Ал
и на математического анализа

Дидактические материалы

класс

Базовый уровень

4-е издание

Москва
·Просвещение·
2009

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21
Д44

Авторы:
М. И. Шабунин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова,
Р. Г. Газарян

Алгебра и начала математического анализа. Дидакти-
Д44 ческие материалы. 11 класс. Базовый уровень / [М. И. Шабунин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, Р. Г. Газарян].—4-е изд.— М. : Просвещение, 2009.— 142 с. : ил.— ISBN 978-5-09-022160-3.

Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа и опираются на учебник Ш. А. Алимова и др. Книга содержит задания ко всем параграфам, контрольные работы, задания для подготовки к экзамену и для интересующихся математикой, а также справочные сведения и примеры с подробными решениями.

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-022160-3

Предисловие

Основная цель пособия — дополнить систему упражнений учебника заданиями, позволяющими учителю организовать дифференцированную и индивидуальную работу учащихся на всех этапах урока.

Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа, а также к основным темам курса алгебры основной школы. Все предложенные в пособии задания снабжены либо ответами в конце книги, либо ответами, решениями или указаниями сразу после их формулировки.

В каждой главе пособия содержатся:

1) дидактические материалы к каждому параграфу учебника;

2) контрольная работа по теме;

3) задания для подготовки к экзамену по изучаемой теме (большинство из предложенных заданий давалось на выпускных экзаменах в школах России начиная с 1991 г.);

4) задания для учащихся, интересующихся математикой (одна из целей этих заданий — подготовка к поступлению в вуз).

Каждый параграф пособия включает:

1) справочные сведения;

2) примеры и задачи с подробными решениями;

3) разноуровневые задачи для самостоятельной работы в двух вариантах (каждое задание имеет условную балловую оценку степени его сложности).

Материалы пособия могут служить основной частью учебно-методического комплекта по алгебре и началам анализа для учащихся 10—11 классов:

- общеобразовательных;
- гуманитарных;
- с естественно-научным, техническим и математическим уклонами, в которых математика изучается в объеме до 6 часов в неделю.

Используя балловую оценку заданий, учитель может:

- организовать «плавную» дифференциацию обучения математике: в зависимости от качества усвоения темы каждому учащемуся предлагать конкретный балловый диапазон выполняемых заданий, помогая постепенно поднимать уровень своих математических знаний и умений;

- предложить разнообразные виды частично-самостоятельных, самостоятельных и проверочных работ, например выполнить больший объем заданий разной степени сложности, и указать, сколько баллов нужно набрать для получения той или иной оценки («3», «4» или «5»).

Следует заметить, что обязательному уровню знаний и умений соответствуют задания, оцененные в пособии в основном баллами 1, 2, 3, 4. Учащиеся, претендующие на отличную оценку, должны справляться с заданиями, оцененными в 6—7 баллов.

Контрольные работы по темам состоят из двух частей. Выполнение первой части работы (до черты) позволяет учащемуся получить оценку «3». Для получения оценки «4» учащийся должен справиться с первой частью работы и верно решить одну из задач второй части (за чертой). Чтобы получить оценку «5», помимо выполнения первой части работы, учащийся должен решить не менее двух любых заданий из второй части работы.

Заметим, что в разделах «Задания для подготовки к экзамену» вместо балловой оценки для ряда задач, предлагавшихся в экспериментальной проверке системы Единых государственных экзаменов, указан их уровень сложности (A, B или C).

Расположение материала в пособии соответствует учебнику алгебры и начал анализа авторов Ш. А. Алимова и др. (2000 г. и последующие годы издания). Однако содержание и структура пособия позволяют с успехом использовать его и при работе по другим учебникам.

§ 38[1]. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Справочные сведения

Функция	Область определения	Множество значений
$y=\sin x$	$\boldsymbol{R}$	$[-1;\ 1]$
$y=\cos x$	$\boldsymbol{R}$	$[-1;\ 1]$
$y=\operatorname{tg} x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{R}$
$y=\operatorname{ctg} x$	$x\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{R}$

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции:

1) $y=\sin\sqrt{2-x^2}$; 2) $y=\dfrac{2}{\cos 2x+\cos x}$.

Решение.

1) Выражение $\sin\sqrt{2-x^2}$ имеет смысл, если $2-x^2\geqslant 0$, т. е. если $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

2) Выражение не имеет смысла при всех таких значениях x, что $\cos 2x+\cos x=0$. Так как $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, то нужно решить уравнение $2\cos^2 x+\cos x-1=0$, корни которого $x=\pi+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Поэтому областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, за исключением чисел $x=\pi+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

2. Найти множество значений функции $y=2\sin 3x+1$.

Решение. Так как $-1\leqslant\sin 3x\leqslant 1$, то $-2\leqslant 2\sin 3x\leqslant 2$, откуда $-1\leqslant 2\sin 3x+1\leqslant 3$, причем функция $y=2\sin 3x+1$ принимает все значения из отрезка $[-1;\ 3]$. Следовательно, множество значений этой функции — отрезок $[-1;\ 3]$.

---

[1] Нумерация параграфов в пособии полностью соответствует учебнику алгебры и начал анализа авторов Ш. А. Алимова и др.

3. Найти наибольшее и наменьшее значения функции:

1) $y=24\cos x+7\sin x+5$;

2) $y=5\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x$.

Решение.

1) Воспользуемся методом введения вспомогательного угла при преобразовании выражения вида $a\cos x+b\sin x$. Умножив и разделив выражение $24\cos x+7\sin x$ на число $\sqrt{24^2+7^2}=25$, получим

$$24\cos x+7\sin x=25\left(\frac{24}{25}\cos x+\frac{7}{25}\sin x\right)=25\sin(x+\varphi),$$

где $\sin\varphi=\frac{24}{25}$, $\cos\varphi=\frac{7}{25}$. Тогда

$$y=24\cos x+7\sin x+5=25\sin(x+\varphi)+5.$$

Так как $-1\leqslant\sin(x+\varphi)\leqslant 1$, то $-25\leqslant 25\sin(x+\varphi)\leqslant 25$, откуда следует, что $-20\leqslant y\leqslant 30$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 30, а наименьшее равно -20.

2) Используя формулы $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $2\sin x\cos x=\sin 2x$, получаем

$$y=5\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=$$
$$=\frac{5}{2}(1-\cos 2x)+2\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2},$$

т. е. $y=3+2\sin 2x-2\cos 2x$.

Так как $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, то $y=3+2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, откуда следует, что $3-2\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 3+2\sqrt{2}$. Следовательно, наибольшее значение функции равно $3+2\sqrt{2}$, а наименьшее значение равно $3-2\sqrt{2}$.

Замечание. В общем случае нахождение множества значений функции $y=f(x)$ сводится к тому, чтобы найти все значения a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет действительные корни.

4. Найти множество значений функции $y=\frac{x+2}{(x+1)^2}$.

Решение. Найдем все значения a, при которых уравнение $\frac{x+2}{(x+1)^2}=a$ имеет действительные корни. При $x\neq-1$ это уравнение равносильно каждому из уравнений

$$a(x+1)^2-(x+2)=0,\quad ax^2+(2a-1)x+a-2=0.$$

Полученное уравнение при $a=0$ имеет корень $x=-2$, а при $a \neq 0$ является квадратным и имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант D неотрицателен, т. е. $D=(2a-1)^2-4a(a-2) \geqslant 0$, откуда $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Ответ. Множество значений функции — промежуток $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти область определения функции **(1—4)**.

1. $\boxed{1}$ $y=\frac{x-2}{x+3}$. **2.** $\boxed{2}$ $y=\sqrt{2x-5}$.

3. $\boxed{1}$ $y=2^{x+1}$. **4.** $\boxed{2}$ $y=\ln(x^2-2)$.

Найти область определения и множество значений функции, график которой изображен на рисунке **(5—7)**.

5. $\boxed{2}$ Рис 1. **6.** $\boxed{2}$ Рис 2. **7.** $\boxed{2}$ Рис 3.

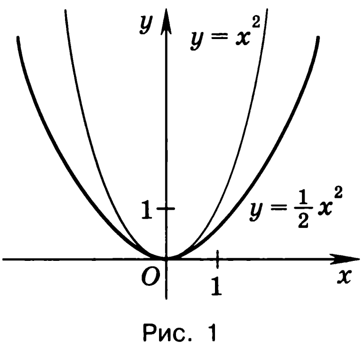


Рис. 1

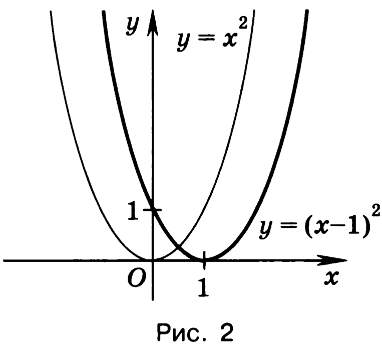


Рис. 2

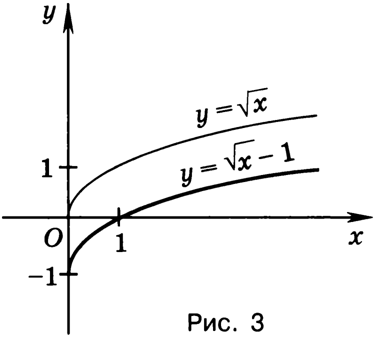


Рис. 3

Найти область определения и множество значений функции $y = f(x)$, заданной графически на рисунке **(8—9)**.

8. $\boxed{2}$ Рис 4. **9.** $\boxed{2}$ Рис 5.

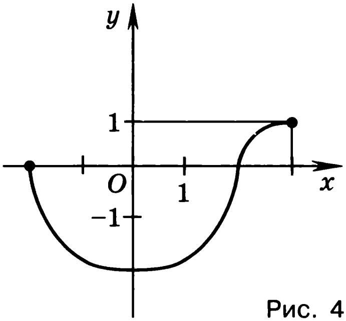


Рис. 4

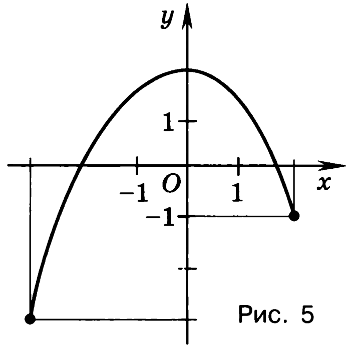


Рис. 5

Найти множество значений функции на заданном отрезке **(10—11)**.

10. $\boxed{3}$ $y = 2x^2$, $[0; 3]$. **11.** $\boxed{3}$ $y = \sqrt{3x - 1}$, $[1; 3]$.

Найти область определения и множество значений функции **(12—14)**.

12. $\boxed{3}$ $y = -\frac{2}{x}$. **13.** $\boxed{3}$ $y = x^2 + 1$. **14.** $\boxed{3}$ $y = \sqrt{x - 2}$.

Найти область определения функции **(15—29)**.

15. $\boxed{2}$ $y = -\sin x$.

16. $\boxed{2}$ $y = -\cos 2x$.

17. $\boxed{3}$ $y = \sin \frac{3}{x}$.

18. $\boxed{3}$ $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

19. $\boxed{3}$ $y = \sin \sqrt{x - 1}$.

20. $\boxed{3}$ $y = \frac{3}{\sin x}$.

21. $\boxed{4}$ $y = \frac{1}{\cos x - 1}$.

22. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

23. $\boxed{4}$ $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

24. $\boxed{4}$ $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

25. $\boxed{5}$ $y = \frac{2}{\sin x + 2\cos x}$.

26. $\boxed{5}$ $y = 2\sin x - \operatorname{tg} 3x$.

27. $\boxed{6}$ $y = \sqrt{\cos x}$.

28. $\boxed{7}$ $y = \ln \operatorname{tg} x$.

29. $\boxed{8}$ $y = \sqrt{\ln \sin x}$.

Найти множество значений функции **(30—39)**.

30. $\boxed{3}$ $y = \cos 2x$.

31. $\boxed{5}$ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

32. $\boxed{5}$ $y = \cos 2x + 1$.

33. $\boxed{5}$ $y = 2\cos 2x + 1$.

34. $\boxed{5}$ $y = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

35. $\boxed{5}$ $y = \cos 2x - 2\sin^2 x$.

36. $\boxed{6}$ $y=\cos 2x-4\cos^2 x$.

37. $\boxed{6}$ $y=\sin x+\cos x$.

38. $\boxed{7}$ $y=5\cos 2x+12\sin 2x$.

39. $\boxed{8}$ $y=3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции **(40—44)**.

40. $\boxed{5}$ $y=5\sin x\cos x$.

41. $\boxed{6}$ $y=3-4\sin x\cos x$.

42. $\boxed{7}$ $y=\sqrt{2}\sin x+\cos x$.

43. $\boxed{8}$ $y=9\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x$.

44. $\boxed{8}$ $y=13\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x$.

Вариант II

Найти область определения функции **(1—4)**.

1. $\boxed{1}$ $y=\frac{3-x}{x-2}$.

2. $\boxed{2}$ $y=\sqrt{7-3x}$.

3. $\boxed{1}$ $y=3^{2x}$.

4. $\boxed{2}$ $y=\lg(3-x^2)$.

Найти область определения и множество значений функции, график которой изображен на рисунке **(5—7)**.

5. $\boxed{2}$ Рис 6. **6.** $\boxed{2}$ Рис 7. **7.** $\boxed{2}$ Рис 8.

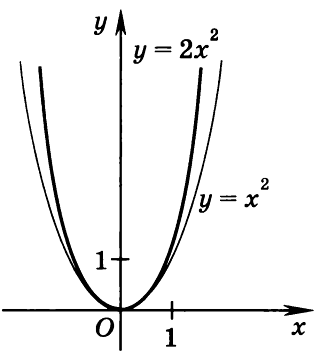


Рис. 6

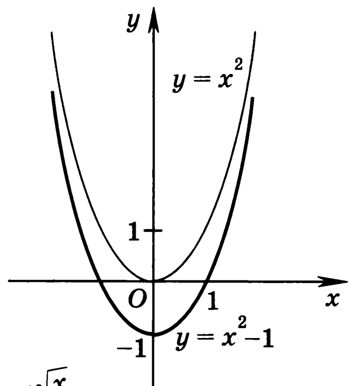


Рис. 7

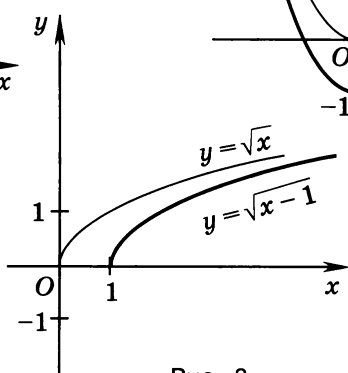


Рис. 8

Найти область определения и множество значений функции $y=f(x)$, заданной графически на рисунке **(8—9)**.

8. $\boxed{2}$ Рис 9. **9.** $\boxed{2}$ Рис 10.

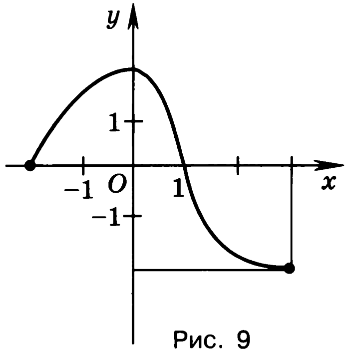


Рис. 9

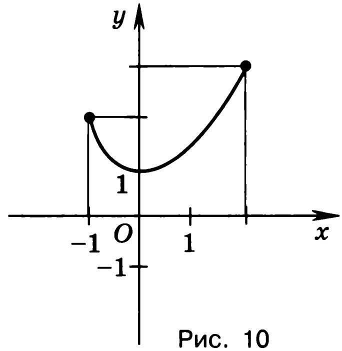


Рис. 10

Найти множество значений функции на заданном отрезке **(10—11)**.

10. $\boxed{3}$ $y=\frac{x^2}{3}$, $[-2;\ 0]$. **11.** $\boxed{3}$ $y=\sqrt{2x+5}$, $[-1;\ 2]$.

Найти область определения и множество значений функции **(12—14)**.

12. $\boxed{3}$ $y=\frac{3}{x}$. **13.** $\boxed{3}$ $y=3-x^2$. **14.** $\boxed{3}$ $y=\sqrt{x+2}$.

Найти область определения функции **(15—29)**.

15. $\boxed{2}$ $y=-\cos x$.

16. $\boxed{2}$ $y=-\sin 3x$.

17. $\boxed{3}$ $y=\cos\frac{2}{x}$.

18. $\boxed{3}$ $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

19. $\boxed{3}$ $y=\cos\sqrt{1-x}$.

20. $\boxed{3}$ $y=\frac{2}{\cos x}$.

21. $\boxed{4}$ $y=\frac{1}{1-\sin x}$.

22. $\boxed{4}$ $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

23. $\boxed{4}$ $y=\operatorname{tg} 3x$.

24. $\boxed{4}$ $y=\frac{2}{\operatorname{tg} x}$.

25. $\boxed{5}$ $y=\frac{3}{3\sin x-\cos x}$.

26. $\boxed{5}$ $y=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\cos x$.

27. $\boxed{6}$ $y=\sqrt{\sin x}$.

28. $\boxed{7}$ $y=\ln\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

29. $\boxed{8}$ $y=\sqrt{\ln\cos x}$.

Найти множество значений функции **(30—39)**.

30. $\boxed{3}$ $y=\sin\frac{x}{2}$.

31. $\boxed{5}$ $y=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

32. $\boxed{5}$ $y=\sin\frac{x}{2}-1$.

33. $\boxed{5}$ $y=3\sin\frac{x}{2}-1$.

34. $\boxed{5}$ $y=2\cos^2\frac{x}{2}-1$.

35. $\boxed{5}$ $y=2\cos^2 x+\cos 2x$.

36. $\boxed{6}$ $y=\cos 2x+6\sin^2 x$.

37. $\boxed{6}$ $y=\cos x-\sin x$.

38. $\boxed{7}$ $y=6\sin x-8\cos x$.

39. $\boxed{8}$ $y=9\sin^2 x+6\sin x\cos x+\cos^2 x$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (40—44).

40. $\boxed{5}$ $y=3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

41. $\boxed{6}$ $y=6\sin 2x\cos 2x+5$.

42. $\boxed{7}$ $y=\sin x+2\cos x$.

43. $\boxed{8}$ $y=7\sin^2 x+8\sin x\cos x+\cos^2 x$.

44. $\boxed{8}$ $y=5\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$.

§ 39. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций

Справочные сведения

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для каждого значения x из ее области определения выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T\neq 0$, что для любого x из ее области определения выполняется равенство $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. Число T называется *периодом* функции $y=f(x)$.

Если функция $y=f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y=cf(ax+b)$, где a, b и c — постоянные и $a\neq 0$, также периодическая с периодом $t=\frac{T}{|a|}$.

Функция	Четность, нечетность	Наименьший положительный период
$\sin x$	Нечетная	2π
$\cos x$	Четная	2π
$\mathrm{tg}\, x$	Нечетная	π
$\mathrm{ctg}\, x$	Нечетная	π

Примеры с решениями

1. Выяснить, является ли четной или нечетной функция:
1) $y=x^3-\frac{x}{2}+\sin x$; 2) $y=x^3-\sin x+1$; 3) $y=x^2+\cos 3x$;
4) $y=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; 5) $y=\frac{1+\sin x+2\sin^2 x+3\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+1}$.

Решение.

1) Функция определена на множестве действительных чисел. Найдем

$$y(-x)=(-x)^3-\frac{(-x)}{2}+\sin(-x)=-\left(x^3-\frac{x}{2}+\sin x\right)=-y(x).$$

Так как выполняется равенство $y(-x)=-y(x)$, то функция нечетная.

2) Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$. Сравним $y(-x)$ и $y(x)$, $y(-x)$ и $-y(x)$:

$$y(-x)=(-x)^3-\sin(-x)+1=-x^3+\sin x+1\neq y(x),$$
$$-x^3+\sin x+1\neq -y(x).$$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Для каждого x из области определения $\boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$y(-x)=(-x)^2+\cos 3(-x)=x^2+\cos 3x=y(x).$$

Функция четная.

4) Область определения функции — множество чисел, для которых $\sin x\neq x$ $(x\neq 0)$. Имеем

$$y(-x)=\frac{(-x)+\sin(-x)}{(-x)-\sin(-x)}=\frac{-x-\sin x}{-x+\sin x}=\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=y(x).$$

Функция четная.

5) Заметим, что в некоторых случаях исследование функции на четность можно упростить. Например, если функция определена в точке x_0 и не определена в точке $-x_0$, то она не может быть ни четной, ни нечетной. В данном случае $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ имеет смысл, а $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ смысла не имеет, т. е. функция не является ни четной, ни нечетной.

2. Доказать, что функция $y=\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$ является периодической с периодом $T=\frac{2\pi}{5}$.

Решение. Функция определена на всей числовой оси. Докажем, что для любого $x\in\boldsymbol{R}$ верно равенство $f(x+T)=f(x)$, т. е. $\cos\left(5(x+T)+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$. Действительно, $\cos\left(5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(5x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$, поскольку период функции $y=\cos x$ равен 2π.

Итак, равенство $f(x+T)=f(x)$ выполняется для любого x из области определения, т. е. $\frac{2\pi}{5}$ — период данной функции.

3. Найти наименьший положительный период T функции:

1) $y=\sin\frac{3x}{4}$; 2) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; 3) $y=\sin 3x+\cos 3x$.

Решение.

1) Функция определена на всей числовой оси. По определению периодической функции выполняется равенство $\sin\frac{3}{4}(x+T)=\sin\frac{3}{4}x$, или $\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}T\right)=\sin\frac{3}{4}x$. Так как наименьший положительный период функции $y=\sin x$ равен 2π, то $\frac{3}{4}T=2\pi$, следовательно, $T=\frac{8}{3}\pi$.

2) По определению периодической функции $\operatorname{tg}\frac{x+T}{3}=\operatorname{tg}x$, или $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{T}{3}\right)=\operatorname{tg}x$. Наименьший положительный период тангенса равен π, следовательно, $\frac{T}{3}=\pi$ и $T=3\pi$.

3) После преобразования

$$\sin 3x+\cos 3x=\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=$$
$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Имеем $\sqrt{2}\cos\left(3(x+T)-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$, откуда

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}+3T\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Наименьший положительный период косинуса равен 2π, следовательно, $3T=2\pi$, $T=\frac{2}{3}\pi$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Выяснить, является ли четной или нечетной функция **(1—8)**.

1. $\boxed{1}$ $y=\frac{x^3-x}{2}$.
2. $\boxed{2}$ $y=\frac{x^3}{x^2+2}$.
3. $\boxed{1}$ $y=3+x^2-2x^4$.
4. $\boxed{2}$ $y=x^3\cos x$.
5. $\boxed{2}$ $y=x^2+\cos x$.
6. $\boxed{2}$ $y=\frac{1}{2\sin x+1}$.
7. $\boxed{3}$ $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$.
8. $\boxed{3}$ $y=\sin 2x+\cos x+1$.

9. $\boxed{4}$ Четная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой оси. Достроить график этой функции, если его часть при $x \geqslant 0$ изображена на рисунке 11.

10. $\boxed{4}$ Достроить график нечетной функции, определенной на всей числовой оси (рис. 12).

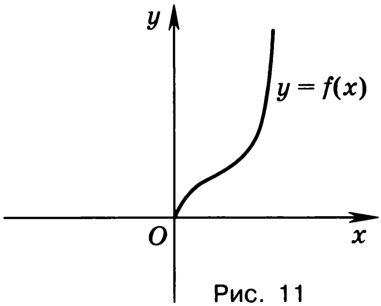


Рис. 11

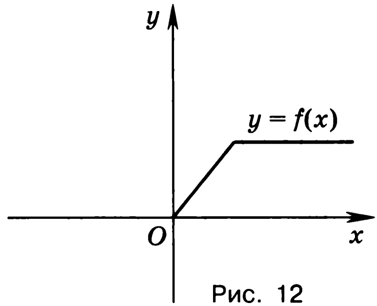


Рис. 12

11. $\boxed{4}$ Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой оси. Достроить ее график на промежутке $[-\pi; 0]$, если часть ее графика на отрезке $[0; \pi]$ изображена на рисунке 13 и известно, что функция $y=f(x)$ четная.

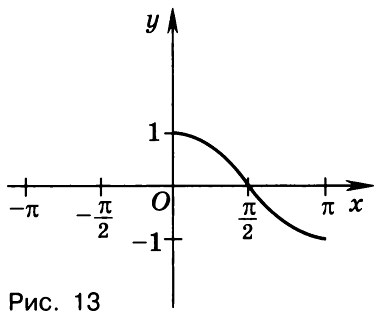


Рис. 13

Выяснить, является ли функция $g(x)$ четной или нечетной **(12—13)**.

12. $\boxed{5}$ $g(x)=f(x)+\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — четные функции.

13. $\boxed{5}$ $g(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — нечетные функции.

Изобразить схематически график периодической функции, если на рисунке изображена часть графика на промежутке, длина которого равна наименьшему положительному периоду функции **(14—15)**.

14. $\boxed{5}$ Рис 14.

15. $\boxed{5}$ Рис 15.

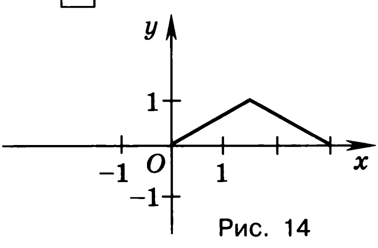


Рис. 14

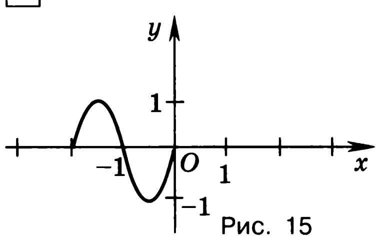


Рис. 15

16. $\boxed{5}$ Какие из функций $y=\cos 2x$, $y=x^2$, $y=\sin\sqrt{x}$, $y=|\text{tg}\ x|$ являются периодическими?

Доказать, что функция является периодической с периодом T **(17—20)**.

17. $\boxed{4}$ $y=\sin\frac{x}{2}$, $T=4\pi$.

18. $\boxed{4}$ $y=\cos\frac{2}{3}x$, $T=3\pi$.

19. $\boxed{5}$ $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, $T=\pi$.

20. $\boxed{5}$ $y=\text{tg}\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)$, $T=\frac{\pi}{3}$.

Найти наименьший положительный период функции **(21—24)**.

21. $\boxed{6}$ $y=\cos 3x$.

22. $\boxed{6}$ $y=\sin\frac{5x}{8}$.

23. $\boxed{6}$ $y=\text{tg}\frac{2x}{3}$.

24. $\boxed{7}$ $y=\sin 2x+\cos 2x$.

Вариант II

Выяснить, является ли функция четной или нечетной **(1—8)**.

1. $\boxed{1}$ $y=\frac{x}{3}+\frac{x^3}{4}$.

2. $\boxed{2}$ $y=\frac{x^3}{1+x^2}$.

3. $\boxed{1}$ $y=x^2-x^4+1$.

4. $\boxed{2}$ $y=\sin x\cdot x^3$.

5. $\boxed{2}$ $y=x-\sin x$.

6. $\boxed{3}$ $y=\frac{1}{1-\sqrt{2}\sin x}$.

7. $\boxed{3}$ $y=\frac{x^3}{1-\cos x}$.

8. $\boxed{3}$ $y=1-\cos x+\sin x$.

9. $\boxed{4}$ Четная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой оси. Достроить график этой функции, если его часть при $x\geqslant 0$ изображена на рисунке 16.

10. $\boxed{4}$ Достроить график нечетной функции, определенной на всей числовой оси (рис. 17).

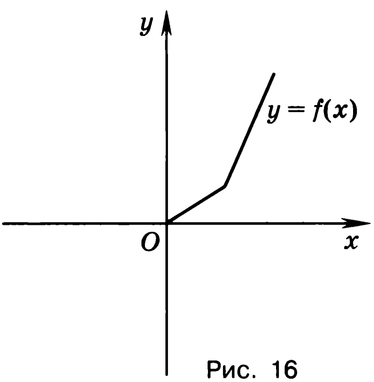


Рис. 16

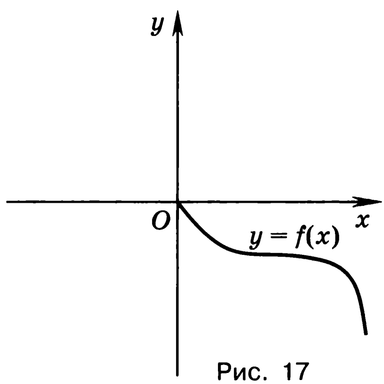


Рис. 17

11. $\boxed{4}$ Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой оси. Достроить ее график на промежутке $[-\pi; 0]$, если часть ее графика на отрезке $[0; \pi]$ изображена на рисунке 18 и известно, что функция $y=f(x)$ нечетная.

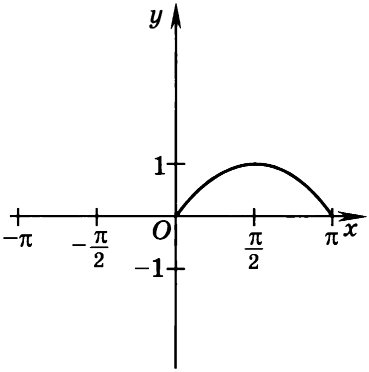


Рис. 18

Выяснить, является ли функция $g(x)$ четной или нечетной **(12—13)**.

12. $\boxed{5}$ $g(x)=f(x)-\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — нечетные функции.

13. $\boxed{5}$ $g(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — четные функции.

Изобразить схематически график периодической функции, если на рисунке изображена часть графика на промежутке, длина которого равна наименьшему положительному периоду функции **(14—15)**.

14. $\boxed{5}$ Рис 19. **15.** $\boxed{5}$ Рис 20.

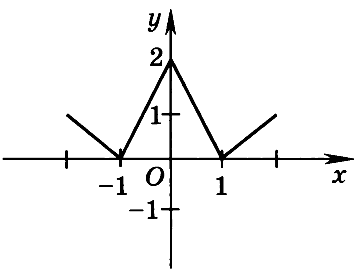


Рис. 19

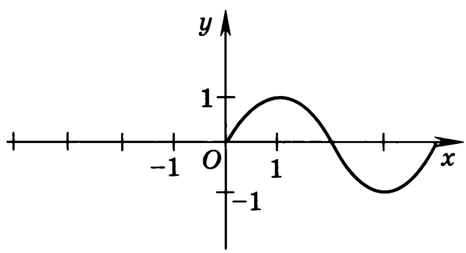


Рис. 20

16. $\boxed{5}$ Какие из функций $y=\sin 3x$, $y=x^3$, $y=\cos\sqrt{x-1}$, $y=\cos|x|$ являются периодическими?

Доказать, что функция является периодической с периодом T **(17—20)**.

17. $\boxed{4}$ $y=\cos 2x$, $T=\pi$. **18.** $\boxed{4}$ $y=\sin\frac{3}{4}x$, $T=\frac{8\pi}{3}$.

19. $\boxed{5}$ $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$, $T=\frac{2\pi}{3}$.

20. $\boxed{5}$ $y=\operatorname{ctg}\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$, $T=\frac{\pi}{5}$.

Найти наименьший положительный период функции **(21—24)**.

21. $\boxed{6}$ $y=\sin 4x$. **22.** $\boxed{6}$ $y=\cos\frac{5x}{6}$.

23. $\boxed{6}$ $y=\operatorname{tg}\frac{7x}{8}$. **24.** $\boxed{7}$ $y=\sin 5x-\cos 5x$.

§ 40. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график

Справочные сведения

Свойства функции $y = \cos x$

Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$.

Множество значений: $[-1; 1]$.

Функция периодическая; наименьший положительный период $T = 2\pi$.

Функция четная: $\cos(-x) = \cos x$.

Функция принимает значения (рис. 21):

равные нулю при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

положительные при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

отрицательные при $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

наибольшее, равное 1, при $x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

наименьшее, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

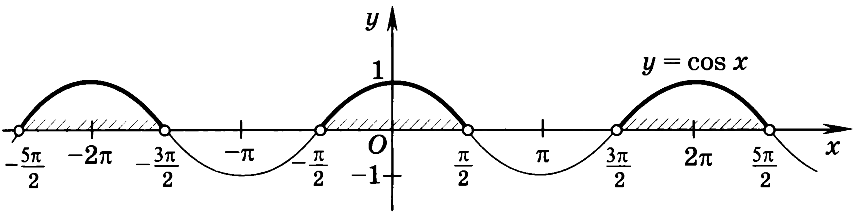


Рис. 21

Функция (рис. 22):

возрастает при $\pi + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi(n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}$;

убывает при $\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

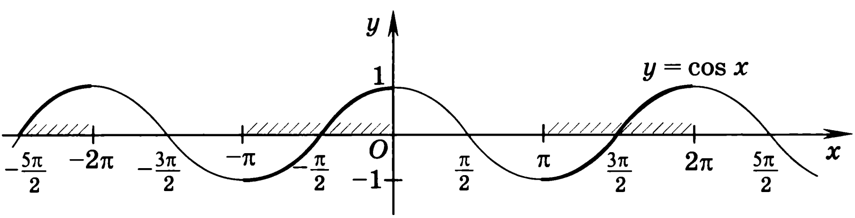


Рис. 22

Примеры с решениями

1. Найти все корни уравнения $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

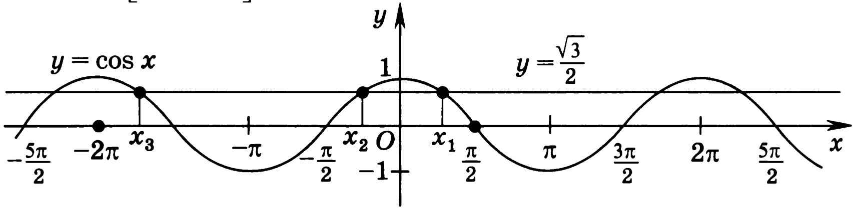


Рис. 23

Решение. Построим график функции $y=\cos x$ и прямую $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 23). На заданном отрезке прямая и график функции $y=\cos x$ пересекаются в трех точках, имеющих следующие абсциссы: $x_1=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ $(x_1\in[0;\ \pi])$, $x_2=-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{6}$ (симметрична точке x_1 относительно оси Oy), $x_3=-2\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{11\pi}{6}$ (x_3 находится на том же расстоянии от -2π, что и x_1 от точки 0, так как период функции $y=\cos x$ равен 2π). Следовательно, на заданном отрезке уравнение имеет три корня: $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=-\frac{\pi}{6}$, $x_3=-\frac{11\pi}{6}$.

2. Найти решения неравенства $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[0;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

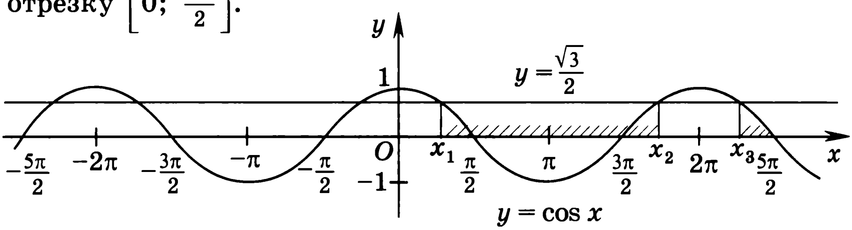


Рис. 24

Решение. Построим график функции $y=\cos x$ и прямую $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 24).

На заданном отрезке график функции $y=\cos x$ лежит ниже прямой $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при всех $x_1<x<x_2$, $x_3<x\leqslant\frac{5\pi}{2}$, где $x_1=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, $x_2=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$, $x_3=2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$. Решения-

ми неравенства на заданном отрезке являются промежутки $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6} < x \leqslant \frac{5\pi}{2}$.

3. Сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{3}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$; 2) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\cos\frac{5\pi}{3}$; 3) $\cos\frac{7\pi}{5}$ и $\sin\frac{8\pi}{5}$.

Решение.

1) Так как на промежутке $[0; \pi]$ функция $y=\cos x$ убывает, то $\cos\frac{\pi}{3} < \cos\frac{\pi}{7}$.

2) По формуле приведения $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$. На отрезке $[0; \pi]$ функция $y=\cos x$ убывает, и, значит, $\cos\frac{\pi}{6} > \cos\frac{\pi}{3}$, откуда $\cos\frac{\pi}{6} > \cos\frac{5\pi}{3}$.

3) По формулам приведения

$$\sin\frac{8\pi}{5} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\frac{\pi}{10};$$

$$\cos\frac{7\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Так как на отрезке $[0; \pi]$ функция убывает, то

$\cos\frac{\pi}{10} > \cos\frac{2\pi}{5}$, $-\cos\frac{\pi}{10} < -\cos\frac{2}{5}\pi$.

Следовательно, $\sin\frac{8\pi}{5} < \cos\frac{7\pi}{5}$.

4. Построить график функции: 1) $y=2\cos x$; 2) $y=|\cos x|$.

Решение.

1) Сначала построим график функции $y=\cos x$, а затем удвоим ординаты всех его точек (рис. 25). Действительно, например, если $x=2\pi$, то $\cos 2\pi = 1$, а $2\cos 2\pi = 2$; если $x=\pi$, то $\cos\pi = -1$, а $2\cos 2\pi = -2$; если $x=\frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\pi}{2} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

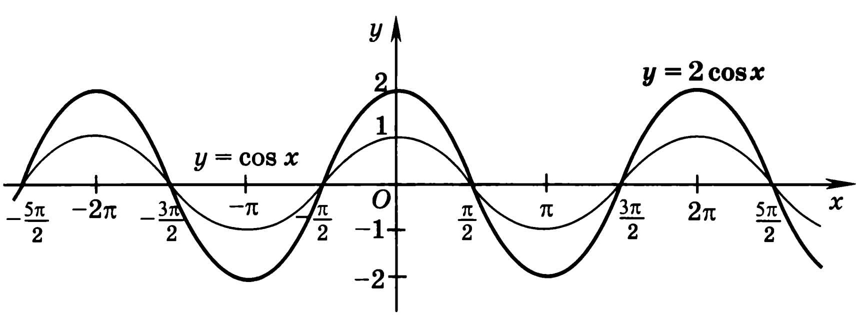


Рис. 25

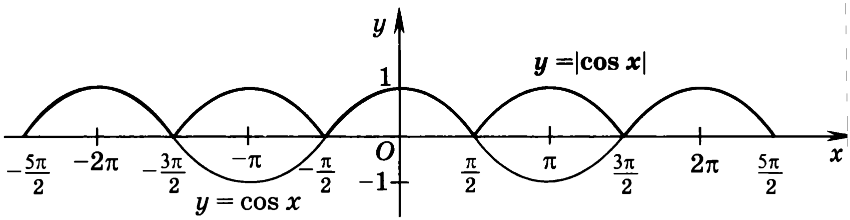


Рис. 26

2) При всех значениях x функция $y=|\cos x|$ принимает неотрицательные значения. График функции $y=|\cos x|$ можно получить из графика функции $y=\cos x$ симметричным отражением относительно оси Ox той его части, где $\cos x<0$ (рис. 26).

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. С помощью графика функции $y=\cos x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left[-\frac{3}{2}\pi;\ \pi\right]$:

1) $\boxed{1}$ функция возрастает, убывает;

2) $\boxed{1}$ значение функции равно нулю;

3) $\boxed{1}$ функция принимает наибольшее, наименьшее значения;

4) $\boxed{1}$ функция принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{4}$ Ответить на те же вопросы, используя график функции, изображенный на рисунке 27.

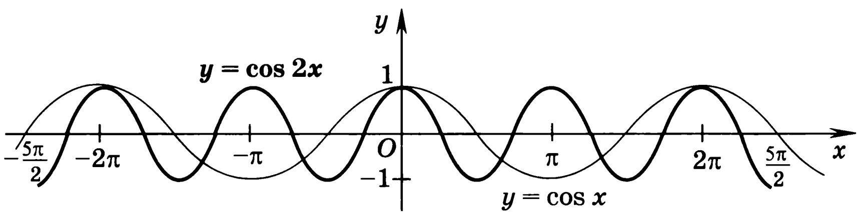


Рис. 27

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y=\cos x$ возрастающей на отрезке $\left[-\frac{3}{2}\pi;\ -\frac{\pi}{4}\right]$?

Сравнить числа (**4—6**).

4. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{5}{8}\pi\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$.

5. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$.

6. $\boxed{2}$ $\cos\pi$ и $\cos\frac{3\pi}{10}$.

С помощью графика функции $y=\cos x$ найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку (**7—8**).

7. $\boxed{4}$ $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$. **8.** $\boxed{4}$ $\cos x=\frac{1}{2}$, $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

С помощью графика функции $y=\cos x$ найти решения неравенства, принадлежащие данному промежутку (**9—11**).

9. $\boxed{5}$ $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

10. $\boxed{5}$ $\cos x\leqslant-\frac{1}{2}$, $\left[0;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

11. $\boxed{5}$ $\cos x\leqslant-1$, $\left[-2\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Сравнить числа (**12—15**).

12. $\boxed{4}$ $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ и $\cos\frac{7\pi}{4}$.

13. $\boxed{4}$ $\cos\frac{3\pi}{4}$ и $\sin\frac{3\pi}{8}$.

14. $\boxed{5}$ $\cos 0{,}8$ и $\cos 2{,}8$.

15. $\boxed{5}$ $\cos(-2)$ и $\cos(-0{,}2)$.

Построить график функции (**16—17**).

16. $\boxed{5}$ $y=\cos x-1{,}5$. **17.** $\boxed{5}$ $y=\cos x+2$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает отрицательные значения; 2) убывает (**18—20**).

18. $\boxed{5}$ $y=-\cos x$. **19.** $\boxed{5}$ $y=3\cos x$. **20.** $\boxed{7}$ $y=|4\cos x|$.

С помощью графиков функций выяснить, сколько корней имеет данное уравнение (**21—22**).

21. $\boxed{5}$ $\cos x=\frac{x}{7}$. **22.** $\boxed{8}$ $\cos 2x=\lg x$.

23. $\boxed{8}$ Исследовать функцию $y=2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ и построить ее график.

Вариант II

1. С помощью графика функции $y=\cos x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left[-2\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right]$:

1) $\boxed{1}$ функция возрастает, убывает;

2) $\boxed{1}$ значение функции равно нулю;

3) $\boxed{1}$ функция принимает наибольшее, наименьшее значения;

4) $\boxed{1}$ функция принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{4}$ Ответить на те же вопросы, используя график функции, изображенный на рисунке 28.

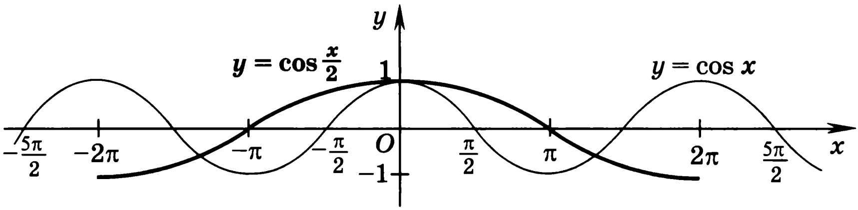


Рис. 28

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y=\cos x$ возрастающей на отрезке $\left[-\frac{3}{4}\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$?

Сравнить числа (**4—6**).

4. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

5. $\boxed{2}$ $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$. **6.** $\boxed{2}$ $\cos(-\pi)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

С помощью графика функции $y=\cos x$ найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку (**7—8**).

7. $\boxed{5}$ $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. **8.** $\boxed{5}$ $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

С помощью графика функции $y=\cos x$ найти решения неравенства, принадлежащие данному промежутку (**9—11**).

9. $\boxed{5}$ $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$. **10.** $\boxed{5}$ $\cos x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

11. $\boxed{5}$ $\cos x\geqslant 1$, $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Сравнить числа (**12—15**).

12. $\boxed{4}$ $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ и $\cos\frac{3\pi}{4}$. **13.** $\boxed{4}$ $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{5\pi}{4}$.

14. $\boxed{5}$ $\cos 6{,}5$ и $\cos 7{,}5$. **15.** $\boxed{5}$ $\cos(-3)$ и $\cos(-2{,}5)$.

Построить график функции (**16 — 17**).

16. $\boxed{5}$ $y = \cos x + 1$. **17.** $\boxed{5}$ $y = \cos x - 0{,}5$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает отрицательные значения; 2) убывает (**18 — 20**).

18. $\boxed{5}$ $y = \cos(-x)$. **19.** $\boxed{5}$ $y = 4\cos x$. **20.** $\boxed{7}$ $y = |3\cos x|$.

С помощью графиков функций выяснить, сколько корней имеет данное уравнение (**21 — 22**).

21. $\boxed{5}$ $\cos x = \frac{x}{8}$. **22.** $\boxed{8}$ $\cos 2x = \log_8 x$.

23. $\boxed{8}$ Исследовать функцию $y = 3\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ и построить ее график.

§ 41. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Справочные сведения

Свойства функции $y = \sin x$

Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$.

Множество значений: $[-1;\ 1]$.

Функция периодическая; наименьший положительный период $T = 2\pi$.

Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$.

Функция принимает значения (рис. 29):
равные нулю при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
положительные при $2\pi n < x < \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
отрицательные при $\pi(2n-1) < x < 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
наибольшее, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
наименьшее, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

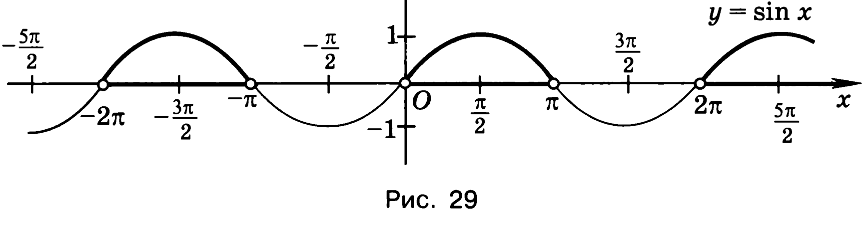


Рис. 29

Функция (рис. 30):
возрастает при $-\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;
убывает при $\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

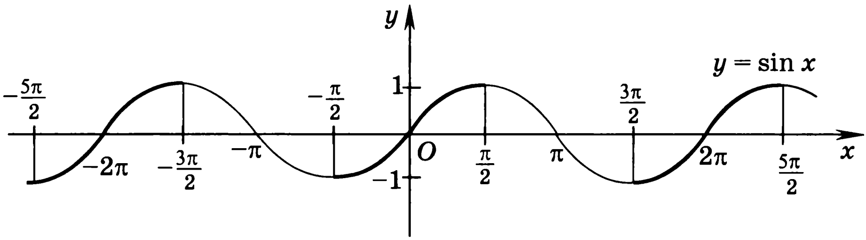


Рис. 30

Примеры с решениями

1. Найти решения неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Решение. Построим графики функций $y=\sin x$ и $y=-\frac{1}{2}$ (рис. 31). На заданном промежутке прямая $y=-\frac{1}{2}$ и синусоида пересекаются в трех точках, имеющих следующие абсциссы: $x_1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ $\left(-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $x_2=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ и $x_3=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$ (x_3 находится на том же расстоянии от 2π, что и x_1 от точки 0, так как период функции $y=\sin x$ равен 2π). При этом синусоида лежит ниже прямой $y=-\frac{1}{2}$ при $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<x_1$, $x_2<x<x_3$, т. е. $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}$. Эти промежутки и являются решением неравенства на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

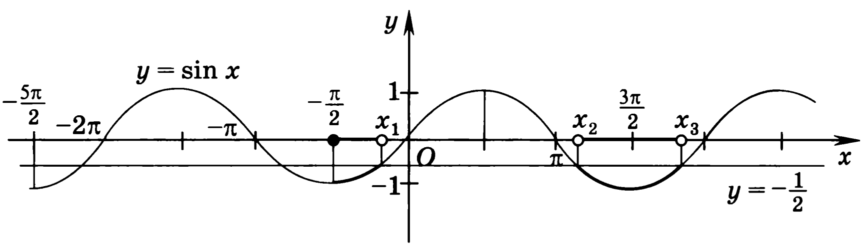


Рис. 31

2. Сравнить числа:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right)$ и $\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$; 2) $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\sin\left(-\frac{11\pi}{8}\right)$;

3) $\sin\frac{5\pi}{6}$ и $\cos\frac{15\pi}{8}$.

Решение.

1) Так как на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y=\sin x$ возрастает, то $\sin\left(-\frac{\pi}{15}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)$.

2) Воспользуемся нечетностью функции $y=\sin x$ и формулами приведения:

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{8}\right) = -\sin\frac{11\pi}{8} = -\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8}.$$

Так как на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y=\sin x$ возрастает, то $\sin\frac{3\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{8}$ и, следовательно, $\sin\frac{\pi}{8} < \sin\left(-\frac{11\pi}{8}\right)$.

3) По формулам приведения $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$;

$$\cos\frac{15\pi}{8} = \cos\left(\frac{12\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{8}.$$

Так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y=\sin x$ возрастает, то $\sin\frac{3\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{6}$ и, следовательно, $\sin\frac{5\pi}{6} < \cos\frac{15\pi}{8}$.

3. Построить график функции:

1) $y=\frac{1}{2}\sin x$; 2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y=\sin|x|$.

Решение.

1) Для построения графика функции $y=\frac{1}{2}\sin x$ (рис. 32) сначала построим график функции $y=\sin x$, а затем ордина-

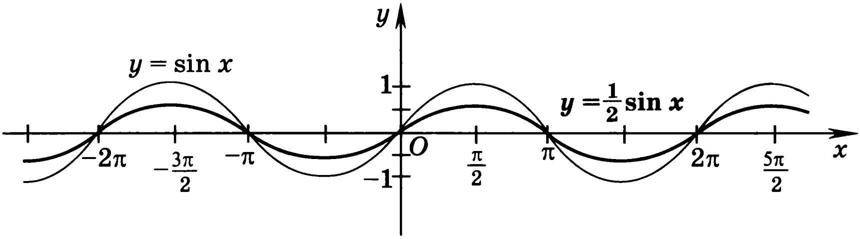


Рис. 32

ты всех его точек разделим на 2 $\left(\text{умножим на } \frac{1}{2}\right)$. Действительно, например, если $x=\frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\pi}{2}=1$, а $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$; если $x=-\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, а $\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$; если $x=0$, то $\sin 0=\frac{1}{2}\sin 0=0$.

2) Для построения графика функции $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ нужно график функции $y=\sin x$ сдвинуть на $\frac{\pi}{4}$ вправо (рис. 33). Действительно, например, $\sin x=0$ при $x=\pi$, а $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ при $x-\frac{\pi}{4}=\pi$, т. е. при $x=\pi+\frac{\pi}{4}$; $\sin x=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$, а $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ при $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, т. е. при $x=\frac{3\pi}{4}$; $\sin x=-1$ при $x=\frac{3\pi}{2}$, а $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ при $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$, т. е. при $x=\frac{7\pi}{4}$.

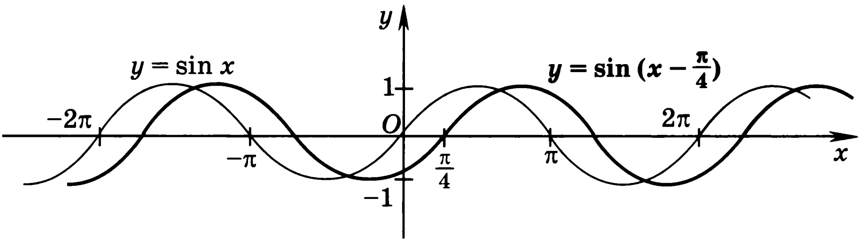


Рис. 33

3) Согласно правилу построения графика функции $y=f(|x|)$ нужно сохранить часть графика для $x\geqslant 0$ и отразить ее симметрично относительно оси Oy (часть графика для $x<0$ отбрасывается). Получим график, изображенный на рисунке 34.

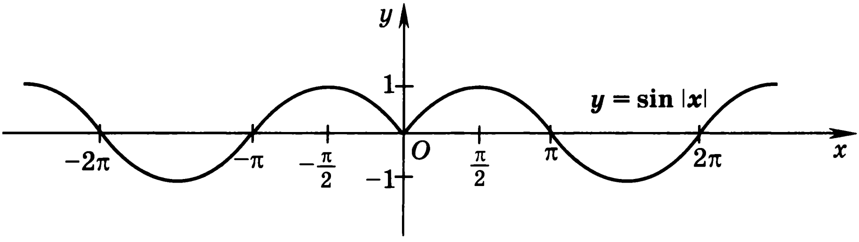


Рис. 34

Действительно, например, при $x=-\frac{\pi}{4}$ имеем $\sin\left|-\frac{\pi}{4}\right|=$ $=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; при $x=-\frac{\pi}{2}$ имеем $\sin\left|-\frac{\pi}{2}\right|=\sin\frac{\pi}{2}=1$; при $x=-\frac{3\pi}{2}$ имеем $\sin\left|-\frac{3\pi}{2}\right|=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. С помощью графика функции $y=\sin x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$:

1) $\boxed{1}$ функция возрастает, убывает;

2) $\boxed{1}$ функция принимает значения, равные нулю;

3) $\boxed{1}$ функция принимает положительные, отрицательные значения;

4) $\boxed{1}$ функция принимает наибольшее, наименьшее значения.

2. $\boxed{4}$ Ответить на те же вопросы, используя график функции, изображенный на рисунке 35.

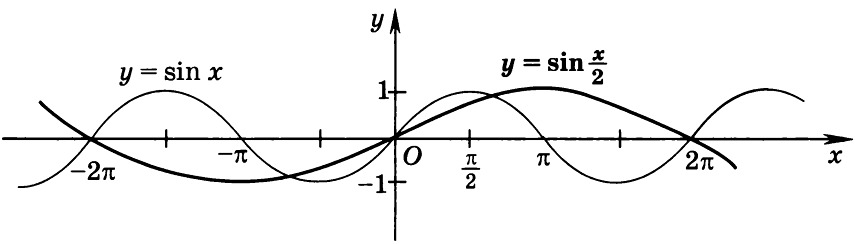


Рис. 35

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y=\sin x$ возрастающей на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$?

Найти все решения неравенства на заданном промежутке **(4—6)**.

4. $\boxed{5}$ $\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

5. $\boxed{5}$ $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\ 2\pi]$.

6. $\boxed{5}$ $\sin x\leqslant-1$, $[-2\pi;\ 2\pi]$.

Сравнить числа (**7—14**).

7. $\boxed{2}$ $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{2\pi}{5}$.

8. $\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

9. $\boxed{2}$ $\sin\pi$ и $\sin\frac{7\pi}{4}$.

10. $\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{11\pi}{10}\right)$ и $\sin\frac{\pi}{15}$.

11. $\boxed{5}$ $\sin\frac{4\pi}{9}$ и $\cos\frac{17\pi}{11}$.

12. $\boxed{5}$ $\sin 0,3$ и $\sin 3,4$.

13. $\boxed{5}$ $\sin(-2)$ и $\sin(-5)$.

14. $\boxed{5}$ $\sin(-0,5)$ и $\cos(-6)$.

Расположить числа в порядке возрастания (**15—16**).

15. $\boxed{6}$ $\sin 1$; $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; $\sin 1,5$.

16. $\boxed{6}$ $\sin 3$; $\cos 0,1$; $\sin(-1,5)$.

Построить график функции (**17—18**).

17. $\boxed{5}$ $y=\sin x+2$.

18. $\boxed{5}$ $y=\sin x-0,5$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает (**19—22**).

19. $\boxed{5}$ $y=\sin(-x)$.

20. $\boxed{5}$ $y=2\sin x$.

21. $\boxed{6}$ $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

22. $\boxed{6}$ $y=-\frac{1}{2}\sin x$.

Построить график функции (**23—26**).

23. $\boxed{6}$ $y=0,5\sin|x|$.

24. $\boxed{7}$ $y=|2\sin x|$.

25. $\boxed{7}$ $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

26. $\boxed{8}$ $y=\sin x+\cos x$.

С помощью графика функции выяснить, сколько корней имеет уравнение (**27—28**).

27. $\boxed{5}$ $\sin x=\frac{x}{8}$.

28. $\boxed{7}$ $\sin x=\log_{0,1} x$.

Вариант II

1. С помощью графика функции $y=\sin x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

1) $\boxed{1}$ функция возрастает, убывает;

2) $\boxed{1}$ функция принимает значения, равные нулю;

3) $\boxed{1}$ функция принимает положительные, отрицательные значения;

4) $\boxed{1}$ функция принимает наибольшее, наименьшее значения.

2. $\boxed{4}$ Ответить на те же вопросы, используя график функции, изображенный на рисунке 36.

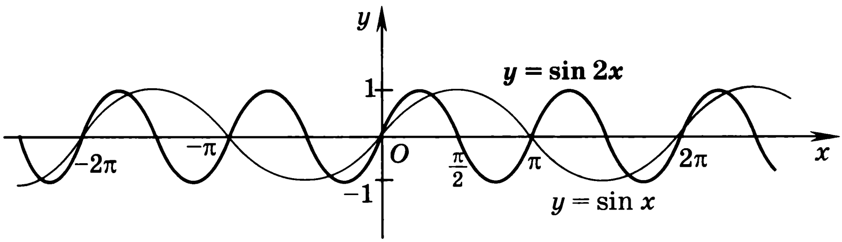


Рис. 36

3. $\boxed{3}$ Является ли функция $y=\sin x$ убывающей на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right]$?

Найти все решения неравенства на заданном промежутке (**4—6**).

4. $\boxed{5}$ $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-2\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

5. $\boxed{5}$ $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

6. $\boxed{5}$ $\sin x \geqslant 1$, $[-2\pi;\ 2\pi]$.

Сравнить числа (**7—14**).

7. $\boxed{2}$ $\sin 0{,}2\pi$ и $\sin \frac{3}{11}\pi$.

8. $\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$.

9. $\boxed{2}$ $\sin 2\pi$ и $\sin \frac{3\pi}{4}$.

10. $\boxed{4}$ $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$.

11. $\boxed{5}$ $\cos \frac{5\pi}{6}$ и $\sin \frac{13\pi}{10}$.

12. $\boxed{5}$ $\sin 4$ и $\sin 6{,}5$.

13. $\boxed{5}$ $\sin(-1)$ и $\sin(-4)$.

14. $\boxed{5}$ $\cos(-0{,}7)$ и $\sin(-0{,}8)$.

Расположить числа в порядке возрастания (**15—16**).

15. $\boxed{6}$ $\sin 6$; $\sin(-4{,}5)$; $\sin \frac{\pi}{12}$.

16. $\boxed{6}$ $\sin 1$; $\cos 3$; $\sin(-0{,}1)$.

Построить график функции (**17—18**).

17. $\boxed{5}$ $y=\sin x - 1$.

18. $\boxed{5}$ $y=\sin x + 3$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает (**19—22**).

19. $\boxed{5}$ $y=-\sin x$.

20. $\boxed{5}$ $y=\frac{1}{3}\sin x$.

21. $\boxed{6}$ $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

22. $\boxed{6}$ $y=-2\sin x$.

Построить график функции (23 — 26).

23. $\boxed{6}$ $y=3\sin|x|$.

24. $\boxed{7}$ $y=\left|\frac{1}{3}\sin x\right|$.

25. $\boxed{7}$ $y=\frac{1}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

26. $\boxed{8}$ $y=\sin x-\cos x$.

С помощью графика функции выяснить, сколько корней имеет уравнение (27 — 28).

27. $\boxed{5}$ $\sin x=\frac{x}{9}$.

28. $\boxed{7}$ $\sin x=\lg x$.

§ 42. Свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график

Справочные сведения

Свойства функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$

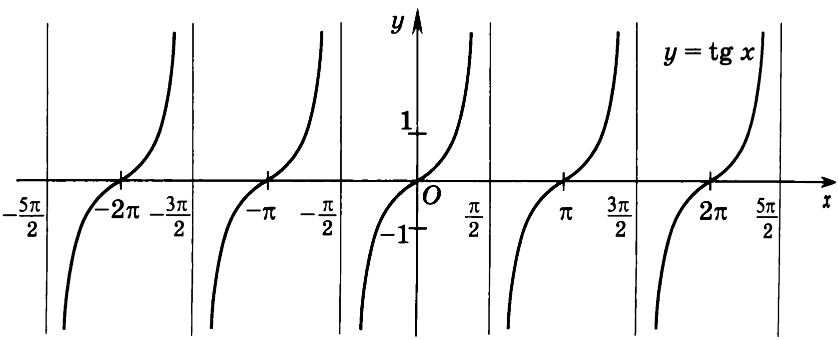


Рис. 37

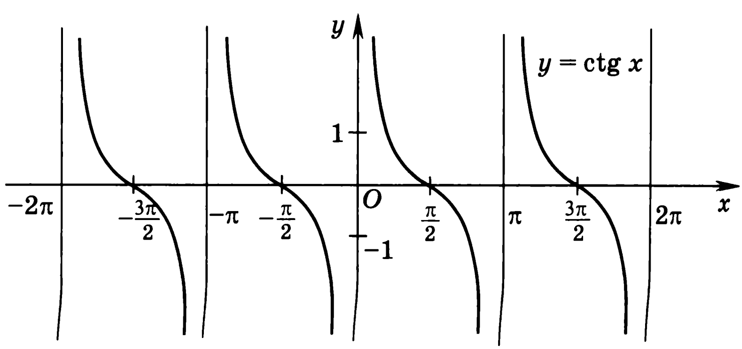


Рис. 38

Свойство	$y = \operatorname{tg} x$ (рис. 37)	$y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 38)
Область определения	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
Множество значений	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Периодичность	Наименьший положительный период $T = \pi$	Наименьший положительный период $T = \pi$
Четность, нечетность	Нечетная	Нечетная
Функция принимает значения:		
равные нулю при	$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
положительные при	$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
отрицательные при	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
Функция возрастает при	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	—
Функция убывает при	—	$\pi n < x < \pi(n+1),\ n \in \boldsymbol{Z}$

Примеры с решениями

1. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = -3$, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

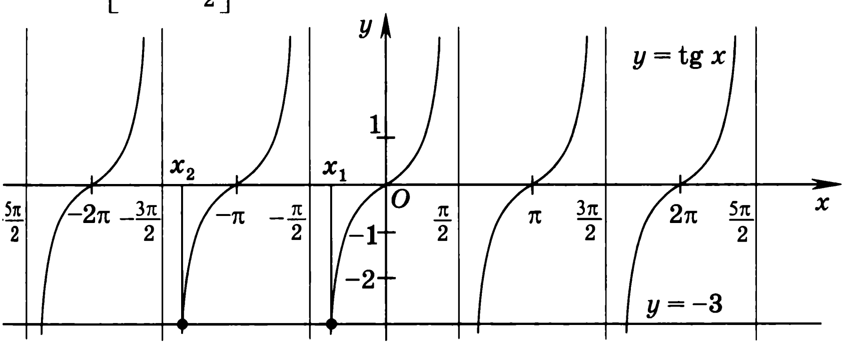


Рис. 39

Решение. Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -3$ (рис. 39). На заданном отрезке тангенсоида и прямая имеют две точки пересечения с абсциссами $x_1 = \operatorname{arctg}(-3) = -\operatorname{arctg} 3$ $\left(x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$ и $x_2 = -\pi - \operatorname{arctg} 3$. Следовательно, на данном отрезке уравнение имеет два корня: $x_1 = -\operatorname{arctg} 3$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 - \pi$.

2. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \geqslant -3$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

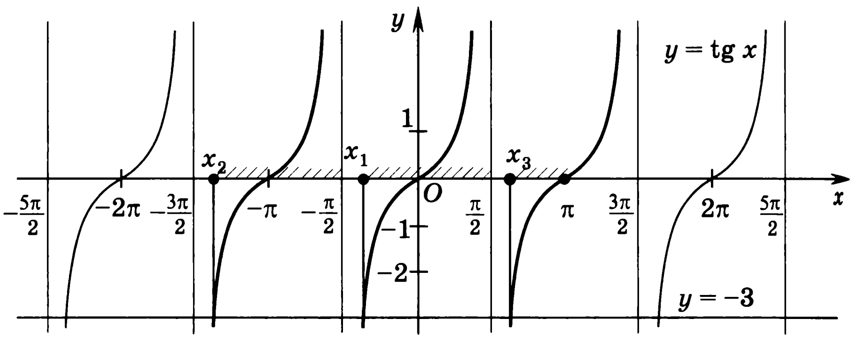


Рис. 40

Решение. Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = -3$ (рис. 40). На заданном отрезке прямая пересекает тангенсоиду в трех точках с абсциссами $x_1 = \operatorname{arctg}(-3) = -\operatorname{arctg} 3$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 - \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi = -\operatorname{arctg} 3 + \pi$. При этом график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = -3$ при $x_2 \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $x_1 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $x_3 \leqslant x \leqslant \pi$. Следовательно, решениями неравенства $\operatorname{tg} x \geqslant -3$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$ являются следующие промежутки: $-\operatorname{arctg} 3 - \pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $\pi - \operatorname{arctg} 3 \leqslant x \leqslant \pi$.

3. Сравнить числа:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{20}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{8}$.

Решение.

1) Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $-\frac{\pi}{8} > -\frac{3\pi}{20}$, то $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) > \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{20}\right)$.

2) По формуле приведения $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$. Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, имеем $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, и, следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$.

3) По формулам приведения и свойству нечетности функции $y=\operatorname{ctg} x$ запишем $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}=-\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=$ $=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$; $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{8}=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$. Так как функция $y=\operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0;\ \pi)$, то $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}<\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$, а значит, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{5}\right)<\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{8}$.

4. Построить график функции $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

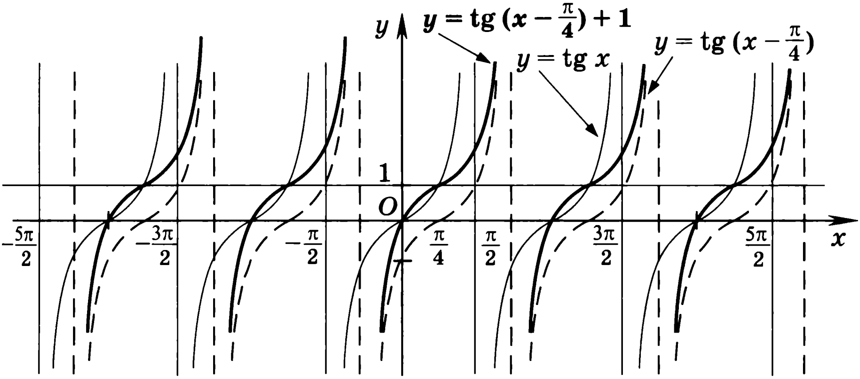


Рис. 41

Решение. Для построения графика заданной функции сдвинем график функции $y=\operatorname{tg} x$ на $\frac{\pi}{4}$ вправо и полученный график перенесем на 1 вверх (рис. 41).

Область определения функции — множество всех значений x, при которых $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$, т. е. $x\neq\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Так как период заданной функции равен π, то можно найти несколько контрольных точек на промежутке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$. Например, если $x=0$, то $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$; если $x=\frac{\pi}{4}$, то $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+1=1$; если $x=\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1=2$ и т. д.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. С помощью графика функции $y=\operatorname{tg} x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $[-\pi;\ 2\pi]$:

1) $\boxed{1}$ функция возрастает, убывает;

2) $\boxed{1}$ функция принимает значения, равные нулю;

3) $\boxed{1}$ функция принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{3}$ С помощью графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ ответить на те же вопросы для всех x из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right)$.

Найти все решения уравнения на заданном промежутке **(3—4)**.

3. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-\pi;\ \pi]$. **4.** $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = -1$, $[0;\ 2\pi]$.

Найти все решения неравенства на заданном промежутке **(5—7)**.

5. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$, $[-\pi;\ \pi]$.

6. $\boxed{5}$ $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

7. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x > 3$, $[0;\ 2\pi]$.

Найти все решения неравенства **(8—9)**.

8. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. **9.** $\boxed{6}$ $\operatorname{ctg} x < 1$.

Сравнить числа **(10—14)**.

10. $\boxed{2}$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$. **11.** $\boxed{2}$ $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$.

12. $\boxed{3}$ $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ и $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{8}$. **13.** $\boxed{4}$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$.

14. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} 1{,}8$ и $\operatorname{tg} (-2)$.

Расположить числа в порядке убывания **(15—16)**.

15. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{14}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$.

16. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} 3$; $\operatorname{tg} 1{,}8$; $\operatorname{tg} 2$; $\operatorname{tg} 1{,}5$.

Выяснить, является ли функция четной или нечетной, и построить ее график **(17—18)**.

17. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{tg} x - 0{,}5$. **18.** $\boxed{6}$ $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает **(19—20)**.

19. $\boxed{6}$ $y = -\operatorname{ctg} x$. **20.** $\boxed{7}$ $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Построить график функции **(21—22)**.

21. $\boxed{6}$ $y = \operatorname{tg} |x|$. **22.** $\boxed{7}$ $y = 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант II

1. С помощью графика функции $y = \operatorname{tg} x$ выяснить, при каких значениях x из промежутка $\left(-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$:

1) $\boxed{1}$ функция возрастает, убывает;

2) $\boxed{1}$ функция принимает значения, равные нулю;

3) $\boxed{1}$ функция принимает положительные, отрицательные значения.

2. $\boxed{3}$ С помощью графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ ответить на те же вопросы для всех x из промежутка $(-\pi;\ 2\pi)$.

Найти все решения уравнения на заданном промежутке (3—4).

3. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = 1,\ [0;\ 2\pi]$.

4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ [-2\pi;\ 0]$.

Найти все решения неравенства на заданном промежутке (5—7).

5. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3},\ \left(-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

6. $\boxed{5}$ $\operatorname{ctg} x \leqslant 1,\ \left(-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

7. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg} x < 3,\ \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right)$.

Найти все решения неравенства **(8—9)**.

8. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. $\boxed{6}$ $\operatorname{ctg} x > 1$.

Сравнить числа **(10—14)**.

10. $\boxed{2}$ $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$ и $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{11}$.

11. $\boxed{2}$ $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$.

12. $\boxed{3}$ $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}$ и $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$.

13. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{10}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{12\pi}{11}\right)$.

14. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg}(-0{,}7)$ и $\operatorname{tg} 4$.

Расположить числа в порядке убывания **(15—16)**.

15. $\boxed{5}$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right);\ \operatorname{tg} \frac{17\pi}{15};\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$.

16. $\boxed{6}$ $\operatorname{tg} 3;\ \operatorname{tg} 4;\ \operatorname{tg} 0{,}5;\ \operatorname{tg} 1{,}49$.

Выяснить, является ли функция четной или нечетной, и построить ее график **(17—18)**.

17. $\boxed{5}$ $y = \operatorname{tg} x + 0{,}5$.

18. $\boxed{6}$ $y = 2 \operatorname{tg} x$.

Построить график функции и найти значения x, при которых функция: 1) принимает положительные значения; 2) возрастает (19—20).

19. $\boxed{6}$ $y = -\operatorname{tg} x$. **20.** $\boxed{7}$ $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Построить график функции (21—22).

21. $\boxed{6}$ $y = \operatorname{ctg} |x|$. **22.** $\boxed{7}$ $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

§ 43*. Обратные тригонометрические функции

Справочные сведения

Свойства функции $y = \arcsin x$ (рис. 42)

1. Область определения $[-1; 1]$.
2. Множество значений $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция возрастает.
4. Функция является нечетной.

Свойства функции $y = \arccos x$ (рис. 43)

1. Область определения $[-1; 1]$.
2. Множество значений $[0; \pi]$.
3. Функция убывает.

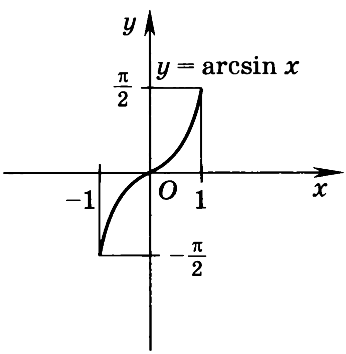


Рис. 42

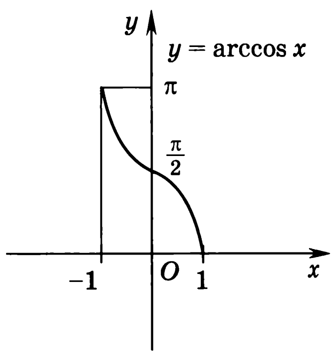


Рис. 43

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 44)

1. Область определения $\boldsymbol{R}$.
2. Множество значений $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

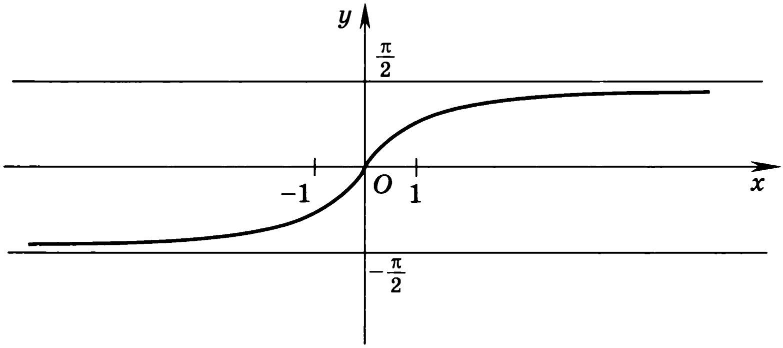


Рис. 44

3. Функция возрастает.
4. Функция является нечетной.

Примеры с решениями

1. Сравнить числа:
   1) arcsin 0,7 и arcsin 0,85; 2) arccos 0,01 и arccos 0,011; 3) arctg (– 1,3) и arctg (– 1,03).

Решение:

1) Функция $y=\arcsin x$ возрастает на области определения, а $0{,}7<0{,}85$, следовательно, $\arcsin 0{,}7<\arcsin 0{,}85$.

2) $\arccos 0{,}01>\arccos 0{,}011$, так как $0{,}01<0{,}011$ и функция $y=\arccos x$ является убывающей.

3) $\operatorname{arctg}(-1{,}3)<\operatorname{arctg}(-1{,}03)$, так как $-1{,}3<-1{,}03$ и функция $y=\operatorname{arctg} x$ возрастающая.

2. Найти область определения функции $y=\arccos\frac{2x-1}{5}$.

Решение. Областью определения функции $y=\arccos x$ является отрезок $[-1;\ 1]$, т. е. $-1\leqslant\frac{2x-1}{5}\leqslant 1$. Решая это двойное неравенство, получаем $-5\leqslant 2x-1\leqslant 5$, $-4\leqslant 2x\leqslant 6$, $-2\leqslant x\leqslant 3$. Ответ. $[-2;\ 3]$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти значение функции $y=\arcsin x$ при $x=x_0$ **(1—3)**.

1. $\boxed{1}$ $x_0=\frac{1}{2}$. **2.** $\boxed{1}$ $x_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\boxed{1}$ $x_0=-1$.

Найти значение функции $y=\arccos x$ при $x=x_0$ **(4—6)**.

4. $\boxed{1}$ $x_0=1$. **5.** $\boxed{1}$ $x_0=0$. **6.** $\boxed{2}$ $x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найти значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = x_0$ (7—9).

7. $\boxed{1}$ $x_0 = \sqrt{3}$. **8.** $\boxed{1}$ $x_0 = -1$. **9.** $\boxed{1}$ $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Сравнить числа (10—14).

10. $\boxed{2}$ $\arcsin \frac{1}{7}$ и $\arcsin \frac{1}{8}$.

11. $\boxed{2}$ $\arcsin(-0{,}7)$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{7}\right)$.

12. $\boxed{2}$ $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

13. $\boxed{2}$ $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

14. $\boxed{2}$ $\operatorname{arctg} \sqrt{5}$ и $\operatorname{arctg} \sqrt{6}$.

Решить уравнение (15—20).

15. $\boxed{3}$ $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$. **16.** $\boxed{3}$ $\arccos x = \frac{\pi}{6}$.

17. $\boxed{3}$ $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$. **18.** $\boxed{5}$ $\arcsin(3x-1) = \frac{\pi}{3}$.

19. $\boxed{5}$ $\arccos \frac{x-2}{3} = \frac{3\pi}{4}$. **20.** $\boxed{5}$ $\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3} = -\frac{\pi}{4}$.

Найти область определения функции (21—22).

21. $\boxed{6}$ $y = \arcsin \frac{1-2x}{2}$. **22.** $\boxed{6}$ $y = \arccos \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{3}}$.

Вариант II

Найти значение функции $y = \arcsin x$ при $x = x_0$ (1—3).

1. $\boxed{1}$ $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\boxed{1}$ $x_0 = -\frac{1}{2}$. **3.** $\boxed{1}$ $x_0 = 0$.

Найти значение функции $y = \arccos x$ при $x = x_0$ (4—6).

4. $\boxed{1}$ $x_0 = -1$. **5.** $\boxed{1}$ $x_0 = \frac{1}{2}$. **6.** $\boxed{2}$ $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найти значение функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = x_0$ (7—9).

7. $\boxed{1}$ $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** $\boxed{1}$ $x_0 = 1$. **9.** $\boxed{1}$ $x_0 = -\sqrt{3}$.

Сравнить числа (10—14).

10. $\boxed{2}$ $\arcsin(-0{,}5)$ и $\arcsin(-0{,}1)$.

11. $\boxed{2}$ $\arcsin \frac{1}{13}$ и $\arcsin(0{,}13)$.

12. $\boxed{2}$ $\arccos 0{,}18$ и $\arccos 0{,}21$.

13. $\boxed{2}$ $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

14. $\boxed{2}$ $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Решить уравнение **(15—20).**

15. $\boxed{3}$ $\arccos x=\frac{\pi}{3}$.

16. $\boxed{3}$ $\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$.

17. $\boxed{3}$ $\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{6}$.

18. $\boxed{5}$ $\arccos(1+2x)=\frac{2\pi}{3}$.

19. $\boxed{5}$ $\arcsin\frac{x+5}{2}=\frac{\pi}{4}$.

20. $\boxed{5}$ $\operatorname{arctg}\frac{2-3x}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Найти область определения функции **(21—22).**

21. $\boxed{6}$ $y=\arccos\frac{3+x}{4}$.

22. $\boxed{6}$ $y=\arcsin\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{2}}$.

Контрольная работа № 4

Вариант I

1. Найти область определения и множество значений функции $y=2\cos x$.
2. Выяснить, является ли функция $y=\sin x-\operatorname{tg} x$ четной или нечетной.

3. Изобразить схематически график функции $y=\sin x+1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

---

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=3\sin x\cos x+1$.
5. Построить график функции $y=0{,}5\cos x-2$. При каких значениях x функция возрастает? убывает?

Вариант II

1. Найти область определения и множество значений функции $y=0{,}5\cos x$.
2. Выяснить, является ли функция $y=\cos x-x^2$ четной или нечетной.

3. Изобразить схематически график функции $y=\cos x-1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

---

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{3}\cos^2 x-\frac{1}{3}\sin^2 x+1$.

5. Построить график функции $y=2\sin x+1$. При каких значениях x функция возрастает? убывает?

Задания для подготовки к экзамену

1. $\boxed{\text{A}}$ Найти множество значений функции $y=-\frac{\cos 0{,}2x}{2}$.
Ответ. $-0{,}5\leqslant y\leqslant 0{,}5$.

2. $\boxed{\text{A}}$ Найти множество значений функции $y=\sin x+2$.
Ответ. $[1;\ 3]$.

3. $\boxed{\text{A}}$ Найти множество значений функции $y=2-\sin^2 x$.
Ответ. $[1;\ 2]$.

4. $\boxed{\text{B}}$ Найти множество значений функции
$y=\frac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}\,(\cos x-\sin x)\right)$. Ответ. $[1;\ 2]$.

5. $\boxed{\text{C}}$ Найти множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in[\operatorname{arctg}0{,}5;\ \operatorname{arctg}3]$. Ответ. $[0{,}6;\ 1]$.

6. $\boxed{\text{C}}$ Найти множество значений функции $y=\cos 2x$, если $x\in\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3};\ \operatorname{arctg}2\right]$. Ответ. $[-0{,}6;\ 1]$.

7. $\boxed{\text{C}}$ Найти множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in\left[\arccos\frac{5}{13};\ \frac{5\pi}{12}\right]$. Ответ. $\left[0{,}5;\ \frac{120}{169}\right]$.

8. $\boxed{\text{C}}$ При каких значениях a сумма выражений
$$\log_a(\sin x+2)\ \text{и}\ \log_a(\sin x+3)$$
равна 1 хотя бы при одном значении x? Ответ. $2\leqslant a\leqslant 12$.

Задания для интересующихся математикой

Примеры с решениями

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1—2).

1. $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x+\cos x+2}$.

Решение. Пусть $t=\cos x$, тогда $|t|\leqslant 1$ и $f(x)=\frac{1}{\varphi(t)}$, где $\varphi(t)=1-t^2+t+2=3-t^2+t=\frac{13}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$.

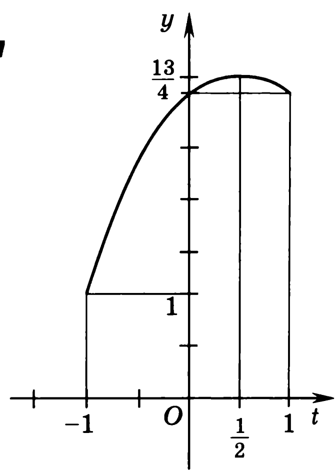


Рис. 45

На рисунке 45, где изображен график функции $y=\varphi(t)$, на отрезке $[-1;\ 1]$ видно, что $\varphi(-1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, т. е. $1 \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{13}{4}$. Следовательно, $\frac{4}{13} \leqslant \frac{1}{\varphi(t)} \leqslant 1$, т. е. $\frac{4}{13} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Ответ. Наименьшее значение функции $f(x)$ равно $\frac{4}{13}$, а наибольшее значение равно 1.

2. $f(x) = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решение. Воспользуемся тождествами

$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$,

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \times (\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$.

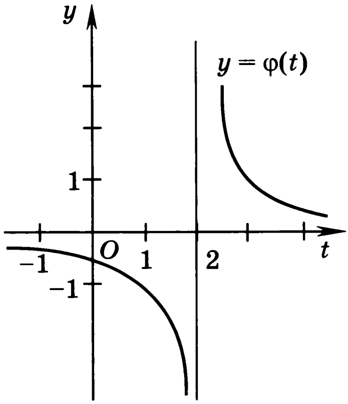


Рис. 46

Положим $t = \sin^2 2x$. Тогда

$$f(x) = \frac{1 - \frac{3}{4}t}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{3t-4}{2(t-2)} = \frac{(3t-6)+2}{2(t-2)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{t-2},$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Функция $y = \varphi(t) = \frac{1}{t-2}$, график которой изображен на рисунке 46, убывает на отрезке $[0;\ 1]$, и потому $\varphi(1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(0)$, т. е. $-1 \leqslant \varphi(t) \leqslant -\frac{1}{2}$, откуда следует, что $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Ответ. Наименьшее значение функции $f(x)$ равно $\frac{1}{2}$, а наибольшее равно 1.

Задания для самостоятельной работы

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1—3).

1. $f(x) = \dfrac{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}{2\cos^4 x + \sin^2 x}$. (Ответ. $\frac{15}{7}$ и $\frac{3}{2}$.)

2. $f(x) = \dfrac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}$. (Ответ. $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{15}$.)

3. $f(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$. (Ответ. 2 и 1.)

Исследовать функцию и построить ее график (4—34).

4. $y=\cos 3x$.

5. $y=\sin 2x$.

6. $y=2\sin 3x$.

7. $y=3\cos 2x$.

8. $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

9. $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

10. $y=\frac{\cos x}{|\cos x|}$.

11. $y=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.

12. $y=\sin x+|\sin x|$.

13. $y=\sin x\operatorname{ctg} x$.

14. $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

15. $y=\sqrt{\cos x}$.

16. $y=\cos^2 2x$.

17. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

18. $y=|\sin x-\cos x|$.

19. $y=\frac{|\sin x|}{\cos x}$.

20. $y=\frac{\cos x}{|\sin x|}$.

21. $y=\frac{1}{\cos x}$.

22. $y=\frac{1}{\sin^2 x}$.

23. $y=x\sin x$.

24. $y=\sin|x|$.

25. $y=|\sin|x||$.

26. $y=\log_2\cos x$.

27. $y=\sqrt{\log_2\sin x}$.

28. $y=\arcsin x$.

29. $y=\arccos x$.

30. $y=\operatorname{arctg} x$.

31. $y=\sin(\arcsin x)$.

32. $y=\arcsin(\sin x)$.

33. $y=\cos(\arccos(-x))$.

34. $y=\arccos(\cos x)$.

35. Доказать, что функция $y=\sin x^2$ не является периодической.

36. Доказать, что при всех $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{16}\leqslant\sin^{10}x+\cos^{10}x\leqslant 1.$$

37. Доказать, что при всех $x\in[-1;\ 1]$ справедливы равенства:

1) $\cos(2\arccos x)=2x^2-1$; 2) $\sin(3\arcsin x)=3x-4x^3$.

38. Доказать, что при всех $x\in\boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2|\operatorname{arctg} x|.$$

Глава VIII Производная и ее геометрический смысл

§ 44. Производная

Справочные сведения

Производная функции $f(x)$ в точке x обозначается $f'(x)$ и определяется формулой

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то эта функция называется *дифференцируемой в точке* x_0.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то функция называется *дифференцируемой на этом промежутке.*

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если C — заданное число, то $C'=0$.

Формула производной линейной функции:

$$(kx+b)'=k.$$

Примеры с решениями

1. Найти $f(x+h)$, если:

1) $f(x)=\sqrt{x}$; 2) $f(x)=x^2+1$; 3) $f(x)=(x+1)^2$.

Решение.

1) $f(x+h)=\sqrt{x+h}$;

2) $f(x+h)=(x+h)^2+1$;

3) $f(x+h)=(x+h+1)^2$.

2. Используя определение производной, найти производную функции $f(x)=x^2-3x$.

Решение. Составим разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ для заданной функции:

$$\frac{((x+h)^2-3(x+h))-(x^2-3x)}{h}=$$

$$=\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}=$$

$$=\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\frac{h(2x+h-3)}{h}=2x-3+h.$$

Если $h \to 0$, то $2x-3+h \to 2x-3$, следовательно,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x-3+h)=2x-3.$$

Ответ. $(x^2-3x)'=2x-3$.

3. Найти производную функции $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$.

Решение. По формуле производной линейной функции $\left(-\frac{1}{2}x+2\right)'=-\frac{1}{2}$.

4. Точка движется по закону $s(t)=t^2+t$. Найти: 1) среднюю скорость движения точки за промежуток времени от $t=2$ до $t+h=6$; 2) мгновенную скорость движения; 3) скорость движения в момент времени $t=7$.

Решение.

1) Средняя скорость за промежуток времени от t до $t+h$ (от t_1 до t_2) находится по формуле

$$v_{\text{ср}}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}. \tag{1}$$

По условию $s(t)=t^2+t$, $t=2$, $t+h=6$, откуда $h=6-2=4$, $s(2)=2^2+2=6$, $s(6)=6^2+6=42$.

По формуле (1) получим $v_{\text{ср}}=\frac{42-6}{4}=9$.

2) Мгновенная скорость движения в момент времени t находится по формуле

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}. \tag{2}$$

Поскольку $s(t)=t^2+t$, имеем $s(t+h)=(t+h)^2+(t+h)=$ $=t^2+2th+h^2+t+h$. По формуле (2) получим

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{(t^2+2th+h^2+t+h)-(t^2+t)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2th+h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}(2t+h+1)=2t+1.$$

3) Так как $v(t)=2t+1$, то $v(7)=2\cdot 7+1=15$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Для заданной функции $f(x)$ найти $f(x+h)$ (**1—2**).

1. $\boxed{2}$ $f(x)=\lg(3x-1)$. **2.** $\boxed{3}$ $f(x)=\frac{x^2}{3}-\sin 2x$.

Используя определение производной, найти производную заданной функции (**3 — 4**).

3. $\boxed{3}$ $f(x)=4x-1$. **4.** $\boxed{4}$ $f(x)=5x^2-3x$.

Найти $f'(x)$, используя формулу производной линейной функции (**5 — 7**).

5. $\boxed{1}$ $f(x)=18x-0{,}5$.

6. $\boxed{2}$ $f(x)=-\frac{x}{3}+8-\pi$.

7. $\boxed{2}$ $f(x)=15-x\sqrt{2}$.

8. $\boxed{4}$ Точка движется по закону $s(t)=3t^2$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t=3$ до $t+h=5$.

9. $\boxed{5}$ Точка движется по закону $s(t)=\frac{t^2}{3}$. Найти мгновенную скорость движения и скорость движения в момент времени $t=15$.

Вариант II

Для заданной функции $f(x)$ найти $f(x+h)$ (**1 — 2**).

1. $\boxed{2}$ $f(x)=e^{2x+1}$. **2.** $\boxed{3}$ $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3x^2$.

Используя определение производной, найти производную заданной функции (**3 — 4**).

3. $\boxed{3}$ $f(x)=5x-2$. **4.** $\boxed{4}$ $f(x)=2x-3x^2$.

Найти $f'(x)$, используя формулу производной линейной функции (**5 — 7**).

5. $\boxed{1}$ $f(x)=0{,}1x+3$.

6. $\boxed{2}$ $f(x)=\frac{2x}{3}-7+2\pi$.

7. $\boxed{2}$ $f(x)=-4+x\lg 2$.

8. $\boxed{4}$ Точка движется по закону $s(t)=\frac{t^2}{2}$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t=1$ до $t+h=5$.

9. $\boxed{5}$ Точка движется по закону $s(t)=0{,}1t^2$. Найти мгновенную скорость движения и скорость движения в момент времени $t=20$.

§ 45. Производная степенной функции

Справочные сведения

Производная степенной функции находится по формуле[1]

$$(x^p)' = px^{p-1}.$$

В частности,

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \ (x \neq 0), \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (x > 0).$$

Производная функции вида $f(x) = (kx+b)^p$ находится по формуле

$$((kx+b)^p)' = pk(kx+b)^{p-1}.$$

Пример с решением

Найти производную функции: 1) x^{12}; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Решение.

1) $(x^{12})' = 12x^{12-1} = 12x^{11}$;

2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\dfrac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}-1} = -\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти производную функции (**1—12**).

1. $\boxed{1}$ x^8. **2.** $\boxed{2}$ x^{-11}. **3.** $\boxed{2}$ $x^{\frac{2}{3}}$. **4.** $\boxed{2}$ $x^{-\frac{4}{5}}$.

5. $\boxed{3}$ $\dfrac{1}{x^{10}}$. **6.** $\boxed{3}$ $\sqrt[6]{x^5}$. **7.** $\boxed{4}$ $\dfrac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$. **8.** $\boxed{3}$ $(1-3x)^4$.

9. $\boxed{3}$ $(-5x)^3$. **10.** $\boxed{3}$ $(4x-3)^{-6}$.

11. $\boxed{4}$ $\sqrt[8]{-5+2x}$. **12.** $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{x}{2}-3\right)^3}}$.

---

[1] Все приведенные в данной главе формулы справедливы при тех значениях входящих в них букв, при которых и левая, и правая части этих формул имеют смысл.

Найти $f'(x_0)$ **(13 — 14)**.

13. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-3}$, $x_0=3$. **14.** $\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{3-2x}$, $x_0=-11$.

15. $\boxed{4}$ При каких значениях x производная функции $f(x)=x^3$ равна 3?

16. $\boxed{5}$ Решить уравнение $f'(x)=f(x)$, если $f(x)=(x+1)^2$.

Найти такие значения x, при которых производная функции $f(x)$ принимает указанное значение **(17 — 20)**.

17. $\boxed{3}$ $f(x)=x^2$, $f'(x)=3$.

18. $\boxed{4}$ $f(x)=(2x+3)^2$, $f'(x)=3$.

19. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-1}$, $f'(x)=-4$.

20. $\boxed{6}$ $f(x)=x^2-6x+9$, $f'(x)=0$.

Указать те функции, производные которых можно найти, пользуясь формулами $(x^p)'=px^{p-1}$ и $((kx+b)^p)'=pk(kx+b)^{p-1}$ **(21 — 23)**.

21. $\boxed{3}$ 1) $f(x)=x^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$; 2) $f(x)=3x^2+1$;

3) $f(x)=(3x)^2$; 4) $f(x)=\sqrt{2x-9}$.

22. $\boxed{4}$ 1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; 2) $f(x)=x^2+10x+25$;

3) $f(x)=x^2+10x+20$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-3x}}$.

23. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$; 2) $f(x)=(4x+7-\sqrt{3})^5$;

3) $f(x)=49x^2$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{((1-\sqrt{2})x+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[5]{5})^6}$.

Вариант II

Найти производную функции **(1 — 12)**.

1. $\boxed{1}$ x^9. **2.** $\boxed{2}$ x^{-12}. **3.** $\boxed{2}$ $x^{\frac{4}{5}}$.

4. $\boxed{2}$ $x^{-\frac{2}{3}}$. **5.** $\boxed{3}$ $\dfrac{1}{x^{18}}$. **6.** $\boxed{3}$ $\sqrt[4]{x}$.

7. $\boxed{4}$ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$. **8.** $\boxed{3}$ $(2-5x)^4$. **9.** $\boxed{3}$ $(-2x)^5$.

10. $\boxed{3}$ $(7x-1)^{-4}$. **11.** $\boxed{4}$ $\sqrt[10]{-3+12x}$. **12.** $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{\left(\frac{x}{3}+2\right)^5}}$.

Найти $f'(x_0)$ **(13 — 14).**

13. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-4}$, $x_0=2$. **14.** $\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{1-5x}$, $x_0=-3$.

15. $\boxed{4}$ При каких значениях x производная функции $f(x)=x^5$ равна 5?

16. $\boxed{5}$ Решить уравнение $f(x)=f'(x)$, если $f(x)=(1-x)^2$.

Найти такие значения x, при которых производная функции $f(x)$ принимает указанное значение **(17 — 20).**

17. $\boxed{3}$ $f(x)=(x-3)^2$, $f'(x)=-3$.

18. $\boxed{4}$ $f(x)=(3x-2)^3$, $f'(x)=4$.

19. $\boxed{4}$ $f(x)=x^{-1}$, $f'(x)=1$.

20. $\boxed{6}$ $f(x)=4x^2+4x+1$, $f'(x)=0$.

Указать те функции, производные которых можно найти по формулам $(x^p)'=px^{p-1}$ и $((kx+b)^p)'=pk(kx+b)^{p-1}$ **(21 — 23).**

21. $\boxed{3}$ 1) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$; 2) $f(x)=5x^3+2$;
3) $f(x)=(5x)^3$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

22. $\boxed{4}$ 1) $f(x)=\sqrt{2-3x}$; 2) $f(x)=x^2-6x+9$;
3) $f(x)=x^2-6x+10$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{7x-2}$.

23. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+9}}$; 2) $f(x)=(\sqrt{2}-5+3x)^4$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2}{9}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{(\sqrt[5]{0{,}5}+\sqrt[7]{0{,}7}+(\sqrt{3}-1)x)^9}$.

§ 46. Правила дифференцирования

Справочные сведения

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x),$$

$$(Cf(x))'=Cf'(x),$$

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Производная сложной функции $F(x)=f(g(x))$ находится по формуле $F'(x)=f'(y)\cdot g'(x)$, где $y=g(x)$, т. е. по формуле $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Примеры с решениями

1. Найти производную функции:

1) $x^7+x^{\frac{1}{3}}-5$; 2) $18x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $5x^2(x-1)$; 4) $\frac{\sqrt{x}+1}{2-x}$.

Решение.

1) $\left(x^7+x^{\frac{1}{3}}-5\right)'=(x^7)'+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'-5'=7x^6+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$;

2) $\left(18x^{-\frac{2}{3}}\right)'=18\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1}=-12x^{-\frac{5}{3}}$;

3) I способ. $(5x^2(x-1))'=5((x^2)'(x-1)+x^2(x-1)')=$
$=5(2x(x-1)+x^2\cdot 1)=5(2x^2-2x+x^2)=5(3x^2-2x)=15x^2-10x$;

II способ. $(5x^2(x-1))'=(5(x^3-x^2))'=5(3x^2-2x)=$
$=15x^2-10x$;

4) $$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2-x}\right)'=\frac{(\sqrt{x}+1)'(2-x)-(\sqrt{x}+1)(2-x)'}{(2-x)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(2-x)-(\sqrt{x}+1)(-1)}{(2-x)^2}=\frac{2-x+2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(2-x)^2}=$$

$$=\frac{2-x+2x+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2-x)^2}=\frac{x+2\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}(2-x)^2}.$$

2. Найти $f'(3)$, если $f(x)=(4-x)^5\sqrt{2x-2}$.

Решение. $f'(x)=\left((4-x)^5(2x-2)^{\frac{1}{2}}\right)'=((4-x)^5)'(2x-2)^{\frac{1}{2}}+$
$+(4-x)^5\left(\left(2x-2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=5\cdot(-1)(4-x)^4(2x-2)^{\frac{1}{2}}+(4-x)^5\cdot\frac{1}{2}\times$
$\times 2(2x-2)^{-\frac{1}{2}}=-5(4-x)^4(2x-2)^{\frac{1}{2}}+(4-x)^5\cdot(2x-2)^{-\frac{1}{2}}$;

$f'(3)=-5(4-3)^4(2\cdot 3-2)^{\frac{1}{2}}+(4-3)^5\cdot(2\cdot 3-2)^{-\frac{1}{2}}=$
$=-5\cdot 4^{\frac{1}{2}}+4^{-\frac{1}{2}}=-10+0{,}5=-9{,}5.$

3. Найти производную функции $F(x)=\sqrt{x^3+5}$.

Решение. Пусть $f(y)=\sqrt{y}$, а $y=x^3+5$, тогда по формуле производной сложной функции находим

$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot(x^3+5)'=\frac{1}{2\sqrt{x^3+5}}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти производную функции (**1—15**).

1. $\boxed{3}$ $x^3+\frac{1}{x}-1.$

2. $\boxed{2}$ $-0{,}5x^{12}.$

3. $\boxed{4}$ $16\sqrt{x}-4x^2.$

4. $\boxed{4}$ $\frac{5}{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}.$

5. $\boxed{4}$ $(x+7)x^2.$

6. $\boxed{5}$ $\sqrt[4]{x}\left(x^4-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right).$

7. $\boxed{5}$ $\sqrt{2x-1}\cdot(x^5+8).$

8. $\boxed{5}$ $x\left(\frac{x}{4}-1\right)^4.$

9. $\boxed{5}$ $\frac{2x+3}{2-3x}.$

10. $\boxed{5}$ $\frac{x^5}{3x+2}.$

11. $\boxed{5}$ $\frac{x^5-x^3+1}{x-1}.$

12. $\boxed{5}$ $\frac{\frac{1}{2}x^4-1}{2x+1}.$

13. $\boxed{6}$ $\frac{5x^3}{(4-x)^2}.$

14. $\boxed{6}$ $\frac{x^3-x}{x^2+1}.$

15. $\boxed{7}$ $(4-x)(x-1)(4+x)(x+1).$

16. $\boxed{5}$ Найти $f'\left(\frac{1}{4}\right)$, если $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-3x^2.$

17. $\boxed{6}$ Найти $f'(1)$, если $f(x)=5(x^2-3)\sqrt[3]{x}.$

Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю (**18—19**).

18. $\boxed{6}$ $f(x)=(x-3)^5(2x+6).$

19. $\boxed{6}$ $f(x)=(x-4)^2\sqrt{x}.$

Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает положительные значения (**20—21**).

20. $\boxed{7}$ $f(x)=(x-3)^5(2x+6).$

21. $\boxed{8}$ $f(x)=(x-4)^2\sqrt{x}.$

Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает отрицательные значения (**22—24**).

22. $\boxed{7}$ $f(x)=x^3+6x^2.$

23. $\boxed{8}$ $f(x)=-\frac{x}{x^2+4}.$

24. $\boxed{8}$ $f(x)=x(x+5)^{\frac{3}{2}}.$

Найти производную сложной функции (**25—26**).

25. $\boxed{7}$ $(6x-2)^2-3(6x-2).$

26. $\boxed{8}$ $\sqrt[5]{(1+x^3)^2}$, где $x\neq-1.$

Вариант II

Найти производную функции (**1—15**).

1. $\boxed{3}$ $x^2-\frac{1}{x}+3.$

2. $\boxed{2}$ $-\frac{1}{3}x^{15}.$

3. $\boxed{4}$ $-2x^3+12\sqrt{x}.$

4. $\boxed{4}$ $\frac{7}{\sqrt[4]{x}}-\frac{3}{x}.$

5. $\boxed{4}$ $(x-6)x^3.$

6. $\boxed{5}$ $\sqrt{x}\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

7. $\boxed{5}$ $\sqrt{6x+1}\cdot(x^4-5).$

8. $\boxed{5}$ $x\left(\frac{x}{3}+1\right)^3.$

9. $\boxed{5}$ $\frac{2x+3}{3-2x}.$

10. $\boxed{5}$ $\frac{x^3}{2x-3}.$

11. $\boxed{5}$ $\frac{x^4+x^2+1}{x+1}.$

12. $\boxed{5}$ $\frac{\frac{1}{3}x^6+2}{3x-2}.$

13. $\boxed{6}$ $\frac{5x^3}{(x-4)^2}.$

14. $\boxed{6}$ $\frac{x^2+1}{x^3-x}.$

15. $\boxed{7}$ $(3-x)(x-2)(x+3)(x+2).$

16. $\boxed{5}$ Найти $f'\left(\frac{1}{9}\right)$, если $f(x)=4\sqrt{x}+\frac{1}{10x}.$

17. $\boxed{6}$ Найти $f'(1)$, если $f(x)=3(x^2+2)\sqrt{x}.$

Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю (**18—19**).

18. $\boxed{6}$ $f(x)=(x+5)^4(5-2x).$

19. $\boxed{6}$ $f(x)=(x-14)^3\sqrt{x}.$

Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает положительные значения (**20—21**).

20. $\boxed{7}$ $f(x)=(x+5)^4(5-2x).$

21. $\boxed{8}$ $f(x)=(x-14)^3\sqrt{x}.$

Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает отрицательные значения (**22—24**).

22. $\boxed{7}$ $f(x)=x^3-12x.$

23. $\boxed{8}$ $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}.$

24. $\boxed{8}$ $f(x)=(x^2-21)x^{\frac{3}{2}}.$

Найти производную сложной функции (**25—26**).

25. $\boxed{7}$ $(5x+4)^2-2(5x+4).$

26. $\boxed{8}$ $\sqrt[7]{(x^2-8)^3}$, где $x\neq 2\sqrt{2}.$

§ 47. Производные некоторых элементарных функций

Справочные сведения

1. $(e^x)' = e^x$.

2. $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$.

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$.

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ \cos x \neq 0$.

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \sin x \neq 0$.

При замене аргумента x на $kx+b$ в каждой из формул **1—8** нужно правую часть формулы умножить на k. Например, из формулы 4 можно получить следующую формулу:

$$(\log_a (kx+b))' = k \cdot \frac{1}{(kx+b)\ln a}.$$

Примеры с решениями

1. Найти производную функции:
1) 5^x; 2) 5^{3x-1}; 3) $\sin x \cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x$.

Решение.
1) $(5^x)' = 5^x \ln 5$;
2) $(5^{3x-1})' = 3 \cdot 5^{3x-1} \cdot \ln 5$;
3) $\sin x \cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x = \sin x\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) =$

$$= \sin x\left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sin x\ \frac{1+\cos 2x - 1}{2} = \frac{1}{2}\sin x \cos 2x,$$

поэтому

$$\left(\sin x \cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x\right)' = \left(\frac{1}{2}\sin x \cos 2x\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}((\sin x)' \cos 2x + \sin x (\cos 2x)') =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x) = \frac{1}{2}\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x.$$

2. Найти значение производной функции

$$f(x) = e^{5-2x} + \ln\left(\frac{x}{2} + 1\right) \text{ в точке } x_0 = 2.$$

Решение. $f'(x) = (e^{5-2x})' + \left(\ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right)' =$

$$= -2e^{5-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}x+1} = -2e^{5-2x} + \frac{1}{x+2}.$$

$$f'(2) = -2e^{5-2\cdot 2} + \frac{1}{2+2} = -2e + \frac{1}{4}.$$

3. Найти производную функции $F(x) = \sin^3(5x+1)$.

Решение. Пусть $F(x) = y^3$, где $y = \sin(5x+1)$, тогда

$$F'(x) = 3\sin^2(5x+1)(\sin(5x+1))' =$$
$$= 3\sin^2(5x+1) \cdot 5\cos(5x+1) = 15\sin^2(5x+1) \cdot \cos(5x+1).$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти производную функции (**1 — 14**).

1. $\boxed{3}$ $e^x + \sin x$.
2. $\boxed{3}$ $\cos x - \log_5 x$.
3. $\boxed{4}$ $x^6 \ln x$.
4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} 3x$.
5. $\boxed{4}$ e^{5-3x}.
6. $\boxed{5}$ 3^{2x+1}.
7. $\boxed{5}$ $\ln(2-3x)$.
8. $\boxed{5}$ $\log_7(12x+5)$.
9. $\boxed{4}$ $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.
10. $\boxed{4}$ $\cos(-6x+7)$.
11. $\boxed{5}$ $3e^{2x} - \sqrt{x}$.
12. $\boxed{6}$ $e^{1-x}x^8$.
13. $\boxed{6}$ $e^x(x^2 - 5x + 3)$.
14. $\boxed{7}$ $e^{2x}\sqrt{2x-3}$.

Найти производную функции (**15 — 19**).

15. $\boxed{4}$ $\sin^2 x + \cos^2 x$.
16. $\boxed{6}$ $(\sin x + \cos x)^2$.
17. $\boxed{5}$ $\cos^2 x - \sin^2 x$.
18. $\boxed{7}$ $\sin^2 x$.
19. $\boxed{8}$ $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x$.

Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 (**20 — 22**).

20. $\boxed{4}$ $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
21. $\boxed{6}$ $f(x) = e^{3-x} + \log_2(2x-3)$, $x_0 = 2$.
22. $\boxed{7}$ $f(x) = e^{3x}(3-2x)$, $x_0 = 0$.

Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно нулю (**23 — 26**).

23. $\boxed{5}$ $f(x) = x^2 e^{-x}$.
24. $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}$.

25. $\boxed{7}$ $f(x)=\sqrt{x+4}-2\ln(x+7)$.

26. $\boxed{7}$ $f(x)=2\sqrt{x+2}-\ln(x-4)$.

Решить неравенство $f'(x)>0$ для функции $f(x)$ (27 — 30).

27. $\boxed{6}$ $f(x)=e^x x^{-2}$.

28. $\boxed{6}$ $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-3x$.

29. $\boxed{6}$ $f(x)=\sin 2x-2x$.

30. $\boxed{7}$ $f(x)=\ln(3x)-\sqrt{3x}$.

Найти производную сложной функции (31 — 40).

31. $\boxed{7}$ $\cos(x^2-3)$.

32. $\boxed{7}$ $\cos^3 x$.

33. $\boxed{8}$ $\sin^2(4x-3)$.

34. $\boxed{7}$ $\sin^3 x^2$.

35. $\boxed{7}$ $\ln x^4$.

36. $\boxed{7}$ e^{2x^3}.

37. $\boxed{7}$ 4^{x^2}.

38. $\boxed{8}$ $0{,}3^{\ln x+5}$.

39. $\boxed{8}$ $\log_2(\sin x)$.

40. $\boxed{8}$ $\sqrt[3]{\log_{0,1} x}$.

Вариант II

Найти производную функции (1 — 14).

1. $\boxed{3}$ $\cos x+3^x$.

2. $\boxed{3}$ $\ln x-\sin x$.

3. $\boxed{4}$ $x^5\ln x$.

4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} 4x$.

5. $\boxed{4}$ e^{1-7x}.

6. $\boxed{5}$ 2^{3x-1}.

7. $\boxed{5}$ $\ln(4+3x)$.

8. $\boxed{5}$ $\log_4(10x+3)$.

9. $\boxed{4}$ $\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$.

10. $\boxed{4}$ $\cos(0{,}2x-5)$.

11. $\boxed{5}$ $2e^{-2x}+\sqrt[3]{x}$.

12. $\boxed{6}$ $e^{2-3x}x^4$.

13. $\boxed{6}$ $e^{2x}(x^2-3x)$.

14. $\boxed{7}$ $e^x\sqrt{4-2x}$.

Найти производную функции (15 — 19).

15. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.

16. $\boxed{6}$ $(\cos x-\sin x)^2$.

17. $\boxed{5}$ $\sin^2 x-\cos^2 x$.

18. $\boxed{7}$ $\cos^2 x$.

19. $\boxed{8}$ $\sin^4 x+\cos^4 x$.

Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 (20 — 22).

20. $\boxed{4}$ $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.

21. $\boxed{6}$ $f(x)=\ln(3x-2)+3^{2x}$, $x_0=1$.

22. $\boxed{7}$ $f(x)=(5-3x)e^{2x}$, $x_0=0$.

Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно нулю (**23 — 26**).

23. $\boxed{5}$ $f(x)=e^x x^{-2}$.

24. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3}$.

25. $\boxed{7}$ $f(x)=2\sqrt{x}-3\ln(x+2)$.

26. $\boxed{7}$ $f(x)=\sqrt{x+1}-\ln(x-2)$.

Решить неравенство $f'(x)>0$ для функции $f(x)$ (**27 — 30**).

27. $\boxed{6}$ $f(x)=x^2e^{-x}$.

28. $\boxed{6}$ $f(x)=6x-x\sqrt{x}$.

29. $\boxed{6}$ $f(x)=\cos 3x-3x$.

30. $\boxed{7}$ $f(x)=\sqrt{2x}-\ln(2x)$.

Найти производную сложной функции (**31 — 40**).

31. $\boxed{7}$ $\sin(x^3+2)$.

32. $\boxed{7}$ $\sin^4 x$.

33. $\boxed{8}$ $\cos^2(3x+2)$.

34. $\boxed{7}$ $\cos^3 x^2$.

35. $\boxed{7}$ $\ln x^3$.

36. $\boxed{7}$ e^{3x^2}.

37. $\boxed{7}$ 5^{x^3}.

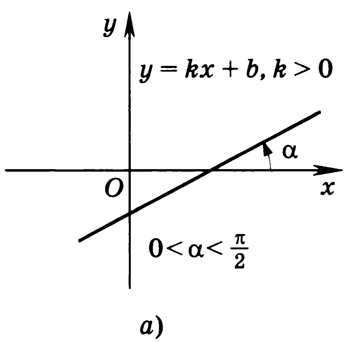
38. $\boxed{8}$ $0{,}2^{3+\ln x}$.

39. $\boxed{8}$ $\log_5(\cos x)$.

40. $\boxed{8}$ $\sqrt[5]{\log_\pi x}$.

§ 48. Геометрический смысл производной

Справочные сведения



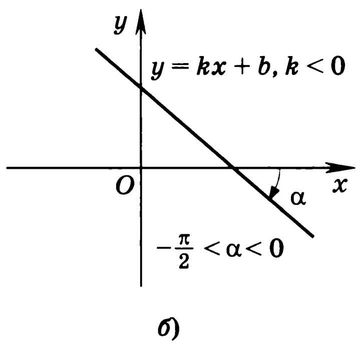


Рис. 47

α — угол между прямой $y=kx+b$ и осью Ox;
$k=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой $y=kx+b$ (рис. 47).

Геометрический смысл производной: значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке (рис. 48):

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 (рис. 49):

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad (1)$$

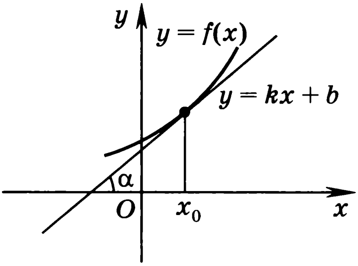


Рис. 48

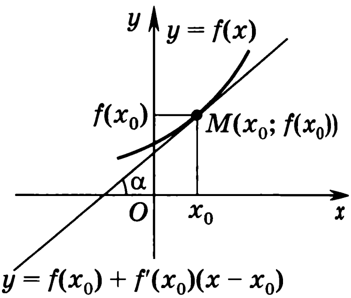


Рис. 49

Примеры с решениями

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;\ 3)$ и образующей с осью Ox угол $-\frac{\pi}{4}$.

Решение. Искомое уравнение имеет вид $y = kx + b$. Найдем угловой коэффициент прямой: $k = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Так как точка $(-2;\ 3)$ принадлежит данной прямой и $k = -1$, то $3 = -1 \cdot (-2) + b$, откуда $b = 1$. Итак, $y = -x + 1$ — искомое уравнение прямой.

2. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - x$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Сначала находим $f(2) = 2^3 - 2 = 6$, далее $f'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$. По формуле (1) уравнение касательной $y = 6 + 11(x - 2)$, откуда $y = 11x - 16$.

3. Найти точки графика функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{3}$, в которых касательная к нему параллельна прямой $y = 2x$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен 2. Параллельные ей прямые имеют такой же угловой коэффициент. Абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ либо параллельна прямой $y = 2x$, либо совпадает с ней, найдем из уравнения $f'(x)=2$, или $\frac{1}{3}\cdot 3x^2-\frac{1}{2}\cdot 2x=2$, откуда $x^2-x-2=0$, т. е. $x_1=-1$, $x_2=2$. Далее находим:

$$y_1=f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2+3\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}=2{,}5;$$

$$y_2=f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2+3\frac{1}{3}=\frac{8}{3}-2+3\frac{1}{3}=4.$$

Точка $(-1;\ 2{,}5)$ не лежит на прямой $y=2x$ (действительно, $2{,}5\neq 2\cdot(-1)$), поэтому касательная в этой точке параллельна прямой $y=2x$.

Точка $(2;\ 4)$ лежит на прямой $y=2x$ (действительно, $4=2\cdot 2$), поэтому касательная в этой точке — сама прямая $y=2x$. Таким образом, точка $(2;\ 4)$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $(-1;\ 2{,}5)$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$ и образующей с осью Ox угол α (**1—2**).

1. $\boxed{4}$ $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, $x_0=-1$, $y_0=3$. **2.** $\boxed{5}$ $\alpha=\operatorname{arctg}3$, $x_0=2$, $y_0=-1$.

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (**3—5**).

3. $\boxed{3}$ $f(x)=3x^2$, $x_0=1$.
4. $\boxed{4}$ $f(x)=\ln(2x+1)$, $x_0=0$.
5. $\boxed{5}$ $f(x)=\sin 3x$, $x_0=\frac{\pi}{12}$.

Найти угол между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox (**6—8**).

6. $\boxed{4}$ $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x_0=1$.
7. $\boxed{5}$ $f(x)=\frac{1}{4x^4}$, $x_0=1$.
8. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $x_0=3$.

Записать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0=0$ (**9—12**).

9. $\boxed{4}$ $f(x)=x^5-x^3+3x-1$. **10.** $\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{x+4}$.

11. $\boxed{6}$ $f(x)=\cos\frac{x}{3}$. **12.** $\boxed{6}$ $f(x)=\ln(3x+1)$.

Записать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 **(13—18).**

13. $\boxed{4}$ $f(x)=x^3-2x,\ x_0=2.$ **14.** $\boxed{4}$ $f(x)=4x^2+1,\ x_0=-2.$

15. $\boxed{5}$ $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{6}.$ **16.** $\boxed{6}$ $f(x)=\sin 2x,\ x_0=-\frac{\pi}{6}.$

17. $\boxed{6}$ $f(x)=\ln x,\ x_0=e.$ **18.** $\boxed{6}$ $f(x)=e^{3x},\ x_0=0.$

Найти точки графика функции $y=f(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k **(19—22).**

19. $\boxed{5}$ $f(x)=x^2-3x+4,\ k=1.$ **20.** $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5,\ k=3.$

21. $\boxed{7}$ $f(x)=\sqrt{5x+1},\ k=\frac{5}{8}.$ **22.** $\boxed{7}$ $f(x)=\sin 2x,\ k=2.$

Вариант II

Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$ и образующей с осью Ox угол α **(1—2).**

1. $\boxed{4}$ $\alpha=\frac{\pi}{4},\ x_0=-2,\ y_0=1.$

2. $\boxed{5}$ $\alpha=\operatorname{arctg}(-2),\ x_0=3,\ y_0=2.$

Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 **(3—5).**

3. $\boxed{3}$ $f(x)=2x^3,\ x_0=1.$

4. $\boxed{4}$ $f(x)=e^{2x},\ x_0=0.$

5. $\boxed{5}$ $f(x)=\cos 4x,\ x_0=\frac{\pi}{12}.$

Найти угол между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox **(6—8).**

6. $\boxed{4}$ $f(x)=\frac{1}{4}x^4,\ x_0=1.$

7. $\boxed{5}$ $f(x)=\frac{1}{2x^2},\ x_0=1.$

8. $\boxed{6}$ $f(x)=2\sqrt{x},\ x_0=3.$

Записать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0=0$ **(9—12).**

9. $\boxed{4}$ $f(x)=x^4+3x^2-4x+2.$ **10.** $\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt[3]{x+1}.$

11. $\boxed{6}$ $f(x)=\sin\frac{x}{2}.$ **12.** $\boxed{6}$ $f(x)=\ln(-2x+1).$

Записать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 **(13—18)**.

13. $\boxed{4}$ $f(x)=x^2+3x,\ x_0=2.$

14. $\boxed{4}$ $f(x)=2x^3-5,\ x_0=-2.$

15. $\boxed{5}$ $f(x)=\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{3}.$

16. $\boxed{6}$ $f(x)=\cos 2x,\ x_0=-\frac{\pi}{12}.$

17. $\boxed{6}$ $f(x)=e^x,\ x_0=0.$

18. $\boxed{6}$ $f(x)=2\ln x,\ x_0=e.$

Найти точки графика функции $y=f(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k **(19—22)**.

19. $\boxed{5}$ $f(x)=x(x-1),\ k=3.$

20. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x,\ k=1.$

21. $\boxed{7}$ $f(x)=\sqrt{3x+1},\ k=\frac{3}{4}.$

22. $\boxed{7}$ $f(x)=\sin x+x,\ k=0.$

Контрольная работа № 5

Вариант I

1. Найти производную функции:

1) $3x^2-\frac{1}{x^3}$; 2) $\left(\frac{x}{3}+7\right)^6$; 3) $e^x\cos x$; 4) $\frac{2^x}{\sin x}$.

2. Найти значение производной функции $f(x)=1-6\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=8$.

3. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sin x-3x+2$ в точке $x_0=0$.

---

4. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$ положительны.

5. Найти точки графика функции $f(x)=x^3-3x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.

6. Найти производную функции $F(x)=\log_3(\sin x)$.

Вариант II

1. Найти производную функции:

1) $2x^3-\frac{1}{x^2}$; 2) $(4-3x)^6$; 3) $e^x\sin x$; 4) $\frac{3^x}{\cos x}$.

2. Найти значение производной функции $f(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0=\frac{1}{4}$.

3. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x)=4x-\sin x+1$ в точке $x_0=0$.

---

4. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x)=\frac{1-x}{x^2+8}$ отрицательны.
5. Найти точки графика функции $f(x)=x^3+3x^2$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.
6. Найти производную функции $F(x)=\cos(\log_2 x)$.

Задания для подготовки к экзамену

1. Найти производную функции:

1) $\boxed{5}$ $f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin 2x}$;

2) $\boxed{5}$ $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x}{\sin x+\cos x}$;

3) $\boxed{4}$ $f(x)=\sqrt{\frac{6-x}{3}}+3\ln\frac{x+1}{3}$;

4) $\boxed{4}$ $f(x)=\sqrt{\frac{x-8}{2}}+4\ln\frac{1-x}{4}$.

Ответ. 1) $-\frac{2}{\sin 2x\cdot\operatorname{tg} 2x}$; 2) $\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x}$; 3) $\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{18-3x}}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{2x-16}}-\frac{4}{1-x}$.

2. Вычислить значение производной функции:

1) $\boxed{4}$ $y=e^{1-4x}+6\sqrt{5x+1}$ в точке $x_0=0{,}25$;

2) $\boxed{4}$ $y=5\ln(9x+2)+\sqrt{11-6x}$ в точке $x_0=\frac{1}{3}$.

Ответ. 1) 6; 2) 8.

3. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $\boxed{4}$ $y=x^3-3x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-1$;

2) $\boxed{4}$ $y=-x^3+x^2-1$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.

Ответ. 1) $y=9x+5$; 2) $y=-16x-21$.

4. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $\boxed{4}$ $y=5x^{-\frac{2}{5}}+27$ в точке с ординатой $y_0=32$;

2) $\boxed{4}$ $y=11-3x^{-\frac{4}{3}}$ в точке с ординатой $y_0=8$.

Ответ. 1) $y=-2x+34$; 2) $y=4x+4$.

5. Найти:

1) $\boxed{5}$ абсциссы всех таких точек графика функции
$$y=0{,}5\sin 2x-\cos x+x,$$
в которых угловой коэффициент касательной равен 1;

2) $\boxed{5}$ абсциссы всех таких точек графика функции

$$y=0{,}5\sin 2x+3\sin x+x,$$

в которых угловой коэффициент касательной равен -1.
Указание. Решить уравнение: 1) $y'(x)=1$; 2) $y'(x)=-1$.

Ответ. 1) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{6}(4k+3)$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

6. Найти:

1) $\boxed{6}$ все такие точки графика функции $y=\frac{4^x-2^{x+1}}{\ln 4}$, в которых касательная к нему параллельна прямой $y=2x+5$;

2) $\boxed{6}$ все такие точки графика функции $y=\frac{9^x-2\cdot 3^x}{\ln 9}$, в которых касательная к нему параллельна прямой $y=6x-5$.

Указание. 1) Абсциссы точек графика функции, в которых касательная параллельна прямой $y=2x+5$ или совпадает с ней, найти из уравнения $y'(x)=2$. Из полученных точек искомыми будут те, которые не лежат на прямой $y=2x+5$.

Ответ. 1) (1; 0); 2) (1; 0).

7. Найти:

1) $\boxed{6}$ расстояние от начала координат до той касательной к графику функции $y=x\ln x$, которая параллельна оси абсцисс;

2) $\boxed{6}$ расстояние от оси абсцисс до той касательной к графику функции $y=4\ln(x-1)-x^2$, которая параллельна оси абсцисс.

Указание. 1) Угловой коэффициент касательной, параллельной оси абсцисс, равен нулю. Абсцисса точки касания находится из уравнения $y'(x)=0$.

Ответ. 1) $\frac{1}{e}$; 2) 4.

8. Найти:

1) $\boxed{7}$ точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y=x^2-|5x+9|$ через точки этого графика с абсциссами 4 и -4;

2) $\boxed{7}$ точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y=x^2+|7-4x|$ через точки этого графика с абсциссами 3 и -3.

Указание. 1) Рассмотреть функцию и ее производную на промежутках $x\geqslant-\frac{9}{5}$ и $x<-\frac{9}{5}$.

Ответ. 1) $(3;\ -16)$; 2) $(0{,}7;\ -9)$.

9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $f'(x)=0$ не имеет действительных корней, если:

1) $\boxed{6}$ $f(x)=ax^3-\frac{1}{x}$; 2) $\boxed{6}$ $f(x)=x^3+\frac{a}{x}$;

3) $\boxed{6}$ $f(x)=ax^2+\frac{1}{x}$; 4) $\boxed{6}$ $f(x)=x^3+ax^2+3x$;

5) $\boxed{6}$ $f(x)=x^3+3x^2+ax$.

Ответ. 1) $a\geqslant 0$; 2) $a<0$; 3) $a=0$; 4) $-3<a<3$; 5) $a>3$.

10. Выяснить:

1) $\boxed{7}$ при каких значениях p касательная, проведенная к графику функции $y=x^3-px$ в его точке с абсциссой $x_0=1$, проходит через точку $M(2;\ 3)$;

2) $\boxed{7}$ при каких значениях a касательная, проведенная к графику функции $y=x^3+ax$ в его точке с абсциссой $x_0=-1$, проходит через точку $N(3;\ 2)$.

Указание. 1) Записать уравнение касательной к графику функции в точке $x_0=1$ и подставить в него вместо x и y соответствующие координаты точки M.

Ответ. 1) При $p=0{,}5$; 2) при $a=\frac{9}{7}$.

11. Выяснить:

1) $\boxed{7}$ при каких значениях параметра a прямая $y=ax-2$ касается графика функции $y=1+\ln x$;

2) $\boxed{7}$ при каких значениях параметра b прямая $y=bx+1$ касается графика функции $y=2-\ln x$.

Указание. 1) Если x_0 — абсцисса точки касания, то:
а) значение производной функции $1+\ln x$ в точке x_0 равно a — угловому коэффициенту касательной;
б) точка касания — это общая точка графика функции и касательной, поэтому $1+\ln x_0=ax_0-2$.

Ответ. 1) $a=e^2$; 2) $b=-\frac{1}{e^2}$.

12. $\boxed{4}$ Найти значение производной функции $f(x)=2x^7+4\cos x$ в точке $x_0=0$. Ответ. 0.

13. $\boxed{4}$ Найти значение производной функции $y=xe^x$ в точке $x_0=1$. Ответ. $2e$.

14. $\boxed{4}$ При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+t-1$ (t — время движения в секундах). Найти скорость (в метрах в секунду) тела через 4 с после начала движения. Ответ. 9.

Задания для интересующихся математикой

1. Найти общие касательные к графикам функций

$$f(x)=x^2-4x+3 \text{ и } g(x)=-x^2+6x-10.$$

Ответ. Две касательные: $y=-1$ и $y=2x-6$.

2. Две параллельные касательные к графику функции $y=f(x)$ пересекают оси координат: одна — в точках A и B, другая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если она в 4 раза меньше площади треугольника COD. Решить задачу для функции:

1) $f(x)=x^3-6$; 2) $f(x)=x^3+\frac{2}{3}$.

Ответ. 1) $\frac{8}{3}$; 2) два решения: $\frac{8}{27}$ и $\frac{8\sqrt[3]{3}}{81}$.

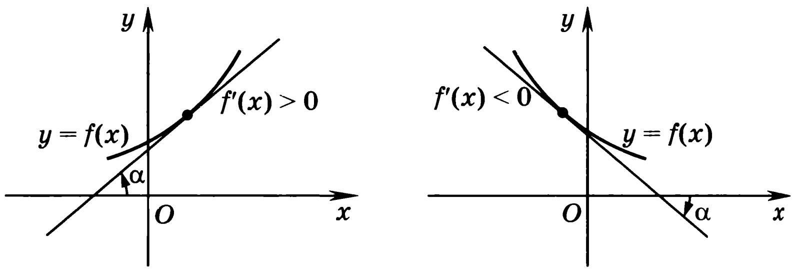
Применение производной к исследованию функций

§ 49. Возрастание и убывание функции

Справочные сведения

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке (рис. 50, *а*).

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке (рис. 50, *б*).



а) Рис. 50 *б*)

Промежутки возрастания и убывания функции называют *промежутками монотонности функции*.

Пример с решением

Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^4 - 8x^2$; 2) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$.

Решение.

1) Находим $f'(x) = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$.

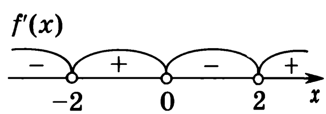


Рис. 51

С помощью метода интервалов установим (рис. 51), что

$f'(x) = 4x(x-2)(x+2) > 0$

при $-2 < x < 0$, $x > 2$ — это интервалы возрастания функции $f(x)$; $f'(x) < 0$ при $x < -2$, $0 < x < 2$ — это интервалы убывания функции $f(x)$.

2) Так как $\sqrt{3x-1} \geqslant 0$ при любом x из области определения функции, то $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ может принимать только положительные значения при $x > \frac{1}{3}$, следовательно, функция возрастает при $x > \frac{1}{3}$. Заметим, что функция $y = \sqrt{3x-1}$ (рис. 52) возрастает не только на интервале $x > \frac{1}{3}$, но и на промежутке $x \geqslant \frac{1}{3}$.

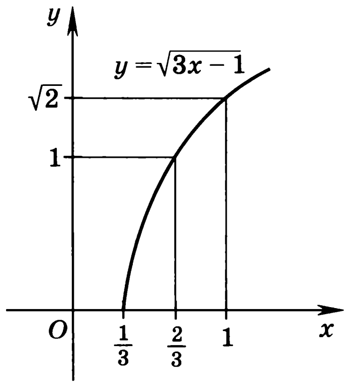


Рис. 52

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{2}$ Среди промежутков $x < -1$, $x \geqslant 2$, $0 < x \leqslant 2$, $x > 2$, $0 < x < 2$, $3 \leqslant x \leqslant 4$ указать те, которые являются отрезками, и те, которые являются интервалами.

Найти интервалы возрастания и убывания функции (**2 — 18**).

2. $\boxed{2}$ $y = 3x - 1$.
3. $\boxed{2}$ $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
4. $\boxed{3}$ $y = 2x^2 - 5x$.
5. $\boxed{4}$ $y = x^3 - \frac{x^2}{2}$.
6. $\boxed{4}$ $y = -x^3 + 3x^2$.
7. $\boxed{4}$ $y = x^3 - 6x$.
8. $\boxed{4}$ $y = x^4 - 18x^2$.
9. $\boxed{4}$ $y = x^4 + 4x$.
10. $\boxed{4}$ $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$.
11. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{x-3}$.
12. $\boxed{5}$ $y = \frac{2x-3}{x-2}$.
13. $\boxed{4}$ $y = \sqrt{x-2}$.
14. $\boxed{4}$ $y = -\sqrt{x+4}$.
15. $\boxed{6}$ $y = \frac{x^2 - x + 3}{x^2}$.
16. $\boxed{6}$ $y = e^{5x}(x-2)$.
17. $\boxed{5}$ $y = \sin x - 2x$.
18. $\boxed{7}$ $y = \cos x - 5$.
19. $\boxed{5}$ Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ возрастает на промежутке $x > 2$, убывает на промежутках $x < 0$ и $0 < x < 2$.
20. $\boxed{7}$ При каких значениях a функция $y = x^3 + 3ax$ возрастает на всей числовой прямой?

Вариант II

1. $\boxed{2}$ Среди промежутков $x \leqslant 0$, $2 \leqslant x < 5$, $x > -3$, $x < -8$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-5 < x < -3$ указать те, которые являются отрезками, и те, которые являются интервалами.

Найти интервалы возрастания и убывания функции (**2—18**).

2. $\boxed{2}$ $y = \frac{1}{3}x - 5$.

3. $\boxed{2}$ $y = -2x + 8$.

4. $\boxed{3}$ $y = 4x^2 - 7x$.

5. $\boxed{4}$ $y = -x^3 + 2x^2$.

6. $\boxed{4}$ $y = x^3 - 6x^2$.

7. $\boxed{4}$ $y = x^3 - 15x$.

8. $\boxed{4}$ $y = x^4 - 2x^2$.

9. $\boxed{4}$ $y = x^4 + 32x$.

10. $\boxed{4}$ $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 4$.

11. $\boxed{5}$ $y = \frac{1}{x-4}$.

12. $\boxed{5}$ $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

13. $\boxed{4}$ $y = \sqrt{x-5}$.

14. $\boxed{4}$ $y = -\sqrt{x+1}$.

15. $\boxed{6}$ $y = \frac{x^2 + x - 4}{x^2}$.

16. $\boxed{6}$ $y = (x+2)e^{4x}$.

17. $\boxed{5}$ $y = \cos x + 3x$.

18. $\boxed{7}$ $y = \sin x + 3$.

19. $\boxed{5}$ Доказать, что функция $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$ возрастает на промежутках $-1 < x < 0$ и $x > 0$, убывает на промежутке $x < -1$.

20. $\boxed{7}$ При каких значениях b функция $y = x^5 + 5bx$ возрастает на всей числовой прямой?

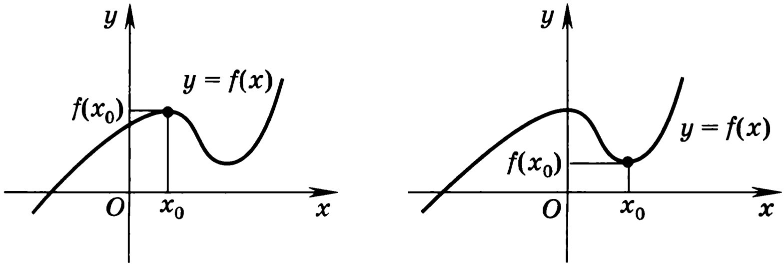
§ 50. Экстремумы функции

Справочные сведения

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$ (рис. 53, *а*), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$ (рис. 53, *б*), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x = x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.



а) Рис. 53 *б*)

Теорема Ферма. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$.

В точке экстремума касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (рис. 54).

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными точками* (например, точки x_0, x_1, x_2 на рисунке 55 стационарные).

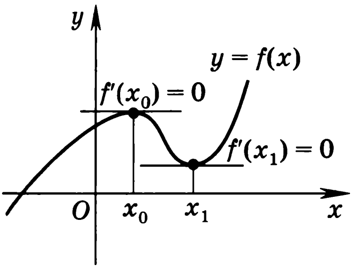


Рис. 54

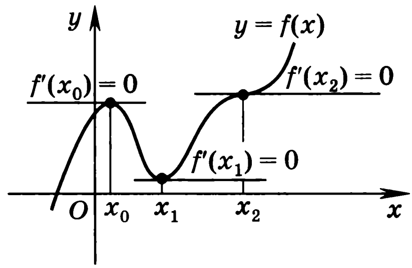


Рис. 55

Точки, в которых функция либо недифференцируема (т. е. не имеет в них производной), либо имеет производную, равную нулю, называют *критическими точками* этой функции (например, точки x_0, x_1, x_2 на рисунке 56 критические, из них стационарной является только точка x_2).

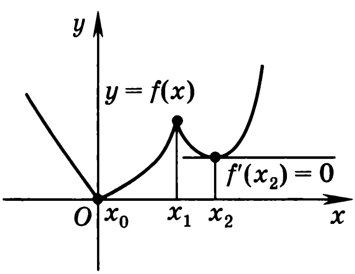


Рис. 56

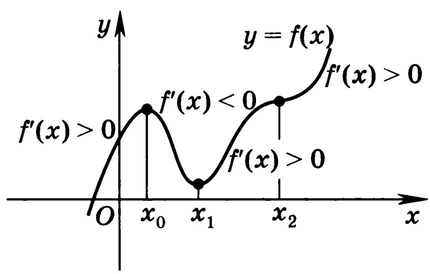


Рис. 57

Сформулируем достаточные условия экстремума. Пусть функции $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) и непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если производная функции $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то эта точка является точкой максимума (на рисунке 57 точка x_0 — точка максимума);

2) если производная функции $f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то эта точка является точкой минимума (на рисунке 57 точка x_1 — точка минимума).

3) если при переходе через точку x_0 производная не меняет свой знак, то эта точка не является точкой экстремума.

Примеры с решениями

1. Найти критические точки функции $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 58. Выявить среди них точки экстремума.

Решение. В точке x_0 производная не определена, в точке x_1 производная существует и отлична от нуля; в точках x_2, x_3, x_4 и x_5 производная не существует; в точках x_6 и x_7 производная равна нулю. Таким образом, критическими являются точки x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 и x_7 (среди них стационарными являются точки x_6 и x_7). Производная меняет свой знак при переходе через точки x_4, x_5 и x_6 — они являются точками экстремума (x_4 и x_6 — точки максимума, x_5 — точка минимума).

2. Найти стационарные точки функции $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

Решение. Стационарные точки функции $f(x)$ — это корни уравнения $f'(x)=0$. Находим $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3(x^4-1)}{x^2}$.

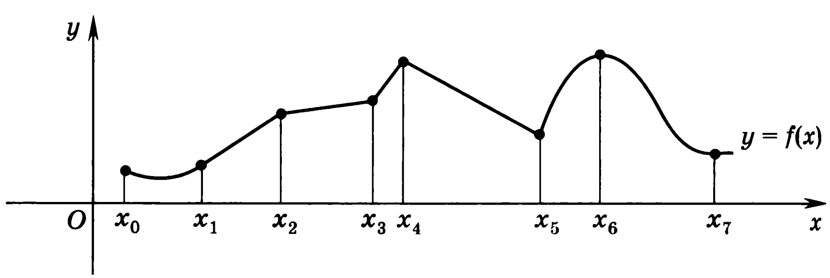


Рис. 58

Решим уравнение $\frac{3(x^4-1)}{x^2}=0$, $\frac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^2}=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=1$.

3. Найти значения функции $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3$ в точках экстремума.

Решение. 1) Найдем производную функции:

$$f'(x)=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3\right)'=x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x-2)(x+2).$$

Производная существует при всех x, поэтому точки экстремума находим среди стационарных точек:

$$x^2(x-2)(x+2)=0,\ x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=2.$$

2) Теперь проверим, какие из найденных стационарных точек являются точками экстремума.

Методом интервалов определяем знаки производной функции на промежутках $x<-2$, $-2<x<0$, $0<x<2$, $x>2$ (рис. 59).

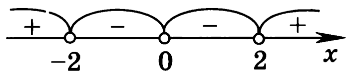


Рис. 59

При переходе через точку $x_1=-2$ производная меняет знак с «+» на «−», поэтому $x_1=-2$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2=0$ производная не меняет знак, значит, эта точка не является точкой экстремума. При переходе через точку $x_3=2$ производная меняет знак с «−» на «+», т. е. $x_3=2$ — точка минимума.

Находим значения функции в точках эстремума:

$$f(-2)=\frac{(-2)^5}{5}-\frac{4}{3}\cdot(-2)^3=4\frac{4}{15};\qquad f(2)=\frac{2^5}{5}-\frac{4}{3}\cdot 2^3=-4\frac{4}{15}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{2}$ По заданному графику функции $y=f(x)$ (рис. 60) назвать критические, стационарные точки и точки экстремума.

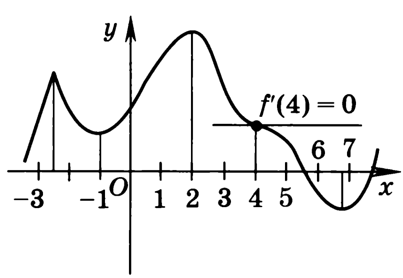


Рис. 60

Найти стационарные точки функции (**2**—**11**).

2. $\boxed{2}$ $y=2x^2-1$.

3. $\boxed{3}$ $y=-x^2+2x$.

4. $\boxed{3}$ $y=x^3+2x^2$.

5. $\boxed{3}$ $y=x^3-4x$.

6. $\boxed{4}$ $y=x^3-6x^2+9x-1$.

7. $\boxed{4}$ $y=2e^{3x}-3e^{2x}$.

8. $\boxed{4}$ $y=e^{3x}-3e^{2x}$.

9. $\boxed{4}$ $y=\sin\frac{x}{2}$.

10. $\boxed{4}$ $y=\operatorname{tg}3x$.

11. $\boxed{6}$ $y=2\cos^2 x-2\sin^2 x$.

Найти точки экстремума функции (12 — 18).

12. $\boxed{2}$ $y=-3x+1$.

13. $\boxed{3}$ $y=5x^2+20x-3$.

14. $\boxed{4}$ $y=x^3+3x^2$.

15. $\boxed{4}$ $y=9x-x^3$.

16. $\boxed{5}$ $y=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$.

17. $\boxed{5}$ $y=\frac{2x+3}{2-3x}$.

18. $\boxed{6}$ $y=\frac{x^5}{3x+2}$.

Найти точки экстремума и значения функции в этих точках (19 — 26).

19. $\boxed{4}$ $y=3x^2-2x$.

20. $\boxed{5}$ $y=6x-x^3$.

21. $\boxed{4}$ $y=x^4-4x^3+20$.

22. $\boxed{6}$ $y=3x^4+4x^3-12x^2+17$.

23. $\boxed{5}$ $y=\frac{x}{3}-\sqrt{2x-3}$.

24. $\boxed{5}$ $y=\cos 2x$.

25. $\boxed{4}$ $y=e^{2x}-2e^x$.

26. $\boxed{5}$ $y=x^2e^x$.

Вариант II

1. $\boxed{2}$ По заданному графику функции $y=f(x)$ (рис. 61) назвать критические, стационарные точки и точки экстремума.

Найти стационарные точки функции (2—11).

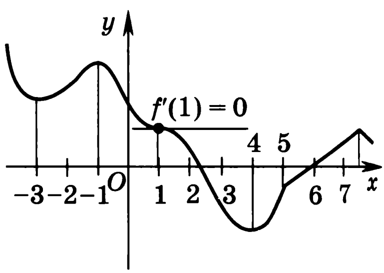


Рис. 61

2. $\boxed{2}$ $y=-x^2+1$.

3. $\boxed{3}$ $y=x^2-4x$.

4. $\boxed{3}$ $y=x^3+3x^2$.

5. $\boxed{3}$ $y=x^3-x$.

6. $\boxed{4}$ $y=2x^3-3x^2-12x+5$.

7. $\boxed{4}$ $y=\frac{e^{2x}}{2}-e^x$.

8. $\boxed{4}$ $y=6e^{2x}-e^{3x}$.

9. $\boxed{4}$ $y=\cos\frac{x}{3}$.

10. $\boxed{4}$ $y=\operatorname{tg}2x$.

11. $\boxed{6}$ $y=\sin x\cdot\cos x$.

Найти точки экстремума функции (**12—18**).

12. $\boxed{2}$ $y=5x-2$.

13. $\boxed{3}$ $y=-4x^2+24x-15$.

14. $\boxed{4}$ $y=x^3+6x^2$.

15. $\boxed{4}$ $y=6x-x^3$.

16. $\boxed{5}$ $y=\frac{2}{x}+\frac{x}{3}$.

17. $\boxed{5}$ $y=\frac{2x+3}{3-2x}$.

18. $\boxed{5}$ $y=\frac{x^3}{2x-3}$.

Найти точки экстремума и значения функции в этих точках (**19—26**).

19. $\boxed{4}$ $y=3x-5x^2$.

20. $\boxed{5}$ $y=x^3-9x$.

21. $\boxed{4}$ $y=8x^3-3x^4-7$.

22. $\boxed{6}$ $y=3x^4-4x^3-12x^2+19$.

23. $\boxed{5}$ $y=\sqrt{2x+5}-\frac{x}{5}$.

24. $\boxed{5}$ $y=\sin 3x$.

25. $\boxed{4}$ $y=3e^{2x}-2e^{3x}$.

26. $\boxed{5}$ $y=x^3e^x$.

§ 51. Применение производной к построению графиков функций

Справочные сведения

Чтобы построить график функции, обычно предварительно исследуют функцию, для чего находят:

1) область определения;
2) производную;
3) критические точки;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Для более точного построения графика находят точки его пересечения с осями координат (а иногда еще несколько точек).

Чтобы построить график четной (нечетной) функции, достаточно исследовать ее свойства и построить график при $x>0$ (или при $x\geqslant 0$), а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат).

Пример с решением

Построить график функции $f(x)=3x^5-5x^3$.

Решение.

1) Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) $f'(x)=(3x^5-5x^3)'=15x^4-15x^2=15x^2(x-1)(x+1)$.

3) Производная существует при всех x. Решив уравнение $15x^2(x-1)\cdot(x+1)=0$, находим стационарные точки: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$.

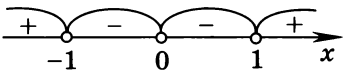


Рис. 62

4) Решив неравенства $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$, находим промежутки возрастания функции: $x<-1$, $x>1$ — и промежутки убывания функции: $-1<x<0$, $0<x<1$ (рис. 62).

5) Стационарная точка $x_1=-1$ является точкой максимума, поскольку при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «−»; $f(-1)=2$.

Стационарная точка $x_2=0$ не является точкой экстремума.

Стационарная точка $x_3=1$ является точкой минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «−» на «+»; $f(1)=-2$.

По результатам исследования составим таблицу:

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	0	↘	−2	↗

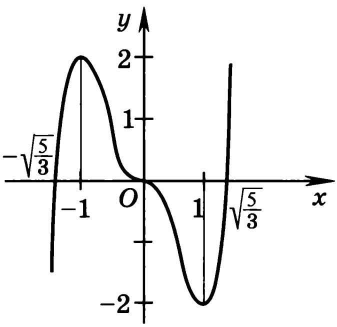


Рис. 63

Дополнительно найдем абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $f(x)=0$, т. е. уравнение $3x^5-5x^3=0$. Его корнями являются числа $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, 0, $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y=3x^5-5x^3$ (рис. 63).

Замечание. Для построения графика функции $f(x)=3x^5-5x^3$ можно было, воспользовавшись тем, что функция $f(x)$ нечетная ($f(-x)=-f(x)$), построить график функции на промежутке $x\geqslant 0$ и отразить его симметрично относительно начала координат.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

1. $\boxed{3}$ На отрезке $[-4;\ 3]$ построить график непрерывной функции $y=f(x)$, пользуясь данными, приведенными в таблице. Учесть, что $f(0)=2$.

x	-4	$-4<x<-2$	-2	$-2<x<1$	1	$1<x<3$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Построить график функции (2—9).

2. $\boxed{4}$ $f(x)=x^3-3x^2+4$.
3. $\boxed{4}$ $f(x)=-x^3+3x^2-2$.
4. $\boxed{4}$ $f(x)=x^4-8x^2$.
5. $\boxed{4}$ $f(x)=x^4-4x^3+20$.
6. $\boxed{5}$ $f(x)=\frac{x}{2}-2\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 16]$.
7. $\boxed{5}$ $f(x)=x+\frac{9}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 9\right]$.
8. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.
9. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Вариант II

1. $\boxed{3}$ На отрезке $[-3;\ 4]$ построить график непрерывной функции $y=f(x)$, пользуясь данными, приведенными в таблице. Учесть, что $f(0)=-2$.

x	-3	$-3<x<-1$	-1	$-1<x<2$	2	$2<x<4$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2

Построить график функции (2—9).

2. $\boxed{4}$ $f(x)=x^3+3x^2-4$.
3. $\boxed{4}$ $f(x)=-x^3-3x^2+3$.
4. $\boxed{4}$ $f(x)=x^4-2x^2$.
5. $\boxed{4}$ $f(x)=8x^3-3x^4-7$.
6. $\boxed{5}$ $f(x)=3\sqrt{x}-\frac{x}{2}$ на отрезке $[1;\ 16]$.

7. $\boxed{5}$ $f(x)=x+\frac{4}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{3};\ 8\right]$.

8. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

9. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{x}{2}-\cos x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

§ 52. Наибольшее и наименьшее значения функции

Справочные сведения

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и имеет производную в каждой его внутренней точке, то для нахождения наибольшего и наименьшего значений этой функции на отрезке $[a;\ b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти значения функции в критических точках, принадлежащих интервалу $(a;\ b)$;

3) из найденных в пп. 1 и 2 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Если дифференцируемая на интервале $(a;\ b)$ функция $f(x)$ имеет на этом интервале только одну стационарную точку x_0, причем $f'(x)>0$ на одном из интервалов $(a;\ x_0)$, $(x_0;\ b)$ и $f'(x)<0$ на другом интервале, то $f(x_0)$ является *наибольшим или наименьшим значением* функции $f(x)$ на этом интервале.

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на некотором промежутке. Тогда если в точке x_0 этого промежутка одна из функций $f(x)$ или $(f(x))^n$ принимает наибольшее (наименьшее) значение, то и другая принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение.

Примеры с решениями

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt{x+3}$ на отрезке $[-2;\ 6]$.

Решение.

1) Находим значения функции на концах отрезка:

$$f(-2)=\sqrt{-2+3}=1,\ f(6)=\sqrt{6+3}=3.$$

2) Критических точек на интервале $(-2;\ 6)$ функция не имеет, так как производная $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}>0$ при всех значениях x из этого интервала.

3) Из чисел 1 и 3 наибольшим является 3, а наименьшим — число 1.

Итак, наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{x+3}$ на отрезке $[-2;\ 6]$ равно 3, а наименьшее равно 1.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+5x$ на отрезке $[-3;\ 0]$.

Решение.

1) $f(-3)=\frac{1}{3}\cdot(-27)+3\cdot 9+5\cdot(-3)=-9+27-15=3$; $f(0)=0$.

2) $f'(x)=x^2+6x+5$ существует при всех x; $x^2+6x+5=0$ при $x_1=-1$, $x_2=-5$. Интервалу $(-3;\ 0)$ принадлежит только одна стационарная точка $x_1=-1$, $f(-1)=-\frac{1}{3}+3-5=$ $=-2\frac{1}{3}$.

3) Из чисел 3, 0, $-2\frac{1}{3}$ наибольшее равно 3, наименьшее равно $-2\frac{1}{3}$.

3. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник с наименьшей диагональю.

Решение. Под словами «найти прямоугольник» традиционно понимается задача нахождения сторон прямоугольника.

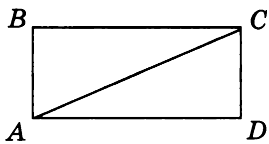


Рис. 64

Пусть в прямоугольнике $ABCD$ с заданным периметром p (рис. 64) $AD=x$, тогда $DC=\frac{p}{2}-x$. Очевидно, что $0<x<\frac{p}{2}$. Диагональ AC найдем из треугольника ACD по теореме Пифагора:

$AC=\sqrt{x^2+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}$, откуда $AC=\sqrt{2x^2-px+\frac{p^2}{4}}$. Задача сводится к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=\sqrt{2x^2-px+\frac{p^2}{4}}$ принимает наименьшее значение на интервале $\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$.

Так как $f(x)=\sqrt{2x^2-px+\frac{p^2}{4}}>0$ на интервале $0<x<\frac{p}{2}$, то $f(x)$ и $(f(x))^2$ принимают наименьшее значение на этом интервале в одной и той же точке. Поэтому теперь задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $(f(x))^2=2x^2-px+\frac{p^2}{4}$ на интервале $0<x<\frac{p}{2}$. Имеем $\left(2x^2-px+\frac{p^2}{4}\right)'=4x-p$, $4x-p=0$ при $x=\frac{p}{4}$.

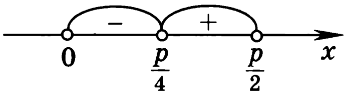


Рис. 65

Таким образом $x=\frac{p}{4}$ — единственная на интервале $0<x<\frac{p}{2}$ стационарная точка, являющаяся точкой минимума (рис. 65). При этом вторая сторона прямоугольника равна $\frac{p}{2}-\frac{p}{4}=\frac{p}{4}$. Итак, при заданном периметре p наименьшую диагональ имеет квадрат со стороной $\frac{p}{4}$.

4. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в конус с высотой H (оси цилиндра и конуса совпадают).

Решение. Конусы с высотой H могут иметь различные радиусы основания. Поэтому сначала рассмотрим частный случай: конус с высотой H и радиусом основания R.

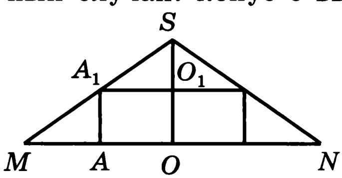


Рис. 66

На рисунке 66 изображено осевое сечение фигуры. Обозначим искомую высоту цилиндра OO_1 через x. Тогда объем цилиндра будет равен $\pi \cdot A_1O_1^2 \cdot x$. Из прямоугольных треугольников SMO и SA_1O_1 имеем $\frac{A_1O_1}{SO_1}=\operatorname{tg}\angle MSO=\frac{MO}{SO}$, откуда $\frac{A_1O_1}{H-x}=\frac{R}{H}$, $A_1O_1=\frac{R(H-x)}{H}$. Поэтому объем цилиндра выразится формулой

$$V(x)=\pi\,\frac{R^2(H-x)^2}{H^2}\,x.$$

С учетом геометрического смысла задачи нужно найти наибольшее значение этой функции на интервале $0<x<H$. Имеем $V'(x)=\frac{\pi R^2}{H^2}(H^2x-2Hx^2+x^3)'=\frac{\pi R^2}{H^2}(H^2-4Hx+3x^2)$.

Стационарные точки найдем из уравнения $3x^2-4Hx+H^2=0$, откуда $x_1=\frac{H}{3}$, $x_2=H$. Рассматриваемому интервалу принадлежит только точка $x_1=\frac{H}{3}$, которая является точкой максимума. Следовательно, цилиндр наибольшего объема, вписанный в рассматриваемый конус, имеет высоту, равную $\frac{H}{3}$.

Поскольку результат решения не зависит от радиуса основания конуса R, можно сделать вывод, что он получен для всех конусов с высотой H. Итак, искомая высота цилиндра равна $\frac{H}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (**1 — 12**).

1. $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$:

1) $\boxed{4}$ на отрезке $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$; 2) $\boxed{4}$ на отрезке $[0;\ 3]$.

2. $\boxed{3}$ $f(x)=5x+1$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

3. $\boxed{3}$ $f(x)=-\frac{x}{2}+3$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

4. $\boxed{3}$ $f(x)=x^2+1$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

5. $\boxed{3}$ $f(x)=-\frac{x^2}{2}+2$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

6. $\boxed{4}$ $f(x)=(2x-1)^2$ на отрезке $[0;\ 1]$.

7. $\boxed{4}$ $f(x)=2x^3-9x^2$ на отрезке $[1;\ 4]$.

8. $\boxed{4}$ $f(x)=2x^3-9x^2$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

9. $\boxed{5}$ $f(x)=x^4-8x^2+5$ на отрезке $[-3;\ 2]$.

10. $\boxed{5}$ $f(x)=x+\frac{9}{x}$ на отрезке $[1;\ 4]$.

11. $\boxed{5}$ $f(x)=x-4\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 9]$.

12. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

13. $\boxed{5}$ Найти наибольшее значение функции $f(x)=-x-\frac{4}{x^2}$ на интервале $(0;\ 3)$.

14. $\boxed{5}$ Найти наименьшее значение функции $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$ на интервале $x>1$.

15. $\boxed{4}$ Открытая сверху коробка объемом 36 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон основания $1:2$. Какой должна быть меньшая сторона основания коробки, чтобы на изготовление коробки ушло наименьшее количество материала?

16. $\boxed{6}$ В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 10 см вписан имеющий с ним общий угол прямоугольник наибольшей площади. Найти площадь прямоугольника.

17. $\boxed{7}$ Точки M и N перемещаются по разным сторонам угла A, равного $30°$, так, что площадь треугольника AMN остается постоянной и равной S. При каких AM и AN величина MN будет наименьшей?

18. $\boxed{7}$ Найти радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R.

19. $\boxed{7}$ Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около сферы радиуса R.

20. $\boxed{8}$ Найти высоту правильной четырехугольной призмы наибольшего объема, вписанной в конус с высотой h (плоскости оснований призмы и конуса совпадают).

Вариант II

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (1—12).

1. $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$:

1) $\boxed{4}$ на отрезке $[0;\ 2]$; 2) $\boxed{4}$ на отрезке $[0;\ 5]$.

2. $\boxed{3}$ $f(x)=\frac{x}{2}+1$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

3. $\boxed{3}$ $f(x)=-3x-2$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

4. $\boxed{3}$ $f(x)=x^2+2$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

5. $\boxed{3}$ $f(x)=-\frac{x^2}{2}-1$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

6. $\boxed{4}$ $f(x)=(3x-1)^2$ на отрезке $[0;\ 1]$.

7. $\boxed{4}$ $f(x)=12x-x^3$ на отрезке $[-3;\ -1]$.

8. $\boxed{4}$ $f(x)=12x-x^3$ на отрезке $[-3;\ 1]$.

9. $\boxed{5}$ $f(x)=x^4-18x^2+30$ на отрезке $[-4;\ 3]$.

10. $\boxed{5}$ $f(x)=x+\frac{4}{x}$ на отрезке $[1;\ 3]$.

11. $\boxed{5}$ $f(x)=6\sqrt{x}-x$ на отрезке $[0;\ 25]$.

12. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$ на отрезке $[0;\ 2]$.

13. $\boxed{5}$ Найти наименьшее значение функции $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}$ на интервале $(0;\ 3)$.

14. $\boxed{5}$ Найти наибольшее значение функции $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ на интервале $x>0$.

15. $\boxed{5}$ Отливка объемом 72 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон основания $1:2$. При каких размерах отливки площадь ее полной поверхности будет наименьшей?

16. $\boxed{6}$ В треугольник ABC со сторонами AB и AC, равными 4 см и 10 см, и углом A, равным 30°, вписан имеющий с ним общий угол параллелограмм наибольшей площади. Найти площадь параллелограмма.

17. $\boxed{7}$ Точки M и N перемещаются по разным сторонам угла A, равного $60°$, так, что $AM+AN=a$. При каких AM и AN величина MN будет наименьшей?

18. $\boxed{7}$ Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R.

19. $\boxed{7}$ Найти высоту конуса с образующей l, имеющего наибольший объем.

20. $\boxed{8}$ Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около цилиндра с высотой H (оси цилиндра и конуса совпадают).

§ 53*. Выпуклость графика функции, точки перегиба

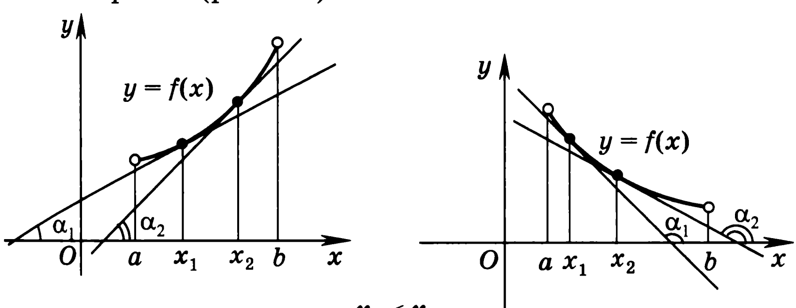
Справочные сведения

Производную $f'(x)$ дифференцируемой на интервале $(a;\ b)$ функции $f(x)$ называют также *первой производной* или производной первого порядка функции $f(x)$.

Если функция $f'(x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ производную, то эту производную называют *второй производной* или производной второго порядка функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$, т. е.

$$f''(x)=(f'(x))'.$$

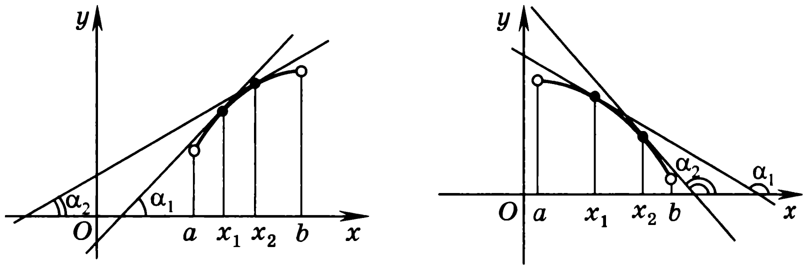
Функция $y=f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a;\ b)$, называется *выпуклой вниз* на этом интервале, если ее производная $f'(x)$ возрастает на $(a;\ b)$, и поэтому $f''(x)>0$ на этом интервале (рис. 67).



$$x_1<x_2$$
$$f'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha_1<\operatorname{tg}\alpha_2=f'(x_2)$$

Рис. 67

Функция $y=f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a;\ b)$, называется *выпуклой вверх* на этом интервале, если ее про-



$$x_1 < x_2$$
$$f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2 = f'(x_2)$$

Рис. 68

изводная $f'(x)$ убывает на $(a;\ b)$, и поэтому $f''(x) < 0$ (рис. 68).

При построении графика функции $y = f(x)$, имеющей на интервале $(a;\ b)$ вторую производную, учитывают следующий факт: если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то на этом интервале функция $f(x)$, выпукла вверх; если $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то на этом интервале функция $f(x)$ выпукла вниз.

Точка x_0 дифференцируемой функции $f(x)$ называется *точкой перегиба* этой функции, если x_0 является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз функции $f(x)$. Таким образом, в точке перегиба дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.

Примеры с решениями

1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = x^2 e^x$.

Решение. Найдем первую и вторую производные функции $f(x)$.

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2),$$
$$f''(x) = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

Так как $e^x > 0$ при всех x, то $f''(x) > 0$ тогда, когда $x^2 + 4x + 2 > 0$, т. е. при $x < -2 - \sqrt{2}$ и $x > -2 + \sqrt{2}$. На этих интервалах функция $f(x) = x^2 e^x$ выпукла вниз. $f''(x) < 0$ на интервале $-2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$, на нем функция выпукла вверх.

При переходе через точки $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = -2 + \sqrt{2}$ вторая производная функции $f(x)$ меняет знак, значит, эти точки — точки перегиба.

2. Построить график функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2$.

Решение. Функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси и имеет на ней вторую производную.

Найдем ее:

$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)'=x^2-2x$, $\qquad f''(x)=(x^2-2x)'=2x-2$;

$f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=2$, $\qquad f''(x)=0$ при $x=1$.

Результаты исследования функции с помощью первой и второй производных показаны в таблице.

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$		0		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{4}{3}$	
		точка максимума		точка перегиба		точка минимума	

Для построения графика функции $y=f(x)$ (рис. 69) были найдены координаты дополнительных точек, принадлежащих этому графику:

$f(-1)=-\frac{4}{3}$, $f(3)=0$.

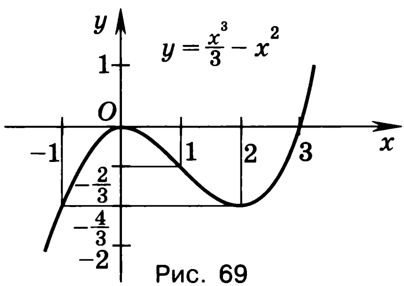


Рис. 69

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти $f''(x)$ (1—4).

1. $f(x)=x^3-7x^2+x+3$.
2. $f(x)=-3x^4+\frac{2}{3}x^3-7$.
3. $f(x)=(2x-1)^7$.
4. $f(x)=\sin^8 x$.

Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$ (5—6).

5. $f(x)=-x^3+5x^2$.
6. $f(x)=x^4-2x^3$.

Найти точки перегиба функции (7—8).

7. $f(x)=\sin x$ на интервале $0<x<2\pi$.

8. $f(x)=\frac{1}{20}x^5+4x^2$.

Построить график функции (9—10).

9. $f(x)=\frac{x^3}{6}-2x$. 10. $f(x)=-x^3-x^2+5x$.

Вариант II

Найти $f''(x)$ (1—4).

1. $f(x)=-x^3+6x^2-2x-5$.
2. $f(x)=\frac{1}{2}x^4-5x^3+3x$.
3. $f(x)=(3x+2)^6$.
4. $f(x)=\cos^7 x$.

Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции (5—6).

5. $f(x)=2x^3-4x^2$. 6. $f(x)=x^4+3x^3$.

Найти точки перегиба функции (7—8).

7. $f(x)=\cos x$ на интервале $0<x<\pi$.

8. $f(x)=\frac{x^5}{10}-8x^2$.

Построить график функции (9—10).

9. $f(x)=-\frac{x^3}{3}+4x$. 10. $f(x)=x^3-2x^2-4x$.

Контрольная работа № 9

Вариант I

1. Найти стационарные точки функции $f(x)=x^3-2x^2+x+3$.
2. Найти экстремумы функции:
1) $f(x)=x^3-2x^2+x+3$; 2) $f(x)=e^x(2x-3)$.
3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-2x^2+x+3$.

---

4. Построить график функции $f(x)=x^3-2x^2+x+3$ на отрезке $[-1;\ 2]$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-2x^2+x+3$ на отрезке $\left[0;\ \frac{3}{2}\right]$.
6. Среди прямоугольников, сумма длин трех сторон которых равна 20, найти прямоугольник наибольшей площади.

Вариант II

1. Найти стационарные точки функции $f(x)=x^3-x^2-x+2$.
2. Найти экстремумы функции:
1) $f(x)=x^3-x^2-x+2$; 2) $f(x)=(5-4x)e^x$.
3. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-x^2-x+2$.

---

4. Построить график функции $f(x)=x^3-x^2-x+2$ на отрезке $[-1; 2]$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-x^2-x+2$ на отрезке $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$.
6. Найти ромб с наибольшей площадью, если известно, что сумма длин его диагоналей равна 10.

Задания для подготовки к экзамену

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции:
1) $\boxed{4}$ $f(x)=\frac{x^2-x+4}{x}$; 2) $\boxed{4}$ $f(x)=\frac{x^2+x+9}{x}$.

Ответ. 1) Функция возрастает на интервалах $x<-2$, $x>2$, убывает на интервалах $-2<x<0$, $0<x<2$; 2) функция возрастает на интервалах $x<-3$, $x>3$, убывает на интервалах $-3<x<0$, $0<x<3$.

2. Найти промежутки:
1) $\boxed{4}$ возрастания функции $f(x)=x-7-\sqrt{2x+3}$;
2) $\boxed{4}$ убывания функции $f(x)=5-x+2\sqrt{x+2}$.

Ответ. 1) Промежуток возрастания: $x\geqslant-1$; 2) промежуток убывания: $x\geqslant-1$.

3. Найти промежутки возрастания и убывания функции:
1) $\boxed{4}$ $f(x)=2x^2-\ln x$; 2) $\boxed{4}$ $f(x)=\ln x-4{,}5x^2$.

Ответ. 1) Промежуток убывания: $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, промежуток возрастания: $x\geqslant\frac{1}{2}$; 2) промежуток возрастания: $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$, промежуток убывания: $x\geqslant\frac{1}{3}$.

4. Исследовать на монотонность функцию:
1) $\boxed{4}$ $f(x)=3-x+e^{x+2}$; 2) $\boxed{4}$ $f(x)=e^{3-x}+x+2$.

Ответ. 1) Промежуток убывания: $x\leqslant-2$, промежуток возрастания: $x\geqslant-2$; 2) промежуток убывания: $x\leqslant3$, промежуток возрастания: $x\geqslant3$.

5. Доказать, что функция $f(x)$ монотонна на всей области определения, если:

1) $\boxed{4}$ $f(x)=e^{-x}-5x$; 2) $\boxed{4}$ $f(x)=3x-e^{-x}$.

6. Исследовать на монотонность функцию $f(x)$, если:

1) $\boxed{4}$ $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$; 2) $\boxed{4}$ $f(x)=x^2-\frac{16}{x}$.

Ответ. 1) Промежутки возрастания: $x<0$, $x\geqslant 2$, промежуток убывания: $0<x\leqslant 2$; 2) промежутки возрастания: $-2\leqslant x<0$, $x>0$; промежуток убывания: $x\leqslant -2$.

7. Найти все такие положительные значения параметра a, что функция:

1) $\boxed{7}$ $y=ax^2-\ln x$ убывает на интервале $0<x<5$;

2) $\boxed{7}$ $y=\ln x-ax^2$ убывает на интервале $x>2$.

Указание. 1) Интервал убывания: $0<x<\frac{1}{\sqrt{2a}}$. Чтобы функция убывала на интервале $0<x<5$, должно выполняться неравенство $5<\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

Ответ. 1) $0<a\leqslant\frac{1}{50}$; 2) $a\geqslant\frac{1}{8}$.

8. Найти:

1) $\boxed{8}$ все значения t, такие, что функция $f(x)=2x^3-3x^2+7$ возрастает на интервале $t-1<x<t+1$;

2) $\boxed{8}$ все значения p, такие, что функция $f(x)=-x^3+3x^2+5$ убывает на интервале $p<x<p+\frac{1}{2}$.

Указание. 1) Интервалы возрастания: $x\leqslant 0$, $x\geqslant 1$. Чтобы функция возрастала на заданном интервале, должно выполняться одно из двух неравенств: $t+1\leqslant 0$, $t-1\geqslant 1$.
Ответ. 1) $t\leqslant -1$, $t\geqslant 2$; 2) $p\leqslant -1{,}5$, $p\geqslant 1$.

9. При каких значениях a функция $f(x)$ имеет одну стационарную точку, если:

1) $\boxed{7}$ $f(x)=ax^3-6x^2+4x+7$; 2) $\boxed{7}$ $f(x)=ax^3+6x^2-2x+7$?
Ответ. 1) $a=0$, $a=3$; 2) $a=0$, $a=-6$.

10. Найти точки экстремумов функции:

1) $\boxed{4}$ $f(x)=x+\sqrt{1-x}$; 2) $\boxed{4}$ $f(x)=x-\sqrt{2x+1}$.
Ответ. 1) Точка максимума $x=0{,}75$; 2) точка минимума $x=0$.

11. Найти точки экстремумов функции:

1) $\boxed{6}$ $f(x)=e^{2x}+e^x-3x+2$; 2) $\boxed{6}$ $f(x)=4x-2e^x-e^{2x}-5$.

Ответ. 1) $x=0$ — точка минимума; 2) $x=0$ — точка максимума.

12. Найти стационарные точки функции:

1) $\boxed{4}$ $f(x)=x+\frac{4}{x}$ и среди них указать точку максимума;

2) $\boxed{4}$ $f(x)=9x+\frac{1}{x}$ и среди них указать точку минимума;

Ответ. 1) $x=2$, $x=-2$; $x=-2$ — точка максимума;
2) $x=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{3}$; $x=\frac{1}{3}$ — точка минимума.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $\boxed{5}$ $f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{x}{2}$ на промежутке $0\leqslant x\leqslant 2{,}5$;

2) $\boxed{5}$ $f(x)=x+\frac{4}{x-1}$ на промежутке $-2\leqslant x\leqslant 0$.

Ответ. 1) Наибольшее значение функции равно 2, наименьшее значение равно 1,5; 2) наибольшее значение функции равно -3, наименьшее значение равно -4.

14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $\boxed{5}$ $f(x)=x^4-2x^2+1$ на отрезке $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\frac{1}{2}$;

2) $\boxed{5}$ $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3$ на отрезке $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\frac{1}{3}$.

Определить, какие целые значения принимает функция на заданном отрезке.

Ответ. 1) Наибольшее значение функции равно $1\frac{9}{16}$, наименьшее значение равно -2, целые значения: -2; -1; 0; 1;
2) наибольшее значение функции равно $\frac{16}{27}$, наименьшее значение равно $-\frac{1}{3}$, целое значение 0.

15. Найти:

1) $\boxed{7}$ максимумы функции $f(x)=\cos 2x\cos x$ на интервале $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$;

2) $\boxed{7}$ минимумы функции $f(x)=\cos 2x\sin x$ на интервале $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$.

Указание. 1) Задача сводится к нахождению максимумов функции $g(t)=2t^3-t$, где $t=\cos x$, на интервале $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$.

Ответ. 1) Максимум функции равен $\frac{\sqrt{6}}{9}$; 2) минимум функции равен $-\frac{\sqrt{6}}{9}$.

16. При каких значениях x каждое из заданных выражений принимает наибольшее значение? Найти это значение:

1) $\boxed{8}$ $3+\frac{3}{|2x^2+x-3|+1}$; 2) $\boxed{8}$ $\frac{2}{5+|3x^2+x-2|}-2$.

Ответ. 1) При $x=-\frac{3}{2}$ и при $x=1$ выражение принимает наибольшее значение, равное 6; 2) при $x=-1$ и при $x=\frac{2}{3}$ выражение принимает наибольшее значение, равное $-1{,}6$.

17. Выяснить, при каких значениях параметра a наименьшее значение функции:

1) $\boxed{7}$ $f(x)=x+e^{a-x}$ равно 4; 2) $\boxed{7}$ $f(x)=e^{x-a}-x$ равно -3.

Указание. 1) Исследуя функцию $f(x)$ на $\boldsymbol{R}$, установить, что наименьшее значение функции равно $a+1$ (при $x=a$).
Ответ. 1) $a=3$; 2) $a=4$.

18. Выяснить:

1) $\boxed{7}$ при каких положительных значениях a наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x+a}$ равно $-6\sqrt{3}$;

2) $\boxed{7}$ при каких положительных значениях b наибольшее значение функции $y=(b-x)\sqrt{x}$ равно $10\sqrt{5}$.

Указание. 1) При исследовании функции учесть, что $a>0$, $x\geqslant -a$.
Ответ. 1) При $a=9$; 2) при $b=15$.

19. Найти значение a и все экстремумы функции, если:

1) $\boxed{8}$ функция $f(x)=\ln x+ax^2-5x$ имеет экстремум в точке $x=0{,}5$;

2) $\boxed{8}$ известно, что $x=1$ — одна из точек экстремума функции $f(x)=\ln x+x^2+ax$.

Ответ. 1) $a=3$, $x=\frac{1}{3}$ — точка максимума, $x=\frac{1}{2}$ — точка минимума; 2) $a=-3$, $x=\frac{1}{2}$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума.

20. Выяснить:

1) $\boxed{8}$ при каких значениях a наибольшее значение функции $y=x^3-3x+a$ на отрезке $-2\leqslant x\leqslant 0$ равно 5;

2) $\boxed{8}$ при каких значениях b наименьшее значение функции $y=x^3-12x+b$ на отрезке $1\leqslant x\leqslant 3$ равно 0.

Указание. 1) На заданном отрезке функция имеет только одну критическую точку $x_0=-1$. Среди значений $y(-2)$,

$y(-1)$, $y(0)$ нужно выбрать наибольшее и установить, при каких a оно равно 5.
Ответ. 1) При $a=3$; 2) при $b=16$.

21. Выяснить:

1) $\boxed{9}$ при каких значениях a точка $x_0=a$ является точкой минимума функции $y=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-1$;

2) $\boxed{9}$ при каких значениях b точка $x_0=b$ является точкой максимума функции $y=\frac{2}{3}x^3-(b-2)x^2-4bx+3$.

Указание. 1) Корнями уравнения $y'(0)=0$ являются $x_1=1$, $x_2=a$. Поэтому необходимо исследовать функцию на экстремум трижды: при $a<1$, при $a=1$, при $a>1$.
Ответ. 1) При $a>1$; 2) при $b<-2$.

22. Записать уравнение касательной к графику функции:

1) $\boxed{5}$ $f(x)=4^x-2^{x+1}$ в точке ее минимума;

2) $\boxed{5}$ $f(x)=3^{x+1}-27^x$ в точке ее максимума.
Ответ. 1) $y=-1$; 2) $y=2$.

23. $\boxed{4}$ Число 6 разложить на два положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наибольшей. Ответ. $6=3+3$.

24. $\boxed{5}$ В треугольник с основанием 4 см и высотой 2 см вписан прямоугольник наибольшей площади с вершинами на сторонах треугольника. Найти площадь прямоугольника. Ответ. 2 см^2.

25. $\boxed{7}$ Внутри угла, величина которого 30°, взята точка A, находящаяся на расстояниях 2 и 3 см от сторон угла. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, отсекаемый от этого угла прямой, проходящей через точку A?
Указание. Для решения задачи использовать два способа подсчета площади отсекаемого треугольника.
Ответ. 24 см^2.

26. $\boxed{7}$ На гипотенузе AB данного прямоугольного треугольника ABC взята точка P. Какой должна быть величина угла ACP, чтобы произведение расстояний от точек A и B до прямой CP было наибольшим? Ответ. 45°.

27. $\boxed{7}$ Улитка выползает из вершины C равностороннего треугольника ABC со стороной a и ползет по направлению к вершине A. Одновременно из A выползает с вдвое большей скоростью гусеница и ползет к B. На каком расстоянии от B будет гусеница, когда расстояние между ней и улиткой станет наименьшим? Ответ. $\frac{3}{7}a$.

28. $\boxed{8}$ Рассматриваются всевозможные правильные треугольные призмы, у которых каждая боковая грань имеет периметр, равный a. Найти среди них призму с наибольшим объемом. (В ответе указать боковое ребро такой призмы.) Ответ. $\frac{a}{6}$.

29. $\boxed{8}$ Рассматриваются всевозможные правильные четырехугольные призмы, сумма длин всех ребер каждой из которых равна b. Найти среди них призму с наибольшим объемом. (В ответе указать сторону основания такой призмы.) Ответ. $\frac{b}{12}$.

30. $\boxed{8}$ Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна d. Найти длину бокового ребра, при которой призма имеет наибольший объем. Ответ. $\frac{d\sqrt{3}}{3}$.

31. $\boxed{8}$ Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна p. Найти высоту пирамиды наибольшего объема. Ответ. $\frac{p\sqrt{3}}{3}$.

32. $\boxed{8}$ Найти радиус основания цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую площадь полной поверхности. Ответ. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

33. $\boxed{3}$ Функция $y=f(x)$ задана на промежутке $[-6; 4]$ (рис. 70). Выбрать промежуток, которому принадлежат все точки экстремума функции: 1) $[-6; 0]$; 2) $[0; 4]$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-3; 1]$. Ответ. $[-3; 1]$.

34. $\boxed{5}$ Функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. На рисунке 71 изображен график ее производной $y=f'(x)$. Исследовать функцию $y=f(x)$ на монотонность.
В ответе указать количество промежутков, на которых функция возрастает. Ответ. 3.

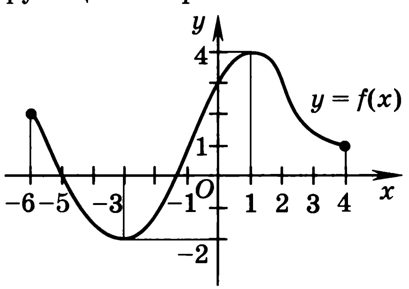


Рис. 70

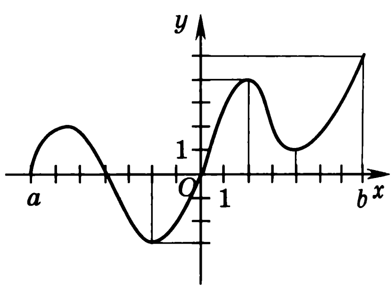


Рис. 71

35. $\boxed{6}$ Найти максимум функции $y=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x-4\frac{1}{2}$.
Ответ. 9.

36. $\boxed{6}$ Найти наименьшее значение функции $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(9-x^2)$.
Ответ. -2.

37. $\boxed{7}$ Найти наименьшее значение функции

$$y=\sqrt[3]{\sin 2x \cdot \cos x+\cos 2x \cdot \sin x-7}.$$

Ответ. -2.

38. $\boxed{8}$ При каком наибольшем целом значении m функция $f(x)=-x^3+\frac{1}{2}mx^2-5x+2$ убывает на всей числовой прямой? Ответ. 7.

39. $\boxed{8}$ При каком значении a функция $y=\frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x=4$? Ответ. При $a=8$.

Задания для интересующихся математикой

1. Фигура Φ ограничена параболой $y=x^2+1$ и прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$. В какой точке параболы следует провести касательную к ней, чтобы эта касательная отсекала от фигуры Φ трапецию наибольшей площади?
Ответ. В точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

2. 1) Среди всех прямых, касающихся графика функции $y=x^3+6x^2+\frac{45}{4}x+1$ в точке с положительной абсциссой, выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.
2) Среди всех прямых, касающихся графика функции $y=-x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+2$ в точке с отрицательной абсциссой, выбрана та, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой. Найти эту ординату.
Ответ. 1) 9; 2) $\frac{28}{27}$.

3. Рассматриваются прямоугольные параллелепипеды с отношением сторон $m:n$ и суммой всех измерений, равной a. Требуется: 1) найти высоту параллелепипеда, имеющего наибольший объем; 2) установить, при каком отношении $m:n$ объем этого параллелепипеда будет наибольшим.
Ответ. 1) $\frac{a}{3}$; 2) 1.

§ 54. Первообразная

Справочные сведения

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то функция $F(x)+C$, где C — любое число, также является первообразной функции $f(x)$ на этом промежутке.

Если функция $f(x)$ имеет на некотором промежутке первообразную $F(x)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на промежутке имеет вид

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

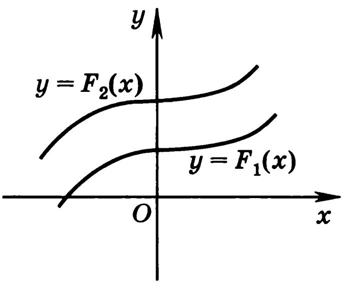


Рис. 72

где C — некоторое число. Графики любых двух первообразных $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции $f(x)$ получаются один из другого сдвигом вдоль оси Oy (рис. 72).

Для того чтобы выделить из совокупности первообразных функции $f(x)$ какую-либо первообразную $F_1(x)$, достаточно указать точку $M_0(x_0;\ y_0)$, принадлежащую графику функции $y=F_1(x)$.

Примеры с решениями

1. Показать, что функция $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой прямой, если:

1) $F(x)=\frac{x^3}{3}$, $f(x)=x^2$; 2) $F(x)=\frac{x^7}{7}+4$, $f(x)=x^6$;

3) $F(x)=2x^5-1$, $f(x)=10x^4$;

4) $F(x)=-3\cos x$, $f(x)=3\sin x$.

Решение.

1) Применяя правила дифференцирования и учитывая, что $(x^n)'=nx^{n-1}$, $n\in N$, получаем

$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$

2) $\left(\frac{x^7}{7} + 4\right)' = \frac{1}{7} \cdot 7x^6 = x^6.$

3) $(2x^5 - 1)' = 2 \cdot 5x^4 = 10x^4.$

4) $(-3\cos x)' = -3(\cos x)' = (-3)(-\sin x) = 3\sin x.$

2. Для функции $f(x)$ найти такую первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $M(-1;\ 3)$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(4;\ 5)$.

Решение. 1) Функция $\frac{x^{p+1}}{p+1}$ — первообразная функции x^p для любого $p \neq -1$ при $x > 0$. В частности, для функции $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = -\frac{1}{x} + C$.

По условию $F(-1) = 3$, т. е. $3 = 1 + C$, откуда $C = 2$ и $F(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

2) Одной из первообразных функции $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ является функция $\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, а искомая первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Так как $F(4) = 5$, то $5 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + C$, т. е. $5 = \frac{16}{3} + C$, откуда $C = -\frac{1}{3}$, $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}$.

Ответ. 1) $2 - \frac{1}{x}$; 2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Показать, что функция $F(x)$ — первообразная функция $f(x)$ на всей числовой прямой (**1—6**).

1. $\boxed{3}$ $F(x) = \frac{x^4}{4}$, $f(x) = x^3$.

2. $\boxed{3}$ $F(x) = \frac{2}{5}x^5$, $f(x) = 2x^4$.

3. $\boxed{3}$ $F(x) = -\frac{1}{16}x^8 + 2$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^7$.

4. $\boxed{3}$ $F(x) = 3\sin x + 4$, $f(x) = 3\cos x$.

5. $\boxed{3}$ $F(x) = -e^x + 5,\ f(x) = -e^x.$

6. $\boxed{4}$ $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\cos 2x,\ f(x) = e^{\frac{x}{2}} + \sin 2x.$

Вариант II

Показать, что функция $F(x)$ — первообразная функция $f(x)$ на всей числовой прямой (**1—6**).

1. $\boxed{3}$ $F(x) = 2x^5,\ f(x) = 10x^4.$

2. $\boxed{3}$ $F(x) = \frac{x^6}{3},\ f(x) = 2x^5.$

3. $\boxed{3}$ $F(x) = -\frac{1}{18}x^9 + 3,\ f(x) = -\frac{1}{2}x^8.$

4. $\boxed{3}$ $F(x) = -2\cos x + 1,\ f(x) = 2\sin x.$

5. $\boxed{3}$ $F(x) = -2e^x + 3,\ f(x) = -2e^x.$

6. $\boxed{4}$ $F(x) = -3e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{4}\sin 4x,\ f(x) = -e^{\frac{x}{3}} + \cos 4x.$

§ 55. Правила нахождения первообразных

Справочные сведения

Таблица первообразных

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x},\ x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Правила нахождения первообразных
(правила интегрирования)

Если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке, то функция:

1) $F(x) + G(x)$ — первообразная функции $f(x) + g(x)$;

2) $aF(x)$ — первообразная функции $af(x)$, a — постоянная;

3) $\frac{1}{k}F(kx + b)$, где k, b — постоянные, $k \neq 0$, является первообразной функции $f(kx + b)$.

Примеры с решениями

1. Найти все первообразные данной функции:

1) $3x^2+\frac{2}{x}$;

2) $\sin 2x-e^{-x}$;

3) $5\cos(3x+2)-(x-1)^3+\frac{4}{\sqrt{x+4}}$;

4) $\frac{1}{x^2-x-2}$; 5) $\sin^2 2x$.

Решение.

1) По таблице первообразных и правилам интегрирования для функции x^p при $p=2$ и $p=-1$ находим все первообразные данной функции:

$$x^3+2\ln|x|+C,\ x\neq 0.$$

2) Первообразными функций $\sin 2x$ и e^{-x} являются соответственно функции $-\frac{\cos 2x}{2}$ и $-e^{-x}$, а совокупность всех первообразных данной функции записывается в виде

$$-\frac{\cos 2x}{2}+e^{-x}+C.$$

3) Первообразными функций $\cos(3x+2)$, $(x-1)^3$ и $(x+4)^{-\frac{1}{2}}$ являются соответственно функции $\frac{1}{3}\sin(3x+2)$, $\frac{(x-1)^4}{4}$ и $2\sqrt{x+4}$, а совокупность всех первообразных данной функции имеет вид

$$\frac{5}{3}\sin(3x+2)-\frac{(x-1)^4}{4}+8\sqrt{x+4}+C.$$

4) Так как

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right),$$

то совокупность всех первообразных данной функции можно записать в виде

$$\frac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|)+C,\ x\neq 2,\ x\neq -1.$$

5) Используя равенство $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$, находим искомое множество всех первообразных данной функции:

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+C.$$

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти все первообразные данной функции (**1—17**).

1. $\boxed{3}$ $3x^3-4x^2$.

2. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}$.

3. $\boxed{3}$ x^5-2x.

4. $\boxed{4}$ $-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}$.

5. $\boxed{4}$ $2\sin x+x^2$.

6. $\boxed{5}$ $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

7. $\boxed{4}$ $4e^x+x^3$.

8. $\boxed{4}$ $\sqrt{x}+2x^2\sqrt{x}$.

9. $\boxed{4}$ $\sin 2x+3\cos 3x$.

10. $\boxed{5}$ $4e^{-2x}+(x-1)^3$.

11. $\boxed{5}$ $\frac{2}{\sqrt{x+3}}-\sin^2 2x$.

12. $\boxed{6}$ $2\cos^2\frac{x}{2}$.

13. $\boxed{6}$ $\frac{x}{1+x}$.

14. $\boxed{7}$ $\frac{1}{x^2-5x+6}$.

15. $\boxed{7}$ $\cos x\sin 3x$.

16. $\boxed{7}$ $\frac{x^3}{x+1}$.

17. $\boxed{8}$ $\frac{2x+5}{x^2+5x+4}$.

Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M (**18—21**).

18. $\boxed{4}$ $f(x)=-\frac{1}{x^3}$, $M(1;\ -2)$.

19. $\boxed{5}$ $f(x)=\sin x-\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

20. $\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$, $M(1;\ -2)$.

21. $\boxed{5}$ $f(x)=e^{2x}+\frac{1}{x+1}$, $M(0;\ 2)$.

Найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, принимающую указанное значение в заданной точке (**22—24**).

22. $\boxed{5}$ $f(x)=\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 2x$, $F(0)=1$.

23. $\boxed{6}$ $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+2(x+1)^3$, $F(0)=0$.

24. $\boxed{7}$ $f(x)=\frac{x+1}{(x-2)^3}$, $F(1)=-1$.

Вариант II

Найти все первообразные данной функции (**1—17**).

1. $\boxed{3}$ $2x^4-5x$.

2. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}$.

3. $\boxed{3}$ x^6+3x^2.

4. $\boxed{4}$ $\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^2}$.

5. $\boxed{4}$ $3\cos x-x$.

6. $\boxed{5}$ $x\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}$.

7. $\boxed{4}$ $5e^x-2x^4$.

8. $\boxed{4}$ $x\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

9. $\boxed{4}$ $\frac{1}{3}\cos 6x-4\sin 4x$.

10. $\boxed{5}$ $6e^{2x}+(x+1)^4$.

11. $\boxed{5}$ $\frac{3}{\sqrt{x-1}}+\cos^2 3x$.

12. $\boxed{6}$ $2\sin^2\frac{x}{2}$.

13. $\boxed{6}$ $\frac{x-1}{x+2}$.

14. $\boxed{7}$ $\frac{1}{x^2-3x-4}$.

15. $\boxed{7}$ $\sin x\cos 3x$.

16. $\boxed{7}$ $\frac{x^3}{x-1}$.

17. $\boxed{8}$ $\frac{2x+6}{x^2+6x+5}$.

Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M (**18—21**).

18. $\boxed{4}$ $f(x)=\frac{2}{x^4}$, $M(2;\ -1)$.

19. $\boxed{5}$ $f(x)=\cos x+\sin x$, $M(\pi;\ -2)$.

20. $\boxed{5}$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}$, $M(1;\ -3)$.

21. $\boxed{5}$ $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{x+2}$, $M(0;\ -2)$.

Найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, принимающую указанное значение в заданной точке (**22—24**).

22. $\boxed{5}$ $f(x)=\cos 5x-\frac{1}{6}\sin 3x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

23. $\boxed{6}$ $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+4(x-1)^5$, $F(0)=1$.

24. $\boxed{7}$ $f(x)=\frac{x-2}{(x+3)^3}$, $F(-1)=1$.

§ 56. Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Справочные сведения

1. *Криволинейная трапеция* — фигура, ограниченная отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (рис. 73) и графиком непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $y=f(x)$, где $f(x)\geqslant 0$ при $x\in[a;\ b]$.

2. Если S — площадь криволинейной трапеции, $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на $[a;\ b]$, то

$$S=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

y $\quad y=f(x)$

a $\quad O$ $\quad b$ $\quad x$

Рис. 73

Формулу (1) называют *формулой Ньютона — Лейбница.*

Примеры с решениями

1. Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

1) графиком функции $y=\sin\frac{x}{2}$, осью Ox и прямыми $x=\pi$ и $x=\frac{5\pi}{3}$;

2) графиком функции $y=1+|x|$, осью Ox и прямыми $x=-1$ и $x=2$;

3) графиком функции $y=-x^2+2x$ и осью Ox.

Решение. Криволинейные трапеции изображены на рисунках 74—76.

y $\quad y=\sin\frac{x}{2}$ $\quad 1$ $\quad O$ $\quad \pi$ $\quad \frac{5\pi}{3}$ $\quad 2\pi$ $\quad x$

Рис. 74

y $\quad 3$ $\quad y=1+|x|$ $\quad -1$ $\quad O$ $\quad 2$ $\quad x$

Рис. 75

y $\quad y=-x^2+2x$ $\quad 1$ $\quad O$ $\quad 1$ $\quad 2$ $\quad x$

Рис. 76

2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезками $x=a$, $x=b$, осью Ox и графиком функции $y=f(x)$:

1) $a=1$, $b=3$, $f(x)=6x-x^2$;

2) $a=-\frac{2\pi}{3}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\cos\frac{x}{2}$;

3) $a=-2$, $b=2$, $f(x)=x^2-2|x|+2$.

Решение.

1) Применяя формулу (1), получаем

$$S=\int_1^3(6x-x^2)\,dx=F(3)-F(1),$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции. Так как $3x^2$ и $\frac{x^3}{3}$ — первообразные функций $6x$ и x^2, то в качестве $F(x)$ можно взять функцию $F(x)=3x^2-\frac{x^3}{3}$. Тогда $F(3)=27-9=$ $=18$, $F(1)=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$, откуда $S=18-\frac{8}{3}=\frac{46}{3}=15\frac{1}{3}$.

2) Функция $F(x)=2\sin\frac{x}{2}$ является первообразной функции $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. По формуле (1) находим $S=\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx=$

$$=2\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

3) Функция $y=x^2-2|x|+2$ является четной, ее график симметричен относительно оси Oy (рис. 77); при $x\geqslant 0$ функция принимает вид $y=x^2-2x+2=$ $=(x-1)^2+1$. Кроме того, прямая $x=1$ — ось симметрии параболы $y=(x-1)^2+1$, а точки (0; 0) и (2; 0) симметричны относительно прямой $x=1$.

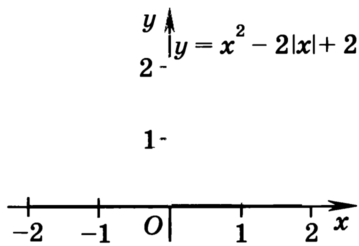


Рис. 77

Поэтому $S=4S_1$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$ и графиком функции $y=(x-1)^2+1$. Так как

$$S_1=\int_0^1((x-1)^2+1)\,dx=\left(\frac{(x-1)^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3},\text{ то } S=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}.$$

Ответ. 1) $15\frac{1}{3}$; 2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 3) $5\frac{1}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$ (1—4).

1. $\boxed{4}$ $a=1,\ b=3,\ f(x)=6x-x^2.$

2. $\boxed{4}$ $a=-4,\ b=-2,\ f(x)=-\frac{1}{x}.$

3. $\boxed{5}$ $a=\frac{7\pi}{6},\ b=\frac{3\pi}{2},\ f(x)=|\sin x|.$

4. $\boxed{6}$ $a=-2,\ b=4,\ f(x)=x^2-4|x|+5.$

5. $\boxed{5}$ Выяснить, какая из криволинейных трапеций, изображенных на рисунках 78—80, имеет площадь $S=6$.

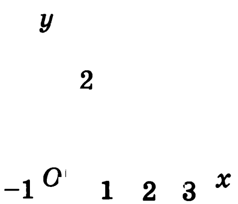


Рис. 78

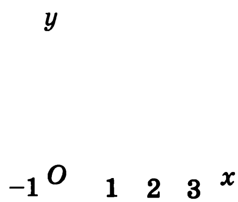


Рис. 79

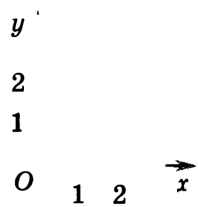


Рис. 80

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox (6—16).

6. $\boxed{4}$ $a=-1,\ b=2,\ f(x)=x^2.$

7. $\boxed{4}$ $a=0,\ b=2,\ f(x)=x^2-2x+2.$

8. $\boxed{4}$ $a=3,\ b=5,\ f(x)=6x-x^2.$

9. $\boxed{5}$ $a=1,\ b=2,\ f(x)=\frac{2}{x+1}.$

10. $\boxed{4}$ $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{3},\ f(x)=\frac{1}{x^2}.$

11. $\boxed{4}$ $a=1,\ b=27,\ f(x)=2\sqrt[3]{x}.$

12. $\boxed{5}$ $a=1,\ b=4,\ f(x)=x+\frac{1}{x}.$

13. $\boxed{7}$ $a=0,\ b=3,\ f(x)=\frac{x+2}{x+1}.$

14. $\boxed{7}$ $a=-1,\ b=1,\ f(x)=1+\sqrt{|x|}.$

15. $\boxed{7}$ $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\sin^2 x$.

16. $\boxed{7}$ $a=1$, $b=2$, $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox (**17—20**).

17. $\boxed{4}$ $f(x)=1-x^2$.

18. $\boxed{4}$ $f(x)=4x-x^2$.

19. $\boxed{5}$ $f(x)=2+x-x^2$.

20. $\boxed{5}$ $f(x)=|\cos x|$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Вариант II

Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции $y=f(x)$ (**1—4**).

1. $\boxed{4}$ $a=2$, $b=4$, $f(x)=5x-x^2$.

2. $\boxed{4}$ $a=-3$, $b=-1$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

3. $\boxed{5}$ $a=\pi$, $b=\frac{4\pi}{3}$, $f(x)=|\cos x|$.

4. $\boxed{6}$ $a=-6$, $b=3$, $f(x)=x^2-6|x|+10$.

5. $\boxed{5}$ Выяснить, какая из криволинейных трапеций, изображенных на рисунках 81—83, имеет площадь $S=5$.

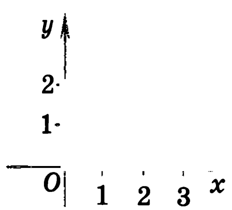


Рис. 81

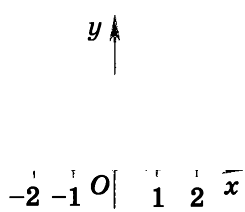


Рис. 82

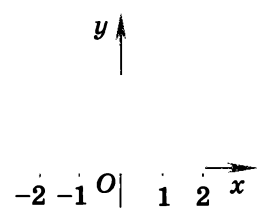


Рис. 83

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox (**6—16**).

6. $\boxed{4}$ $a=-2$, $b=1$, $f(x)=2x^2$.

7. $\boxed{4}$ $a=1$, $b=3$, $f(x)=x^2-4x+5$.

8. $\boxed{4}$ $a=2$, $b=6$, $f(x)=8x-x^2$.

9. $\boxed{5}$ $a=0,\ b=3,\ f(x)=\frac{3}{x+2}$.

10. $\boxed{4}$ $a=\frac{1}{3},\ b=1,\ f(x)=\frac{2}{x^2}$.

11. $\boxed{4}$ $a=1,\ b=64,\ f(x)=3\sqrt[3]{x}$.

12. $\boxed{5}$ $a=2,\ b=5,\ f(x)=x-\frac{1}{x}$.

13. $\boxed{7}$ $a=0,\ b=2,\ f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$.

14. $\boxed{7}$ $a=-1,\ b=1,\ f(x)=1+3\sqrt{|x|}$.

15. $\boxed{7}$ $a=\frac{3\pi}{4},\ b=\pi,\ f(x)=\cos^2 x$.

16. $\boxed{7}$ $a=2,\ b=4,\ f(x)=\frac{2x^2}{x+1}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox (**17—20**).

17. $\boxed{4}$ $f(x)=4-x^2$.

18. $\boxed{4}$ $f(x)=2x-x^2$.

19. $\boxed{5}$ $f(x)=6+x-x^2$.

20. $\boxed{5}$ $f(x)=|\sin x|,\ \pi\leqslant x\leqslant 2\pi$.

§ 57. Вычисление интегралов

Справочные сведения

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$, то по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Примеры с решениями

Вычислить интеграл (**1—4**).

1. $\int_0^\pi \cos 2x\,dx$.

Решение. Так как $\frac{\sin 2x}{2}$ — первообразная функции $\cos 2x$, то

$$\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi=\frac{1}{2}(\sin 2\pi-\sin 0)=0.$$

2. $\int\limits_{-1}^{2}\left((x+1)^2+2(x-2)^3\right)dx.$

Решение. $\left(\frac{(x+1)^3}{3}+2\cdot\frac{(x-2)^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{2}=9-\frac{3^4}{2}=-\frac{63}{2}.$

3. $\int\limits_{1}^{3}\frac{x}{(x+1)^3}\,dx.$

Решение. $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$. В качестве первообразной для функции $f(x)$ можно взять функцию $F(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}$. Поэтому $F(3)-F(1)$, где $F(3)=-\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{32}=-\frac{7}{32}$, $F(1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=-\frac{3}{8}$. Итак, $\frac{3}{8}-\frac{7}{32}=\frac{5}{32}$.

4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx.$

Решение. Применяя формулу понижения степени, получаем $\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=$ $=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$, а в качестве первообразной для функции $\cos^4 x$ можно взять функцию $F(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\right.$ $\left.+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)$.

Так как $F(0)=0$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$, то $F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\frac{3\pi}{16}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Вычислить интеграл **(1—18)**.

1. $\boxed{4}$ $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^4}.$

2. $\boxed{5}$ $\int\limits_{0}^{3}\left[x^2+(x-3)^3\right]dx.$

3. $\boxed{4}$ $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx.$

4. $\boxed{4}$ $\int\limits_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx.$

5. $\boxed{5}$ $\int\limits_{0}^{\ln 2}e^{2x}\,dx.$

6. $\boxed{6}$ $\int\limits_{-1}^{0}(x+1)(x^2+2x-3)\,dx.$

7. $\boxed{6}$ $\int_{1}^{4} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx.$

8. $\boxed{6}$ $\int_{2}^{3} \frac{dx}{2x+3}.$

9. $\boxed{6}$ $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^2}.$

10. $\boxed{7}$ $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{x+2}\,dx.$

11. $\boxed{7}$ $\int_{1}^{2} \frac{x^2+4}{x+2}\,dx.$

12. $\boxed{8}$ $\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

13. $\boxed{8}$ $\int_{0}^{2} |x-1|\,dx.$

14. $\boxed{8}$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x\,dx.$

15. $\boxed{8}$ $\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx.$

16. $\boxed{9}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin^4 x+\cos^2 x)\,dx.$

17. $\boxed{9}$ $\int_{0}^{\pi} (\cos^8 x-\sin^8 x)\,dx.$

18. $\boxed{9}$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx.$

Вариант II

Вычислить интеграл (1—18).

1. $\boxed{4}$ $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^6}.$

2. $\boxed{5}$ $\int_{-2}^{1} \left[(x-1)^3+(x+2)^2\right]dx.$

3. $\boxed{4}$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx.$

4. $\boxed{4}$ $\int_{2}^{7} \left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx.$

5. $\boxed{5}$ $\int_{0}^{\ln 3} e^{3x}\,dx.$

6. $\boxed{6}$ $\int_{0}^{2} (x-2)(x^2-4x+5)\,dx.$

7. $\boxed{6}$ $\int_{1}^{4} \frac{x+3}{x\sqrt{x}}\,dx.$

8. $\boxed{6}$ $\int_{1}^{3} \frac{dx}{3x+2}.$

9. $\boxed{6}$ $\int_{-5}^{-3} \frac{dx}{(x+2)^2}.$

10. $\boxed{7}$ $\int_{0}^{2} \frac{x+2}{x+3}\,dx.$

11. $\boxed{7}$ $\int_{2}^{3} \frac{x^2+3}{x+1}\,dx.$

12. $\boxed{8}$ $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

13. $\boxed{8}$ $\int\limits_{-2}^{0} |x+1|\,dx.$

14. $\boxed{8}$ $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 3x\, dx.$

15. $\boxed{8}$ $\int\limits_{2}^{7} x\sqrt{x+2}\, dx.$

16. $\boxed{9}$ $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^4 x+\sin^2 x)\,dx.$

17. $\boxed{9}$ $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^6 x+\cos^6 x)\,dx.$

18. $\boxed{9}$ $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx.$

§ 58. Вычисление площадей с помощью интегралов

Справочные сведения

Если фигура Φ ограничена отрезками прямых $x=a$, $x=b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a;\, b]$ функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, таких, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ при $x\in[a,\, b]$ (рис. 84), то площадь S фигуры Φ выражается формулой

$$S=\int\limits_a^b \Big(f_2(x)-f_1(x)\Big)\, dx. \qquad (1)$$

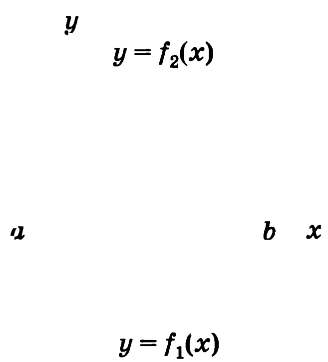


Рис. 84

Примеры с решениями

1. Найти площадь фигуры Φ, ограниченной параболой

$y=\frac{x^2}{4}$ и прямой $y=3-x$.

Решение. Парабола и прямая пересекаются в точках A и B (рис. 85), абсциссы которых являются корнями уравнения $\frac{x^2}{4}=3-x$, откуда после преобразований получим $x^2+4x-12=0$, т. е. $x_1=-6$, $x_2=2$.

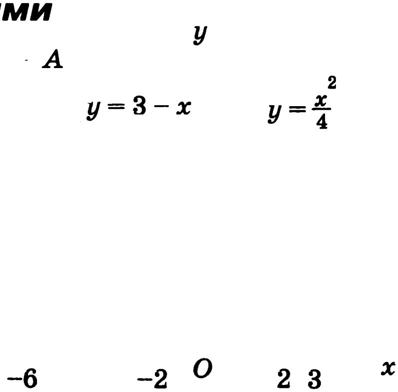


Рис. 85

Искомую площадь вычислим по формуле (1), где $a=-6$, $b=2$, $f_2(x)=3-x$, $f_1(x)=\frac{x^2}{4}$. Следовательно,

$$S=\int_{-6}^{2}\left(3-x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-6}^{2}=$$

$$=\left(6-2-\frac{2}{3}\right)-(-18-18+18)=\frac{64}{3}=21\frac{1}{3}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x=1$, параболой $y=x^2-2x+2$ и касательной, проведенной к этой параболе в точке ее пересечения с осью ординат.

Решение. Парабола пересекает ось Oy в точке $A(0; 2)$ (рис. 86), а уравнение касательной к параболе в этой точке имеет вид $y-2=kx$, где k — значение производной функции $f(x)=x^2-2x+2$ при $x=0$. $f'(x)=2x-2$, т. е. $k=f'(0)=$ $=2\cdot 0-2=-2$. Итак, касательная задается уравнением $y=2-2x$ и пересекает ось Ox в точке $B(1; 0)$. Поэтому

$$S=\int_0^1\left(x^2-2x+2-(2-2x)\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}.$$

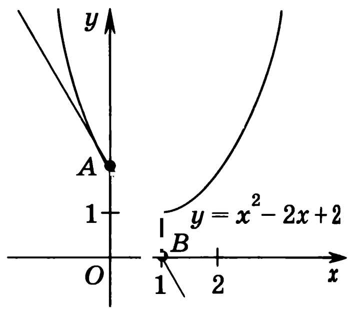


Рис. 86

Задания для самостоятельной работы

Вариант I

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями **(1—16)**.

1. $\boxed{4}$ $y=3x+18-x^2$, $y=0$. **2.** $\boxed{4}$ $y=1+x^2$, $y=2$.

3. $\boxed{5}$ $y=x^2-x$, $y=3x$. **4.** $\boxed{5}$ $y=x^2$, $y=x+2$.

5. $\boxed{5}$ $y=\frac{1}{3}x^2-2x+4$, $y=10-x$.

6. $\boxed{6}$ $y=8x-x^2-7$, $y=x+3$.

7. $\boxed{6}$ $y=x^2$, $y=2x-x^2$.

8. $\boxed{6}$ $y=2+4x-x^2$, $y=x^2-2x+2$.

9. $\boxed{5}$ $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{5-x}{2}$.

10. $\boxed{6}$ $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$.

11. $\boxed{6}$ $y=x^2,\ y=2\sqrt{2x}$.

12. $\boxed{6}$ $y=\frac{x^2}{2}-x+2,\ y=x,\ x=0$.

13. $\boxed{6}$ $y=(x-1)^2,\ y=4(x-2),\ y=0$.

14. $\boxed{6}$ $y=\frac{4}{x^2},\ y=x-1,\ x=1$.

15. $\boxed{6}$ $y=\sin x$, где $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, и $y=\frac{2}{\pi}x$.

16. $\boxed{6}$ $y=x^2-4x,\ \ y=-4,\ x=0$.

17. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+12$ и касательными к ней, проведенными из точки $A(0;\ 3)$.

18. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат, параболой $y=x^2+3$ и касательной к ней в точке $A(2;\ 7)$.

Вариант II

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями **(1—16)**.

1. $\boxed{4}$ $y=5x+14-x^2,\ y=0$.

2. $\boxed{4}$ $y=2+x^2,\ y=3$.

3. $\boxed{5}$ $y=x^2+x,\ y=-3x$.

4. $\boxed{5}$ $y=x^2,\ y=2-x$.

5. $\boxed{5}$ $y=\frac{1}{3}x^2+2x+4,\ y=10+x$.

6. $\boxed{6}$ $y=8x-x^2-2,\ y=x+8$.

7. $\boxed{6}$ $y=x^2+4,\ y=2x+4-x^2$.

8. $\boxed{6}$ $y=x^2+2x+2,\ y=2-4x-x^2$.

9. $\boxed{5}$ $y=-\frac{2}{x},\ y=\frac{x-5}{2}$.

10. $\boxed{6}$ $y=x^3+1,\ y=1+\sqrt{x}$.

11. $\boxed{6}$ $y=2+x^2,\ y=2\left(1+\sqrt{2x}\right)$.

12. $\boxed{6}$ $y=\frac{x^2}{2}+x+2,\ y=-x,\ x=0$.

13. $\boxed{6}$ $y=-4(x+2),\ y=(x+1)^2,\ y=0$.

14. $\boxed{6}$ $y=\frac{4}{x^2}$, $y=-1-x$, $x=-1$.

15. $\boxed{6}$ $y=\sin x$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$ и $y=\frac{2}{\pi}x$.

16. $\boxed{6}$ $y=4x-x^2$, $y=4$, $x=0$.

17. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+11$ и касательными к ней, проведенными из точки $A(0;\ 2)$.

18. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат, параболой $y=x^2+3$ и касательной к ней в точке $A(-2;\ 7)$.

Контрольная работа № 7

Вариант I

1. Доказать, что функция $F(x)=3x+\sin x-e^{2x}$ является первообразной функции $f(x)=3+\cos x-2e^{2x}$ на всей числовой оси.

2. Найти первообразную F функции $f(x)=2\sqrt{x}$, график которой проходит через точку $A\left(0;\ \frac{7}{8}\right)$.

3. Вычислить площадь фигуры F, изображенной на рисунке 87.

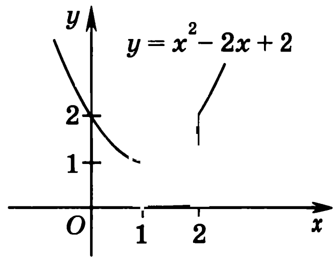


Рис. 87

4. Вычислить интеграл: 1) $\int\limits_1^2\left(x+\frac{2}{x}\right)dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y=1-2x$ и графиком функции $y=x^2-5x-3$.

Вариант II

1. Доказать, что функция $F(x)=e^{3x}+\cos x+x$ является первообразной функции $f(x)=3e^{3x}-\sin x+1$ на всей числовой оси.

2. Найти первообразную F функции $f(x)=-3\sqrt[3]{x}$, график которой проходит через точку $A\left(0;\ \frac{3}{4}\right)$.

3. Вычислить площадь фигуры F, изображенной на рисунке 88.

---

4. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_1^3 \left(\frac{3}{x}+x^2\right) dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y=3-2x$ и графиком функции $y=x^2+3x-3$.

Рис. 88

Задания для подготовки к экзамену

1. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$ и $y=\frac{1}{2}x$. Ответ. $\frac{4}{3}$.

2. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=x$ и $x=e$. Ответ. $\frac{e^2-3}{2}$.

3. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+6x+9$ и осями координат. Ответ. 9.

4. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=(x-2)(2x-3)$ и осью Ox. Ответ. $\frac{1}{24}$.

5. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2-4$ и осями координат. Ответ. $\frac{8}{3}$.

6. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $y=x^2+3$ и прямой $x=2$. Ответ. $\frac{26}{3}$.

7. $\boxed{4}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ и осью абсцисс. Ответ. $\frac{7}{6}$.

8. $\boxed{5}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{2}{x-4}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=3$. Ответ. $2\ln 3$.

9. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{8}x^3$, $y=3-x$ и $y=-4x$. Ответ. 5.

10. $\boxed{5}$ Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и прямой, проходящей через вершину параболы и начало координат. Ответ. $\frac{4}{3}$.

11. $\boxed{5}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(1-x)(x-5)$, $y=4$ и $x=1$. Ответ. $\frac{8}{3}$.

12. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\frac{1}{4}x^3$ и $y=\sqrt{2x}$. Ответ. $\frac{5}{3}$.

13. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=6-x$ и $y=0$. Ответ. $\frac{22}{3}$.

14. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=(x+2)^3$, $y=1$ и $y=0$. Ответ. $\frac{19}{12}$.

15. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{4-x}$, $y=2+(x-4)^3$ и $y=3$. Ответ. $\frac{26}{3}$.

16. $\boxed{6}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$ и $y=2$. Ответ. $\frac{7}{3}-\ln 2$.

17. $\boxed{8}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x|y|=2$, $x=1$, $x=3$. Ответ. $4\ln 3$.

18. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x=-1$, параболой $y=x^2-2x+3$ и касательной к ней в точке с абсциссой 2. Ответ. 9.

19. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, касательной к нему в точке с абсциссой π и прямой $x=\frac{\pi}{2}$. Ответ. $\frac{\pi^2}{8}-1$.

20. $\boxed{8}$ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y-x^2=0$ и $y^2-x=0$. Ответ. $\frac{1}{3}$.

21. $\boxed{8}$ Фигура Φ ограничена линиями $y=-x^2+2x+3$ и $y=0$. Найти отношение площадей фигур, на которые фигура Φ делится графиком функции $y=(x+1)^2$. Ответ. 1:3.

22. $\boxed{7}$ Найти площадь фигуры, ограниченной осью Oy, параболой $y=2x-x^2$ и касательной к ней в точке с абсциссой 2. Ответ. $\frac{8}{3}$.

23. $\boxed{8}$ В каком отношении делится параболой $y = \frac{x^2}{2} + 2$ площадь четырехугольника $ABCD$, где $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ 4)$, $C(2;\ 4)$, $D(4;\ 0)$? Ответ. $2:7$.

24. $\boxed{8}$ Для каждого $a < 0$ найти площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = 2a$, $x = a$, $y = 0$ и графиком функции $y = -\frac{3}{x}$. Сравнить площадь S с числом 3.

Ответ. $S = 3 \ln 2$, $S < 3$.

25. $\boxed{4}$ Найти первообразную функции $f(x) = e^{2x} - \cos x$, график которой проходит через начало координат.

Ответ. $\frac{1}{2} e^{2x} - \sin x - \frac{1}{2}$.

26. $\boxed{8}$ Найти ту первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 2x + 4$, график которой касается прямой $y = 6x + 3$. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми $y = 6x + 3$ и $y = 0$.

Ответ. $F(x) = x^2 + 4x + 4$, $S = \frac{9}{4}$.

27. $\boxed{\text{A}}$ Для функции $y = 2 \cos x$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2};\ 24\right)$.

Ответ. $y = 2 \sin x + 22$.

28. $\boxed{\text{A}}$ Указать первообразную функции $f(x) = e^x - 2x$.

Ответ. $F(x) = e^x - x^2$.

29. $\boxed{\text{B}}$ Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2} x + 2\frac{1}{2}$. Ответ. 32.

Тест для проверки обязательных результатов обучения за курс алгебры и начал анализа

1. Вычислить $\sqrt{16}$.

а) 8; б) ± 8; в) 4; г) ± 4.

2. Вычислить $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$

а) 8; б) ± 8; в) 16; г) ± 64.

3. Вычислить $\sqrt{1\frac{25}{144}}$.

а) $1\frac{5}{12}$; б) $1\frac{1}{12}$; в) $\pm 1\frac{5}{12}$; г) $\pm 1\frac{1}{12}$.

4. Найти $\sqrt[4]{a^{24}}$, если $a \geqslant 0$.

а) a^{20}; б) a^{6}; в) $\pm a^{20}$; г) $\pm a^{6}$.

5. Упростить $\sqrt[6]{\sqrt{a}}$, если $a \geqslant 0$.

а) $\frac{a}{12}$; б) $\sqrt[3]{a}$; в) $\sqrt[3]{a}$; г) $\sqrt[12]{a}$;

6. Вынести множитель из-под знака корня: $\sqrt[3]{54}$.

а) $2\sqrt[3]{3}$; б) $3\sqrt[3]{2}$; в) 18; г) $5\sqrt[3]{4}$.

7. Извлечь корень: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.

а) $\sqrt{5}-2$; б) $2-\sqrt{5}$; в) $1-\sqrt{5}$; г) $1-\sqrt[4]{5}$.

8. Найти значение выражения $5^0+\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$.

а) $3\frac{7}{8}$; б) $-\frac{1}{8}$; в) $-2\frac{3}{8}$; г) $-3\frac{3}{8}$.

9. Найти значение выражения $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+(-3)^2$.

а) $-9\frac{1}{16}$; б) $8\frac{15}{16}$; в) -25; г) 25.

10. Представить выражение $\sqrt[4]{a^5}$, где $a \geqslant 0$, в виде степени.

а) $a^{\frac{4}{5}}$; б) $a^{\frac{5}{4}}$; в) a^9; г) a^{20}.

11. Выполнить деление: $4^{\frac{5}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$.

а) 1; б) 2; в) 4^2; г) $4^{\frac{5}{6}}$.

12. Возвести в степень: $\left(\frac{2}{a^6}\right)^3$.

а) $\frac{6}{a^{18}}$; б) $\frac{8}{a^{18}}$; в) $\frac{8}{a^9}$; г) $\frac{6}{a^9}$.

13. Сравнить числа $(0{,}35)^\pi$ и $(0{,}35)^3$.

а) $(0{,}35)^\pi < (0{,}35)^3$; б) $(0{,}35)^\pi = (0{,}35)^3$; в) $(0{,}35)^\pi > (0{,}35)^3$;

14. Упростить выражение $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$.

а) $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; в) $a+b$; г) $a-b$.

15. Решить уравнение $\sqrt{2x^2-3} = x$.

а) $x=-3$; б) $x_1=-3$, $x_2=3$; в) $x=\sqrt{3}$; г) нет корней.

16. Решить уравнение $2^x=-4$.

а) $x=-2$; б) $x=-\frac{1}{2}$; в) $x=2$; г) нет корней.

17. Решить неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 25$.

а) $x<-2$; б) $x>-2$; в) $x<2$; г) $x=2$.

18. Указать уравнение, корнем которого является логарифм числа 5 по основанию 3.

а) $5^x=3$; б) $x^5=3$; в) $3^x=5$; г) $x^3=5$.

19. Найти $\log_{\frac{1}{2}} 8$.

а) 3; б) -3; в) 4; г) -4.

20. Вычислить $4^{1+\log_4 3}$.

а) 7; б) 8; в) 12; г) 256.

21. Упростить разность $\log_6 72 - \log_6 2$.

а) $\log_6 70$; б) $\frac{\log_6 72}{\log_6 2}$; в) 2; г) 6.

22. Найти $\lg a^3$, если $\lg a = m$.

а) $\frac{m}{3}$; б) $3+m$; в) $3m$; г) m^3.

23. Выразить $\log_5 e$ через натуральный логарифм.

а) $\frac{1}{\ln 5}$; б) $\frac{1}{\lg 5}$; в) $\frac{e}{\ln 5}$; г) $\ln 5$.

24. Решить уравнение $\log_5 x = -2$.

а) $x = -2$; б) $x = 0{,}1$; в) $x = 0{,}04$; г) нет корней.

25. Решить неравенство $\log_{0,3} x > 1$.

а) $x > 1$; б) $x > 0{,}3$; в) $x < 0{,}3$; г) $0 < x < 0{,}3$.

26. Найти радианную меру угла 240°.

а) $\frac{7}{5}\pi$; б) $\frac{2}{3}\pi$; в) $\frac{4}{3}\pi$; г) $\frac{3}{2}\pi$;

27. Найти значение выражения $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

а) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{-\sqrt{2}+1}{2}$; г) $\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$.

28. Найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

а) $\frac{8}{13}$; б) $-\frac{8}{13}$; в) $\frac{12}{13}$; г) $-\frac{12}{13}$.

29. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{5}$.

а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $-\frac{5}{2}$; г) $-\frac{3}{5}$.

30. Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

а) $-\frac{24}{25}$; б) $-\frac{12}{25}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $-\frac{7}{25}$.

31. Найти $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

а) 1; б) $-\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{25}$; г) $\frac{7}{25}$.

32. Записать $\cos 580°$ с помощью наименьшего положительного угла.

а) $\sin 50°$; б) $-\sin 50°$; в) $-\cos 40°$; г) $\cos 40°$;

33. Упростить выражение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right).$$

а) $\cos\alpha\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; б) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha$; в) $\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;
г) $-\sin^2\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

34. Указать выражение, которое не имеет смысла.

а) $\arccos\frac{\pi}{4}$; б) $\arcsin 1$; в) $\operatorname{arctg} 15$; г) $\arccos\sqrt{3}$.

35. Решить уравнение $\cos x = -1$ (в ответах $k \in \boldsymbol{Z}$).

а) $x = \pi + \pi k$; б) $x = \pi + 2\pi k$; в) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; г) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

36. Решить уравнение $\sin x = 0$ (в ответах $k \in \mathbf{Z}$).

а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; в) $x=\pi k$; г) $x=2\pi k$.

37. Найти $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

а) $\frac{2}{3}\pi$; б) $\frac{5}{6}\pi$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{6}$.

38. Найти $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

а) $\frac{5}{6}\pi$; б) $\frac{2}{3}\pi$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{6}$.

39. Найти производную функции $x^{\frac{1}{5}}$, где $x>0$.

а) $-\frac{4}{5}x^{\frac{1}{5}}$; б) $5x^{-\frac{4}{5}}$; в) $\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$; г) $\frac{1}{5}x^5$.

40. Найти производную функции $3\cos x + 5$.

а) $3\sin x$; б) $-3\sin x$; в) $2\cos x + 4$; г) $-3\sin x + 5$.

41. Найти производную функции $x\log_2 x$.

а) $1+\frac{1}{x\ln 2}$; б) $\frac{x}{\ln 2}$; в) $x+\frac{1}{\ln 2}$; г) $1+\frac{1}{x}$.

42. Найти точку (точки) экстремума функции $y=2x^3-3x^2$.

а) $x=\frac{3}{2}$; б) $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}$; в) $x_1=0$, $x_2=1$; г) $y_1=0$, $y_2=-1$.

43. Найти промежуток убывания функции $y=-x^2+4x-3$.

а) $[2;+\infty)$; б) $(-\infty;2]$; в) $[1;+\infty)$; г) $(-\infty;1]$.

44. Найти все первообразные функции $y=x^6$.

а) $6x^5+C$; б) $\frac{x^7}{7}+C$; в) $\frac{x^6}{6}+C$; г) $\frac{x^7}{6}+C$.

45. Найти первообразную функции $f(x)=\sin x$, если $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=$
$=\frac{1}{2}$.

а) $\cos x+2+\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\cos x+2+\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos x+1$; г) $-\cos x+1$.

Варианты экзаменационных работ для общеобразовательных классов

Вариант 1 (1991 г.)

1. Сравнить значения выражений

$$\frac{1+\cos 40^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ+\sin 40^\circ} \text{ и } \frac{\cos 105^\circ\cos 5^\circ+\sin 105^\circ\cos 85^\circ}{\sin 95^\circ\cos 5^\circ-\cos 95^\circ\sin 185^\circ}.$$

2. Найти промежутки возрастания функции

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2-8x+4.$$

3. Решить уравнение

$$x+4+\sqrt{x+4}=12.$$

4. Найти натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1}>32,\\ \log_4(x-6)^2\leqslant 1.\end{cases}$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ и касательными, проведенными к этому графику в точках его пересечения с осью абсцисс.

6. Сколько корней имеет уравнение $3x^2-x^3=a$ при $0<a<4$?

Вариант 2 (1991 г.)

1. Сравнить значения выражений

$$\frac{\sin 50^\circ-\sin 25^\circ}{1-\cos 25^\circ+\cos 50^\circ} \text{ и } \frac{\cos 25^\circ\cos 5^\circ-\cos 25^\circ\cos 85^\circ}{\sin 375^\circ\cos 5^\circ-\sin 15^\circ\sin 5^\circ}.$$

2. Найти промежутки убывания функции

$$y=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+12x+1.$$

3. Решить уравнение $2x-2-\sqrt{x-1}=15$.

4. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases}3^{2x-6}<\frac{1}{27},\\ \log_3(1-x)^2\leqslant 2.\end{cases}$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=-x^2+4x$ и касательными, проведенными к этому графику в точках его пересечения с осью абсцисс.

6. Сколько корней имеет уравнение $x^3-3x^2+2=a$ при $a>2$?

Вариант 3 (1992 г.)

1. Решить уравнение

$$\log_2(x-3)=2-\log_2 x.$$

2. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}+2^{3+x}\leqslant 9.$$

3. Вычислить абсциссы и ординаты точек пересечения графиков функций $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ и $y=\sqrt{3}\cos x$.

4. Найти расстояние от начала координат до касательной к графику функции $y=x\ln x$, параллельной оси абсцисс.

5. При каких значениях a график функции $y=3x-4x^3$ и прямая $y=a$ имеют одну общую точку?

6. Доказать, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ и прямыми $y=0$, $x=4$, $x=p$ (при $p>4$), меньше 1.

Вариант 4 (1992 г.)

1. Решить уравнение $\log_4(x+4)=2-\log_4(x-2)$.

2. Решить неравенство

$$3^{x-2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}+8>0.$$

3. Вычислить абсциссы и ординаты точек пересечения графиков функций $y=-\sin x$ и $y=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Найти расстояние от оси абсцисс до касательной к графику функции $y=4\ln(x-1)-x^2$, параллельной оси абсцисс.

5. При каких значениях b прямая $y=b$ пересекает график функции $y=x^3+3x^2$ более чем в двух различных точках?

6. Доказать, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=2^{2x}$ и прямыми $y=0$, $x=-0{,}5$, $x=t$ (при $t<-0{,}5$), меньше 1.

Вариант 5 (1993 г.)

1. Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos(\pi - x) = 0.$$

2. Решить неравенство $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$.

3. Найти стационарные точки функции $f(x) = x + \frac{4}{x}$ и указать среди них точку максимума.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$.

5. Найти точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y = x^2 - |5x + 9|$ в точках с абсциссами 4 и -4.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{0,5 + \log_y x} = \sqrt{y}, \\ \log_{x+1} \dfrac{xy + y}{x} = 1 + \log_{x+1}(3 + 4x^2). \end{cases}$$

Вариант 6 (1993 г.)

1. Решить уравнение

$$\sin(\pi + x) - \sin 2x = 0.$$

2. Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$.

3. Найти стационарные точки функции $f(x) = 9x + \frac{1}{x}$ и указать среди них точку минимума.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

5. Найти точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y = x^2 + |7 - 4x|$ в точках с абсциссами 3 и -3.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^{1 - 0,2\log_x y} = x^{\frac{4}{5}}, \\ 2 + \log_x\left(1 - \dfrac{3y}{x^2}\right) = \log_x 4. \end{cases}$$

Вариант 7 (1994 г.)

1. Решить уравнение $6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0$.

2. Найти точки экстремумов функции $y = x + \sqrt{1 - x}$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+3} > -2$.

4. Фигура ограничена линиями $y = 0$ и $y = -x^2 + 2x + 3$. Найти отношение площадей фигур, на которые данная фигура делится графиком функции $y = (x+1)^2$.

5. Решить неравенство $x^2 + 25 \geqslant 8\sqrt{5 - x} + 10x$.

6. Найти все такие значения a, при которых функция $y = (x^2 - 3)e^{1-x}$ возрастает на интервале $(a;\ a+2)$.

Вариант 8 (1994 г.)

1. Решить уравнение $7\sin^2 x - 6\cos x + 6 = 0$.

2. Найти точки экстремумов функции $y = x - \sqrt{2x + 1}$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1} > -2$.

4. Фигура ограничена линиями $y = 0$ и $y = -x^2 + 6x - 5$. Найти отношение площадей фигур, на которые данная фигура делится графиком функции $y = (x-5)^2$.

5. Решить неравенство $27\sqrt{4 - x} - 16 \leqslant x^2 - 8x$.

6. Найти все такие значения b, при которых функция $y = (8 - x^2)e^{x+1}$ убывает на интервале $(b;\ b+3)$.

Вариант 9 (1995 г.)

1. Решить неравенство $\log_3 x > \log_3 (5 - x)$ и указать все его целочисленные решения.

2. Сравнить значение функции

$$y = \cos 3x - 2\sin\frac{x}{2} + 2\ln(1 + x)$$

в точке $x_0 = 0$ со значением производной этой функции в той же точке.

3. Решить уравнение $\sin 2x + \sin x = 2\cos x + 1$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ и $y = 2$.

5. Решить уравнение $3^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} = 24$.

6. Найти те первообразные функции $f(x)=3x^2-2x+3$, графики которых имеют с графиком функции $f(x)$ ровно две общие точки.

Вариант 10 (1995 г.)

1. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{7}}(2x+3)<\log_{\frac{1}{7}}(3x-2)$ и указать все его целочисленные решения.

2. Сравнить значение функции

$$y=\cos\frac{x}{2}-2\sin 3x+4\ln(1+x)$$

в точке $x_0=0$ со значением производной этой функции в той же точке.

3. Решить уравнение $\sin 2x-\cos x=2\sin x-1$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$ и $y=\frac{1}{4}$.

5. Решить уравнение $2^x\cdot 3^{\frac{2}{x}}=18$.

6. Найти те первообразные функции $f(x)=6x^2+2x-2$, графики которых имеют с графиком функции $f(x)$ ровно две общие точки.

Вариант 11 (1996 г.)

1. Решить неравенство $2^{\log_{0,7}(1+2x)}>4$.

2. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-x^3$, проходящей через точку графика с абсциссой $x_0=-1$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x^4-3x-1}=x^2-1$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$ и $y=\frac{1}{2}x$.

5. При каких значениях a функция $y=x^3-3ax^2+27x-5$ имеет единственную критическую (стационарную) точку?

6. Решить уравнение $\sin\frac{5\pi}{4}x=x^2-4x+5$.

Вариант 12 (1996 г.)

1. Решить неравенство $3^{\log_{0,3}(2,3-2x)}>9$.

2. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3+x$, проходящей через точку графика с абсциссой $x_0=2$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x^4+x-9}=x^2-1$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$ и $y=\frac{1}{3}x$.

5. При каких значениях a функция $y=x^3+3ax^2+75x-13$ имеет единственную критическую (стационарную) точку?

6. Решить уравнение $\cos 7\pi x=x^2-6x+10$.

Варианты экзаменационных работ для гуманитарных классов

Вариант 1 (1994 г.)

1. Решить уравнение $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ и указать любой его положительный корень.

2. Решить неравенство $\log_2(3-2x)<-1$.

3. Найти все числа a, для которых выполняется условие $4\cdot 2^{3a}=0{,}25^{\frac{a^2}{2}}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x(4-x)$ и осью абсцисс.

5. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{4-\frac{9}{x+1}+\frac{1}{x-3}}.$$

6. При каком значении a наибольшее значение функции $y=x^3-3x+a$ на отрезке $[-2;\ 0]$ равно 5?

Вариант 2 (1994 г.)

1. Решить уравнение $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и указать любой его отрицательный корень.

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1)>-1$.

3. Найти все числа b, для которых выполняется условие $0{,}2^{3b-5}=25^{b^2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=-x(x+2)$ и осью абсцисс.

5. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{2-\frac{1}{x+6}+\frac{9}{x-2}}.$$

6. При каких значениях b наименьшее значение функции $y=x^3-12x+b$ на отрезке $[1;\ 3]$ равно нулю?

Вариант 3 (1995 г.)

1. Решить неравенство $27^{x+\frac{1}{3}}>\frac{1}{3}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{4\sin\frac{x}{2}-1}=1$.

3. При каких значениях a выражения $(a+1)\cdot\lg(2a+3)$ и $a+1$ принимают одинаковые значения?

4. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y=x+\frac{4}{x}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ и осью абсцисс.

6. Найти общие точки графика функции $y=x^3-4x^2+2x+1$ и прямой $y=1-2x$ и определить, есть ли среди них точки касания.

Вариант 4 (1995 г.)

1. Решить неравенство $16^{x+\frac{1}{4}}<\frac{1}{2}$.

2. Решить уравнение $\sqrt{2\cos 3x+2}=1$.

3. При каких значениях b выражения $(3b+1)\cdot\lg(1-b)$ и $3b+1$ принимают одинаковые значения?

4. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y=4x+\frac{1}{x}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ и прямыми $y=0$ и $x=2$.

6. Найти общие точки графика функции $y=x^3+2x^2-5x+1$ и прямой $y=1-7x$ и определить, есть ли среди них точки касания.

Вариант 5 (1996 г.)

1. Решить уравнение $(\sqrt{2})^{\frac{1}{x+3}}=32.$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2$ и $y=1$.

3. Без использования таблиц и микрокалькулятора найти значение выражения

$$\frac{11\cos 287^\circ-25\sin 557^\circ}{\sin 17^\circ}.$$

4. Решить систему уравнений $\begin{cases}\log_2(x+2)-\log_4 y=1,\\ x+y=6.\end{cases}$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-3x^2-12x+24$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

6. Доказать, что уравнение $x^5+3x^3+7x-11=0$ имеет единственный корень. Найти этот корень.

Ответы

Глава VII. Тригонометрические функции

§ 38

Вариант I

1. $x \neq -3$. **2.** $x \geqslant 2{,}5$. **3.** $x \in \boldsymbol{R}$. **4.** $x < -\sqrt{2}$, $x > \sqrt{2}$. **5.** $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = \frac{1}{2}x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$. **6.** $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = (x-1)^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$. **7.** $y = \sqrt{x}$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{x} - 1$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant -1$. **8.** $x \in [-2;\ 3]$, $y \in [-2;\ 1]$. **9.** $x \in [-3;\ 2]$, $y \in [-3;\ 2]$. **10.** $y \in [0;\ 18]$. **11.** $y \in [\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}]$. **12.** $x \neq 0$, $y \neq 0$. **13.** $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 1$. **14.** $x \geqslant 2$, $y \geqslant 0$. **15.** $x \in \boldsymbol{R}$. **16.** $x \in \boldsymbol{R}$. **17.** $x \neq 0$. **18.** $x \in \boldsymbol{R}$. **19.** $x \geqslant 1$. **20.** $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **21.** $x \neq 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **22.** $x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **23.** $x \neq \pi(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.** $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.** $x \neq -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **26.** $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.** $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.** $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **29.** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **30.** $[-1;\ 1]$. **31.** $[-1;\ 1]$. **32.** $[0;\ 2]$. **33.** $[-1;\ 3]$. **34.** $[0;\ 2]$. **35.** $[-3;\ 1]$. **36.** $[-3;\ -1]$. **37.** $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$. **38.** $[-13;\ 13]$. **39.** $[2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}]$. **40.** $y = 2{,}5$, $y = -2{,}5$. **41.** $y = 5$, $y = 1$. **42.** $y = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$. **43.** $y = 4{,}5$, $y = 9{,}5$. **44.** $y = 0{,}5$, $y = 13{,}5$.

Вариант II

1. $x \neq 2$. **2.** $x \leqslant 2\frac{1}{3}$. **3.** $x \in \boldsymbol{R}$. **4.** $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. **5.** $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = 2x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$. **6.** $y = x^2$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant 0$; $y = x^2 - 1$: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \geqslant -1$. **7.** $y = \sqrt{x}$: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y = \sqrt{x-1}$: $x \geqslant 1$, $y \geqslant 0$. **8.** $x \in [-2;\ 3]$, $y \in [-2;\ 2]$. **9.** $x \in [-1;\ 2]$, $y \in [1;\ 3]$. **10.** $y \in \left[0;\ 1\frac{1}{3}\right]$. **11.** $y \in [\sqrt{3};\ 3]$. **12.** $x \neq 0$, $y \neq 0$. **13.** $x \in \boldsymbol{R}$, $y \leqslant 3$. **14.** $x \geqslant -2$, $y \geqslant 0$. **15.** $x \in \boldsymbol{R}$. **16.** $x \in \boldsymbol{R}$. **17.** $x \neq 0$. **18.** $x \in \boldsymbol{R}$. **19.** $x \leqslant 1$. **20.** $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **21.** $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **22.** $x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **23.** $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **24.** $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.** $x \neq \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **26.** $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.** $x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.** $x \in \left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **29.** $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **30.** $[-1;\ 1]$. **31.** $[-1;\ 1]$. **32.** $[-2;\ 0]$. **33.** $[-4;\ 2]$. **34.** $[-1;\ 1]$. **35.** $[-1;\ 3]$. **36.** $[1;\ 5]$. **37.** $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$. **38.** $[-10;\ 10]$. **39.** $[0;\ 10]$. **40.** $y = 1{,}5$, $y = -1{,}5$. **41.** $y = 8$, $y = 2$. **42.** $y = -\sqrt{5}$, $y = \sqrt{5}$. **43.** $y = -1$, $y = 9$. **44.** $y = 3 \pm \sqrt{5}$.

§ 39

Вариант I

1. Нечетная. **2.** Нечетная. **3.** Четная. **4.** Нечетная. **5.** Четная. **6.** Ни четная, ни нечетная. **7.** Нечетная. **8.** Ни четная, ни нечетная. **12.** Четная. **13.** Четная. **21.** $T=\frac{2\pi}{3}$. **22.** $T=\frac{16\pi}{5}$. **23.** $T=\frac{3\pi}{2}$. **24.** $T=\pi$.

Вариант II

1. Нечетная. **2.** Нечетная. **3.** Четная. **4.** Четная. **5.** Нечетная. **6.** Ни четная, ни нечетная. **7.** Нечетная. **8.** Ни четная, ни нечетная. **12.** Нечетная. **13.** Четная. **21.** $T=\frac{\pi}{2}$. **22.** $T=\frac{12\pi}{5}$. **23.** $T=\frac{8\pi}{7}$. **24.** $T=\frac{2\pi}{5}$.

§ 40

Вариант I

1. 1) Возрастает при $x\in[-\pi;\ 0]$, убывает при $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right]$, $[0;\ \pi]$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}$; 3) $y=1$ при $x=0$, $y=-1$ при $x=-\pi,\ \pi$; 4) $y>0$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. **2.** 1) Возрастает при $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$, $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, убывает при $x\in\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{5\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$; 3) $y=1$ при $x=-\pi,\ 0,\ \pi$, $y=-1$ при $x=-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}$; 4) $y>0$ при $x\in\left(-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4};\ \pi\right]$; $y<0$ при $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$. **3.** Нет. **4.** $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)<\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$. **5.** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)<\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$. **6.** $\cos\pi<\cos\frac{3\pi}{10}$. **7.** $-\frac{5\pi}{6}$. **8.** $\frac{\pi}{3}$. **9.** $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4};\ 2\pi\right]$. **10.** $\left[\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\right]$. **11.** $-\pi$; π. **12.** $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)>\cos\frac{7\pi}{4}$. **13.** $\cos\frac{3\pi}{4}<\sin\frac{3\pi}{8}$. **14.** $\cos 0{,}8>\cos 2{,}8$. **15.** $\cos(-2)<\cos(-0{,}2)$. **21.** 5. **22.** 7.

Вариант II

1. 1) Возрастает при $x\in[-\pi;\ 0]$, $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$, убывает при $x\in[-2\pi;\ -\pi]$, $[0;\ \pi]$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$; 3) $y=1$ при

$x=-2\pi,\ 0$; $y=-1$ при $x=-\pi,\ \pi$; 4) $y>0$ при $x\in\left[-2\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$. **2.** 1) Возрастает при $x\in[-2\pi;\ 0]$, убывает при $x\in\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=-\pi,\ \pi$; 3) $y=1$ при $x=0$; $y=-1$ при $x=-2\pi$; 4) $y>0$ при $x\in(-\pi;\ \pi)$; $y<0$ при $x\in[-2\pi;\ -\pi)$, $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$. **3.** Нет. **4.** $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)>\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$. **5.** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)>\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$. **6.** $\cos\pi<\cos\frac{9\pi}{5}$. **7.** $\frac{2\pi}{3}$. **8.** $-\frac{\pi}{4}$. **9.** $\left(-2\pi;\ -\frac{11\pi}{6}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right)$. **10.** $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$. **11.** 0; 2π. **12.** $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)>$ $>\cos\frac{3\pi}{4}$. **13.** $\cos\frac{\pi}{5}>\sin\frac{5\pi}{4}$. **14.** $\cos 6{,}5>\cos 7{,}5$. **15.** $\cos(-3)<$ $<\cos(-2{,}5)$. **21.** 5. **22.** 5.

§ 41

Вариант I

1. 1) Возрастает при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$, убывает при $x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=0,\ \pi,\ 2\pi$; 3) $y>0$ при $x\in(0;\ \pi)$; $y<0$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $(\pi;\ 2\pi)$; 4) $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$; $y=-1$ при $x=-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$. **2.** 1) Возрастает при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, убывает при $x\in[\pi;\ 2\pi]$; 2) $y=0$ при $x=0,\ 2\pi$; 3) $y>0$ при $x\in(0;\ 2\pi)$; $y<0$ при $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; 4) $y=1$ при $x=\pi$; $y=-1$ при $x=-\frac{\pi}{2}$. **3.** Нет. **4.** $-\frac{3\pi}{4}<x<-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$. **5.** $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$. **6.** $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$. **7.** $\sin\frac{\pi}{8}<\sin\frac{2\pi}{5}$. **8.** $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)>\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$. **9.** $\sin\pi>\sin\frac{7\pi}{4}$. **10.** $\sin\left(-\frac{11\pi}{10}\right)>\sin\frac{\pi}{15}$. **11.** $\sin\frac{4\pi}{9}>\cos\frac{17\pi}{11}$. **12.** $\sin 0{,}3>$ $>\sin 3{,}4$. **13.** $\sin(-2)<\sin(-5)$. **14.** $\sin(-0{,}5)<\cos(-6)$. **15.** $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin 1$, $\sin 1{,}5$. **16.** $\sin(-1{,}5)$, $\sin 3$, $\cos 0{,}1$. **27.** 7. **28.** 3.

Вариант II

1. 1) Возрастает при $x\in\left[-2\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, убывает при $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=-2\pi,\ -\pi,\ 0$; 3) $y>0$ при $x\in(-2\pi;\ -\pi)$; $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $y<0$ при $x\in(-\pi;\ 0)$; 4) $y=1$ при $x=-\frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}$; $y=-1$ при

$x=-\frac{\pi}{2}$. **2.** 1) Возрастает при $x\in\left[-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$, убывает при $x\in\left[-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $\pm\frac{\pi}{2}$, 0, 2π; 3) $y>0$ при $x\in\left(-2\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; 4) $y=1$ при $x=-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; $y=-1$ при $x=-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$. **3.** Нет. **4.** $-\frac{2\pi}{3}<x<-\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$. **5.** $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$. **6.** $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. **7.** $\sin 0{,}2\pi<\sin\frac{3\pi}{11}$. **8.** $\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)>\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$. **9.** $\sin 2\pi<\sin\frac{3\pi}{4}$. **10.** $\sin\frac{\pi}{9}<\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$. **11.** $\cos\frac{5\pi}{6}<\sin\frac{13\pi}{10}$. **12.** $\sin 4<\sin 6{,}5$. **13.** $\sin(-1)<\sin(-4)$. **14.** $\cos(-0{,}7)>\sin(-0{,}8)$. **15.** $\sin 6$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\sin(-4{,}5)$. **16.** $\cos 3$, $\sin(-0{,}1)$, $\sin 1$. **27.** 7. **28.** 3.

§ 42

Вариант I

1. 1) Возрастает при $x\in\left[-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; 2) $y=0$ при $x=-\pi$, 0, π, 2π; 3) $y>0$ при $x\in\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $x\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $x\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, $x\in\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$. **2.** 1) Убывает при $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$, $(-\pi;\ 0)$, $(0;\ \pi)$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$; 3) $y>0$ при $x\in\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $y<0$ при $x\in\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$. **3.** $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=-\frac{5\pi}{6}$. **4.** $x_1=\frac{3\pi}{4}$, $x_2=\frac{7\pi}{4}$. **5.** $\left[-\pi;\ -\frac{2\pi}{3}\right]$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$. **6.** $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left(0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$, $\left(\pi;\ \frac{7\pi}{4}\right]$. **7.** $\left(\operatorname{arctg} 3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\operatorname{arctg} 3+\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$. **8.** $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **9.** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}>\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$. **11.** $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}>\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$. **12.** $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}>\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$. **13.** $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)>\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. **14.** $\operatorname{tg} 1{,}8<\operatorname{tg}(-2)$. **15.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{14}$. **16.** $\operatorname{tg} 1{,}5$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} 1{,}8$.

Вариант II

1. 1) Возрастает при $x\in\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$; 2) $y=0$ при $x=-\pi$, 0, π; 3) $y>0$ при $x\in\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; $y<0$ при

$x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. **2.** 1) Убывает при $x \in (-\pi; 0)$, $(0; \pi)$, $(\pi; 2\pi)$; 2) $y=0$ при $x=-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; 3) $y>0$ при $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; $y<0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. **3.** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$. **4.** $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$. **5.** $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. **6.** $\left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right)$, $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$, $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$. **7.** $\left(\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} 3+\pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \operatorname{arctg} 3+2\pi\right)$. **8.** $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **9.** $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **10.** $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9} > \operatorname{tg} \frac{2\pi}{11}$. **11.** $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$. **12.** $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} > \operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$. **13.** $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{10} < \operatorname{tg}\left(-\frac{12\pi}{11}\right)$. **14.** $\operatorname{tg}(-0{,}7) < \operatorname{tg} 4$. **15.** $\operatorname{tg} \frac{17\pi}{15}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$. **16.** $\operatorname{tg} 1{,}49$, $\operatorname{tg} 4$, $\operatorname{tg} 0{,}5$, $\operatorname{tg} 3$.

§ 43

Вариант I

1. $\frac{\pi}{6}$. **2.** $-\frac{\pi}{3}$. **3.** $-\frac{\pi}{2}$. **4.** 0. **5.** $\frac{\pi}{2}$. **6.** $\frac{3\pi}{4}$. **7.** $\frac{\pi}{3}$. **8.** $-\frac{\pi}{4}$. **9.** $-\frac{\pi}{6}$. **10.** $\arcsin \frac{1}{7} > \arcsin \frac{1}{8}$. **11.** $\arcsin(-0{,}7) < \arcsin\left(-\frac{1}{7}\right)$. **12.** $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **13.** $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} < \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. **14.** $\operatorname{arctg} \sqrt{5} < \operatorname{arctg} \sqrt{6}$. **15.** $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **16.** $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **17.** $x=\sqrt{3}$. **18.** $x=\frac{\sqrt{3}+2}{6}$. **19.** $x=\frac{4-3\sqrt{2}}{2}$. **20.** $x=-2$. **21.** $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$. **22.** $-\sqrt{3}-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Вариант II

1. $\frac{\pi}{4}$. **2.** $-\frac{\pi}{6}$. **3.** 0. **4.** π. **5.** $\frac{\pi}{3}$. **6.** $\frac{5\pi}{6}$. **7.** $\frac{\pi}{6}$. **8.** $\frac{\pi}{4}$. **9.** $-\frac{\pi}{3}$. **10.** $\arcsin(-0{,}5) < \arcsin(-0{,}1)$. **11.** $\arcsin \frac{1}{13} < \arcsin 0{,}13$. **12.** $\arccos 0{,}18 > \arccos 0{,}21$. **13.** $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) > \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$. **14.** $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} > \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}}$. **15.** $x=\frac{1}{2}$. **16.** $x=-1$. **17.** $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** $x=-\frac{3}{4}$. **19.** $x=\sqrt{2}-5$. **20.** $x=\frac{6-2\sqrt{3}}{9}$. **21.** $-7 \leqslant x \leqslant 1$. **22.** $-\sqrt{2}-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Глава VIII. Производная и ее геометрический смысл

§ 44

Вариант I

1. $f(x+h)=\lg(3x+3h-1)$. **2.** $f(x+h)=\dfrac{x^2+2xh+h^2}{3}-\sin(2x+2h)$. **3.** $f'(x)=4$. **4.** $f'(x)=10x-3$. **5.** $f'(x)=18$. **6.** $f'(x)=-\dfrac{1}{3}$. **7.** $f'(x)=-\sqrt{2}$. **8.** $v_{\text{ср}}=24$. **9.** $v(t)=\dfrac{2}{3}t$, $v(15)=10$.

Вариант II

1. $f(x+h)=e^{2x+2h+1}$. **2.** $f(x+h)=\operatorname{tg}\dfrac{x+h}{2}-3x^2-6xh-3h^2$. **3.** $f'(x)=5$. **4.** $f'(x)=2-6x$. **5.** $f'(x)=0{,}1$. **6.** $f'(x)=\dfrac{2}{3}$. **7.** $f'(x)=\lg 2$. **8.** $v_{\text{ср}}=3$. **9.** $v(t)=0{,}2t$, $v(20)=4$.

§ 45

Вариант I

1. $8x^7$. **2.** $-11x^{-12}$. **3.** $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. **4.** $-\dfrac{4}{5}x^{-1\frac{4}{5}}$. **5.** $-\dfrac{10}{x^{11}}$. **6.** $\dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$. **7.** $\dfrac{3}{8x\sqrt[8]{x^3}}$. **8.** $-12(1-3x)^3$. **9.** $-375x^2$. **10.** $-24(4x-3)^{-7}$. **11.** $\dfrac{1}{4\sqrt[8]{(-5+2x)^7}}$. **12.** $-\dfrac{3}{8\left(\frac{x}{2}-3\right)\sqrt[4]{\left(\frac{x}{2}-3\right)^3}}$. **13.** $-\dfrac{1}{27}$. **14.** $-0{,}2$. **15.** $x_1=-1$, $x_2=1$. **16.** $x_1=-1$, $x_2=1$. **17.** $x=1{,}5$. **18.** $x=-1{,}125$. **19.** $x_1=-0{,}5$, $x_2=0{,}5$. **20.** $x=3$. **21.** Функции 1, 3, 4. **22.** Функции 2, 4. **23.** Функции 1, 2, 3, 4.

Вариант II

1. $9x^8$. **2.** $-12x^{-13}$. **3.** $\dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$. **4.** $-\dfrac{2}{3}x^{-1\frac{2}{3}}$. **5.** $-\dfrac{18}{x^{19}}$. **6.** $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$. **7.** $-\dfrac{5}{6x\sqrt[6]{x^5}}$. **8.** $-20(2-5x)^3$. **9.** $-160x^4$. **10.** $-28(7x-1)^{-5}$.

11. $\dfrac{6}{5\sqrt[10]{(-3+12x)^9}}$. 12. $-\dfrac{5}{18\left(\dfrac{x}{3}+2\right)\sqrt[6]{\left(\dfrac{x}{3}+2\right)^5}}$. 13. $-\dfrac{1}{8}$. 14. $-\dfrac{5}{8}$.

15. $x_1=-1$, $x_2=1$. 16. $x_1=1$, $x_2=3$. 17. $x=1{,}5$. 18. $x_1=\dfrac{8}{9}$, $x_2=\dfrac{4}{9}$.

19. Таких значений нет. 20. $x=-0{,}5$. 21. Функции 1, 3. 22. Функции 1, 2, 4. 23. Функции 1, 2, 3, 4.

§ 46

Вариант I

1. $3x^2-\dfrac{1}{x^2}$. 2. $-6x^{11}$. 3. $\dfrac{8}{\sqrt{x}}-8x$. 4. $-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. 5. $3x^2+14x$.

6. $\dfrac{17}{4}x^{\frac{13}{4}}$. 7. $\dfrac{11x^5-5x^4+8}{\sqrt{2x-1}}$. 8. $\left(\dfrac{x}{4}-1\right)^3\dfrac{5x-4}{4}$. 9. $\dfrac{13}{(2-3x)^2}$.

10. $\dfrac{12x^5+10x^4}{(3x+2)^2}$. 11. $\dfrac{4x^5-5x^4-2x^3+3x^2+1}{(x-1)^2}$. 12. $\dfrac{3x^4+2x^3+2}{(2x+1)^2}$.

13. $\dfrac{60x^2-5x^3}{(4-x)^3}$. 14. $\dfrac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$. 15. $-4x^3+34x$. 16. $-9{,}5$. 17. $6\dfrac{2}{3}$.

18. $x_1=3$, $x_2=-2$. 19. $x_1=0{,}8$, $x_2=4$. 20. $-2<x<3$, $x>3$.

21. $0<x<0{,}8$, $x>4$. 22. $-4<x<0$. 23. $-2<x<2$. 24. $-5<x<-2$.

25. $72x-42$. 26. $\dfrac{6x^2}{5\sqrt[5]{(1+x^3)^3}}$.

Вариант II

1. $2x+\dfrac{1}{x^2}$. 2. $-5x^{14}$. 3. $-6x^2+\dfrac{6}{\sqrt{x}}$. 4. $-\dfrac{7}{4}x^{-\frac{5}{4}}+\dfrac{3}{x^2}$. 5. $4x^3-18x^2$.

6. $\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. 7. $\dfrac{27x^4+4x^3-15}{\sqrt{6x+1}}$. 8. $\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^2\dfrac{4x+3}{3}$. 9. $\dfrac{12}{(3-2x)^2}$.

10. $\dfrac{4x^3-9x^2}{(2x-3)^2}$. 11. $\dfrac{3x^4+4x^3+x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. 12. $\dfrac{5x^6-4x^5-6}{(3x-2)^2}$.

13. $\dfrac{5x^3-60x^2}{(x-4)^3}$. 14. $\dfrac{1-4x^2-x^4}{(x^3-x)^2}$. 15. $-4x^3+26x$. 16. $-2{,}1$. 17. $10{,}5$.

18. $x_1=-5$, $x_2=1$. 19. $x_1=2$, $x_2=14$. 20. $x<-5$, $x>1$.

21. $2<x<14$, $x>14$. 22. $-2<x<2$. 23. $x<-1$, $x>1$. 24. $0<x<3$.

25. $50x+30$. 26. $\dfrac{6x}{7\sqrt[7]{(x^2-8)^4}}$.

Вариант I

1. $e^x+\cos x$. **2.** $-\sin x-\frac{1}{x\ln 5}$. **3.** $x^5(6\ln x+1)$. **4.** $\frac{3}{\cos^2 3x}$.
5. $-3e^{5-3x}$. **6.** $2\cdot 3^{2x+1}\ln 3$. **7.** $-\frac{3}{2-3x}$. **8.** $\frac{12}{(12x+5)\ln 7}$. **9.** $-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.
10. $6\sin(-6x+7)$. **11.** $6e^{2x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **12.** $x^7e^{1-x}(8-x)$. **13.** $e^x(x^2-3x-2)$.
14. $\frac{e^{2x}(4x-5)}{\sqrt{2x-3}}$. **15.** 0. **16.** $2\cos 2x$. **17.** $-2\sin 2x$. **18.** $\sin 2x$.
19. $-2\sin 4x$. **20.** -3. **21.** $-e+\frac{2}{\ln 2}$. **22.** 7. **23.** $x_1=0$, $x_2=2$.
24. $x=-\pi+4\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. **25.** $x_1=-3$, $x_2=5$. **26.** $x=7$. **27.** $x<0$, $x>2$.
28. $x>3$. **29.** Нет решений. **30.** $0<x<\frac{4}{3}$. **31.** $-2x\sin(x^2-3)$.
32. $-3\cos^2 x\sin x$. **33.** $4\sin(8x-6)$. **34.** $6x\sin^2 x^2\cdot\cos x^2$. **35.** $\frac{4}{x}$.
36. $6x^2e^{2x^3}$. **37.** $2x\cdot 4^{x^2}\cdot\ln 4$. **38.** $\frac{1}{x}\cdot 0{,}3^{\ln x+5}\cdot\ln 0{,}3$. **39.** $\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}$.
40. $\frac{1}{3x\ln 0{,}1\cdot\sqrt[3]{\log^2_{0,1} x}}$.

Вариант II

1. $3^x\ln 3-\sin x$. **2.** $\frac{1}{x}-\cos x$. **3.** $x^4(5\ln x+1)$. **4.** $\frac{4}{\cos^2 4x}$.
5. $-7e^{1-7x}$. **6.** $3\cdot 2^{3x-1}\ln 2$. **7.** $\frac{3}{4+3x}$. **8.** $\frac{10}{(10x+3)\ln 4}$. **9.** $-\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$.
10. $-0{,}2\sin(0{,}2x-5)$. **11.** $-4e^{-2x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **12.** $x^3\cdot e^{2-3x}(4-3x)$.
13. $e^{2x}(2x^2-4x-3)$. **14.** $\frac{e^x(3-2x)}{\sqrt{4-2x}}$. **15.** 0. **16.** $-2\cos 2x$. **17.** $2\sin 2x$.
18. $-\sin 2x$. **19.** $-\sin 4x$. **20.** -4. **21.** $3+18\ln 3$. **22.** 7. **23.** $x=2$.
24. $x=3\pi+6\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. **25.** $x_1=1$, $x_2=4$. **26.** $x=8$. **27.** $0<x<2$.
28. $0<x<16$. **29.** Нет решений. **30.** $x>2$. **31.** $3x^2\cos(x^3+2)$.
32. $4\sin^3 x\cos x$. **33.** $-3\sin(6x+4)$. **34.** $-6x\cos^2 x^2\cdot\sin x^2$. **35.** $\frac{3}{x}$.
36. $6xe^{3x^2}$. **37.** $3x^2 5^{x^3}\ln 5$. **38.** $\frac{1}{x}\cdot 0{,}2^{3+\ln x}\cdot\ln 0{,}2$. **39.** $-\frac{\operatorname{tg} x}{\ln 5}$.
40. $\frac{1}{x\ln\pi\sqrt[5]{\log^4_{\pi} x}}$.

§ 48

Вариант I

1. $y=-x+2$. **2.** $y=3x-7$. **3.** 6. **4.** 2. **5.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **7.** $-\frac{\pi}{4}$. **8.** $\frac{\pi}{3}$. **9.** $y=3x-1$. **10.** $y=\frac{1}{4}x+2$. **11.** $y=1$. **12.** $y=3x$. **13.** $y=10x-16$. **14.** $y=-16x-15$. **15.** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$. **16.** $y=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$. **17.** $y=\frac{1}{e}x$. **18.** $y=3x+1$. **19.** $M(2;\ 2)$. **20.** $M\left(-1;\ 3\frac{2}{3}\right)$, $N(3;\ 5)$. **21.** $M(3;\ 4)$. **22.** $(\pi k;\ 0)$, где $k\in\boldsymbol{Z}$,— координаты всех искомых точек.

Вариант II

1. $y=x+3$. **2.** $y=-2x+8$. **3.** 6. **4.** 2. **5.** $-2\sqrt{3}$. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **7.** $-\frac{\pi}{4}$. **8.** $\frac{\pi}{6}$. **9.** $y=-4x+2$. **10.** $y=\frac{1}{3}x+1$. **11.** $y=\frac{1}{2}x$. **12.** $y=-2x$. **13.** $y=7x-4$. **14.** $y=24x+27$. **15.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$. **16.** $y=x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$. **17.** $y=x+1$. **18.** $y=\frac{2}{e}x$. **19.** $M(1;\ 2)$. **20.** $M\left(1;\ -\frac{2}{3}\right)$, $N(-3;\ 6)$. **21.** $M(1;\ 2)$. **22.** $(\pi+2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, где $k\in\boldsymbol{Z}$,— координаты всех искомых точек.

Глава IX. Применение производной к исследованию функций

§ 49

Вариант I

1. $3\leqslant x\leqslant 4$ — отрезок; $x<-1$, $0<x<2$, $x>2$ — интервалы. **2.** Возрастает на $\boldsymbol{R}$. **3.** Убывает на $\boldsymbol{R}$. **4.** Возрастает на интервале $x>1\frac{1}{4}$, убывает на интервале $x<1\frac{1}{4}$. **5.** Возрастает на интервалах $x<0$ и $x>\frac{1}{3}$, убывает на интервале $0<x<\frac{1}{3}$. **6.** Возрастает на интервале $0<x<2$, убывает на интервалах $x<0$, $x>2$. **7.** Возрастает на интервалах $x<-\sqrt{2}$ и $x>\sqrt{2}$, убывает на интервале $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. **8.** Возрастает на интервалах $-3<x<0$ и $x>3$, убывает на интервалах $x<-3$ и $0<x<3$. **9.** Возрастает на интервале

$x>-1$, убывает на интервале $x<-1$. **10.** Возрастает на интервалах $x<-4$ и $x>2$, убывает на интервале $-4<x<2$. **11.** Убывает на интервалах $x<3$ и $x>3$. **12.** Убывает на интервалах $x<2$ и $x>2$. **13.** Возрастает на интервале $x>2$. **14.** Убывает на интервале $x>-4$. **15.** Возрастает на интервалах $x<0$ и $x>6$, убывает на интервале $0<x<6$. **16.** Возрастает на интервале $x>1{,}8$, убывает на интервале $x<1{,}8$. **17.** Убывает на $\boldsymbol{R}$. **18.** Возрастает на интервалах $-\pi+2\pi k<x<2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, убывает на интервалах $2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **20.** При $a\geqslant 0$.

Вариант II

1. $-1\leqslant x\leqslant 1$ — отрезок; $x>-3$, $-5<x<-3$, $x<-8$ — интервалы. **2.** Возрастает на $\boldsymbol{R}$. **3.** Убывает на $\boldsymbol{R}$. **4.** Возрастает на интервале $x>\frac{7}{8}$, убывает на интервале $x<\frac{7}{8}$. **5.** Возрастает на интервале $0<x<1\frac{1}{3}$, убывает на интервалах $x<0$ и $x>1\frac{1}{3}$. **6.** Возрастает на интервалах $x<0$ и $x>4$, убывает на интервале $0<x<4$. **7.** Возрастает на интервалах $x<-\sqrt{5}$ и $x>\sqrt{5}$, убывает на интервале $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$. **8.** Возрастает на интервалах $-1<x<0$ и $x>1$, убывает на интервалах $x<-1$ и $0<x<1$. **9.** Возрастает на интервале $x>-2$, убывает на интервале $x<-2$. **10.** Возрастает на интервалах $x<-1$ и $x>3$, убывает на интервале $-1<x<3$. **11.** Убывает на интервалах $x<4$ и $x>4$. **12.** Убывает на интервалах $x<1$ и $x>1$. **13.** Возрастает на интервале $x>5$. **14.** Убывает на интервале $x>-1$. **15.** Возрастает на интервале $0<x<8$, убывает на интервалах $x<0$ и $x>8$. **16.** Возрастает на интервале $x>-2{,}25$, убывает на интервале $x<-2{,}25$. **17.** Возрастает на $\boldsymbol{R}$. **18.** Возрастает на интервалах $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; убывает на интервалах $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **20.** При $b\geqslant 0$.

§ 50

Вариант I

1. $x=-2{,}5$, $x=-1$, $x=2$, $x=4$, $x=6{,}7$ — критические точки; $x=-1$, $x=2$, $x=4$, $x=6{,}7$ — стационарные точки; $x=-2{,}5$, $x=-1$, $x=2$, $x=6{,}7$ — точки экстремума. **2.** $x=0$. **3.** $x=1$. **4.** $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=0$. **5.** $x_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** $x_1=1$, $x_2=3$. **7.** $x=0$. **8.** $x=\ln 2$. **9.** $x=\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **10.** Функция не имеет стационарных точек. **11.** $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **12.** Функция не имеет точек экстремума. **13.** $x=-2$ — точка минимума. **14.** $x=-2$ — точка максимума; $x=0$ — точка минимума. **15.** $x=-\sqrt{3}$ — точка минимума; $x=\sqrt{3}$ — точка максимума. **16.** $x=-\sqrt{2}$ — точка минимума; $x=\sqrt{2}$ — точка максимума. **17.** Функция не имеет точек эстремума. **18.** $x=-\frac{5}{6}$ — точка минимума. **19.** $x=\frac{1}{3}$ — точка минимума; $y\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$. **20.** $x=-\sqrt{2}$ — точка минимума, $x=\sqrt{2}$ — точка максимума; $y(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$, $y(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$. **21.** $x=3$ — точка минимума; $y(3)=-7$. **22.** $x=-2$, $x=1$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; $y(-2)=-15$, $y(1)=12$, $y(0)=17$. **23.** $x=6$ — точка минимума; $y(6)=-1$. **24.** $x=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$,— точки максимума; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$,— точки минимума; значения функции во всех точках максимума равны 1, значения функции во всех точках минимума равны -1. **25.** $x=0$ — точка минимума; $y(0)=-1$. **26.** $x=-2$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума; $y(-2)=\frac{4}{e^2}$, $y(0)=0$.

Вариант II

1. $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=4$, $x=5$, $x=7{,}5$ — критические точки; $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=4$ — стационарные точки; $x=-3$, $x=-1$, $x=4$, $x=7{,}5$ — точки экстремума. **2.** $x=0$. **3.** $x=2$. **4.** $x_1=-2$, $x_2=0$. **5.** $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **6.** $x_1=-1$, $x_2=2$. **7.** $x=0$. **8.** $x=\ln 4$. **9.** $x=3\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **10.** Функция не имеет стационарных точек. **11.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **12.** Функция не имеет точек экстремума. **13.** $x=3$ — точка максимума. **14.** $x=-4$ — точка максимума; $x=0$ — точка минимума. **15.** $x=-\sqrt{2}$ — точка минимума; $x=\sqrt{2}$ — точка максимума. **16.** $x=-\sqrt{6}$ — точка минимума; $x=\sqrt{6}$ — точка максимума. **17.** Функция не имеет точек эстремума. **18.** $x=2{,}25$ — точка минимума. **19.** $x=0{,}3$ — точка максимума; $y(0{,}3)=0{,}45$. **20.** $x=-\sqrt{3}$ — точка максимума, $x=\sqrt{3}$ — точка минимума; $y(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$, $y(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$. **21.** $x=2$ — точка максимума; $y(2)=9$. **22.** $x=-1$, $x=2$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; $y(-1)=14$, $y(2)=-13$, $y(0)=19$. **23.** $x=10$ — точка максимума; $y(10)=3$. **24.** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$,— точки максимума, $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$,— точки минимума; значения функции во всех точках максимума равны 1, значения функции во всех точках минимума равны -1. **25.** $x=0$ — точка максимума; $y(0)=1$. **26.** $x=-3$ — точка минимума; $y(-3)=\frac{27}{e^3}$.

Вариант I

2. См. рис. 89. **3.** См. рис. 90. **4.** См. рис. 91. **5.** См. рис. 92. **6.** См. рис. 93. **7.** См. рис. 94. **8.** См. рис. 95. **9.** См. рис. 96.

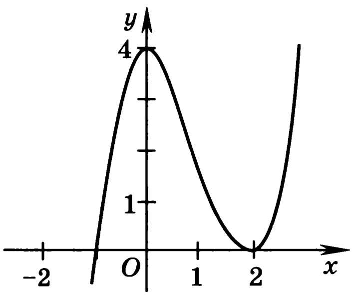


Рис. 89

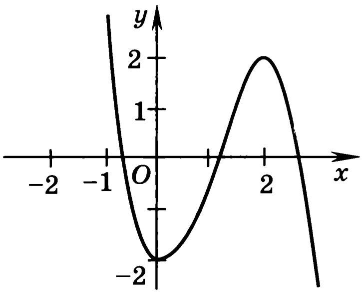


Рис. 90

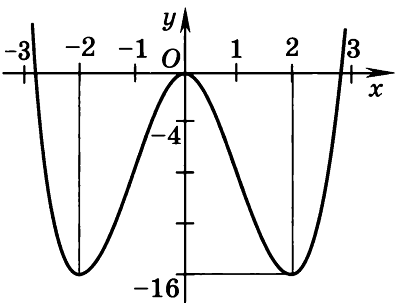


Рис. 91

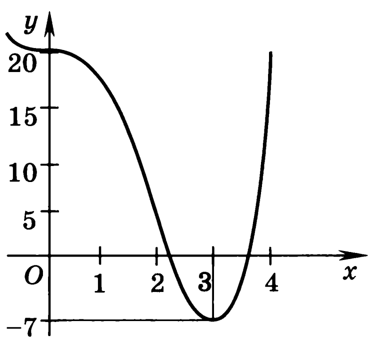


Рис. 92

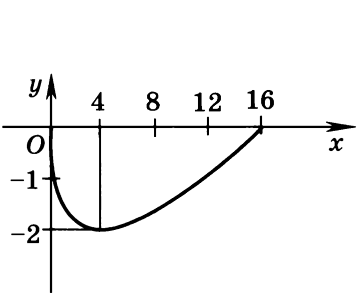


Рис. 93

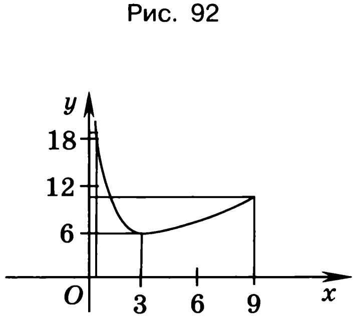


Рис. 94

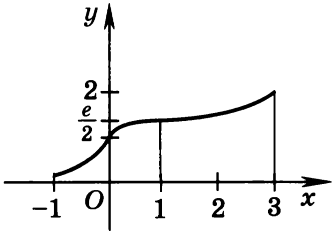


Рис. 95

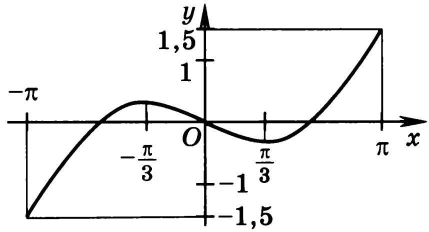


Рис. 96

Вариант II

2. См. рис. 97. **3.** См. рис. 98. **4.** См. рис. 99. **5.** См. рис. 100. **6.** См. рис. 101. **7.** См. рис. 102. **8.** См. рис. 103. **9.** См. рис. 104.

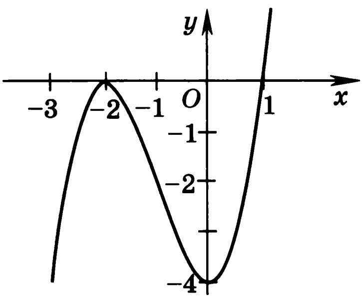


Рис. 97

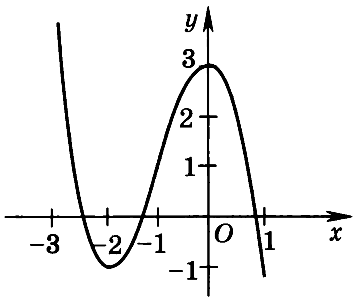


Рис. 98

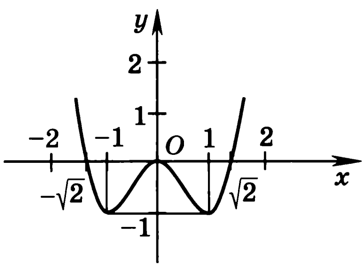


Рис. 99

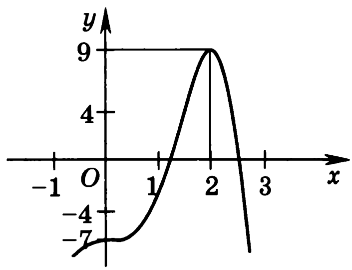


Рис. 100

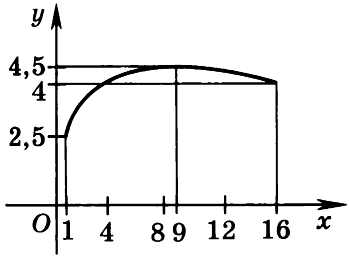


Рис. 101

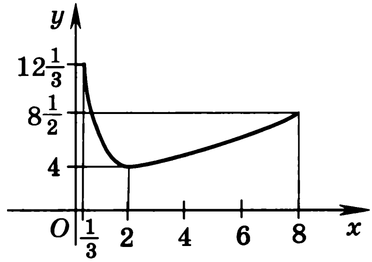


Рис. 102

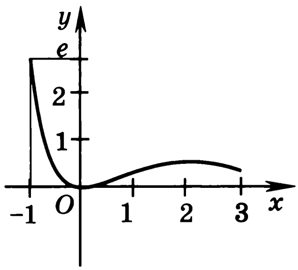


Рис. 103

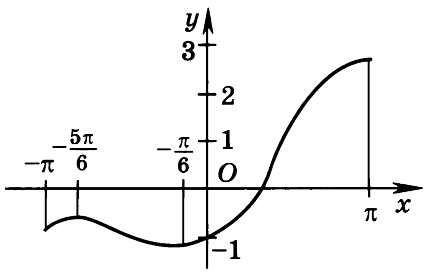


Рис. 104

§ 52

Вариант I

1. 1) 3 — наибольшее, -2 — наименьшее значение функции; 2) 7 — наибольшее, -2 — наименьшее значение функции. **2.** 6 —наибольшее, -4 — наименьшее значение функции. **3.** 4 — наибольшее, 2,5 — наименьшее значение функции. **4.** 5 — наибольшее, 1 — наименьшее значение функции. **5.** 2 — наибольшее, $-2{,}5$ — наименьшее значение функции. **6.** 1 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. **7.** -7 — наибольшее, -27 — наименьшее значение функции. **8.** 0 — наибольшее, -27 — наименьшее значение функции. **9.** 14 — наибольшее, -11 — наименьшее значение функции. **10.** 10 — наибольшее, 6 — наименьшее значение функции. **11.** 0 — наибольшее, -4 — наименьшее значение функции. **12.** e — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. **13.** -3. **14.** e^2. **15.** 3 дм. **16.** 15 см^2. **17.** $AM = AN = 2\sqrt{S}$. **18.** $R\sqrt{\frac{2}{3}}$. **19.** $4R$. **20.** $\frac{h}{3}$.

Вариант II

1. 1) 0 — наибольшее, -4 — наименьшее значение функции; 2) 16 — наибольшее, -4 — наименьшее значение функции. **2.** 2 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. **3.** 1 — наибольшее, -8 — наименьшее значение функции. **4.** 6 — наибольшее, 2 — наименьшее значение функции. **5.** -1 — наибольшее, $-5{,}5$ — наименьшее значение функции. **6.** 4 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. **7.** -9 — наибольшее, -16 — наименьшее значение функции. **8.** 11 — наибольшее, -16 — наименьшее значение функции. **9.** 30 — наибольшее, -51 — наименьшее значение функции. **10.** 5 — наибольшее, 4 — наименьшее значение функции. **11.** 9 — наибольшее, 0 — наименьшее значение функции. **12.** $0{,}2e^2$ — наибольшее, 1 — наименьшее значение функции. **13.** 6. **14.** $\frac{4}{e^2}$. **15.** 3 дм, 6 дм, 4 дм. **16.** 5 см^2. **17.** $AM=AN=\frac{a}{2}$. **18.** $\frac{4R}{3}$. **19.** $\frac{l\sqrt{3}}{3}$. **20.** $3H$.

§ 53

Вариант I

1. $6x-14$. **2.** $-36x^2+4x$. **3.** $168(2x-1)^5$. **4.** $56\sin^6 x\cdot\cos^2 x-8\sin^8 x$. **5.** Выпукла вверх при $x>1\frac{2}{3}$, выпукла вниз при $x<1\frac{2}{3}$. **6.** Выпукла вниз при $x<0$ и $x>1$, выпукла вверх при $0<x<1$. **7.** $x=\pi$. **8.** $x=-2$.

Вариант II

1. $-6x+12$. **2.** $6x^2-30x$. **3.** $270(3x+2)^4$. **4.** $42\cos^5 x\cdot\sin^2 x-7\cos^7 x$. **5.** Выпукла вверх при $x<\frac{2}{3}$, выпукла вниз при $x>\frac{2}{3}$. **6.** Выпукла вниз при $x<-\frac{3}{2}$ и $x>0$, выпукла вверх при $-\frac{3}{2}<x<0$. **7.** $x=\frac{\pi}{2}$. **8.** $x=2$.

§ 55

Вариант I

1. $\frac{3}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+C$. **2.** $\ln|x|+\frac{3}{2x^2}+C$. **3.** $\frac{x^6}{6}-x^2+C$. **4.** $\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+C$. **5.** $-2\cos x+\frac{x^3}{3}+C$. **6.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{x}+C$. **7.** $4e^x+\frac{x^4}{4}+C$. **8.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$. **9.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 3x+C$. **10.** $-2e^{-2x}+\frac{(x-1)^4}{4}+C$. **11.** $4\sqrt{x+3}+\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{x}{2}+C$. **12.** $x+\sin x+C$. **13.** $x-\ln|1+x|+C$. **14.** $\ln|x-3|-\ln|x-2|+C$. **15.** $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. **16.** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$. **17.** $\ln|x+4|+\ln|x+1|+C$. **18.** $\frac{1}{2x^2}-\frac{5}{2}$. **19.** $-\sin x-\cos x+2$. **20.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|-\frac{8}{3}$. **21.** $\frac{e^{2x}}{2}+\ln|1+x|+\frac{3}{2}$. **22.** $-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}$. **23.** $-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}(x+1)^4+\frac{1}{2}$. **24.** $-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{2}$.

Вариант II

1. $\frac{2}{5}x^5-\frac{5}{2}x^2+C$. **2.** $-\frac{1}{x}+\frac{2}{3x^3}+C$. **3.** $\frac{x^7}{7}+x^3+C$. **4.** $-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+C$. **5.** $3\sin x-\frac{x^2}{2}+C$. **6.** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-8\sqrt{x}+C$. **7.** $5e^x-\frac{2}{5}x^5+C$. **8.** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-6\sqrt{x}+C$. **9.** $\frac{1}{18}\sin 6x+\cos 4x+C$. **10.** $3e^{2x}+\frac{1}{5}(x+1)^5+C$. **11.** $6\sqrt{x-1}+\frac{x}{2}+\frac{\sin 6x}{12}+C$. **12.** $x-\sin x+C$. **13.** $x-3\ln|x+2|+C$. **14.** $\frac{1}{5}\ln|x-4|-\frac{1}{5}\ln|x+1|+C$. **15.** $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$. **16.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$. **17.** $\ln|x+5|+\ln|x+1|+C$. **18.** $-\frac{2}{3x^3}-\frac{11}{12}$. **19.** $\sin x-\cos x-3$. **20.** $2\sqrt{x}-2\ln|x|-5$. **21.** $2e^{\frac{x}{2}}+\ln|x+2|-4-\ln 2$. **22.** $\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{18}\cos 3x+\frac{4}{5}$. **23.** $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}(x-1)^6-\frac{2}{3}$. **24.** $-\frac{1}{x+3}+\frac{5}{2(x+3)^2}+\frac{7}{8}$.

§ 56

Вариант I

1. См. рис. 105. **2.** См. рис. 106. **3.** См. рис. 107.

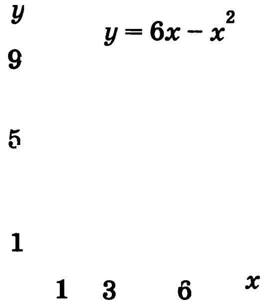


Рис. 105

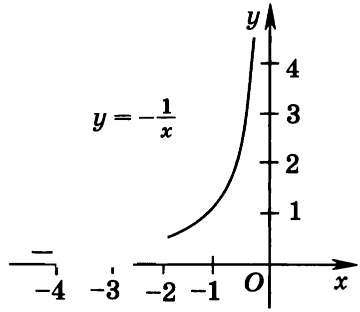


Рис. 106

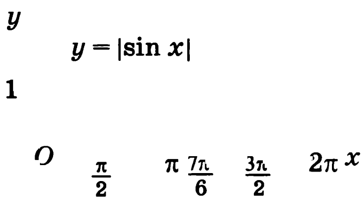


Рис. 107

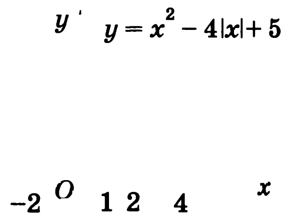


Рис. 108

4. См. рис. 108. **5.** Вторая. **6.** 3. **7.** $\frac{8}{3}$. **8.** $\frac{46}{3}$. **9.** $2\ln\frac{3}{2}$. **10.** 1. **11.** 120. **12.** $\frac{15}{2} + \ln 4$. **13.** $3 + \ln 4$. **14.** $\frac{10}{3}$. **15.** $\frac{1}{8}(\pi + 2)$. **16.** $\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}$. **17.** $\frac{4}{3}$. **18.** $\frac{32}{3}$. **19.** $\frac{9}{2}$. **20.** 2.

Вариант II

1. См. рис. 109. **2.** См. рис. 110. **3.** См. рис. 111. **4.** См. рис. 112. **5.** Первая. **6.** 6. **7.** $\frac{8}{3}$. **8.** $\frac{176}{3}$. **9.** $3\ln\frac{5}{2}$. **10.** 4.

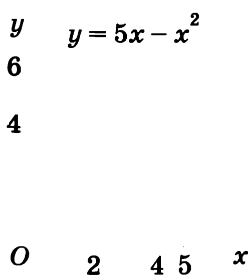


Рис. 109

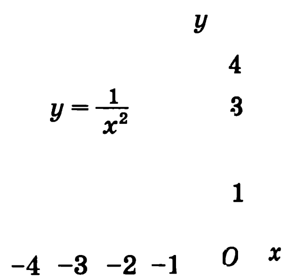


Рис. 110

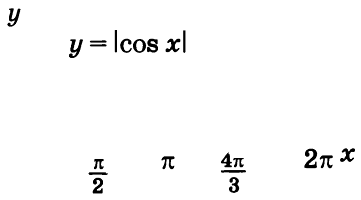


Рис. 111

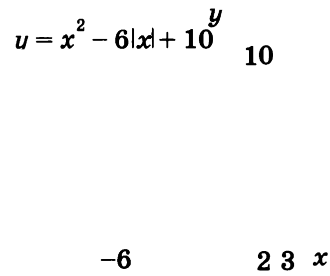


Рис. 112

11. $\frac{2295}{4}$. 12. $\frac{21}{2}+\ln\frac{2}{5}$. 13. $4+\ln 3$. 14. 6. 15. $\frac{1}{8}(\pi+2)$. 16. $2\left(4+\ln\frac{5}{3}\right)$. 17. $\frac{32}{3}$. 18. $\frac{4}{3}$. 19. $\frac{125}{6}$. 20. 2.

§ 57

Вариант I

1. $\frac{7}{24}$. 2. $-\frac{45}{4}$. 3. 1. 4. $\frac{14}{3}+\ln\frac{5}{2}$. 5. $\frac{3}{2}$. 6. $-\frac{7}{4}$. 7. $\frac{72}{5}$. 8. $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{7}$. 9. $\frac{2}{3}$. 10. $1-\ln\frac{3}{2}$. 11. $8\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. 12. $\ln\frac{4}{3}$. 13. 1. 14. 0. 15. $\frac{116}{15}$. 16. $\frac{7\pi}{16}$. 17. 0. 18. $\frac{2}{3}$.

Вариант II

1. $\frac{242}{1215}$. 2. $-\frac{45}{4}$. 3. 0. 4. $\frac{38}{3}-\ln 2$. 5. $\frac{26}{3}$. 6. −6. 7. 5. 8. $\frac{1}{3}\ln\frac{11}{5}$. 9. $\frac{2}{3}$. 10. $2-\ln\frac{5}{3}$. 11. $\frac{3}{2}+4\ln\frac{4}{3}$. 12. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 13. 1. 14. 0. 15. $\frac{886}{15}$. 16. $\frac{7\pi}{16}$. 17. $\frac{5\pi}{16}$. 18. $\frac{2}{3}$.

§ 58

Вариант I

1. 123,5. 2. $\frac{4}{3}$. 3. $\frac{32}{3}$. 4. $\frac{9}{2}$. 5. $\frac{81}{2}$. 6. $\frac{9}{2}$. 7. $\frac{1}{3}$. 8. 9. 9. $\frac{15}{4}-4\ln 2$. 10. $\frac{5}{12}$. 11. $\frac{8}{3}$. 12. $\frac{4}{3}$. 13. $\frac{2}{3}$. 14. $\frac{3}{2}$. 15. $1-\frac{\pi}{4}$. 16. $\frac{8}{3}$. 17. 18. 18. $\frac{61}{24}$.

Вариант II

1. 121,5. **2.** $\frac{4}{3}$. **3.** $\frac{32}{3}$. **4.** $\frac{9}{2}$. **5.** $\frac{81}{2}$. **6.** $\frac{9}{2}$. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** 9. **9.** $\frac{15}{4} - 4\ln 2$. **10.** $\frac{5}{12}$. **11.** $\frac{8}{3}$. **12.** $\frac{4}{3}$. **13.** $\frac{2}{3}$. **14.** $\frac{3}{2}$. **15.** $1 - \frac{\pi}{4}$. **16.** $\frac{8}{3}$. **17.** 18. **18.** $\frac{61}{24}$.

Верные ответы к заданиям тестовой проверки обязательных результатов обучения

1. в).	**2.** а).	**3.** б).	**4.** б).	**5.** г).	**6.** б).
7. а).	**8.** в).	**9.** г).	**10.** б).	**11.** г).	**12.** б).
13. а).	**14.** а).	**15.** в).	**16.** г).	**17.** а).	**18.** в).
19. б).	**20.** в).	**21.** в).	**22.** в).	**23.** а).	**24.** в).
25. г).	**26.** в).	**27.** б).	**28.** г).	**29.** а).	**30.** а).
31. б).	**32.** в).	**33.** г).	**34.** г).	**35.** б).	**36.** в).
37. г).	**38.** а).	**39.** в).	**40.** б).	**41.** а).	**42.** в).
43. а).	**44.** б).	**45.** г).			

Оглавление

Глава X. Интеграл

Учебное издание

Шабунин Михаил Иванович
Ткачева Мария Владимировна
Федорова Надежда Евгеньевна
Газарян Рубен Гургенович

Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы
11 класс
Базовый уровень

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художник *Е. В. Соганова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технические редакторы *Г. В. Субочева, Р. С. Еникеева*
Корректоры *О. Н. Леонова, Н. А. Смирнова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 27.07.09. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,83. Тираж 3000 экз. Заказ № 28729.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru