АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

10

Профильный уровень

3-е издание

Москва • Просвещение •
2011

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21
А45

Авторы: М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва,
Н. Е. Фёдорова, О. Н. Доброва

Алгебра и начала математического анализа.
А45 Дидактические материалы. 10 класс : профил. уровень / [М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, О. Н. Доброва].— 3-е изд.— М. : Просвещение, 2011.— 142 с. : ил.— ISBN 978-5-09-025740-4.

Книга содержит материалы к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа для 10 класса профильного уровня и дополняет систему упражнений учебника и дидактические материалы тех же авторов, предназначенные для базового уровня. Каждая глава содержит примеры и задачи с подробными решениями, задания для самостоятельной работы, контрольные работы и ответы к заданиям.

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-025740-4

Предисловие

Современные стандарты школьного образования выделяют в содержании математического образования старших классов два уровня знаний — *базовый* и *профильный*. Учебник авторов Ю. М. Колягина и др. «Алгебра и начала математического анализа» для 10 класса под редакцией А. Б. Жижченко (М.: Просвещение, 2008) создан для обучения в старшей школе на обоих уровнях.

Дидактические материалы дополняют систему упражнений учебника на обязательном профильном и на продвинутом профильном уровнях. Дополнительные упражнения для базового уровня и обязательного профильного можно найти в пособии «Дидактические материалы по алгебре и началам математического анализа» для 10 класса общеобразовательных учреждений авторов М. И. Шабунина, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, Р. Г. Газаряна (М.: Просвещение, 2010).

Обе книги составляют единый комплект. Они объединены идеей широкого использования при дифференциации обучения — каждое задание снабжено условной балловой оценкой (от 1 до 10 очков), характеризующей его сложность. Используя балловую оценку заданий, учитель может:

— организовать «плавную» дифференциацию обучения математике: в зависимости от качества усвоения темы каждому учащемуся предлагать конкретный балловый диапазон выполняемых заданий, помогая постепенно поднимать уровень своих математических умений;

— предлагать учащимся разнообразные виды самостоятельных и проверочных работ, ориентируя их на соответствие набираемых баллов одной из положительных оценок («3», «4» или «5»).

В обоих пособиях задания обязательного профильного уровня в основном оценены баллами от 5 до 7, а продвинутого профильного — от 8 до 10 баллов.

Каждая глава пособия содержит:

1) дидактические материалы к каждому параграфу учебника Ю. М. Колягина и др.;

2) контрольную работу по тематике главы в двух вариантах.

Каждый параграф пособия включает:

1) примеры типовых задач с подробными решениями;

2) разноуровневые задания для самостоятельной работы (в двух вариантах), снабженные ответами в конце книги.

Несмотря на то что содержание и структура данной книги соответствуют учебнику «Алгебра и начала математического анализа» авторов Ю. М. Колягина и др., ее можно с успехом использовать при работе с другими учебниками.

Глава II Делимость чисел

§ 1. Понятие делимости. Делимость суммы и произведения

Примеры с решениями

1. Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a = 6^{18} + 36^8$, $m = 37$; 2) $a = 3^{24} - 9^{11} + 27^7$, $m = 25$.

Решение. 1) $a = 6^{18} + 6^{16} = 6^{16}(6^2 + 1) = 6^{16} \cdot 37$;
2) $a = 3^{24} - 3^{22} + 3^{21} = 3^{21}(27 - 3 + 1) = 3^{21} \cdot 25$.

2. Доказать, что число $a = 47^4 + 70^3 + 93^4 + 20$ делится на 23.

Решение. Для доказательства запишем число a в виде

$$a = (47^4 - 1) + (70^3 - 1) + (93^4 - 1) + 23$$

и воспользуемся формулой $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ при $x = 24$ и $x = 93$, а также формулой $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ при $x = 70$.

Так как числа 46, 69 и 92 делятся на 23, то и число a делится на 23.

3. Доказать, что число $a = 10^8 + 10$ делится на 11.

Решение. Запишем число a в виде $a = 10^8 - 1 + 11$ и воспользуемся тем, что $b = 10^8 - 1$ — восьмизначное число, все цифры которого — девятки. Такое число делится на 99, а значит, и на 11. Следовательно, $a = b + 11$ делится на 11.

4. Пусть a и b — такие целые числа, что число $c = 3a + 2b$ делится на 17. Доказать, что и число $d = 10a + b$ делится на 17.

Решение. Воспользуемся равенством $3(10a + b) = 10(3a + 2b) - 17b$, откуда $3d = 10c - 17b$.

Так как правая часть этого равенства, т. е. $10c - 17$, делится на 17, а 3 не делится на 17, то число d должно делиться на 17.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Доказать, что число a делится на m, если:
1) $a = 18^4 + 52^3 + 86^4 + 14$, $m = 17$;
2) $a = 20^3 + 58^4 + 77^2 + 16$, $m = 19$.

2. $\boxed{4}$ Доказать, что при любых натуральных m и n число a делится на p, если:

1) $a=(5m+7n+3)^6(3m+9n+2)^5$, $p=32$;
2) $a=(3m+5n+1)^7(5m+9n+2)^6$, $p=64$.

3. $\boxed{5}$ Пусть a, b — целые числа. Доказать, что если число c делится на m, то и число d делится на m, если:

1) $c=5a+3b$, $m=7$, $d=9a+4b$;
2) $c=5a+3b$, $d=7a+2b$, $m=11$.

4. $\boxed{6}$ Доказать, что ни при каких $n \in \boldsymbol{N}$ число a не является квадратом натурального числа, если:

1) $a=n^2+3n+2$;
2) $a=n^2+5n+4$.

§ 2. Деление с остатком

Примеры с решениями

1. При делении числа 1270 на некоторое натуральное число m частное оказалось равным 74. Найти m и r, где r — остаток от деления.

Решение. По определению деления справедливо равенство $1270=74m+r$, которое можно рассматривать как запись результата деления числа 1270 на 74.

Разделив уголком 1270 на 74, получим частное $m=17$ и остаток $r=12$.

2. Найти все целые числа, которые при делении на 9 дают остаток 5, а при делении на 15 дают остаток 4.

Решение. Пусть x — искомое целое число, тогда $x=9m+5$, $x=15n+4$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда $9m+5=$ $=15n+4$, т. е. $15n-9m=1$. Полученное равенство не является верным ни при каких целых n и m, так как его левая часть делится на 3, а правая нет.

3. Доказать, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ число $p=n^3+20n+$ $+10^5+2$ делится на 3.

Решение. Число $a=10^5-1+3$ делится на 3 (можно воспользоваться также тем, что сумма цифр числа 10^5+2, равная трем, делится на 3).

При $n=1$ число $b=n^3+20n$ делится на 3. Покажем, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$, $n>1$, число b делится на 3, представив его в виде $b=n^3-n+21n$. Так как $c=n^3-n=$ $=(n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3, то c делится на 3, откуда $b=c+21n$ делится на 3, тогда и число $p=a+b$ делится на 3.

4. Доказать, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ число $a = 6n^5 + {}$ $-15n^4 + 10n^3 - n$ делится на 30.

Решение. Нужно доказать, что a делится на 2, 3 и 5.

а) Если n — четное число, то a делится на 2, а если n — нечетное число, то a также делится на 2, так как $15n^4 - n$ делится на 2 (сумма двух нечетных чисел).

б) Так как $6n^5 + 15n^4 + 9n^3 = b$ делится на 3, $a = b + n^3 - n$, где $n^3 - n = c$ — число, делящееся на 3 (пример 3), то $a = b + c$ делится на 3.

в) Заметим, что число $5n^5 + 15n^4 + 10n^3$ делится на 5. Поэтому a делится на 5 тогда и только тогда, когда число $d = n^5 - n$ делится на 5.

Если n делится на 5, то и d делится на 5. Пусть n не делится на 5. Тогда $n = 5p \pm 1$ или $n = 5q \pm 2$, где $p \in \boldsymbol{N}$, $q \in \boldsymbol{N}$. Так как $d = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$, то при $n = 5p \pm 1$ число $n^2 - 1$ делится на 5, а при $n = 5q \pm 2$ число $n^2 + 1$ делится на 5. Следовательно, d делится на 5 при любом $n \in \boldsymbol{N}$.

5. Найти остаток от деления числа $a = 2^{187} + 3^{74} + 7^{257}$ на 10.

Решение. Задачу можно сформулировать так: найти последнюю цифру числа a.

В главе II учебника (§ 2, задача 5) было установлено, что последние цифры чисел 2^k, 3^k, 7^k повторяются через 4. Это означает, что если $k = 4p + r$, $p \in \boldsymbol{N}$, r — остаток от деления k на 4 ($r = 1, 2, 3$), то последние цифры чисел 2^k, 3^k, 7^k такие же, как у чисел 2^r, 3^r, 7^r, а если $r = 0$ (k делится на 4), то последние цифры чисел 2^k, 3^k, 7^k такие же, как у чисел 2^4, 3^4, 7^4.

Так как остатки от деления на 4 чисел 187, 74 и 257 равны соответственно 3, 2 и 1, то последние цифры чисел 2^{187}, 3^{74} и 7^{257} равны последним цифрам чисел 2^3, 3^2 и 7^1, т. е. это цифры 8, 9 и 7, а последняя цифра числа a — последняя цифра суммы $8 + 9 + 7$, т. е. это цифра 4. Следовательно, остаток от деления числа a на 10 равен 4.

6. Найти все значения $n \in \boldsymbol{Z}$, при которых является целым число $a = \dfrac{n^5 + 3}{n^2 + 1}$.

Решение. Преобразуем a, используя равенство $n^5 + 3 = n^5 + n^3 - (n^3 + n) + n + 3$. Получим $a = n^3 - n + \dfrac{n + 3}{n^2 + 1}$, откуда следует, что a — целое число тогда и только тогда, когда дробь $b = \dfrac{n + 3}{n^2 + 1}$ — целое число. Этому условию удовлетворяют значения n, равные -3, -1, 0, 1, 2.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Найти все целые числа, которые при делении на m и n дают остатки, соответственно равные r_1 и r_2, если:

   1) $m=12,\ n=33,\ r_1=7,\ r_2=8$;

   2) $m=15,\ n=24,\ r_1=8,\ r_2=9$.

2. $\boxed{5}$ Доказать, что при любом $n \in \boldsymbol{Z}$ число a делится на 3, если:

   1) $a=4n^3+17n+10^5+5$;

   2) $a=7n^3+32n+10^4+8$.

3. $\boxed{4}$ Найти все значения $n \in \boldsymbol{Z}$, при которых число a является целым, если:

   1) $a=\dfrac{n^4+8}{n^2+2}$; 2) $a=\dfrac{n^4+7}{n^2+2}$.

4. $\boxed{4}$ Найти остаток от деления на 10 числа a, если:

   1) $a=2^{383}+3^{427}+7^{214}$; 2) $a=2^{479}+3^{530}+7^{374}$.

5. $\boxed{4}$ Пусть целые числа x и y не делятся на 3. Доказать, что число a делится на 3, если:

   1) $a=x^4-y^4$; 2) $a=x^4+y^4+1$.

6. $\boxed{4}$ Найти все такие целые числа x и y, чтобы при любом $n \in \boldsymbol{N}$ число a было целым, если:

   1) $a=\dfrac{n^3+nx+y}{n^2+1}$; 2) $a=\dfrac{n^3+n(x-1)+y}{n^2+1}$.

7. $\boxed{6}$ Доказать, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$ число a делится на 30, если:

   1) $a=6n^5+45n^4+10n^3-n$;

   2) $a=6n^5+15n^4+40n^3-n$.

§ 3. Признаки делимости

Примеры с решениями

1. Доказать, что число $a=10^{70}-82^4$ делится на 9.

Решение. Запишем число a в виде $a=10^{70}-1-(82^4-1)$. Так как число $10^{70}-1$ состоит из одних девяток, а $82^4-1=81\cdot m$, где $m \in \boldsymbol{N}$, то число a делится на 9.

2. Доказать, что число $a=1476^{10}+3825^9$ делится на 9.

Решение. Так как сумма цифр каждого из чисел 1476 и 3825 делится на 9, то и сами эти числа делятся на 9, поэтому число a делится на 9.

3. Выяснить, делится ли на 8 число $a=2+2^2+2^3+\dots+2^{20}$.

Решение. Числа 2^k, где $k\in N$, $k\geqslant 3$, делятся на 8, а сумма $2+2^2=6$ не делится на 8. Следовательно, число a не делится на 8.

4. Выяснить, делится ли на 11 число $a=10^{70}+9876547$.

Решение. Запишем число a в виде $a=10^{70}-1+9876548$. Так как число $10^{70}-1$ состоит из четного числа девяток, то оно делится на 11. Число 9876548 также делится на 11, так как число $9-8+7-6+5-4+8=11$ делится на 11 (признак делимости на 11). Следовательно, a делится на 11.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{3}$ Доказать, что число a делится на m, если:

1) $a=1+2+\dots+97+98$, $m=147$;
2) $a=1+2+\dots+76+77$, $m=273$.

2.$\boxed{4}$ Доказать, что число a делится на 5, если:

1) $a=4^9+1$; 2) $a=4^7+26$.

3.$\boxed{3}$ Выяснить, делится ли на 8 число a, если:

1) $a=12345678$; 2) $a=345678910$.

4.$\boxed{4}$ Выяснить, делится ли на 37 число a, если:

1) $a=333555^2+222444^3$;
2) $a=777666^4+888333^5$.

5.$\boxed{5}$ Выяснить, делится ли на 11 число a, если:

1) $a=10^{16}+964116$; 2) $a=10^{18}+9561001$.

§ 4. Сравнения

Примеры с решениями

1. Найти все целые числа x, такие, что $x\equiv 3 \pmod 7$ и $x\in[-15;\ 20]$.

Решение. Искомые числа принадлежат множеству чисел вида $x=3+7k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Из них отрезку $[-15;\ 20]$ принадлежат числа -11, -4, 3, 10, 17.

2. Доказать, что число a делится на m, если:

1) $a=4\cdot 35^{19}+13\cdot 52^{15}$, $m=17$;
2) $a=3\cdot 5^{25}+4^7\cdot 9^6$, $m=19$;
3) $a=5\cdot 7^{243}+16^{132}+3^{430}$, $m=10$.

Решение. 1) Так как $35\equiv 1 \pmod{17}$, $52\equiv 1 \pmod{17}$, то $a\equiv 4+13 \pmod{17}$, т. е. a делится на 17.

2) Пользуясь тем, что $25 \equiv 6 \pmod{19}$, $4^7 \cdot 9^6 = 4 \cdot 6^{12}$, $5^{25} \equiv 5 \cdot 6^{12} \pmod{19}$, имеем $a \equiv 15 \cdot 6^{12} + 4 \cdot 6^{12} \equiv 0 \pmod{19}$, т. е. a делится на 19.

3) Так как $7^{243} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$, $16^{132} \equiv 6 \pmod{10}$, $3^{430} \equiv 3^2 \pmod{10}$, то $a \equiv 5 \cdot 3 + 6 + 9 \equiv 0 \pmod{10}$, т. е. a делится на 10.

3. Найти остаток от деления числа $a = 2^{425} + 50^{37}$ на 17.

Решение. Так как $2^{425} = 2 \cdot 16^{106}$, $16 \equiv -1 \pmod{17}$, $50 \equiv -1 \pmod{17}$, то $a \equiv 2 - 1 \pmod{17}$, т. е. остаток от деления числа a на 17 равен 1.

4. Найти остаток от деления числа 6^{192} на 17.

Решение. Так как $6^{192} = 36^{96}$, $36 \equiv 2 \pmod{17}$, то $6^{192} \equiv 2^{96} \pmod{17}$. Но $16 \equiv -1 \pmod{17}$, $2^{96} = 16^{24}$, $16^{24} \equiv (-1)^{24} \pmod{16}$, откуда следует, что $6^{192} \equiv 1 \pmod{17}$, т. е. остаток от деления числа 6^{192} на 17 равен 1.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{4}$ Доказать, что число a делится на m, если:

1) $a = 5 \cdot 2^{51} + 21 \cdot 32^{45}$, $m = 31$;
2) $a = 4^{61} + 27 \cdot 32^{77}$, $m = 31$.

2.$\boxed{5}$ Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 3 \cdot 2^{73} + 9 \cdot 16^{29}$, $m = 17$;
2) $a = 5 \cdot 4^{31} + 7 \cdot 18^{37}$, $m = 17$.

3.$\boxed{6}$ Найти остаток от деления числа a на m, если:

1) $a = 15^{254}$, $m = 17$; 2) $a = 12^{316}$, $m = 19$.

§ 5. Решение уравнений в целых числах

Примеры с решениями

1. Найти все целочисленные решения уравнения:

1) $10x + 21y = 1$; 2) $45x + 21y = 8$.

Решение. 1) Числа 10 и 21 взаимно просты, а пара чисел $(-2; 1)$ является решением этого уравнения. Тогда (глава II, § 5 учебника) все целочисленные решения этого уравнения задаются формулами

$$x = -2 + 21t, \; y = 1 - 10t, \; t \in \boldsymbol{Z}.$$

2) Так как коэффициенты 45, 21 и 8 уравнения не имеют общего делителя, отличного от единицы, а наибольший общий делитель чисел 45 и 21 равен 3 (эти числа не являются взаимно простыми), то данное уравнение не имеет целочисленных решений.

2. Найти целочисленные решения уравнения

$$x^2=12y+5.$$

Решение. Если x делится на 3, то x^2-12y делится на 3 при любом $y\in\boldsymbol{Z}$, а число 5 не делится на 3. Если x не делится на 3, то остаток от деления x^2 на 3 равен 1, а остаток от деления правой части уравнения на 3 равен 2.

Следовательно, уравнение не имеет целочисленных решений.

3. Доказать, что уравнение $x^2-2y^2=204$ не имеет целочисленных решений.

Решение. Если числа x и y делятся на 3, то левая часть уравнения делится на 9, а правая нет.

Если только одно из чисел делится на 3, то левая часть уравнения не делится на 3, а правая часть делится на 3.

Если оба числа x и y не делятся на 3, то левая часть не делится на 3, так как в этом случае остаток от деления x^2 и y^2 на 3 равен 1. И в этом случае нет целочисленных решений.

4. Найти целочисленные решения уравнения

$$3x^2-8xy-16y^2=19.$$

Решение. Разложив левую часть уравнения на множители (способом группировки либо с помощью решения квадратного уравнения относительно x или y), запишем уравнение в виде $(3x+4y)(x-4y)=19$.

Так как делителями числа 19 являются числа ±1, ±19, то искомое множество решений содержится в множестве всех целочисленных решений следующих систем уравнений:

$$1)\ \begin{cases}3x+4y=19,\\ x-4y=1;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}3x+4y=1,\\ x-4y=19;\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}3x+4y=-19,\\ x-4y=-1;\end{cases}\qquad 4)\ \begin{cases}3x+4y=-1,\\ x-4y=-19.\end{cases}$$

Первая и третья из этих систем имеют целочисленные решения $(5;\ 1)$ и $(-5;\ -1)$, остальные не имеют целочисленных решений.

5. Найти целочисленные решения уравнения

$$2x^2y^2+y^2=14x^2+25.$$

Решение. Выразив из уравнения y^2 через x^2, запишем его в виде $y^2=7+\dfrac{18}{2x^2+1}$.

Если $x=0$, то $y^2=25$, $y=\pm 5$. Если $x^2=1$, то $y^2=13$, а если $x^2=4$, то $y^2=9$, $y=\pm 3$. При других целых значениях x знаменатель дроби $\frac{18}{2x^2+1}$ больше числителя. Итак, уравнение имеет шесть целочисленных решений:

$$(0;\ 5),\ (0;\ -5),\ (2;\ 3),\ (2;\ -3),\ (-2;\ 3),\ (-2;\ -3).$$

6. Найти все пары целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} 17x^2+8xy+y^2=2, \\ (x-1)^2+(y+4)^2=1. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения следует, что $(x-1)^2 \leqslant 1$, или $|x-1| \leqslant 1$. Этому условию удовлетворяют целые числа $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Если $x=0$, то из второго уравнения находим $y=-4$. Пара чисел $(0;\ -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Если $x=1$, то $|y+4|=1$, откуда находим $y_1=-5$, $y_2=-3$. Обе пары чисел $(1;\ -5)$ и $(1;\ -3)$ удовлетворяют первому уравнению системы.

Наконец, если $x=2$, то $y=-4$. Пара чисел $(2;\ -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Итак, данная система имеет два целочисленных решения: $(1;\ -5)$ и $(1;\ -3)$.

Задания для самостоятельной работы

Найти все целочисленные решения уравнения (1—5).

1. $\boxed{3}$ 1) $5x-3y=13$; 2) $4x-5y=17$.

2. $\boxed{4}$ 1) $x^2=3y+5$; 2) $x^2=9y+8$.

3. $\boxed{5}$ 1) $2x^2y^2+y^2-6x^2-10=0$; 2) $3x^2y^2+4y^2=24x^2+48$.

4. $\boxed{5}$ 1) $5x^2+8xy-4y^2=17$; 2) $5y^2+8xy-4x^2=17$.

5. $\boxed{6}$ 1) $x^2-2xy+2y^2=4$; 2) $x^2+2xy+2y^2=4$.

6. $\boxed{5}$ Найти все пары целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие системе уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+xy-y^2=4, \\ (x-2)^2+(y-1)^2=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+8xy+17y^2=2, \\ (x+4)^2+(y-1)^2=1. \end{cases}$

7. $\boxed{8}$ Доказать, что не имеет решений в целых числах уравнение:

1) $2001x^2+2002=y^2$;

2) $2002x^2+2003=y^2$.

Контрольная работа

1. Найти остаток от деления числа

$$a = 2^{227} + 3^{94} + 7^{57}\ [a = 2^{307} + 3^{90} + 7^{97}] \text{ на } 10.$$

2. Выяснить, делится ли число

$$a = 10^{80} - 73^{3}\ [a = 10^{24} + 120] \text{ на } 9[11].$$

3. Найти остаток от деления числа a на m, если:
   1) $a = 5 \cdot 2^{81} + 3 \cdot 16^{37}$, $m = 17$
   $[a = 5 \cdot 2^{145} + 7 \cdot 29^{11}$, $m = 15]$;
   2) $a = 7 \cdot 2^{161} + 5 \cdot 18^{75}$, $m = 17$
   $[a = 7 \cdot 2^{361} + 5 \cdot 18^{97}$, $m = 17]$.
4. Найти все целочисленные решения уравнения:
   1) $5x + 3y = 17$
   $[7x - 9y = 23]$;
   2) $16x^2 + 8xy - 3y^2 + 19 = 0$
   $[5x^2 - 8xy - 4y^2 = 17]$.

III Многочлены. Алгебраические уравнения

§ 1. Многочлены от одной переменной

Примеры с решениями

1. Найти числа a, b и c из равенства

$$(x-2)(3x^3+ax^2-bx+1)=$$
$$=3x^4-4x^3-9x^2+cx-2.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$(x-2)(3x^3+ax^2-bx+1)=$$
$$=3x^4+ax^3-bx^2+x-6x^3-2ax^2+2bx-2=$$
$$=3x^4+(a-6)x^3-(b+2a)x^2+(1+2b)x-2.$$

Пользуясь определением равных многочленов, получаем

$$a-6=-4,$$
$$b+2a=9,$$
$$1+2b=c,$$

откуда $a=2$, $b=5$, $c=11$.

2. Найти остаток от деления многочлена

$$5x^4-12x^3+3x^2-27x+4$$

на двучлен

$$x^2-3x.$$

Решение. Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,5x^4-12x^3+3x^2-27x+4 & x^2-3x \\ \cline{2-2}
5x^4-15x^3 & 5x^2+3x+12 \\ \cline{1-1}
-\,3x^3+3x^2 & \\
3x^3-9x^2 & \\ \cline{1-1}
-\,12x^2-27x & \\
12x^2-36x & \\ \cline{1-1}
9x+4 &
\end{array}$$

Ответ. $9x+4$.

Задания для самостоятельной работы

Найти частное и ответ проверить умножением (1—2).

1. $\boxed{4}$ 1) $(x^2-x-56):(x-8)$; 2) $(x^2-3x-54):(x+6)$;
3) $(2x^2-9x+4):(x-4)$; 4) $(3x^2-11x+6):(x-3)$.

2. $\boxed{5}$ 1) $(2x^3-3x^2+3x-1):(2x-1)$;
2) $(2x^3+3x^2-3x-2):(2x+1)$;
3) $(6x^3-7x^2-6x-1):(3x+1)$;
4) $(6x^3+4x^2-11x+3):(3x-1)$.

3. $\boxed{6}$ Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:
1) $P(x)=6x^5-15x^4-12x^3+44x^2-34x-1$, $Q(x)=2x^2-5x$;
2) $P(x)=6x^5-8x^4+15x^3-41x^2+27x+2$, $Q(x)=3x^2-4x$;
3) $P(x)=4x^7-x^5+3x^4-3x^3+5x^2-2x$, $Q(x)=x^3-x+1$;
4) $P(x)=3x^7-10x^5+4x^4+8x^3-5x^2+x-1$,
$Q(x)=x^3-2x+1$.

4. $\boxed{6}$ Установить, при каком значении a многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, если:
1) $P(x)=6x^2-7x+a$, $Q(x)=3x-5$;
2) $P(x)=12x^2-5x+a$, $Q(x)=3x-2$;
3) $P(x)=8x^2+ax-7$, $Q(x)=2x-7$;
4) $P(x)=9x^2+ax-5$, $Q(x)=3x+5$;
5) $P(x)=9x^2+ax-10$, $Q(x)=3x+5$;
6) $P(x)=8x^2+ax-15$, $Q(x)=4x-3$.

5. $\boxed{7}$ Найти числа a, b и c из равенства:
1) $(x+3)(2x^2+ax+b)=2x^3+cx^2-14x+3$;
2) $(x-2)(4x^2+ax+b)=4x^3-5x^2+cx+4$;
3) $(x^2+ax+1)(bx^2+x-2)=2x^4-x^3-x^2+cx-2$;
4) $(x^2+ax+2)(bx^2-x+4)=2x^4+cx^3+11x^2-14x+8$.

6. $\boxed{9}$ Не выполняя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:
1) $P(x)=5x^6-2x^5-4x^4+2x^3-2x^2+2x$, $Q(x)=x^2-1$;
2) $P(x)=3x^6-2x^5+x^4+x^3-4x^2+4x+1$, $Q(x)=x^2-1$;
3) $P(x)=x^4-x^3-x^2+6x-4$, $Q(x)=x^2+x-2$;
4) $P(x)=x^4-3x^3+x^2-2x-3$, $Q(x)=x^2-2x-3$.

7. $\boxed{9}$ Установить, при каких натуральных значениях n является целым числом выражение:
1) $\dfrac{3n^2-8n+7}{n-2}$; 2) $\dfrac{2n^2-9n+4}{n-3}$.

§ 2. Схема Горнера

Пример с решением

Разделить многочлен $3x^3+x^2-8x-1$ на двучлен $x+2$ по схеме Горнера.

Решение. Заполним таблицу, зная, что $a=-2$, $a_0=3$, $a_1=1$, $a_2=-8$, $a_3=-1$.

	3	1	-8	-1
-2	3	$1+(-2)\cdot 3=-5$	$-8+(-2)(-5)=2$	$-1+(-2)\cdot 2=-5$

Таким образом, $3x^3+x^2-8x-1=(x+2)(3x^2-5x+2)-5$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ По схеме Горнера найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)$, если:
   1) $P(x)=2x^3+5x^2+3$, $Q(x)=x+3$;
   2) $P(x)=3x^3+11x^2-2x+5$, $Q(x)=x+4$;
   3) $P(x)=3x^4-11x^3-6x^2+9x+1$, $Q(x)=x-4$;
   4) $P(x)=2x^4-9x^3+10x^2-4x+7$, $Q(x)=x-3$.
2. $\boxed{6}$ По схеме Горнера найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)$, если:
   1) $P(x)=5x^3-13x^2+5x+5$, $Q(x)=x-2$;
   2) $P(x)=6x^3-11x^2+3x+6$, $Q(x)=x-1$;
   3) $P(x)=2x^4+11x^3-3x^2+17x-13$, $Q(x)=x+6$;
   4) $P(x)=3x^4+14x^3-7x^2-9x-1$, $Q(x)=x+5$.

§ 3. Многочлен $P(x)$ и его корень. Теорема Безу

Примеры с решениями

1. Найти такое число m, чтобы многочлен $P(x)=$ $=x^5+3x^4-mx^2-2x-m$ делился на двучлен $x+2$.

Решение. Если многочлен делится на двучлен $x+2$, то остаток от деления равен нулю, а по теореме Безу остаток равен значению этого многочлена при $x=-2$, следовательно, $P(-2)=0$. Составим уравнение относительно m: $(-2)^5+3(-2)^4-m(-2)^2-2(-2)-m=0$, откуда $m=4$.

2. Найти все корни многочлена

$$P(x)=2x^4-x^3-mx^2-nx+k,$$

если один из его корней равен 3, а остаток от деления $P(x)$ на x^2-2 равен $-7x-14$.

Решение. $P(3)=0$ по определению корня многочлена, откуда $-9m-3n+k+135=0$. Выполним деление многочлена $P(x)$ (уголком) на x^2-2. Найдем остаток $-(n+2)x+k-2m+8$, откуда $-(n+2)=-7$, $k-2m+8=-14$. Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases}-(n+2)=-7,\\ k-2m+8=-14,\\ -9m-3n+k+135=0.\end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим $n=5$, $m=14$, $k=6$, т. е. многочлен можно записать в виде $P(x)=2x^4-x^3-14x^2-5x+6$. Для нахождения корней попробуем разложить многочлен на множители. Так как один из корней равен 3, то многочлен должен делиться на двучлен $x-3$. Выполнив деление уголком, получим многочлен $2x^3+5x^2+x-2$. Представим $5x^2$ в виде суммы $4x^2+x^2$ и разложим на множители:

$$2x^3+4x^2+x^2+x-2=2x^2(x+2)+(x^2+x-2)=$$
$$=2x^2(x+2)+(x+2)(x-1)=(x+2)(2x^2+x-1)=$$
$$=2(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, нашли еще три корня многочлена: -2, -1, $\frac{1}{2}$.

Ответ: -2, -1, $\frac{1}{2}$, 3.

Задания для самостоятельной работы

Найти корни многочлена $P(x)$ (1—3).

1. $\boxed{3}$ 1) $P(x)=6x^2+13x+6$; 2) $P(x)=-15x^2+13x-20$.
2. $\boxed{3}$ 1) $P(x)=2x^3-3x^2-2x$; 2) $P(x)=3x^3+8x^2-3x$.
3. $\boxed{4}$ 1) $P(x)=6x^3+11x^2-x+2$; 2) $P(x)=6x^3-17x^2-4x+3$.

Не выполняя деления, выяснить, делится ли многочлен $P(x)$ на двучлен $x-a$ (4—5).

4. $\boxed{4}$ 1) $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$, $a=-2$;
   2) $P(x)=3x^3-14x^2+5x+12$, $a=4$.
5. $\boxed{4}$ 1) $P(x)=x^4-3x^3-x^2-x+1$, $a=-3$;
   2) $P(x)=2x^4-x^3+5x^2+x-6$, $a=1$.

Не выполняя деления, найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ (**6—8**).

6. $\boxed{4}$ 1) $P(x)=x^4+3x^3-x+2,\ a=-1;$

2) $P(x)=x^3-5x^2-3x+7,\ a=3.$

7. $\boxed{5}$ 1) $P(x)=2x^3-x^2+7x-9,\ a=4;$

2) $P(x)=3x^4+2x^3-x-3,\ a=-2.$

8. $\boxed{8}$ 1) $P(x)=x^4-2x^3+3x^2-x+2,\ a=\frac{1}{2};$

2) $P(x)=x^4+3x^3-x^2-2x+7,\ a=\frac{2}{3}.$

Найти такое целое число n, чтобы многочлен $P(x)$ делился на двучлен $x-a$ (**9—10**).

9. $\boxed{6}$ 1) $P(x)=x^3+nx^2-2nx-5,\ a=5;$

2) $P(x)=x^3+nx^2-25x+3n,\ a=3.$

10. $\boxed{7}$ 1) $P(x)=nx^4+4nx^3+x^2+3x-2n,\ a=4;$

2) $P(x)=nx^4+8x^3-nx^2+7x+7n,\ a=-3.$

11. $\boxed{8}$ Найти такие значения a, b и c, при которых многочлен $P(x)$ делится на двучлен $x-a$, а остаток от деления $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ равен двучлену $bx+d$:

1) $P(x)=ax^4+bx^3-cx-2,\ b=1,\ d=1;$
$Q(x)=x^2+2;\ -10x+2;$

2) $P(x)=ax^4+bx^3-3x^2+cx-5,\ b=1,\ d=5;$
$Q(x)=x^2-3;\ -18x+4.$

§ 4. Алгебраическое уравнение. Следствия из теоремы Безу

Задания для самостоятельной работы

Не решая уравнения, назвать хотя бы один его корень (**1—3**).

1. $\boxed{4}$ 1) $2x^4-5x^3+x^2-9x=0;$

2) $7x^5+5x^3-8x^2-x=0.$

2. $\boxed{4}$ 1) $x^5-2x^4+3x-2=0;$

2) $x^5+3x^4+3x^3+1=0.$

3. $\boxed{4}$ 1) $x^3+3x^2+x-2=0;$

2) $x^4-4x^3+6x^2-3x-2=0.$

Решить уравнение, если известен один из его корней (**4—5**).

4. $\boxed{5}$ 1) $2x^4-x^3-5x^2+2x+2=0,\ x_1=-\frac{1}{2};$

2) $3x^4+4x^3-2x^2-12x-3=0,\ x_1=-\frac{1}{3}.$

5. $\boxed{7}$ 1) $2x^5+3x^4-16x^3-9x^2+32x-12=0$, $x_1=-3$;

2) $3x^5-2x^4-22x^3-4x^2+19x+6=0$, $x_1=-2$.

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$, если при делении этого многочлена на многочлен $Q(x)$ получается остаток $R(x)$ **(6—8)**.

6. $\boxed{6}$ 1) $a=2$, $Q(x)=x^2-2x$, $R(x)=5-x$;

2) $a=-2$, $Q(x)=4-x^2$, $R(x)=x+1$.

7. $\boxed{6}$ 1) $a=1$, $Q(x)=x^3-1$, $R(x)=x^2-x+4$;

2) $a=-1$, $Q(x)=x^3+x^2$, $R(x)=5+x^2$.

8. $\boxed{6}$ 1) $a=-2$, $Q(x)=x^4+2x^3$, $R(x)=x^3-8$;

2) $a=-2$, $Q(x)=x^4-4x^2$, $R(x)=x^3+8$.

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x-a)\,Q(x)$, если при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ остаток равен b, а при делении $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ остаток равен $R(x)$ **(9—10)**.

9. $\boxed{7}$ 1) $a=-3$, $b=1$, $Q(x)=x^2-1$, $R(x)=2x+1$;

2) $a=2$, $b=5$, $Q(x)=x^2-1$, $R(x)=x$.

10. $\boxed{7}$ 1) $a=2$, $b=19$, $Q(x)=x^2+x$, $R(x)=3x+1$;

2) $a=2$, $b=-18$, $Q(x)=x-x^2$, $R(x)=2-3x$.

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x-c)(x^2-1)$, если многочлен $P(x)$ делится на двучлен $x-c$, а остаток при делении $P(x)$ на x^2-1 равен $kx+b$ **(11—12)**.

11. $\boxed{8}$ 1) $c=-2$, $k=3$, $b=6$;

2) $c=3$, $k=5$, $b=1$.

12. $\boxed{8}$ 1) $c=4$, $k=2$, $b=7$;

2) $c=-4$, $k=2$, $b=3$.

13. $\boxed{8}$ Не выполняя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P(x)=x^5-3x^3+x-5$, $Q(x)=(x-1)(x+2)$;

2) $P(x)=x^6-4x^4+x^2+2$, $Q(x)=(x+1)(x-2)$.

14. $\boxed{8}$ Многочлен третьей степени $M(x)$ делится на многочлен $P(x)$, а при делении на многочлен $Q(x)$ дает в остатке многочлен $R(x)$. Найти многочлен $M(x)$, если:

1) $P(x)=x^2-3$, $Q(x)=x^2-1$, $R(x)=-2x$;

2) $P(x)=x^2-12$, $Q(x)=x^2+x$, $R(x)=-5{,}5x$.

§ 5. Решение алгебраических уравнений разложением на множители

Примеры с решениями

1. Решить разложением на множители уравнение
$$x^5-x^4-3x^3-2x^2+2x+6=0.$$

Решение. Пропорциональность коэффициентов многочлена дает возможность сгруппировать слагаемые в левой части уравнения:
$$(x^5-x^4-3x^3)-(2x^2-2x-6)=0,$$
$x^3(x^2-x-3)-2(x^2-x-3)=0$, $(x^3-2)(x^2-x-3)=0$. Получаем совокупность двух уравнений $x^3-2=0$, $x^2-x-3=0$. Таким образом, корнями уравнения являются действительные числа: $x_1=\sqrt[3]{2}$, $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

2. Решить уравнение
$$x^4+x^3-4x^2-x+3=0.$$

Решение. Многочлен $P(x)=x^4+x^3-4x^2-x+3$ имеет целые коэффициенты, а его свободный член не равен нулю. Поэтому целый корень многочлена, если он есть, содержится среди целых делителей свободного члена: ± 1, ± 3.

Так как $P(1)=0$, то многочлен, стоящий в левой части уравнения, делится на двучлен $x-1$ и число 1 является одним из корней уравнения. Выполнив деление многочлена $P(x)=x^4+x^3-4x^2-x+3$ на $x-1$, получим многочлен $Q(x)=x^3+2x^2-2x-3$. Число -1 — корень многочлена $Q(x)$, а значит, и многочлена $P(x)$. Выполнив деление многочлена $Q(x)$ на $x+1$ столбиком, в частном получим трехчлен x^2+x-3, корни которого равны $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. Таким образом, найдено четыре корня исходного уравнения: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

3. Решить уравнение
$$(x^2-x-2)^2+(x^2-x-2)(x+3)=20(x+3)^2.$$

Решение. Общих множителей у левой и правой частей уравнения нет, и $x=-3$ не является корнем уравнения. Разделив обе части уравнения на $(x+3)^2$, получим
$$\frac{(x^2-x-2)^2}{(x+3)^2}+\frac{x^2-x-2}{x+3}=20.$$

Обозначив $t=\frac{x^2-x-2}{x+3}$, получим уравнение $t^2+t-20=0$. Корни этого уравнения $t_1=4$, $t_2=-5$.

Если $t=4$, то $\frac{x^2-x-2}{x+3}=4$, $x^2-x-2=4(x+3)$, $x^2-5x-14=0$, $x_1=-2$, $x_2=7$.

Если $t=-5$, то $\frac{x^2-x-2}{x+3}=-5$, $x^2-x-2=-5(x+3)$, $x^2+4x+13=0$. Уравнение $x^2+4x+13=0$ не имеет действительных корней.

Ответ. $x_1=-2$, $x_2=7$.

4. Решить уравнение $(x^2-5x+4)(x-2)(x-5)=20$.

Решение. Сведем уравнение к квадратному введением нового неизвестного.

Так как $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$, то уравнение примет вид $(x-4)(x-1)(x-2)(x-5)=20$. Перемножив те двучлены, которые дадут одинаковые первые и вторые коэффициенты в полученных трехчленах (т. е. перемножив первый и третий, второй и четвертый двучлены), получим $(x^2-6x+8)(x^2-6x+5)=20$. Пусть $t=x^2-6x+5$, тогда $t^2+3t-20=0$, откуда $t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{89}}{2}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x^2-6x+\frac{13-\sqrt{89}}{2}=0,\ x^2-6x+\frac{13+\sqrt{89}}{2}=0.$$

Второе уравнение не имеет действительных корней, а корни первого уравнения равны $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-\frac{13-\sqrt{89}}{2}}=$ $=3\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{89}}{2}}$.

Ответ. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{89}}{2}}$.

5. Решить уравнение $2x^4-2x^3-11x^2+4x+8=0$.

Решение. Данное уравнение является возвратным: отношение крайних коэффициентов равно 4 (так как $8:2=4$), а отношение коэффициентов членов, равноудаленных от крайних членов, равно -2 (так как $4:(-2)=-2$), т. е. первое отношение является квадратом второго. Так как $x=0$ не является корнем уравнения, то, разделив это уравнение на x^2, получим

$$2x^2-2x-11+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}=0,$$

$$2\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{2}{x}\right)-11=0.$$

Пусть $x-\frac{2}{x}=t$, тогда $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$. Исходное уравнение запишем в виде $2(t^2+4)-2t-11=0$, $2t^2-2t-3=0$, откуда $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$.

Следовательно, уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x-\frac{2}{x}=\frac{1+\sqrt{7}}{2},\quad x-\frac{2}{x}=\frac{1-\sqrt{7}}{2}.$$

Корни первого уравнения равны $x_{1,2}=\frac{1+\sqrt{7}\pm\sqrt{40+2\sqrt{7}}}{4}$, а корни второго равны $x_{3,4}=\frac{1-\sqrt{7}\pm\sqrt{40-2\sqrt{7}}}{4}$.

Ответ. $x_{1,2}=\frac{1+\sqrt{7}\pm\sqrt{40+2\sqrt{7}}}{4}$, $x_{3,4}=\frac{1-\sqrt{7}\pm\sqrt{40-2\sqrt{7}}}{4}$.

6. Решить уравнение $(x^2+5x+6)(x^2+10x+6)+6x^2=0$.

Решение. Заметим, что первые коэффициенты и свободные члены в каждом из трехчленов равны и $x=0$ не является корнем уравнения. Разделив уравнение на x^2, получим

$$\frac{x^2+5x+6}{x}\cdot\frac{x^2+10x+6}{x}+6=0,$$

$$\left(x+\frac{6}{x}+5\right)\left(x+\frac{6}{x}+10\right)+6=0.$$

Пусть $x+\frac{6}{x}+5=t$. Тогда $x+\frac{6}{x}+10=t+5$, $t(t+5)+6=0$, $t^2+5t+6=0$, откуда $t_1=-2$, $t_2=-3$.

Задача сводится к решению совокупности двух уравнений

$$x+\frac{6}{x}+5=-2,\quad x+\frac{6}{x}+5=-3.$$

Корни первого уравнения $x_1=-1$, $x_2=-6$, корни второго $x_{3,4}=-4\pm\sqrt{10}$.

Ответ. $x_1=-1$, $x_2=-6$, $x_{3,4}=-4\pm\sqrt{10}$.

Задания для самостоятельной работы

Найти корни многочлена (**1**—**2**).

1. $\boxed{4}$ 1) $x^3-6x^2+3x+10$;

2) $x^3+4x^2-7x-10$.

2. $\boxed{5}$ 1) $x^5+x^4-6x^3-x^2-x+6$;

2) $x^5+x^4-6x^3+x^2-x-6$.

Решить уравнение (3—4).

3. $\boxed{5}$ 1) $x^3-3x^2+2=0$;

2) $x^3+3x^2-2=0$.

4. $\boxed{6}$ 1) $x^4-2x^3-5x^2+8x+4=0$;

2) $x^4+x^3-5x^2-3x+6=0$.

Решить уравнение (5—8).

5. $\boxed{7}$ 1) $(x^2+x+4)(x^2+2x+4)=30x^2$;

2) $(x^2-x-2)(x^2-3x-18)=16x^2$.

6. $\boxed{7}$ 1) $(x-1)(x+2)(x^2+4x-32)=52x^2$;

2) $(x-6)(x^3-6x^2+11x-6)+6x^2=0$.

7. $\boxed{7}$ 1) $(x^3+7x^2+12x)(x-1)=21$;

2) $(x^3-6x^2+11x-6)(x-4)=25$.

8. $\boxed{7}$ 1) $6x^5-11x^4-11x+6=0$; 2) $78x^6-133x^5+133x-78=0$.

При каких значениях a уравнение имеет ровно три корня (9—10)?

9. $\boxed{8}$ 1) $(a^3+8)x^4+(a^2-1)x^2+a+\sqrt{a^2}=0$;

2) $(4-a^2)x^4+(a^2+3a+2)x^2-a-\sqrt{a^2}=0$.

10. $\boxed{8}$ 1) $(a^2-9)x^4+(a^3-8)x^2+a+\sqrt{a^2+2a+1}+1=0$;

2) $\left(a-\frac{1}{a}\right)x^4+\frac{a+1}{a-3}x^2+a+\sqrt{a^2-4a+4}-2=0$.

Найти значения a, при которых уравнение имеет единственный корень (11—12).

11. $\boxed{9}$ 1) $(1-a^2)x^4+(a-3)x+a+2-\sqrt{a^2+4a+4}=0$;

2) $(8a^3+1)x+(a^2-a-2)x^2+a-3+\sqrt{a^2-6a+9}=0$.

12. $\boxed{9}$ 1) $\frac{a-1}{a+2}x^4+(a^2-2a-3)x^2+2-a-\sqrt{4-4a+a^2}=0$;

2) $(a^2-2a)x^4+\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2+a+1-\sqrt{a^2+2a+1}=0$.

§ 6. Делимость двучленов $x^m \pm a^m$ на $x \pm a$

Примеры с решениями

1. Доказать равенство

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}). \qquad (1)$$

Решение. Рассмотрим сумму n первых членов геометрической прогрессии, в которой первый член равен 1, а знаменатель равен t, т. е. сумму $S_n=1+t+\ldots+t^{n-1}$, где $t\neq 0$, $t\neq 1$.

Тогда $S_n = \frac{1-t^n}{1-t}$, откуда

$$1 - t^n = (1-t)(1+t+\ldots+t^{n-1}). \qquad (2)$$

Чтобы воспользоваться формулой (2), преобразуем левую часть равенства (1):

$$x^n - a^n = x^n\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^n\right). \qquad (3)$$

Полагая $\frac{a}{x} = t$, из равенств (3) и (2) находим

$$x^n - a^n = x\left(1 - \frac{a}{x}\right)x^{n-1}\left(1 + \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right) =$$
$$= (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Формула (1) доказана.

2. Доказать, что при любых $n \in N$ и $m \in N$ многочлен $P(x) = x^{m+n} - x^n - x^m + 1$ делится на $(x-1)^2$.

Решение. Так как $P(x) = x^{m+n} - x^n - (x^m - 1) = x^n(x^m - 1) - (x^m - 1) = (x^m - 1)(x^n - 1)$, многочлены $x^m - 1$ и $x^n - 1$ делятся на $x - 1$, то многочлен $P(x)$ делится на $(x-1)^2$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{7}$ Используя результат примера **1**, доказать формулы
$a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a-b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + \ldots + ab^{2n-1} + b^{2n})$,
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

2. $\boxed{7}$ Доказать, что при любом $n \in N$ многочлен $P(x) = x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n - x^2 + 2x - 1$ делится на $(x-1)^3$.

3. $\boxed{8}$ Доказать, что при любых $m \in N$ и $n \in N$ многочлен $P(x) = x^{2m+n+1} + x^n - x^{2m+1} - 1$ делится на $x^2 - 1$.

4. $\boxed{9}$ Доказать, что при любых $n \in N$ и $m \in N$ многочлен $P(x) = x^{m+n+1} - x^{m+n} - x^{m+1} - x^{n+1} + x^n + x^m + x - 1$ делится на $(x-1)^3$.

§ 7. Симметрические многочлены

Примеры с решениями

1. Пусть $x + y = u$, $xy = v$, $S_n = x^n + y^n$. Докажем рекуррентную формулу

$$S_n = uS_{n-1} - vS_{n-2}, \qquad (1)$$

позволяющую последовательно выразить через элементарные симметрические многочлены $x + y$ и xy суммы S_3, S_4, S_5, S_6 и т. д.

Решение. Воспользуемся равенством

$$(x+y)(x^{n-1}+y^{n-1})=x^n+y^n+xy(x^{n-2}+y^{n-2}). \qquad (2)$$

Так как $x+y=u$, $xy=v$, $S_k=x^k+y^k$, то из равенства (2) получаем $uS_{n-1}=S_n+vS_{n-2}$, откуда следует формула (1).

2. Решить симметрическую систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Решение. Так как $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$, где $u=x+y$, $v=xy$, то

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=u^4-4u^2v+2v^2$$

и данная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} u^4-4u^2v+3v^2=91, \\ u^2=7+3v. \end{cases}$$

Исключая из этой системы u^2, получаем $(7+3v)^2-$ $-4(7+3v)v+3v^2=91$, откуда $14v=42$, $v=3$, $u^2=16$. Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3 \end{cases}$$

и имеет 4 решения: (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1).

3. Пусть $x+y+z=u$, $xy+yz+zx=v$, $xyz=w$, выразим симметрический многочлен $x^3+y^3+z^3$ через элементарные симметрические многочлены u, v, w.

Решение. Используя равенство $(x+y+z)^3=$ $=((x+y)+z)^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3=x^3+y^3+$ $+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+6xyz+3y^2z+3xz^2+3yz^2=x^3+y^3+$ $+z^3+3xy(x+y+z)+3xz(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz=x^3+$ $+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz$, получаем

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz, \qquad (3)$$

т. е. $x^3+y^3+z^3=u^3-3uv+3w$.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{6}$ Выразить симметрический многочлен P через симметрические многочлены $u=x+y$, $v=xy$, если:

1) $P=x^5+y^5$;

2) $P=x^6+y^6$.

2. $\boxed{7}$ Решить симметрическую систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x^3+y^3)=65; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{xy}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2}, \\ x^2y+xy^2=2. \end{cases}$

3. $\boxed{7}$ Разложить на множители симметрический многочлен P, если:

1) $P=x^2+xy^2+x^2y+y^2+x+y+2xy$;

2) $P=x^2y+xy^2+x^2+x+y^2+y+3xy$.

§ 8. Многочлены от нескольких переменных

Примеры с решениями

1. Разложить на множители однородный многочлен $P=8x^2+2xy-3y^2$.

Решение. Преобразуем многочлен $P=8x^2+6xy-4xy-3y^2=2x(4x+3y)-y(4x+3y)$. Отсюда

$$P=(4x+3y)(2x-y).$$

2. Разложить на множители многочлен $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$ и доказать, что для всех неотрицательных u, v, w справедливо неравенство

$$\frac{u+v+w}{3}\geqslant\sqrt[3]{uvw},$$

связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое трех неотрицательных чисел.

Решение. В § 7 (пример 3, формула (3)) было получено равенство, которое можно записать в виде

$$P=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz),$$

откуда следует, что $P=(x+y+z)((x+y+z)^2-3(xy+xz+yz))$, где $(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=$ $=\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)$.

Следовательно,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2).$$

Если $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$, то $x^3+y^3+z^3\geqslant3xyz$. Полагая $x^3=u$, $y^3=v$, $z^3=w$, получаем $\frac{u+v+w}{3}\geqslant\sqrt[3]{uvw}$.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{5}$ Разложить на множители многочлен P, если:
1) $P=3x^2-2xy-8y^2$; 2) $P=10x^2-13xy-3y^2$.

Разложить на множители многочлен (2—3).

2.$\boxed{5}$ 1) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz$;
2) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz$.

3.$\boxed{6}$ 1) $x^3+xy(x+y)+y^3+yz(y+z)+z^3+zx(z+x)$;
2) $x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2-x^2y^3-y^2z^3-z^2x^3$.

§ 9. Формулы сокращенного умножения для старших степеней. Бином Ньютона

Примеры с решениями

1. Записать разложение бинома $\left(2a-\frac{1}{2a}\right)^5$.

Решение. $\left(2a-\frac{1}{2a}\right)^5=C_5^0(2a)^5+C_5^1(2a)^4\left(-\frac{1}{2a}\right)+$
$+C_5^2(2a)^3\left(-\frac{1}{2a}\right)^2+C_5^3(2a)^2\left(-\frac{1}{2a}\right)^3+C_5^4(2a)\left(-\frac{1}{2a}\right)^4+C_5^5\left(-\frac{1}{2a}\right)^5=$
$=1\cdot 32a^5+5\cdot 16a^4\left(-\frac{1}{2a}\right)+10\cdot 8a^3\cdot\frac{1}{4a^2}+10\cdot 4a^2\cdot\left(-\frac{1}{8a^3}\right)+$
$+5\cdot 2a\cdot\frac{1}{16a^4}+1\cdot\left(-\frac{1}{32a^5}\right)=32a^5-40a^3+20a-\frac{5}{a}+\frac{5}{8a^3}-\frac{1}{32a^5}$.

2. Найти четвертый член разложения $(2-\sqrt{x})^{11}$.

Решение. Полагая в формуле (1) $x=2$, $a=-\sqrt{x}$, $m=11$, $n+1=4$ (откуда $n=3$) и пользуясь формулой общего члена разложения (2), находим

$$T_4=T_{3+1}=C_{11}^3\cdot 2^{11-3}(-\sqrt{x})^3=\frac{11!}{(11-3)!3!}\cdot 2^8(-x\sqrt{x})=$$
$$=\frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 256(-x\sqrt{x})=-165\cdot 256x\sqrt{x}=-42\,240x\sqrt{x}.$$

3. Найти член разложения бинома $(\sqrt{x}-x)^{10}$, содержащий x^7.

Решение. Пусть x^7 содержится в члене T_{n+1}. Пользуясь формулой (2) при $m=10$, найдем номер n искомого члена разложения из равенства $(\sqrt{x})^{10-n}\cdot x^n=x^7$, где $0\leqslant n\leqslant 10$. Преобразовав левую часть этого равенства, получим $x^{5+\frac{n}{2}}=x^7$, откуда $5+\frac{n}{2}=7$, $n=4$. Таким образом, искомый член $T_{4+1}=T_5=C_{10}^4x^7=210x^7$.

4. Найти коэффициент при x^8 многочлена
$$P(x)=(1+x^2-x^3)^9.$$

Решение. Обозначим $x^2-x^3=t$, тогда
$$t^3=x^6(1-x)^3=x^6-3x^7+3x^8+\ldots,\quad t^4=x^8(1-x)^4=x^8+\ldots .$$
Так как t, t^2 — многочлены степени не выше семи, а t^5, t^6, ..., t^9 — многочлены степени не ниже десяти, то x^8 содержат лишь четвертый и пятый члены разложения бинома $(1+t)^9$.

Пусть a — коэффициент при x^8 многочлена $P(x)$. Тогда $a=3C_9^3+C_9^4$.

Задания для самостоятельной работы

Записать разложение бинома (1—2).

1. $\boxed{4}$ 1) $(1+3a)^4$; 2) $(3b+1)^4$; 3) $(2a-b)^5$; 4) $(x-2y)^5$.

2. $\boxed{5}$ 1) $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)^6$; 2) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)^6$; 3) $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^7$; 4) $\left(\frac{1}{2y}-y\right)^8$.

3. $\boxed{6}$ Найти шестой член разложения:

1) $(a-\sqrt{a})^{11}$; 2) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{a}\right)^{10}$.

4. $\boxed{6}$ Найти седьмой член разложения:

1) $\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{x}\right)^{12}$; 2) $\left(y^2+\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^{11}$.

5. $\boxed{8}$ Найти член разложения бинома:

1) $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})^8$, содержащий a^3;

2) $(\sqrt[3]{b}+\sqrt{b})^{12}$, содержащий b^7;

3) $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x;

4) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, содержащий x^{-1}.

6. $\boxed{9}$ 1) Найти четвертый член разложения бинома $\left(\frac{\sqrt{a}}{b}+\frac{\sqrt{b}}{a}\right)^m$, если коэффициент третьего члена равен 78.

2) Найти пятый член разложения бинома $\left(\frac{\sqrt{x}}{y}+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^m$, если коэффициент третьего члена равен 91.

7. $\boxed{8}$ Найти члены, не содержащие иррациональности, в разложении бинома S, если:

1) $S=\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$;

2) $S=\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

8. $\boxed{9}$ Найти коэффициент при x^3 многочлена $P(x)$, если:

1) $P(x)=(1-x+x^2)^3$;

2) $P(x)=(1+2x-3x^2)^4$.

§ 10. Системы уравнений

Примеры с решениями

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-4x-2y-1=0, \\ y^2-2x+6y+14=0. \end{cases}$$

Решение. Сложив уравнения системы, получим $(x-3)^2+(y+2)^2=0$, откуда $x=3$, $y=-2$. Пара чисел $x=3$ и $y=-2$, как показывает проверка, образует решение системы.

Ответ. $(3;\ -2)$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}-2xy=16, \\ \dfrac{y^3}{2x}+3xy=25. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}=16+2xy, & (1) \\ \dfrac{y^3}{x}=50-6xy. & (2) \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение

$$13(xy)^2-4xy-800=0, \qquad (3)$$

которое вместе с одним из уравнений системы (1)—(2) образует систему, равносильную системе (1)—(2).

Из уравнения (3) находим $xy=\dfrac{2\pm\sqrt{4+10400}}{13}=\dfrac{2\pm102}{13}$, откуда $xy=8$ или $xy=-\dfrac{100}{13}$.

Если $xy=8$, то из уравнения (1) следует, что $x^4=2^8$, откуда $x_1=4$, $x_2=-4$, и тогда $y_1=2$, $y_2=-2$.

Если $xy=-\frac{100}{13}$, то $x^4=-\frac{1800}{169}$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. (4; 2), (−4; −2).

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+\dfrac{y^4}{x}=\dfrac{x^2}{y}+y^2, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}=0. \end{cases}$$

Решение. Так как $xy\neq 0$, то систему можно записать в виде

$$\begin{cases} y^2(x^2+y^3)=x(x^2+y^3), \\ x^2+y^3=-4y. \end{cases}$$

Если $x^2+y^3=0$, то из второго уравнения следует, что $y=0$, что невозможно.

Если $y^2=x$, то из второго уравнения системы следует, что $y^3+y^2+4=0$ или $(y+2)(y^2-y+2)=0$, откуда $y=-2$ (уравнение $y^2-y+2=0$ не имеет действительных корней). Итак, $y=-2$, $x=y^2=4$.

Ответ. (4; −2).

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5+4x^4+5y^2=0, \\ x^3-\dfrac{y^3}{x^2}=xy-y^2. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение исходной системы равносильно каждому из уравнений

$$x^2\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)=y\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right),\ (x^2-y)\left(x+\frac{y^2}{x^2}\right)=0.$$

а) Если $x^2=y$, то из первого уравнения исходной системы получаем $xy^2+4y^2+5y^2=0$, откуда следует, что либо $y=0$, либо $x=-9$. Но если $y=0$, то $x=0$, а при $x=0$ второе уравнение теряет смысл. Итак, $x=-9$, $y=x^2=81$.

б) Если $x+\frac{y^2}{x^2}=0$, то $x^3+y^2=0$. Из первого уравнения системы находим $x^5+4x^4-5x^3=0$, $x^2+4x-5=0$ $(x\neq 0)$, откуда $x_1=-5$, $x_2=1$.

Пусть $x=-5$, тогда $y^2=125$, откуда $y=\pm 5\sqrt{5}$.

Пусть $x=1$, тогда $y^2=-1$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Таким образом, система имеет три действительных решения: $(-9;\ 81)$, $(-5;\ 5\sqrt{5})$, $(-5;\ -5\sqrt{5})$.

Ответ. $(-9;\ 81)$, $(-5;\ 5\sqrt{5})$, $(-5;\ -5\sqrt{5})$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0, \\ x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из уравнений системы как квадратное относительно x или y. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x+2y+2)(x-y+6)=0, \\ (x+2y-3)(x+y+2)=0 \end{cases}$$

и равносильна совокупности четырех систем линейных уравнений.

Ответ. $(-2;\ 0)$, $(-3;\ 3)$, $(-4;\ 2)$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2x-y)^2=4+z^2, \\ (z-y)^2=2+4x^2, \\ (z+2x)^2=3+y^2. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $2x=u$, $-y=v$ и запишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} u+v-z=\dfrac{4}{u+v+z}, \\ v+z-u=\dfrac{2}{u+v+z}, \\ z+u-v=\dfrac{3}{u+v+z}. \end{cases} \tag{1}$$

Сложив уравнения системы (1) и обозначив $u+v+$ $+z=t$, получим уравнение $t=\frac{9}{t}$, откуда $t_1=3$, $t_2=-3$. Подставив найденные значения суммы $u+v+z$ в систему (1), найдем искомые значения u, v и z.

Если $t=u+v+z=3$, то

$$z=\frac{1}{2}\left(t-\frac{4}{t}\right)=\frac{5}{6},\ u=\frac{1}{2}\left(t-\frac{2}{t}\right)=\frac{7}{6},\ v=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{t}\right)=1,$$

$$x=\frac{u}{2}=\frac{7}{12},\ y=-v=-1.$$

Аналогично если $t=-3$, то $x=-\frac{7}{12}$, $y=1$, $z=-\frac{5}{6}$.

Ответ. $\left(\frac{7}{12};\ -1;\ \frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{12};\ 1;\ -\frac{5}{6}\right)$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz+11=0, \\ x^3-y^3+z^3-xyz-21=0, \\ y^3+z^3-x^3-xyz-3=0. \end{cases}$$

Решение. Сложив уравнения попарно, получим систему

$$\begin{cases} x^3=xyz+5, \\ y^3=xyz-4, \\ z^3=xyz+12, \end{cases}$$

равносильную исходной системе. Перемножим уравнения этой системы и обозначим $t=xyz$, тогда

$$t^3=t^3+13t^2-8t-240,$$

$$13t^2-8t-240=0, \text{ откуда } t_1=-4,\ t_2=\frac{60}{13}.$$

Если $t=-4$, то $x^3=1$, $y^3=-8$, $z^3=8$, откуда $x_1=1$, $y_1=-2$, $z_1=2$. Если $t=\frac{60}{13}$, то $x^3=\frac{125}{13}$, $y^3=\frac{8}{13}$, $z^3=\frac{216}{13}$, откуда $x_2=\frac{5}{\sqrt[3]{13}}$, $y_2=\frac{2}{\sqrt[3]{13}}$, $z_2=\frac{6}{\sqrt[3]{13}}$.

Ответ. $(1;\ -2;\ 2)$, $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{13}};\ \frac{2}{\sqrt[3]{13}};\ \frac{6}{\sqrt[3]{13}}\right)$.

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-6y+4z+xy=0, \\ 3x-5y+z-y^2=0, \\ x-4y-2z-yz=0. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из второго уравнения, умноженного на 2, сумму первого и третьего, получаем

$$y(z-x-2y)=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) вместе с первыми двумя уравнениями данной системы образует систему, равносильную данной. Из уравнения (1) следует, что либо $y=0$, либо

$$z=x+2y. \tag{2}$$

Если $y=0$, то $x=0$, $z=0$ и $(0;\ 0;\ 0)$ — решение исходной системы.

Если справедливо равенство (2), то из первых двух уравнений исходной системы получаем

$$\begin{cases} 9x+2y+xy=0, & (3) \\ 4x-3y-y^2=0. & (4) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (3), умноженного на 4, уравнение (4), умноженное на 9, находим

$$35y + 4xy + 9y^2 = y(4x + 9y + 35) = 0,$$

откуда

$$4x = -9y - 35. \qquad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) следует, что $y^2 + 12y + 35 = 0$, откуда $y_1 = -5$, $y_2 = -7$.

Если $y = -5$, то из уравнений (5) и (2) находим $x = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{15}{2}$, а если $y = -7$, то $x = 7$, $z = -7$.

Ответ. $(0;\ 0;\ 0)$, $\left(\frac{5}{2};\ -5;\ -\frac{15}{2}\right)$, $(7;\ -7;\ -7)$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy^2 + 8zx^2 - 4yz^2 = 6xyz, \\ 8xz^2 - 4yx^2 + 2zy^2 = 6xyz, \\ 2xy - 4xz + 2yz = 3. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$xy^2 + 4x^2z - 2yz^2 - 4xz^2 + 2x^2y - y^2z = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$y^2(x - z) + 4xz(x - z) + 2y(x^2 - z^2) = 0,$$

$$(x - z)(y(y + 2z) + 2x(y + 2z)) = 0,$$

$$(x - z)(y + 2z)(y + 2x) = 0. \qquad (1)$$

Заметим, что исходная система, равносильная системе, состоящей из ее первого и третьего уравнений и уравнения (1), равносильна также совокупности трех систем, получаемых присоединением к первому и третьему уравнениям соответственно уравнений

$$x = z, \qquad (2)$$

$$y = -2z, \qquad (3)$$

$$y = -2x. \qquad (4)$$

1) Подставляя из уравнения (2) $x = z$ в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$x(y^2 - 5xy + 4x^2) = x(y - x)(y - 4x) = 0,$$

$$4xy - 4x^2 = 4x(y - x) = 3. \qquad (5)$$

Если $x = 0$ или $y = x$, то из (5) следует, что $0 = 3$. Если $y = 4x$, то из (5) находим $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет два решения: $\left(\frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ -2;\ -\frac{1}{2}\right)$.

2) Подставляя $y=-2z$ (см. (3)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$z(2z^2+5xz+2x^2)=z(z+2x)(x+2z)=0,$$
$$-4z(z+2x)=3. \qquad (6)$$

Если $z=0$ или $z+2x=0$, то из уравнения (6) следует, что $0=3$. Если $x=-2z$, то из уравнения (6) находим $z^2=\frac{1}{4}$, $z=\pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет решения $\left(-1;\ -1;\ \frac{1}{2}\right)$ и $\left(1;\ 1;\ -\frac{1}{2}\right)$.

3) Подставляя $y=-2x$ (см. (4)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$x(2x^2+5xz+2z^2)=x(x+2z)(z+2x)=0,$$
$$-4x(x+2z)=3. \qquad (7)$$

Если $x=0$ или $x+2z=0$, то из уравнения (7) следует, что $0=3$. Если $z=-2x$, то из уравнения (7) находим $x^2=\frac{1}{4}$, $x=\pm\frac{1}{2}$. В этом случае система имеет два решения: $\left(\frac{1}{2};\ -1;\ -1\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2};\ -1;\ -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -2;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(1;\ 1;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\ -1;\ \frac{1}{2}\right)$.

Задания для самостоятельной работы

Решить систему уравнений **(1—15)**.

1. $\boxed{4}$ 1) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x+xy+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

2. $\boxed{5}$ 1) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ xy+x+y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

3. $\boxed{4}$ 1) $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17, \\ y^2-x^2=16; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-5y^2=-5. \end{cases}$

4. $\boxed{4}$ 1) $\begin{cases} x^2=3x+4y, \\ y^2=4x+3y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2=5x+3y, \\ y^2=3x+5y. \end{cases}$

5. $\boxed{4}$ 1) $\begin{cases} x^2-4x+4y+27=0, \\ y^2+2x+8y+10=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-6x-3y+1=0, \\ y^2+2x+9y+14=0. \end{cases}$

6. $\boxed{5}$ 1) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{2y}+3xy=25, \\ \dfrac{y^3}{x}-2xy=16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2}+xy=72, \\ \dfrac{y^4}{x^2}+xy=9. \end{cases}$

7. $\boxed{7}$ 1) $\begin{cases} 8x^2-2xy-y^2-30x-9y-8=0, \\ 8x^2+6xy+y^2-2y-8=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2-10x-8y-12=0, \\ 2x^2+3xy+y^2+x-y-6=0. \end{cases}$

8. $\boxed{6}$ 1) $\begin{cases} 2x^2y-x^4=3, \\ 2y^3-x^2y^2=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4+4x^2y=-3, \\ x^2y^2+4y^3=-1. \end{cases}$

9. $\boxed{6}$ 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+x^4y=\dfrac{1}{xy^2}+x^2, \\ \dfrac{1}{x}+x^2y^2+4y^2=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x^3y^3}+x^3y=\dfrac{1}{xy^2}, \\ \dfrac{1}{x}+x^3y^3+10y^2=0. \end{cases}$

10. $\boxed{7}$ 1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}(1-2y)=4x+2y, \\ 2x^2+xy=x+y^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}(3+2x)=3y-x, \\ y^2+2xy=3x^2-2y. \end{cases}$

11. $\boxed{5}$ 1) $\begin{cases} 2yz + \dfrac{3}{x} + 3 = 0, \\ xy + \dfrac{4}{z} - 2 = 0, \\ xz + \dfrac{2}{y} + 2 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2xy + \dfrac{3}{z} + 3 = 0, \\ xz + \dfrac{4}{y} - 2 = 0, \\ yz + \dfrac{2}{x} + 2 = 0. \end{cases}$

12. $\boxed{6}$ 1) $\begin{cases} (3y - x)^2 = 2 + z^2, \\ (3y + z)^2 = 3 + x^2, \\ (z - x)^2 = 4 + 9y^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + y)^2 = 3 + 4z^2, \\ (2z - y)^2 = 4 + x^2, \\ (2z - x)^2 = 2 + y^2. \end{cases}$

13. $\boxed{7}$ 1) $\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + 2y^3 + z^3 + 2xyz + 22 = 0, \\ 2x^3 - 2y^3 - z^3 + xyz + 2 = 0, \\ y^3 - x^3 - z^3 + xyz - 13 = 0. \end{cases}$

14. $\boxed{8}$ 1) $\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y + 2z - x^2 = 0, \\ 10x - 3y - 3z + xz = 0, \\ 16x - y + z - xy = 0. \end{cases}$

15. $\boxed{9}$ 1) $\begin{cases} 4zx^2 - yz^2 + 2xy^2 = 3xyz, \\ zy^2 + 2xz^2 - 4yx^2 = 3xyz, \\ 2xy - 2xz + yz = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8zx^2 - 2xy^2 + 4yz^2 = 6xyz, \\ 4yx^2 + 2zy^2 - 8xz^2 = 6xyz, \\ 2xy + 4xz - 2yz = 3. \end{cases}$

Контрольная работа

1. Найти частное

$$(2x^3-x^2-7x+2):(x-2) \quad [(2x^3-7x^2+4x-3):(x-3)].$$

2. Найти корни многочлена

$$x^4+2x^3-2x^2+2x-3 \quad [x^4+x^3-x^2+x-2].$$

3. Записать разложение бинома

$$(1-2a)^6 \quad [(3b-1)^5].$$

---

4. Найти числа a, b и c из равенства

$$(3x^2+ax-b)(x+2)=3x^3+cx^2+3x-2$$

$$[(4x^2-ax+b)(x-1)=4x^3-5x^2+cx-3].$$

5. С помощью схемы Горнера найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)$, если

$$P(x)=4x^4-18x^3-9x^2+2x-13,\ Q(x)=x+5$$

$$[P(x)=5x^4+21x^3+2x^2-10x-5,\ Q(x)=x+4].$$

6. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{10}\left[\left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^9\right]$, содержащий $\frac{1}{x^3}\left[\frac{1}{x}\right]$.

Глава IV Степень с действительным показателем

§ 1. Действительные числа

Пример с решением

Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является числом иррациональным.

Решение. Предположим, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$ — число рациональное и, очевидно, не равное нулю. Тогда верно равенство $\sqrt{3}=r-\sqrt{2}$, при возведении которого в квадрат получим $3=r^2-2r\sqrt{2}+2$, отсюда $\sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}$. Число, стоящее в правой части равенства,— рациональное, следовательно, рациональным является и число $\sqrt{2}$, что неверно. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{3}$ Привести пример рационального числа, заключенного между числами:
   1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$.
2. $\boxed{4}$ Привести пример иррационального числа, расположенного между числами:
   1) 0,5 и 0,6; 2) 0,7 и 0,8.
3. $\boxed{4}$ Привести пример рационального числа, расположенного между числами:
   1) π и 3,14; 2) $\sqrt{3}$ и 1,71.
4. $\boxed{5}$ Доказать, что число a — иррациональное, если:
   1) $a=\sqrt{3}$; 2) $a=\sqrt{5}$.
5. $\boxed{6}$ Доказать, что иррациональным является число:
   1) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.
6. $\boxed{6}$ Выяснить, может ли быть числом рациональным:
   1) сумма рационального и иррационального чисел;
   2) сумма двух иррациональных чисел.
7. $\boxed{6}$ Привести пример двух иррациональных чисел, таких, что сумма этих чисел:
   1) число иррациональное; 2) число рациональное.

8. $\boxed{6}$ Привести пример двух иррациональных чисел, таких, что произведение этих чисел:

1) число рациональное; 2) число иррациональное.

9. $\boxed{8}$ С помощью определения предела последовательности доказать, что число 1 является пределом последовательности, заданной формулой общего члена:

1) $b_n = 1 + \frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{1}{n^2} + 1$.

§ 2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Пример с решением

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ такова, что сумма ее членов, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма ее членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

Решение. Пусть q — знаменатель прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$. Тогда знаменатель прогрессии $b_2, b_4, b_6, \ldots$, как и знаменатель прогрессии $b_1, b_3, b_5, \ldots$, равен q^2. Следовательно, сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна $\frac{b_1}{1-q^2} = 36$, а сумма членов, стоящих на четных местах, равна $\frac{b_2}{1-q^2} = 12$, откуда получим систему уравнений $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} = 36, \\ \frac{b_2}{1-q^2} = 12. \end{cases}$

Выразим b_1 из первого уравнения $b_1 = 36(1-q^2)$ и подставим во второе уравнение, учитывая, что $b_2 = b_1 q$. Так как по условию $q \neq 1$, придем к уравнению $36q = 12$, откуда $q = \frac{1}{3}$, т. е. $b_1 = 36\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 32$.

Задания для самостоятельной работы

Выяснить, является ли геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_n, \ldots$ бесконечно убывающей (1—3).

1. $\boxed{5}$ 1) $b_2 = 2\sqrt{5}$, $b_7 = 3\sqrt{2}$; 2) $b_7 = 7$, $b_{10} = 5\sqrt{2}$.

2. $\boxed{6}$ 1) $b_{12} = 1 + \sqrt{3}$, $b_{15} = 2\sqrt{2}$; 2) $b_{10} = \sqrt{6}$, $b_{14} = 1 + \sqrt{2}$.

3. $\boxed{6}$ 1) $b_{11} = \frac{5}{1-\sqrt{2}}$, $b_{16} = \sqrt{29}$; 2) $b_6 = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$, $b_9 = \sqrt{14}$.

Выполнить действия, предварительно обратив бесконечные периодические десятичные дроби в обыкновенные (**4—5**).

4. $\boxed{7}$ 1) $\left((0{,}(6))^3-\sqrt{0{,}(4)}\right)^{-1}$;

2) $\left(\sqrt{0{,}(4)}+0{,}08(3)\right)\cdot 0{,}1(3)$.

5. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{0{,}1(6)\cdot 2{,}1(6)+2{,}(3)\cdot 0{,}(428571)}-0{,}1(6)$;

2) $\sqrt{0{,}(63)\cdot 2{,}(63)+0{,}(27)\cdot 3{,}(6)}-1{,}(63)$.

6. $\boxed{6}$ Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $2,\ \sqrt{3},\ \ldots$;

2) $-\sqrt{3},\ -\frac{2}{\sqrt{3}},\ \ldots$.

7. $\boxed{7}$ Найти сумму, все слагаемые которой, начиная с первого, являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-1+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\ldots$;

2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-1+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\ldots$.

8. $\boxed{7}$ Найти первые два члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $S=\frac{4}{7},\ S_6=0{,}5$;

2) $S=\frac{3}{13},\ S_8=\frac{5}{27}$.

9. $\boxed{8}$ Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна S, а сумма квадратов ее членов равна $S^{(2)}$. Найти сумму четвертых степеней членов этой прогрессии $S^{(4)}$, если:

1) $S=2,\ S^{(2)}=\frac{4}{3}$;

2) $S=3,\ S^{(2)}=1{,}8$;

3) $S=1+\sqrt{2},\ S^{(2)}=1$;

4) $S=3+\sqrt{3},\ S^{(2)}=6$.

10. $\boxed{7}$ В правильный треугольник со стороной, равной 4 см, вписан треугольник, стороны которого являются средними линиями данного, в полученный треугольник таким же способом вписан следующий и т. д. до бесконечности. Найти сумму:

1) периметров всех треугольников;

2) площадей всех треугольников.

§ 3. Арифметический корень натуральной степени

Пример с решением

Доказать, что при $x > |y|$ справедливо равенство

$$y\sqrt{2}\cdot\frac{2x+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}}=\sqrt{(x+y)^3}-\sqrt{(x-y)^3}.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства. Для преобразования знаменателя воспользуемся формулой

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

получим

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-(x^2-y^2)}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-(x^2-y^2)}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x+\sqrt{y^2}}{2}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{y^2}}{2}}=\sqrt{\frac{x+|y|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|y|}{2}}.$$

Выражение, стоящее в левой части, примет вид

$$y\sqrt{2}\cdot\frac{2x+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{\frac{x+|y|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|y|}{2}}}=2y\cdot\frac{2x+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x+|y|}+\sqrt{x-|y|}}.$$

Домножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное со знаменателем (избавимся от иррациональности в знаменателе), получим

$$2y\cdot\frac{(2x+\sqrt{x^2-y^2})(\sqrt{x+|y|}-\sqrt{x-|y|})}{(x+|y|)-(x-|y|)}=$$

$$=\frac{y}{|y|}(x+|y|+\sqrt{(x+|y|)(x-|y|)}+x-|y|)(\sqrt{x+|y|}-\sqrt{x-|y|})=$$

$$=\frac{y}{|y|}\cdot((\sqrt{x+|y|})^3-(\sqrt{x-|y|})^3).$$

Так как по условию $|y|<x$, то все рассуждения справедливы и полученное выражение равно правой части равенства. Действительно, при $0<y<x$ имеем $|y|=y$ и $\frac{y}{|y|}=1$. Если $y<0$, то $|y|=-y$ и тогда верно равенство

$$-((\sqrt{x-y})^3-(\sqrt{x+y})^3)=(\sqrt{x+y})^3-(\sqrt{x-y})^3.$$

Исходное равенство доказано.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—2).

1.$\boxed{5}$ 1) $(5\sqrt[3]{4}+0{,}5\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{500})\sqrt[3]{2}$;

2) $(5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250})\sqrt[3]{0{,}5}$.

2.$\boxed{5}$ 1) $\left(4\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{72}-13\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)\sqrt[3]{3}$;

2) $\sqrt[3]{9^{-1}}(\sqrt[3]{9}-7\sqrt[3]{72}+6\sqrt[3]{1125})$.

Выяснить, при каких значениях x выражение имеет смысл (3—5).

3.$\boxed{7}$ 1) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x-1}}$; 2) $\sqrt[6]{x\sqrt[5]{x+1}}$.

4.$\boxed{7}$ 1) $\sqrt[8]{x\sqrt[3]{1-x^2}}$; 2) $\sqrt[6]{x^5\sqrt[5]{x^2-1}}$.

5.$\boxed{7}$ 1) $\sqrt[8]{(x+1)\sqrt[7]{x-7}}$; 2) $\sqrt[8]{(8-x)\sqrt[5]{5-x}}$.

Вынести множитель из-под знака корня (6—7).

6.$\boxed{6}$ 1) $\sqrt{18(x-2)^5}$; 2) $\sqrt{1{,}25(x-3)^3}$.

7.$\boxed{6}$ 1) $\sqrt[3]{8x(x-2)^4}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}(x-3)^4}$.

Внести множитель под знак корня (8—10).

8.$\boxed{6}$ 1) $(x-y)\sqrt{\frac{3}{y^2-x^2}}$;

2) $\frac{1}{x+y}\sqrt{5x^2-5y^2}$.

9.$\boxed{7}$ 1) $\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}}$;

2) $\frac{x+y}{x-y}\sqrt[3]{\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^2}}$.

10.$\boxed{7}$ 1) $5a^n\sqrt[3]{\frac{bc^n}{25a^{3n-2}}}$;

2) $3x^{m+1}\sqrt[4]{\frac{yz^5}{27x^{4m+5}}}$.

Упростить выражение (11—13).

11. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt[4]{(1-\sqrt[3]{2})^4(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}$;

2) $\sqrt[6]{(1-\sqrt[3]{6})^6(1+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})}$.

12. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{(\sqrt[3]{7}-2)^2(4+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49})}$;

2) $\sqrt[4]{(3\sqrt[3]{2}-4)^4(16+6\sqrt[3]{16}+9\sqrt[3]{4})}$.

13. $\boxed{8}$ 1) $\sqrt[6]{(1-\sqrt[3]{6})^2}\,\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}}$;

2) $\sqrt[18]{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})^6}\,\sqrt[3]{2-2\sqrt[6]{72}+\sqrt[3]{9}}$.

14. $\boxed{8}$ **Выяснить, верно ли равенство:**

1) $\sqrt{21}-\sqrt{22-2\sqrt{21}}=\sqrt{7}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

2) $(\sqrt{7}+1)\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1=(\sqrt{8}-1)\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби (15—17).

15. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{m+n}{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$.

16. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+2}}$; 2) $\dfrac{3a(b+0,5)}{\sqrt{b+2}+\sqrt{1-b}}$.

17. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{(x-y)z}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}$; 2) $\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy}}$.

Проверить, является ли число a корнем данного уравнения (18—20).

18. $\boxed{8}$ 1) $x^4=4,\ a=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

2) $x^6=8,\ a=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

19. $\boxed{8}$ 1) $x^6=36$, $a=\sqrt[3]{1-\sqrt{7}}\,\sqrt[6]{8+2\sqrt{7}}$;

2) $x^6=49$, $a=\sqrt[3]{1-\sqrt{8}}\,\sqrt[6]{9+4\sqrt{2}}$.

20. $\boxed{8}$ 1) $x^4+4x^2-8=0$, $a=\sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}-\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}}$;

2) $x^4+4x^2-12=0$, $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}-\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$.

§ 4. Степень с рациональным и действительным показателями

Пример с решением

Упростить выражение $A=-(x+2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}-(x-2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}$ при $x\geqslant 1$, $x\neq 2$.

Решение. Так как в степень с дробным отрицательным показателем можно возводить только положительные числа, проверим, будет ли каждое из оснований степеней числом положительным. Так как $x\geqslant 1$, то основание степени первого слагаемого положительно, а знак основания степени второго слагаемого будет совпадать со знаком произведения:

$$(x+2\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})=x^2-4x+4=(x-2)^2>0$$

(по условию $x\neq 2$). Кроме того, $A<0$. По определению степени с дробным отрицательным показателем $A=-\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$. Чтобы избавиться от иррациональности, возведем A в квадрат, получим

$$A^2=\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}+\frac{2}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\,\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{x-2\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{2x}{x^2-4x+4}+\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\frac{2x}{(x-2)^2}+\frac{2}{\sqrt{(x-2)^2}}=\frac{2x}{(x-2)^2}+\frac{2}{|x-2|}.$$

Рассмотрим два случая: 1) $1\leqslant x<2$; 2) $x>2$.

1) $A^2=\dfrac{2x}{(x-2)^2}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{4}{(x-2)^2}$;

2) $A^2=\dfrac{2x}{(x-2)^2}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{4x-4}{(x-2)^2}$.

Найдем выражения для A в каждом из этих случаев:

1) Так как $|A|=\dfrac{2}{|x-2|}$, $A<0$ и $x-2<0$, то $A=\dfrac{2}{x-2}$.

2) Так как $|A|=\frac{2\sqrt{x-1}}{|x-2|}$, где $x>2$ и $A<0$, то $|x-2|=$ $=x-2$ и $A=-\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$.

Ответ. $A=\frac{2}{x-2}$, если $1\leqslant x<2$; $A=-\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$, если $x>2$.

Задания для самостоятельной работы

Представить в виде степени с рациональным показателем, считая, что $a>0$ **(1—3)**.

1. $\boxed{5}$ 1) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt{a}}}$;

2) $\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$.

2. $\boxed{5}$ 1) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\sqrt[4]{a^{-3}\sqrt{a^{-1}}}$;

2) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{a^{-5}}\sqrt{a\sqrt{a}}$.

3. $\boxed{5}$ 1) $\sqrt{a^3\sqrt[3]{a^{-2}}}:a\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^{-2}}}$;

2) $a:\sqrt[7]{a^3\sqrt[5]{a^{-3}\sqrt{a}}}$.

Выполнить действия ($a>0$, $b>0$, $c>0$) **(4—5)**.

4. $\boxed{6}$ 1) $\sqrt[3]{\dfrac{a^{-0,25}\sqrt[4]{b^{-6}}}{3^{-3}a(\sqrt{ab})^{-2,5}}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{a^{-0,(6)}\sqrt{c^{-0,5}}}{(-2)^{-6}\sqrt[3]{a^{-2}c^{-0,75}}}}$.

5. $\boxed{7}$ 1) $(a^{0,7}+a^{0,3}):(a^{1,1}+a^{0,7}):\left(\sqrt[5]{a\sqrt{a}}\right)$;

2) $(a^{0,6}b^{1,4}+a^{0,7}b^{0,8}):(a^{1,5}+a^{1,4}b^{0,6})$.

Вычислить **(6—7)**.

6. $\boxed{8}$ 1) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{3^{1-n}}\cdot 75^{0,5}}{(3^n\cdot 5^{-2,5})^{-0,25}}\right)^{2,(6)}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{(\sqrt{5})^{1-2n}}(0,25\sqrt{5})^{0,5}}{(5^n\,0,5^{-2,5})^{-0,25}}\right)^{2,(6)}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;.

7. $\boxed{8}$ 1) $(0{,}2^{0,2}+3^{0,3}):\left(5\cdot 3^{-0,7}+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2^{-0,8}\right)$;

2) $(7^{0,25}-0{,}25^{0,25}):\left(\frac{7^{-0,75}}{4}-\frac{0{,}25^{1,25}}{7}\right)$.

Сократить дробь ($a>0,\ x>0$) **(8—9)**.

8. $\boxed{7}$ 1) $\frac{(0{,}2+a^{0,2})^3+(0{,}2-a^{0,2})^3+0{,}032}{(0{,}2+a^{0,2})^3-(0{,}2-a^{0,2})^3+4a^{0,6}}$;

2) $\frac{(x^{0,3}+a^{-0,3})^3+(x^{0,3}-a^{-0,3})^3+4x^{0,9}}{(x^{0,3}+a^{-0,3})^3-(x^{0,3}-a^{-0,3})^3+4a^{-0,9}}$.

9. $\boxed{7}$ 1) $\frac{(x^{0,7}+\sqrt{7})^3+(x^{0,7}-\sqrt{7})^3}{x^{2,1}+21x^{0,7}}$;

2) $\frac{(x^{1,2}+\sqrt{2})^3+(x^{1,2}-\sqrt{2})^3}{x^{2,4}+6}$.

Упростить выражение и найти его числовое значени **(10—11)**.

10. $\boxed{8}$ 1) $\left(a-3b+\frac{4b^2}{a+b}\right)\cdot((a^{-0,5}+b^{-0,5})^{-2}+(a^{-0,5}-b^{-0,5})^{-2})$

при $a=\sqrt[3]{12},\ b=\sqrt[3]{18}$;

2) $((a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(a^{0,5}+b^{0,5})^{-1}+3(ab)^{0,5})^{0,5}-\sqrt{a}$

при $a=0{,}7,\ b=2{,}(7)$.

11. $\boxed{8}$ 1) $\frac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}-2(ab)^{\frac{1}{3}}$ при $a=\sqrt{0{,}125},\ b=\sqrt[5]{5}$;

2) $\frac{\left(a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}$ при $a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{48}$.

12. $\boxed{9}$ Найти значение выражения:

1) $\frac{\sqrt{a+3}+(a-3)^{0,5}}{\sqrt{a+3}-(a-3)^{0,5}}$, если $a=1{,}5(c+c^{-1})$;

2) $\frac{(x^2+9)^{-0,5}+(x^2-9)^{-0,5}}{(x^2+9)^{-0,5}-(x^2-9)^{-0,5}}$, если $x=3\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^{0,5}$.

13. $\boxed{9}$ Упростить выражение:

1) $(a+\sqrt{2a-1})^{\frac{1}{2}}+(a-\sqrt{2a-1})^{\frac{1}{2}}$;

2) $(a+2b\sqrt{a-b^2})^{\frac{1}{2}}+(a-2b\sqrt{a-b^2})^{\frac{1}{2}}$.

Контрольная работа

1. Вычислить:

1) $3^{-3}\cdot 81^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{4}}:3^{-2}$

$\left[27^{\frac{1}{3}}:3^{-1}-2^{-4}\cdot 64^{\frac{1}{3}}\right]$;

2) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$

$\left[\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\right]$.

2. Упростить выражение

$$\sqrt[4]{(a-b)^4}-2\sqrt[6]{(a+b)^6},\ 0<a<b$$

$$\left[\sqrt[6]{(a-3)^6}-3\sqrt[4]{(a+3)^4},\ 0<a<3\right].$$

3. Представить в виде степени с основанием b выражение

$$\left(\frac{b}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{1+\sqrt{3}}:b^{\sqrt{3}} \qquad \left[\left(\frac{b^{\sqrt{2}+1}}{b^2}\right)^{\sqrt{2}-1}\cdot b^{2\sqrt{2}}\right].$$

4. Сократить дробь

$$\frac{\sqrt{a^3}-a}{a-2a^{\frac{1}{2}}+1} \qquad \left[\frac{a+4\sqrt{a}+4}{a^{\frac{3}{2}}+2a}\right].$$

---

5. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}} \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{7}-3\sqrt{2}-5}\right].$$

6. Упростить выражение ($a>0,\ b>0$)

$$\frac{(\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}{5(a-b)}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-1}$$

$$\left[\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^{\frac{3}{2}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}\right)^{-2}\right].$$

Глава V

Степенная функция

§ 1. Степенная функция, ее свойства и график

Пример с решением

Построить график функции

$$y=\begin{cases}(\sqrt{4-4x+x^2}-1)^{-2}, & \text{если } x\geqslant 2,\\ \sqrt[3]{3-x}, & \text{если } x<2,\end{cases}$$

и перечислить ее свойства.

Решение. Если $x\geqslant 2$, то $y=(|2-x|-1)^{-2}$, т. е. $y=(x-3)^{-2}$. График функции

$$y=\begin{cases}(x-3)^{-2}, & \text{если } x\geqslant 2,\\ \sqrt[3]{3-x}, & \text{если } x<2,\end{cases}$$

изображен на рисунке 1. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x=3$; множество значений — промежуток $(0;\ +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция является убывающей на промежутках $x\leqslant 2$, $x>3$ и возрастающей на промежутке $2\leqslant x<3$; функция ограничена снизу ($y>0$); функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

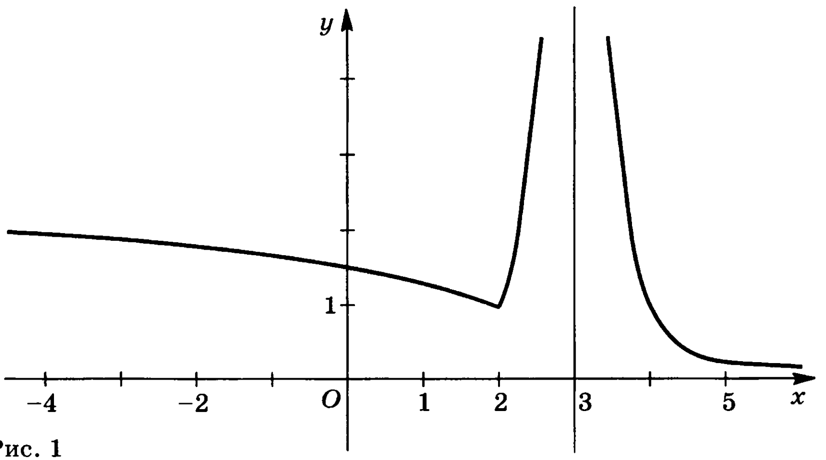

Рис. 1

Задания для самостоятельной работы

Изобразить схематически график функции и перечислить ее свойства (1—3).

1.$\boxed{6}$ 1) $y=x^{\sqrt{5}}-2$; 2) $y=x^{\pi}+3$;

3) $y=x^{\frac{2}{\pi}}+1$; 4) $y=x^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-2$;

5) $y=x^{\sqrt{0,2}}-1$; 6) $y=x^{\sqrt{6}}+1$;

7) $y=(x-2)^{\sqrt{7}}+2$; 8) $y=(x+2)^{\sqrt{0,8}}-2$.

2.$\boxed{6}$ 1) $y=\begin{cases}\sqrt[4]{x-2}, \text{ если } x\geqslant 2,\\ \dfrac{1}{(x-2)^3}, \text{ если } x<2;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}, \text{ если } x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{(x+1)^4}, \text{ если } x>-1;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}\sqrt[3]{x+3}, \text{ если } x\leqslant -2,\\ (x+2)^{-2}, \text{ если } x>-2;\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}\sqrt[4]{x-3}, \text{ если } x\geqslant 4,\\ (x-4)^{-3}, \text{ если } x<4.\end{cases}$

3.$\boxed{7}$ 1) $y=|x|^3-1$; 2) $y=|x|^5+1$;

3) $y=|x^5+1|$; 4) $y=|x^3-1|$;

5) $y=2-|x|^5$; 6) $y=3-|x|^3$;

7) $y=|\sqrt[3]{x-2}|+1$; 8) $y=|\sqrt[5]{x+1}|-2$.

§ 2. Взаимно обратные функции. Сложная функция

Примеры с решениями

1. Записать формулу сложной функции $z=f(\varphi(x))$, если $\varphi(x)=x^2-5x+6$, $f(y)=y^{-\frac{1}{2}}$. Найти область определения функции $f(\varphi(x))$.

Решение. Внутренняя функция $y=\varphi(x)$, внешняя функция $z=f(y)$. Суперпозиция заданных функций имеет вид $z=(x^2-5x+6)^{-\frac{1}{2}}$. Область определения этой функции находится из неравенства $x^2-5x+6>0$.

Ответ. Функция $z=(x^2-5x+6)^{-\frac{1}{2}}$ определена на промежутках $x<2$ и $x>3$.

2. Записать внутреннюю $\varphi(x)$ и внешнюю $f(\varphi)$ функции, задающие сложную функцию $f(\varphi(x))=-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+5}}$.

Ответ. $\varphi(x)=x^2+5$ — внутренняя функция, $f(\varphi)=$ $=-\frac{1}{\sqrt[3]{\varphi}}$ — внешняя функция.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ (Устно.) Выяснить, является ли обратимой функция:

1) $y=2x^4$; 2) $y=-3x^6$;

3) $y=-5x^2$ при $x\leqslant 0$; 4) $y=\frac{x^2}{2}$ при $x\geqslant 0$;

5) $y=\sqrt{x-1}$; 6) $y=\sqrt[3]{x+2}$;

7) $y=-\sqrt[3]{x+4}$; 8) $y=-\sqrt{x-3}$.

2. $\boxed{6}$ Найти функцию, обратную к данной; указать ее область определения и множество значений:

1) $y=\frac{1}{x^3}$; 2) $y=\frac{1}{x^5}$;

3) $y=-\frac{1}{x^4}$, $x<0$; 4) $y=-\frac{1}{x^6}$, $x<0$;

5) $y=-x^{\frac{2}{3}}$; 6) $y=-x^{\frac{3}{2}}$;

7) $y=x^{-\frac{5}{2}}$; 8) $y=x^{-\frac{4}{3}}$.

3. $\boxed{8}$ Найти промежутки монотонности функции:

1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$; 2) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$;

3) $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$; 4) $y=\sqrt{-x^2+5x-6}$;

5) $y=\sqrt[3]{2x^2+3x-2}$; 6) $y=\sqrt[3]{2x^2-5x-3}$.

4. $\boxed{9}$ Построить график функции:

1) $y=\sqrt{2x^2-5x}$; 2) $y=\sqrt{4x^2-9}$;

3) $y=\frac{1}{x^2-2x-3}$; 4) $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$.

§ 3. Дробно-линейная функция

Пример с решением

Найти горизонтальную и вертикальную асимптоты графика функции $y=\frac{3x-13}{x-5}$.

Решение. Выделим целую часть дроби $\frac{3x-13}{x-5}$, разделив уголком числитель на знаменатель или выполнив преобразования:

$$y=\frac{3(x-5)+2}{x-5}=3+\frac{2}{x-5}.$$

Заданную функцию можно записать в виде $y=3+\frac{2}{x-5}$. График этой функции может быть получен из графика функции $y=\frac{2}{x}$ (гиперболы) сдвигом на 5 единиц вправо вдоль оси Ox и на 3 единицы вверх вдоль оси Oy. Прямые $x=5$ и $y=3$ являются соответственно вертикальной и горизонтальной асимптотами графика заданной функции.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Найти горизонтальную и вертикальную асимптоты графика функции без его построения:

   1) $y=\frac{2x-1}{x+3}$; 2) $y=\frac{3x-2}{x+4}$;

   3) $y=\frac{3x+2}{4-x}$; 4) $y=\frac{2x+5}{3-x}$.

2. $\boxed{6}$ Построить график функции:

   1) $y=\frac{5-x}{x-2}$; 2) $y=\frac{10-2x}{x-3}$;

   3) $y=\frac{-3x-7}{x+3}$; 4) $y=\frac{-5x-7}{x+2}$;

   5) $y=\frac{4x-1}{2x-1}$; 6) $y=\frac{1-6x}{2x+1}$.

3. $\boxed{7}$ Найти множество значений функции $y=f(x)$; задать формулой функцию, обратную к функции $y=f(x)$, если:

   1) $y=3-\frac{10}{3x+1}$ при $x\geqslant 0$;

   2) $y=2-\frac{7}{4x+1}$ при $x\geqslant 0$;

   3) $y=-1+\frac{6}{2x-3}$ при $x<1{,}5$;

   4) $y=-2+\frac{8}{3x-4}$ при $x<1\frac{1}{3}$.

§ 4. Равносильные уравнения и неравенства

Примеры с решениями

1. Выяснить, равносильны ли системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=2, \\ y^2+xy-2x^2=4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y=1, \\ 3x^2-y=0. \end{cases}$$

Решение. Решая первую систему способом подстановки, находим ее решения:

$$x_1=-1,\ y_1=3;\ x_2=0,\ y_2=2.$$

Решая вторую систему способом сложения, получаем

$$x_1=-1,\ y_1=3;\ x_2=\frac{1}{3},\ y_2=\frac{1}{3}.$$

Множества решений систем не совпадают, значит, эти системы не равносильны.

2. Решить уравнение

$$|2x+1|+|x-2|=6.$$

Решение. $2x+1=0$ при $x=-\frac{1}{2}$; $x-2=0$ при $x=2$. Знаки подмодульных выражений на интервалах показаны в таблице:

x	$\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$	$(2;\ +\infty)$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$

Исходное уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\begin{cases} x<-\frac{1}{2}, \\ -2x-1-x+2=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\leqslant x<2, \\ 2x+1-x+2=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geqslant 2, \\ 2x+1+x-2=6. \end{cases}$$

После равносильных преобразований полученных систем заданное уравнение заменим совокупностью следующих систем:

$$\begin{cases} x<-\frac{1}{2}, \\ x=-1\frac{2}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}\leqslant x<2, \\ x=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x=2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение имеют первая и третья системы.

Ответ. $x_1=-1\frac{2}{3}$, $x_2=2\frac{1}{3}$.

Решение задачи можно оформить иначе. Из определения модуля следует, что

$$|2x+1|=\begin{cases} -2x-1, \text{ если } x<-\frac{1}{2}, \\ 2x+1, \text{ если } x\geqslant -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$|x-2|=\begin{cases} 2-x, \text{ если } x<2, \\ x-2, \text{ если } x\geqslant 2. \end{cases}$$

Пусть $y=|2x+1|+|x-2|$.
Тогда получаем:

1) $y=-2x-1+2-x=-3x+1$ при $x<-\frac{1}{2}$;

2) $y=2x+1+2-x=x+3$ при $-\frac{1}{2}\leqslant x<2$;

3) $y=2x+1+x-2=3x-1$ при $x\geqslant 2$.

В первом случае имеем уравнение

$$-3x+1=6,$$

откуда находим $x=-\frac{5}{3}$ — корень исходного уравнения, так как $-\frac{5}{3}<-\frac{1}{2}$.

Во втором случае $x+3=6$; $x=3$ не является корнем, так как $3>2$.

В третьем случае $3x-1=6$; $x=\frac{7}{3}$ — корень исходного уравнения, так как $\frac{7}{3}\geqslant 2$.

Ответ. $x_1=-1\frac{2}{3}$, $x_2=2\frac{1}{3}$.

Замечание. Условие $x=-\frac{1}{2}$ можно было включить в неравенство первой системы, а условие $x=2$ — в неравенство второй (что не повлияло бы на результат решения).

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Установить, какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $\sqrt{(x-1)^2}=x-1,\quad |1-x|=x-1;$

2) $\sqrt{(2-x)^2}=x-2,\quad |x-2|=x-2;$

3) $(2x+1)^5=1,\ 2x=0;$

4) $(5x+1)^7=1,\ 5x=0;$

5) $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x+1}{x+2},\quad (x-1)(x+2)=x(x+1);$

6) $\dfrac{3-x}{2-x}=\dfrac{1-x}{x},\quad (3-x)x=(1-x)(2-x);$

7) $x^2-x-20=0,\quad \dfrac{x^2-x-20}{x-5}=0;$

8) $\dfrac{x^2-3x-18}{x+3}=0,\quad x^2-3x-18=0.$

Решить уравнение (2—3).

2. $\boxed{5}$ 1) $\dfrac{1-x}{5x-6-x^2}+1=\dfrac{1}{2-x};$ 2) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-2x-3}.$

3. $\boxed{6}$ 1) $\sqrt{x+1}=x-1;$ 2) $\sqrt{x+3}=x-3;$

3) $\sqrt{2x^2-2x-15}=x;$ 4) $\sqrt{2x^2+x-20}=x.$

4. $\boxed{5}$ Решить неравенство:

1) $\dfrac{5}{x-2}>\dfrac{3}{x+1};$ 2) $\dfrac{6}{x+3}<\dfrac{5}{x-4};$

3) $x^5<x^2;$ 4) $x^7>x^3.$

5. $\boxed{7}$ Выяснить, равносильны ли системы уравнений, не решая их:

1) $\begin{cases}2x+y-4=0,\\3y-2x-4=0,\end{cases}\quad \begin{cases}2x+y-4=0,\\y-2=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x-y=3,\\5y+x=7,\end{cases}\quad \begin{cases}2x-y=3,\\3x+4y=10;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-2y=5,\\x+y=3,\end{cases}\quad \begin{cases}4x-y=8,\\2x-3y=2;\end{cases}$

4) $\begin{cases}4x+y=3,\\2x-3y=2,\end{cases}\quad \begin{cases}6x-2y=5,\\2x+4y=1.\end{cases}$

6. $\boxed{7}$ Решить уравнение:

1) $|2x-3|=x+6$; 2) $|3x-1|=2x+3$;

3) $|x-5|-|2x+3|=4$; 4) $|2x-1|-|x+4|=3$;

5) $|x+3|-|x-5|=x+1$; 6) $|x-6|-|x+1|=x-1$.

7. $\boxed{10}$ Для каждого значения параметра a решить уравнение:

1) $|x+2|+a|x-4|=6$; 2) $|x+1|+a|x-2|=3$.

§ 5. Иррациональные уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $(x^2-9)\sqrt{x+2}=0$.

Решение. Левая часть уравнения определена при $x \geqslant -2$, а число $x=-2$ — корень этого уравнения. Далее задача сводится к нахождению корней уравнения $x^2-9=0$, таких, что $x \geqslant -2$. Этому условию удовлетворяет $x=3$.

Ответ. $x_1=-2$, $x_2=3$.

2. Решить уравнение $3\sqrt{x+4}=5-2|x+2|$.

Решение. Левая часть уравнения определена при $x \geqslant -4$, а правая — при всех $x \in \boldsymbol{R}$,

причем $|x+2|=\begin{cases} x+2 \text{ при } x \geqslant -2, \\ -x-2 \text{ при } x<-2. \end{cases}$

1) Если $-4 \leqslant x < -2$, то уравнение можно записать в виде $3\sqrt{x+4}=9+2x$ и заменить следующим равносильным уравнением:

$$9(x+4)=81+36x+4x^2, \text{ или } 4x^2+27x+45=0,$$

откуда $x=\frac{-27 \pm 3}{8}$; $x_1=-\frac{15}{4}$, $x_2=-3$.

Оба корня принадлежат промежутку $-4 \leqslant x < -2$ и являются корнями исходного уравнения.

2) Если $x \geqslant -2$, то уравнение примет вид $3\sqrt{x+4}=1-2x$. При $x>\frac{1}{2}$ это уравнение не имеет корней, а при $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ равносильно уравнению $9(x+4)=1-4x+4x^2$, или $4x^2-13x-35=0$, откуда $x=\frac{13 \pm 27}{8}$; $x_1=-\frac{7}{4}$, $x_2=5$, причем $x=-\frac{7}{4}$ принадлежит отрезку $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$, а $x=5$ нет.

Ответ. $x_1=-3\frac{3}{4}$, $x_2=-3$, $x_3=-1\frac{3}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—7).

1. $\boxed{6}$ 1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}$.

2. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

2) $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3$.

3. $\boxed{7}$ 1) $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$;

2) $4x^2-6x+7+\sqrt{4x^2-6x+5}=14$;

3) $x^2-x+\sqrt{x^2-x-2}=8$;

4) $x^2+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=5x$.

4. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{3x^2+5x+1}+\sqrt{3x^2+5x+8}=7$;

2) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

5. $\boxed{10}$ 1) $\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+11-4\sqrt{x+7}}=1$;

2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2$.

6. $\boxed{10}$ 1) $5\sqrt{1+|x^2-1|}=3+|5x+3|$;

2) $\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|$.

7. $\boxed{10}$ 1) $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{5+x}=2$;

2) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$;

3) $2\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{8x+5}=1$;

4) $\sqrt{2x+7}-\sqrt[3]{x+7}=1$.

8. $\boxed{10}$ Найти все значения параметра a, при которых имеет решение уравнение:

1) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$;

2) $\sqrt{x-3}+a=\sqrt{x+6}$.

9. $\boxed{10}$ Решить уравнение:

1) $\sqrt{x^2-1}+x=a$;

2) $x+\sqrt{x^2-x}=a$;

3) $\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-a}=2$;

4) $\sqrt{a-x}+\sqrt{x}=2$.

10. $\boxed{6}$ Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x+7}+\sqrt{y+1}=5, \\ \sqrt{x+7}-\sqrt{y+1}=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+6}+\sqrt{y+12}=7, \\ \sqrt{x+6}-\sqrt{y+12}=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{17-2x}+2\sqrt{y+2}=9, \\ 2\sqrt{17-2x}-\sqrt{y+2}=8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-y}=7, \\ \sqrt{2x-1}+3\sqrt{3-y}=9. \end{cases}$

§ 6. Иррациональные неравенства

Примеры с решениями

1. Решить неравенство

$$(2x+\sqrt{x-5}-13)(\sqrt{x+16}-\sqrt{x-5})\geqslant 21.$$

Решение. Левая часть неравенства определена при $x\geqslant 5$. Умножив обе части неравенства на положительное при всех $x\geqslant 5$ число $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-5}$, получим равносильное ему неравенство

$$(2x+\sqrt{x-5}-13)\cdot 21\geqslant 21(\sqrt{x+16}+\sqrt{x-5}),$$

откуда $2x-13\geqslant\sqrt{x+16}$.

Это неравенство при $5\leqslant x\leqslant 6{,}5$ не имеет решений (левая часть неположительна, а правая положительна). При $x>6{,}5$ оно равносильно неравенству

$$4x^2-52x+169\geqslant x+16, \text{ или } 4x^2-53x+153\geqslant 0,$$

откуда $x\leqslant 4{,}25$ и $x\geqslant 9$. Учитывая условие $x>6{,}5$, получаем $x\geqslant 9$.

Ответ. $x\geqslant 9$.

2. Решить неравенство $\sqrt{x-a}<a$.

Решение. При $a\leqslant 0$ неравенство не имеет решений. При $a>0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-a\geqslant 0, \\ x-a<a^2, \end{cases}$$

откуда имеем $a\leqslant x<a^2+a$.

Ответ. Если $a\leqslant 0$, то решений нет; если $a>0$, то $a\leqslant x<a^2+a$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенство (1—5).

1. $\boxed{8}$ 1) $(2x+\sqrt{x}-7)(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})<4$;

2) $(3x+\sqrt{2x}-4)(\sqrt{2x+19}-\sqrt{2x})\leqslant 19$.

2. $\boxed{7}$ 1) $(x^2-9)\sqrt{x+5}\geqslant 0$;

2) $(4-x^2)\sqrt{3-x}\leqslant 0$;

3) $\dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+x+6}}\geqslant 0$;

4) $\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{3-x}\leqslant 0$.

3. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{x^2-3x-10}<x+4$;

2) $\sqrt{x^2+2x-8}>x-4$;

3) $\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$;

4) $\sqrt{5x-x^2-6}<3+2x$;

5) $\sqrt{2x^2-3x-2}\leqslant 2-x$;

6) $\sqrt{2x^2-x-3}\leqslant x+1$;

7) $\sqrt{2x^2-6x-8}\geqslant x+1$;

8) $\sqrt{2x^2+2x-12}\geqslant 2-x$.

4. $\boxed{8}$ 1) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\leqslant 3$;

2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{3x-2}\geqslant 6$;

3) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{4-x}\geqslant -1$;

4) $\sqrt{x-8}+2\sqrt{81-x^2}\geqslant -1$.

5. $\boxed{9}$ 1) $\sqrt{1-x}+\sqrt{7-x}\leqslant \dfrac{12}{\sqrt{7-x}}$;

2) $\sqrt{4-x}-\dfrac{12}{\sqrt{4-x}}\geqslant -\sqrt{-x-2}$.

6. $\boxed{10}$ В зависимости от значений параметра a решить неравенство:

1) $a\sqrt{x+1}\leqslant 1$;

2) $a\sqrt{2-x}\geqslant 1$;

3) $a\sqrt{x+a}<1$;

4) $a\sqrt{x-a}<5$.

Контрольная работа

1. Найти область определения функции
$$y=(x+5)^{-\frac{1}{4}}+\sqrt[6]{x^2+3x-10} \quad \left[y=(x-6)^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[5]{x^2+5x-6}\right].$$

2. Исследовать функцию и построить ее график
$$y=\sqrt{x+3}-1 \quad [y=(x-2)^3+8].$$

3. Решить уравнение
$$3x+1+\sqrt{7-9x}=0 \quad [1+2x+\sqrt{7-6x}=0].$$

4. Решить неравенство
$$(3x+4)\sqrt{4-x^2}\geqslant 0 \quad [(2x-7)\sqrt{x^2-9}\leqslant 0].$$

---

5. Решить уравнение
$$x^2-x+\sqrt{x^2-x+4}=2 \quad [x^2-x+\sqrt{x^2-x-2}=8].$$

6. Решить неравенство
$$2\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}\leqslant 1 \quad [2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\geqslant 1].$$

VI Показательная функция

§ 1. Показательная функция, ее свойства и график

Пример с решением

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

Решение. При $x \geqslant 0$ функция имеет вид $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ и является убывающей, при $x<0$ функция принимает вид $y=4^x$ и является возрастающей. График функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$ изображен на рисунке 2 (он симметричен относительно оси ординат). На отрезке $[-2;\ 1]$ наибольшее значение функции равно $y(0)=1$, наименьшее ее значение равно $y(-2)=\frac{1}{16}$.

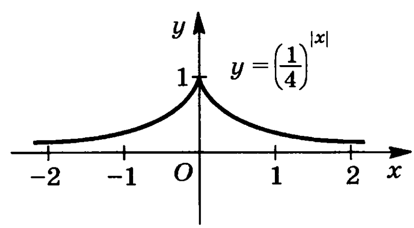

Рис. 2

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{7}$ Функция $f(x)$ определена на множестве действительных чисел и обладает свойством

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2).$$

Задать эту функцию формулой, если:

1) $f(1)=2$; 2) $f(1)=3$;

3) $f(1)=\frac{2}{3}$; 4) $f(1)=\frac{3}{2}$;

5) $f(-1)=2$; 6) $f(-1)=0{,}5$.

2. $\boxed{7}$ Решить графически уравнение:

1) $2^x=1+\frac{7}{3}x$; 2) $0{,}5^x=1-\frac{7}{3}x$;

3) $0{,}1^{x+1}=2-x^2$; 4) $9\cdot 3^{x-2}=4-x^2$;

5) $3^x-1=2x^{-2}$; 6) $2^{-x}=1+x^{-2}$.

3.$\boxed{7}$ Решить графически неравенство:

1) $2^x \geqslant \frac{8}{x}$; 2) $0{,}5^x \leqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{x}$;

3) $3^x \leqslant \sqrt{5+2x}$; 4) $2^x \geqslant \sqrt{1+3x}$.

4.$\boxed{6}$ Сравнить числа a и b, если:

1) $a = 0{,}2^{-6,1}$, $b = 5^{5,6}$;

2) $a = 0{,}5^{4,1}$, $b = 2^{-3,9}$;

3) $a = (\sqrt{3} - 1)^{3\sqrt{2}}$, $b = (\sqrt{3} - 1)^{2\sqrt{3}}$;

4) $a = (2 - \sqrt{3})^{5\sqrt{2}}$, $b = (2 - \sqrt{3})^7$;

5) $a = \sqrt{0{,}2}$, $b = 0{,}2^{\sqrt{0,2}}$;

6) $a = \sqrt{1{,}1}$, $b = 1{,}1^{\sqrt{0,2}}$;

7) $a = 1$, $b = (3 - 2\sqrt{2})^{2\sqrt{2}-3}$;

8) $a = (2\sqrt{5} - 3)^{5\sqrt{2}-7}$, $b = 1$.

5.$\boxed{6}$ Расположить в порядке возрастания числа:

1) $3^{2,5}$; $3^{\sqrt{6}}$; $3^{1+\sqrt{2}}$;

2) $0{,}3^{2-\sqrt{3}}$; 1; $0{,}3^{\sqrt{0,1}}$;

3) $(\sqrt{3})^{-3,1}$; $3^{-1,6}$; $\frac{1}{3\sqrt{3}}$;

4) $\sqrt[3]{0{,}1}$; $0{,}1^{0,3}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

6.$\boxed{6}$ Установить, какие значения может принимать число a, чтобы выполнялось неравенство:

1) $a < a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{0,3} > 1$;

3) $a^{-\frac{5}{6}} > a^{-\frac{6}{7}}$; 4) $a^{-\frac{3}{4}} < a^{-\frac{4}{5}}$.

7.$\boxed{7}$ Найти область определения и множество значений функции:

1) $y = 1{,}2^{\sqrt{7-x}}$; 2) $y = 0{,}7^{\sqrt{x+7}}$;

3) $y = 0{,}5^{\sqrt{x^2-5}}$; 4) $y = 3^{\sqrt{4-x^2}}$;

5) $y = \frac{1}{3^{\sqrt{2x-x^2}}}$; 6) $y = \frac{1}{10^{\sqrt{x^2-5x}}}$.

8.$\boxed{7}$ Построить схематически график функции:

1) $y = 4^{|x|} - 1$; 2) $y = 0{,}2^{|x|} + 1$;

3) $y = 0{,}3^{|x+2|}$; 4) $y = 3^{|x-2|}$;

5) $y = |2^x - 3|$; 6) $y = |0{,}5^x - 2|$;

7) $y = |3^{|x|+1} - 2|$; 8) $y = |2^{|x|-1} - 3|$.

§ 2. Показательные уравнения

Пример с решением

Решить уравнение

$$(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^x+(2\sqrt{2}+\sqrt{7})^x=4\sqrt{2}.$$

Решение. Пользуясь тем, что $(2\sqrt{2}-\sqrt{7})(2\sqrt{2}+\sqrt{7})=1$, и введя обозначение $y=(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^x$, запишем заданное уравнение в виде $y+\frac{1}{y}=4\sqrt{2}$, откуда $y^2-4\sqrt{2}y+1=0$. Решив это квадратное уравнение, получим $y_{1,2}=2\sqrt{2}\pm\sqrt{7}$.

Корни уравнений $(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^x=2\sqrt{2}\pm\sqrt{7}$, т. е. числа $x_1=1$ и $x_2=-1$, являются и корнями исходного уравнения.

Ответ. $x=\pm 1$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—8).

1. $\boxed{6}$ 1) $2^{x^2}\cdot 0{,}25^x=8$; 2) $16\cdot 8^x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2}$;

3) $\frac{7^{\frac{2x+5}{x-1}}}{7^{x+1}}=1$; 4) $\frac{0{,}1^{\frac{x+7}{3x+4}}}{0{,}1^{x+7}}=1$.

2. $\boxed{6}$ 1) $5^{3-x}=20+5^x$; 2) $6^{x+2}-6^x-35=0$;

3) $5^{5-2x}-20\cdot 0{,}2^{3-2x}-5=0$; 4) $4^{1-x}-0{,}5^{1-2x}=1$.

3. $\boxed{6}$ 1) $2\cdot 9^x-6^x=4^x$; 2) $9^x+4^x=2\cdot 6^x$;

3) $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=4$; 4) $(\sqrt{5}-2)^x+(\sqrt{5}+2)^x=18$.

4. $\boxed{7}$ 1) $16^x\cdot 64^{\sqrt{x+0{,}5}}=4$; 2) $27^{1-\frac{x}{3}}\cdot 3^{\sqrt{2x+2}}=1$;

3) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$;

4) $0{,}16^{x-1-\sqrt{3x-2}}-3{,}75\cdot 0{,}4^{x-\sqrt{3x-2}}=2{,}5$.

5. $\boxed{8}$ 1) $\sqrt{9^x-3^{x+1}+16}-3^{2x-1}=4-3^x$;

2) $3\cdot\sqrt{9^{-x}+3^{-x}-1}+3^{-x}+3^{-2x}=5$;

3) $\sqrt{4^x-3\cdot 2^x+2}=2-2^x$;

4) $\sqrt{0{,}25^x-3\cdot 0{,}5^x+2}=2-0{,}5^x$.

6. $\boxed{9}$ 1) $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}=0$;

2) $16^{x^2-\frac{x}{2}}-15\cdot 4^{x^2}-4^{2+x}=0$.

7. $\boxed{10}$ 1) $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$;

2) $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1$.

8. $\boxed{10}$ 1) $3\cdot 6^{2x^2-6}+6^{x^2+x}-4\cdot 6^{2x+6}=0$;

2) $5^{2x^2-1}-3\cdot 5^{x^2+3x+2}-2\cdot 5^{6(x+1)}=0$.

9. $\boxed{8}$ Для каждого значения a найти число корней уравнения:

1) $5^x=a$; 2) $0{,}7^x=a$;

3) $|0{,}5^x-1|=a$; 4) $|2^x-2|=a$.

10. $\boxed{10}$ 1) Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$(a-1)\cdot 3^{2x}-(2a-1)\cdot 3^x-1=0$$

имеет два различных корня.

2) Найти значения параметра k, при которых уравнение

$$(10-k)\cdot 5^{2x+1}-2\cdot 5^{x+1}+6-k=0$$

не имеет корней.

§ 3. Показательные неравенства

Примеры с решениями

1. Решить неравенство $x^2\cdot 2^x-x\cdot 2^{x+1}>0$.

Решение. Разделив обе части неравенства на $2^x>0$, получим $x^2-2x>0$, откуда $x<0$ и $x>2$.

Ответ. $x<0$, $x>2$.

2. Решить неравенство $\sqrt{9^x-3^{x+1}+6}<3-3^x$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9^x-3\cdot 3^x+6\geqslant 0, \\ 3-3^x>0, \\ 9^x-3\cdot 3^x+6<(3-3^x)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы является квадратным относительно 3^x и верно для любых x, так как его дискриминант отрицателен при положительном старшем коэффициенте; $x<0$ — решение третьего неравенства, а $x<1$ — решение второго, откуда $x<0$ — решение системы (т. е. исходного неравенства).

Ответ. $x<0$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенство (1—2).

1. $\boxed{5}$ 1) $x^2 \cdot 4^x - 4^{1+x} > 0$; 2) $3^{x+2} - x^2 \cdot 3^x < 0$;
3) $x^2 \cdot 0{,}5^x - 0{,}5^{x-2} < 0$; 4) $0{,}7^x - 0{,}7^{x-2} \cdot x^2 > 0$.

2. $\boxed{6}$ 1) $9^x + 3^{2x-3} - \frac{28}{81} \leqslant 0$; 2) $0{,}6^{2x-1} - 0{,}36^x - 0{,}4 \geqslant 0$;
3) $3^{x-1} - 4 \cdot 3^{0{,}5x-1} + 1 > 0$; 4) $2^{2x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 < 0$.

3. $\boxed{7}$ Найти область определения функции:

1) $y = 2^{\sqrt{1+x}} - 2\sqrt{1-2^x}$; 2) $y = \sqrt{10 - 0{,}1^x} + 3^{\sqrt{3-x}}$;

3) $y = \sqrt{4^x - 6^x} - \sqrt{x^4 - x^6}$; 4) $y = x\sqrt{x^5 - x^3} + 2\sqrt{0{,}2^x - 0{,}3^x}$;

5) $y = x\sqrt{1 - 2^x - 2^{2x+1}}$; 6) $y = \sqrt{x(1 - 2^x - 2^{2x+1})}$;

7) $y = \sqrt{\frac{2^x - 1}{x - 1}}$; 8) $y = \sqrt{\frac{5^x - 0{,}04}{5 - x^2}}$;

9) $y = \sqrt{\frac{9^x + 8 \cdot 3^{x-1} - 1}{x^2 - 3x}}$; 10) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4^x + 7 \cdot 2^{x-1} - 2}}$.

Решить неравенство (4—8).

4. $\boxed{6}$ 1) $4^x \leqslant 8^{\sqrt{x+1}}$; 2) $27^{\sqrt{x+1}} \geqslant 9^x$.

5. $\boxed{7}$ 1) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$; 2) $3^{2(1-\sqrt{x})} + 3^{\sqrt{x}} \leqslant 10$.

6. $\boxed{8}$ 1) $\sqrt{2^x - 3} \geqslant 3 - 2^{0{,}5x}$; 2) $2^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{2^{-x} - 15} \geqslant 5$.

7. $\boxed{8}$ 1) $\sqrt{4^x - 3 \cdot 2^x + 2} > 2 - 2^x$;
2) $\sqrt{0{,}25^x - 3 \cdot 0{,}5^x + 2} > 2 - 0{,}5^x$.

8. $\boxed{9}$ 1) $0{,}6^x - 4 \cdot 0{,}3^x + 0{,}5^{x-2} \geqslant 1$;
2) $0{,}5^x - 2 \cdot 0{,}5^{x+1} + 8 \cdot 10^{x+1} \leqslant 8$.

9. $\boxed{9}$ Установить, при каких значениях a неравенство верно для всех значений x:

1) $0{,}6^x > a$; 2) $4^x > a$; 3) $-3^{|x|} \leqslant a$; 4) $-\left(\frac{1}{7}\right)^{|x|} \leqslant a$.

10. $\boxed{10}$ 1) Найти все значения m, при которых неравенство

$$m \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 3m + 1 > 0$$

справедливо для любого x.

2) Найти все значения n, при которых неравенство

$$4^x - n \cdot 2^x - n + 3 \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

§ 4. Системы показательных уравнений и неравенств

Пример с решением

Решить систему $\begin{cases} 2^{x+1}=y^2+4, \\ 2^{x-1}\leqslant y. \end{cases}$

Решение. Уравнение данной системы запишем в виде $2^{x-1}=\frac{1}{4}(y^2+4)$. Учитывая неравенство системы, имеем $\frac{1}{4}(y^2+4)\leqslant y$, откуда $(y-2)^2\leqslant 0$, т. е. $y=2$. Из уравнения системы при $y=2$ находим $x=2$.

Ответ. $x=2$, $y=2$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{7}$ Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5^x\cdot 6^y=150, \\ 6^x\cdot 5^y=180; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4^x\cdot 7^y=196, \\ 7^x\cdot 4^y=112; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x\cdot 4^y=192, \\ 2^x\cdot 9^y=1458; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5^x\cdot 4^y=400, \\ 2^x\cdot 25^y=2500; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4^x-5^{2y}=231, \\ 4^{\frac{x}{2}}-5^y=11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=77, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=7; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3\cdot 2^x+y=13, \\ 2^{2x+1}+3y=35; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2\cdot 3^x+y=20, \\ 3^{2x+1}+14y=271. \end{cases}$

2. $\boxed{8}$ Найти все положительные числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений:

1) $\begin{cases} x^{y+4x}=y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)}, \\ x^3=y^{-1}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (xy)^x\cdot x^{-y}=y^{\frac{28x-7y}{2}}, \\ y^{\frac{1}{2}}=x^{-1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (xy)^y\cdot x^{6x}=y^x, \\ x^2y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^{\frac{x-3y}{2}}=y^{62x-4y}, \\ y^3=\frac{1}{xy}. \end{cases}$

3. $\boxed{8}$ Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3^{-x-y}(x-y)=1, \\ (x-y)^{x+y}=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{y-x}(x+y)=1, \\ (x+y)^{x-y}=2. \end{cases}$

4. $\boxed{9}$ Решить систему:

1) $\begin{cases} 2^{x+1}=y^2+4, \\ 4^{x-1}\leqslant y^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\cdot 3^{x-1}=y^2+9, \\ 9^{x-2}\leqslant y^2. \end{cases}$

Контрольная работа

1. Сравнить числа a и b, если

$a=(\sqrt{2}-1)^{\sqrt{3}+1}$, $b=(\sqrt{2}-1)^{\sqrt{5}}$ $\left[a=(\sqrt{5}-1)^{2\sqrt{3}},\ b=(\sqrt{5}-1)^{3\sqrt{2}}\right]$.

2. Изобразить схематически график функции

$$y=|0{,}6^x-1| \quad [y=4^{|x|}+1].$$

3. Решить уравнение:

1) $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$

$[3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=12^x+12^{x+1}]$;

2) $4\cdot 3^{2x}-2^{2x-1}-3^{2x+1}-2^{2x}=0$

$[5\cdot 7^{2x-1}+4\cdot 3^{2x}+3^{2x+1}-2\cdot 7^{2x}=0]$.

---

4. Решить неравенство

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{6-x}}>\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ $\left[\pi^{\sqrt{2-x}}>\pi^{x}\right]$;

2) $4\cdot 4^x-7\cdot 2^x-2<0$ $[3\cdot 9^x-8\cdot 3^x-3<0]$.

5. Решить систему уравнений:

$\begin{cases} 7^{2x}-4^{2y}-45=0, \\ 7^x-4^y-9=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} 9^x-5^{2y}+16=0, \\ 9^{\frac{x}{2}}-5^y+2=0 \end{cases}\right]$.

VII Логарифмическая функция

§ 1. Логарифмы

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\log_{0,5}\sqrt[3]{10+\log_{10}0{,}01}$; 2) $\log_8 \sin\frac{\pi}{4}$.

Решение.

1) $\log_{0,5}\sqrt[3]{10+\log_{10}0{,}01}=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{10-2}=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$;

2) $\log_8 \sin\frac{\pi}{6}=\log_8\frac{1}{2}=-3$.

2. Установить, при каких значениях x имеет смысл выражение $\log_3\sqrt{x^2-4}+\log_2|x+3|$.

Решение. Данное выражение имеет смысл, когда имеет смысл каждое его слагаемое, т. е. при x, являющихся решениями системы неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-4}>0,\\ |x+3|>0.\end{cases}$$

Первое неравенство справедливо при $x<-2$ и при $x>2$, а второе неравенство верно при $x\neq-3$.

Ответ. $x<-3$, $-3<x<-2$, $x>2$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—3).

1. $\boxed{4}$ 1) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 512$; 2) $\log_{0,5}\log_3 81$;

3) $\log_2(-\log_{0,1}\sqrt{10})$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}(-\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27})$.

2. $\boxed{5}$ 1) $\log_{0,25}\cos\frac{\pi}{4}$; 2) $\log_4\sin\frac{\pi}{6}$;

3) $\log_3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; 4) $\log_9\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

5) $\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; 6) $\log_9\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

3. $\boxed{4}$ 1) $8^{\frac{\log_2 9}{\log_2 4}}$; 2) $0{,}2^{\frac{\log_5 4}{\log_5 5}}$.

4. $\boxed{5}$ Найти $\log_5 x$, если:

1) $x=\dfrac{5^3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[8]{5^7}}{\sqrt[8]{5}}$; 2) $x=\dfrac{5^2\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^5}\cdot\sqrt[12]{5^7}}{\sqrt[12]{5}}$.

5. $\boxed{6}$ Установить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\log_{0,5}|x|-\log_{0,5}(4-x^2)$;

2) $\log_3|x|+\log_3(9-x^2)$;

3) $\log_3\sqrt{x^2-25}+\log_2|x-6|$;

4) $\log_4|x+5|-\log_3\sqrt{x^2-16}$.

Решить уравнение (6—7).

6. $\boxed{6}$ 1) $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29$; 2) $5^{5-x}-2\cdot 5^{x-3}=5$.

7. $\boxed{6}$ 1) $x+2=\log_6(35+6^{-x})$; 2) $\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1$.

§ 2. Свойства логарифмов

Примеры с решениями

1. Вычислить $\dfrac{16^{\log_4\sqrt{3}}\cdot\log_3 4+\log_3 0{,}5}{\log_3 7-\log_3 14}$.

Решение. $\dfrac{16^{\log_4\sqrt{3}}\cdot\log_3 4+\log_3 0{,}5}{\log_3 7-\log_3 14}=$

$$=\frac{4^{2\log_4\sqrt{3}}\cdot\log_3 4+\log_3 0{,}5}{\log_3\frac{7}{14}}=\frac{(\sqrt{3})^2\log_3 4+\log_3 0{,}5}{\log_3 0{,}5}=\frac{\log_3 4^3+\log_3 0{,}5}{\log_3 0{,}5}=$$

$$=\frac{\log_3(64\cdot 0{,}5)}{\log_3 0{,}5}=\frac{\log_3 32}{\log_3\frac{1}{2}}=\frac{\log_3 2^5}{\log_3 2^{-1}}=\frac{5\log_3 2}{-1\cdot\log_3 2}=-5.$$

2. Вычислить $\dfrac{\log_9 125}{6\log_3 5}$.

Решение.

$$\frac{\log_9 125}{6\log_3 5}=\frac{\log_{3^2}125}{6\log_3 5}=\frac{\frac{1}{2}\log_3 5^3}{6\log_3 5}=\frac{\frac{3}{2}\log_3 5}{6\log_3 5}=\frac{3}{2\cdot 6}=\frac{1}{4}.$$

3. Решить уравнение $\log_{\sqrt{x}}5+\log_{x^2}9=2$.

Решение. При $x>0$, $x\neq 1$ имеем

$$\log_{\sqrt{x}}5=2\log_x 5=\log_x 25,\quad \log_{x^2}9=\frac{1}{2}\log_x 9=\log_x 3.$$

Уравнение можно записать в виде $\log_x 25+\log_x 3=2$, или $\log_x(25\cdot 3)=2$, откуда $x^2=75$. Учитывая, что $x>0$, получим $x=5\sqrt{3}$.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{5}$ Найти x, если логарифмы данных буквенных выражений существуют:

1) $\log_2 x=2\log_2 a+0{,}5\log_2 b-\log_2(a+b)-\log_2(a-b)$;

2) $\log_3 x=1{,}5(\log_3 a+\log_3 b)-2\log_3(a+b)$.

2.$\boxed{5}$ Найти логарифм выражения по произвольно выбранному основанию:

1) $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$; 2) $Q=cm(t_2-t_1)$;

3) $t=\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$; 4) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

3.$\boxed{5}$ Вычислить:

1) $\dfrac{10^{-\log_{10}0{,}5}\cdot\log_5 4+\log_5 0{,}5}{\log_5 6-\log_5 12}$;

2) $\dfrac{\log_{0{,}5}3-\log_{0{,}5}21}{\log_{0{,}5}1{,}4+10^{2\log_{10}0{,}5}\cdot\log_{0{,}5}625}$;

3) $\dfrac{\log_4\log_4 81}{1+\log_4\log_4 3}$; 4) $\dfrac{\log_3\log_3 125}{1+\log_3\log_3 5}$.

4.$\boxed{4}$ Выразить данный логарифм через логарифм по основанию 3:

1) $\log_{\frac{1}{3}}5$; 2) $\log_9 7$; 3) $\log_{\sqrt{3}}4$; 4) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}2$.

5.$\boxed{5}$ Найти, x, если:

1) $\log_5 x=1-\frac{2}{5}\log_5 32-\frac{1}{3}\log_{0{,}2}64$;

2) $\log_4 x=\frac{1}{2}\log_4 9+\frac{2}{3}\log_{0{,}25}27-1$.

Вычислить (6—7).

6.$\boxed{5}$ 1) $\dfrac{4\log_{\frac{1}{3}}25}{\log_3 5}$; 2) $\dfrac{\log_{0{,}25}3}{3\log_2 27}$;

3) $\dfrac{2\log_{0{,}5}27}{\log_4 9}$; 4) $\dfrac{\log_{\frac{1}{9}}4}{2\log_{27}8}$;

5) $\log_{0{,}2}16-5\log_{25}8$; 6) $4\log_8 27-\log_{0{,}5}81$.

7. $\boxed{6}$ 1) $8^{\frac{\log_{10}2-\log_{0,1}5}{1-\log_{10}5}}$; 2) $0{,}2^{\frac{\log_{10}2-\log_{0,1}5}{1-\log_{10}2}}$;

3) $0{,}1^{\frac{(\log_{10}7)(1+\log_2\log_2 7)}{\log_2\log_2 49}}$; 4) $0{,}01^{\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2+(\log_3\log_3 243)\log_{10}3}}$.

8. $\boxed{5}$ Известно, что $\log_a b=3$. Найти:

1) $\log_{a^5}(a^{10}b^5)$; 2) $\log_{a^6}(a^6b^{12})$.

9. $\boxed{6}$ Известно, что $\log_{10}2\approx 0{,}301$. Найти с точностью до тысячных:

1) $\log_{10}800$; 2) $\log_{10}400$; 3) $\log_{10}0{,}16$; 4) $\log_{10}0{,}08$.

10. $\boxed{7}$ Решить уравнение:

1) $\log_x 2+\log_{x^2}4=4$; 2) $\log_{x^2}9+\log_x 3=4$;

3) $\log_{x^3}9+\log_{\sqrt[3]{x}}3=7\frac{1}{3}$; 4) $\log_{\sqrt{x}}5+\log_{x^3}25=5\frac{1}{3}$.

§ 3. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода

Примеры с решениями

1. Найти $\log_6 2$, если $\log_{12}3=a$.

Решение. Так как $12=2^2\cdot 3$, а $6=2\cdot 3$, то, полагая $\log_2 3=n$, выразим через n все заданные логарифмы:

$$\log_6 2=\frac{1}{\log_2 6}=\frac{1}{1+n},\ \log_{12}3=\frac{\log_2 3}{\log_2 12}=\frac{n}{2+n}.$$

По условию $\log_{12}3=a$, т. е. $\frac{n}{2+n}=a$, откуда $n=\frac{2a}{1-a}$. Тогда $\log_6 2=\frac{1}{1+n}=\frac{1}{1+\frac{2a}{1-a}}=\frac{1-a}{1+a}$.

Ответ. $\frac{1-a}{1+a}$.

2. Доказать, что если $a^2+b^2=7ab$ (где $a>0$ и $b>0$), то

$$\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

Доказательство. Данное равенство запишем в виде $a^2+b^2+2ab=7ab+2ab$, откуда $(a+b)^2=9ab$, $\frac{(a+b)^2}{9}=ab$. Если равны положительные числа, то равны и их логарифмы по одному основанию, т. е. $\lg\frac{(a+b)^2}{3^2}=\lg(ab)$, откуда $2\lg\frac{a+b}{3}=\lg a+\lg b$, $\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Решить уравнение:
   1) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 x = 6$;
   2) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.
2. $\boxed{6}$ Найти $\log_5 6$, если:
   1) $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$;
   2) $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = b$.
3. $\boxed{8}$ Найти:
   1) $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$;
   2) $\log_{12} 8$, если $\log_6 9 = a$.
4. $\boxed{6}$ Найти $\lg x$, если:
   1) $x = \sqrt{\dfrac{ab^3\sqrt{b\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{b^2\sqrt{ab}}}}$; 2) $x = \sqrt{\dfrac{ab\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b^2\sqrt{a}}}}$;
   3) $x = \sqrt{\dfrac{24\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}}$; 4) $x = \sqrt{\dfrac{15\sqrt{3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{25\sqrt{3}}}}$.
5. $\boxed{6}$ Найти $\ln x$, если:
   1) $x = \dfrac{\sqrt{e^3\sqrt{10}}}{\sqrt[4]{10^5\sqrt{e^5}}}$; 2) $x = \dfrac{\sqrt{5e^5\sqrt[3]{5^2}}}{\sqrt{e^3\sqrt[4]{5^3}}}$.

§ 4. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции

$$y = \log_3 \sqrt{x^2 - 0{,}25} + \log_x |x-3|.$$

Решение. Область определения заданной функции совпадает с решением системы

$$\begin{cases} x^2 - 0{,}25 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0{,}5, \\ x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Ответ. $0{,}5 < x < 1$, $1 < x < 3$, $x > 3$.

2. Изобразить схематически график функции

$$y = 10^{\lg x^2} + 5^{\log_5(4-2x)} - 7.$$

Решение. Область определения функции совпадает с решением системы

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 4 - 2x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

На этой области функция задается формулой

$$y = x^2 + 4 - 2x - 7,$$

т. е.

$$y = x^2 - 2x - 3. \quad (2)$$

Таким образом, график исходной функции (рис. 3) совпадает с графиком квадратичной функции (2) при $x < 2$, $x \neq 0$.

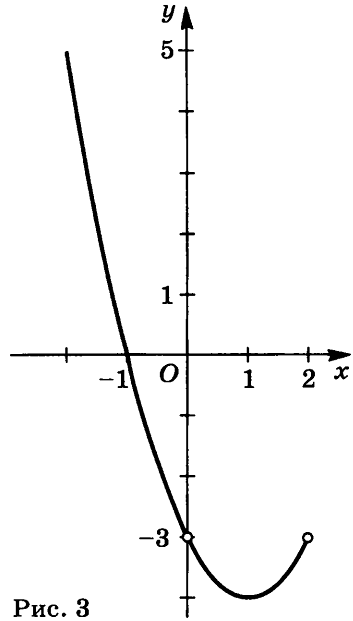

Рис. 3

Задания для самостоятельной работы

Найти область определения функции (1—3).

1. $\boxed{5}$ 1) $y = \log_{0,3}(4^{2x-1} - 2^{3x})$; 2) $y = \log_7(3^{3x+1} - 9^x)$.

2. $\boxed{5}$ 1) $y = \log_2|x| + \lg(x^2 + 3x + 2)$;

2) $y = \lg|x| + \log_{0,5}(4 - x^2)$;

3) $y = \lg|3 - x| - \lg(x^3 - 8)$;

4) $y = \log_3|x + 3| + 2\log_3(1 - x^3)$;

5) $y = \ln\sqrt{x+1} + \ln(1 - 8x^3)$;

6) $y = \lg(8x^3 + 1) - \log_2\sqrt{3 - x}$.

3. $\boxed{6}$ 1) $y = \dfrac{\log_x(x-2)}{\ln(x^2-8)}$; 2) $y = \dfrac{\log_x(x-3)}{\lg(x^2-12)}$;

3) $y = \dfrac{\lg(25-x^2)}{\log_x(x+1)}$; 4) $y = \dfrac{\ln(36-x^2)}{\log_x(x+2)}$.

4. $\boxed{7}$ Построить график функции:

1) $y = 2^{\log_2(x-1)+\log_2(x+2)}$; 2) $y = 0{,}3^{\log_{0,3}(x-2)+\log_{0,3}(x+2)}$;

3) $y = 3^{\log_3(2-x-x^2)}$; 4) $y = 2^{\log_2(x^2+x-2)}$;

5) $y = 2^{\log_2(x+3)} - 3^{\log_3(x-2)}$; 6) $y = 0{,}5^{\log_{0,5}(3-x)} + 2^{\log_2(x+1)}$.

Решить графически уравнение (5—8).

5.$\boxed{6}$ 1) $\lg x^2=1-x^2$; 2) $\lg x^3=1-x^2$;

3) $\log_2(4-x)=x-3$; 4) $\log_2(x-1)=4-x$.

6.$\boxed{7}$ 1) $\log_2|x|=1-x^2$; 2) $\log_{0,2}|x|=x^2-26$.

7.$\boxed{7}$ 1) $|\log_2 x|=3-x$; 2) $|\log_2(x+1)|=2-x$.

8.$\boxed{8}$ 1) $\log_2 x=\sqrt{5-x^2}$; 2) $\log_{0,5} x=-\sqrt{5-x^2}$.

9.$\boxed{8}$ Доказать, что функция:

1) $y=|\lg(x-3)|$ ограничена снизу;

2) $y=-|\ln(x+2)|$ ограничена сверху.

§ 5. Логарифмические уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162,$$

откуда $x^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162$, т. е. $x^{\log_3 x}=81$. Логарифмируя обе части последнего равенства по основанию 3, получим $\log_3^2 x=4$, откуда $\log_3 x=\pm 2$.

Ответ. $x_1=9$, $x_2=\frac{1}{9}$.

2. Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$$

Решение. Перепишем уравнение, разложив на множители выражения, стоящие под знаками логарифмов:

$$\log_{3x+7}(2x+3)^2+\log_{2x+3}((3x+7)(2x+3))=4.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+7>0, \\ 3x+7\neq 1, \\ 2x+3>0, \\ 2x+3\neq 1, \\ 2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)+1=4. \end{cases}$$

Первые четыре соотношения выполняются при $x>-1,5$ и $x\neq -1$. В последнем уравнении системы обозначим $t=\log_{3x+7}(2x+3)$ и запишем его в виде $2t+\frac{1}{t}=3$ ($t\neq 0$, так как $2x+3\neq 1$), откуда $2t^2-3t+1=0$ и $t_1=1$, $t_2=\frac{1}{2}$.

Возвращаясь к исходному обозначению, имеем:

1) $\log_{3x+7}(2x+3)=1$, откуда $3x+7=2x+3$, $x=-4$;

2) $\log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2}$, откуда $(3x+7)^{\frac{1}{2}}=2x+3$, $3x+7=$ $=(2x+3)^2$, $3x+7=4x^2+12x+9$, $4x^2+9x+2=0$, $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{4}$.

Среди чисел -4, -2, $\frac{1}{4}$ условиям $x>-1{,}5$ и $x\neq-1$ удовлетворяет только $x=\frac{1}{4}$.

Ответ. $x=\frac{1}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—13).

1. $\boxed{5}$ 1) $\log_{\frac{1}{3}}(1+\log_3(2^x-7))=-1$;

2) $\log_{0,5}(3+\log_2(3^x-7))=-2$.

2. $\boxed{6}$ 1) $\lg\frac{x^2+4}{x-3}=\lg x$;

2) $\log_{0,1}\frac{x^2-4}{x+3}=\log_{0,1}x$.

3. $\boxed{6}$ 1) $\log_3(5-x)+2\log_3\sqrt{3-x}=1$;

2) $\log_2(2-x)+2\log_2\sqrt{1-x}=2+\log_2 3$.

4. $\boxed{6}$ 1) $\lg(35-x^3)=3\lg(5-x)$;

2) $3\lg(x-3)=\lg(x^3-63)$.

5. $\boxed{7}$ 1) $\lg\lg(x-1)=\lg\lg(2x+1)-\lg 2$;

2) $\lg\lg(x+1)-\lg 2=\lg\lg(x-1)$.

6. $\boxed{6}$ 1) $x^{\log_3 x}=81$; 2) $x^{\log_2 x}=16$;

3) $x^{1-\lg x}=0{,}01$; 4) $x^{\log_3 x-2}=27$.

7. $\boxed{7}$ 1) $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$;

2) $(\sqrt[3]{x})^{\lg x}=10^{6+\lg x}$.

8. $\boxed{7}$ 1) $\frac{3\lg x-7}{\lg x+5}=\frac{\lg x-3}{\lg x+2}$; 2) $\frac{3\lg x-10}{\lg x+4}=\frac{\lg x-4}{\lg x+1}$.

9. $\boxed{7}$ 1) $\lg\lg x+\lg(\lg x^3-2)=0$;

2) $\log_5\lg x+\log_5(\lg x^5-4)=0$.

10. $\boxed{7}$ 1) $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}}3+\log_3\sqrt{x}+\frac{1}{2}$;

2) $\log_5 x-\log_x 5=\log_5\sqrt{x}+\log_{\sqrt{x}}5-0{,}5$.

11. $\boxed{8}$ 1) $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$;

2) $\log_3^2 x\cdot\log_x\frac{27}{x}=-4$.

12. $\boxed{8}$ 1) $3\log_{x^2}16+\log_{3\sqrt{x}}5=3$;

2) $\log_{x^2}81+\log_{\sqrt{x}}4=2$.

13. $\boxed{9}$ 1) $\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4)=2-\dfrac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}$;

2) $\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\dfrac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.

14. $\boxed{10}$ В зависимости от значений параметра a решить уравнение:

1) $\log_a(x-2)-\log_a x=1$;

2) $\log_a x+1=\log_a(x+6)$;

3) $\log_a x+\log_a(4-x)=1$;

4) $\log_a(6-x)=2-\log_a x$.

15. $\boxed{10}$ Решить относительно x уравнение:

1) $a^2\cdot 4^x-(a-1)\cdot 2^{2x+1}=1+3a$;

2) $a\cdot 3^{2x+1}-(a+1)\cdot 9^x=a^2$.

16. $\boxed{9}$ Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 1+\log_3(x+y)\log_2 3=2\log_4 7-\log_2 x, \\ \log_2(xy+1)=2\log_4 y+\log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_4 x\cdot\log_3 4=\log_3 5+\log_{\frac{1}{3}}(2y+4x), \\ \log_3(x-y)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{y}-3\log_{27}(2+xy). \end{cases}$

§ 6. Логарифмические неравенства

Примеры с решениями

1. Решить неравенство $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Решение. При $t=\log_2 x$ исходное неравенство принимает вид $\dfrac{2-t}{2(1+t)}\leqslant\dfrac{1}{2}$, откуда

$$\frac{-2t+1}{1+t}\leqslant 0, \text{ т. е. } \frac{2t-1}{t+1}\geqslant 0.$$

Последнее неравенство выполняется при $t<-1$ и $t\geqslant\frac{1}{2}$. Возвращаясь к переменной x, имеем $\log_2 x<-1$ и $\log_2 x\geqslant\frac{1}{2}$, откуда $x<\frac{1}{2}$ и $x\geqslant\sqrt{2}$.

2. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\log_a x - \log_a (6-x) > 1.$$

Решение. При $a \leqslant 0$ и $a=1$ неравенство не имеет решений. Для остальных значений a запишем исходное неравенство в виде

$$\log_a x > \log_a (a(6-x)). \qquad (*)$$

Функция $y=\log_a t$ определена при $t>0$ и может быть как возрастающей, так и убывающей. Рассмотрим оба случая, заменяя неравенство (*) равносильными системами.

1) $\begin{cases} a>1, \\ x>a(6-x)>0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1, \\ x(1+a)>6a, \\ a(6-x)>0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1, \\ x>\dfrac{6a}{1+a}, \\ x<6, \end{cases}$

так как $1+a>0$ и $a>0$. Последняя система имеет решения $\frac{6a}{1+a}<x<6$, если $\frac{6a}{1+a}<6$. А последнее соотношение (т. е. $6a<6+6a$) верно при любом $a>1$.

Итак, если $a>1$, то $\frac{6a}{1+a}<x<6$.

2) $\begin{cases} 0<a<1, \\ 0<x<a(6-x); \end{cases}$ $\begin{cases} 0<a<1, \\ x>0, \\ x(1+a)<6a; \end{cases}$ $\begin{cases} 0<a<1, \\ x>0, \\ x<\dfrac{6a}{1+a}. \end{cases}$

Последняя система имеет решение $0<x<\frac{6a}{1+a}$, если $\frac{6a}{1+a}>0$, а это верно при всех $0<a<1$. Итак, если $0<a<1$, то $0<x<\frac{6a}{1+a}$.

Ответ. Если $a \leqslant 0$, $a=1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $0<x<\frac{6a}{1+a}$; если $a>1$, то $\frac{6a}{1+a}<x<6$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенство (1—9).

1. $\boxed{5}$ 1) $\log_{0,1} \dfrac{2x+3}{2x^2+3}>0$; 2) $\lg \dfrac{2x-5}{-2x^2-5}<0$.

2. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{\log_{0,2}\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)}{\log_7(2x^2+2)} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{\lg\left(3x^2-\frac{1}{3}\right)}{\log_{0,1}(1+x^2)} \geqslant 0$;

3) $\dfrac{\log_{\sqrt{2}}\left(12x^2-\frac{1}{3}\right)}{\log_2(1+2x^2)} \leqslant 0$; 4) $\dfrac{\log_{0,1}(1,1+x^2)}{\log_3\left(3x^2-\frac{1}{12}\right)} \leqslant 0$.

3. $\boxed{6}$ 1) $\log_2(x^2-7x+6)\leqslant 1+\log_2 7$;

2) $\log_{0,5}(-x^2+9x-14)\geqslant \log_{0,5} 3-1$.

4. $\boxed{6}$ 1) $\log_{0,5}(x+2)+\log_{0,5}(x+3)\geqslant \log_{0,5} 3-1$;

2) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;

3) $2+\log_3(x+2)\leqslant \log_3(x^2+8)$;

4) $-1+\log_{0,5}(4-x)\geqslant \log_{0,5}(x^2+5)$.

5. $\boxed{7}$ 1) $2\log_5 x-\log_x 5\geqslant 1$; 2) $\log_{0,5} x+2\log_x 2\leqslant 1$.

6. $\boxed{7}$ 1) $\dfrac{1}{1+\lg x}+\dfrac{1}{1-\lg x}\geqslant 2$;

2) $\dfrac{1}{2-\lg x}+\dfrac{1}{2+\lg x}\leqslant 1$.

7. $\boxed{7}$ 1) $\log_3^2(x-1)^2\leqslant 16$; 2) $\log_{0,5}^2(x+1)^2\geqslant 4$.

8. $\boxed{8}$ 1) $\log_{x^2+1}(9-x^2)\leqslant 1$; 2) $\log_{x^2+2}(4-x^2)\leqslant 1$;

3) $\log_{\frac{1}{x^2+1}}(9-x^2)\geqslant -1$; 4) $\log_{\frac{1}{x^2+2}}(4x^2-1)\geqslant -1$;

5) $\log_{\frac{1}{x^2+1}}(x^2-x)\geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{1}{x^2+2}}(x^2+x)\geqslant -1$.

9. $\boxed{9}$ 1) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$; 2) $\log_{x+3}(x^2-x)<1$;

3) $\log_x \log_3(9^x-6)\geqslant 1$; 4) $\log_x \log_2(4^x-6)\leqslant 1$.

10. $\boxed{6}$ Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{\lg(x^2-6x+6)}$;

2) $y=\sqrt{\log_3(6x^2+x-1)}$;

3) $y=\sqrt{\lg x+\lg(x+1,5)}$;

4) $y=\sqrt{\lg(x-2)+\lg(x+2)}$;

5) $y=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-5x+6)+1}$;

6) $y=\sqrt{1-\log_8(x^2-4x+3)}$.

11. $\boxed{10}$ Для каждого значения параметра a решить неравенство:

1) $\log_a(x-3)-\log_a(x-1)>1$;

2) $\log_a(1-x)+1<\log_a(7-x)$;

3) $\log_{\frac{a}{a-1}}(x^2+3)>1$;

4) $\log_{\frac{3-a}{3}}(x^2+0,25)<2$;

5) $2^{2x+1}\cdot(a-2)+4^x\cdot(1-a)<a-2$;

6) $(a-1)\cdot 4^x+2^{2x+1}\cdot(3-a)>1-a$.

Контрольная работа

1. Вычислить

$$5^{\frac{\lg 5-\log_{0,1}2}{\log_9 25}} \quad \left[3^{\frac{\lg 5-\log_{0,1}2}{\log_4 9}}\right].$$

2. Сравнить числа a и b, если:

$a=\log_{0,2}0,3,\ b=\log_{11}\sin\frac{\pi}{2}$ $\left[a=\log_{\frac{2}{3}}2,\ b=\log_2\sin\frac{\pi}{6}\right]$.

3. Решить уравнение:

1) $\log_2(2+\log_3(3+x))=0$ $[\lg(3+2\log_2(1+x))=0]$;

2) $3\log_3 x+3\log_x 3=10$ $[3\log_7 x-2\log_x 7=1]$.

4. Решить неравенство

$$2\log_2(2x+7)\geqslant 5+\log_2(x+2)$$

$$[2\log_2(x+5)\leqslant 3+\log_2(11+x)].$$

---

5. Построить график функции

$$y=\log_{0,5}|x+1| \quad [y=|\log_3(x-1)|].$$

6. Решить уравнение

$$(\sqrt[3]{x})^{\log_7 x-2}=7 \quad [(\sqrt{x})^{\lg x}=10^{4+\lg x}].$$

7. Решить неравенство

$$\log_x(1-2x)<1 \quad [\log_{3-2x}x<2].$$

VIII Тригонометрические формулы

§ 1. Радианная мера угла

Задания для самостоятельной работы

Выразить углы в радианной мере (**1—3**).

1. $\boxed{4}$ 1) $22°30'$; 2) $42°48'$.

2. $\boxed{4}$ 1) $10°15'$; 2) $12°25'$.

3. $\boxed{4}$ 1) $15°16'$; 2) $21°22'$.

Выразить углы в градусной мере (**4—6**).

4. $\boxed{4}$ 1) $0{,}1\pi$; 2) $0{,}01\pi$.

5. $\boxed{4}$ 1) $\frac{17\pi}{5}$; 2) $\frac{24\pi}{5}$.

6. $\boxed{5}$ 1) 0,02 (с точностью до 0,01);
2) 0,05 (с точностью до 0,01).

Решить задачи (**7—8**).

7. $\boxed{6}$ 1) Прямоугольный треугольник ABC (где $\angle C=90°$) вписан в окружность, радиус которой равен 3 см. Найти длину дуги AC, если $\angle A=18°$.
2) Прямоугольный треугольник ABC (где $\angle C=90°$) вписан в окружность, радиус которой равен 5 см. Найти длину дуги BC, если $\angle B=36°$.

8. $\boxed{7}$ 1) Треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом 9 см. Точки A', B' и C' соответственно симметричны вершинам A, B и C относительно центра окружности. Найти: а) длину дуги $C'B$, если $\angle A=56°$, $\angle B=64°$; б) площадь сектора BOA'.
2) Треугольник DCE вписан в окружность с центром O и радиусом 4 см. Точки D', C' и E' соответственно симметричны вершинам треугольника DCE относительно центра окружности. Найти: а) длину дуги $C'E$, если $\angle D=48°$, $\angle E=68°$; б) площадь сектора $D'OE$.

9. $\boxed{5}$ 1) С помощью таблиц или калькулятора выразить в радианной мере углы:
1) $21°18'$, $78°15'$, $198°17'$; 2) $27°42'$, $82°32'$, $201°9'$.

10. $\boxed{5}$ С помощью таблиц или калькулятора выразить в градусной мере углы:

1) 0,144; 1,3; 2; 2) 0,47; 1,5; 2,2.

§ 2. Поворот точки вокруг начала координат

Пример с решением

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы $\alpha=\pm 0{,}3\pi+2\pi k$ и $\beta=\pm 0{,}7\pi+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Записать одной формулой все углы, поворотом на которые точка $P(1;\ 0)$ переходит в точки, изображенные на окружности.

Решение. Точка A получена поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы $\alpha=$ $=0{,}3\pi+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Точка A_1 получена поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы $\alpha=-0{,}3\pi+$ $+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Точки B и B_1 получены поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы $\beta=0{,}7\pi+$ $+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $\beta_1=-0{,}7\pi+$ $+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, соответственно. Точки A, B_1, A_1, B получены поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы $\gamma=\pm 0{,}3\pi+$ $+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 4).

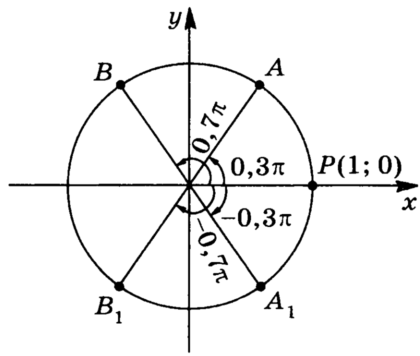

Рис. 4

Задания для самостоятельной работы

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α **(1—4)**.

1. $\boxed{4}$ 1) $\alpha=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. $\boxed{4}$ 1) $\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\alpha=-\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\boxed{4}$ 1) $\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\boxed{4}$ 1) $\alpha=-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Отметить на единичной окружности точки, приближенно соответствующие точкам, полученным поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α **(5—7)**.

5. $\boxed{5}$ 1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=2$.

6. $\boxed{5}$ 1) $\alpha=4$; 2) $\alpha=3$.

7. $\boxed{5}$ 1) $\alpha=5$; 2) $\alpha=6$.

Установить четверть, в которой расположена точка P_α, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α **(8—10)**.

8. $\boxed{6}$ 1) $10<\alpha<12$; 2) $12<\alpha<13$.

9. $\boxed{6}$ 1) $\frac{15\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{17\pi}{4}$; 2) $\frac{23\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{25\pi}{3}$.

10. $\boxed{6}$ 1) $1892°\leqslant\alpha\leqslant1992°$;
2) $2238°\leqslant\alpha\leqslant2338°$.

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1;\ 0)$ на углы α и β. Записать одной формулой все углы, поворотом на которые точка $P(1;\ 0)$ переходит в точки, изображенные на этой окружности **(11—13)**.

11. $\boxed{6}$ 1) $\alpha=\pi k,\ \beta=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;
2) $\alpha=\pi k,\ \beta=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

12. $\boxed{6}$ 1) $\alpha=0{,}4\pi+2\pi k,\ \beta=1{,}4\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;
2) $\alpha=0{,}2\pi+2\pi k,\ \beta=1{,}2\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

13. $\boxed{6}$ 1) $\alpha=\pm0{,}1\pi+2\pi k,\ \beta=\pm0{,}9\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$;
2) $\alpha=\pm0{,}6\pi+2\pi k,\ \beta=\pm0{,}4\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

14. $\boxed{6}$ 1) Зубчатое колесо, имеющее 56 зубцов, повернулось по часовой стрелке на 21 зубец. Выразить в радианах угол поворота.
2) Зубчатое колесо, имеющее 56 зубцов, повернулось против часовой стрелки на 32 зубца. Выразить в радианах угол поворота.

Выразить углы в радианах **(15—16)**.

15. $\boxed{6}$ 1) 3,5 румба;
2) 7,5 румба.

16. $\boxed{6}$ 1) 12,5 больших делений угломера;
2) 6,5 больших делений угломера.

17. $\boxed{6}$ Колесо вращается с угловой скоростью ω. За сколько секунд оно сделает полный оборот, если:
1) $\omega=0{,}3\pi$ рад/с; 2) $\omega=0{,}1\pi$ рад/с?

18. $\boxed{6}$ Угловая скорость якоря генератора ω рад/с. Сколько оборотов в минуту делает якорь генератора, если:
1) $\omega=92\pi$ рад/с;
2) $\omega=120\pi$ рад/с?

§ 3. Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Примеры с решениями

1. Изобразить на единичной окружности точку $A(\cos\alpha; \sin\alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\cos\alpha > 0$. Найти значение $\cos\alpha$.

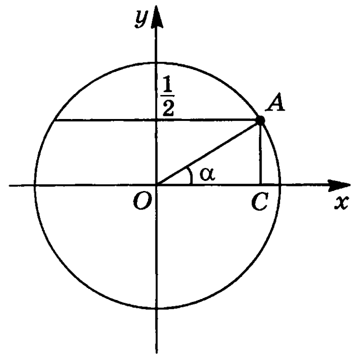

Рис. 5

Решение. Рассмотрим треугольник AOC (рис. 5).

Так как $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, то $AC = \frac{1}{2}$, $AO = 1$, следовательно,

$$OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(что соответствует абсциссе точки A), значит, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Найти значения x из промежутка $[-\pi; 3\pi]$, для которых верно равенство $\sin\alpha = -1$.

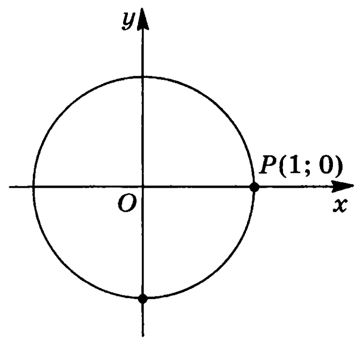

Рис. 6

Решение. Ординату, равную -1, имеет одна точка окружности $(0; -1)$ (рис. 6), которая получается при повороте точки $P(1; 0)$ на углы $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Среди чисел из промежутка $[-\pi; 3\pi]$ такой вид имеют числа $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, которые получены при $k = 0$, $k = 1$.

При других значениях k получаем числа, не принадлежащие данному промежутку.

3. Решить уравнение $2\cos 3x + 2 = 0$.

Решение. Выполнив равносильные преобразования, получим $\cos 3x = -1$. Точка с абсциссой, равной -1, получается в результате поворота точки $P(1; 0)$ на углы $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е.

$$3x = \pi + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Изобразить на единичной окружности точку, полученную поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол α, и с помощью свойств окружности и прямоугольного треугольника вычислить синус и косинус угла α (**1—5**).

1. $\boxed{4}$ 1) $\alpha=\frac{\pi}{3}$; 2) $\alpha=30°$.

2. $\boxed{4}$ 1) $\alpha=135°$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3. $\boxed{5}$ 1) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$; 2) $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$.

4. $\boxed{5}$ 1) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{2}$.

5. $\boxed{5}$ 1) $\alpha=-\frac{8\pi}{3}$; 2) $\alpha=-\frac{9\pi}{4}$.

6. $\boxed{6}$ Найти значения x из заданного промежутка, для которых выполняется равенство $\sin x=a$:

1) $a=0,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $a=1,\ x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

7. $\boxed{6}$ Найти значения x из заданного промежутка, для которых выполняется равенство $\cos x=a$, если:

1) $a=-1,\ x\in\left[-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $a=0,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Сравнить числа с помощью единичной окружности (**8—9**).

8. $\boxed{5}$ 1) $\sin\frac{2\pi}{3}$ и $\sin\frac{5\pi}{6}$; 2) $\sin\frac{3\pi}{4}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$.

9. $\boxed{5}$ 1) $\cos\frac{2\pi}{3}$ и $\cos\frac{5\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{3\pi}{4}$ и $\cos\frac{5\pi}{8}$.

Назвать два положительных и два отрицательных числа α, удовлетворяющие данному равенству (**10—11**).

10. $\boxed{5}$ 1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. $\boxed{5}$ 1) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения (**12—13**).

12. $\boxed{4}$ 1) $2+\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha+\frac{1}{2}$.

13. $\boxed{5}$ 1) $-2\cos\alpha$; 2) $-3\sin\alpha$.

Решить уравнение с помощью единичной окружности (14—16).

14. $\boxed{4}$ 1) $\sin 3x = 0$; 2) $\cos 2x = 0$.

15. $\boxed{5}$ 1) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $\sin\left(\frac{x+\pi}{3}\right) = 1$.

16. $\boxed{5}$ 1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$; 2) $\cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right) = -1$.

17. $\boxed{6}$ 1) Точка $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ симметрична точке B относительно оси Oy и точке C относительно начала координат. Найти: а) координаты точки B; б) синус, косинус и тангенс угла α, на который нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку C.

2) Точка $D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ симметрична точке E относительно оси Ox и точке K относительно начала координат. Найти: а) координаты точки K; б) синус, косинус и тангенс угла β, на который нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку E.

§ 4. Знаки синуса, косинуса и тангенса

Примеры с решениями

1. Определить знак выражения $\sin 3 \cos 5 + \operatorname{tg} 2$.

Решение. Так как $\sin 3 > 0$ $\left(3 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]\right)$, $\cos 5 < 0$ $\left(5 \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]\right)$, то $\sin 3 \cos 5 < 0$, $\operatorname{tg} 2 < 0$ $\left(2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]\right)$, следовательно, сумма двух отрицательных выражений принимает отрицательное значение.

2. Определите знак $\sin\alpha$, если известно, что

$$\frac{31\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{33\pi}{2} \text{ и } \sin\alpha\cos\alpha < 0.$$

Решение. Выясним, какой четверти принадлежит угол α. Выделим целую часть π в числах, являющихся концами промежутка $\left[\frac{31\pi}{2}; \frac{33\pi}{2}\right]$, получим $\frac{31\pi}{2} = 16\pi - \frac{\pi}{2}$, $\frac{33\pi}{2} = 16\pi + \frac{\pi}{2}$. Значит, угол α лежит в первой или четвертой четверти. Так как по условию $\sin\alpha\cos\alpha < 0$, то знаки значений синуса и косинуса должны быть разными, следовательно, α лежит в четвертой четверти и $\sin\alpha < 0$.

Задания для самостоятельной работы

Определить знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ (**1—3**).

1. $\boxed{4}$ 1) $\frac{21\pi}{2}<\alpha<\frac{23\pi}{2}$; 2) $\frac{19\pi}{2}<\alpha<\frac{21\pi}{2}$.

2. $\boxed{4}$ 1) $13\pi<\alpha<14\pi$; 2) $32\pi<\alpha<33\pi$.

3. $\boxed{5}$ 1) $-\frac{41\pi}{2}<\alpha<-\frac{39\pi}{2}$; 2) $-\frac{19\pi}{2}<\alpha<-\frac{17\pi}{2}$.

Сравнить числа (**4—6**).

4. $\boxed{5}$ 1) $\sin\frac{\pi}{13}$ и $\sin\frac{25\pi}{13}$; 2) $\cos\frac{7\pi}{18}$ и $\cos\frac{11\pi}{18}$.

5. $\boxed{5}$ 1) $\sin(-1{,}3)$ и $\sin(-3{,}2)$;
2) $\cos(-2{,}5)$ и $\cos(-5{,}5)$.

6. $\boxed{5}$ 1) $\operatorname{tg}585^\circ$ и $\cos 585^\circ$; 2) $\operatorname{ctg}485^\circ$ и $\sin 485^\circ$.

Определить знак выражения (**7—8**).

7. $\boxed{6}$ 1) $\sin 2{,}8\cdot\cos 2{,}8-\operatorname{tg}3{,}31$;
2) $\sin 5{,}1\cdot\cos 5{,}1+\operatorname{ctg}5{,}1$.

8. $\boxed{6}$ 1) $\operatorname{tg}6\sin 5-\cos 4$; 2) $\operatorname{ctg}4\cdot\cos 3-\sin 2$.

9. $\boxed{6}$ Определить знак $\sin\alpha$, если:
1) $\frac{13\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{15\pi}{2}$ и $\sin\alpha\cos\alpha>0$;
2) $\frac{17\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{19\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha<0$.

10. $\boxed{6}$ Определить знак $\cos\alpha$, если:
1) $8\pi\leqslant\alpha\leqslant 9\pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha>0$; 2) $23\pi\leqslant\alpha\leqslant 24\pi$ и $\sin\alpha\cos\alpha<0$.

11. $\boxed{5}$ Может ли быть число A положительным, если:
1) $A=\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\alpha\cos\alpha<0$;
2) $A=\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha\cos\alpha>0$?

§ 5. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Примеры с решениями

1. Вычислить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{cosec}\alpha=-\sqrt{5}$ и $13\pi<\alpha<13{,}5\pi$.

Замечание. $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ (читается «секанс α»); $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$ (читается «косеканс α»).

Решение. Так как $\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{5}$, то $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (угол α лежит в третьей четверти).

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

2. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

Решение. 1) По условию $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$, значит, $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 9$, $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2 = 9$, т. е. $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 7$.

2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 1)$.

По условию $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$, из решения предыдущей задачи $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 7$, следовательно, $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = 18$.

3. Вычислить $\sin^5\alpha + \cos^5\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.

Решение. Разложим $\sin^5\alpha + \cos^5\alpha$ на множители путем деления $\sin^5\alpha + \cos^5\alpha$ на $\sin\alpha + \cos\alpha$ столбиком. Получим $\sin^5\alpha + \cos^5\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot(\sin^4\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos^3\alpha + \cos^4\alpha) = a(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha\cos^2\alpha) = a(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha)$.

Выразим каждое слагаемое алгебраической суммы в скобках через a:

$$a^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

значит, $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2-1}{2}$, $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{(a^2-1)^2}{4}$.

$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$, значит, $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{(a^2-1)^2}{2}$.

$$\sin^5\alpha + \cos^5\alpha = a\left(1 - \frac{(a^2-1)^2}{2} - \frac{a^2-1}{2} + \frac{(a^2-1)^2}{4}\right) =$$
$$= a\left(1 - \frac{a^2-1}{2}\left(a^2 - 1 + 1 - \frac{a^2-1}{2}\right)\right) = a\left(1 - \frac{a^2-1}{2}\cdot\frac{a^2+1}{2}\right) =$$
$$= a\cdot\frac{4-a^4+1}{4} = \frac{5a-a^5}{4}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—2).

1. $\boxed{5}$ 1) $\sin\alpha$ и $\sec\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$, $4{,}5\pi < \alpha < 5\pi$;

2) $\cos\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4$, $19\pi < \alpha < 19{,}5\pi$.

2. $\boxed{5}$ 1) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sec\alpha = -3\frac{4}{7}$, $\frac{13\pi}{2} < \alpha < 7\pi$;

2) $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{3}$, $24\pi < \alpha < \frac{49\pi}{2}$.

Выяснить, при каких значениях x справедливо равенство (3—4).

3. $\boxed{6}$ 1) $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$;

2) $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$.

4. $\boxed{6}$ 1) $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$;

2) $\operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

5. $\boxed{6}$ Существует ли такой угол α, для которого верно равенство:

1) $\dfrac{3\sin^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 1$;

2) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \dfrac{2}{7}$?

6. $\boxed{6}$ Вычислить:

1) $\dfrac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{3\cos\alpha-4\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = a$;

2) $\dfrac{3\sin\alpha+7\cos\alpha}{4\cos\alpha-3\sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = a$.

7. $\boxed{6}$ Найти значение выражения $\dfrac{5}{2+6\sin\alpha\cos\alpha}$, если:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = 10$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

8. $\boxed{6}$ Найти значение выражения $\dfrac{3}{9-8\sin^2\alpha}$, если:

1) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Найти значение выражения (9—10).

9. $\boxed{6}$ 1) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = -0{,}8$;

2) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\cos\alpha - \sin\alpha = -0{,}2$.

10. $\boxed{6}$ 1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 3$.

11. $\boxed{7}$ Вычислить $\sin^5\alpha + \cos^5\alpha$ с точностью до 0,1, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}2$;

2) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}3$.

12. $\boxed{8}$ Вычислить:

1) $\sin^5\alpha - \cos^5\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = a$;

2) $\cos^5\alpha - \sin^5\alpha$, если $\cos\alpha - \sin\alpha = b$.

§ 6. Тригонометрические тождества

Примеры с решениями

1. Доказать тождество

$$\sqrt{\sin^2 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)}=-(\sin x+\cos x)$$

при $x\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком корня, с целью выделения полного квадрата:

$$\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+\cos^2 x+\cos^2 x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}=$$

$=\sqrt{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+$ $+\cos x|=-\sin x-\cos x$ (в III четверти $\sin x<0$, $\cos x<0$).

2. Выяснить, при каких значениях x справедливо равенство

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\operatorname{tg} x+\sin x}}=\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x.$$

Решение. По определению $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, поэтому

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\operatorname{tg} x+\sin x}}=\sqrt{\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}+\sin x}}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $(1-\cos x)$, получим

$$\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-2\operatorname{ctg} x\cdot\frac{1}{\sin x}+\operatorname{ctg}^2 x}=$$

$=\sqrt{(\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x)^2}=|\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x|$.

Если $\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x>0$, то $|\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x|=\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x$.

Выясним, при каких значениях x выполняется неравенство $\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x>0$. Преобразуем разность, получим $\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}>0$. Так как $1-\cos x>0$ при всех x, то $\sin x>0$ при значениях x, расположенных в I и II четвертях, т. е. при $2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Но левая часть исходного равенства теряет смысл при всех x, где $\cos x=0$, т. е. в нашем случае это $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n$ или $x\neq\frac{(1+4n)\pi}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. Следовательно,

$$2\pi n<x<\frac{(1+4n)\pi}{2},\quad \frac{(1+4n)\pi}{2}<x<(1+2n)\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Доказать тождество:

1) $\mathrm{tg}^2 x + \sec^2 y = \mathrm{tg}^2 y + \sec^2 x$;

2) $\mathrm{cosec}^2 x + \mathrm{ctg}^2 y = \mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{cosec}^2 y$.

Выяснить, при каких значениях x справедливо равенство (2—5).

2. $\boxed{6}$ 1) $\sqrt{\mathrm{tg}^2 x - \sin^2 x} = \mathrm{tg}\, x \sin x$;

2) $\sqrt{\mathrm{ctg}^2 x - \cos^2 x} = \mathrm{ctg}\, x \cos x$.

3. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{cosec}\, x$;

2) $\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \mathrm{tg}\, x - \sec x$.

4. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{\sin^2 x + \mathrm{cosec}^2 x} = -\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x$;

2) $\sqrt{\dfrac{4}{\sin^2 x \cos^2 x}} = 2\,\mathrm{tg}\, x + 2\,\mathrm{ctg}\, x$.

5. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} = -2\sec x$;

2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}} = -2\,\mathrm{cosec}\, x$.

Доказать тождество и найти допустимые значения входящих в него букв (углов) (6—8).

6. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

2) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

7. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x} = \sin^2 x$;

2) $\dfrac{\mathrm{ctg}\, x}{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x} = \cos^2 x$.

8. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\mathrm{ctg}\, x - \sin x \cos x} = 2\,\mathrm{tg}^2 x$;

2) $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\mathrm{tg}\, x - \sin x \cos x} = 2\,\mathrm{ctg}^2 x$.

9. $\boxed{7}$ Доказать тождество:

1) $\sin\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha) + \cos\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha) = \sec\alpha + \mathrm{cosec}\,\alpha$;

2) $\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + \cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha$.

§ 7. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Задания для самостоятельной работы

Сравнить числа (1—3).

1.$\boxed{5}$ 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $-\cos\frac{2\pi}{3}$; 2) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

2.$\boxed{5}$ 1) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

3.$\boxed{5}$ 1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ и $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ и $\cos\left(-\frac{13\pi}{7}\right)$.

4.$\boxed{6}$ Найти значение выражения:

1) $\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha)$, если $\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)=a$;

2) $\sin\alpha-\cos(-\alpha)$, если $\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha)=a$.

5.$\boxed{7}$ Доказать неравенство:

1) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}(-\alpha)\geqslant 2$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\operatorname{tg}^2(-\alpha)+\operatorname{ctg}^2(-\alpha)\geqslant 2$.

§ 8. Формулы сложения

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—2).

1.$\boxed{5}$ 1) $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\beta=0{,}6$, $2{,}5\pi<\alpha<3\pi$, $1{,}5\pi<\beta<2\pi$;

2) $\sin(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}6$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$, $0{,}5\pi<\alpha<\pi$, $-1{,}5\pi<\beta<-\pi$.

2.$\boxed{5}$ 1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}8$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $\pi<\alpha<1{,}5\pi$, $-0{,}5\pi<\beta<0$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}6$, $\operatorname{ctg}\beta=2$, $0{,}5\pi<\alpha<\pi$, $\pi<\beta<1{,}5\pi$.

Доказать тождество (3—6).

3.$\boxed{5}$ 1) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$.

4.$\boxed{7}$ 1) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos^3\beta-\cos\alpha\sin^3\beta=\sin\beta\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$;

2) $\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin^3\beta-\cos\alpha\cos^3\beta=\sin\beta\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$.

5.$\boxed{7}$ 1) $\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)-\sin\beta\sin(\gamma+\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)=$ $=2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$;

2) $\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos\beta\cos(\gamma+\alpha)+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)=$ $=\cos(\alpha-\beta-\gamma)$.

6. $\boxed{7}$ 1) $4\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=4\cos^2 x-3;$

2) $4\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=3-4\sin^2 x.$

Доказать формулы сложения для трех аргументов (7—8).

7. $\boxed{6}$ 1) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$
$+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$

2) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-$
$-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

8. $\boxed{6}$ 1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha)};$

2) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha-1}.$

9. $\boxed{7}$ Решить относительно x уравнение:

1) $\cos x\cos ax-\sin x\sin ax=1;$

2) $\sin ax\cos x+\cos ax\sin x=0.$

§ 9. Синус, косинус и тангенс двойного угла

Примеры с решениями

1. Упростить выражение $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x$.

Решение. Используем формулы понижения степени и сложения, получим

$$\frac{(3\sin x-\sin 3x)\cos 3x}{4}+\frac{(3\cos x+\cos 3x)\sin 3x}{4}=$$

$$=\frac{3(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)}{4}=\frac{3}{4}\sin(x+3x)=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

2. Упростить выражение $\dfrac{1-\sin^4 x-\cos^4 x}{1-\sin^6 x-\cos^6 x}$.

Решение. Выделив полный квадрат, получим

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Воспользуемся формулой суммы кубов и результатом предыдущего преобразования.

$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=$

$=(\sin^4 x+\cos^4 x)-\sin^2 x\cos^2 x=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)-\frac{1}{4}\sin^2 2x=$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$

Дробь примет вид

$$\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)}{1-\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)}=\frac{\frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{3}{4}\sin^2 2x}=\frac{2}{3}.$$

Данное преобразование верно, если $\sin 2x \neq 0$, т. е. при $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Упростить произведение

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ \ldots\ \cos\frac{x}{2^n}.$$

Решение. Последовательно, начиная с последнего множителя, используем формулу синуса двойного аргумента:

$$\frac{2^{n-1}\left(2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\right)\cos\frac{x}{2^{n-1}}\ldots\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{2^{n-2}\left(2\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cos\frac{x}{2^{n-2}}\ldots\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Данное преобразование верно, если $\sin\frac{x}{2^n}\neq 0$, т. е. при $x \neq 2^n\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Если $x = 2^n\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то выражение равно $\cos\pi k = (-1)^k$.

4. Вычислить $\sin 18°$.

Решение. Пусть $\sin 18° = x$. Воспользуемся формулами двойного и тройного аргументов. Для этого рассмотрим аргументы $36°$ и $54°$ и соответственно учтем, что $\sin 36° = \sin(90° - 54°) = \cos 54°$. Из формул двойного и тройного аргументов следует, что $\sin 36° = 2\sin 18°\cos 18°$, $\cos 54° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$. Получим

$$2\sin 18°\cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°,$$
$$2\sin 18° = 4(1-\sin^2 18°) - 3.$$

Таким образом, $\sin 18°$ — корень квадратного уравнения $4x^2 + 2x - 1 = 0$, т. е. $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, откуда $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, так как $\sin 18° > 0$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—4).

1. $\boxed{6}$ 1) $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}75$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

2. $\boxed{7}$ 1) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$;

2) $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-0{,}75$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

3. $\boxed{6}$ 1) $\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos 3\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. $\boxed{6}$ 1) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-0{,}75$, $-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<0$;

2) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=0{,}75$, $\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{5\pi}{4}$.

Существует ли такой угол α, для которого выполняется равенство (5—6)?

5. $\boxed{7}$ 1) $\sin\alpha\cos\alpha=\sin 35°$; 2) $\sin\alpha\cos\alpha=\cos 50°$.

6. $\boxed{7}$ 1) $\frac{\cos 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg} 50°$; 2) $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\operatorname{ctg} 40°$.

Доказать тождество (7—9).

7. $\boxed{7}$ 1) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

8. $\boxed{7}$ 1) $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg} 2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}$.

9. $\boxed{7}$ 1) $\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

Доказать неравенство (10—11).

10. $\boxed{7}$ 1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2$;

2) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\leqslant 2$.

11. $\boxed{7}$ 1) $\cos\alpha+\sin\alpha>1$, если $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$;

2) $\sec^4\alpha+\operatorname{cosec}^4\alpha\geqslant 8$.

Вычислить (12—13).

12. $\boxed{7}$ 1) $\cos 10°\cos 30°\cos 50°\cos 70°$;

2) $\frac{\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°}{\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°}$.

13. $\boxed{8}$ 1) $\sin 36°$; 2) $\sin 54°$.

§ 10. Синус, косинус и тангенс половинного угла

Задания для самостоятельной работы

1.[6] Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=5$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

2.[6] Выразить через синус и косинус половинного аргумента выражение:

1) $3\sin x+2\cos x+2$; 2) $5\cos x-\sin x+5$.

Найти значение выражения (3—6).

3.[7] 1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$, $\frac{3\pi}{8}<\frac{\alpha}{2}<0{,}5\pi$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=-1{,}4$, $-\frac{\pi}{4}<\alpha<0$.

4.[7] 1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}2$, $\pi<\alpha<2\pi$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=-0{,}2$, $\pi<\alpha<2\pi$.

5.[7] 1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}2$, $0<\alpha<\pi$;

2) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}2$, $\pi<\alpha<2\pi$.

6.[7] 1) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$, $\frac{\pi}{8}<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=-1{,}4$, $-\frac{\pi}{4}<\alpha<0$.

7.[8] Доказать равенство:

1) $\operatorname{ctg}15^\circ-\operatorname{tg}15^\circ=2\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg}15^\circ+\operatorname{tg}15^\circ=4$.

§ 11. Формулы приведения

Примеры с решениями

1. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=1$$

при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Решение. По условию косинус каждого из углов не равен нулю. Выразим угол γ через два других угла:

$\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$. По формулам приведения и котангенса суммы аргументов имеем

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma=$$
$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\,\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=1.$$

2. Вычислить без использования таблиц или калькулятора:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

Решение. Понизим четвертую степень выражения до первой, предварительно умножив каждое слагаемое на 4 и применив формулы понижения степени:

$$4\sin^4 x=(2\sin^2 x)^2=(1-\cos 2x)^2=$$
$$=1-2\cos 2x+\cos^2 2x=1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}=$$
$$=\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x.$$

Используя подобные преобразования и формулы приведения, получим

$$\left(\frac{3}{2}-2\cos\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}-2\cos\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{3}{2}-2\cos\frac{5\pi}{8}+\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}-2\cos\frac{7\pi}{8}+\frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{4}\right)=$$
$$=6-2\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)=$$
$$=6-2\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=$$
$$=6-2\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)=6.$$

Так как каждое слагаемое умножали на 4, то результат составляет

$$6:4=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

3. Найти значение выражения $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

Решение. Домножив и разделив данное произведение на $8\sin 20°$ с целью дальнейшего использования формулы синуса двойного аргумента, получим

$$\frac{4(2\sin 20° \cos 20°)\cos 40° \cos 80°}{8\sin 20°} =$$

$$= \frac{2(2\sin 40° \cos 40°)\cos 80°}{8\sin(180° - 160°)} =$$

$$= \frac{2\sin 80° \cos 80°}{8\sin 160°} = \frac{\sin 160°}{8\sin 160°} = \frac{1}{8}.$$

Задания для самостоятельной работы

Сравнить числа (1—4).

1. $\boxed{5}$ 1) $\sin 40°$ и $\sin 160°$; 2) $\cos 70°$ и $\cos 280°$.

2. $\boxed{6}$ 1) $\cos 6{,}4\pi$ и $0{,}5$; 2) $\sin 3{,}1\pi$ и $-0{,}5$.

3. $\boxed{6}$ 1) $\cos 0{,}9\pi$ и $\sin 252°$; 2) $\cos 6{,}4\pi$ и $\sin(-252°)$.

4. $\boxed{6}$ 1) $\operatorname{tg} 3{,}7\pi$ и $\operatorname{ctg} 3{,}8\pi$; 2) $\operatorname{tg} 765°$ и $\cos 348°$.

Упростить выражение (5—7).

5. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{\operatorname{tg}(180° + \beta)\cos(180° - \beta)}{\operatorname{tg}(270° + \beta)\cos(270° + \beta)} + \operatorname{tg}(900° - \beta)$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}(180° + \alpha)\sin(180° - \alpha)}{\cos(270° + \alpha)\sin(270° + \alpha)} + \operatorname{ctg}(540° - \alpha)$.

6. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{\cos(270° + \beta)}{\cos(180° - \beta)\operatorname{ctg}(90° + \beta)} + \operatorname{tg} 315°$;

2) $\dfrac{\sin(270° + \alpha)}{\sin(180° - \alpha)\operatorname{tg}(90° + \alpha)} + \operatorname{ctg} 315°$.

7. $\boxed{6}$ 1) $\dfrac{\sin 1{,}2\pi}{\sin 1{,}3\pi \cdot \operatorname{tg} 1{,}8\pi}$; 2) $\dfrac{\cos 1{,}2\pi}{\cos 1{,}3\pi \cdot \operatorname{ctg} 1{,}8\pi}$.

8. $\boxed{6}$ Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\cos(-2x) - \dfrac{2\sin(-2x)}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}$ при $x = \dfrac{\pi}{8}$;

2) $2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + \dfrac{2\sin(\pi - x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg} x \sin(-x)}$ при $x = -\dfrac{\pi}{12}$.

9. $\boxed{8}$ Вычислить без использования таблиц и калькулятора:

1) $\sin^2 \dfrac{\pi}{8} + 3\cos^2 \dfrac{3\pi}{8}$; 2) $\cos^4 15° - \sin^4 15°$.

Вычислить (10—11).

10.$\boxed{8}$ 1) $\operatorname{ctg} 10° \operatorname{ctg} 50° \operatorname{ctg} 70°$;

2) $\operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2° \operatorname{tg} 3° \ldots \operatorname{tg} 88° \operatorname{tg} 89°$.

11.$\boxed{8}$ 1) $4 \sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$;

2) $\dfrac{9 \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{13\pi}{30}}{\sin \frac{4\pi}{15}}$.

§ 12. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Примеры с решениями

1. Доказать тождество

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Решение. Преобразуем левую часть, считая, что $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, и применяя формулы половинного аргумента и замены суммы тригонометрических функций произведением:

$$(\cos\alpha + \cos\beta) + (\cos\gamma - 1) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}\right) = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

2. Доказать, что если $\alpha = \beta + \gamma$, то

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Решение. Понизим степень в левой части равенства и выделим число 2, которое имеется в правой части:

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + \frac{1-\cos 2\gamma}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} = 2 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1}{2} =$$

$= 2 - \frac{(\cos 2\beta + \cos 2\gamma) + (\cos 2\alpha + 1)}{2} = 2 - (\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) + \cos^2\alpha) =$
$= 2 - (\cos\alpha\cos(\beta-\gamma) + \cos^2\alpha) = 2 - \cos\alpha(\cos(\beta-\gamma) + \cos\alpha) =$
$= 2 - \cos\alpha(\cos(\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma)) = 2 - \cos\alpha(2\cos\beta\cos\gamma) =$
$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Преобразовать сумму в произведение, если $0 < \alpha < 90°$:

1) $\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}$;

2) $\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}$.

2. $\boxed{7}$ Доказать тождество:

1) $\sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25° = \cos 7°$;

2) $\cos 24° + \cos 48° - \cos 84° \cos 12° = \frac{1}{2}$.

Доказать тождество, если α, β и γ — углы треугольника **(3—4)**.

3. $\boxed{7}$ 1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

4. $\boxed{7}$ 1) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

5. $\boxed{8}$ Доказать, что если $\alpha = \beta + \gamma$, то:

1) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + 1 = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Преобразовать в произведение **(6—7)**.

6. $\boxed{7}$ 1) $\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cos^2\alpha + \sin 2\alpha$;

2) $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha - 8\cos^4\alpha$.

7. $\boxed{7}$ 1) $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$;

2) $\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\beta$.

8. $\boxed{9}$ Доказать тождество:

1) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$;

2) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

§ 13. Произведение синусов и косинусов

Примеры с решениями

1. Доказать тождество

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{3\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Решение. Аргументы слагаемых левой части представляют собой арифметическую прогрессию, разность которой равна β. Умножим и разделим эту сумму на $2\sin\frac{\beta}{2}$. (Сделать это можно, так как $2\sin\frac{\beta}{2}$ не может быть равно 0: ведь если $\sin\frac{\beta}{2}=0$, то $\beta=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, и слева стоит сумма трех равных величин.) Получим дробь, числитель которой равен

$$2\sin\frac{\beta}{2}\sin\alpha+2\sin\frac{\beta}{2}\sin(\alpha+\beta)+2\sin\frac{\beta}{2}\sin(\alpha+2\beta)=$$
$$=\left(\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right)+\left(\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\beta}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\beta}{2}\right)\right)+\left(\cos\left(\alpha+2\beta-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+2\beta+\frac{\beta}{2}\right)\right).$$

Мы использовали формулы замены произведения синусов суммой. Теперь хорошо видно, почему умножили именно на $2\sin\frac{\beta}{2}$ (появились слагаемые, которые являются противоположными, и их сумма равна 0). После выполнения в числителе сложения и применения формул замены разности произведением получим дробь

$$\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+2\beta+\frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{3\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Замечание. Приведенный при решении задачи прием можно использовать для любого числа слагаемых. Важно, чтобы слагаемые представляли собой одноименные тригонометрические функции, а аргументы — арифметическую прогрессию.

2. Доказать тождество

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2,$$

если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Решение. Из условия $\gamma=\pi-\alpha-\beta$. Заменив произведение суммой и понизив степень первой пары слагаемых, получим $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\sin^2\alpha+$

$+\sin^2\beta+\sin^2(\pi-\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\pi-\alpha-\beta)=\sin^2\alpha+$
$+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)+(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+$
$+\sin^2\beta+(\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta))+\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=$
$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+1+\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}=2.$

Задания для самостоятельной работы

Преобразовать произведение в сумму (**1—2**).

1. $\boxed{6}$ 1) $4\sin 12°\sin 14°\sin 16°$; 2) $3\cos 25°\cos 15°\cos 35°$.

2. $\boxed{6}$ 1) $8\cos 1°\cos 2°\cos 4°\cos 8°$; 2) $4\sin 25°\cos 15°\sin 5°$.

3. $\boxed{7}$ Доказать равенство:

1) $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=$
$=0{,}75$;

2) $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2x$.

4. $\boxed{6}$ Упростить выражение:

1) $\sin 2\alpha+2\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)$;

2) $\cos 2\alpha+2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

5. $\boxed{6}$ Упростить сумму:

1) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$; 2) $\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}$.

6. $\boxed{7}$ Представить в виде произведения сумму:

1) $\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha$;

2) $\sin 5\alpha\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$.

Найти наибольшее и наименьшее значения произведения (**7—8**).

7. $\boxed{8}$ 1) $\cos\left(3x+\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{15}\right)$;

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

8. $\boxed{9}$ 1) $\cos(ax+m)\cos(ax+n)$; 2) $\sin(ax+m)\sin(ax+n)$.

Доказать тождество при условии, что α, β и γ — углы треугольника (**9—10**).

9. $\boxed{9}$ 1) $\sin^3\alpha\cos(\beta-\gamma)+\sin^3\beta\cos(\gamma-\alpha)+\sin^3\gamma\cos(\alpha-\beta)=$
$=3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

2) $\sin^3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin^3\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin^3\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$.

10. $\boxed{9}$ 1) $\sin 3\alpha \sin^3(\beta-\gamma)+\sin 3\beta \sin^3(\gamma-\alpha)+$
$+\sin 3\gamma \sin^3(\alpha-\beta)=0;$

2) $\sin 3\alpha \cos^3(\beta-\gamma)+\sin 3\beta \cos^3(\gamma-\alpha)+\sin 3\gamma \cos^3(\alpha-\beta)=$
$=\sin 3\alpha \sin 3\beta \sin 3\gamma.$

Контрольная работа

1. Вычислить $\cos\alpha$ $[\sin\alpha]$ и $\operatorname{tg}\alpha$ $[\operatorname{ctg}\alpha]$, если

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\cos\alpha=\frac{12}{13}\right] \text{ и } \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \left[\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\right].$$

2. Найти значение $\cos 2\alpha$ $[\sin 2\alpha]$, если

$$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{5}\,[\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{7}] \text{ и } \frac{11\pi}{2}<\alpha<6\pi \left[\frac{9\pi}{2}<\alpha<5\pi\right].$$

3. Найти значение выражения

$$\frac{5\cos 2\alpha+3}{3-8\cos^2\alpha} \quad \left[\frac{2-4\sin^2\alpha}{3+\sin 2\alpha}\right],$$

если $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{5}\,[\operatorname{ctg}\alpha=-2]$.

4. Упростить выражение

$$\sin(\alpha+60^\circ)\sin(\alpha-60^\circ)-\sin^2\alpha$$
$$\left[\cos^2\alpha-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

---

5. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right]$, если

$$\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4 \;\; [\sin\alpha-\cos\alpha=-1{,}4]$$
$$\text{и } \frac{3\pi}{8}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2} \left[-\frac{\pi}{4}<\alpha<0\right].$$

6. Доказать равенство

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$$
$$[8\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ=1].$$

Глава IX Тригонометрические уравнения

§ 1. Уравнение $\cos x = a$

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\cos\left(\arccos\frac{5}{13} - \arccos\frac{4}{5}\right)$; 2) $\arccos(\cos 6)$;

3) $\arccos\left(\sin\frac{9\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\sin 12)$.

Решение. 1) Обозначим $\arccos\frac{5}{13} = \alpha$, $\arccos\frac{4}{5} = \beta$. Тогда $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $\sin\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$ и $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$, $\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Применяя формулу для косинуса разности, находим

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{56}{65}.$$

2) Заменим $\cos 6$ на косинус угла, заключенного в пределах от 0 до π. Так как $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$, то $-2\pi < -6 < -\frac{3\pi}{2}$, $0 < 2\pi - 6 < \frac{\pi}{2}$. Но $\cos 6 = \cos(2\pi - 6)$, и поэтому $\arccos(\cos 6) = \arccos(\cos(2\pi - 6)) = 2\pi - 6$.

3) Заменим $\sin\frac{9\pi}{7}$ на косинус угла, заключенного между 0 и π:
$\sin\frac{9\pi}{7} = \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right) = \cos\frac{11\pi}{14}$, где $\frac{11\pi}{14} \in [0; \pi]$.
Тогда $\arccos\left(\sin\frac{9\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\frac{11\pi}{14}\right) = \frac{11\pi}{14}$.

4) Обозначим $\alpha = \arccos(\sin 12)$. Так как $\frac{7\pi}{2} < 12 < 4\pi$, то $\sin 12 < 0$, и поэтому $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Заменим $\sin 12$ на косинус угла, заключенного между $\frac{\pi}{2}$ и π. По формулам приведения $\sin 12 = \sin(12 - 4\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (12 - 4\pi)\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{2} - 12\right)$, где $\frac{\pi}{2} < \frac{9\pi}{2} - 12 < \pi$. Следовательно, $\alpha = \frac{9\pi}{2} - 12$.

2. Доказать равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \qquad (1)$$

Решение. Обозначим буквами α и β соответственно левую и правую части равенства (1). Тогда $\alpha \in [0; \pi]$, $\cos\alpha = -a$. Используя формулу $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ и равенство $\cos(\arccos a) = a$, получаем $\cos\beta = \cos(\pi - \arccos(\cos a)) = -a$.

Для доказательства равенства (1) достаточно установить, что $\beta \in (0; \pi)$. Так как $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\arccos a \leqslant 0$, откуда следует, что $0 \leqslant \pi - \arccos a \leqslant \pi$, т. е. $\beta \in [0; \pi]$.

3. Решить уравнение:

1) $\cos^3 x + 1 = 0$; 2) $1 - 2\sin^2 2x = 2\cos 4x$;

3) $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin 3x \sin 2x$;

4) $2\cos^4 x = 2\sin^4 x - 1$.

Решение. 1) Пусть $\cos x = t$, тогда

$$t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1) = 0,$$

откуда $t = -1$, а уравнение $t^2 - t + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Итак, $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Так как $1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x$, то уравнение можно записать в виде $\cos 4x = 0$, откуда находим $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) Используя формулу косинуса суммы, запишем уравнение в виде $\cos(3x + 2x) = \frac{1}{2}$, т. е. $\cos 5x = \frac{1}{2}$, откуда $5x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4) Используя равенство $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, получаем уравнение $2\cos 2x = -1$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—6).

1. $\boxed{4}$ 1) $\cos\left(2\arccos\frac{5}{13}\right)$; 2) $\cos\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$.

2. $\boxed{4}$ 1) $\cos\left(\pi + 2\arccos\frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\pi - 2\arccos\frac{4}{5}\right)$.

3. $\boxed{4}$ 1) $\cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{12}{13}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos\frac{12}{13} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

4. $\boxed{5}$ 1) $\arccos\left(\sin\frac{17\pi}{9}\right)$; 2) $\arccos\left(\sin\frac{34\pi}{9}\right)$.

5. $\boxed{6}$ 1) $\arccos(\cos 4)$; 2) $\arccos(\cos 10)$.

6. $\boxed{7}$ 1) $\arccos(\sin 9)$; 2) $\arccos(\sin 13)$.

Решить уравнение (7—10).

7. $\boxed{4}$ 1) $27\cos^3 x - 8 = 0$; 2) $27\cos^3 x + 8 = 0$.

8. $\boxed{3}$ 1) $1 + 3\cos 2x = 2\sin^2 x$; 2) $2\sin^2 2x = 1 + 3\cos 4x$.

9. $\boxed{3}$ 1) $2\sin 5x \sin 3x = 1 + 2\cos 5x \cos 3x$;
2) $2\sin 4x \sin x = 2\cos 4x \cos x - 1$.

10. $\boxed{4}$ 1) $16\cos^4 x = 1$; 2) $4\cos^4 2x = 1$.

§ 2. Уравнение $\sin x = a$

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{5}{13}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{23\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right)$;

5) $\arcsin(\sin 8)$; 6) $\arcsin(\cos 10)$.

Решение. 1) Пусть $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$, $\arcsin\frac{12}{13} = \beta$, тогда $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$. Применяя формулу синуса разности, получаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{16}{65}.$$

2) Пусть $\arcsin\frac{3}{5} = \alpha$, $\arccos\frac{5}{13} = \beta$, тогда $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, т. е.

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{63}{65}.$$

3) Заменим $\sin\frac{23\pi}{7}$ на синус угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Так как $\sin\frac{23\pi}{7} = \sin\left(3\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = -\sin\frac{2\pi}{7} = \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$, где $-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{7} < 0$, то

$$\arcsin\left(\sin\frac{23\pi}{7}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right) = -\frac{2\pi}{7}.$$

4) Заменим $\cos\frac{7\pi}{8}$ на синус угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Получим

$$\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right).$$

Следовательно, $\arcsin\left(\cos\frac{7\pi}{8}\right)=\arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right)=-\frac{3\pi}{8}$.

5) Так как $\frac{5\pi}{2}<8<3\pi$, то $-\frac{\pi}{2}<8-3\pi<0$, откуда $0<3\pi-8<\frac{\pi}{2}$, $\sin 8=\sin(3\pi-8)$. Тогда

$$\arcsin(\sin 8)=\arcsin(\sin(3\pi-8))=3\pi-8.$$

6) Пусть $\alpha=\arcsin(\cos 10)$. Так как $3\pi<10<\frac{7\pi}{2}$, то $\cos 10<0$, и поэтому $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$. Заменим $\cos 10$ на синус угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и 0:

$$\cos 10=-\cos(10-3\pi)=\sin\left(10-3\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(10-\frac{7\pi}{2}\right),$$

где $-\frac{\pi}{2}<10-\frac{7\pi}{2}<0$. Следовательно,

$$\arcsin(\cos 10)=\arcsin\left(\sin\left(10-\frac{7\pi}{2}\right)\right)=10-\frac{7\pi}{2}.$$

2. Доказать равенство $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Пусть $\arcsin a=\alpha$, $\arccos a=\beta$, тогда $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $\sin\alpha=a$, $\cos\beta=a$. Кроме того, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=a$, откуда следует, что $\frac{\pi}{2}-\alpha=\arccos a$, так как из неравенств $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ следуют неравенства $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\pi$. Итак, $\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$, т. е. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

3. Решить уравнение:

1) $\sin^3 x+1=0$; 2) $\sin^2 x-\sin^4 x=0$;

3) $2\sin 4x\cos x=1+2\cos 4x\sin x$;

4) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Решение. 1) Так как

$$\sin^3 x+1=(\sin x+1)(\sin^2 x-\sin x+1),$$

а уравнение $\sin^2 x-\sin x+1=0$ не имеет решений, то исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

2) Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin^2 x - \sin^4 x = \sin^2 x(1-\sin^2 x) = \sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $\sin 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) По формуле синуса разности запишем уравнение в виде $2\sin(4x - x) = 1$, $2\sin 3x = 1$, откуда $\sin 3x = \frac{1}{2}$, тогда $3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, откуда

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

4) Воспользуемся тождеством $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$ т. е. $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Тогда уравнение можно записать в виде $\sin 2x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—8).

1. $\boxed{4}$ 1) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

2. $\boxed{4}$ 1) $\sin\left(\pi - 2\arcsin\frac{12}{13}\right)$; 2) $\sin\left(\pi + 2\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

3. $\boxed{4}$ 1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{1}{7}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4} - \arcsin\frac{1}{4}\right)$.

4. $\boxed{4}$ 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{3}{5}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{3}\right)$.

5. $\boxed{5}$ 1) $\arcsin\left(\sin\frac{21\pi}{8}\right)$; 2) $\arcsin\left(\sin\frac{31\pi}{9}\right)$.

6. $\boxed{5}$ 1) $\arcsin\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right)$; 2) $\arcsin\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right)$.

7. $\boxed{6}$ 1) $\arcsin(\sin 10)$; 2) $\arcsin(\sin 11)$.

8. $\boxed{7}$ 1) $\arcsin(\cos 8)$; 2) $\arcsin(\cos 11)$.

Доказать равенство (9—10).

9. $\boxed{6}$ 1) $\arcsin\frac{5}{13} = 2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$;

2) $\arcsin\frac{3\sqrt{3}+4}{10} - \arccos\frac{4}{5} = \frac{\pi}{6}$.

10. $\boxed{8}$ 1) $3\arcsin\frac{1}{4}+\arccos\frac{11}{16}=\frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

Решить уравнение (**11—15**).

11. $\boxed{3}$ 1) $\sin x=\sin^3 x$; 2) $\sin 2x=2\sin^2 2x$.

12. $\boxed{4}$ 1) $8\sin^3 x-1=0$; 2) $27\sin^3 x+8=0$.

13. $\boxed{5}$ 1) $\sin x\sin 2x\cos x=\frac{1}{8}$; 2) $\sin 3x\sin 6x\cos 3x=\frac{1}{4}$.

14. $\boxed{3}$ 1) $2\cos 2x\sin 3x+\sin x=2\sin 2x\cos 3x$;

2) $3\cos 3x\sin 5x+2\sin 2x=3\sin 3x\cos 5x$.

15. $\boxed{4}$ 1) $16\sin^4 x=1$; 2) $4\sin^4 2x=1$.

§ 3. Уравнение $\operatorname{tg} x=a$

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}\right)$;

5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}23)$.

Решение. 1) Пусть $\operatorname{arctg}2=\alpha$, $\operatorname{arctg}3=\beta$. Так как $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{tg}\beta=3$, то по формуле тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{5}{-5}=-1.$$

2) Пусть $\operatorname{arctg}3=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\beta$, тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1.$$

3) Пусть $\arcsin\frac{2}{3}=\alpha$, тогда $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=$ $=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1-\frac{4}{5}}=4\sqrt{5}$.

4) Заменим $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$ на тангенс угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Так как $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}=-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$, где $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{8}<0$, то $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right)=-\frac{3\pi}{8}$.

5) Используя неравенство $0<22-7\pi<\frac{\pi}{2}$, получаем $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 22)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(22-7\pi))=22-7\pi$.

2. Доказать равенство:

1) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=\frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin\frac{5}{13}+2\operatorname{arctg}\frac{2}{13}=\frac{\pi}{2}$.

Решение. 1) Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{7}{23}=\beta$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{7}{23}$, $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\frac{\pi}{4}-\beta<\frac{\pi}{4}$, и для доказательства равенства $2\alpha=\frac{\pi}{4}-\beta$ достаточно установить, что $\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$. Это равенство является верным, так как

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15},\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\frac{1-\frac{7}{23}}{1+\frac{7}{23}}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}.$$

2) Так как $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}=\arccos\frac{5}{13}$ (§ 2, пример 2), то задача сводится к доказательству равенства $2\alpha=\beta$, где $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $\beta=\arccos\frac{5}{13}$, $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что равенство $2\alpha=\beta$ является верным, если $\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}\beta$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{12}{5}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$, находим $\operatorname{tg}\beta=\frac{12}{5}$, т. е. $\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}\beta$.

3. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}^2 x=3\operatorname{tg}x$; 2) $\operatorname{tg}^3 x+8=0$; 3) $16\operatorname{tg}^4 x=1$.

Решение. 1) Из равенства $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-3)$ следует, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\operatorname{tg}x=0$ и $\operatorname{tg}x=3$. Находим корни этих уравнений

$$x=\pi n,\quad x=\operatorname{arctg}3+\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}.$$

2) Разложив левую часть уравнения на множители, получаем

$$(\operatorname{tg}x+2)(\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+4)=0.$$

Исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg}x=-2$, так как уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+4=0$$

не имеет решений. Отсюда находим $x=-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, так как $\operatorname{arctg}(-2)=-\operatorname{arctg}2$.

3) Так как $16\,\mathrm{tg}^4 x-1=(4\,\mathrm{tg}^2 x-1)(4\,\mathrm{tg}^2 x+1)$, то уравнение равносильно совокупности двух уравнений $2\,\mathrm{tg}\,x=1$ и $2\,\mathrm{tg}\,x=-1$, откуда находим две серии корней

$$x=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi n \text{ и } x=-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},$$

которые можно объединить в одну серию

$$x=\pm\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—6).

1. $\boxed{3}$ 1) $\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{12}{5}\right)$.

2. $\boxed{4}$ 1) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\,\frac{2}{5}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\,2-\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}\right)$.

3. $\boxed{4}$ 1) $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$; 2) $\mathrm{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

4. $\boxed{4}$ 1) $\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{12}{5}-\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}\right)$; 2) $\cos(\mathrm{arctg}\,4-\mathrm{arctg}\,2)$.

5. $\boxed{3}$ 1) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{11\pi}{7}\right)$; 2) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{23\pi}{9}\right)$.

6. $\boxed{5}$ 1) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,13)$; 2) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{1}{7}\right)$.

Доказать равенство (7—9).

7. $\boxed{5}$ 1) $\mathrm{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\mathrm{arctg}\,\frac{12}{5}\right)=-\frac{119}{120}$;

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

8. $\boxed{5}$ 1) $\arcsin\frac{4}{5}+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$;

2) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}=\mathrm{arctg}\,3$.

9. $\boxed{6}$ 1) $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}+\mathrm{arcgt}\,\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}=\mathrm{arctg}\,5$;

2) $4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5}-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

Решить уравнение (10—12).

10. $\boxed{3}$ 1) $\mathrm{tg}\,x=16\,\mathrm{tg}^3 x$;

2) $\mathrm{tg}\,2x=3\,\mathrm{tg}^3 2x$.

11. $\boxed{4}$ 1) $8\,\mathrm{tg}^3 x+1=0$;

2) $27\,\mathrm{tg}^3 x-8=0$.

12. $\boxed{4}$ 1) $9\,\mathrm{tg}^4 x=1$;

2) $16\,\mathrm{tg}^4 2x=1$.

§ 4. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные и линейные уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$.

Решение. Левую часть уравнения можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos 2x\right)=-\frac{1}{4}(1+2\cos 2x).$$

Тогда уравнение примет вид $2\cos 2x+4\sin x+1=0$. Так как $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, то уравнение сводится к квадратному относительно $\sin x$, т. е. к уравнению

$$4\sin^2 x-4\sin x-3=0,$$

откуда $\sin x=\frac{3}{2}$, $\sin x=-\frac{1}{2}$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

2. Решить уравнение

$$\sin^3 x-2\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x+2\cos^3 x=0.$$

Решение. Уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что $\sin x=0$, а $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Поэтому, разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение $\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+2=0$. Задача сводится к решению алгебраического уравнения $t^3-2t^2-t+2=0$, где $t=\operatorname{tg} x$. Разложим его левую часть на множители:

$$t^3-2t^2-t+2=t^3-2t^2-(t-2)=(t-2)(t^2-1)=(t-2)(t-1)(t+1).$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\operatorname{tg} x=2$, $\operatorname{tg} x=1$, $\operatorname{tg} x=-1$.

Ответ. $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

3. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x-2\cos 2x.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, используя тождество

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

и формулу $2\sin x\cos x=\sin 2x$. Тогда уравнение можно записать в виде $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\cos^2 2x-2\cos 2x$ или $\cos^2 2x-$ $-4\cos 2x-1=0$, откуда $\cos 2x=2\pm\sqrt{5}$.

Ответ. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2-\sqrt{5})+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

4. Решить уравнение

$$\sin x(1-\cos x)^2+\cos x(1-\sin x)^2=2.$$

Решение. Это уравнение преобразуем к виду
$$\sin x+\cos x-4\sin x\cos x+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=2.$$

Пусть $\sin x+\cos x=t$, тогда $\sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$. Получаем уравнение $t-2(t^2-1)+\frac{t}{2}(t^2-1)=2$, откуда

$$t^3-4t^2+t=0,\ t(t^2-4t+1)=0.$$

Это уравнение имеет корни $t_1=0$, $t_2=2-\sqrt{3}$, $t_3=2+\sqrt{3}$. Корень t_3 отбрасываем, так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ и $|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$.

Если $t=0$, т. е. $\sin x+\cos x=0$, то $\operatorname{tg} x=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Если $t=2-\sqrt{3}$, т. е. $\cos x+\sin x=2-\sqrt{3}$, то получаем $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x)=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, или $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, откуда

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

5. Решить уравнение $\dfrac{\sin 4x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

Решение. Так как $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$, $\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)$, то исходное уравнение равносильно уравнению $-2\sin 2x(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x$ при условии, что $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$, т. е. $x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin x+\cos x=0$, $\sin 2x=-\frac{1}{2}$, откуда

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Найденные значения x удовлетворяют указанному выше условию и являются корнями исходного уравнения.

6. Решить уравнение $\sin^2 2x-\operatorname{tg}^2 x=\frac{9}{2}\cos 2x$.

Решение. Используя формулы $\sin^2 2x=1-\cos^2 2x$, $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ и обозначив $\cos 2x=t$, получаем уравнение

$1-t^2-\frac{1-t}{t+1}=\frac{9}{2}t$, откуда $2t^3+11t^2+5t=0$, $t(2t^2+11t+5)=0$, при условии, что $t\neq-1$ $(\cos x\neq 0)$.

Это уравнение имеет корни $t_1=0$, $t_2=-\frac{1}{2}$, $t_3=-5$, а исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 2x=0$, $\cos 2x=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

7. Решить уравнение

$$2\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x=\sin 2x+3\sin x.$$

Решение. Левая часть уравнения определена, если $\sin 2x\neq 0$, $\sin x\neq 0$, т. е. $\sin 2x\neq 0$. При выполнении этого условия исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\sin x(2\cos x+3),$$

$$\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\sin x(2\cos x+3),\quad -\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\sin x(2\cos x+3),$$

$$\cos x(2\cos x+3)=-1,\qquad 2\cos^2 x+3\cos x+1=0,$$

откуда $\cos x=-1$ (и тогда $\sin x=0$), $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—16).

1.$\boxed{4}$ 1) $2\cos x+\cos 2x=2\sin x$;
2) $\sin 2x+2\sin x-3\cos x=3$.

2.$\boxed{4}$ 1) $2\sin^2 x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x-1$;
2) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2}-2\sin x)\sin x$.

3.$\boxed{4}$ 1) $10\cos^2 x-16\sin x=\cos 2x+15$;
2) $5\sin x+\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos 2x-3\sin^2 x$.

4.$\boxed{4}$ 1) $\cos^2 x-2\cos x=4\sin x-\sin 2x$;
2) $\sin 2x-\sin^2 x=2\sin x-4\cos x$.

5.$\boxed{4}$ 1) $\operatorname{ctg} x(1+\cos x)=\sin 2x$;
2) $\operatorname{tg} x(1-\sin x)=\sin 2x$.

6.$\boxed{4}$ 1) $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x$;
2) $2\cos 2x+2\cos x\sin^2 x=\cos x$.

7. $\boxed{4}$ 1) $\sin^4 x + \cos^4 x = 2\cos 2x$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = 3\cos 2x$.

8. $\boxed{5}$ 1) $11\,\mathrm{ctg}\,x - 5\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{16}{\sin x}$;

2) $\cos 2x = 2\,\mathrm{tg}^2 x - \cos^2 x$.

9. $\boxed{5}$ 1) $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$;

2) $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$.

10. $\boxed{5}$ 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1$;

2) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x + \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

11. $\boxed{5}$ 1) $\dfrac{5}{\cos x} = 5\,\mathrm{tg}\,x + 4\cos x$;

2) $3\sin x = 2\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{2}{\sin x}$.

12. $\boxed{5}$ 1) $2\,\mathrm{tg}\,x + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$; 2) $2\,\mathrm{ctg}\,x - \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

13. $\boxed{5}$ 1) $\mathrm{tg}\,x \sin x = \cos x + \mathrm{tg}\,x$; 2) $\mathrm{ctg}\,x\left(\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = 1$.

14. $\boxed{5}$ 1) $\sin 2x - \cos 2x = \mathrm{tg}\,x$;

2) $\sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\,\mathrm{tg}\,x$.

15. $\boxed{5}$ 1) $\dfrac{8(\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{tg}\,x} = 2\cos 4x + 5$;

2) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x} = 4 - \cos 4x$.

16. $\boxed{5}$ 1) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2 x}{1 + \mathrm{ctg}^2 x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin^2 2x}{3}$;

2) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{5}{4}\cos^2 2x - \dfrac{7}{10}$.

Решить уравнение, удовлетворяющее неравенству (17—18).

17. $\boxed{6}$ 1) $\cos 2x = 2\,\mathrm{tg}^2 x - \cos^2 x,\ \sin x \geqslant \cos x$;

2) $2\,\mathrm{tg}^2 x \cos 2x = \sin^2 x - 2,\ \cos x \geqslant \sin x$.

18. $\boxed{6}$ 1) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\,\mathrm{tg}^2 x,\ \sin x \geqslant 2\cos x$;

2) $\dfrac{5}{2}\,\mathrm{tg}^2 x + \cos^2 2x = 4\cos^4 x,\ \cos x \geqslant 2\sin x$.

Решить уравнение (19—20).

19. $\boxed{6}$ 1) $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x$;

2) $4 + \cos 2x + 3\cos 4x = 8\cos^6 x$.

20. $\boxed{8}$ 1) $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$; 2) $\cos x - \cos^2 x - \sin^3 x = 0$.

§ 5. Методы замены неизвестного и разложения на множители. Метод оценки левой и правой частей тригонометрического уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$.

Решение. Преобразовав левую часть уравнения $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) = (\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x)$, воспользуемся формулой $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x - (\cos x - \sin x)) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos x + \sin x = 0,$$
$$1 - (\cos x - \sin x) - \cos x \sin x = 0.$$

Первое уравнение имеет решения $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Второе заменой $\cos x - \sin x = t$ сводится к уравнению $1 - t - \frac{1-t^2}{2} = 0$, или $t^2 - 2t + 1 = 0$, откуда $t = 1$, т. е. $\cos x - \sin x = 1$. Последнее уравнение равносильно уравнению $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 4x = \sin^2 6x.$$

Решение. Уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = \sin^2 6x, \quad \frac{\cos 4x + \cos 8x}{2} = \cos^2 6x,$$

$$\cos 6x(\cos 2x - \cos 6x) = 0, \quad \cos 6x \cos 2x \sin 4x = 0,$$
$$\cos^2 2x \cos 6x \sin 2x = 0.$$

Так как все корни уравнения $\cos 2x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 6x = 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 6x = 0$, $\sin 2x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}(1-\sin^2 x\cos 2x-2\sin^2 x)=1.$$

Решение. Так как $1-2\sin^2 x=\cos 2x$ и $\cos x\neq 0$, то уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}(\cos 2x-\sin^2 x\cos 2x)=1,\quad \frac{\cos 3x\cos 2x\cos^2 x}{\cos x}=1,$$

$$\cos x\cos 2x\cos 3x=1.$$

Полученное уравнение может иметь решение только в том случае, когда $|\cos x|=|\cos 2x|=|\cos 3x|=1$.

а) Если $\cos x=1$, то $x=2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$, и тогда $\cos 2x=$ $=\cos 3x=1$.

б) Если $\cos x=-1$, то $x=\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$, и тогда $\cos 2x=1$, $\cos 3x=-1$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $|\cos x|=1$, или $\cos^2 x=1$, или $\sin x=0$.

Ответ. $x=\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x}=16\cos 4x(1+2\cos 4x)+\frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}=\frac{(\sin 7x\cos x+\cos 7x\sin x)(\sin 7x\cos x-\cos 7x\sin x)}{\sin^2 x\cos^2 x}=$$

$$=\frac{4\sin 8x\sin 6x}{\sin^2 2x}=\frac{16\cos 4x\sin 2x\cos 2x\sin 6x}{\sin^2 2x}.$$

$$\cos 2x\sin 6x=\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 4x)=\frac{1}{2}(2\sin 4x\cos 4x+\sin 4x)=$$

$$=\sin 2x\cos 2x(1+2\cos 4x).$$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению

$$\cos 4x(1+2\cos 4x)\cos 2x=\cos 4x(1+2\cos 4x)$$

при условии $\sin 2x\neq 0$, а последнее уравнение равносильно (при этом же условии) совокупности уравнений $\cos 4x=0$, $\cos 4x=-\frac{1}{2}$, $\cos 2x=1$.

Из первого уравнения находим $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, из второго $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, а корни третьего уравнения не удовлетворяют условию $\sin 2x\neq 0$ (если $\cos 2x=1$, то $\sin 2x=0$).

Ответ. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

5. Решить уравнение $\sqrt{\frac{7}{2}-3\sin^2 x}=\sin x+\cos x$.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\frac{7}{2}-3\sin^2 x=(\sin x+\cos x)^2,\\ \sin x+\cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

Уравнение этой системы сводится к однородному $\frac{1}{2}\sin^2 x+2\sin x\cos x-\frac{5}{2}\cos^2 x=0$, откуда $\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x-5=0$, $\operatorname{tg} x=1$, $\operatorname{tg} x=-5$. Если $\operatorname{tg} x=1$, то $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, а если $\operatorname{tg} x=-5$, то $x=-\operatorname{arctg} 5+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Неравенству системы первая серия корней (корни уравнения $\operatorname{tg} x=1$) удовлетворяет при четных k (т. е. при $k=2n$), а вторая — при нечетных k (т. е. при $k=2n+1$).

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=\pi-\operatorname{arctg} 5+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

6. Решить уравнение

$$2+\sqrt{3}\sin 2x-|\cos 2x|=4\sin^2\frac{x}{2}.$$

Решение. а) Пусть $\cos 2x\geqslant 0$, тогда уравнение можно последовательно преобразовать так:

$2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2-2\cos x$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=-\cos x$,

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos x=0,\ 2\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0,$$

откуда находим две серии корней:

$$x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n,\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Корни первой серии не удовлетворяют условию $\cos 2x\geqslant 0$ при $n=3k+1$, $k\in\boldsymbol{Z}$, и удовлетворяют этому условию при $n=3k$ и $n=3k+2$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Для корней второй серии условие $\cos 2x\geqslant 0$ не выполняется.

б) Пусть $\cos 2x<0$, тогда уравнение можно записать в виде $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x=0$, $2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0$, откуда $x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n$, $x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Корни первой из этих двух серий удовлетворяют условию $\cos 2x<0$ только при $n=3k$, а корни второй серии не удовлетворяют этому условию.

Ответ. $x=-\frac{\pi}{9}+2\pi k$, $x=\frac{11\pi}{9}+2\pi k$, $x=\frac{4\pi}{9}+2\pi k$, $x=\frac{4\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

7. Решить уравнение

$$(3\sin x+4\cos x)(20+12\sin x+5\cos 2x)=143.$$

Решение. Пусть $f(x)=3\sin x+4\cos x$, $g(x)=20+$ $+12\sin x+5\cos 2x$. Тогда

$$f(x)=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)=5\cos(x-\varphi),$$

где $\varphi=\arcsin\frac{3}{5}$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшее значение, равное 5, тогда и только тогда, когда $x-\varphi=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, т. е. при $x=\varphi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, где $\sin\varphi=\frac{3}{5}$, $\cos\varphi=\frac{4}{5}$.

Преобразуем $g(x)$, выделив полный квадрат:

$$g(x)=5(1-2\sin^2 x)+12\sin x+20=$$
$$=-10\left(\sin^2 x-\frac{6}{5}\sin x+\frac{9}{25}\right)+25+\frac{18}{5}=$$
$$=\frac{143}{5}-10\left(\sin x-\frac{3}{5}\right)^2.$$

Отсюда следует, что функция $g(x)$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{143}{5}$, тогда и только тогда, когда $\sin x=\frac{3}{5}$. Поэтому левая и правая части уравнения совпадают в том и только в том случае, когда $x=$ $=\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x=\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—15).

1. $\boxed{4}$ 1) $\sin 2x\cos 4x=\sin 6x\cos 8x$;

2) $\cos 7x\cos 13x=\cos x\cos 19x$.

2. $\boxed{4}$ 1) $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x$;

2) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$.

3. $\boxed{5}$ 1) $2\sin 3x+2\sin 2x+\sin x=0$;

2) $\sin 3x+\sin^3 x=\sin 2x$.

4. $\boxed{5}$ 1) $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$;

2) $\cos x=\cos^2\frac{3}{4}x$.

5.$\boxed{5}$ 1) $\frac{\cos 5x}{\cos x}(2\cos^2 x - \sin^2 x\cos 2x - 1) = 1$;

2) $\frac{\cos 5x}{\cos x}(1 - 2\sin^2 x - \sin^2 x\cos 2x) = 1$.

6.$\boxed{6}$ 1) $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x\sin 3x$;

2) $\frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\sin 5x}{\sin x} = 8\cos x\cos 3x$.

7.$\boxed{6}$ 1) $\sqrt{\frac{13}{3} + \cos 2x} + \operatorname{ctg} x = 0$;

2) $\sqrt{\frac{5}{3} - \cos 2x} + \operatorname{tg} x = 0$.

8.$\boxed{6}$ 1) $\sqrt{5 + \cos 2x} = \sin x + 3\cos x$;

2) $\sqrt{17 + 7\sin 2x} = 3\sin x + 5\cos x$.

9.$\boxed{7}$ 1) $\frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24\cos 2x + \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}$;

2) $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8\cos 4x + \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}$.

10.$\boxed{7}$ 1) $\frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x} = \frac{\operatorname{ctg} 4x \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{ctg} 4x + \operatorname{tg} 3x}$;

2) $\frac{\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}$.

11.$\boxed{7}$ 1) $\sin 3x\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos 3x\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)} = \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$.

12.$\boxed{7}$ 1) $\frac{\sin x}{\cos 6x\cos 7x} + \frac{\sin x}{\cos 7x\cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 6x$;

2) $\frac{\sin x}{\cos 4x\cos 5x} + \frac{\sin x}{\cos 5x\cos 6x} = \sin 6x - \operatorname{tg} 4x$.

13.$\boxed{8}$ 1) $\frac{\cos 3x\cos 5x + |\sin 5x\sin 3x|}{\sin 2x} = 2\cos 2x$;

2) $\frac{\cos 3x\sin 5x + |\cos 5x\sin 3x|}{\cos 2x} = 2\sin 2x$.

14.$\boxed{8}$ 1) $(5\sin x + 12\cos x)(100 + 48\cos x - 13\cos 2x) = 1757$;

2) $(8\sin x + 15\cos x)(53 + 32\sin x + 17\cos 2x) = 1318$.

15.$\boxed{8}$ 1) $\cos^2 3x + \frac{1}{4}\cos^2 x = \cos 3x\cos^4 x$;

2) $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x\cos^4 x$.

§ 6. Системы тригонометрических уравнений

Примеры с решениями

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\sin x\cos y = -1, \\ 2\cos x\sin y = 1. \end{cases}$

Решение. Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получим систему, равносильную исходной:
$\begin{cases} \sin x\cos y + \sin y\cos x = 0, \\ \sin y\cos x - \sin x\cos y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(y-x) = 1, \end{cases}$ откуда

$$\begin{cases} x+y = \pi n, \\ y-x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Из полученной линейной системы легко находим решения исходной системы.

Ответ. $\left(\frac{\pi n}{2} - \pi k - \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2} + \pi k + \frac{\pi}{4}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x\cos(x+y) = 2\sin y, \\ \cos x = \sin y\cos(x+y). \end{cases}$$

Решение. Разделив почленно первое уравнение на второе, получим

$$\cos(x+y) = \frac{2}{\cos(x+y)},$$

откуда $\cos^2(x+y) = 2$.

Последнее уравнение решений не имеет. Однако было бы преждевременно утверждать, что и исходная система не имеет решений. Почленное деление законно только для тех значений переменных, для которых делители $\cos x$ и $\sin y\cos(x+y)$ не равны 0. Правильный вывод из проведенного преобразования должен быть таким: если $\cos x \neq 0$ и $\sin y\cos(x+y) \neq 0$, то система решений не имеет. Следовательно, множество пар $(x;\ y)$, для которых $\cos x = 0$ или $\sin y\cos(x+y) = 0$, еще не исследовано. Среди таких пар могут быть решения системы.

Если $\cos x = 0$, то из первого уравнения следует, что и $\sin y = 0$. Второе уравнение при этих условиях также удовлетворяется. Поэтому все решения системы
$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin y = 0, \end{cases}$ т. е. все пары $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi k\right)$, являются решениями исходной системы.

Если $\sin y=0$, то из второго уравнения получаем, что $\cos x=0$, но такие значения переменных уже рассмотрены. Наконец, если $\cos(x+y)=0$, то из второго уравнения следует, что $\cos x=0$, а тогда из первого уравнения получаем $\sin y=0$, т. е. новых решений и в этом случае нет.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi k\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 12\sin 2x-8\sin 2y=3, \\ \sin y-\sin x+\cos x-\cos y=1. \end{cases}$$

Решение. Введем новые переменные $u=\cos x-\sin x$, $v=\sin y-\cos y$. Тогда $\sin 2x=1-u^2$, $\sin 2y=1-v^2$ и система сводится к алгебраической $\begin{cases} 12(1-u^2)-8(1-v^2)=3, \\ u+v=1. \end{cases}$

После упрощения получаем $\begin{cases} 12u^2-8v^2=1, \\ u+v=1. \end{cases}$

Исключая v из этой системы, приходим к квадратному уравнению $4u^2+16u-9=0$, корни которого $u=-\frac{9}{2}$ и $u=\frac{1}{2}$. Корень $u=-\frac{9}{2}$ отбрасываем, так как $u=\cos x-$ $-\sin x\geqslant-\sqrt{2}$. Для корня $u=\frac{1}{2}$ находим соответствующее значение $v=\frac{1}{2}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе уравнений (каждое уравнение содержит только одну переменную):

$$\begin{cases} \cos x-\sin x=\frac{1}{2}, \\ \sin y-\cos y=\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Ответ можно записать так:

$\left(\frac{\pi}{4}+(-1)^{n-1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+(-1)^{k}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{tg}^4 y-\cos 2x=4, \\ \sin x+\dfrac{1}{\cos^2 y}=3. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ и запишем первое уравнение в виде $2\,\mathrm{tg}^4 y-(1-2\sin^2 x)=4$. Найдем $\sin x$ из второго уравнения и подставим в преобразованное первое: $2\,\mathrm{tg}^4 y-\left(1-2\left(3-\frac{1}{\cos^2 y}\right)^2\right)=4$.

Так как

$$\frac{1}{\cos^2 y}=\operatorname{tg}^2 y+1,$$

то, положив $t=\operatorname{tg}^2 y$, получим квадратное уравнение

$$2t^2-1-2(2-t)^2=4,\ 4t^2-8t+3=0,$$

откуда $t=\frac{3}{2}$, $t=\frac{1}{2}$.

Пусть $t=\frac{3}{2}$, тогда

$$\operatorname{tg} y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\ y=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}+\pi n.$$

Из второго уравнения системы находим

$$\sin x=3-\frac{1}{\cos^2 y}=2-\operatorname{tg}^2 y=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

откуда $\sin x=\frac{1}{2}$, т. е.

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

Если $t=\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg} y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\sin x=3-\frac{1}{\cos^2 y}=2-\operatorname{tg}^2 y=\frac{3}{2}$, т. е. в этом случае решений нет.

Ответ. $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}+\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos^2 2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin 3x,\\ \sqrt{\sin 2y-1}\cdot\sin y=0.\end{cases}$$

Решение. Левая часть второго уравнения имеет смысл тогда и только тогда, когда $\sin 2y-1\geqslant 0$. Если $\sin y=0$, то это условие не выполнено. Поэтому второе уравнение системы равносильно уравнению $\sin 2y-1=0$, откуда $y=\frac{\pi}{4}+\pi n$. Подставляя эти значения y в первое уравнение системы, находим $2\sin 3x=\cos^2 2\pi n$, $2\sin 3x=1$, откуда

$$\sin 3x=\frac{1}{2},\ 3x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=(-1)\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}.$$

Ответ. $\left((-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{1+\sin x\sin y}=\cos x,\\ 2\sin x\operatorname{ctg} y=-1.\end{cases}$$

Решение. Возведем обе части первого уравнения в квадрат и преобразуем его:

$$1+\sin x\sin y=\cos^2 x,\ \sin^2 x+\sin x\sin y=0,$$
$$\sin x(\sin x+\sin y)=0.$$

Таким образом, получаем, что либо $\sin x=0$, либо $\sin x=-\sin y$. Из второго уравнения системы видно, что $\sin x\neq 0$. Если $\sin x=-\sin y$, то из второго уравнения системы находим $\cos y=\frac{1}{2}$.

Заметим, что все функции, входящие в систему, имеют период 2π. Поэтому для отыскания всех ее решений достаточно найти решения $(x;\ y)$, такие, что x и y принадлежат промежутку $[-\pi;\ \pi)$. Учитывая это замечание, из уравнения $\cos y=\frac{1}{2}$ находим $y_1=-\frac{\pi}{3}$, $y_2=\frac{\pi}{3}$. Из уравнения $\sin x=-\sin y$ находим значения x:

$$\sin x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_1'=\frac{\pi}{3},\ x_1''=\frac{2\pi}{3};$$
$$\sin x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_2'=-\frac{\pi}{3},\ x_2''=-\frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом, получаем 4 решения $\left(\frac{\pi}{3};\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$.

Поскольку в процессе решения обе части первого уравнения возводили в квадрат, могли появиться посторонние решения. Необходима проверка. Ясно, что вторая и четвертая пары чисел не удовлетворяют первому уравнению системы, так как его правая часть не должна быть отрицательной. При подстановке первой и третьей пар чисел в уравнения исходной системы получаются верные числовые равенства. Учитывая периодичность с периодом 2π синуса, косинуса и котангенса, получаем ответ:

$$\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ \left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ n\in\boldsymbol{Z},\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить систему уравнений (1—8).

1. $\boxed{6}$ 1) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y,\\ \sin 2y=1+\sqrt{2}\sin x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x=1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y,\\ \cos 2y+\sqrt{3}\cos 2x=-1.\end{cases}$

2. $\boxed{6}$ 1) $\begin{cases} \sin(2x+y)+\sin(2x-y)=\sqrt{2}\cos y, \\ \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos y=\operatorname{tg}^2 y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos(2x+y)+\cos(2x-y)=\sqrt{3}\cos y, \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\cos y=\operatorname{tg}^2 y. \end{cases}$

3. $\boxed{7}$ 1) $\begin{cases} \cos(x-2y)+3\cos x=0, \\ \cos(2x-y)+2\cos y=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin(2x+y)=2\sin y, \\ \sin(2y+x)=3\sin x. \end{cases}$

4. $\boxed{7}$ 1) $\begin{cases} 3\sin(x-2y)+2\sin y\cos(x-y)=0, \\ \cos(x-y)=3\cos(x+y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin(x-y)=2\cos x\sin y, \\ \cos(2x+y)+\cos x\cos(x+y)=0. \end{cases}$

5. $\boxed{8}$ 1) $\begin{cases} 2\sin x\cos y=2\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y, \\ 2\sin y\cos x=\operatorname{ctg} x+2\operatorname{ctg} y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2}, \\ \cos(x+y)\sin^2(x-y)+\cos(x-y)\sin^2(x+y)=\frac{3}{4}. \end{cases}$

6. $\boxed{6}$ 1) $\begin{cases} \cos x-\sin x=1+\cos y-\sin y, \\ 3\sin 2x-2\sin 2y=\frac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x+\cos x=2+\sin y+\cos y, \\ 2\sin 2x+\sin 2y=1. \end{cases}$

7. $\boxed{8}$ 1) $\begin{cases} \sin^2 x+\cos y\sin x=\cos 2y, \\ \cos 2x+\sin 2y=\sin^2 y+3\sin x\cos y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\sin^2 y+\sin 2y=\cos(x+y), \\ \cos^2 x+2\sin 2y+\sin^2 y=\cos(x-y). \end{cases}$

8. $\boxed{8}$ 1) $\begin{cases} \cos 3x=\cos y, \\ 2\cos(9x+3y)+9\sin(15x-2y)=4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos x=\cos 5y, \\ 6\cos(2x+10y)+20\sin(6x-20y)=9. \end{cases}$

Контрольная работа

1. Вычислить:

1) $\cos\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$ $\left[\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)\right]$;

2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$ $\left[\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}2\right)\right]$.

2. Решить уравнение:

1) $\sin x-16\sin^5 x=0$ $[8\cos^4 x+\cos x=0]$;

2) $\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-3\cos^3 x=0$

$[6\cos^3 x+3\cos^2 x\sin x-2\cos x\sin^2 x-\sin^3 x=0]$.

---

3. Вычислить:

1) $\arcsin\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$ $\left[\arccos\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)\right]$;

2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}16)$ $[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}10)]$.

4. Решить уравнение

$$\sin^2(\sin x+3\cos x)+\cos^2 x(\cos x+3\sin x)+$$
$$+2\sin x(1-3\cos x)+2\cos x(1-3\sin x)=3$$

$$\left[3\cos^3 2x+11\sin^2 2x-\frac{4(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x}=11\right].$$

Ответы

Глава II

§ 2. 1. 1) Таких чисел нет; 2) таких чисел нет. 3. 1) -2; -1; 0; 1; 2; 2) -3; 3. 4. 1) 4; 2) 6. 6. 1) $x=1$, $y=0$; 2) $x=2$, $y=0$.

§ 3. 3. 1) Нет; 2) нет. 4. 1) Да; 2) да. 5. 1) Да; 2) да.

§ 4. 2. 1) 14; 2) 4. 3. 1) 13; 2) 7.

§ 5. 1. 1) $x=2-3t$, $y=-1-5t$, $t\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=4-5t$, $y=-1-4t$, $t\in\boldsymbol{Z}$. 2. 1) Нет решений; 2) нет решений. 3. 1) (2; 2), (2; -2), (-2; 2), (-2; -2); 2) (2; 3), (2; -3), (-2; 3), (-2; -3). 4. 1) (3; -1); 2) (-1; 3). 5. 1) (2; 0), (-2; 0), (2; 2), (-2; -2); 2) (0; 2), (0; -2), (2; 2), (-2; 2). 6. 1) (2; 0), (2; 2); 2) (-3; 1), (-5; 1).

Глава III

§ 1. 1. 1) $x+7$; 2) $x-9$; 3) $2x-1$; 4) $3x-2$. 2. 1) x^2-x+1; 2) x^2+x-2; 3) $2x^2-3x-1$; 4) $2x^2+2x-3$. 3. 1) $3x^3-6x+7$, $x-1$; 2) $2x^3+5x-7$, $-x+2$; 3) $4x^4+3x^2-x$, x^2-x; 4) $3x^4-4x^2+x$, x^2-1. 4. 1) $a=-5$; 2) $a=-2$; 3) $a=-26$; 4) $a=12$; 5) $a=9$; 6) $a=14$. 5. 1) $a=-5$, $b=1$, $c=1$; 2) $a=3$, $b=-2$, $c=-8$; 3) $a=-1$, $b=2$, $c=3$; 4) $a=-3$, $b=2$, $c=-7$. 6. 1) $2x-1$; 2) $3x+1$; 3) $-x+2$; 4) $-x+3$. 7. 1) $n_1=1$, $n_2=3$, $n_3=5$; 2) $n_1=2$, $n_2=4$, $n_3=8$.

§ 2. 1. 1) -6; 2) -3; 3) 5; 4) 4. 2. 1) $5x^2-3x-1$; 3; 2) $6x^2-5x-2$; 4; 3) $2x^3-x^2+3x-1$; -7; 4) $3x^3-x^2-2x+1$; -6.

§ 3. 1. 1) $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{2}{3}$; 2) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{5}$. 2. 1) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-\frac{1}{2}$; 2) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=-\frac{1}{3}$. 3. 1) $x=-2$; 2) $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{3}$. 4. 1) Делится; 2) делится. 5. 1) Не делится; 2) не делится. 6. 1) 1; 2) -20. 7. 1) 131; 2) 31. 8. 1) $2\frac{1}{16}$; 2) $6\frac{25}{81}$. 9. 1) $n=-8$; 2) $n=4$. 10. 1) $n=2$; 2) $n=3$. 11. 1) $a=1$, $b=3$, $c=-4$; 2) $a=2$, $b=9$, $c=9$.

§ 4. 4. 1) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$; 2) $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=-1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$. 5. 1) $x_2=\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=\pm 2$, $x_5=1$; 2) $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_{3,4}=\pm 1$, $x_5=3$. 6. 1) 3; 2) -1. 7. 1) 4; 2) 6. 8. 1) -16; 2) 0. 9. 1) $\frac{3}{4}x^2+2x+\frac{1}{4}$; 2) x^2+x-1. 10. 1) $2x^2+5x+1$; 2) $11x^2-14x+2$. 11. 1) $3x+6$; 2) $-2x^2+5x+3$. 12. 1) $-x^2+2x+8$; 2) $\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{8}{3}$. 13. 1) $11x-17$; 2) $2x+2$. 14. 1) x^3-3x; 2) $0{,}5x^3-6x$.

§ 5. 1. 1) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-5$.
2. 1) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$; 2) $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=-1$.
3. 1) $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$; 2) $x_1=-1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$.
4. 1) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$; 2) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=\pm\sqrt{3}$.

5. 1) $x_1=-2,\ x_{2,3}=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{2}$; 2) $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{73}}{2},\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

6. 1) $x_{1,2}=3\pm\sqrt{17},\ x_{3,4}=\frac{-11\pm\sqrt{153}}{2}$; 2) $x_{1,2}=\frac{6+\sqrt{7}+\sqrt{19+12\sqrt{7}}}{2}$.

7. 1) $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{37}}{2}$; 2) $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{26}}}{2}$. **8.** 1) $x_1=-1,\ x_2=0{,}5,$ $x_3=2$; 2) $x_{1,2}=\pm1,\quad x_3=\frac{2}{3},\quad x_4=\frac{3}{2}$. **9.** 1) $a<-1,\quad -1<a\leqslant 0$; 2) $a<-2,\quad -2<a<-1$. **10.** 1) $a<-3$; 2) $a<-1,\quad -1<a<0$. **11.** 1) $-2\leqslant a\leqslant -1,\ 1\leqslant a\leqslant 3$; 2) $a\leqslant -1,\ 2\leqslant a\leqslant 3$. **12.** 1) $a<-2,$ $-1\leqslant a\leqslant 1$; 2) $-1\leqslant a<0,\ 0<a\leqslant 1,\ a\geqslant 2$.

§ 7. 1. 1) $x^5+y^5=u^5-5u^3v+5uv^2$; 2) $x^6+y^6=u^6-6u^4v+$ $+9u^2v^2-2u^3v^3$. **2.** 1) $\left(2;\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2};\ 2\right)$; 2) $(1;\ 1),\ (-2;\ 1),\ (1;\ -2)$. **3.** 1) $(x+y)(x+1)(y+1)$; 2) $(x+y+1)(xy+x+y)$.

§ 8. 1. 1) $(x-2y)(3x+4y)$; 2) $(5x+y)(2x-3y)$. **2.** 1) $(x+y)\times$ $\times(y+z)(z+x)$; 2) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$. **3.** 1) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$; 2) $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$.

§ 9. 1. 1) $1+12a+54a^2+108a^3+81a^4$; 2) $81b^4+108b^3+54b^2+$ $+12b+1$; 3) $32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5$; 4) x^5-10x^4y+ $+40x^3y^2-80x^2y^3+80xy^4-32y^5$. **2.** 1) $\frac{1}{64}-\frac{3\sqrt{2}}{16}+\frac{15}{8}-5\sqrt{2}+15-$ $-12\sqrt{2}+8$; 2) $27-18\sqrt{3}+15-\frac{20\sqrt{3}}{9}+\frac{5}{9}-\frac{2\sqrt{3}}{81}+729$; 3) $x^7-\frac{7x^5}{2}+$ $+\frac{21x^3}{4}-\frac{35x}{8}+\frac{35}{16x}-\frac{21}{32x^3}+\frac{7}{64x^5}-\frac{1}{128x^7}$; 4) $\frac{1}{256y^8}-\frac{1}{16y^6}+\frac{7}{16y^4}-$ $-\frac{7}{4y^2}+\frac{35}{8}-7y^2+7y^4-4y^6+y^8$. **3.** 1) $462a^8\sqrt{a}$; 2) $\frac{252\sqrt{a}}{a^3}$. **4.** 1) $\frac{231}{16}x^{15}$; 2) $\frac{231}{32}y^{13}$. **5.** 1) $T_7=28a^3$; 2) $T_7=924b^7$; 3) $T_{13}=455$; 4) $T_{13}=18\,564x^{-1}$. **6.** 1) $\frac{286a^2\sqrt{b}}{b^9}$; 2) $\frac{1001x^3}{y^6}$.

§ 10. 1. 1) $(2;\ 0),\ (0;\ 2)$; 2) $(1;\ 2),\ (2;\ 1)$. **2.** 1) $(2;\ 1),\ (1;\ 2)$; 2) $(2;\ 1),\ (1;\ 2)$. **3.** 1) $\left(\frac{5}{3};\ \frac{13}{3}\right),\ \left(-\frac{5}{3};\ -\frac{13}{3}\right),\ (3;\ 5),\ (-3;\ -5)$; 2) $(-2;\ 1),\ (2;\ -1),\ \left(\frac{5}{\sqrt{138}};\ \frac{13}{\sqrt{138}}\right),\ \left(-\frac{5}{\sqrt{138}};\ -\frac{13}{\sqrt{138}}\right)$. **4.** 1) $(0;\ 0),$ $(7;\ 7)$; 2) $(0;\ 0),\ (8;\ 8)$. **5.** 1) $(1;\ -6)$; 2) $(2;\ -3)$. **6.** 1) $(2;\ 4),\ (-2;\ -4)$; 2) $(4;\ 2),\ (-4;\ -2)$. **7.** 1) $\left(\frac{1}{2};\ -3\right),\ (2;\ -4),\ \left(\frac{3}{2};\ -5\right)$; 2) $(3;\ -3),$ $(2;\ -4),\ (0;\ -2)$. **8.** 1) $(\sqrt{2};\ 3),\ (-\sqrt{3};\ 2)$; 2) $(\sqrt{3};\ -1),\ (-\sqrt{3};\ -1)$. **9.** 1) $\left(-2;\ \frac{1}{4}\right)$; 2) $\left(-2;\ \frac{1}{4}\right)$. **10.** 1) $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{4}{9};\ \frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{12}{35};\ \frac{8}{35}\right),$ $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. **11.** 1) $(3;\ 2;\ -1)$; 2) $(2;\ -1;\ 3)$. **12.** 1) $\left(-1;\ \frac{5}{18};\ \frac{7}{6}\right),$ $\left(1;\ -\frac{5}{18};\ -\frac{7}{6}\right)$; 2) $\left(\frac{5}{6};\ \frac{7}{6};\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{5}{6};\ -\frac{7}{6};\ \frac{1}{2}\right)$.

13. 1) $\left(-\sqrt[3]{9};\ -3\sqrt[3]{3};\ -2\right)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}};\ -\sqrt[3]{\frac{9}{2}};\ -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$;
2) $\left(-2\sqrt[3]{4};\ -\sqrt[3]{\frac{9}{2}};\ -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}};\ -\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\ \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$.
14. 1) $(0;\ 0;\ 0)$, $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2};\ -1\right)$, $\left(-\frac{5}{6};\ -\frac{1}{6};\ -\frac{1}{2}\right)$; 2) $(0;\ 0;\ 0)$, $(4;\ 12;\ -4)$, $(1;\ 6;\ -4)$. **15.** 1) $\left(\frac{1}{2};\ 2;\ 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -2;\ -1\right)$, $(1;\ 1;\ -1)$, $(-1;\ -1;\ 1)$, $\left(\frac{1}{2};\ -1;\ -2\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 2\right)$; 2) $\left(1;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$,$\left(-1;\ -1;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ -1;\ 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 2;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -2;\ \frac{1}{2}\right)$.

Глава IV

§ 1. 6. 1) Нет; 2) да.

§ 2. 1. 1) Является; 2) не является. **2.** 1) Не является; 2) является. **3.** 1) Является; 2) не является. **4.** 1) $-2{,}7$; 2) $0{,}1$. **5.** 1) 1; 2) 0. **6.** 1) $S=8+4\sqrt{3}$; 2) $S=-3\sqrt{3}$. **7.** 1) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$; 2) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3}{2\sqrt{3}}$. **8.** 1) 2 случая: $b_1=\frac{4-\sqrt{2}}{7}$, $b_2=\frac{2\sqrt{2}-1}{14}$ или $b_1=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$, $b_2=\frac{1+2\sqrt{2}}{14}$; 2) 2 случая: $b_1=\frac{3}{13}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $b_2=\frac{3}{13}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\right)$ или $b_1=\frac{3}{13}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $b_2=-\frac{3}{13}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\right)$.
9. 1) $\frac{16}{15}$; 2) $\frac{81}{65}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 18. **10.** 1) 24; 2) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

§ 3. 1. 1) 3; 2) 13. **2.** 1) 4; 2) 17. **3.** 1) При $x\geqslant 1$, $x\leqslant 0$; 2) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 0$. **4.** 1) $x\leqslant -1$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $-1\leqslant x\leqslant 0$; $x\geqslant 1$. **5.** 1) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 7$; 2) $x\leqslant 5$, $x\geqslant 8$. **6.** 1) $3(x-2)^2\sqrt{2(x-2)}$; 2) $0{,}5|x-3|\sqrt{5(x-3)}$. **7.** 1) $2(x-2)\sqrt[3]{x(x-2)}$; 2) $\frac{2}{3}(x-3)\sqrt[3]{x-3}$. **8.** 1) $\sqrt{\frac{3(y-x)}{y+x}}$; 2) $\sqrt{\frac{5(x-y)}{x+y}}$. **9.** 1) $\sqrt{\frac{x}{x+y}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$. **10.** 1) $\sqrt[3]{5a^2bc^n}$; 2) $\sqrt[4]{3x^{-1}yz^5}$. **11.** 1) 1; 2) 5. **12.** 1) 1; 2) 10. **13.** 1) $\sqrt[3]{6}-1$; 2) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$. **14.** 1) Да; 2) да. **15.** 1) $\frac{(m+n)(\sqrt[3]{x}-1)}{x-1}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$. **16.** 1) $\frac{(a-1)(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+2})}{-3}$; 2) $1{,}5a(\sqrt{b+2}-\sqrt{1-b})$. **17.** 1) $z\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)$; 2) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$. **18.** 1) Является, $a=-\sqrt{2}$; 2) является, $a=-\sqrt{2}$. **19.** 1) Является, $a=-\sqrt[3]{6}$; 2) является, $a=-\sqrt[3]{7}$. **20.** 1) Является, $a=-\sqrt{2\sqrt{3}-2}$; 2) является, $a=-\sqrt{2}$.

§ **4.** **1.** 1) $a^{\frac{1}{6}}$; 2) $a^{\frac{3}{4}}$. **2.** 1) $a^{-\frac{3}{8}}$; 2) $a^{\frac{7}{12}}$. **3.** 1) $a^{-\frac{1}{30}}$; 2) $a^{\frac{9}{14}}$. **4.** 1) $3b^{\frac{1}{12}}$; 2) 8. **5.** 1) $a^{-0,1}$; 2) 1. **6.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) 2,5. **7.** 1) 15; 2) 28. **8.** 1) $0{,}2a^{-0,2}$; 2) $(ax)^{0,3}$. **9.** 1) 2; 2) $2x^{1,2}$. **10.** 1) $2ab$; 12; 2) $b^{0,5}$; $\frac{5}{3}$. **11.** 1) $a^{\frac{2}{3}}$; 0,5; 2) ab; 12.

12. 1) $\begin{cases} c^{-1} \text{ при } 0<c<1, \\ c \text{ при } c\geqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\frac{2a}{b} \text{ при } |a|\geqslant|b|, \\ -\frac{2b}{a} \text{ при } |a|<|b|, \end{cases}$

из условия задания следует, что a и b должны иметь одинаковые знаки, причем $a\neq 0$, $b\neq 0$.

13. 1) $\begin{cases} \sqrt{2} \text{ при } \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1, \\ \sqrt{4a-2} \text{ при } a>1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2|b| \text{ при } b^2\leqslant a\leqslant 2b^2, \\ 2\sqrt{a-b^2} \text{ при } a>2b^2. \end{cases}$

Глава V

§ **2.** **1.** 1), 2) Не является; 3)—8) является. **2.** 1) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; 3) $y=-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $x>0$, $y<0$; 4) $y=-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$, $x>0$, $y<0$; 5) $y=(-x)^{\frac{3}{2}}$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$; 6) $y=(-x)^{\frac{2}{3}}$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$; 7) $y=x^{-\frac{2}{5}}$, $x>0$, $y>0$; 8) $y=x^{-\frac{3}{4}}$, $x>0$, $y>0$. **3.** 1) Убывает при $x\leqslant 1$, возрастает при $x\geqslant 3$; 2) убывает при $x\leqslant 1$, возрастает при $x\geqslant 5$; 3) возрастает при $1\leqslant x\leqslant 1{,}5$, убывает при $1{,}5\leqslant x\leqslant 2$; 4) возрастает при $2\leqslant x\leqslant 2{,}5$, убывает при $2{,}5\leqslant x\leqslant 3$; 5) убывает при $-2\leqslant x\leqslant -0{,}75$, возрастает при $-0{,}75\leqslant x\leqslant 0{,}5$; 6) убывает при $-0{,}5\leqslant x\leqslant 1{,}25$, возрастает при $1{,}25\leqslant x\leqslant 3$.

§ **3.** **1.** 1) $y=2$, $x=-3$; 2) $y=3$, $x=-4$; 3) $y=-3$, $x=4$; 4) $y=-2$, $x=3$. **3.** 1) $-7\leqslant y<3$, $y=-\frac{1}{3}+\frac{10}{3(3-x)}$; 2) $-5\leqslant y<2$, $y=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4(2-x)}$; 3) $y<-1$, $y=\frac{3}{2}+\frac{3}{x+1}$; 4) $y<-2$, $y=\frac{4}{3}+\frac{8}{3(x+2)}$.

§ **4.** **1.** 1)—4) Уравнения равносильны; 5), 6) второе; 7), 8) первое. **2.** 1) $x=1$; 2) нет корней. **3.** 1) $x=3$; 2) $x=6$; 3) $x=5$; 4) $x=4$. **4.** 1) $x>2$, $-5{,}5<x<-1$; 2) $x<-3$, $4<x<39$; 3) $0<x<1$, $x<0$; 4) $x>1$, $-1<x<0$. **5.** 1) Равносильны (второе уравнение второй системы — почленная сумма уравнений первой системы, разделенная на 4); 2)—4) равносильны. **6.** 1) $x_1=9$, $x_2=-1$; 2) $x_1=4$, $x_2=-0{,}4$; 3) $x_1=-4$, $x_2=-\frac{2}{3}$; 4) $x_1=-2$, $x_2=8$; 5) $x_1=-9$, $x_2=3$, $x_3=7$; 6) нет корней. **7.** 1) Если $a<-1$ и $a>1$, то $x=4$; если $a=-1$, то $x\geqslant 4$; если $-1<a<1$, то $x_1=4$,

$x_2=\frac{4a-8}{a+1}$; если $a=1$, то $-2\leqslant x\leqslant 4$; 2) если $a=1$, то $-1\leqslant x\leqslant 2$; если $a>1$, то $x=2$; если $a<-1$, то $x=2$; если $-1<a<1$, то $x_1=2$, $x_2=\frac{2a-4}{a+1}$; если $a=-1$, то $x\geqslant 2$.

§ **5. 1.** 1) $x=3$; 2) $x=3$. **2.** 1) $x=5$; 2) $x=2\frac{9}{32}$. **3.** 1) $x_1=4$, $x_2=-9$; 2) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$; 3) $x_1=-2$, $x_2=3$; 4) $x_1=1$, $x_2=4$. **4.** 1) $x_1=-\frac{8}{3}$, $x_2=1$; 2) $x_1=-\frac{8}{3}$, $x_2=1$. **5.** 1) $-6\leqslant x\leqslant -3$; 2) $x\geqslant 13$. **6.** 1) $x\leqslant -1$, $x=\frac{1}{5}$; 2) $x\leqslant -\frac{5}{4}$, $x=-\frac{1}{4}$. **7.** 1) $x=3$; 2) $x=3$; 3) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x=1$. **8.** 1) $-10\leqslant a\leqslant 8$; 2) $0<a\leqslant 3$. **9.** 1) Если $a<-1$, $0\leqslant a<1$, то корней нет; если $-1\leqslant a<0$, $a\geqslant 1$, то $x=\frac{a^2+1}{2a}$; 2) если $a<0$, $\frac{1}{2}\leqslant a<1$, то корней нет; если $0\leqslant a<\frac{1}{2}$, $a\geqslant 1$, то $x=\frac{a^2}{2a-1}$; 3) если $a\leqslant -4$, то $x=\frac{a^2+24a+16}{16}$; если $a>-4$, то корней нет; 4) если $a<2$, то корней нет; если $a\geqslant 2$, то $x=0{,}5a+\sqrt{2(a-2)}$. **10.** 1) (2; 3); 2) (3; 4); 3) (−4; 2); 4) (5; −1).

§ **6. 1.** 1) $0\leqslant x<5$; 2) $0\leqslant x\leqslant 3$. **2.** 1) $-5\leqslant x\leqslant -3$, $x\geqslant 3$; 2) $x\leqslant -2$, $2\leqslant x\leqslant 3$; 3) $-1\leqslant x<3$; 4) $x>3$. **3.** 1) $-2\frac{4}{11}<x\leqslant -2$, $x\geqslant 5$; 2) $x\leqslant -4$, $x>2$; 3) $1<x\leqslant 4$; 4) $2\leqslant x\leqslant 3$; 5) $-2\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}$, $x=2$; 6) $x=-1$, $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 4$; 7) $x\leqslant -1$, $x\geqslant 9$; 8) $x\leqslant -8$, $x\geqslant 2$. **4.** 1) $1\leqslant x\leqslant 2$; 2) $x\geqslant 6$; 3) $x\leqslant -3$, $3\leqslant x\leqslant 4$; 4) $8\leqslant x\leqslant 9$. **5.** 1) $-1\leqslant x\leqslant 1$; 2) $x\leqslant 4$. **6.** 1) Если $a\leqslant 0$, то $x\geqslant -1$; если $a>0$, то $-1\leqslant x\leqslant \frac{1}{a^2}-1$; 2) при $a\leqslant 0$ решений нет; если $a>0$, то $x\leqslant 2-\frac{1}{a^2}$; 3) если $a\leqslant 0$, то $x\geqslant -a$; если $a>0$, то $-a\leqslant x<\frac{1}{a^2}-a$; 4) если $a\leqslant 0$, то $x\geqslant a$; если $a>0$, то $a\leqslant x<a+\frac{25}{a^2}$.

Глава VI

§ **1. 1.** 1) $y=2^x$; 2) $y=3^x$; 3) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; 4) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$; 5) $y=0{,}5^x$; 6) $y=2^x$. **4.** 1) $a>b$; 2) $a<b$; 3) $a<b$; 4) $a<b$; 5) $a<b$; 6) $a>b$; 7) $a<b$; 8) $a>b$. **5.** 1) $3^{1+\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{6}}$, $3^{2,5}$; 2) $0{,}3^{2-\sqrt{3}}$, $0{,}3^{\sqrt{0,1}}$, 1; 3) $3^{-1,6}$, $(\sqrt{3})^{-3,1}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sqrt[3]{0{,}1}$, $0{,}1^{0,3}$. **6.** 1) $0<a<1$; 2) $a>1$; 3) $a>1$; 4) $0<a<1$. **7.** 1) $x\leqslant 7$; $y\geqslant 1$; 2) $x\geqslant -7$; $0<y\leqslant 1$; 3) $x\leqslant -\sqrt{5}$; $x\geqslant\sqrt{5}$; $0<y\leqslant 1$; 4) $-2\leqslant x\leqslant 2$; $1\leqslant y\leqslant 9$; 5) $0\leqslant x\leqslant 2$; $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$; 6) $x\leqslant 0$; $x\geqslant 5$; $0<y\leqslant 1$.

§ 2. 1. 1) $x_1=-1$, $x_2=3$; 2) $x_1=-2$, $x_2=-4$; 3) $x_1=1+\sqrt{7}$, $x_2=1-\sqrt{7}$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$. 2. 1) $x=1$; 2) $x=0$; 3) $x=1{,}5$; 4) $x=0{,}5$. 3. 1) $x=0$; 2) $x=0$; 3) $x_1=-1$, $x_2=1$; 4) $x_1=-2$, $x_2=2$. 4. 1) $x=-\frac{1}{4}$; 2) $x=7$; 3) $x=1{,}5$; 4) $x_1=1$, $x_2=2$. 5. 1) $x=1$; 2) $x=0$; 3) $x=1$; 4) $x=-1$. 6. 1) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$. 7. 1) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=2$, $x_3=4$; 2) $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=1$, $x_4=3$. 8. 1) $x_1=-2$, $x_2=3$. Указание. Разделить обе части уравнения на 6^{2x+6}; 2) $x_1=-1$, $x_2=4$. Указание. Разделить обе части уравнения на 5^{6x+6}. 9. 1) При $a>0$ один корень, при $a\leqslant 0$ корней нет; 2) при $a>0$ один корень, при $a\leqslant 0$ корней нет; 3) при $a<0$ корней нет, при $a=0$ один корень, при $a>0$ два корня; 4) при $a<0$ корней нет, при $a=0$ один корень, при $a>0$ два корня. 10. 1) $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $k<5$, $k>11$.

§ 3. 1. 1) $x<-2$, $x>2$; 2) $x<-3$, $x>3$; 3) $-2<x<2$; 4) $-0{,}7<x<0{,}7$. 2. 1) $x\leqslant-\frac{1}{2}$; 2) $x\leqslant\frac{1}{2}$; 3) $x<0$, $x>2$; 4) $-2<x<-1$. 3. 1) $-1\leqslant x\leqslant 0$; 2) $-1\leqslant x\leqslant 3$; 3) $-1\leqslant x\leqslant 0$; 4) $-1\leqslant x\leqslant 0$; 5) $x\leqslant 0$; 6) $x=0$; 7) $x\leqslant 0$, $x>1$; 8) $x<-\sqrt{5}$, $-2\leqslant x<\sqrt{5}$; 9) $-1\leqslant x<0$, $x>3$; 10) $x\geqslant 2$. 4. 1) $-1\leqslant x\leqslant 3$; 2) $-1\leqslant x\leqslant 3$. 5. 1) $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $0\leqslant x\leqslant 4$. 6. 1) $x\geqslant 2$; 2) $x\leqslant -4$. 7. 1) $x\geqslant 1$; 2) $x<-1$. 8. 1) $0\leqslant x\leqslant 2$. Указание. Сделать замены $1=0{,}5^x\cdot 2^x$ и $0{,}3=0{,}6\cdot 0{,}5$; 2) $-3\leqslant x\leqslant -1$. Указание. Представить $5^{x+1}=0{,}5^{x+1}\cdot 10^{x+1}$. 9. 1) При $a\leqslant 0$; 2) при $a\leqslant 0$; 3) при $a\geqslant 0$; 4) при $a\geqslant 0$. 10. 1) $m>1$; 2) $n\geqslant 2$.

§ 4. 1. 1) (2; 1); 2) (1; 2); 3) (1; 3); 4) (2; 2); 5) (4; 1); 6) (4; 1); 7) (2; 1), $\left(-1;\ \frac{23}{2}\right)$; 8) (2; 2), $\left(-1;\ \frac{58}{3}\right)$. 2. 1) (1; 1), $\left(2;\ \frac{1}{8}\right)$; 2) (1; 1), $\left(\frac{2}{3};\ \frac{9}{4}\right)$; 3) (1; 1), $\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$; 4) (1; 1). 3. 1) (2; −1), $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right)$. 4. 1) (2; 2), (2; −2); 2) (3; 3), (3; −3).

Глава VII

§ 1. 1. 1) −2; 2) −2; 3) −1; 4) −1. 2. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{4}$. 3. 1) 27; 2) 0,25. 4. 1) 5; 2) $3\frac{2}{3}$. 5. 1) $-2<x<0$; $0<x<2$; 2) $-3<x<0$; $0<x<3$; 3) $x<-5$; $5<x<6$; $x>6$; 4) $x<-5$; $-5<x<-4$; $x>4$. 6. 1) $x_1=2$, $x_2=\log_3 2-1$; 2) $x=4+\log_{0,2}2$. 7. 1) $x=0$; 2) $x_1=0$, $x_2=-1$.

§ 2. 1. 1) $x=\frac{a^2\sqrt{b}}{a^2-b^2}$; 2) $x=\frac{\sqrt{a^3b^3}}{(a+b)^2}$. 3. 1) −3; 2) −1; 3) 1; 4) 1. 4. 1) $-\log_3 5$; 2) $\frac{1}{2}\log_3 7$; 3) $2\log_3 4$; 4) $-2\log_3 2$. 5. 1) $x=5$;

2) $x=\frac{1}{12}$. **6.** 1) -8; 2) $\frac{2}{9}$; 3) -6; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-11\frac{1}{2}\log_5 2$; 6) $8\log_2 3$. **7.** 1) 1000; 2) 0,1; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{2}{3}$. **8.** 1) 5; 2) 7. **9.** 1) 2,903; 2) 2,602; 3) $-0,796$; 4) $-1,097$. **10.** 1) $x=\sqrt{2}$; 2) $x=\sqrt{3}$; 3) $x=\sqrt{3}$; 4) $x=\sqrt{5}$.

§ 3. **1.** 1) $x=27$; 2) $x=16$. **2.** 1) $\frac{a+b}{1-b}$; 2) $\frac{1+a}{b-1}$. **3.** 1) $\frac{4(3-a)}{3+a}$; 2) $\frac{3(2-a)}{4-a}$. **4.** 1) $\lg x=\frac{13}{24}\lg a+\frac{4}{3}\lg b$; 2) $\lg x=\frac{2}{3}\lg a+\frac{7}{24}\lg b$; 3) $\lg x=\frac{4}{3}\lg 2+\frac{13}{24}\lg 3$; 4) $\lg x=\frac{7}{24}\lg 5+\frac{2}{3}\lg 3$. **5.** 1) $\frac{7}{8}-\ln 10$; 2) $\frac{11}{24}\ln 5+1$.

§ 4. **1.** 1) $x>2$; 2) $x>-1$. **2.** 1) $x<-2$, $-1<x<0$, $x>0$; 2) $-2<x<0$, $0<x<2$; 3) $2<x<3$, $x>3$; 4) $x<-3$, $-3<x<1$; 5) $-1<x<0,5$; 6) $-\frac{1}{2}<x<3$. **3.** 1) $x>2\sqrt{2}$; 2) $x>2\sqrt{3}$; 3) $0<x<1$, $1<x<5$; 4) $0<x<1$, $1<x<6$. **5.** 1) $x_{1,2}=\pm 1$; 2) $x=1$; 3) $x=3$; 4) $x=3$. **6.** $x_{1,2}=\pm 1$; 2) $x_{1,2}=\pm 5$. **7.** 1) $x_1=2$, $x_2\approx 0,1$; 2) $x_1=1$, $x_2\approx -0,9$. **8.** 1) $x=2$; 2) $x=2$.

§ 5. **1.** 1) $x=4$; 2) $x=2$. **2.** 1) Нет корней; 2) нет корней. **3.** 1) $x=2$; 2) $x=-2$. **4.** 1) $x_1=2$, $x_2=3$; 2) $x=4$. **5.** 1) $x=4$; 2) $x=3$. **6.** 1) $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=9$; 2) $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=4$; 3) $x_1=0,1$, $x_2=100$; 4) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=27$. **7.** 1) $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=25$; 2) $x_1=0,001$, $x_2=1\,000\,000$. **8.** 1) $x_1=10$, $x_2=\sqrt{10}$; 2) $x_1=100$, $x_2=10\sqrt{10}$. **9.** 1) $x=10$; 2) $x=10$. **10.** 1) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=9$; 2) $x_1=\frac{1}{125}$, $x_2=25$. **11.** 1) $x_1=\frac{1}{625}$, $x_2=5$; 2) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=81$. **12.** 1) $x=20$; 2) $x=12$. **13.** 1) $x_{1,2}=\pm 0,5$; 2) $x_{1,2}=\pm 0,5$. **14.** 1) При $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 1$ уравнение не имеет корней; если $0<a<1$, то $x=\frac{2}{1-a}$; 2) при $a\leqslant 1$ уравнение не имеет корней; если $a>1$, то $x=\frac{6}{a-1}$; 3) при $a\leqslant 0$, $a=1$ и $a>4$ уравнение не имеет корней; если $0<a<1$ и $1<a\leqslant 4$, то $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-a}$; 4) при $a\leqslant 0$, $a=1$ и $a>3$ уравнение не имеет корней; если $0<a<1$ и $1<a\leqslant 3$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-a^2}$. **15.** 1) При $a\leqslant -\frac{1}{3}$ уравнение не имеет корней; если $a>-\frac{1}{3}$, то $x=\log_4(3a+1)-\log_4(a^2-2a+2)$; 2) при $a\leqslant\frac{1}{2}$ уравнение не имеет корней; если $a>\frac{1}{2}$, то $x=2\log_9 a-\log_9(2a-1)$.

16. 1) $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{10}}{5}$; 2) $x=\frac{\sqrt{33}}{6}$, $y=\frac{4\sqrt{33}}{33}$.

§ 6. **1.** 1) $-1,5<x<0$; $x>1$; 2) $x<-1$; $0<x<2,5$. **2.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{2}{3}\leqslant x<0$; $0<x\leqslant\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{3}\leqslant x<-\frac{1}{6}$;

$\frac{1}{6}<x\leqslant\frac{1}{3}$; 4) $x<-\frac{\sqrt{13}}{6}$; $x>\frac{\sqrt{13}}{6}$. **3.** 1) $-1\leqslant x<1$; $6<x\leqslant 8$; 2) $2<x\leqslant 4$; $5\leqslant x<7$. **4.** 1) $-2<x\leqslant 0$; 2) $-1<x\leqslant -0{,}6$; 3) $-2<x\leqslant -1$; $x\geqslant 10$; 4) $x\leqslant -3$; $1\leqslant x<4$. **5.** 1) $\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant x<1$; $x\geqslant 5$; 2) $0{,}25\leqslant x<1$; $x\geqslant 2$. **6.** 1) $0{,}1<x<10$; 2) $0<x<0{,}01$; $x=1$; $x>100$. **7.** 1) $-8\leqslant x\leqslant\frac{8}{9}$; $1\frac{1}{9}\leqslant x\leqslant 10$; 2) $x\leqslant -3$; $-1{,}5\leqslant x<-1$; $-1<x\leqslant -0{,}5$; $x\geqslant 1$. **8.** 1) $-3<x\leqslant -2$; $2\leqslant x<3$; 2) $-2<x\leqslant -1$; $1\leqslant x<2$; 3) $-3<x\leqslant -2$; $2\leqslant x<3$; 4) $-1\leqslant x<\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$; 5) $-1\leqslant x<0$; $x>1$; 6) $x<-1$; $0<x\leqslant 2$. **9.** 1) $0<x<\frac{1}{2}$; $1<x<2$; $3<x<6$; 2) $-3<x<-2$; $-1<x<0$; $1<x<3$; 3) $\log_9 7<x<1$; $x>1$; 4) $\log_4 7<x\leqslant\log_2 3$.

10. 1) $x\leqslant 1$; $x\geqslant 5$; 2) $x\leqslant -\frac{2}{3}$; $x\geqslant\frac{1}{2}$; 3) $x\geqslant\frac{1}{2}$; 4) $x\geqslant\sqrt{5}$; 5) $1\leqslant x<2$; $3<x\leqslant 4$; 6) $-1\leqslant x<1$; $3<x\leqslant 5$. **11.** 1) Если $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 1$, то решений нет; если $0<a<1$, то $3<x<\frac{3-a}{1-a}$; 2) если $a\leqslant 1$, то решений нет; если $a>1$, то $\frac{a-7}{a-1}<x<1$; 3) при $a\leqslant 1$ решений нет; если $1<a<1{,}5$, то $x<-\sqrt{\frac{3-a}{a-1}}$ и $x>\sqrt{\frac{3-a}{a-1}}$; если $a\geqslant 1{,}5$, то x — любое число; 4) при $a=0$ и $a\geqslant 3$ решений нет; если $a<0$, то $-\frac{\sqrt{(1{,}5-a)(4{,}5-a)}}{3}<x<\frac{\sqrt{(1{,}5-a)(4{,}5-a)}}{3}$; если $0<a\leqslant 1{,}5$, то $x<-\frac{\sqrt{(1{,}5-a)(4{,}5-a)}}{3}$ и $x>\frac{\sqrt{(1{,}5-a)(4{,}5-a)}}{3}$; если $1{,}5<a<3$, то x — любое число; 5) если $a<2$, то $x>\log_4\frac{2-a}{3-a}$; если $2\leqslant a\leqslant 3$, то x — любое число; если $a>3$, то $x<\log_4\frac{a-2}{a-3}$; 6) если $a<1$, то $x>\log_4\frac{1-a}{5-a}$; если $1\leqslant a\leqslant 5$, то x — любое число; если $a>5$, то $x>\log_4\frac{a-1}{a-5}$.

Глава VIII

§ 1. 1. 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{107\pi}{450}$. **2.** 1) $\frac{41\pi}{720}$; 2) $\frac{149\pi}{2160}$. **3.** 1) $\frac{431\pi}{5400}$; 2) $\frac{427\pi}{3600}$. **4.** 1) $18°$; 2) $1{,}8°$. **5.** 1) $612°$; 2) $864°$. **6.** 1) $\approx 1{,}15°$; 2) $\approx 2{,}87°$. **7.** 1) $\frac{7\pi}{5}$ см; 2) $\frac{4\pi}{3}$ см. **8.** 1) а) $\frac{17\pi}{5}$ см; б) $\frac{27\pi}{2}$ см^2; 2) а) $\frac{7\pi}{3}$ см; б) $\frac{13\pi}{45}$ см^2. **9.** 1) 0,3718; 1,3657; 3,4607; 2) 0,4835; 1,4401; 3,5108. **10.** 1) $25°15'$, $74°29'$, $114°33'$; 2) $27°56'$, $85°57'$, $126°3'$.

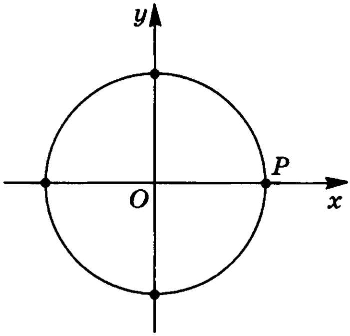

Рис. 7

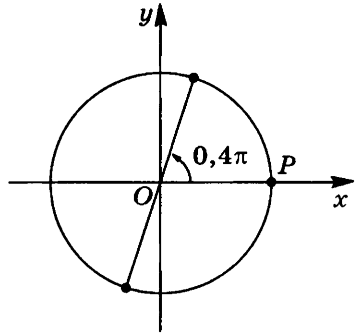

Рис. 8

§ 2. 8. 1) III и IV; 2) I и IV. 9. 1) I и IV; 2) I и IV. 10. 1) II и III; 2) I и II. 11. 1) и 2) Рис. 7, $\gamma = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. 12. 1) Рис. 8, $\gamma = 0{,}4\pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) рис. 9, $\gamma = 0{,}2\pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. 13. 1) Рис. 10, $\gamma = \pm 0{,}1\pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) рис. 11, $\gamma = \pm 0{,}4\pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. 14. 1) $-\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{8\pi}{7}$. 15. 1) $\frac{7\pi}{32}$; 2) $\frac{15\pi}{32}$. 16. 1) $\frac{5\pi}{12}$; 2) $\frac{13\pi}{60}$. 17. 1) $6\frac{2}{3}$ с; 2) 20 с. 18. 1) 2760 об/мин; 2) 3600 об/мин.

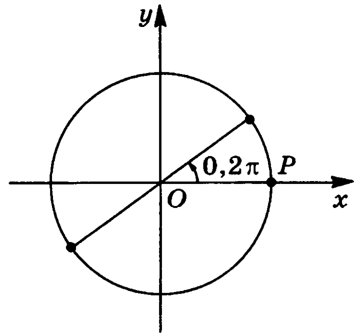

Рис. 9

§ 3. 1. 1) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 1) $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; 2) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

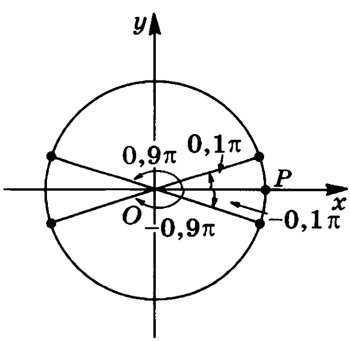

Рис. 10

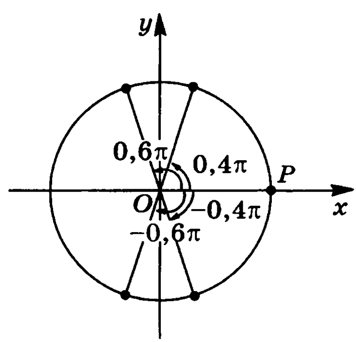

Рис. 11

4. 1) $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\frac{5\pi}{2}=1$, $\cos\frac{5\pi}{2}=0$.

5. 1) $\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** 1) 0, π; 2) $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. **7.** 1) $-\pi$, π; 2) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$. **8.** 1) $\sin\frac{2\pi}{3}>\sin\frac{5\pi}{6}$; 2) $\sin\frac{3\pi}{4}>\sin\frac{5\pi}{8}$. **9.** 1) $\cos\frac{2\pi}{3}>\cos\frac{5\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{3\pi}{4}>\cos\frac{5\pi}{8}$. **12.** 1) 3, 1; 2) $1\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. **13.** 1) 2, -2; 2) 3, -3. **14.** 1) $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **15.** 1) $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **16.** 1) $x=-\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=5\pi+8\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **17.** 1) а) $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$; 2) а) $K\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$.

§ 4. 1. 1) $\pm$, $-$, $\pm$; 2) $\pm$, $+$, $\pm$. **2.** 1) $-$, $\pm$, $\pm$; 2) $+$, $\pm$, $\pm$. **3.** 1) $\pm$, $+$, $\pm$; 2) $\pm$, $-$, $\pm$. **4.** 1) $\sin\frac{\pi}{13}>\sin\frac{25\pi}{13}$; 2) $\cos\frac{7\pi}{18}>\cos\frac{11\pi}{18}$. **5.** 1) $\sin(-1{,}3)<\sin(-3{,}2)$; 2) $\cos(-2{,}5)<\cos(-5{,}5)$. **6.** 1) $\operatorname{tg}585°>\cos 585°$; 2) $\operatorname{ctg}485°<\sin 485°$. **7.** 1) Минус; 2) минус. **8.** 1) Плюс; 2) минус. **9.** 1) $\sin\alpha<0$; 2) $\sin\alpha>0$. **10.** 1) $\cos\alpha>0$; 2) $\cos\alpha>0$. **11.** 1) Не может; 2) может.

§ 5. 1. 1) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sec\alpha=-\sqrt{3}$; 2) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec}\alpha=-\frac{13}{5}$. **2.** 1) $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24}{7}$; 2) $\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}$. **3.** 1) $2\pi n\leqslant x\leqslant\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; **4.** 1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x\neq\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **5.** 1) Нет; 2) нет. **6.** 1) $\frac{6a+1}{3-4a}$; 2) $\frac{3+7a}{4a-3}$. **7.** 1) $\frac{505}{262}$; 2) $\frac{25}{22}$. **8.** 1) $\frac{303}{901}$; 2) $\frac{15}{9}$. **9.** 1) $-0{,}944$; 2) $0{,}296$. **10.** 1) 6; 2) 11. **11.** 1) $\approx 0{,}9$; 2) $\approx 0{,}7$. **12.** 1) $\frac{5a-a^5}{4}$; 2) $\frac{5b-b^5}{4}$.

§ 6. 2. 1) $2\pi n-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $2\pi n-\pi<x<2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\pi+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{2}+\pi n<x<2\pi+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

2) $\pi+2\pi n<x<2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 6. 1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x\neq\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 7. 1) $x\neq\frac{\pi}{2}(n+1)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x\neq\frac{\pi}{2}(n+1)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 8. 1) $x\neq\frac{\pi}{2}(n+1)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x\neq\frac{\pi}{2}(n+1)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

§ 7. 1. 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)<-\cos\frac{2\pi}{3}$; 2) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)>\cos\frac{5\pi}{4}$. 2. 1) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}>\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)<\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$. 3. 1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)>$ $>\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)<\cos\left(-\frac{13\pi}{7}\right)$. 4. 1) $\pm\sqrt{2-a^2}$; 2) $\pm\sqrt{2-a^2}$.

§ 8. 1. 1) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$, $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{56}{65}$; 2) $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{33}{65}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-3\frac{15}{16}$. 2. 1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{40}{73}$, $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=-\frac{23}{80}$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=-2$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=5{,}5$. 9. 1) $x=\frac{2\pi k}{a+1}$, $a\neq-1$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $x\in\boldsymbol{R}$, $a=-1$; 2) $x=\frac{\pi k}{a+1}$, $a\neq-1$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $x\in\boldsymbol{R}$, $a=-1$.

§ 9. 1. 1) $\sin2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}2\alpha=-2\sqrt{2}$; 2) $\cos2\alpha=-\frac{7}{25}$, $\operatorname{ctg}2\alpha=-\frac{7}{24}$. 2. 1) $\sin4\alpha=0{,}96$; 2) $\cos4\alpha=-\frac{527}{625}$. 3. 1) $\sin3\alpha=$ $=\frac{5\sqrt{3}}{9}$; 2) $\cos3\alpha=-\frac{13\sqrt{3}}{9}$. 4. 1) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24}{7}$; 2) $\sin\alpha=\frac{24}{25}$. 5. 1) Нет; 2) нет. 6. 1) Нет; 2) нет. 12. 1) $\frac{3}{16}$; 2) 3. 13. 1) $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

§ 10. 1. 1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$. 2. 1) $2\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)$; 2) $2\cos\frac{x}{2}\left(5\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$. 3. 1) -3; 2) -3. 4. 1) -3; 2) -2. 5. 1) $\sqrt{0{,}8}$; 2) $-\sqrt{0{,}1}$. 6. 1) $\sqrt{0{,}2}$; 2) $\sqrt{0{,}9}$.

§ 11. 1. 1) $\sin40^\circ>\sin160^\circ$; 2) $\cos70^\circ>\cos280^\circ$. 2. 1) $\cos6{,}4\pi<0{,}5$; 2) $\sin3{,}1\pi>-0{,}5$. 3. 1) $\cos0{,}9\pi=\sin252^\circ$; 2) $\cos6{,}4\pi<\sin(-252^\circ)$. 4. 1) $\operatorname{tg}3{,}7\pi=\operatorname{ctg}3{,}8\pi$; 2) $\operatorname{tg}765^\circ<$ $<\cos348^\circ$. 5. 1) 0; 2) 0. 6. 1) 0; 2) 0. 7. 1) -1; 2) -1. 8. 1) $\frac{1}{\cos2x}$; $\sqrt{2}$; 2) $3\operatorname{tg}2x$; $-\sqrt{3}$. 9. 1) $2-\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 10. 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. 11. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{9}{4}$.

§ 12. 1. 1) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 6. 1) $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $-8\cos2\alpha$. 7. 1) $\sin2\alpha\sin2\beta$; 2) $\sin^2(\alpha-\beta)$.

§ 13. 1. 1) $\sin 10° + \sin 14° - \sqrt{3} \sin 12°$; 2) $\cos 5° + \cos 15° + \cos 25°$. 2. 1) $\cos 1° + \cos 3° + \cos 5° + \cos 7° + \cos 9° + \cos 11° + \cos 13° + \cos 15°$; 2) $\cos 5° - \sqrt{3} \cos 15° + \cos 35°$. 4. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. 5. 1) $-0{,}5$; 2) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$. 6. 1) $8 \cos 8\alpha \cos^3 \alpha$; 2) $2 \sin 5\alpha \sin 3\alpha \cos \alpha$. 7. 1) $\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}$. 8. 1) $\frac{1}{2}(\cos(m-n)+1)$; $\frac{1}{2}(\cos(m-n)-1)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos(m-n)+1)$; $\frac{1}{2}(\cos(m-n)-1)$.

Глава IX

§ 1. 1. 1) $-\frac{119}{169}$; 2) $\frac{7}{25}$. 2. 1) $\frac{7}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$. 3. 1) $\frac{16}{65}$; 2) $\frac{56}{65}$. 4. 1) $\frac{11}{18}$; 2) $\frac{13}{18}$. 5. 1) $2\pi - 4$; 2) $4\pi - 10$. 6. 1) $9 - \frac{5}{2}\pi$; 2) $\frac{9}{2}\pi - 13$. 7. 1) $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \pm \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 8. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 9. 1) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 10. 1) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 2. 1. 1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{24}{25}$. 2. 1) $\frac{120}{169}$; 2) $-\frac{120}{169}$. 3. 1) $\frac{4(1+3\sqrt{3})}{35}$; 2) $\frac{3\sqrt{15}-7}{16}$. 4. 1) $\frac{8\sqrt{2}+3}{15}$; 2) $\frac{8-3\sqrt{5}}{15}$. 5. 1) $\frac{3}{8}\pi$; 2) $-\frac{4}{9}\pi$. 6. 1) $-\frac{3}{8}\pi$; 2) $-\frac{\pi}{7}$. 7. 1) $3\pi - 10$; 2) $11 - 4\pi$. 8. 1) $\frac{5}{2}\pi - 8$; 2) $11 - \frac{7}{2}\pi$. 11. 1) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 12. 1) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = (-1)^{n-1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 13. 1) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 14. 1) $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 15. 1) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 3. 1. 1) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $\frac{5}{13}$. 2. 1) $\frac{11}{13}$; 2) $\frac{7}{11}$. 3. 1) $\sqrt{\frac{11}{3}}$; 2) $\frac{24}{7}$. 4. 1) $\frac{33}{65}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{85}}$. 5. 1) $-\frac{3}{7}\pi$; 2) $-\frac{4}{9}\pi$. 6. 1) $13 - 4\pi$; 2) $7 - 2\pi$. 10. 1) $x = \pi n$, $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 11. 1) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. 12. 1) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 4. 1. 1) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 2. 1) $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 3. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 4. 1) $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 5. 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 6. 1) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 7. 1) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(2-\sqrt{3})+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos(3-\sqrt{8})+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 8. 1) $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 9. 1) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
10. 1) $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
11. 1) $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
12. 1) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 13. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 14. 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 15. 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
16. 1) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
17. 1) $x=\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+(2n+1)\pi$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 18. 1) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=(-1)^n\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
19. 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
20. 1) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

§ 5. 1. 1) $x=\frac{\pi n}{4}$, $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi n}{12}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
2. 1) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 3. 1) $x=\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. 4. 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$;

2) $x=4\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{8}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{8}+$ $+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **9.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **11.** 1) $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(2n+1)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\neq 2+4k$, $n\neq 3+6k$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi n}{6}$, $n\neq 3+6k$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **13.** 1) $x=\frac{\pi}{12}+\pi n$, $x=\frac{13\pi}{24}+\pi n$, $x=\frac{5\pi}{24}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **14.** 1) $x=\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\arcsin\frac{8}{17}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **15.** 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

§ 6. 1. 1) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi k;\ \pi+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{8}+\pi k;\ \pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \pi+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+(-1)^k\operatorname{arctg}2+\frac{\pi k}{2}+\pi n;\ (-1)^k\operatorname{arctg}2+\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

2) $(\pi k;\ \pi n)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$,

$\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

2) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n\right)$,

$\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$,

$\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi k}{2}+2\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $\left(\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. 1) $\left((-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi k}{2};\ (-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\left(-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}+\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $\left((-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi n+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $\left((-1)^k\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)+\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi n\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}+\pi(2k+n);\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2+\pi(2k+n);\ -\operatorname{arctg}2+\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

8. 1) $\left((-1)^k\frac{1}{9}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\pi k;\ (-1)^k\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\pi k+2\pi n\right)$, $\left((-1)^k\frac{1}{21}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi k}{21};\ (-1)^{k+1}\frac{1}{7}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi k}{7}+2\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\left((-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{6}+\frac{\pi k}{2}+2\pi n;\ (-1)^k\frac{1}{10}\arcsin\frac{1}{6}+\pi k\right)$, $\left((-1)^{k+1}\frac{1}{10}\arcsin\frac{3}{20}+\frac{\pi k}{10}+2\pi n;\ (-1)^{k+1}\frac{1}{50}\arcsin\frac{3}{20}+\frac{\pi k}{50}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Содержание

Учебное издание

Шабунин Михаил Иванович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Доброва Ольга Николаевна

Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы

10 класс

Профильный уровень

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *Е. В. Соганова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*
Технические редакторы *Р. С. Еникеева, С. Н. Терехова*
Корректоры *Л. А. Ермолина, И. Н. Панкова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 15.10.10. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 9,47. Тираж 5000 экз. Заказ № 30865.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru