРАННЫЙ УГЛЫ

Вариант А1

❶

Двугранный угол равен 30°. Точка, лежащая на одной из граней этого угла, удалена от ребра угла на 12 см. Найдите расстояние от данной точки до второй грани.

Вариант А2

❶

Двугранный угол равен 45°. Точка, лежащая на одной из граней этого угла, удалена от второй грани на $4\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от данной точки до ребра двугранного угла.

❷

Отрезок *AB* лежит в одной из граней двугранного угла, причем точка *B* лежит на ребре угла. Найдите величину двугранного угла, если

А1: $AB = 7$ см, проекция AB на ребро угла равна $\sqrt{17}$ см, а точка A удалена от второй грани на 4 см.

А2: точка A удалена от ребра угла на 4 см, $AB = 7$ см, а его проекция на вторую грань равна $3\sqrt{5}$ см.

❸

Определите, могут ли плоские угла трехгранного угла быть равны

А1: 100°, 120° и 135°.

А2: 60°, 20° и 30°.

Ответ объясните.

Вариант Б1

1

Плоскость γ, параллельная ребру двугранного угла, равного 60°, пересекает его грани по прямым, удаленным от ребра угла на 3 см и 8 см. Найдите расстояние между этими прямыми

Вариант Б2

1

Плоскость γ пересекает грани двугранного угла, равного 60°, по параллельным прямым, расстояние между которыми равно 7 см. Одна из прямых удалена от ребра угла на 3 см. Найдите расстояние от ребра угла до второй прямой.

2

Точки A и B лежат на одной грани двугранного угла. Найдите величину этого угла, если

Б1: точки A и B удалены от его ребра на $4\sqrt{2}$ см и $6\sqrt{2}$ см, а сумма расстояний от данных точек до второй грани равна 10 см.

Б2: точки A и B удалены от второй грани на 6 см и 8 см, а расстояние от точки B до ребра угла на 4 см больше, чем от точки A.

3

В каких пределах может изменяться величина плоского угла трехгранного угла, если два других его плоских угла равны

Б1: 100° и 150°?

Б2: 60° и 90°?

Вариант В1

Вариант В2

1

Внутри двугранного угла проведена прямая, параллельная его ребру. Найдите расстояние между ребром угла и данной прямой, если

двугранный угол равен $60°$, а расстояния от данной прямой до граней угла равны 22 см и 4 см.

двугранный угол равен $30°$, а расстояния от данной прямой до граней угла равны 4 см и $6\sqrt{3}$ см.

❷

Отрезки AB и AC лежат в различных гранях двугранного угла. Найдите величину угла, если

$AB = 5$ см, $AC = 4\sqrt{5}$ см, $BC = 7$ см, а проекцией каждого из отрезков AB и AC на ребро двугранного угла является отрезок AD длиной 4 см.

$AB = \sqrt{61}$ см, $AC = 10$ см, $BC = 7$ см, а проекцией точек B и C на ребро двугранного угла является точка D, удаленная от точки A на 6 см.

❸

Два плоских угла трехгранного угла равны $60°$, а их общее ребро образует с плоскостью третьего угла угол $45°$. Найдите величину третьего плоского угла.

❸

Найдите угол наклона ребра трехгранного угла к плоскости противолежащего плоского угла, если этот плоский угол равен $90°$, а два других плоских угла — $60°$.

СП-2*. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ДВУГРАННОГО И ТРЕХГРАННОГО УГЛА

(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

❶

Дан двугранный острый угол α. Из точки на ребре данного угла

в каждой из его граней проведено по лучу. Известно, что

один из лучей перпендикулярен ребру угла, а другой образует с ребром угол β.

оба луча образуют с ребром углы, равные β, а угол между лучами — острый.

Найдите угол между данными лучами.

❷

Плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ, а противолежащие им двугранные углы — A, B и C. Докажите, что

а) существует трехгранный угол с плоскими углами $\pi - A$, $\pi - B$ и $\pi - C$ и двугранными углами $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ и $\pi - \gamma$ (дополнительный трехгранный угол);

б) $A + B + C > \pi$;

в) $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$ (1-ая теорема косинусов для трехгранного угла).

а) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$ (теорема синусов для трехгранного угла);

б) $A + B - C < \pi$;

в) $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$ (2-ая теорема косинусов для трехгранного угла).

❸

Из точки на ребре прямого двугранного угла в каждой из его граней проведено по лучу. Данные лучи образуют с ребром углы α и β, а между собой — угол γ. Докажите, что если углы α, β и γ — острые, то $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.

❸

В одной из граней двугранного угла величиной α проведена прямая, образующая с ребром угла угол β, а со второй гранью — угол γ. Докажите, что если углы α, β и γ — острые, то $\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

❹

Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. Докажите, что

плоскость, перпендикулярная грани прямого угла, отсекает на ребрах трехгранного угла равные отрезки.

если плоскость отсекает на ребрах угла равные отрезки, то она перпендикулярна грани прямого угла.

5

Плоские углы трехгранного угла равны

90°, 90° и 135°.

90°, 90° и 60°.

Точка внутри угла удалена от его граней соответственно

на 8 см, $7\sqrt{2}$ см и 24 см.

на 10 см, 13 см и 12 см.

Найдите расстояние от данной точки до вершины трехгранного угла.

СП-3. ПРИЗМА. СЕЧЕНИЯ ПРИЗМЫ

Вариант А1 | **Вариант А2**

1

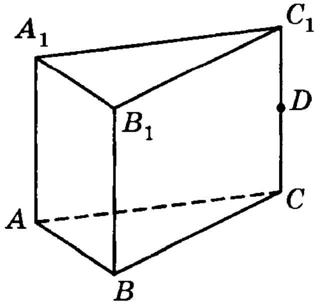
Определите, сколько сторон имеет многоугольник, лежащий в основании призмы, если у этой призмы

13 граней.

9 граней.

2

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка D лежит на ребре CC_1 (см. рисунок).



а) Постройте точку пересечения

прямой B_1D с плоскостью ABC.

прямой AD с плоскостью $A_1B_1C_1$.

б) Постройте сечение призмы, проходящее через

середины ребер AB и BC параллельно боковому ребру BB_1.

середины ребер A_1B_1 и A_1C_1 параллельно боковой грани BCC_1.

❸

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через

ребро B_1C_1 и середину ребра AB.

ребро A_1A и середину ребра BC.

Определите вид построенного сечения и найдите его площадь, если ребро куба равно 2 см.

Вариант Б1

Вариант Б2

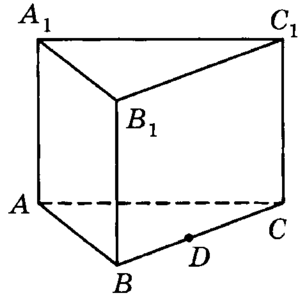
❶

Определите, сколько сторон имеет многоугольник, лежащий в основании призмы, если у этой призмы

18 ребер.

15 ребер.

❷



Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка D лежит на ребре BC (см. рисунок).

а) Постройте точку пересечения

прямой B_1D с плоскостью ACC_1.

прямой C_1D с плоскостью A_1AB.

б) Постройте сечение призмы, проходящее

через середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 параллельно прямой BC_1.

через середины ребер AB и AC параллельно прямой AB_1.

❸

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через

вершину B_1 и середины ребер AA_1 и CC_1.

вершину C_1 и середины ребер BB_1 и DD_1.

Определите вид построенного сечения и найдите его площадь, если ребро куба равно a.

Вариант В1

Вариант В2

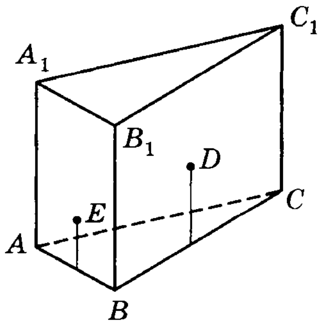
❶

Определите, сколько сторон имеет многоугольник, лежащий в основании призмы, если у этой призмы

28 диагоналей.

40 диагоналей.

❷



Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точки D и E лежат на гранях C_1CB и A_1AB соответственно (см. рисунок).

а) Постройте точку пересечения

прямой C_1E с плоскостью ABC.

прямой A_1D с плоскостью ABC.

б) Постройте сечение, проходящее через

точку D и середину ребра A_1C_1 параллельно медиане треугольника ABC, проведенной к стороне AB.

точку E и середину ребра A_1C_1 параллельно медиане треугольника ABC, проведенной к стороне BC.

3

Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер

A_1B_1, AD и C_1C.

AA_1, B_1C_1 и CD.

Укажите вид построенного сечения (без доказательства) и найдите его площадь, если ребро куба равно a.

СП-4. ПРЯМАЯ ПРИЗМА. ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА

Вариант А1

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу треугольника, равна 26 см.

Вариант А2

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 20 см и катетом 16 см. Диагональ боковой грани, содержащей второй катет треугольника, равна 13 см.

Найдите:

а) высоту призмы;

б) боковую поверхность призмы;
в) полную поверхность призмы.

❷

Боковая поверхность прямой призмы равна 96 дм^2. Найдите боковое ребро призмы, если ее основание — ромб с острым углом 60° и меньшей диагональю 6 дм.

❷

Боковая поверхность прямой призмы равна 96 дм^2. Найдите высоту призмы, если ее основание — ромб с высотой 4 дм и острым углом 30°.

❸

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите площадь сечения,

проходящего через ребро AC и вершину B_1, если сторона основания призмы равна a, а плоскость сечения образует с плоскостью ABC угол α.

проходящего через ребро AB и середину бокового ребра CC_1, если высота призмы равна $2h$, а плоскость сечения образует с плоскостью ABC угол β.

Вариант Б1

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник, в котором высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, равна $10\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°.

Вариант Б2

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник, в котором биссектриса угла при вершине равна 12 см. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, равна $10\sqrt{2}$ см и образует с боковым ребром призмы угол 45°.

Найдите:

а) боковое ребро призмы;
б) боковую поверхность призмы;
в) полную поверхность призмы.

❷

Основание прямой призмы — ромб с острым углом 30°. Боковая поверхность призмы равна 96 $дм^2$, а полная поверхность — 132 $дм^2$. Найдите высоту призмы.

❸

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину D_1 и диагональ основания AC проведено сечение площадью S, образующее с плоскостью основания угол α. Найдите боковую поверхность призмы.

❷

Основание прямой призмы — ромб с высотой 2 дм. Боковая поверхность призмы равна 96 $дм^2$, а полная поверхность — 128 $дм^2$. Найдите высоту призмы.

❸

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину ребра CC_1 и диагональ основания BD проведено сечение площадью Q, образующее с плоскостью основания угол β. Найдите боковую поверхность призмы.

Вариант В1

❶

В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α и большей диагональю l. Меньшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол β.

Вариант В2

❶

В основании прямой призмы лежит ромб с тупым углом β и меньшей диагональю d. Большая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол α.

Найдите:
а) расстояние между плоскостями оснований призмы;
б) боковую поверхность призмы.

❷

Полная поверхность правильной треугольной призмы равна $20\sqrt{3}$ $дм^2$. Высота призмы

❷

Полная поверхность правильной треугольной призмы равна $14\sqrt{3}$ $дм^2$. Высота призмы равна $\sqrt{3}$ дм. Найдите площадь боковой грани призмы.

❸

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине α. Через основание этого треугольника и середину боковой стороны второго основания призмы проведено сечение под углом β к плоскости основания призмы. Найдите площадь сечения.

равна $2\sqrt{3}$ дм. Найдите диагональ боковой грани призмы.

❸

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Через среднюю линию, параллельную основанию этого треугольника, и вершину угла α второго основания призмы проведено сечение под углом β к плоскости основания призмы. Найдите площадь сечения.

СП-5. НАКЛОННАЯ ПРИЗМА

Вариант А1

❶

Боковое ребро наклонной призмы равно 10 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите высоту призмы.

❷

Сечение, перпендикулярное боковым ребрам наклонной четырехугольной призмы, — ромб со стороной 5 см. Найдите боковую поверхность призмы, если ее боковое ребро равно 10 см.

Вариант А2

❶

Высота наклонной призмы равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите боковое ребро призмы, если оно образует с плоскостью основания угол 60°.

❷

Расстояния между боковыми ребрами наклонной четырехугольной призмы равны 2 см, 3 см, 4 см и 5 см. Найдите боковое ребро призмы, если ее боковая поверхность равна 70 см^2.

3

Основание наклонной призмы — равнобедренный треугольник со сторонами 5 см, 5 см и 6 см. Боковые грани, содержащие боковые стороны треугольника — ромбы с острыми углами 30°, а третья боковая грань — прямоугольник. Найдите полную поверхность призмы.

3

Основание наклонной призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см. Боковая грань, содержащая гипотенузу треугольника, — квадрат, а противолежащее ей боковое ребро образует с катетами нижнего основания углы 45°. Найдите полную поверхность призмы.

Вариант Б1

1

В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Одна из вершин верхнего основания призмы проектируется в центр нижнего основания. Найдите боковое ребро призмы, если ее высота равна 3 см.

2

В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны и имеют площади 24 см^2 и 32 см^2. Найдите боковую поверхность призмы, если ее боковое ребро равно 8 см.

3

Основание наклонной призмы — квадрат со стороной a.

Вариант Б2

1

В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Одна из вершин верхнего основания призмы проектируется в середину противолежащей стороны нижнего основания. Найдите высоту призмы, если ее боковое ребро равно 10 см.

2

В наклонной треугольной призме две боковые грани пересекаются под углом 60° и имеют равные площади 24 см^2. Найдите боковую поверхность призмы.

3

Основание наклонной призмы — прямоугольник со сто-

Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом α. Высота призмы равна h. Найдите полную поверхность призмы.

ронами a и b. Боковые грани призмы, содержащие стороны основания b, являются квадратами и образуют с плоскостью основания углы β. Найдите полную поверхность призмы.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Основание наклонной призмы —

правильный треугольник. | квадрат.

Известно, что одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от вершин нижнего основания. Докажите, что если α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания, а β — угол наклона к плоскости основания боковой грани, содержащей данную вершину призмы, то

$\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$. | $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

В1 ❷

В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковая грань AA_1C_1C — прямоугольник, причем $AC = 8$ см, $AA_1 = 5$ см. Из точки A проведен перпендикуляр AD к ребру BB_1. Известно, что $AD = 3$ см, $\angle DAC = 60°$. Найдите боковую поверхность призмы.

В2 ❷

В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковая грань ABB_1A_1 — прямоугольник. Из точек A и B проведены перпендикуляры к ребру CC_1, которые равны 5 и 8 см и образуют между собой угол 60°. $CC_1 = 4$ см. Найдите боковую поверхность призмы.

В1 ❸

В наклонной четырехугольной призме все ребра равны a. Основание призмы — квадрат.

В2 ❸

В наклонной четырехугольной призме все боковые грани — ромбы со стороной a и

Найдите полную поверхность призмы, если боковое ребро, образующее равные углы со смежными с ним сторонами основания, образует с плоскостью основания угол 45°.

острым углом 60°. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите полную поверхность призмы.

СП-6. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Вариант А1

1

Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 2 см и 3 см, а диагональ — 7 см. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

2

Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм со сторонами 5 см и 8 см и острым углом 30°. Полная поверхность параллелепипеда равна 170 см^2. Найдите его высоту.

3

Площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда равна $8\sqrt{5}$ см^2, а боковое ребро — 4 см. Найдите длину диагонали параллелепипеда.

Вариант А2

1

Сторона основания и высота прямоугольного параллелепипеда соответственно равны 2 см и 1 см, а диагональ — 3 см. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

2

В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с периметром 16 дм и тупым углом 150°. Полная поверхность параллелепипеда равна 96 дм^2. Найдите его высоту.

3

Площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда равна $6\sqrt{5}$ см^2, а диагональ основания — $3\sqrt{5}$ см. Найдите длину диагонали параллелепипеда.

Вариант Б1

1

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 7 см, а диагонали двух его боковых граней равны $3\sqrt{5}$ см и $2\sqrt{10}$ см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

2

Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом 30°. Боковое ребро равно 5 дм, а полная поверхность параллелепипеда — 96 дм^2. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

3

Основание прямого параллелепипеда — ромб с площадью 24 см^2. Площади диагональных сечений равны 30 см^2 и 40 см^2. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

Вариант Б2

1

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 6 см, диагональ его основания — $2\sqrt{5}$ см, а диагональ одной из боковых граней — $4\sqrt{2}$ см. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

2

Основание прямого параллелепипеда — ромб, одна из диагоналей которого равна его стороне. Боковое ребро равно $2\sqrt{3}$ дм, а полная поверхность параллелепипеда — $48\sqrt{3}$ дм^2. Найдите площадь основания параллелепипеда.

3

Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм с острым углом 30° и площадью 24 см^2. Площади боковых граней равны 60 см^2 и 80 см^2. Найдите высоту параллелепипеда.

Вариант В1

1

Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 5 см, $3\sqrt{17}$ см и $4\sqrt{10}$ см. Найдите диагональ параллелепипеда.

Вариант В2

1

Площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда равна 25 см^2, а диагональ параллелепипеда — $5\sqrt{2}$ см. Найдите высоту параллелепипеда.

❷

Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда равна l и образует с боковой гранью угол β. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

❷

Основание прямого параллелепипеда — ромб с большей диагональю d и тупым углом β. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с боковой гранью угол α. Найдите боковую поверхность параллелепипеда.

❸

Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его ребрами, исходящими из одной вершины, углы, равные

60° и 45°. | 60° и 60°.

Найдите угол между данной диагональю и третьим ребром, исходящим из той же вершины.

СП-7*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ПРИЗМАХ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его гранями углы α, β и γ. Докажите, что

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

❷

Сечение призмы плоскостью, пересекающей все ее боковые

Вариант 2

❶

Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами углы α, β и γ. Докажите, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

❷

Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью не ребра, — параллелограмм. Докажите, что данная призма — параллелепипед.

может быть правильным пятиугольником. Может ли оно быть правильным шестиугольником?

3

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сечение BC_1D образует с боковым ребром угол 45°. Докажите, что площадь этого сечения в 4 раза меньше боковой поверхности призмы.

3

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сечение AB_1C и боковая грань равновелики. Найдите угол между плоскостью этого сечения и боковым ребром призмы.

4

Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней.

4

Диагональ куба равна d. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней.

5

Используя метод развертки многогранника, найдите на единичном кубе

кратчайший путь по поверхности между двумя противоположными вершинами.

расстояние от середины ребра до наиболее удаленной от нее точки поверхности куба.

6

В прямой треугольной призме площадь основания равна 84 см^2, а площадь боковых граней — 26 см^2, 28 см^2 и 30 см^2. Найдите высоту призмы.

6

В прямой треугольной призме площади боковых граней равны 52 см^2, 56 см^2 и 60 см^2. Боковое ребро призмы удалено от параллельной боковой грани, содержащей среднюю сторону основания, на 12 см. Найдите высоту призмы.

КП-1. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ПРИЗМА

Вариант А1

1

Отрезок AB длиной 12 см лежит в одной из граней двугранного угла и перпендикулярен ребру угла, причем точка A лежит на ребре двугранного угла. Найдите

длину проекции отрезка AB на вторую грань, если двугранный угол равен 60°.

2

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 12 см и гипотенузой 13 см. Найдите полную поверхность призмы, если боковая грань, содержащая неизвестный катет основания, является квадратом.

3

В основании прямого параллелепипеда лежит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна d и образует с плоскостью боковой грани угол α. Найдите:

а) боковую поверхность параллелепипеда;

б) площадь диагонального сечения.

Вариант А2

1

Отрезок AB длиной 12 см лежит в одной из граней двугранного угла и перпендикулярен ребру угла, причем точка A лежит на ребре двугранного угла. Найдите

расстояние от точки B до второй грани, если двугранный угол равен 30°.

2

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник, в котором высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Высота призмы равна 12 см. Найдите полную поверхность призмы, если боковая грань, содержащая основание треугольника, — квадрат.

3

В правильной четырехугольной призме диагональ боковой грани равна d. Диагональ призмы образует с плоскостью боковой грани угол α. Найдите:

а) боковую поверхность призмы;

б) площадь диагонального сечения.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Сторона AD квадрата $ABCD$, лежащего в одной из граней двугранного угла, лежит на ребре угла. Найдите

расстояние от прямой BC до второй грани угла, если площадь квадрата равна 36 см^2, а двугранный угол равен 30°.

длину проекции стороны CD на вторую грань, если периметр квадрата равен 24 см, а двугранный угол равен 60°.

2 (Б1)

Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом α, а площадь этой грани равна Q. Найдите полную поверхность призмы.

2 (Б2)

Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом α. Площадь основания призмы равна S. Найдите полную поверхность призмы.

3 (Б1)

Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 15 см и 20 см, а диагональ — $5\sqrt{26}$ см. Найдите:

а) боковую поверхность параллелепипеда;

б) площадь сечения, проведенного через диагональ основания и противолежащую вершину второго основания.

3 (Б2)

Сторона основания и высота прямоугольного параллелепипеда равны 15 см и 10 см, а боковая поверхность — 700 см^2. Найдите:

а) площадь основания параллелепипеда;

б) площадь сечения, проведенного через диагональ основания и середину противолежащего бокового ребра.

Вариант В1

Вариант В2

1

Равнобедренный треугольник ABC лежит в одной из граней двугранного

угла, причем его основание AC лежит на ребре угла. Найдите

проекции боковых сторон треугольника на вторую грань, если $AC = 6$ см, $AB = = BC = \sqrt{73}$ см, а двугранный угол равен $60°$.

❷

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании α. Сечение, проведенное через боковую сторону основания призмы и противолежащую вершину второго основания, образует с плоскостью основания угол β. Найдите полную поверхность призмы.

❸

Основание наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной a. Одна из вершин второго основания проектируется в центр этого квадрата. Высота параллелепипеда равна h. Найдите:

а) площадь диагонального сечения;

б) боковую поверхность параллелепипеда.

боковую сторону треугольника ABC, если ее проекция на вторую грань равна $\sqrt{17}$ см, $AC =$ $= 6$ см, а двугранный угол равен $45°$.

❷

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с углом при вершине α и основанием a. Сечение, проходящее через данную сторону треугольника и противолежащую вершину второго основания, образует с плоскостью основания угол φ. Найдите полную поверхность призмы.

❸

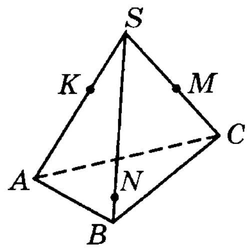
Основание наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной a, все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от вершин нижнего основания. Найдите:

а) площадь диагонального сечения;

б) боковую поверхность параллелепипеда.

СП-8. ПИРАМИДА. СЕЧЕНИЯ ПИРАМИДЫ

Вариант А1 | **Вариант А2**



1

Дана треугольная пирамида $SABC$.
Постройте:

Вариант А1:

а) точку пересечения прямой KN и плоскости ABC;

б) линию пересечения плоскостей CBK и SAB.

Вариант А2:

а) точку пересечения прямой MN и плоскости ABC;

б) линию пересечения плоскостей ANC и SBC.

2

В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC все ребра равны a. Постройте сечение пирамиды,

Вариант А1: проходящее через ребро AC и середину ребра SB.

Вариант А2: проходящее через вершину A и середины ребер SB и SC.

Определите вид построенного сечения и найдите его площадь.

3

Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Постройте сечение пирамиды,

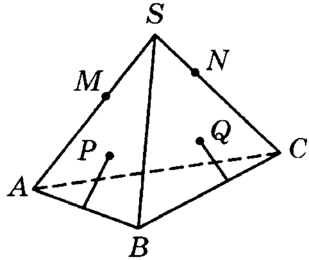
Вариант А1: проходящее через середины ребер SA и SB параллельно боковой грани SCD.

Вариант А2: проходящее через середины ребер SB и SC параллельно боковой грани SAD.

Определите вид построенного сечения.

Вариант Б1 | Вариант Б2

1



Дана треугольная пирамида $SABC$. Точки P и Q лежат на боковых гранях SAB и SBC соответственно. Постройте:

Вариант Б1

а) точку пересечения прямой NP и плоскости ABC;

б) линию пересечения плоскостей ABQ и SAC.

Вариант Б2

а) точку пересечения прямой MQ и плоскости ABC;

б) линию пересечения плоскостей CBP и SAC.

2

Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Все ребра пирамиды равны a. Постройте сечение пирамиды,

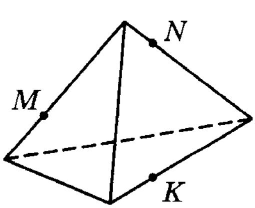
Вариант Б1: проходящее через диагональ основания AC параллельно ребру SB.

Вариант Б2: проходящее через точку B и середину ребра SA параллельно ребру SC.

Определите вид построенного сечения и найдите его площадь.

Вариант Б1

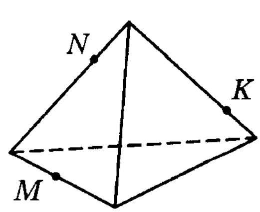
3



Постройте сечение данной треугольной пирамиды плос-

Вариант Б2

3



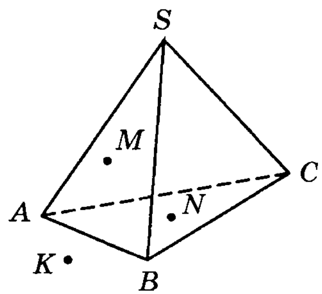
Постройте сечение данной треугольной пирамиды плоскостью MNK. При каком взаимном расположении точек M и N такое сечение будет трапецией с основанием MN?

костью MNK. При каком взаимном расположении точек N и K такое сечение будет трапецией с основанием NK?

Вариант В1

Вариант В2

❶



Дана треугольная пирамида $SABC$. Точки K, M и N лежат в плоскостях ABC, SAB и SBC соответственно.

Постройте:

В1:

а) точку пересечения прямой KN и плоскости SAB;

б) линию пересечения плоскостей ANC и BMC.

В2:

а) точку пересечения прямой KM и плоскости SAC;

б) линию пересечения плоскостей AMC и BNA.

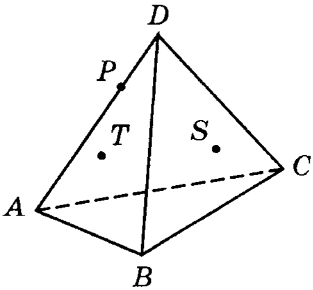
❷

Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Все ребра пирамиды равны a. Постройте сечение пирамиды, проходящее через середины ребер SA и SB перпендикулярно плоскости основания. Определите вид построенного сечения и найдите его площадь.

❷

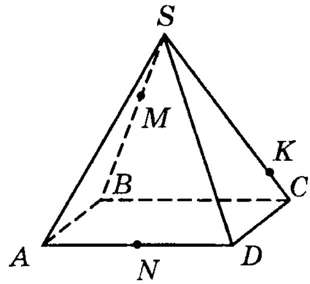
Все грани треугольной пирамиды $SABC$ — равносторонние треугольники со стороной a. Постройте сечение пирамиды, проходящее через середины ребер SA и SB перпендикулярно плоскости ABC. Определите вид построенного сечения и найдите его площадь.

❸



В треугольной пирамиде $DABC$ точки T и S лежат на гранях ADB и BDC соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью PTS. Может ли такое сечение быть параллелограммом?

❸



Постройте сечение данной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью MNK (M, N и K — произвольные точки на ребрах SB, AD и SC). Может ли такое сечение пересекать плоскость ABC по прямой, параллельной MK?

СП-9. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Вариант А1

❶

В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна 4 см, а боковое ребро — 5 см. Найдите:

а) сторону основания пирамиды;

б) высоту пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

❷

В правильной треугольной пирамиде боковая поверхность равна 27 дм^2, а периметр осно-

Вариант А2

❶

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а апофема — 4 см. Найдите:

а) боковое ребро пирамиды;

б) высоту пирамиды;

в) полную поверхность пирамиды.

❷

В правильной треугольной пирамиде полная поверхность равна $16\sqrt{3}$ дм^2, а площадь вания — 18 дм. Найдите апофему и плоский угол при вершине пирамиды.

3

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 8 см, а боковое ребро образует со стороной большего основания угол 60°. Найдите боковую поверхность усеченной пирамиды. Во сколько раз она меньше боковой поверхности полной пирамиды, из которой получена данная усеченная пирамида?

основания — $4\sqrt{3}$ дм^2. Найдите боковое ребро и плоский угол при вершине пирамиды.

3

Сторона меньшего основания правильной треугольной усеченной пирамиды равна 2 см, а боковое ребро пирамиды, равное $\sqrt{2}$ см, образует со стороной большего основания угол 45°. Найдите боковую поверхность усеченной пирамиды. Какую часть она составляет от боковой поверхности полной пирамиды, из которой получена данная усеченная пирамида?

Вариант Б1

1

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно d и наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите:

а) высоту пирамиды;
б) апофему пирамиды;
в) боковую поверхность пирамиды.

2

В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна $16\sqrt{3}$ см^2, а плоский угол при вершине — 60°. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды.

Вариант Б2

1

В правильной треугольной пирамиде апофема равна l, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите:

а) высоту пирамиды;
б) боковое ребро пирамиды;
в) боковую поверхность пирамиды.

2

В правильной четырехугольной пирамиде площадь основания равна 32 см^2, а площадь диагонального сечения равна 16 см^2. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

3

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 6 см, а боковая грань образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найдите боковую поверхность данной пирамиды и высоту полной пирамиды, из которой получена данная усеченная пирамида.

3

Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 8 см, а боковое ребро пирамиды образует с плоскостью большего основания угол 45°. Найдите высоту данной пирамиды и боковую поверхность полной пирамиды, из которой получена данная усеченная пирамида.

Вариант В1

1

В правильной треугольной пирамиде высота равна h, а плоский угол при вершине — α. Найдите:

а) апофему пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды.

2

Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью S. Найдите боковую поверхность пирамиды.

3

Площадь одного из оснований усеченной пирамиды в 4 раза

Вариант В2

1

В правильной треугольной пирамиде апофема равна l, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите:

а) сторону основания пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды.

2

Наименьшее осевое сечение правильной четырехугольной пирамиды — правильный треугольник с площадью Q. Найдите боковую поверхность пирамиды.

3

Разность площадей оснований усеченной пирамиды равна больше площади второго основания. Боковая поверхность пирамиды равна 36 см^2, а все двугранные углы при большем основании пирамиды равны 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

18 см^2. Все двугранные углы при меньшем основании пирамиды равны 120°. Найдите полную поверхность пирамиды, если площадь ее меньшего основания в 3 раза меньше площади боковой поверхности.

СП-10. ПИРАМИДЫ, В КОТОРЫХ ОСНОВАНИЕ ВЫСОТЫ ЯВЛЯЕТСЯ ЦЕНТРОМ ОПИСАННОЙ ИЛИ ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ ОСНОВАНИЯ ПИРАМИДЫ

Вариант А1

1

Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны 13 см.

а) Опишите построение высоты пирамиды SO.

б) Докажите равенство отрезков AO, BO, CO и DO.

в) Обоснуйте положение точки O в прямоугольнике $ABCD$ и найдите длину высоты SO.

Вариант А2

1

Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами 12 см и 16 см. Высота пирамиды SO равна 24 см и образует одинаковые углы со всеми боковыми ребрами.

а) Докажите равенство треугольников ASO, BSO, CSO и DSO.

б) Обоснуйте положение точки O в прямоугольнике $ABCD$.

в) Обоснуйте равенство боковых ребер пирамиды и найдите их длины.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при основании α и боковой стороной b. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

а) Опишите построение высоты пирамиды, высот боковых граней и их проекций на плоскость основания. Обоснуйте двугранные углы при основании пирамиды.

б) Обоснуйте положение основания высоты пирамиды в данном равнобедренном треугольнике.

в) Найдите высоту пирамиды.

Вариант Б1

❶

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β.

а) Обоснуйте положение основания высоты пирамиды в данном равнобедренном треугольнике.

б) Определите, при каких значениях α высота пирамиды будет находиться вне пирамиды.

в) Найдите высоту пирамиды.

❷

Основание пирамиды — ромб с большей диагональю d и ост-

Вариант Б2

❶

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные β.

а) Обоснуйте положение основания высоты пирамиды в данном равнобедренном треугольнике.

б) Определите, при каких значениях α высота пирамиды будет находиться внутри нее.

в) Найдите высоту пирамиды.

❷

Основание пирамиды — ромб с меньшей диагональю l и турым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ.

пым углом β. Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ.

а) Обоснуйте данные двугранные углы и положение основания высоты пирамиды в ромбе.

б) Найдите высоту пирамиды.

в) Двумя способами — путем вычисления площадей боковых граней и с помощью теоремы об ортогональной проекции многоугольника — найдите боковую поверхность пирамиды. Сравните полученные результаты.

Вариант В1

1

Основание пирамиды — треугольник с углами α и β. Точка высоты пирамиды, удаленная от плоскости основания на расстояние d, равноудалена от концов бокового ребра. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ.

Вариант В2

1

Основание пирамиды — треугольник с углами α и β. Точка высоты пирамиды, отстоящая от вершины на расстоянии b, равноудалена от бокового ребра и плоскости основания. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные γ.

а) Обоснуйте положение основания высоты пирамиды.

б) При каких условиях высота пирамиды лежит

внутри пирамиды?

вне пирамиды?

в) Найдите высоту пирамиды.

г) Найдите площадь основания пирамиды.

❷

В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция с острым углом α. Высота пирамиды равна H, а все двугранные углы при основании равны β.

❷

В основании пирамиды лежит прямоугольная трапеция с острым углом α. Высота пирамиды равна H, а все двугранные углы при основании равны β.

а) Обоснуйте положение основания высоты пирамиды.

б) Найдите высоту трапеции, лежащей в основании пирамиды.

в) Не вычисляя площадей боковых граней, найдите боковую поверхность пирамиды.

СП-11. ПИРАМИДЫ, В КОТОРЫХ ОДНА ИЛИ ДВЕ БОКОВЫЕ ГРАНИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ ПЛОСКОСТИ ОСНОВАНИЯ

Вариант А1

❶

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине α. Боковые грани пирамиды, содержащие стороны данного угла, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β.

Вариант А2

❶

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Боковые грани пирамиды, содержащие боковые стороны треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Обоснуйте угол β.

в) Найдите площадь третьей боковой грани.

г) Найдите боковую поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом β.

❷

Основание пирамиды — правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом β. Высота пирамиды равна H.

а) Из вершины пирамиды в плоскости грани, перпендикулярной основанию, проведите перпендикуляр к ребру основания и обоснуйте, почему он будет высотой пирамиды.

б) Обоснуйте углы наклона, равные β.

в) Докажите, что основание высоты пирамиды равноудалено от двух сторон правильного треугольника, и обоснуйте положение основания высоты на стороне правильного треугольника.

г) Найдите боковую поверхность пирамиды.

Вариант Б1

❶

Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом β.

Вариант Б2

❶

Основание пирамиды — квадрат. Две боковые грани, содержащие соседние стороны квадрата, перпендикулярны плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом β. Высота пирамиды равна H.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Обоснуйте углы, равные β.

в) Докажите, что боковые грани пирамиды попарно равны.

г) Найдите боковую поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Боковая грань, содержащая катет, противолежащий данному углу, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Боковая грань, содержащая данный катет, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Обоснуйте положение основания высоты пирамиды.

в) Найдите высоту пирамиды.

г) Найдите боковую поверхность пирамиды.

Вариант В1

❶

Основание пирамиды — ромб с тупым углом α. Две боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом β. Высота пирамиды равна H.

Вариант В2

❶

Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом β.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Обоснуйте углы, равные β.

в) Найдите боковую поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольная трапеция с острым углом α и прилежащей к нему боковой стороной a. Боковая грань, содержащая большее основание трапеции, перпендикулярна плоскости основания, а три другие грани наклонены к ней под углом β.

❷

Основание пирамиды — равнобокая трапеция с большим основанием a и острым углом α. Боковая грань, содержащая большее основание трапеции, перпендикулярна плоскости основания, а три другие грани наклонены к ней под углом β.

а) Обоснуйте положение высоты пирамиды.

б) Обоснуйте положение основания высоты пирамиды.

в) Найдите площадь основания пирамиды.

г) Найдите боковую поверхность пирамиды.

СП-12. ПИРАМИДЫ, В КОТОРЫХ ЗАДАНЫ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ И ЭЛЕМЕНТАМИ ПИРАМИДЫ

Вариант А1

❶

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Расстояние от середины высоты пирамиды до середины бокового ребра равно d.

Вариант А2

❶

В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с высотой угол α. Расстояние от середины высоты пирамиды до середины бокового ребра равно d.

а) Найдите высоту пирамиды.

б) Найдите площадь основания пирамиды.

2

В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Расстояние от середины высоты пирамиды до ее апофемы равно l. Найдите боковую поверхность пирамиды.

а) Найдите боковое ребро пирамиды.

б) Найдите площадь основания пирамиды.

2

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Расстояние от основания высоты пирамиды до ее апофемы равно l. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Вариант Б1

1

В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Расстояние от основания высоты пирамиды до середины апофемы равно l. Найдите полную поверхность пирамиды.

2

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Биссектриса этого угла пересекает высоту пирамиды в точке, удаленной от бокового ребра на расстояние d.

а) Найдите высоту пирамиды.

Вариант Б2

1

В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен β. Расстояние от основания высоты пирамиды до середины бокового ребра равно l. Найдите полную поверхность пирамиды.

2

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Все боковые ребра образуют с высотой пирамиды углы, равные β. Перпендикуляр, проведенный через середину бокового ребра, пересекает высоту пирамиды в точке, находящейся на расстоянии d от вершины основания.

а) Найдите высоту пирамиды.

б) Найдите площадь основания пирамиды.

Вариант В1

1

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при основании α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Отрезок, соединяющий точки пересечения медиан боковых граней, содержащих боковые стороны треугольника, равен m. Найдите боковую поверхность пирамиды.

2

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β. Расстояние от основания высоты пирамиды до этой грани равно l. Найдите боковую поверхность пирамиды.

б) Найдите площадь основания пирамиды.

Вариант В2

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Отрезок, соединяющий точки пересечения медиан боковых граней, содержащих стороны угла α, равен m. Найдите боковую поверхность пирамиды.

2

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при вершине α. Боковые грани пирамиды, содержащие боковые стороны треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β. Расстояние от основания высоты пирамиды до этой грани равно l. Найдите боковую поверхность пирамиды.

СП-13. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Вариант А1

1

Найдите высоту правильного тетраэдра с ребром a.

2

Найдите сумму плоских углов додекаэдра, имеющих общую вершину.

3

Полная поверхность октаэдра равна $8\sqrt{3}$ см^2. Найдите длину ребра октаэдра.

4

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ центр верхнего основания O соединен с вершинами A, B, C и D нижнего основания. Докажите, что $OABCD$ — правильная четырехугольная пирамида.

Вариант А2

1

Найдите площадь грани куба с диагональю d.

2

Найдите сумму плоских углов октаэдра, имеющих общую вершину.

3

Ребро икосаэдра равно 2 см. Найдите полную поверхность икосаэдра.

4

Точки A_1, B_1 и C_1 — середины боковых ребер правильного тетраэдра, точка O — центр его основания. Докажите, что $OA_1B_1C_1$ — правильный тетраэдр.

Вариант Б1

1

Ребро октаэдра равно a. Найдите расстояние между двумя противолежащими вершинами октаэдра.

2

Найдите угол между диагоналями боковых граней куба,

Вариант Б2

1

Ребро октаэдра равно a. Найдите расстояние от вершины октаэдра до плоскости, содержащей четыре соседних с ней вершины.

2

Отрезок соединяет середины двух скрещивающихся ребер выходящими из одной вершины.

правильного тетраэдра. Какой угол он образует с каждым из них?

❸

Полная поверхность правильного тетраэдра с ребром a равновелика полной поверхности икосаэдра. Найдите ребро икосаэдра.

❸

Полная поверхность октаэдра с ребром a равновелика полной поверхности правильного тетраэдра. Найдите ребро тетраэдра.

❹

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 отрезки AB_1, B_1D_1 и D_1A — диагонали граней. Докажите, что

$A_1B_1D_1A$ — правильная треугольная пирамида, и найдите ее высоту.

CB_1D_1A — правильный тетраэдр, и найдите его полную поверхность.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите сумму плоских углов при всех вершинах

додекаэдра.

икосаэдра.

❷

Найдите двугранные углы

октаэдра.

правильного тетраэдра.

❸

Диагональ куба равна d. Найдите площади сечений куба плоскостями его симметрии.

❸

Ребро октаэдра равно a. Найдите площади сечений октаэдра плоскостями его симметрии.

4

Докажите, что высоты правильного тетраэдра точкой пересечения делятся в отношении 3 : 1, считая от вершины.

4

Точка O_1 — середина высоты SO правильного тетраэдра $SABC$. Докажите, что плоские углы трехгранного угла O_1ABC — прямые.

СП-14*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ПИРАМИДАХ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Основание пирамиды — правильный треугольник. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Обоснуйте положение высоты пирамиды в случае, когда пирамида не является правильной.

Вариант 2

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Обоснуйте положение высоты пирамиды в случае, когда основание высоты не лежит на пересечении биссектрис данного треугольника.

Как нужно изменить в условии определение угла α, чтобы высота пирамиды находилась внутри нее?

2

Используя метод развертки многогранника докажите, что

Вариант 1: если суммы плоских углов при всех вершинах треугольной пирамиды равны 180°, то все грани пирамиды — равные треугольники.

Вариант 2: если суммы плоских углов при всех вершинах треугольной пирамиды равны 180°, то скрещивающиеся ребра пирамиды попарно равны.

❸

Боковая грань и диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды равновелики. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

❸

Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен $45°$. Найдите двугранный угол между смежными боковыми гранями.

❹

Какую наибольшую полную поверхность может иметь треугольная пирамида, у которой пять ребер равны a?

❹

Какую наибольшую боковую поверхность может иметь треугольная пирамида, у которой все боковые ребра равны a?

❺

Найдите площадь сечения

правильной треугольной | правильной четырехугольной

пирамиды, проходящего через середину ее высоты параллельно боковой грани, если площадь боковой грани равна Q.

❻.

Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 см и 12 см. Расстояние от вершины меньшего основания до противолежащей стороны большего основания пирамиды равно 9 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

❻

Периметры оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 18 см и 36 см. Расстояние от вершины большего основания до противолежащей стороны меньшего основания пирамиды равно $2\sqrt{19}$ см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

КП-2. ПИРАМИДА. ПОВЕРХНОСТЬ ПИРАМИДЫ

Вариант А1

1

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а апофема образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите:
а) высоту пирамиды;

б) боковую поверхность пирамиды.

2

Основание пирамиды — правильный треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом α. Высота пирамиды равна H. Найдите полную поверхность пирамиды.

3

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны. Боковая поверхность пирамиды равна S. Найдите площадь основания пирамиды.

Вариант А2

1

Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а ее апофема образует с высотой угол 45°. Найдите:

а) площадь основания пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды.

2

Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом α. Найдите полную поверхность пирамиды.

3

Боковые ребра треугольной пирамиды равны, а плоские углы при ее вершине — прямые. Площадь основания пирамиды равна Q. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Вариант Б1

1

В правильной треугольной пирамиде боковая грань накло-

Вариант Б2

1

Двугранный угол при основании правильной треугольной

нена к плоскости основания под углом α. Расстояние от основания высоты пирамиды до ее апофемы равно l. Найдите:
а) апофему пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

❸

Основание пирамиды — квадрат с периметром 16 см. Две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания. Площадь меньшего диагонального сечения пирамиды вдвое меньше площади основания. Найдите площадь большего диагонального сечения.

Вариант В1

❶

В правильной треугольной пирамиде отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой апофемы, равен m и образует с плоскостью осно-

пирамиды равен β. Отрезок, соединяющий середину высоты пирамиды с серединой апофемы, равен m. Найдите:
а) апофему пирамиды;
б) боковую поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной 5 см и основанием 6 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

❸

Основание пирамиды — квадрат с периметром $8\sqrt{2}$ см. Две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания. Площадь большего диагонального сечения равна $4\sqrt{2}$ см^2. Найдите площадь меньшего диагонального сечения.

Вариант В2

❶

В правильной треугольной пирамиде отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой апофемы, равен m и образует с высотой пирамивания угол α. Найдите полную поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при основании α и радиусом вписанной окружности r. Две неравные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом β. Найдите боковую поверхность пирамиды.

❸

Площадь основания пирамиды равна 72 дм^2. Два сечения, параллельные основанию пирамиды, имеют площади 32 дм^2 и 50 дм^2 и отстоят друг от друга на 2 см. Найдите высоту пирамиды.

ды угол β. Найдите полную поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при вершине α и радиусом описанной окружности R. Две неравные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом β. Найдите боковую поверхность пирамиды.

❸

Площадь основания пирамиды равна 108 дм^2, а ее высота — 24 дм. Сечения пирамиды, параллельные плоскости основания, имеют площади 48 дм^2 и 75 дм^2. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

СП-15. ЦИЛИНДР. СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА

Вариант А1

1

Длина окружности основания цилиндра равна 8π см, а диагональ осевого сечения — 17 см. Найдите образующую цилиндра.

2

Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 60°. Радиус цилиндра равен 6 см. Найдите площадь полученного сечения, если высота цилиндра равна 5 см.

3

Разверткой боковой поверхности цилиндра является квадрат площадью 100π см^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Вариант А2

1

Площадь основания цилиндра равна 25π см^2, а длина образующей — 24 см. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.

2

Параллельно оси цилиндра на расстоянии 2 см от нее проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 90°. Найдите площадь полученного сечения, если высота цилиндра равна 6 см.

3

Боковую поверхность равностороннего цилиндра (осевое сечение — квадрат) с высотой 4 см разрезали по образующей. Найдите площадь полученной развертки.

Вариант Б1

1

Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего

Вариант Б2

1

Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с серединой радиуса нижнего основания, равен 6 см и образует с плоскостью нижнего основания угол 60°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

❷

Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Угол между диагональю полученного сечения и образующей цилиндра равен β. Найдите площадь сечения, если радиус цилиндра равен R.

❸

Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых равны 10 см^2 и 24 см^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

основания, равен 12 см и образует с осью цилиндра угол 30°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

❷

Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, пересекающая нижнее основание по хорде, стягивающей дугу α. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с концом этой хорды, равен l и образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь сечения.

❸

Осевое сечение цилиндра имеет площадь 15 см^2. Через одну из образующих этого сечения проведено еще одно сечение цилиндра площадью 9 см^2. Найдите площадь сечения, проходящего через другие образующие данных сечений.

Вариант В1

❶

Отрезок, соединяющий точки окружностей верхнего и нижнего оснований цилиндра, равен 12 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Прямая, на которой лежит данный отрезок, удалена от оси цилиндра на 4 см.

Вариант В2

❶

Отрезок, соединяющий точки окружностей верхнего и нижнего оснований цилиндра, лежит на прямой, удаленной от оси цилиндра на 2 см и образующей с плоскостью основания угол 60°. Проекция данного отрезка на плоскость основания равна

Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

$4\sqrt{3}$ см. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

❷

Параллельно оси цилиндра проведено сечение, пересекающее основание по хорде, которая видна из центра этого основания под углом α, а из центра другого основания — под углом β. Высота цилиндра равна H. Найдите площадь сечения.

❷

Параллельно оси цилиндра проведено сечение, пересекающее основание по хорде, которая видна из центра этого основания под углом α, а из центра другого основания — под углом β. Образующая цилиндра равна l. Найдите площадь осевого сечения.

❸

Два сечения, параллельные оси цилиндра, пересекаются внутри него. Одно из сечений делится прямой пересечения на равные по площади части. Найдите площадь этого сечения, если второе сечение прямой пересечения делится на прямоугольники площадью 4 см^2 и 16 см^2.

❸

Два сечения, параллельные оси цилиндра, пересекаются внутри него. Одно из сечений делится прямой пересечения на два равных прямоугольника площадью 6 см^2. Найдите площадь второго сечения, если прямая пересечения делит его площадь в отношении 1 : 4.

СП-16. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОМБИНАЦИЯ «ЦИЛИНДР — ПРИЗМА»

Вариант А1

Вариант А2

❶

В основании прямого параллелепипеда лежит

ромб, не являющийся квадратом.

прямоугольник, не являющийся квадратом.

Может ли данный параллелепипед быть

а) вписанным в цилиндр?

б) описанным около цилиндра?

Ответы объясните.

❷

Около цилиндра с радиусом R и высотой H описана правильная треугольная призма. Найдите боковую поверхность призмы.

❷

В цилиндр с радиусом R и высотой H вписана правильная треугольная призма. Найдите боковую поверхность призмы.

❸

Основание прямой призмы — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, описанного около призмы.

❸

Основание прямой призмы — квадрат с диагональю $4\sqrt{2}$ см. Полная поверхность призмы равна 112 см^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в данную призму.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Основание прямой призмы — четырехугольник *ABCD*, в котором

Б1: $\angle A = 108°$, $\angle B = 65°$, $\angle C = 72°$, $\angle D = 115°$.

Б2: $AB = 12$ см, $BC = 6$ см, $CD = 8$ см, $AD = 10$ см.

Может ли данная призма быть

Б1: вписанной в цилиндр?

Б2: описанной около цилиндра?

Ответ объясните.

❷

В цилиндр с радиусом 5 см и площадью осевого сечения

❷

В цилиндр с высотой 5 см и площадью осевого сечения

40 см^2 вписана треугольная призма. Основание призмы — прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 3 : 4. Найдите полную поверхность призмы.

65 см^2 вписана треугольная призма, основание которой — прямоугольный треугольник с разностью катетов 7 см. Найдите полную поверхность призмы.

3

Основание прямой призмы — ромб с меньшей диагональю d и тупым углом β. Большая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол γ. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в призму.

3

Основание прямой призмы — ромб с большей диагональю d и острым углом α. Меньшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол γ. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в призму.

Вариант В1

Вариант В2

1

Основание прямой призмы — трапеция $ABCD$ ($AD \| BC$), в которой

В1: $AD = 8$ см, $BC = 2$ см.

В2: $AB = 10$ см, $BC = 4$ см.

Найдите неизвестные стороны трапеции, если данная призма является вписанной в цилиндр и описанной около цилиндра.

2 (В1)

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с углом при вершине α. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, образует с плоскостью основания угол β. Найдите боковую поверхность призмы, если радиус цилиндра, описанного около нее, равен R.

2 (В2)

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с углом при основании α. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с плоскостью основания угол β. Найдите боковую поверхность призмы, если радиус цилиндра, описанного около нее, равен R.

3

Основание прямой призмы — ромб с площадью 300 см^2. Боковая поверхность призмы равна 500 см^2, а площадь осевого сечения вписанного цилиндра — 60 см^2. Найдите площадь основания этого цилиндра.

3

Основание прямой призмы — ромб. Площадь основания призмы и ее диагональных сечений соответственно равны 600 см^2, 300 см^2 и 400 см^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в призму.

СП-17. КОНУС. СЕЧЕНИЯ КОНУСА

Вариант А1

1

Радиус основания конуса равен 8 см, а его образующая — 10 см. Найдите:

а) высоту конуса;

б) площадь осевого сечения конуса.

2

Хорда основания конуса равна 6 см и стягивает дугу 90°. Высота конуса равна 4 см. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину конуса и данную хорду.

3

Площади оснований усеченного конуса — π см^2 и 16π см^2, а его образующая равна 5 см. Найдите площадь осевого сечения.

Вариант А2

1

Образующая конуса равна 13 см, а его высота — 12 см. Найдите:

а) радиус основания конуса;

б) площадь осевого сечения конуса.

2

Радиус основания конуса равен 4 см, а его высота — $2\sqrt{6}$ см. Через вершину конуса проведено сечение, пересекающее основание конуса по хорде, стягивающей дугу 60°. Найдите площадь сечения.

3

Длина окружности большего основания усеченного конуса — 16π см. Образующая и высота конуса равны 10 см и 8 см соответственно. Найдите площадь осевого сечения.

Вариант Б1

1

Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно $2\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения — $120°$. Найдите:

а) высоту конуса;

б) площадь осевого сечения.

2

Через вершину конуса с радиусом основания R проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, которая видна из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найдите площадь полученного сечения.

3

Образующая усеченного конуса равна 6 см и наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Диагональ осевого сечения делит этот угол пополам. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Вариант Б2

1

Расстояние от центра основания конуса до середины образующей равно 4 см, а угол наклона образующей к плоскости основания — $60°$. Найдите:

а) высоту конуса;

б) площадь осевого сечения.

2

Сечение конуса, проходящее через его вершину, образует с плоскостью основания угол β и отсекает на окружности основания дугу α. Высота конуса равна H. Найдите площадь сечения.

3

Высота усеченного конуса равна $2\sqrt{3}$ см. Диагональ осевого сечения конуса образует с плоскостью основания угол $30°$ и перпендикулярна образующей. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Вариант В1

1

Периметр осевого сечения конуса равен P, а угол при его вершине — α. Найдите:

а) высоту конуса;

Вариант В2

1

Периметр осевого сечения конуса равен P, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите:

б) площадь осевого сечения.

❷

Через вершину конуса проведено сечение под углом γ к плоскости основания конуса. Расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно d. Найдите площадь данного сечения, если оно отсекает от окружности основания дугу α.

❸

Площадь меньшего основания усеченного конуса — 9π см^2. Отрезок, соединяющий центр большего основания с точкой окружности меньшего основания, равен 5 см и параллелен одной из образующих. Найдите площадь осевого сечения конуса.

а) высоту конуса;

б) площадь осевого сечения.

❷

Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания конуса угол γ. Расстояние от середины высоты конуса до плоскости сечения равно l. Найдите площадь сечения.

❸

Образующая усеченного конуса равна 5 см, а длина окружности большего основания — 12π см. Отрезок, соединяющий центр большего основания с точкой окружности меньшего основания, параллелен одной из образующих. Найдите площадь осевого сечения конуса.

СП-18. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОМБИНАЦИЯ «КОНУС—ПИРАМИДА»

Вариант А1

Вариант А2

❶

Основание пирамиды — разносторонний треугольник. Высота пирамиды проходит через

А1: точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам данного треугольника.

А2: точку пересечения биссектрис данного треугольника.

Определите, может ли данная пирамида быть:

а) вписанной в конус;

б) описанной около конуса.

Ответ объясните.

❷

В конус с радиусом основания R и высотой H вписана правильная треугольная пирамида. Найдите боковую поверхность пирамиды.

❸

Основание пирамиды — ромб с площадью 30 см^2 и периметром 20 см. Высоты всех боковых граней пирамиды, проведенные из ее вершины, наклонены к плоскости ее основания под углом 45°. Найдите площадь осевого сечения конуса, вписанного в пирамиду.

❷

Около конуса с радиусом основания R и высотой H описана правильная треугольная пирамида. Найдите боковую поверхность пирамиды.

❸

Основание пирамиды — прямоугольник, меньшая сторона которого равна 6 см, а угол между диагоналями — 60°. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около пирамиды.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Основание пирамиды — разносторонний треугольник. Известно, что

все боковые ребра пирамиды образуют одинаковые углы с плоскостью основания.

все двугранные углы при основании пирамиды равны.

Определите, может ли данная пирамида быть:

а) вписанной в конус;

б) описанной около конуса.

Ответ объясните.

❷

Высота конуса равна H, а угол при вершине его осевого сечения — α. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в данный конус.

❸

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите площадь осевого сечения конуса, вписанного в пирамиду.

❷

Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, описанной около конуса.

❸

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные β. Найдите площадь осевого сечения конуса, описанного около пирамиды.

Вариант В1 / Вариант В2

❶

Основание пирамиды — разносторонний треугольник. Определите, каким требованиям должны удовлетворять

В1: длины боковых ребер и высот боковых граней пирамиды, проведенных к сторонам основания,

В2: углы наклона боковых ребер к плоскости основания и двугранные углы при основании пирамиды

для того, чтобы данная пирамида могла быть:

а) вписанной в конус;

б) описанной около конуса.

❷ (В1)

В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Боковая поверхность пирами-

❷ (В2)

В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус, осевое сечение которого —

ды равна S. Найдите площадь осевого сечения конуса, если оно является прямоугольным треугольником.

❸

Около пирамиды, основание которой — прямоугольный треугольник, описан конус с образующей, равной l и составляющей с плоскостью основания угол α. Найдите боковую поверхность пирамиды, если два меньших плоских угла трехгранного угла при ее вершине равны β и γ.

правильный треугольник. Найдите площадь этого сечения, если боковая поверхность пирамиды равна S.

❸

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Около пирамиды описан конус, осевое сечение которого имеет площадь S, а угол при его вершине равен α. Найдите боковую поверхность пирамиды, если плоские углы при ее вершине, противолежащие катетам основания, равны β.

СП-19. ШАР. СЕЧЕНИЯ ШАРА. КАСАНИЕ ШАРА С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ

Вариант А1

❶

Радиус шара равен 6 см. Через конец радиуса под углом 60° к нему проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения шара.

❷

Стороны квадрата касаются поверхности шара радиуса 10 см. Расстояние от центра шара до плоскости квадрата равно 8 см. Найдите площадь квадрата.

Вариант А2

❶

Через точку сферы радиуса $4\sqrt{2}$ см проведена плоскость под углом 45° к радиусу сферы с концом в данной точке. Найдите длину окружности полученного сечения.

❷

Вершины квадрата лежат на поверхности шара радиуса 3 см. Расстояние от центра шара до плоскости квадрата равно $\sqrt{7}$ см. Найдите площадь квадрата.

❸

Через точку A, лежащую на сфере диаметром 24 см, к сфере проведена касательная плоскость. В этой плоскости выбрана точка B. Найдите длину отрезка AB, если кратчайшее расстояние от точки B до точки сферы равно 1 см.

❸

Через точку A, лежащую на сфере диаметром 24 см, к сфере проведена касательная плоскость. В этой плоскости выбрана точка B. Найдите длину отрезка AB, если наибольшее расстояние от точки B до точки сферы равно 25 см.

Вариант Б1

❶

На расстоянии $2\sqrt{3}$ см от центра шара проведено сечение шара, площадь которого в 4 раза меньше площади большого круга. Найдите радиус шара.

❷

Вершины равнобедренного треугольника с основанием 12 см и углом при основании 75° лежат на сфере, радиус которой равен 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

❸

Две перпендикулярные плоскости касаются сферы с диаметром 8 см. Найдите расстояние от центра сферы до прямой пересечения плоскостей.

Вариант Б2

❶

На расстоянии $2\sqrt{2}$ см от центра шара проведено сечение, длина окружности которого в 3 раза меньше длины большой окружности. Найдите площадь сечения.

❷

Стороны прямоугольного треугольника с катетами 12 см и 16 см касаются сферы, радиус которой равен 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

❸

Две плоскости, пересекающиеся под углом 60°, касаются сферы. Расстояние между точками касания равно 12 см. Найдите расстояние от центра сферы до прямой пересечения плоскостей.

Вариант В1

1

Радиус шара равен $\sqrt{6}$ см. Через концы трех взаимно перпендикулярных радиусов проведено сечение шара. Найдите площадь сечения.

2

Стороны равнобокой трапеции касаются сферы, диаметр которой равен 10 см. Основания трапеции равны 2 см и 18 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости трапеции.

Вариант В2

1

Радиус шара равен $2\sqrt{3}$ см. Через концы трех радиусов, любые два из которых пересекаются под углом 60°, проведено сечение шара. Найдите площадь сечения.

2

Вершины равнобокой трапеции лежат на сфере, диаметр которой равен 26 см. Диагональ и боковая сторона трапеции взаимно перпендикулярны и равны 8 см и 6 см соответственно. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости трапеции.

3

Две сферы с радиусами 15 см и 20 см пересекаются по окружности, длина которой равна 24π см. Общая касательная плоскость касается данных сфер в точках *A* и *B*. Найдите длину отрезка *AB*, если

В1: центр одной сферы лежит внутри другой.

В2: центр одной сферы не лежит внутри другой.

СП-20*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Дан цилиндр с высотой $\sqrt{2}$ см и радиусом 1 см. Две вершины правильного треугольника лежат на окружности нижнего основания цилиндра, а третья вершина — на окружности верхнего основания. Найдите сторону треугольника.

Вариант 2

1

Дан цилиндр с высотой $\sqrt{14}$ см и радиусом 3 см. Две вершины квадрата лежат на окружности нижнего основания цилиндра, а две другие — на окружности верхнего основания. Найдите площадь квадрата.

2

Дан цилиндр с радиусом основания R.

Вариант 1. Его кладут в щель шириной d так, что ось цилиндра параллельна краям щели. Определите, на сколько цилиндр углубится в щель, если $d < 2R$.

Вариант 2. Его кладут в желоб, имеющий в сечении форму равностороннего треугольника со стороной d, так, что стенки желоба параллельны оси цилиндра. Определите, при каких значениях d цилиндр полностью погрузится в желоб.

3

Через образующую цилиндра проведены осевое сечение и сечение, параллельное оси цилиндра. Угол между плоскостями данных сечений равен α ($0 < \alpha < 90°$).

Вариант 1. Найдите площадь осевого сечения, если второе сечение имеет площадь Q.

Вариант 2. Площадь осевого сечения равна S. Найдите площадь второго сечения.

4

Высота конуса равна H, а угол при вершине осевого сечения равен 2α ($45° < \alpha < 90°$). Найдите площадь наибольшего сечения конуса, проходящего через его вершину.

4

Радиус конуса равен R, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом α ($0° < \alpha < 45°$). Найдите площадь наибольшего сечения конуса, проходящего через его вершину.

5

Угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Развертка боковой поверхности конуса — круговой сектор с центральным углом β.

Выразите α через β.

Выразите β через α.

6

Конус катится по плоскости, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины.

Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите длину линии, которую описывает при вращении середина высоты конуса.

Радиус конуса равен R, а угол при вершине осевого сечения — α. Найдите длину линии, которую описывает при вращении центр основания конуса.

7

Центры оснований усеченного конуса — точки O_1 и O_2. Отрезки, соединяющие середину O_1O_2 с концами образующей конуса, равны 15 см и 20 см. Найдите площадь осевого сечения конуса, если в данный конус можно вписать шар.

7

Центры оснований усеченного конуса — точки O_1 и O_2. Перпендикуляр, проведенный из середины отрезка O_1O_2 к образующей конуса, равен 12 см и делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите площадь осевого сечения конуса, если в данный конус можно вписать шар.

8

Диаметр шара разделен тремя точками на отрезки в отношении 1 : 4 : 3 : 2. Найдите отношение площадей сечений, проведенных через эти точки перпендикулярно данному диаметру.

9

Сфера радиуса 2 см пересечена плоскостью. Радиус сечения равен $\sqrt{3}$ см. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности сферы между двумя диаметрально противоположными точками сечения.

10

Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют площади 400π см^2 и 289π см^2. Общая хорда этих сечений равна 16 см. Найдите радиус шара.

8

Диаметр шара разделен тремя точками на отрезки в отношении 2 : 5 : 4 : 3. Найдите отношение площадей сечений, проведенных через эти точки перпендикулярно данному диаметру.

9

Сфера радиуса 4 см пересечена плоскостью на расстоянии 2 см от центра. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности сферы между концами диаметра сечения.

10

Два взаимно перпендикулярных сечения шара пересекают его поверхность по окружностям, длины которых равны 68π см и 80π см. Радиус шара равен 50 см. Найдите длину общей хорды данных сечений.

КП-3. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Вариант А1

1

Радиус шара равен 17 см. Найдите площадь сечения шара, удаленного от его центра на 15 см.

Вариант А2

1

Радиус сферы равен 15 см. Найдите длину окружности сечения, удаленного от центра сферы на 12 см.

❷

Диаметр основания цилиндра равен 10 см. На расстоянии 3 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси и имеющее форму квадрата. Найдите:

а) площадь данного сечения;

б) площадь осевого сечения.

❸

Высота конуса равна H и составляет с образующей конуса угол α. Найдите:

а) площадь сечения, проведенного через середину высоты конуса параллельно плоскости основания;

б) площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен β.

❷

Радиус основания цилиндра, осевое сечение которого — квадрат, равен 10 см. На расстоянии 8 см от оси цилиндра проведено сечение, параллельное оси. Найдите:

а) площадь осевого сечения;

б) площадь данного сечения.

❸

Хорда основания конуса равна a и видна из центра основания под углом α. Найдите:

а) площадь сечения, проведенного через середину высоты конуса параллельно плоскости основания;

б) площадь осевого сечения конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом β.

Вариант Б1

❶

На поверхности шара выбраны точки A и B так, что $AB = 40$ см, а расстояние от центра шара до прямой AB равно 15 см. Найдите площадь сечения шара, проведенного через точки A и B на расстоянии 7 см от центра шара.

Вариант Б2

❶

На поверхности шара выбраны точки A и B так, что $AB = 40$ см, а расстояние от центра шара до прямой AB равно 15 см. Через точки A и B проведено сечение, площадь которого равна 576π см^2. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения.

❷

Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает основание цилиндра по хорде, которая видна из центра этого основания под углом α. Диагональ образовавшегося сечения наклонена к плоскости основания под углом β. Радиус цилиндра равен R. Найдите:

а) площадь данного сечения;

б) площадь осевого сечения.

❸

Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведено сечение конуса площадью S. Угол между образующей и высотой конуса равен α. Найдите:

а) площадь осевого сечения конуса;

б) площадь осевого сечения усеченного конуса, полученного сечением данного конуса плоскостью, проходящей через середину его высоты.

❷

Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает основание цилиндра по хорде, составляющей с диагональю данного сечения угол β. Радиус основания цилиндра, проведенный в один из концов хорды, образует с плоскостью сечения угол α. Высота цилиндра равна H. Найдите:

а) площадь данного сечения;

б) площадь осевого сечения.

❸

Сечение конуса, проведенное через его вершину, имеет площадь S и пересекает основание по хорде. Образующая конуса, через которую проходит сечение, составляет с данной хордой угол α, а с плоскостью основания — угол β. Найдите:

а) площадь осевого сечения конуса;

б) площадь осевого сечения усеченного конуса, полученного сечением данного конуса плоскостью, проходящей через середину его высоты.

Вариант В1

❶

В шаре проведены два взаимно перпендикулярных сечения. Одно из них проходит

Вариант В2

❶

В шаре проведены два взаимно перпендикулярных сечения. Их общая хорда равна 8 см через центр шара и имеет площадь 36π см^2. В этом сечении общая хорда данных сечений стягивает угол $120°$. Найдите площадь второго сечения.

❷

Плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает его основание по хорде, стягивающей угол α. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь образовавшегося сечения.

❸

Точка высоты конуса, находящаяся на расстоянии d от плоскости основания, равноудалена от концов образующей. Отрезок, соединяющий эту точку с точкой окружности основания, образует с плоскостью основания угол α. Через данную точку высоты конуса проведено сечение, параллельное плоскости основания. Найдите площадь осевого сечения образовавшегося усеченного конуса.

и для одного из сечений является диаметром, а в другом стягивает угол $90°$. Найдите радиус шара.

❷

Сечение цилиндра, параллельное его оси, имеет площадь Q и пересекает основание цилиндра по хорде, стягивающей дугу α. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

❸

Точка высоты конуса равноудалена от образующей и плоскости основания. Отрезок, соединяющий эту точку с точкой окружности основания, равен d и образует с плоскостью основания угол α. Через данную точку высоты конуса проведено сечение, параллельное плоскости основания. Найдите площадь осевого сечения образовавшегося усеченного конуса.

ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

СП-21. ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Вариант А1

1

Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 см и 5 см, а диагональ большей боковой грани равна 13 см. Найдите объем параллелепипеда.

2

Основание прямого параллелепипеда — ромб с периметром 20 см и диагональю 8 см. Высота параллелепипеда равна меньшей диагонали его основания. Найдите объем параллелепипеда.

3

Основание параллелепипеда — прямоугольник с диагональю 8 см и углом между диагоналями 60°. Боковое ребро параллелепипеда равно 10 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант А2

1

Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а диагональ меньшей боковой грани равна 10 см. Найдите объем параллелепипеда.

2

Основание прямого параллелепипеда — ромб с периметром 40 см и диагональю 12 см. Высота параллелепипеда равна большей диагонали его основания. Найдите объем параллелепипеда.

3

Основание параллелепипеда — квадрат с диагональю $8\sqrt{2}$ см. Одна из сторон нижнего основания является проекцией бокового ребра параллелепипеда, составляющего с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант Б1

1

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 6 см и

Вариант Б2

1

Диагональ боковой грани прямоугольного параллелепипе образует с боковыми гранями углы 30° и 45°. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Основание прямого параллелепипеда — ромб с большей диагональю d. Большая диагональ параллелепипеда образует угол α с боковым ребром, а меньшая — угол β с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда.

❸

Основание параллелепипеда — квадрат с площадью 32 см^2, а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания параллелепипеда проектируется в центр нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

да равна $5\sqrt{2}$ см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью этой грани угол 45°, а с плоскостью основания — 30°. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Основание прямого параллелепипеда — ромб. Большая диагональ параллелепипеда равна d и образует с боковым ребром угол α, а меньшая — наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем параллелепипеда.

❸

Основание параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат с диагональю $5\sqrt{2}$ см, а боковое ребро равно 13 см. Проекцией вершины B_1 на плоскость ABC является вершина D. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант В1

❶

Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 6 см^2, 10 см^2 и 15 см^2. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм

Вариант В2

❶

Периметры трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 10 см, 14 см и 16 см. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм со сторонами 15 см и 25 см и диагональю 20 см. Найдите объем параллелепипеда, если его меньшее диагональное сечение — квадрат.

❸

Все грани параллелепипеда — ромбы со стороной a. Острый угол основания равен α, а боковое ребро, исходящее из вершины этого угла, образует со смежными сторонами основания углы, равные β. Найдите объем параллелепипеда.

со сторонами 13 см и 14 см и диагональю 15 см. Найдите объем параллелепипеда, если его сечение, проходящее через боковое ребро и меньшую высоту основания — квадрат.

❸

Основание параллелепипеда — квадрат, все боковые грани — ромбы. Две смежные боковые грани наклонены к плоскости основания параллелепипеда под углом β. Высота параллелепипеда равна H. Найдите объем параллелепипеда.

СП-22. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

Вариант А1

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием 8 см и периметром 18 см. Найдите объем призмы, если две ее боковые грани — квадраты.

❷

Боковое ребро прямой призмы равно 10 см, а ее объем — 300 см^3. Основание призмы — прямоугольный треугольник с катетом 12 см. Найдите боковую поверхность призмы.

Вариант А2

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной 5 см и периметром 18 см. Найдите объем призмы, если одна ее боковая грань — квадрат.

❷

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Объем призмы равен 240 см^3. Найдите боковую поверхность призмы.

❸

Основание наклонной призмы — правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и является ромбом с острым углом α. Найдите объем призмы.

❸

Основание наклонной призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Боковая грань призмы, содержащая гипотенузу основания, — ромб с острым углом α. Найдите объем призмы, если плоскость ромба перпендикулярна плоскости основания.

Вариант Б1

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании α. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

❷

Боковое ребро прямой призмы равно 10 см, а ее объем — 200 см^3. Основание призмы — равнобокая трапеция с основаниями 2 см и 8 см. Найдите полную поверхность призмы.

❸

Основание призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и острым углом 30°. Боковая грань, содержащая катет, противолежащий данному углу, является квадратом и наклонена к плоско-

Вариант Б2

❶

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, образует с плоскостью основания угол β. Найдите объем призмы.

❷

Боковое ребро прямой призмы равно 5 см, а ее объем — 60 см^3. Основание призмы — прямоугольная трапеция с боковыми сторонами 3 см и 5 см. Найдите полную поверхность призмы.

❸

Основание призмы — прямоугольный треугольник с острым углом 60°. Боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу, является квадратом с площадью 36 см^2 и образует с плос сти основания под углом 45°. Найдите объем призмы.

Вариант В1

1

Большая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 12 см и образует с плоскость основания угол 60°. Найдите объем правильной треугольной призмы, вершины которой являются вершинами оснований данной шестиугольной призмы, взятыми через одну.

2

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 25 см. Боковое ребро призмы равно 10 см, а ее объем — 1500 см^3. Найдите боковую поверхность призмы.

3

Основание наклонной призмы — равнобедренный треугольник с основанием a. Боковые грани призмы, содержащие боковые стороны треугольника, пересекаются под углом β. Найдите объем призмы, если ее боковое ребро равно l и равноудалено от концов основания a.

костью основания угол 30°. Найдите объем призмы.

Вариант В2

1

Меньшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна $4\sqrt{3}$ см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем правильной треугольной призмы, вершины которой являются серединами сторон основания данной шестиугольной призмы, взятыми через одну.

2

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с наименьшей высотой, равной 12 см. Боковое ребро призмы равно 5 см, а ее объем — 750 см^3. Найдите боковую поверхность призмы.

3

Основание наклонной призмы — равнобедренный треугольник. Боковые грани призмы, содержащие боковые стороны этого треугольника, пересекаются под углом α, а их общее боковое ребро равно l и удалено от концов основания треугольника на расстояние b. Найдите объем призмы.

СП-23. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Вариант А1

1

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объем пирамиды.

2

Основание пирамиды — прямоугольник с меньшей стороной 5 см и углом между диагоналями $60°$. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите объем пирамиды.

3

Объем треугольной пирамиды равен V. Найдите объем пирамиды, высота которой совпадает с высотой данной пирамиды, а вершины основания — середины сторон треугольника, лежащего в основании данной пирамиды.

Вариант А2

1

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а двугранный угол при основании пирамиды — $60°$. Найдите объем пирамиды.

2

Основание пирамиды — прямоугольник с большей стороной $6\sqrt{3}$ см и углом между диагоналями $120°$. Каждое боковое ребро пирамиды равно 10 см. Найдите объем пирамиды.

3

Объем пирамиды равен V. На высоте пирамиды выбрана точка, делящая высоту в отношении $2 : 1$, считая от основания. Найдите объем пирамиды, основание которой совпадает с основанием данной пирамиды, а вершиной является выбранная точка.

Вариант Б1

1

Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды, .

Вариант Б2

1

Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды, если расстояние от основания высоты до середины апофемы равно d

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом 5 см и противолежащим ему углом 30°. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

❸

Объем треугольной пирамиды $SABC$ с основанием ABC равен V. Точка S_1 — середина высоты пирамиды, BM — медиана треугольника ABC. Найдите объем пирамиды S_1ABM.

если отрезок, соединяющий середину высоты с серединой апофемы, равен d.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом $4\sqrt{3}$ см и прилежащим к нему углом 60°. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные 45°. Найдите объем пирамиды.

❸

Объем треугольной пирамиды $SABC$ с основанием ABC и высотой SO равен V. Точка S — середина отрезка OS_1. MN — средняя линия треугольника ABC, $MN \parallel AB$. Найдите объем пирамиды S_1MNC.

Вариант В1

❶

Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды, если расстояние от вершины ее основания до противолежащей боковой грани равно l.

❷

Основание пирамиды — равнобокая трапеция с острым углом 60°. Диагональ трапеции равна $4\sqrt{3}$ см и перпендикулярна ее боковой стороне.

Вариант В2

❶

Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Найдите объем пирамиды, если расстояние от середины ее высоты до боковой грани равно l.

❷

Основание пирамиды — равнобокая трапеция с большим основанием 16 см. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с данным ос-

Все боковые ребра пирамиды имеют длину 5 см. Найдите ее объем.

❸

Объем треугольной пирамиды $SABC$ с основанием ABC равен V. Точка S_1 — точка высоты пирамиды SO, причем $SS_1 : S_1O = 2 : 3$. Точка M — точка отрезка AB, причем $AM : MB = 3 : 1$. Найдите объем пирамиды S_1AMC.

нованием угол 30°. Все боковые ребра пирамиды равны 10 см. Найдите объем пирамиды.

❸

Дана треугольная пирамида $SABC$ с основанием ABC. Точка S_1 — точка высоты пирамиды SO, причем $SS_1 : S_1O = 1 : 2$. Точка M — точка отрезка AB, причем $AM : MB = 2 : 3$. Объем пирамиды S_1CMB равен V. Найдите объем пирамиды $SABC$.

СП-24. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ-2. РАВНОВЕЛИКИЕ ТЕЛА

Вариант А1

❶

Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. Найдите объем пирамиды.

❷

Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом α. Найдите объем пирамиды.

Вариант А2

❶

Основание пирамиды — треугольник со сторонами 5 см, 12 см и 13 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды углы, равные 45°. Найдите объем пирамиды.

❷

Основание пирамиды — квадрат. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие — наклонены к ней под углом α. Высота пирамиды равна H. Найдите объем пирамиды.

❸

Ребро куба равно a. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды со стороной основания a, если объем пирамиды равен объему куба.

❸

Ребро куба равно h. Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды с высотой h, если объем пирамиды равен объему куба.

Вариант Б1

❶

Основание пирамиды — ромб с периметром 40 см и площадью 60 см^2. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите объем пирамиды.

❷

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Боковая грань пирамиды, содержащая основание треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Найдите объем пирамиды.

❸

Правильный тетраэдр с ребром a и правильная четырехугольная пирамида с высотой $a\sqrt{2}$ имеют равные объемы. Найдите сторону основания четырехугольной пирамиды.

Вариант Б2

❶

Основание пирамиды — ромб с диагоналями 30 см и 40 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды углы, равные 30°. Найдите объем пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α. Боковая грань пирамиды, содержащая второй катет, перпендикулярна плоскости основания, а две другие грани наклонены к ней под углом β. Найдите объем пирамиды.

❸

Правильный тетраэдр с ребром a и правильная треугольная пирамида с высотой $a\sqrt{6}$ имеют равные объемы. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды.

Вариант В1

1

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при основании α. Боковые грани пирамиды, содержащие боковые стороны треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β и удалена от основания высоты пирамиды на расстояние d. Найдите объем пирамиды.

2

Основание пирамиды — квадрат со стороной a. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две смежные с ней боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α.

а) Найдите объем пирамиды.

б) Определите, при каком значении α объем данной пирамиды будет равен объему правильной треугольной пирамиды, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны a.

Вариант В2

1

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Боковые грани, содержащие гипотенузу треугольника и катет, противолежащий данному углу, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом β и удалена от основания высоты пирамиды на расстояние d. Найдите объем пирамиды.

2

Основание пирамиды — квадрат. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания, а две смежные с ней боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Высота пирамиды равна H.

а) Найдите объем пирамиды.

б) Определите, при каком значении α объем данной пирамиды будет равен объему правильной треугольной пирамиды, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны $2H$.

СП-25. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ. ОБЪЕМЫ ПОДОБНЫХ ТЕЛ

Вариант А1

1

Как изменится объем пирамиды, если длины всех ее ребер увеличить в 3 раза?

2

Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, высота которой равна 6 см, а диагонали оснований — $2\sqrt{2}$ см и $4\sqrt{2}$ см.

3

Площади оснований двух подобных пирамид равны 20 см^2 и 45 см^2. Найдите отношение объемов пирамид.

Вариант А2

1

Как изменится объем пирамиды, если длины всех ее ребер уменьшить в 2 раза?

2

Найдите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, высота которой равна 3 см, а радиусы окружностей, описанных около оснований, — $\sqrt{2}$ см и $2\sqrt{2}$ см.

3

Объемы двух подобных пирамид равны 40 см^3 и 135 см^3. Найдите отношение площадей оснований этих пирамид.

Вариант Б1

1

Ребро куба равно диагонали другого куба. Найдите отношение их объемов.

2

В правильной усеченной треугольной пирамиде стороны оснований равны 2 см и 4 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем пирамиды.

Вариант Б2

1

Ребро куба равно диагонали грани другого куба. Найдите отношение их объемов.

2

В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона меньшего основания равна 3 см, а боковое ребро, равное 4 см, образует с высотой угол 60°. Найдите объем пирамиды.

❸

Через середину высоты пирамиды, объем которой равен V, проведена плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды. Найдите объем образовавшейся усеченной пирамиды.

❸

Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная высоте и отсекающая пирамиду, подобную данной, с объемом V. Найдите объем образовавшейся при этом усеченной пирамиды.

Вариант В1

❶

Ребро правильного тетраэдра равно высоте другого правильного тетраэдра. Найдите отношение их объемов.

❷

Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 4 см, а один из углов боковой грани — 120°. Найдите объем пирамиды.

❸

Высота пирамиды, объем которой равен V, разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию пирамиды. Найдите объем усеченной пирамиды, заключенной между этими плоскостями.

Вариант В2

❶

Ребро правильного тетраэдра равно апофеме другого правильного тетраэдра. Найдите отношение их объемов.

❷

Площади оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны $9\sqrt{3}$ см^2 и $36\sqrt{3}$ см^2, а площадь боковой поверхности — $27\sqrt{7}$ см^2. Найдите объем пирамиды.

❸

Две плоскости, параллельные плоскости основания пирамиды, делят ее высоту на три равные части. Объем усеченной пирамиды, заключенной между данными плоскостями, равен V. Найдите объем данной пирамиды.

СП-26*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБЪЕМАХ МНОГОГРАННИКОВ
(домашняя самостоятельная работа)

❶

Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 15 см, 20 см и $\sqrt{337}$ см. Найдите его объем.

❷

Стороны основания прямого параллелепипеда равны 6 см и 10 см, а площади диагональных сечений — 40 см^2 и $20\sqrt{13}$ см^2. Найдите объем параллелепипеда.

❸

Периметры двух граней правильной треугольной призмы равны 30 см и 48 см. Найдите объем призмы.

❹

Объем правильной шестиугольной призмы равен кубу длины меньшей диагонали основания. Найдите угол, который большая диагональ призмы образует с боковым ребром.-

❺

Найдите геометрическое место вершин пирамид с данным объемом, имеющих общее основание.

❶

Расстояния от центра прямоугольного параллелепипеда до его ребер равны $\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{5}$ см и 5 см. Найдите его объем.

❷

Площади боковых граней прямого параллелепипеда равны 60 см^2 и 100 см^2, а диагонали основания — 8 см^2 и $4\sqrt{13}$ см. Найдите объем параллелепипеда.

❸

Площади двух граней правильной треугольной призмы равны $4\sqrt{3}$ см^2 и $16\sqrt{3}$ см^2. Найдите объем призмы.

❹

Основание призмы — квадрат. Произведение длин ребер одного из трехгранных углов вдвое больше объема призмы. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

❺

Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки правильного тетраэдра до всех его граней — постоянная величина.

6

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, а все ее боковые ребра образуют одинаковые углы с высотой пирамиды. Периметры боковых граней пирамиды равны 32 см, 34 см и 36 см. Найдите объем пирамиды.

6

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с периметром 24 см. Все двугранные углы при основании равны 60°. Площади двух меньших боковых граней пирамиды равны 12 см^2 и 16 см^2. Найдите объем пирамиды.

7

Боковые ребра треугольной пирамиды равны a, b и c и попарно перпендикулярны. Найдите объем пирамиды.

7

Площадь одной из боковых граней треугольной пирамиды равна S. Боковое ребро, не принадлежащее этой грани, перпендикулярно ей и равно a. Найдите объем пирамиды.

8

Основание пирамиды — треугольник ABC, в котором $BC = a$, $\angle B = \alpha$. Боковая грань пирамиды, содержащая сторону AB, перпендикулярна плоскости основания и имеет площадь S. Найдите объем пирамиды.

8

Две боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и имеют площади P и Q, а их общее ребро равно b. Найдите объем пирамиды.

КП-4. ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

Вариант А1

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Диагональ боковой грани, содержа-

Вариант А2

1

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник, в котором боковая сторона равна 5 см, а высота, проведенная щей гипотенузу треугольника, равна 13 см. Найдите объем призмы.

❷

Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна l и образует с плоскостью основания пирамиды угол α. Найдите объем пирамиды.

❸

Основание пирамиды — прямоугольник с углом между диагоналями 120°. Все боковые ребра пирамиды равны $3\sqrt{2}$ см и наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

к основанию, — 4 см. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, равна 10 см. Найдите объем призмы.

❷

Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l и наклонено к плоскости основания пирамиды под углом α. Найдите объем пирамиды.

❸

Основание пирамиды — ромб с большей диагональю 12 см и острым углом 60°. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант Б1

❶

Основание прямого параллелепипеда — ромб с периметром 40 см. Одна из диагоналей ромба равна 12 см. Найдите объем параллелепипеда, если его большая диагональ равна 20 см.

❷

В правильной треугольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Расстояние от середины высоты пирамиды до бокового ребра равно d. Найдите объем пирамиды.

Вариант Б2

❶

Основание прямого параллелепипеда — ромб с периметром 40 см. Боковое ребро параллелепипеда равно 9 см, а одна из его диагоналей — 15 см. Найдите объем параллелепипеда.

❷

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите объем пирамиды, если расстояние от середины ее высоты до апофемы равно d.

3

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании β. Все двугранные углы при основании пирамиды равны α. Найдите объем пирамиды.

3

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине β. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

Вариант В1

1

Основание прямого параллелепипеда — ромб, диагонали которого относятся как 5 : 9. Диагонали параллелепипеда равны 26 см и 30 см. Найдите его объем.

2

Боковые грани правильной треугольной пирамиды образуют с ее высотой углы, равные α. Найдите объем пирамиды, если расстояние от середины ее апофемы до высоты равно m.

3

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Две боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом β и имеет площадь S. Найдите объем пирамиды.

Вариант В2

1

Основание прямого параллелепипеда — ромб с диагоналями 10 см и 18 см. Диагонали параллелепипеда относятся как 13 : 15. Найдите объем параллелепипеда.

2

Боковые грани правильной треугольной пирамиды образуют с ее высотой углы, равные α. Расстояние от основания высоты пирамиды до середины ее апофемы равно m. Найдите объем пирамиды.

3

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом при вершине α. Две боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом β и имеет площадь S. Найдите объем пирамиды.

ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

СП-27. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

Вариант А1

1

Высота цилиндра равна 5 см, а диагональ осевого сечения — 13 см. Найдите объем цилиндра.

2

Хорда основания цилиндра равна 16 см и удалена от центра этого основания на 6 см. Отрезок, соединяющий центр другого основания цилиндра с концом данной хорды, образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем цилиндра.

3

Объем цилиндра равен V, а его радиус — R. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Вариант А2

1

Радиус цилиндра равен 4 см, а диагональ осевого сечения — 10 см. Найдите объем цилиндра.

2

Хорда основания цилиндра равна 12 см и удалена от центра этого основания на 8 см. Отрезок, соединяющий центр другого основания цилиндра с серединой данной хорды, образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем цилиндра.

3

Объем цилиндра равен V, а его высота — H. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Вариант Б1

1

Площадь основания цилиндра равна 36π см^2. Диагональ осе--

Вариант Б2

1

Длина окружности основания цилиндра равна 12π см.

вого сечения образует с плоскостью основания цилиндра угол 60°. Найдите объем цилиндра.

❷

Сечение, параллельное оси цилиндра, пересекает его основание по хорде, равной a и стягивающей угол α. Диагональ сечения составляет с образующей цилиндра угол β. Найдите объем цилиндра.

❸

Объем цилиндра равен V, а площадь его основания — S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания цилиндра угол 30°. Найдите объем цилиндра.

❷

Параллельно оси цилиндра проведена плоскость, пересекающая основание цилиндра по хорде, стягивающей угол α. Диагональ полученного сечения равна d и наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем цилиндра.

❸

Объем цилиндра равен V, а площадь осевого сечения — S. Найдите площадь основания цилиндра.

Вариант В1

❶

Периметр осевого сечения цилиндра равен P. Диагональ сечения образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем цилиндра.

❷

Сечение, параллельное оси цилиндра, пересекает его основание по хорде, стягивающей угол α. Диагональ сечения равна d, а угол между диагоналями, противолежа-

Вариант В2

❶

Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Угол между диагональю сечения и образующей цилиндра равен α. Найдите объем цилиндра.

❷

Сечение, параллельное оси цилиндра, пересекает его основание по хорде, стягивающей угол α. Высота цилиндра равна H, а угол между диагоналями сечения, противолещий данной хорде, равен β. Найдите объем цилиндра.

3

Объем цилиндра равен V. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, образует с осью цилиндра угол β. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, описанной около цилиндра.

жащий образующей цилиндра, равен β. Найдите объем цилиндра.

3

Объем цилиндра равен V. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости его основания под углом α. Найдите объем правильной треугольной призмы, вписанной в цилиндр.

СП-28. ОБЪЕМ КОНУСА. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Вариант А1

1

Найдите объем конуса, если его образующая равна 15 см, а диаметр его основания — 18 см.

2

Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом α. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Найдите объем конуса.

3

В усеченном конусе радиус меньшего основания равен 2 см. Высота конуса равна

Вариант А2

1

Найдите объем конуса, если его образующая равна 17 см, а высота — 15 см.

2

Угол между образующей и высотой конуса равен α. Расстояние от середины высоты конуса до его образующей равно d. Найдите объем конуса.

3

Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 5 см. Один из углов осевого сечения

3 см, а его образующая составляет с плоскостью большего основания угол 45°. Найдите объем конуса.

конуса равен 135°. Найдите объем конуса.

Вариант Б1

1

Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см. Найдите объем конуса.

2

Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, имеющее площадь S. Найдите объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом β.

3

Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 4 : 7, а угол между высотой и образующей равен 45°. Найдите объем конуса, если его высота равна 3 см.

Вариант Б2

1

Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник, один из углов которого равен 120°. Найдите объем конуса, если его высота равна $2\sqrt{3}$ см.

2

Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, имеющее площадь S. Найдите объем конуса, если угол между образующей и высотой равен β.

3

Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1 : 3, а его образующая равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем конуса.

Вариант В1

1

Найдите объем конуса, в котором образующая наклонена

Вариант В2

1

Найдите объем конуса, если его осевое сечение — треук плоскости основания под углом α, а периметр осевого сечения равен P.

❷

Плоскость, проходящая через вершину конуса, образует с плоскостью основания конуса угол β. Хорда, по которой данная плоскость пересекает основание конуса, стягивает угол α. Найдите объем конуса, если расстояние от его вершины до данной хорды равно l.

❸

Образующая усеченного конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Диагональ осевого сечения делит этот угол пополам. Найдите объем конуса.

гольник с периметром P и тупым углом α.

❷

Хорда основания конуса видна из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найдите объем конуса, если расстояние от центра его основания до середины образующей равно d.

❸

Диагональ осевого сечения усеченного конуса перпендикулярна его образующей и делит пополам угол при основании сечения. Найдите объем конуса, если радиус большего основания равен 4 см.

СП-29. ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Вариант А1

❶

Площадь сечения шара, проходящего через его центр (большого круга), равна 9π см^2. Найдите объем шара.

Вариант А2

❶

Длина окружности сечения, проходящего через центр шара (большой окружности), равна 8π см. Найдите объем шара.

❷

На расстоянии 4 см от центра шара проведено сечение, длина окружности которого равна 6π см. Найдите объем шара.

❸

Найдите объем шарового сегмента, если радиус шара равен 8 см, а высота сегмента — 3 см.

❷

Сечение шара, удаленное от его центра на 3 см, имеет площадь 16π см^2. Найдите объем шара.

❸

Найдите объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота сектора — 2 см.

Вариант Б1

❶

На поверхности шара выбраны точки A и B, причем $AB = 3\sqrt{2}$ см. Радиус шара, проведенный к точке A, образует с хордой AB угол 45°. Найдите объем шара.

❷

В шаре, объем которого равен 288π см^3, проведено сечение. Отрезок, соединяющий центр шара с точкой окружности данного сечения, образует с плоскостью сечения угол 60°. Найдите площадь сечения.

❸

Радиус шара равен R. Найдите объем шарового сектора, если дуга в его осевом сечении равна 90°.

Вариант Б2

❶

На поверхности шара выбраны точки A и B, причем $AB = 6$ см. Угол между отрезками, соединяющими центр шара с точками A и B, равен 60°. Найдите объем шара.

❷

Объем шара равен $\frac{32}{3}\pi$ см^3. Перпендикуляр, проведенный из центра к плоскости сечения шара, образует угол 45° с радиусом, проведенным в точку окружности сечения. Найдите площадь сечения.

❸

Радиус шара равен R. Найдите объем шарового сегмента, если его диаметр равен радиусу шара.

Вариант В1

1

На поверхности шара с центром в точке O выбраны точки A, B и C так, что $OABC$ — правильный тетраэдр. Найдите объем шара, если точка B удалена от плоскости OAC на $\sqrt{6}$ см.

2

Шар с объемом $\frac{4\pi}{3}$ касается всех сторон равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом при основании α. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Вариант В2

1

На касательной плоскости к шару с центром O выбраны точки A, B и C так, что $OABC$ — правильный тетраэдр с ребром $\sqrt{6}$ см. Найдите объем шара.

2

Вершины прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим к нему острым углом α лежат на поверхности шара, объем которого равен $\frac{4\pi}{3}$. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

3

Радиусы оснований шарового слоя равны 3 см и 4 см, а радиус шара — 5 см. Найдите объем слоя, если плоскости его оснований

В1: лежат по разные стороны от центра шара.

В2: лежат по одну сторону от центра шара.

СП-30. ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Вариант А1

1

Осевое сечение цилиндра — квадрат с периметром 16 см.

Вариант А2

1

Осевое сечение цилиндра — квадрат с площадью 36 см^2.

Найдите полную поверхность цилиндра.

❷

Сечение цилиндра, параллельное его оси, имеет площадь 18 см^2 и отсекает от окружности основания дугу в $60°$. Найдите боковую поверхность цилиндра, если его образующая равна 3 см.

❸

Боковая поверхность цилиндра равна S, а высота — H. Найдите объем цилиндра.

Найдите полную поверхность цилиндра.

❷

Сечение, параллельное оси цилиндра, пересекает его основание по хорде длиной $4\sqrt{2}$ см, стягивающей дугу в $90°$. Площадь сечения равна $24\sqrt{2}$ см^2. Найдите боковую поверхность цилиндра.

❸

Боковая поверхность цилиндра равна S, а радиус — R. Найдите объем цилиндра.

Вариант Б1

❶

Хорда основания цилиндра равна 32 см и удалена от центров его оснований на 12 см и 13 см. Найдите полную поверхность цилиндра.

❷

Сечение цилиндра, параллельное его оси, отсекает четверть дуги окружности основания. Диагональ этого сечения равна d и наклонена к плоскости основания под углом α. Найти боковую поверхность цилиндра.

Вариант Б2

❶

Концы хорды нижнего основания цилиндра удалены от центра верхнего основания на 20 см, а сама хорда удалена от центров оснований на 9 см и 15 см. Найдите полную поверхность цилиндра.

❷

Сечение цилиндра, параллельное его оси и удаленное от нее на расстояние d, отсекает треть дуги окружности основания. Диагональ сечения образует с высотой цилиндра угол α. Найти боковую поверхность цилиндра.

3

Боковая поверхность цилиндра составляет половину его полной поверхности. Найдите объем цилиндра, если диагональ осевого сечения равна $2\sqrt{5}$ см.

3

Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания. Найдите объем цилиндра, если диагональ осевого сечения равна $2\sqrt{17}$ см.

Вариант В1

1

Хорда нижнего основания цилиндра равна высоте цилиндра и удалена от его оси на $2\sqrt{7}$ см. Найдите полную поверхность цилиндра, если расстояния от центра верхнего основания до концов хорды равны $4\sqrt{13}$ см.

2

Сечение цилиндра, перпендикулярное плоскости его основания, имеет площадь S и отсекает от окружности основания дугу α. Найдите боковую поверхность цилиндра.

3

Развертка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник с площадью S, диагональ которого образует с одной из сторон угол α. Найдите объем цилиндра. Сколько решений имеет задача?

Вариант В2

1

Хорда нижнего основания цилиндра удалена от центра верхнего основания на расстояние, равное радиусу цилиндра. Расстояние от данной хорды до оси цилиндра равно 3 см, а от центра верхнего основания до концов хорды — $\sqrt{41}$ см. Найдите полную поверхность цилиндра.

2

В цилиндре с боковой поверхностью S перпендикулярно плоскости основания проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу α. Найдите площадь сечения.

3

Развертка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник с площадью S и углом между диагоналями α. Найдите объем цилиндра. Сколько решений имеет задача?

СП-31. ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА И УСЕЧЕННОГО КОНУСА

Вариант А1

1

Образующая конуса равна 8 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите боковую поверхность конуса.

2

Боковая поверхность конуса равна S, а радиус основания — R. Найдите длину хорды основания, которая видна из вершины конуса под углом α.

3

Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 6 см. Найдите боковую поверхность конуса, если его высота равна 4 см.

Вариант А2

1

Высота конуса равна 3 см и составляет с образующей угол 60°. Найдите боковую поверхность конуса.

2

Боковая поверхность конуса равна S, а образующая — l. Найдите длину хорды основания, которая видна из центра основания под углом α.

3

Радиус большего основания усеченного конуса равен 7 см, а его высота и образующая равны 3 см и 5 см соответственно. Найдите боковую поверхность конуса.

Вариант Б1

1

Высота конуса относится к диаметру его основания как 3 : 8, а образующая имеет длину 10 см. Найдите полную поверхность конуса.

2

Полная поверхность конуса равна 24π см^2. Найдите объем

Вариант Б2

1

Образующая конуса относится к его диаметру как 13 : 10, а высота конуса равна 24 см. Найдите полную поверхность конуса.

2

Боковая поверхность конуса больше площади его основаконуса, если его образующая равна 5 см.

3

Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ($R > r$). Образующая конуса составляет с его высотой угол α. Найдите боковую поверхность конуса.

ния на 4π см^2. Найдите объем конуса, если его образующая равна 5 см, а высота меньше радиуса основания.

3

Образующая усеченного конуса наклонена к плоскости большего основания под углом α. Найдите боковую поверхность конуса, если радиусы его оснований — R и r ($R > r$).

Вариант В1

1

Образующая конуса равна $3\sqrt{2}$ см. Найдите полную поверхность конуса, если на его поверхности можно выделить три взаимно перпендикулярных образующих.

2

Боковая поверхность конуса равна S. Найдите площадь сечения конуса, пересекающего его основание по хорде, которая видна из центра основания конуса под углом α, а из вершины конуса — под углом β.

3

Развертка боковой поверхности конуса — сектор с центральным углом 120°. Найдите объем конуса, если периметр его осевого сечения равен 16 см.

Вариант В2

1

Радиус конуса равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите полную поверхность конуса, если на его поверхности можно выделить три взаимно перпендикулярных образующих.

2

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь сечения конуса, проходящего через две образующие, угол между которыми равен β, если боковая поверхность конуса равна S.

3

Развертка боковой поверхности конуса — полукруг. Площадь осевого сечения конуса равна $9\sqrt{3}$ см^2. Найдите объем конуса.

СП-32. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

Вариант А1

1

Объем шара равен 36π см^3. Найдите площадь его поверхности.

2

На расстоянии 12 дм от центра сферы проведено сечение, пересекающее сферу по окружности, длина которой равна 10π дм. Найдите площадь сферы.

3

Диаметр сферы равен 8 см. Плоскость, перпендикулярная диаметру, делит его в отношении $1:3$. Найдите площадь меньшего из образовавшихся сферических сегментов.

Вариант А2

1

Найдите площадь поверхности шара, объем которого равен 288π см^3.

2

Сечение шара имеет площадь 64π дм^2 и удалено от центра шара на 6 дм. Найдите площадь поверхности шара.

3

Радиус сферы равен 3 см. Плоскость, перпендикулярная диаметру сферы, делит этот диаметр в отношении $2:1$. Найдите площадь большего из образовавшихся сферических сегментов.

Вариант Б1

1

Вершины равностороннего треугольника с периметром $9\sqrt{3}$ дм лежат на поверхности сферы, а плоскость треугольника проходит через ее центр. Найдите площадь сферы.

Вариант Б2

1

Стороны равностороннего треугольника с площадью $12\sqrt{3}$ дм^2 касаются сферы, а плоскость треугольника проходит через ее центр. Найдите площадь сферы.

2

Площади поверхностей двух шаров относятся как 9 : 16. Найдите отношение их объемов.

3

На расстоянии 6 см от центра шара проведено сечение площадью 64π см^2. Найдите площадь большего из образовавшихся сферических сегментов.

2

Объемы двух шаров относятся как 8 : 27. Найдите отношение площадей их поверхностей.

3

На расстоянии 8 см от центра сферы проведена плоскость, пересекающая сферу по окружности длиной 30π см. Найдите площадь меньшего из образовавшихся сферических сегментов.

Вариант В1

1

Отрезки OA и OB — взаимно перпендикулярные радиусы сферы. Найдите площадь сферы, если кратчайшее расстояние по ее поверхности между точками A и B равно 2π дм.

2

Сечение разделило сферу радиуса 6 см на части, площади которых относятся как 1 : 2. Найдите площадь сечения.

3

Радиус шара равен 3 см. Какая часть поверхности шара освещается точечным источником света, удаленным от центра шара на 5 см?

Вариант В2

1

На поверхности сферы с центром O выбраны точки A и B так, что треугольник AOB — равносторонний. Кратчайшее расстояние по поверхности сферы между точками A и B равно π дм. Найдите площадь сферы.

2

Сечение разделило сферу на части, площади которых равны 24π см^2 и 12π см^2. Найдите площадь сечения.

3

Радиус шара равен 6 см. На каком расстоянии от поверхности шара находится точечный источник света, освещающий треть поверхности шара?

СП-33. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР

Вариант А1

1

Прямоугольник с периметром 16 см и площадью 15 см^2 вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

2

Равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании α вращается вокруг основания. Найдите объем тела вращения.

3

Прямоугольная трапеция с основаниями 2 см и 5 см и меньшей боковой стороной 4 см вращается вокруг большего основания. Найдите полную поверхность тела вращения.

Вариант А2

1

Прямоугольник с диагональю 10 см, стороны которого относятся как 3 : 4, вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

2

Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине β вращается вокруг основания. Найдите объем тела вращения.

3

Равнобокая трапеция с основаниями 4 см и 10 см и высотой 4 см вращается вокруг большего основания. Найдите полную поверхность тела вращения.

Вариант Б1

1

Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности и объем тела вращения.

2

Треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см враща-

Вариант Б2

1

Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим острым углом α вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности и объем тела вращения.

2

Треугольник со сторонами 11 см, 25 см и 30 см вращается

ется вокруг средней стороны. Найдите объем тела вращения.

❸

Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг одной из сторон. Найдите полную поверхность тела вращения.

вокруг меньшей стороны. Найдите объем тела вращения.

❸

Ромб со стороной b и тупым углом β вращается вокруг одной из сторон. Найдите полную поверхность тела вращения.

Вариант В1

❶

Параллелограмм, площадь которого равна 18 см^2, вращается вокруг стороны, равной 6 см. Найдите объем тела вращения.

❷

Равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании α вращается вокруг прямой, которая лежит в плоскости треугольника и проходит через вершину угла α перпендикулярно боковой стороне треугольника. Найдите площадь поверхности и объем тела вращения.

❸

Круговой сектор с центральным углом 60° вращается вокруг радиуса R, образующего этот угол. Найдите полную поверхность тела вращения.

Вариант В2

❶

Ромб с площадью 18 см^2 и острым углом 30° вращается вокруг стороны. Найдите объем тела вращения.

❷

Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине β вращается вокруг прямой, проходящей через вершину угла при основании перпендикулярно основанию треугольника и лежащей в плоскости треугольника. Найдите площадь поверхности и объем тела вращения.

❸

Круговой сектор радиуса R с длиной дуги $\frac{\pi R}{2}$ вращается вокруг радиуса, образующего его центральный угол. Найдите полную поверхность тела вращения.

СП-34*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБЪЕМАХ И ПОВЕРХНОСТЯХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых равны 16 см^2 и 30 см^2. Найдите боковую поверхность цилиндра.

2

Два цилиндра имеют равные объемы. Длины высот данных цилиндров относятся как 4 : 9. Найдите отношение площадей боковых поверхностей данных цилиндров.

3

Определите наибольший объем, который может иметь конус с образующей, равной l.

Вариант 2

1

Через образующую цилиндра проведены два сечения, имеющие равные площади $4\sqrt{3}$ см^2. Угол между плоскостями сечений равен 60°. Найдите боковую поверхность цилиндра.

2

Два цилиндра, радиусы которых относятся как 2 : 3, имеют равные объемы. Найдите отношение площадей боковых поверхностей данных цилиндров.

3

Определите наибольший объем, который может иметь цилиндр с диагональю осевого сечения d.

4

Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из обеих частей круга как из разверток боковой поверхности свернуты конусы. Найдите отношение объемов конусов, если

Вариант 1: $\alpha = 90°$.

Вариант 2: $\alpha = 120°$.

5

Вариант 1: Два шара радиуса R расположены так, что центр одного

Вариант 2: Два шара радиуса R расположены так, что центр одного из из них лежит на поверхности другого. Найдите объем общей части данных шаров.

них лежит на поверхности другого. Найдите площадь поверхности образовавшегося тела.

КП-5. ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Вариант А1

1

На расстоянии 4 см от центра шара проведено сечение, диаметр которого равен $4\sqrt{5}$ см. Найдите площадь поверхности и объем шара.

2

Хорда нижнего основания цилиндра равна a и видна из центра этого основания под углом α. Найдите объем цилиндра, если отрезок, соединяющий центр верхнего основания с одним из концов данной хорды, образует с плоскостью основания угол β.

3

Прямоугольный треугольник с катетом 3 см и противолежащим ему углом 30° вращается вокруг данного катета. Найдите полную поверхность тела вращения.

Вариант А2

1

Диаметр сечения шара, удаленного от центра шара на $\sqrt{5}$ см, равен 4 см. Найдите площадь поверхности и объем шара.

2

Хорда нижнего основания цилиндра равна a и видна из центра этого основания под углом α. Найдите боковую поверхность цилиндра, если отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой данной хорды, образует с плоскостью основания угол β.

3

Прямоугольный треугольник с катетом $2\sqrt{3}$ см и прилежащим к нему углом 60° вращается вокруг второго катета. Найдите объем тела вращения.

Вариант Б1

1

Через конец радиуса шара под углом 60° к радиусу проведено сечение шара, имеющее площадь 16π см^2. Найдите площадь поверхности и объем шара.

2

Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, пересекающее основание конуса по хорде длиной a. Найдите объем конуса, если угол между его образующей и высотой равен β.

3

Прямоугольная трапеция с основаниями a и b ($a < b$) и острым углом α вращается вокруг большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант Б2

1

Через конец радиуса шара проведено сечение, составляющее с данным радиусом угол 45°. Данное сечение пересекает поверхность шара по окружности длиной $8\sqrt{2}\,\pi$ см. Найдите площадь поверхности и объем шара.

2

Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом β. Хорда основания конуса, равная a, видна из его вершины под углом α. Найдите полную поверхность конуса.

3

Равнобокая трапеция с основаниями a и b ($a < b$) и острым углом α вращается вокруг большего основания. Найдите объем тела вращения.

Вариант В1

1

Из точки A, лежащей на поверхности шара, проведены три равные хорды AB, AC и AD. Все хорды имеют длину 3 см, а угол между любыми двумя хордами равен 60°. Найдите площадь поверхности и объем

Вариант В2

1

В шаре каждая из трех взаимно перпендикулярных хорд AB, AC и AD имеет длину $3\sqrt{2}$ см. Расстояние от центра шара до плоскости BCD равно 2 см. Найдите площадь поверхности и объем шара.

шара, если плоскость BCD удалена от центра шара на 1 см.

❷

Точка высоты конуса, удаленная от плоскости основания на расстояние a, равноудалена от концов образующей. Отрезок, соединяющий эту точку с точкой окружности основания, наклонен к плоскости основания под углом β. Найдите боковую поверхность конуса.

❸

Треугольник со стороной c и прилежащими к ней углами α и β вращается вокруг оси, проходящей через вершину третьего угла параллельно данной стороне. Найдите объем тела вращения.

❷

Точка высоты конуса, удаленная на расстояние b от точек окружности основания, равноудалена от плоскости основания и боковой поверхности конуса. Отрезок, соединяющий эту точку с точкой окружности основания, наклонен к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность конуса.

❸

Треугольник со стороной a вращается вокруг прямой, проходящей параллельно данной стороне через вершину противолежащего ей угла треугольника. Найдите объем тела вращения, если две другие стороны треугольника образуют с осью вращения углы α и β.

СП-35. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОМБИНАЦИЯ «ШАР—ЦИЛИНДР»

Вариант А1

❶

В цилиндр вписан шар радиуса R. Найдите объем цилиндра.

Вариант А2

❶

В цилиндр радиуса R вписан шар. Найдите боковую поверхность цилиндра.

2

Около цилиндра описан шар. Отрезок, соединяющий центр этого шара с точкой окружности основания цилиндра, образует с плоскостью основания цилиндра угол 45°. Найдите объем шара, если радиус цилиндра равен $3\sqrt{2}$ см.

2

Около цилиндра с высотой 6 см описан шар. Отрезок, соединяющий центр этого шара с точкой окружности основания цилиндра, образует с осью цилиндра угол 60°. Найдите площадь поверхности шара.

3

В цилиндр вписан шар, и около него описан шар.

Объем вписанного шара равен 36π дм^3. Найдите площадь поверхности описанного шара.

Площадь поверхности вписанного шара равен 72π дм^2. Найдите объем описанного шара.

Вариант Б1

1

В цилиндр вписан шар. Найдите объем цилиндра, если периметр его осевого сечения равен P.

2

Около цилиндра описан шар. Площадь основания цилиндра равна 9π см^2. Угол между отрезками, проведенными из центра шара к концам образующей цилиндра, равен 120°. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант Б2

1

В цилиндр, осевое сечение которого имеет площадь S, вписан шар. Найдите полную поверхность цилиндра.

2

Около цилиндра описан шар. Длина окружности основания цилиндра равна 6π см. Угол между отрезками, соединяющими центр шара с концами диаметра основания цилиндра, равен 60°. Найдите объем шара.

3

Найдите отношение объемов шара, вписанного в цилиндр, и шара, описанного около того же цилиндра.

3

Найдите отношение площадей вписанной и описанной сферы для цилиндра.

Вариант В1

1

В цилиндр вписан шар, а в этот шар вписан еще один цилиндр, подобный данному. Найдите отношение объемов цилиндров.

2

Около цилиндра, осевое сечение которого имеет площадь $36\sqrt{3}$ см^2, описан шар. Хорда шара, соединяющая точку окружности основания цилиндра с ближайшей точкой пересечения оси цилиндра и поверхности шара, образует с плоскостью основания цилиндра угол 30°. Найдите объем шара.

Вариант В2

1

В цилиндр вписан шар, а в этот шар вписан еще один цилиндр, подобный данному. Найдите отношение полных поверхностей цилиндров.

2

Около цилиндра, осевое сечение которого имеет площадь $16\sqrt{3}$ см^2, описана сфера. Хорда шара, проведенная из точки окружности основания цилиндра к ближайшей точке пересечения оси цилиндра со сферой, образует с осью цилиндра угол 60°. Найдите площадь сферы.

3

В цилиндр вписан шар, и около него описан шар.

Радиус вписанного шара равен r. Найдите объем части описанного шара, находящейся вне цилиндра.

Радиус описанного шара равен R. Найдите объем части цилиндра, находящейся вне вписанного шара.

СП-36. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОМБИНАЦИЯ «ШАР—КОНУС»

Вариант А1

1

Образующая конуса равна $6\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости основания конуса под углом 60°. Найдите объем шара, вписанного в конус.

2

Радиус шара, описанного около конуса, равен R. Найдите боковую поверхность конуса, если угол между его образующей и высотой равен α.

Вариант А2

1

Радиус основания конуса равен 3 см, а угол при вершине осевого сечения — 60°. Найдите площадь сферы, вписанной в конус.

2

Образующая конуса составляет с его высотой угол α. Центр шара, описанного около конуса, находится на расстоянии d от образующей конуса. Найдите объем конуса.

Вариант Б1

1

Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник с площадью 4 см^2. Найдите площадь сферы, описанной около конуса.

2

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Расстояние от центра вписанного шара до образующей равно d. Найдите объем конуса.

Вариант Б2

1

Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник с углом при вершине 120°. Образующая конуса равна 6 см. Найдите объем шара, описанного около конуса.

2

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. В конус вписан шар, радиус которого равен r. Найдите полную поверхность конуса.

Вариант В1

1

В конус вписан шар. Отношение площадей полных поверхностей конуса и шара равно 2. Найдите отношение их объемов.

2

Хорда основания конуса, равная a, видна из вершины конуса под углом β. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Найдите площадь сферы, описанной около конуса.

Вариант В2

1

В конус вписан шар. Отношение объемов конуса и шара равно 2. Найдите отношение площадей полных поверхностей конуса и шара.

2

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Хорда основания, удаленная от вершины конуса на расстояние d, видна из вершины конуса под углом β. Найдите объем шара, описанного около конуса.

СП-37. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОМБИНАЦИЯ «ШАР—ПРИЗМА»

Вариант А1

1

В правильную четырехугольную призму вписан шар, радиус которого равен 4 см. Найдите объем призмы.

2

В правильной треугольной призме периметр основания равен 18 см. Диагональ боковой грани призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сферы, описанной около призмы.

Вариант А2

1

В правильную четырехугольную призму с высотой 8 см вписан шар. Найдите полную поверхность призмы.

2

Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна 12 см и образует с боковым ребром призмы угол 60°. Найдите объем шара, описанного около призмы.

❸

Около сферы описан куб, и в нее вписан куб. Найдите отношение полных поверхностей этих кубов.

❸

Около куба описана сфера, и в него вписана сфера. Найдите отношение площадей этих сфер.

Вариант Б1

❶

В правильную треугольную призму вписан шар, объем которого равен 36π см^3. Найдите полную поверхность призмы.

❷

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу треугольника, образует с плоскостью основания призмы угол β. Найдите площадь сферы, описанной около призмы.

❸

Около куба описан шар радиуса R. Найдите объем части шара, находящейся вне куба.

Вариант Б2

❶

В правильную треугольную призму вписана сфера, площадь которой равна 36π см^2. Найдите объем призмы.

❷

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом α. Диагональ боковой грани, содержащей данный катет, образует с боковым ребром призмы угол β. Найдите площадь сферы, описанной около призмы.

❸

В куб со стороной a вписана сфера. Найдите объем части куба, находящейся вне сферы.

Вариант В1

❶

Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом α. В параллелепипед впи-

Вариант В2

❶

Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом α. Высота параллелеписана сфера радиуса R. Найдите объем параллелепипеда.

педа равна H. Найдите объем параллелепипеда, если в него можно вписать шар.

❷

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине α. Отрезок, соединяющий центр описанной сферы с вершиной призмы, образует с плоскостью основания угол β. Найдите площадь сферы.

❷

Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Отрезок, соединяющий центр описанного шара с вершиной призмы, образует с боковым ребром призмы угол β. Найдите объем шара.

❸

Основания правильной треугольной призмы, вписанной в шар, делят диаметр, перпендикулярный основаниям, в отношении 1 : 2 : 1. Найдите отношение объемов призмы и шара.

❸

Основания правильной четырехугольной призмы, вписанной в сферу, делят диаметр, перпендикулярный основаниям, на три равные части. Найдите отношение площадей поверхностей призмы и сферы.

СП-38. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОМБИНАЦИЯ «ШАР—ПИРАМИДА»

Вариант А1

❶

Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды — равносторонний треугольник. Около пирамиды описан шар радиуса $2\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.

Вариант А2

❶

Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды — прямоугольный треугольник. Найдите объем пирамиды, если радиус шара, описанного около нее, равен 6 см.

❷

Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен 60°. Высота пирамиды равна 9 см. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

❷

Апофема правильной треугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$ см и образует с высотой пирамиды угол 30°. Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду.

Вариант Б1

❶

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. В пирамиду вписан шар радиуса r. Найдите объем пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольник с диагональю d. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания пирамиды под углом α. Найдите площадь сферы, описанной около пирамиды.

Вариант Б2

❶

В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. В пирамиду вписан шар радиуса r. Найдите боковую поверхность пирамиды.

❷

Основание пирамиды — прямоугольник. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой, равной H, углы, равные α. Найдите объем шара, описанного около пирамиды.

Вариант В1

❶

В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды, если радиус шара, описанного около нее, равен R.

Вариант В2

❶

В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите боковую поверхность пирамиды, если радиус шара, вписанного в нее, равен r.

❷
Основание пирамиды — равнобокая трапеция с основаниями a и b. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду.

❷
Основание пирамиды — равнобокая трапеция с меньшим основанием a. Диагональ трапеции является биссектрисой ее острого угла, равного α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем шара, описанного около пирамиды.

КП-6. ГОДОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант А1

❶
Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 5 см, а диагональ боковой грани — 13 см. Найдите боковую поверхность и объем призмы.

❷
Площадь боковой поверхности конуса равна 20π см^2, а его образующая имеет длину 5 см. Найдите объем конуса.

❸
В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно l, а плоский угол при вершине — α. Найдите боковую поверхность и объем пирамиды.

Вариант А2

❶
Боковое ребро правильной четырехугольной призмы равно 6 см, а диагональ боковой грани — 10 см. Найдите боковую поверхность и объем призмы.

❷
Объем конуса равен 16π см^3, а его высота имеет длину 3 см. Найдите боковую поверхность конуса.

❸
В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно l и образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем и боковую поверхность пирамиды.

Вариант Б1

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 3 см и прилежащим к нему углом 60°. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу треугольника, равна 10 см. Найдите объем призмы.

2

Диагональ осевого сечения цилиндра равна 13 см, а площадь сечения — 60 см^2. Найдите полную поверхность и объем цилиндра, если его радиус больше высоты.

3

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой углы, равные β. Найдите объем пирамиды.

Вариант Б2

1

Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и острым углом 30°. Диагональ боковой грани, содержащей катет, противолежащий данному углу, равна 13 см. Найдите объем призмы.

2

Образующая конуса равна 5 см, а площадь его осевого сечения — 12 см^2. Найдите полную поверхность и объем конуса, если его радиус меньше высоты.

3

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Вариант В1

1

Основание прямого параллелепипеда — ромб с большей диагональю $4\sqrt{3}$ см и острым углом 60°. Меньшая диагональ параллелепипеда обра-

Вариант В2

1

Основание прямого параллелепипеда — ромб с площадью $32\sqrt{3}$ см^2 и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда образует с плосзует с плоскостью основания угол 60°. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

❷

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем конуса, если его боковая поверхность равна S.

❸

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды, если расстояние от основания ее высоты до бокового ребра равно m.

костью основания угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.

❷

Угол при вершине осевого сечения конуса равен β. Найдите боковую поверхность конуса, если его объем равен V.

❸

Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Расстояние от основания высоты пирамиды до вершины этого угла равно b. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найдите объем пирамиды.

Ответы*

* В задачах, где ответ имеет несколько различных вариантов записи или существует несколько возможных равных ответов, приводится один из вариантов.

ОТВЕТЫ К РАБОТАМ ПО УЧЕБНИКУ Л.С. АТАНАСЯНА И ДР.

КА-1	А 1	А 2
1а)	(0; –2; 2)	(–1; 0; 0)
1б)	{4; –4; –2}; 6	{4; –2; –4}; 6
1в)	(–6; 4; 5)	(5; –3; –6)
2а)	5	5
2б)	$\sqrt{111}$	$\sqrt{17}$
2в)	3	6
3а)	30°	30°
3б)	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
4	$2a\sqrt{\frac{2}{3}}$	$2a\sqrt{\frac{2}{3}}$

КА-1	Б 1	Б 2
1а)	{4; –4; 2}	{0; 0; –2}
1б)	1,5	1,5
1в)	(7; –6; 7)	(–3; 4; 6)
2а)	{–4; 2; 4}	{–2; 6; –3}
2б)	6	
2в)	$9\sqrt{3}$	$\sqrt{109}$
3а)	$\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$	7
3б)	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$
4	$a\sqrt{6}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$

КА-1	В 1	В 2
1а)	(–2; 0; 1), (8; –4; 9), (–1; 2; 3)	(2; –4; –6), (4; 0; –2), (–16; 8; –18)
1б)	$\left(1\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$	$\left(-3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}; -8\frac{2}{3}\right)$
1в)	—	—
2а)	60°	60°
2б)	$\sqrt{14}$	$\sqrt{38}$
2в)	$\pm\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$	$\pm\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$
3а)	$\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
3б)	—	—
4	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}a$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$

КА-2	А 1	А 2	Б 1
1	400π см^2	100π см^2	64π см^2
2а)	100 см^2	160 см^2	$16\sqrt{3}$ см^2
2б)	60 см^2	128 см^2	48π см^2
3	420π см^2	1680π см^2	100π см^2

КА-2	Б 2	В 1	В 2
1	16π см^2	144π см^2	144π см^2
2а)	$16\sqrt{3}$ см^2	80 см^2	60 см^2
2б)	48π см^2	$40\sqrt{2}$ см^2	30 см^2
3	624π см^2	630π см^2	504π см^2

КА-3	А 1	А 2
1	4500π см³, 900π см²	144π см², 288π см³
2	$\sqrt{3}l^3\sin^2\alpha\cos\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4}$
3	48π см³	192π см³

КА-3	Б 1	Б 2
1	288π см³, 144π см²	288π см³, 144π см²
2	$\dfrac{4H^3\mathrm{ctg}^2\beta}{3\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{6}H^3\mathrm{ctg}^2\beta\left(1+\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\mathrm{tg}\alpha$
3	5568π см³	2736π см³

КА-3	В 1	В 2
1	144π см², 288π см³	144π см², 288π см³
2	$\dfrac{m^3\left(1+\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\mathrm{tg}\alpha}{6\sin^2\beta\cos\beta}$	$\dfrac{c^3\cos^2\alpha\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\beta}{6\left(1+\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)}$
3	192π см³	336π см³

КА-4	А 1	А 2	Б 1
1	972π см³	216π см²	48π см³
2а)	$6\sqrt{2}$	6	3
2б)	36	72	8
2в)	144	144	$16\sqrt{3}$
3	$(x-4)^2+(y+2)^2+$ $+(z+1)^2=9$; 36π	$(x+2)^2+(y+5)^2+$ $+(z-3)^2=9$; 36π	$(x-2)^2+(y+1)^2+$ $+(z-2)^2=9$; 36π

КА-4	Б 2	В 1	В 2
1	$4\sqrt{15}\pi$ см^2	$9\sqrt{2}\pi$ см^2	$9\sqrt{3}\pi$ см^3
2а)	$4\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AS}$	$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AS}$
2б)	$16\sqrt{3}$	$\dfrac{d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\beta\cos\beta}$	$\dfrac{d^2}{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}\times$ $\times(1+\operatorname{tg}\alpha\sin\beta)$
2в)	$\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$	—	—
3	$(x-1)^2+(y-2)^2+$ $+(z-2)^2=9;$ 36π	$x^2+(y+1)^2+$ $+(z+1)^2=12;$ 48π	$(x-1)^2+(y-1)^2+$ $+(z-4)^2=9;$ 36π

СА-6*	Вариант 1	Вариант 2
1	$[60°;\ 120°]$	$[60°;\ 120°]$
2	$\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$	$\arccos\dfrac{1}{6}$ или $\arccos\dfrac{2}{3}$
3	$\left(\dfrac{2}{\sqrt{21}};\dfrac{4}{\sqrt{21}};\dfrac{1}{\sqrt{21}}\right)$	$\left(\dfrac{-7}{\sqrt{195}};\dfrac{5}{\sqrt{195}};\dfrac{11}{\sqrt{195}}\right)$
4	$-1,5$	-2
6а)	$x+y-z+6=0$	$x-y-z+6=0$
6б)	$-2x+y+3z-14=0$	$x-4y+2z-21=0$
7	$60°$	$60°$
8а)	$2x-y-3z=0$	$x+2y+z=0$
8б)	$x-y+z=0$	$x-y+z=0$

СА-12*	Вариант 1	Вариант 2
1	96 см или 76,8 см	252π см^2 или 180π см^2
2	56 см^2	28 см^2
3	$\sqrt{H^2+\pi^2R^2}$	Отрезок AB, или дуга AB окружности, или дуга AB эллипса
4	$\sqrt{6}\pi H^2$	$\frac{\sqrt{3}\pi H^2}{2}$
5	$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}$
6	Сфера с диаметром AB без точек A и B	Сфера с диаметром AB без точки A
7	100π и 2400π см^2	8π см^2
8	36 см	$\frac{1}{5}$

СА-21*	Вариант 1	Вариант 2
1	$\frac{a^3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	$\frac{H^3\sqrt{3}}{2}$
2	960 см^3	240 см^3
3	96 см^3	96 см^3
4	$\frac{\sqrt{3}H^3}{144k^2-1}$	$\frac{a^3\sqrt{144k^2-1}}{24}$
5	$\frac{6V}{S}$	90°
6	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}-1}$
7	$\frac{a^3}{24}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{96}$

ОТВЕТЫ К РАБОТАМ ПО УЧЕБНИКУ А.В. ПОГОРЕЛОВА

КП-1	А 1	А 2	Б 1	Б 2
1	6 см	6 см	3 см	3 см
2	210 см^2	480 см^2	$3Q+\frac{\sqrt{3}Q}{2\mathrm{tg}\alpha}$	$2S+4\sqrt{3}S\mathrm{tg}\alpha$
3а)	$4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$	$4d^2\mathrm{tg}\alpha\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$	350 см^2	300 см^2
3б)	$d^2\sin\alpha\sqrt{2\cos 2\alpha}$	$d^2\mathrm{tg}\alpha\sqrt{2-2\mathrm{tg}^2\alpha}$	162,5 см^2	162,5 см^2

КП-1	В 1	В 2
1	5 см	5 см
2	$b^2\sin 2\alpha\left(1+\mathrm{tg}\beta+\frac{\mathrm{tg}\beta}{\cos\alpha}\right)$	$\frac{a^2}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(\mathrm{tg}\varphi+\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1\right)$
3а)	$\sqrt{2}ah$	a^2
3б)	$2a\sqrt{4h^2+a^2}$	$2\sqrt{3}a^2$

КП-2	А 1	А 2	Б 1	Б 2
1а)	$2\sqrt{3}$ см	64 см^2	$\frac{2l}{\sin 2\alpha}$	$\frac{2m}{\cos\beta}$
1б)	32 см^2	$64\sqrt{2}$ см^2	$\frac{6\sqrt{3}l^2}{\sin\alpha\sin 2\alpha}$	$\frac{12\sqrt{3}m^2}{\cos\beta}$

КП-2	А 1	А 2	Б 1	Б 2
2	$\frac{H^2\text{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}\left(2+\text{ctg}\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times$ $\times\left(1+2\text{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$	72 см^2	36 см^2
3	$\frac{S}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}Q$	$8\sqrt{2}$ см^2	4 см^2

КП-2	В 1	В 2
1а)	$12\sqrt{3}m^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)$	$12\sqrt{3}m^2\sin\beta(1+\sin\beta)$
2	$r^2\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot(2\sin\alpha\text{tg}\beta+$ $+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta+\frac{\text{tg}\alpha}{\cos\beta})$	$\frac{2R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\times$ $\times\left(1+\sin\beta\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)\right)$
3	12 см	4 см

КП-3	А 1	А 2	Б 1
1	$64\pi\pi$ см^2	$18\pi\pi$ см	$576\pi\pi$ см^2
2а)	64 см^2	400 см^2	$4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\text{tg}\beta$
2б)	80 см^2	240 см^2	$4R^2\sin\frac{\alpha}{2}\text{tg}\beta$
3а)	$\frac{\pi H^2\text{tg}^2\alpha}{4}$	$\frac{\pi a^2}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{S\sin 2\alpha}{\sin\beta}$
3б)	$\frac{H^2\sin\beta}{2\cos^2\alpha}$	$\frac{a^2\text{tg}\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{3S\sin 2\alpha}{4\sin\beta}$

КП-3	Б 2	В 1	В 2
1	7 см	27π см^2	$4\sqrt{2}$ см
2а)	$H^2\operatorname{ctg}\beta$	$S\sin\frac{\alpha}{2}$	$\dfrac{Q}{\sin\frac{\alpha}{2}}$
2б)	$\dfrac{H^2\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}$		
3а)	$\dfrac{S\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$	$d^2\left(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$	$\dfrac{d^2}{2}(\sin 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$
3б)	$\dfrac{3S\sin 2\beta}{4\sin 2\alpha}$		

КП-4	А 1	А 2	Б 1
1	72 см^3	96 см^3	1152 см^3
2	$\frac{4}{3}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$	$\frac{2}{3}l^3\cos^2\sin\alpha$	$\dfrac{2\sqrt{3}d^3}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$
3	$9\sqrt{3}$ см^3	$24\sqrt{3}$ см^3	$\frac{1}{6}b^3\sin 2\beta\cos\beta\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$

КП-4	Б 2	В 1	В 2
1	864 см^3	2160 см^3	2160 см^3
2	$\dfrac{8\sqrt{3}d^3}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$	$8\sqrt{3}m^3\operatorname{ctg}\alpha$	$8\sqrt{3}m^3\sin^2\alpha\cos\alpha$
3	$\frac{1}{6}b^3\operatorname{tg}\alpha\sin\frac{\beta}{2}$	$\frac{1}{3}S\sin\beta\cdot\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta}$	$\frac{1}{3}S\sin\beta\times$ $\times\sqrt{3S\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$

КП-5	А 1	А 2	Б 1
1	$144\pi\pi$ см^2, $288\pi\pi$ см^3	$36\pi\pi$ см^2, $36\pi\pi$ см^3	256π см^2, $\frac{2048}{3}\pi$ см^3
2	$\dfrac{\pi a^3\mathrm{tg}\beta}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}}$	$\dfrac{\pi a^3\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$	$\dfrac{\pi a^3\sin^2\beta\cos\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$
3	$9\sqrt{3}\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$ см^2	8π см^3	$\pi(b-a)\mathrm{tg}\alpha\times$ $\times\left((b-a)\mathrm{tg}\alpha+2a+\frac{b-a}{\cos\alpha}\right)$

КП-5	Б 2	В 1	В 2
1	256π см^2, $\frac{2048}{3}\pi$ см^3	16π см^2, $\frac{32}{3}\pi$ см^3	64π см^2, $\frac{256}{3}\pi$ см^3
2	$\dfrac{\pi a^3\cos\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}(1+\cos\beta)$	$\dfrac{\pi a^2\mathrm{ctg}^2\beta}{\cos\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)}$	$\dfrac{\pi b^2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$
3	$\pi(b-a)\mathrm{tg}\alpha\times$ $\times\left(a+\frac{b-a}{2\cos\alpha}\right)$	$\dfrac{2\pi c^3\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\beta}{3(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)^2}$	$\dfrac{2\pi a^3\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\beta}{3(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)^2}$

КП-6	А 1	А 2
1	240 см^2, 300 см^3	192 см^2, 288 см^3
2	16π см^3	20π см^2
3	$1{,}5l^2\sin\alpha$; $\frac{l^3}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; $\frac{3\sqrt{3}l^2\cos\alpha}{4}\sqrt{4-3\cos^2\alpha}$

КП-6	Б 1	Б 2
1	$36\sqrt{3}$ см^3	$150\sqrt{3}$ см^3
2	132π см^2, 180π см^3	24π см^2, 12π см^3
3	$\frac{a^3\text{ctg}\beta}{48\cos^2\alpha}$	$\frac{b^2\sin\alpha}{2\cos\beta}$

КП-6	В 1	В 2
1	$80\sqrt{3}$ см^2	$256\sqrt{3}$ см^2
2	$\frac{S\sin\alpha}{3}\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{\pi}}$	$\frac{\pi}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\frac{3V}{\pi\text{ctg}\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$
3	$\frac{m^3\sin2\alpha}{12\sin^2\beta\cos\beta}$	$\frac{1}{6}b^3(1+\sin\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\text{tg}\alpha$

СП-2*	Вариант 1	Вариант 2
1	$\arccos(\cos\alpha\sin\beta)$	$2\arccos\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)$
5	26 см	26 см

СП-7*	Вариант 1	Вариант 2
3	—	$45°$
4	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{d}{3}$
5	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{17}}{2}$
6	2 см	4 см

СП-14*	Вариант 1	Вариант 2
1	Основание высоты пирамиды – центр вневписанной окружности треугольника, лежащего в основании пирамиды. Для того, чтобы высота пирамиды находилась внутри пирамиды, необходимо потребовать, чтобы все двугранные углы при основании пирамиды были равны	
3	45°	120°
4	$a^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{3a^2}{2}$
5	$\frac{25Q}{36}$	$\frac{15Q}{16}$
6	162 см^2	54 см^2

СП-20*	Вариант 1	Вариант 2
1	$\sqrt{3}$ см или 2 см	25 см^2 или 14 см^2
2	$R-\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}$	$d > 2\sqrt{3}R$
3	$\frac{Q}{\cos\alpha}$	$S\cos\alpha$
4	$\frac{H^2}{2\cos^2\alpha}$	$\frac{R^2}{2\cos^2\alpha}$
5	$2\arcsin\frac{\beta}{2\pi}$	$2\pi\sin\frac{\alpha}{2}$
6	$\pi l\sin^2\alpha$	$\frac{2\pi R\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$
7	600 см^2	600 см^2
8	9:25:16	24:49:33

СП-20*	Вариант 1	Вариант 2
9	$\frac{4\pi}{3}$ см	$\frac{8\pi}{3}$ см
10	25 см	32 см

СП-26*	Вариант 1	Вариант 2
1	1728 см^3	192 см^3
2	240 см^3	480 см^3
3	$350\sqrt{3}$ см^3	48 см^3 или 24 см^3
4	45°	30°
5	Две плоскости, параллельные плоскости основания и равноудаленные от нее	—
6	96 см^3	$16\sqrt{3}$ см^3
7	$\frac{abc}{6}$	$\frac{aS}{3}$
8	$\frac{aS\sin\alpha}{3}$	$\frac{2PQ}{3b}$

СП-34*	Вариант 1	Вариант 2
1	34π см^2	8π см^2
2	2:3	3:2
3	$\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$	$\frac{\pi d^3}{6\sqrt{3}}$
4	$\sqrt{15} : 9\sqrt{7}$	$1 : \sqrt{10}$
5	$\frac{5\pi R^3}{12}$	$6\pi R^2$

Литература

1. *Л. С. Атанасян* и др. Геометрия 10–11. М., 1992.
2. *А. В. Погорелов*. Геометрия 7–11. М., 1992.
3. *И. Ф. Шарыгин*. Геометрия 10–11. М., 1999.
4. *Л. М. Лоповок*. Сборник задач по геометрии для 10–11 классов. К., 1993.
5. *Л. М. Лоповок*. Факультативные занятия по геометрии для 7–11 классов. К., 1990.
6. *О. Н. Цубербиллер*. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., 1955.

Содержание

Алла Петровна Ершова
Вадим Владимирович Голобородько

Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 11 класса

Подписано в печать 31.10.2012. Формат 60×88/16.
Уч.-изд. л. 12,71. Тираж 5000 экз. Заказ № 2021.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpk.ru, E-mail: marketing@chpk.ru,
факс 8(496) 726-54-10, телефон 8(495) 988-63-87